



**Universidade do Estado do Rio de Janeiro**

Centro de Tecnologia e Ciências

Faculdade de Formação de Professores

Luiz Carlos de Andrade

**Aspectos geométricos de alguns símbolos místicos**

São Gonçalo

2018

Luiz Carlos de Andrade

**Aspectos geométricos de alguns símbolos místicos**



Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Orientador: Prof. Dr. Fábio Silva de Souza

Coorientadora: Prof.<sup>a</sup> Dra. Rosa María García Márquez

São Gonçalo

2018

CATALOGAÇÃO NA FONTE  
UERJ / REDE SIRIUS / BIBLIOTECA CTC-A

A553 Andrade, Luiz Carlos de.  
Aspectos geométricos de alguns símbolos místicos / Luiz Carlos de Andrade -  
2018.  
117f. : il.

Orientador: Fábio Silva de Souza.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional –  
PROFMAT) - Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Faculdade de Formação de  
Professores.

1. Geometria - Teses. 2. Geometria - Estudo e ensino - Teses. 3.  
Segmento áureo - Teses. 4. Matemática - História - Teses. I. Souza,  
Fábio Silva de. II. Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Instituto  
de Matemática e Estatística. III. Título.

CDU 514

Patricia Bello Meijinhos CRB-7/ 5217- Bibliotecária responsável pela elaboração da ficha catalográfica

Autorizo, apenas para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta  
dissertação, desde que citada a fonte.

---

Assinatura

---

Data

Luiz Carlos de Andrade

## **Aspectos geométricos de alguns símbolos místicos**

Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Aprovada em 29 de novembro de 2018.

Banca Examinadora:

---

Prof. Dr. Fábio Silva de Souza (Orientador)  
Faculdade de Formação de Professores – UERJ

---

Prof.<sup>a</sup> Dra. Rosa María García Márquez (Coorientadora)  
Faculdade de Formação de Professores – UERJ

---

Prof. Dr. Jorge Corrêa de Araújo  
Faculdade de Formação de Professores – UERJ

---

Prof. Dr. Mitchael Alfonso Plaza Martelo  
Universidade Federal Fluminense

São Gonçalo

2018

## DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho à minha mãe (*in memoriam*), aos meus filhos e à minha esposa que foram a força necessária para alcançar mais este objetivo.

## AGRADECIMENTOS

Agradeço à minha esposa Barbara por ser companheira e incentivadora em todas as etapas do curso.

Agradeço aos meus pais (*in memoriam*), por darem a base necessária para que eu seguisse o caminho do bem em minha vida.

Agradeço aos meus tios Jader (*in memoriam*), Edwiges e Edson e meu primo Jader Jr., pelo apoio durante o início da minha vida acadêmica.

Agradeço aos orientadores Prof. Dr. Fábio e Profa. Dra. Rosa pela paciência, orientação e dedicação, muito importantes para a conclusão do trabalho.

Agradeço aos colegas e professores do PROFMAT-UERJ (FFP) que proporcionaram de maneira conjunta um aprendizado significativo para meu crescimento pessoal e profissional.

Agradeço à CAPES pelo apoio financeiro.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

“As leis da natureza nada mais são que pensamentos matemáticos de Deus”

*Johannes Kepler*

## RESUMO

ANDRADE, L. C. *Aspectos geométricos de alguns símbolos místicos*. 2018. 117 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) – Faculdade de Formação de Professores, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, São Gonçalo, 2018.

Civilizações antigas como os gregos e os egípcios observaram padrões que se repetiam na natureza, essas observações ajudaram a moldar suas crenças influenciando sua arquitetura, estética e arte. No presente trabalho vamos apresentar um pouco da História da Matemática de uma maneira diferente do ensino tradicional, analisando alguns aspectos geométricos de elementos da antiguidade que são cercados de certo misticismo oferecendo um instrumento de pesquisa e estimulando profissionais da educação no interesse de aumentar seus conhecimentos na geometria e interdisciplinaridade. Acreditamos que com a disponibilização deste trabalho possamos contribuir de alguma forma com a construção do conhecimento matemático no ensino básico.

Palavras-chave: Círculo. Sequência de Fibonacci. Razão Áurea. Poliedros.



## ABSTRACT

ANDRADE, L. C. *Geometric aspects of some mystical*. 2018. 117 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) – Faculdade de Formação de Professores, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, São Gonçalo, 2018.

Ancient civilizations such as the Greeks and Egyptians observed patterns that were repeated in nature, these observations helped to shape their beliefs by influencing their architecture, aesthetics, and art. In the present work we will present a little of the history of mathematics in a different way from traditional teaching, analyzing some geometric aspects of elements of antiquity that are surrounded by a certain mysticism offering a research instrument and stimulating education professionals in the interest of increasing their knowledge in the geometry and interdisciplinarity. We believe that with the availability of this work we can contribute in some way to the construction of mathematical knowledge in basic education.

Keywords: Circle. Fibonacci Sequence. Golden Ratio. Polyhedra.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1	- Templo em Formato Circular . . . . .	15
Figura 2	- Círculo e Circunferência . . . . .	16
Figura 3	- Polígonos Inscritos . . . . .	17
Figura 4	- Triângulos Isósceles . . . . .	17
Figura 5	- Triângulo de Lados $l_{n+1}, l_{n+1}$ e $l_n$ . . . . .	18
Figura 6	- Quadrado Circunscrito . . . . .	18
Figura 7	- Triângulo Retângulo . . . . .	22
Figura 8	- Demonstração de Bháskara . . . . .	23
Figura 9	- Ângulo $\hat{A} < 90^\circ$ . . . . .	23
Figura 10	- Ângulo $\hat{A} > 90^\circ$ . . . . .	24
Figura 11	- Diagonal do Quadrado . . . . .	25
Figura 12	- Quadratura do Círculo . . . . .	28
Figura 13	- Homem Vitruviano . . . . .	29
Figura 14	- Terra e Lua . . . . .	29
Figura 15	- Vesica Piscis . . . . .	31
Figura 16	- Catedral de Amiens . . . . .	32
Figura 17	- Cristo no Interior da Vesica . . . . .	32
Figura 18	- Área do Setor Circular . . . . .	33
Figura 19	- Perímetro da Vesica Piscis . . . . .	34
Figura 20	- Segmentos na Vesica . . . . .	35
Figura 21	- Segmentos de Comprimento $\sqrt{2}$ . . . . .	35
Figura 22	- Segmentos de Comprimento $\sqrt{3}$ . . . . .	36
Figura 23	- Segmentos de Comprimento $\sqrt{5}$ . . . . .	36
Figura 24	- Flor da Vida . . . . .	37
Figura 25	- Arte Fenícia . . . . .	38
Figura 26	- Estudos Geométricos de Da Vinci . . . . .	38
Figura 27	- Representação das Pétalas . . . . .	39
Figura 28	- Área e Perímetro da Pétala . . . . .	39
Figura 29	- A Chakana . . . . .	40
Figura 30	- Funções da Chakana . . . . .	41
Figura 31	- Expansão de Quadrados . . . . .	42
Figura 32	- Construção da Chakana . . . . .	43
Figura 33	- Diagonal de comprimento $\sqrt{10}$ . . . . .	44
Figura 34	- Valor aproximado de $\pi$ . . . . .	44
Figura 35	- Bordo da Chakana . . . . .	45
Figura 36	- Segmento Cortado em sua Seção Áurea . . . . .	48

Figura 37 - Obtenção da Seção Áurea . . . . .	49
Figura 38 - Vesica Piscis e $\Phi$ . . . . .	50
Figura 39 - Pentágono Regular . . . . .	51
Figura 40 - Pentágono e Razão Áurea . . . . .	51
Figura 41 - Pentagrama . . . . .	52
Figura 42 - Triângulo Áureo . . . . .	53
Figura 43 - Triângulo Áureo no Pentágono . . . . .	54
Figura 44 - Retângulo áureo . . . . .	55
Figura 45 - Casais de Coelhos . . . . .	56
Figura 46 - Retângulo de Fibonacci . . . . .	61
Figura 47 - Espiral de Fibonacci . . . . .	62
Figura 48 - Espirais Antigas . . . . .	64
Figura 49 - Espirais na Natureza . . . . .	64
Figura 50 - Gerações de abelhas . . . . .	65
Figura 51 - Razão Áurea nas Construções . . . . .	65
Figura 52 - Folhas e Fibonacci . . . . .	66
Figura 53 - Árvore Solar . . . . .	66
Figura 54 - Monalisa . . . . .	67
Figura 55 - O modulator . . . . .	68
Figura 56 - Poliedro Convexo . . . . .	69
Figura 57 - Faces, Arestas e Vértices . . . . .	70
Figura 58 - Prisma hexagonal . . . . .	71
Figura 59 - Reta $r$ , Plano $H$ e Poliedro $P$ . . . . .	72
Figura 60 - Projeção do poliedro no plano $H$ . . . . .	72
Figura 61 - Polígono Convexo $K'$ . . . . .	73
Figura 62 - Ângulos dos Vértices . . . . .	74
Figura 63 - Poliedros de Platão . . . . .	75
Figura 64 - Poliedros e Misticismo . . . . .	78
Figura 65 - Sistema Solar Segundo Kepler . . . . .	79
Figura 66 - Pedras Esféricas . . . . .	79
Figura 67 - O Fruto da Vida . . . . .	80
Figura 68 - O Cubo de Metatron . . . . .	80
Figura 69 - O Fruto da Vida e os Poliedros de Platão . . . . .	81
Figura 70 - Pirâmide de vértice $V$ e base $A_1A_2A_3 \dots A_n$ . . . . .	81
Figura 71 - Pirâmide Regular . . . . .	82
Figura 72 - Cinto de Pirâmides no Mundo . . . . .	83
Figura 73 - Pirâmides pelo Mundo . . . . .	84
Figura 74 - Medidas da Pirâmide de Quéops . . . . .	85
Figura 75 - Triângulo de Lados $1, \sqrt{\phi}$ e $\phi$ . . . . .	86

Figura 76 - Grande Pirâmide e Quadratura da Circunferência . . . . .	86
Figura 77 - Relação entre a Grande Pirâmide, a Terra e a Lua . . . . .	87
Figura 78 - Posição das Pirâmides de Gizé e da Constelação de Orion . . . . .	88
Figura 79 - Exemplo de um Sangaku . . . . .	89
Figura 80 - Ilustração da Atividade 1 . . . . .	90
Figura 81 - Ilustração da Resposta da Atividade 1 . . . . .	91
Figura 82 - Ilustração da Resposta da Atividade 2 . . . . .	92
Figura 83 - Ilustração da Atividade 3 . . . . .	92
Figura 84 - Ilustração da Resposta da Atividade 4a . . . . .	95
Figura 85 - Ilustração da Atividade 5 . . . . .	96
Figura 86 - Ilustração da Resposta da Atividade 5a . . . . .	97
Figura 87 - Ilustração da Resposta da Atividade 5b . . . . .	98
Figura 88 - Ilustração da Atividade 6 . . . . .	98
Figura 89 - Formato das Janelas . . . . .	99
Figura 90 - Ilustração da Atividade 7 . . . . .	100
Figura 91 - Ilustração da Atividade 8 . . . . .	101
Figura 92 - Molde para Chakana . . . . .	102
Figura 93 - Lembrancinha . . . . .	103
Figura 94 - Ilustração para Resposta da Atividade 9 . . . . .	103
Figura 95 - Ilustração da Atividade 10 . . . . .	105
Figura 96 - Ilustração da Resposta da Atividade 11 . . . . .	106
Figura 97 - Pentagrama Regular . . . . .	107
Figura 98 - Pentagrama não Regular . . . . .	107
Figura 99 - Ilustração para a Resposta da Atividade 12 . . . . .	108
Figura 100 - Construção da Atividade 13 . . . . .	109
Figura 101 - Espiral $\epsilon$ da atividade 14 . . . . .	110
Figura 102 - Poliedros de Platão . . . . .	111
Figura 103 - Área do Pentágono Regular . . . . .	112
Figura 104 - Ilustração da Atividade 18 . . . . .	113
Figura 105 - Ilustração para Resposta da Atividade 18 . . . . .	113

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1	- Valor da Constante $2^n \text{sen} \left( \frac{180^\circ}{2^n} \right)$ . . . . .	21
Tabela 2	- Quantidade de Casas Decimais de $\pi$ . . . . .	27
Tabela 3	- Relação de Euler nos Poliedros de Platão . . . . .	77
Tabela 4	- Relação de Euler em Algumas Pirâmides . . . . .	83
Tabela 5	- Tabela da Atividade 3c . . . . .	93
Tabela 6	- Tabela da Resposta da Atividade 3c . . . . .	94
Tabela 7	- Tabela da Resposta da Atividade 13c . . . . .	109

## SUMÁRIO

	<b>INTRODUÇÃO</b>	13
1	<b>O NÚMERO <math>\pi</math></b>	15
1.1	<b>O Círculo</b>	15
1.2	<b>Área do Círculo, Comprimento da Circunferência e o Número <math>\pi</math></b>	16
1.3	<b>Os Números Irracionais e o Número <math>\pi</math></b>	22
1.4	<b>Quadratura do Círculo</b>	27
2	<b>ALGUNS SÍMBOLOS SAGRADOS</b>	31
2.1	<b>Vesica Piscis</b>	31
2.1.1	<u>Área e perímetro da vesica piscis</u>	32
2.1.2	<u>As raízes de 2, 3 e 5 e a vesica piscis</u>	34
2.2	<b>Flor da Vida</b>	37
2.2.1	<u>Área e perímetro de uma pétala na flor da vida</u>	38
2.3	<b>A Chakana</b>	40
2.3.1	<u>Construção da chakana</u>	41
2.3.2	<u>A chakana e o número <math>\pi</math></u>	43
2.3.3	<u>Área e comprimento do bordo da chakana</u>	45
3	<b>A RAZÃO ÁUREA E A SEQUÊNCIA DE FIBONACCI</b>	47
3.1	<b>A Razão Áurea</b>	47
3.2	<b>Os Números de Fibonnaci</b>	55
3.2.1	<u>Espiral de Fibonacci</u>	60
4	<b>OBJETOS MÍSTICOS TRIDIMENSIONAIS</b>	69
4.1	<b>Poliedro Convexo</b>	69
4.2	<b>Relação de Euler</b>	70
4.3	<b>Poliedros de Platão</b>	75
4.3.1	<u>Poliedros de Platão e relação de Euler</u>	75
4.3.2	<u>Poliedros de Platão e misticismo</u>	78
4.4	<b>Pirâmides</b>	81
4.4.1	<u>Construções antigas em forma de pirâmides</u>	83
4.4.2	<u>Curiosidades matemáticas na pirâmide de Quéops</u>	84
5	<b>SUGESTÕES DE ATIVIDADES PARA O ENSINO MÉDIO</b>	89
5.1	<b>Atividades Referentes ao Primeiro Capítulo</b>	90
5.2	<b>Atividades Referentes ao Segundo Capítulo</b>	96
5.3	<b>Atividades Referentes ao Terceiro Capítulo</b>	104
5.4	<b>Atividades Referentes ao Quarto Capítulo</b>	110
	<b>CONCLUSÃO</b>	115
	<b>REFERÊNCIAS</b>	116

## INTRODUÇÃO

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) Brasil (1998), afirmam que a utilização da História da Matemática como recurso metodológico tem uma contribuição importante, mostrando a Matemática como processo de desenvolvimento da humanidade ao longo do tempo.

A História da Matemática pode oferecer uma importante contribuição ao processo de ensino e aprendizagem dessa área do conhecimento. Ao revelar a Matemática como uma criação humana, ao mostrar necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diversos momentos históricos, ao estabelecer comparações entre os conceitos e processos matemáticos do passado e do presente, o professor cria condições para que o aluno desenvolva atitudes e valores mais favoráveis diante desse conhecimento.

Além disso, conceitos abordados em conexão com sua história constituem veículos de informação cultural, sociológica e antropológica de grande valor formativo. A História da Matemática é, nesse sentido, um instrumento de resgate da própria identidade cultural. (BRASIL, 1998, p. 42)

Segundo os PCNs Brasil (1998), o estudo dos conceitos geométricos é parte importantíssima do currículo da Matemática, pois estes conceitos, quando bem explorados e assimilados, serão importantes para uma abordagem mais aprofundada no ensino médio.

A História da Matemática pode dar respostas a vários questionamentos e contribuir para alcançar um olhar mais crítico sobre os conceitos que se quer aprofundar.

Em muitas situações, o recurso à História da Matemática pode esclarecer ideias matemáticas que estão sendo construídas pelo aluno, especialmente para dar respostas a alguns “porquês” e, desse modo, contribuir para a constituição de um olhar mais crítico sobre os objetos de conhecimento.

Assim, a própria história dos conceitos pode sugerir caminhos de abordagem deles, bem como os objetivos que se pretendem alcançar com eles. Por exemplo, isso fica evidente quando se percebe que a ampliação dos campos numéricos historicamente está associada à resolução de situações-problema que envolvem medidas. (BRASIL, 1998, p. 43)

Este trabalho tem como público alvo professores e alunos do Ensino Médio e tem como objetivo apresentar a geometria de alguns símbolos considerados místicos e atividades para sala de aula que exploram a matemática desses símbolos, sem se aprofundar em questões religiosas ou seitas que envolvam o misticismo presente na geometria sagrada. Além disso, apresentar uma breve resenha histórica da Matemática envolvida no processo, oferecendo um instrumento de pesquisa dos conceitos matemáticos que se apresentam.

Por mais que se tenha uma forte ligação mística na geometria sagrada, somente a observação dos padrões geométricos nas construções e na natureza são suficientes para aguçar a curiosidade dos alunos assim como estabelecer conexões da Matemática com

outras áreas do conhecimento como Geografia, História, Filosofia e Religião, para que se tenha uma visão diferente da geometria estudada no ensino básico.

Considerando os objetivos traçados, o presente trabalho está organizado da seguinte forma:

No primeiro capítulo é apresentado o círculo como uma forma geométrica considerada perfeita de significados místicos que está presente por todo o estudo da geometria sagrada, pois a partir dele outros símbolos místicos foram construídos. Desta forma, exploramos conceitos matemáticos como a definição de círculo e circunferência, fórmulas para cálculos da área do círculo e do comprimento da circunferência. Além das definições e cálculos matemáticos, recordamos um pouco de história sobre números irracionais, o número  $\pi$  e o problema da quadratura do círculo.

No segundo capítulo é observado que diferentes culturas verificaram que padrões geométricos, ditos sagrados, existiam por toda a parte dentre os quais figuram formas, modelos e proporções. A vesica piscis e a flor da vida são símbolos muito cultuados na geometria sagrada sendo encontrados pelo mundo. A chakana é um símbolo importante na cultura andina, tanto no ponto de vista místico como na astronomia, inclusive para se observar os tempos da colheita e os pontos cardeais. Através desses símbolos podemos explorar as áreas e perímetros de figuras planas, as construções de segmentos irracionais como a  $\sqrt{2}$ , a  $\sqrt{3}$  e a  $\sqrt{5}$ . Além disso, podemos explorar na chakana um pouco da história deste símbolo e uma maneira um pouco diferente de se encontrar um valor aproximado para o número  $\pi$ .

No terceiro capítulo são apresentados a razão áurea, os números de Fibonacci, a espiral de Fibonacci que estão relacionados com algumas formas que se apresentam na natureza, nos animais, no corpo humano, na arte e na arquitetura. Desta forma, são muito apreciados pelos estudiosos da geometria sagrada, sendo a razão áurea considerada o modelo da perfeição. Além disso, a razão áurea e os números de Fibonacci apresentam algumas características matemáticas notáveis que são exploradas neste capítulo.

No quarto capítulo são apresentados objetos tridimensionais considerados místicos. As pirâmides têm em toda sua história o misticismo, tanto em relação às especulações sobre suas construções como em suas dimensões. Os sólidos de Platão, que se acreditavam correspondiam aos padrões essenciais da criação do universo. Quatro deles, o tetraedro, o cubo, o octaedro e o icosaedro eram considerados representantes dos quatro elementos, o fogo, a terra, o ar e a água, respectivamente; o quinto, o dodecaedro, era visto como o padrão do universo. Neste capítulo, são explorados conceitos matemáticos como a definição de poliedros, a relação de Euler, um pouco da história das pirâmides e dos sólidos de Platão.

No último capítulo apresentamos sugestões de atividades com um pouco mais de história com a geometria sagrada do Japão, conhecida como *sangaku* e algumas atividades relacionando conceitos matemáticos com a geometria dos símbolos místicos.



## 1 O NÚMERO $\pi$

Neste capítulo vamos apresentar a relação entre o número  $\pi$  e as fórmulas para cálculos da área do círculo e do comprimento da circunferência, os números irracionais e o problema da quadratura do círculo.

### 1.1 O Círculo

Segundo Pennick (1980), o círculo pode ser a forma geométrica mais antiga que se tenha conhecimento, seja na natureza ou em construções feitas pelo homem.

Talvez o círculo tenha sido o símbolo mais antigo desenhado pela raça humana. Simples de ser executado, é uma forma cotidiana encontrada na natureza, vista nos céus como os discos do sol e da lua, e ocorre nas formas das plantas e dos animais e nas estruturas geológicas naturais. Nos tempos antigos, as construções, fossem elas temporárias ou permanentes, eram circulares em sua grande maioria. Os nativos americanos tipi e os yurt mongólicos atuais são sobreviventes de uma antiga forma universal. Dos círculos de cabanas da Grã-Bretanha neolítica, desde os círculos de pedra megalíticos até as igrejas e os templos redondos, a forma circular imitou a redondeza do horizonte visível, fazendo de cada construção, na verdade, um pequeno mundo em si mesmo. (PENNICK, 1980, p.13)

Um exemplo de templo antigo em formato circular é o Oráculo de Delfos (Fig. 1) que, segundo Pereira (2009), foi um dos mais famosos e influentes oráculos da antiguidade (por volta de 750 a.C.) e era considerado o mais importante local sagrado da Grécia antiga dedicado ao deus Apolo, deus do sol, da profecia e da verdade.

Figura 1 - Templo em Formato Circular

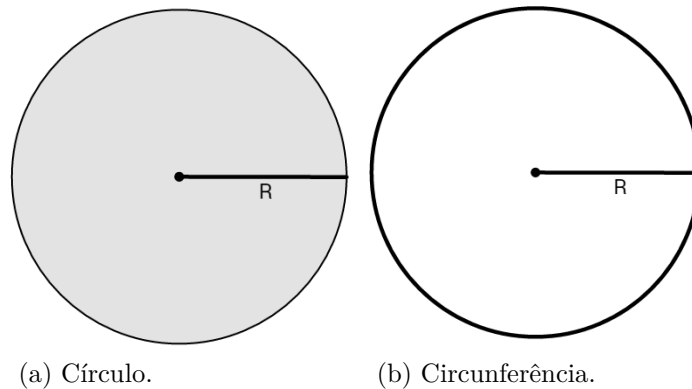


Fonte: Pereira (2009)

Definimos *círculo* e sua *circunferência* da seguinte forma:

**Definição 1.1.1.** *Dados um ponto  $O$  do plano e um número real  $R > 0$ , uma circunferência de centro  $O$  e raio  $R$  é o conjunto dos pontos deste plano, tal que a distância até o ponto  $O$  é igual a  $R$  e o círculo de centro  $O$  e raio  $R$  é o conjunto de todos pontos do plano cuja distância a  $O$  é menor ou igual a  $R$ .*

Figura 2 - Círculo e Circunferência



Fonte: Autor, 2018

## 1.2 Área do Círculo, Comprimento da Circunferência e o Número $\pi$

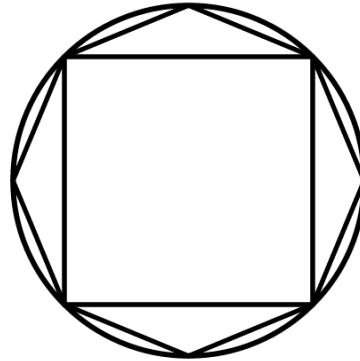
Há indicações de que o matemático grego Antifonte (480 - 410 a.C.) tenha sido o primeiro a dar um limite inferior e superior para o valor de  $\pi$  utilizando polígonos inscritos e circunscritos a uma circunferência. Assim, utilizando por base uma demonstração feita por Carvalho (2011), demonstraremos os dois teoremas a seguir para chegarmos às fórmulas para os cálculos do comprimento da circunferência e da área do círculo e suas relações com o número representado pela letra grega  $\pi$ .

**Teorema 1.2.1.** *Dada uma circunferência de comprimento (perímetro)  $C$  e raio  $R > 0$ , a razão entre  $C$  e  $2R$  é uma constante, seja qual for a circunferência.*

*Demonstração.* Inscrevendo um quadrado em uma circunferência  $C$  de raio  $R$  e tomando o ponto médio do menor arco de circunferência formado por dois vértices consecutivos do quadrado, temos um polígono com oito lados (octógono) (Fig. 3).

Repetindo esse processo, são construídos polígonos  $p_n$  com  $2^n$  lados, com  $n \geq 2$ . Assim, o polígono  $p_2$  é o quadrado inscrito em  $C$ ,  $p_3$  é o octógono e assim por diante.

Figura 3 - Polígonos Inscritos



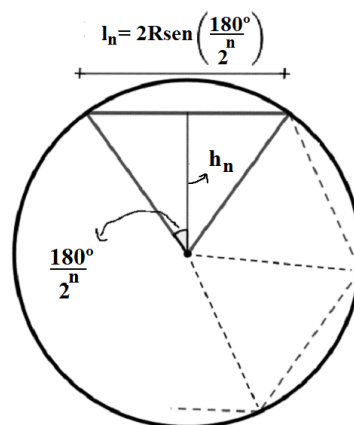
Fonte: Autor, 2018

Um polígono regular inscrito  $p_n$  pode ser decomposto em  $2^n$  triângulos isósceles congruentes. Denotando por  $l_n$  o comprimento do lado do polígono  $p_n$  e seja  $h_n$  a altura do triângulo relativa à  $l_n$ , o ângulo do vértice oposto à  $l_n$  vale  $\frac{360^\circ}{2^n}$  (Fig. 4).

Utilizando a definição de seno, vem que

$$\text{sen}\left(\frac{180^\circ}{2^n}\right) = \frac{l_n}{2R} \implies l_n = 2R \text{sen}\left(\frac{180^\circ}{2^n}\right). \quad (1)$$

Figura 4 - Triângulos Isósceles



Fonte: Autor, 2018

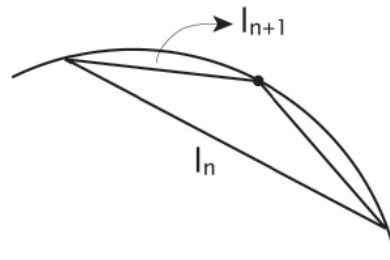
O perímetro de  $p_n$  é dado por

$$c_n = 2^n l_n. \quad (2)$$

Tomando os pontos médios de cada arco de círculo que une dois vértices de  $p_n$ , passamos ao polígono  $p_{n+1}$ , formando um triângulo isósceles com um lado de comprimento

igual a  $l_n$  e outros dois de comprimento iguais a  $l_{n+1}$ , como observado na Fig. 5.

Figura 5 - Triângulo de Lados  $l_{n+1}, l_{n+1}$  e  $l_n$



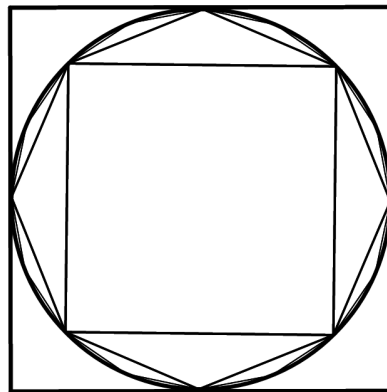
Fonte: Carvalho (2011)

Como a soma dos comprimentos de dois lados de um triângulo é sempre maior que o comprimento do terceiro lado, temos que o perímetro do quadrado inscrito é maior que o diâmetro da circunferência, ou seja,  $c_2 > 2R$  e para todo  $n \geq 2, l_n < 2l_{n+1}$ , assim

$$c_n = 2^n \cdot l_n < 2^n \cdot 2l_{n+1} = 2^{n+1} \cdot l_{n+1} = c_{n+1}. \quad (3)$$

Da desigualdade (3), concluímos que a sequência dos perímetros  $\{c_n\}$  é crescente. Tomando um quadrado  $Q$  circunscrito à circunferência  $C$  (Fig. 6), temos que o perímetro de  $Q$  é  $8R$ , maior que o perímetro de qualquer polígono inscrito, portanto a sequência  $\{c_n\}$  é limitada inferior e superiormente.

Figura 6 - Quadrado Circunscrito



Fonte: Autor, 2018

Assim,  $2R < c_2 < c_3 < \dots < c_n < c_{n+1} < \dots < 8R$ .

Logo,  $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n$  existe e é menor que  $8R$ , assim o comprimento de uma circunferência pode ser definido como

$$C = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n. \quad (4)$$

Das equações (1), (2), (3) e (4) vem que

$$C = 2R \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 2^n \text{sen} \left( \frac{180^\circ}{2^n} \right) \right). \quad (5)$$

Dado um círculo de raio  $R_1$  com circunferência  $C_1$ , então  $l_n = 2R_1 \text{sen} \left( \frac{180^\circ}{2^n} \right)$ ,  $c_n = 2^n 2R_1 \text{sen} \left( \frac{180^\circ}{2^n} \right)$  e seu comprimento será

$$C_1 = 2R_1 \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 2^n \text{sen} \left( \frac{180^\circ}{2^n} \right) \right).$$

Considerando um outro círculo de raio  $R_2$  com circunferência  $C_2$ , e seguindo o mesmo raciocínio tem-se o comprimento

$$C_2 = 2R_2 \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 2^n \text{sen} \left( \frac{180^\circ}{2^n} \right) \right).$$

Então,

$$\frac{C_1}{2R_1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 2^n \text{sen} \left( \frac{180^\circ}{2^n} \right) \right) = \frac{C_2}{2R_2}.$$

Concluimos que a razão entre o comprimento de uma circunferência e o dobro de seu raio tem como resultado sempre o mesmo número, qualquer que seja o círculo. Logo,

$$\frac{C}{2R} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 2^n \text{sen} \left( \frac{180^\circ}{2^n} \right) \right). \quad (6)$$

□

Utilizando as mesmas técnicas na demonstração do teorema 1.2.1, vamos demonstrar o seguinte teorema:

**Teorema 1.2.2.** *Dado um círculo  $C$  de raio  $R > 0$  com área  $S_C$ , a razão entre  $S_C$  e  $R^2$  é uma constante seja qual for o círculo.*

*Demonstração.* Sejam  $p_n$  o polígono regular inscrito no círculo de raio  $R > 0$  com  $2^n$  lados, com  $n \geq 2$ , e  $l_n$  o comprimento de cada lado de  $p_n$ .

Seja  $S_n$  a área do polígono  $p_n$  e  $S_C$  a área do círculo, a medida que  $n$  aumenta, o valor de  $S_n$  se aproxima de  $S_C$ . Tomando um quadrado  $Q$  circunscrito ao círculo  $C$ , temos que a área de  $Q$  é  $4R^2$ , sendo maior que a área de qualquer polígono inscrito, como pode ser observado na Fig. 6, temos  $0 < S_2 < S_3 < S_4 < \dots < S_n < S_{n+1} < \dots < 4R^2$ .

Portanto, a sequência das áreas  $\{S_n\}$  dos polígonos inscritos no círculo é crescente e limitada por  $4R^2$  o que nos garante que  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$  existe e é menor que  $4R^2$ , assim a área do círculo pode ser definida como

$$S_C = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n. \quad (7)$$

Como a área  $S_n$  do polígono  $p_n$  é igual à soma das áreas dos triângulos de lado  $l_n$  e altura  $h_n$  relativa à  $l_n$ , temos

$$S_n = 2^n \frac{l_n h_n}{2}; \quad n \geq 2. \quad (8)$$

Das equações (8) e (7), segue

$$S_C = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 2^n \frac{l_n h_n}{2} \right) = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} (2^n l_n) \lim_{n \rightarrow \infty} (h_n). \quad (9)$$

De forma intuitiva percebemos que quando  $n$  cresce, o comprimento da altura do triângulo  $h_n$  se aproxima de  $R$ , ou seja

$$\lim_{n \rightarrow \infty} h_n = R. \quad (10)$$

Como já visto na equação (5)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2^n l_n = C = 2R \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 2^n \text{sen} \left( \frac{180^\circ}{2^n} \right) \right). \quad (11)$$

Substituindo os valores encontrados nas equações (10) e (11) na equação (9), temos

$$S_C = \frac{1}{2} 2R \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 2^n \text{sen} \left( \frac{180^\circ}{2^n} \right) \right) R \implies S_C = R^2 \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 2^n \text{sen} \left( \frac{180^\circ}{2^n} \right) \right).$$

Dado um círculo  $C_1$  com raio  $R_1$ , sua área é dada por:

$$S_{C_1} = R_1^2 \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 2^n \text{sen} \left( \frac{180^\circ}{2^n} \right) \right).$$

Um outro círculo  $C_2$  tem raio  $R_2$ , sua área é dada por

$$S_{C_2} = R_2^2 \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 2^n \text{sen} \left( \frac{180^\circ}{2^n} \right) \right).$$

Isto é,

$$\frac{S_{C_1}}{R_1^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 2^n \text{sen} \left( \frac{180^\circ}{2^n} \right) \right) = \frac{S_{C_2}}{R_2^2}.$$

Concluimos que a razão entre a área de um círculo e o quadrado de seu raio tem como resultado o mesmo número, qualquer que seja o círculo. Logo,

$$\frac{S_C}{R^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 2^n \text{sen} \left( \frac{180^\circ}{2^n} \right) \right). \quad (12)$$

□

Na tabela 1 verificamos alguns valores aproximados da constante  $2^n \text{sen} \left( \frac{180^\circ}{2^n} \right)$

encontrada nas duas razões (6) e (12), para valores de  $n$  cada vez maiores.

Tabela 1 - Valor da Constante  $2^n \text{sen} \left( \frac{180^\circ}{2^n} \right)$

$n$	$2^n$	$2^n \text{sen} \left( \frac{180^\circ}{2^n} \right)$
2	4	2,82842...
3	8	3,06146...
4	16	3,12144...
5	32	3,13654...
6	64	3,14033...
7	128	3,14127...
8	256	3,14151...
9	512	3,14157...
10	1024	3,14158...
⋮	⋮	⋮
20	1048576	3,14159...
⋮	⋮	⋮
30	1073741824	3,14159...
⋮	⋮	⋮

Fonte: Autor, 2018

Agora, denotando  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( 2^n \text{sen} \left( \frac{180^\circ}{2^n} \right) \right)$  pela letra grega  $\pi$  (pi) nas razões (6) e (12), temos:

### Comprimento da Circunferência

$$\frac{C}{2R} = \pi \implies C = 2\pi R. \quad (13)$$

### Área do Círculo

$$\frac{S_C}{R^2} = \pi \implies S_C = \pi R^2. \quad (14)$$

A partir da fórmula (13), denotando  $D = 2R$  como o diâmetro da circunferência, deduzimos que em uma circunferência qualquer a razão entre seu comprimento  $C$  e seu diâmetro  $D$  é igual a  $\pi$ . Desta forma temos que

$$\frac{C}{D} = \pi. \quad (15)$$

Além disso, a partir da fórmula (14), observamos que  $\pi$  é o valor da área do círculo de raio 1.

Segundo Eves (2011), a letra grega  $\pi$  foi usada pela primeira vez como representação do quociente entre o comprimento e o diâmetro de uma circunferência em 1707, pelo matemático galês William Jones (1675 - 1749), mas o matemático suíço Leonhard Euler (1707 - 1783) popularizou o  $\pi$  e suas relações com o círculo somente em 1737.

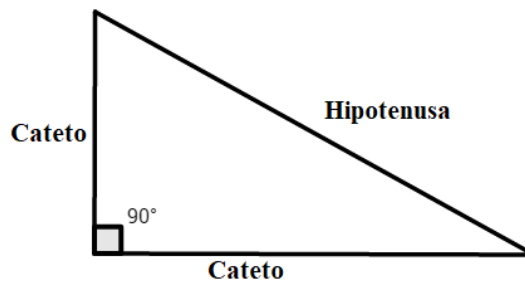
### 1.3 Os Números Irracionais e o Número $\pi$

Um *número racional* é todo número que pode ser representado como o quociente entre dois números inteiros, isto é, todos da forma  $\frac{p}{q}$ , onde  $p, q \in \mathbb{Z}$  e  $q \neq 0$ .

Durante muitos séculos os números racionais foram os únicos conhecidos dos matemáticos, para eles esses números eram suficientes para todas as necessidades matemáticas da vida cotidiana.

Os pitagóricos, que eram membros de uma sociedade secreta dedicada ao estudo da Música, da Matemática, da Filosofia, etc..., fundada por volta de 540 a.C. pelo matemático e filósofo grego Pitágoras (570 - 495 a.C.) em Crotona, na Itália, encontraram um valor para o comprimento da diagonal de um quadrado de lado unitário que não podia ser expresso como o quociente de dois inteiros. Para isso, segundo Livio (2006), os pitagóricos utilizaram um teorema muito conhecido atualmente atribuído a Pitágoras que está relacionado aos comprimentos dos lados de um triângulo retângulo (Fig. 7).

Figura 7 - Triângulo Retângulo



Fonte: Autor, 2018

O teorema de Pitágoras, pode ser enunciado da seguinte forma:

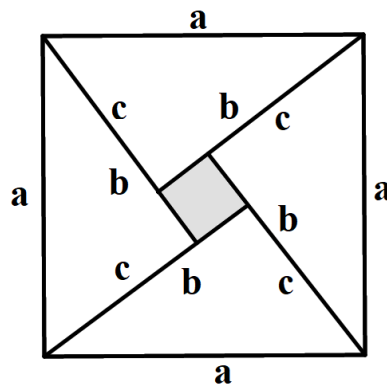
**Teorema 1.3.1.** *O quadrado do comprimento da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos comprimentos dos catetos.*

Existem diversas formas de se demonstrar o teorema de Pitágoras. De acordo com Eves (2011), uma demonstração bem simples do teorema de Pitágoras foi dada pelo matemático hindu Bhaskara (1114 - 1185). Bháskara apenas desenhou uma figura e não ofereceu nenhuma explicação, deixando somente a palavra “Veja!”. O observador deveria verificar com cálculos que se tratava da demonstração do teorema de Pitágoras.

*Demonstração.* Considere um quadrado de lado  $a$  que é formado por quatro triângulos retângulos congruentes com hipotenusa de comprimento  $a$  e catetos de comprimentos  $b$  e  $c$ , além de um quadrado menor central de lado  $(b - c)$ . A área do quadrado maior é  $a^2$ ; a área de cada triângulo retângulo é  $\frac{bc}{2}$  e a área do quadrado menor é  $(b - c)^2$ , conforme pode ser observado na Fig. 8.



Figura 8 - Demonstração de Bháskara



Fonte: Autor, 2018

Como a área do quadrado maior é igual à soma das áreas dos quatro triângulos com a área do quadrado menor central temos

$$a^2 = 4 \cdot \frac{bc}{2} + (b - c)^2 = 2bc + b^2 - 2bc + c^2 \implies a^2 = b^2 + c^2.$$

Assim, fica demonstrado o teorema de Pitágoras. □

Vamos demonstrar recíproca do teorema de Pitágoras, ou seja:

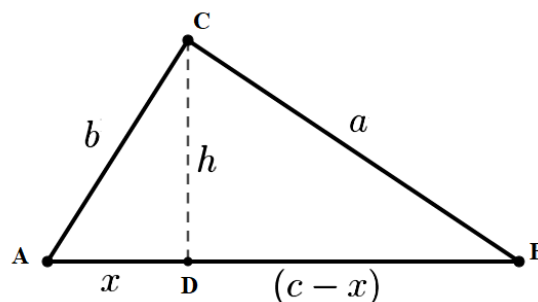
**Teorema 1.3.2.** *Todo triângulo com lados  $a$ ,  $b$  e  $c$  tais que  $a^2 = b^2 + c^2$  é um triângulo retângulo.*

*Demonstração.* Considere um triângulo  $\triangle ABC$ , com  $\overline{AB} = c$ ,  $\overline{BC} = a$  e  $\overline{CA} = b$ .

**1º Caso:** Ângulo  $\hat{A} < 90^\circ$

Imaginemos que  $b \leq c$ . Logo, o ponto  $D$ , projeção do vértice  $C$  sobre o lado  $AB$ , estará entre os vértices  $A$  e  $B$ , como observado na Fig. 9.

Sejam  $\overline{AD} = x$  e  $\overline{CD} = h$ .

Figura 9 - Ângulo  $\hat{A} < 90^\circ$ 

Fonte: Autor, 2018

Como o triângulo  $\triangle ADC$  é retângulo, temos  $b^2 = h^2 + x^2$ . Logo,

$$h^2 = b^2 - x^2. \quad (16)$$

Como o triângulo  $\triangle BDC$  é retângulo, vem que  $a^2 = h^2 + (c - x)^2$ . Logo,

$$a^2 = h^2 + c^2 - 2cx + x^2. \quad (17)$$

Das equações (16) e (17) temos

$$a^2 = h^2 + c^2 - 2cx + x^2 \implies a^2 = b^2 - x^2 + c^2 - 2cx + x^2 \implies a^2 = b^2 + c^2 - 2cx.$$

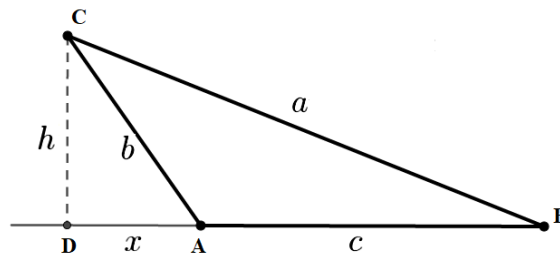
Portanto,

$$a^2 < b^2 + c^2.$$

**2º Caso:** Ângulo  $\hat{A} > 90^\circ$

Neste caso o ponto  $D$  estará no prolongamento do lado  $AB$  (Fig. 10).

Figura 10 - Ângulo  $\hat{A} > 90^\circ$



Fonte: Autor, 2018

Como o triângulo  $\triangle ADC$  é retângulo, temos  $b^2 = h^2 + x^2$ . Logo,

$$h^2 = b^2 - x^2. \quad (18)$$

Como o triângulo  $\triangle CDB$  é retângulo, vem que  $a^2 = h^2 + (c + x)^2$ . Logo,

$$a^2 = h^2 + c^2 + 2cx + x^2. \quad (19)$$

Das equações (18) e (19) temos

$$a^2 = h^2 + c^2 + 2cx + x^2 \implies a^2 = b^2 - x^2 + c^2 + 2cx + x^2 \implies a^2 = b^2 + c^2 + 2cx.$$

Portanto,

$$a^2 > b^2 + c^2.$$

Chegamos a conclusão que:

$$\text{Se } \hat{A} < 90^\circ \longrightarrow a^2 < b^2 + c^2.$$

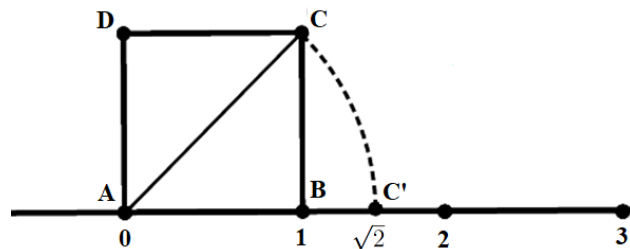
$$\text{Se } \hat{A} > 90^\circ \longrightarrow a^2 > b^2 + c^2.$$

Assim, a condição  $a^2 = b^2 + c^2$  implica necessariamente que o ângulo  $\hat{A} = 90^\circ$ , ou seja, o triângulo é retângulo.

□

Para determinar o comprimento da diagonal do quadrado de lado unitário encontrado pelos pitagóricos, marcamos dois pontos  $A$  e  $B$  sobre os números 0 e 1 na reta numérica, construímos o segmento  $AB$  e marcamos os pontos  $C$  e  $D$  de modo que  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$  e  $DA$  sejam lados do quadrado  $ABCD$  desta forma, o segmento  $AC$  será diagonal deste quadrado (Fig. 11).

Figura 11 - Diagonal do Quadrado



Fonte: Autor, 2018

Como  $\overline{AB} = \overline{BC} = 1$ , pelo teorema de Pitágoras,

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = 1 + 1 \implies \overline{AC} = \sqrt{2}.$$

De acordo com Eves (2011), esses números não racionais foram denominados *números irracionais* em 1872 pelo matemático alemão Richard Dedekind (1831 - 1916) e são, em sua forma decimal, infinitos não periódicos.

Para provar que o comprimento da diagonal de um quadrado de lado unitário não representa um número racional, vamos mostrar um resultado mais geral.

**Proposição 1.3.3.** *A raiz quadrada de um número primo é um número irracional.*

*Demonstração.* Dado  $p$  um número primo, vamos supor por absurdo que  $\sqrt{p}$  é racional. Então  $\sqrt{p}$  pode ser escrito da forma  $\frac{a}{b}$ , onde  $a, b \in \mathbb{Z}$ , são primos entre si e  $b \neq 0$ . Assim,

$$\sqrt{p} = \frac{a}{b} \implies p = \frac{a^2}{b^2} \implies pb^2 = a^2. \quad (20)$$

Logo,  $a^2$  é múltiplo de  $p$ , então  $a$  é múltiplo de  $p$ . Assim, tomando  $a = pt$ , com  $t \in \mathbb{Z}$ . Substituindo na igualdade (20), teremos

$$pb^2 = (pt)^2 \implies pb^2 = p^2t^2 \implies b^2 = pt^2,$$

ou seja,  $b^2$  é múltiplo de  $p$ , então  $b$  é múltiplo de  $p$  e portanto  $a$  e  $b$  são múltiplos de  $p$ . Absurdo, pois são primos entre si.

Logo,  $\sqrt{p}$  não é racional e sim irracional. □

Dessa forma, como 2 é um número primo, concluímos que  $\sqrt{2}$  é um número irracional.

Os números irracionais são classificados como algébricos ou transcendentos. Um número é *algébrico* se é solução de uma equação algébrica de coeficientes racionais do tipo  $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n = 0$ . Por exemplo, os números  $\sqrt{2}$ ,  $\sqrt[5]{3}$  e  $i$  (unidade imaginária), são algébricos, pois são soluções, respectivamente, das equações  $x^2 - 2 = 0$ ,  $x^5 - 3 = 0$  e  $x^2 + 1 = 0$ . Se um número não é algébrico, então ele é denominado número *transcendente*.

De acordo com Eves (2011), o matemático Johann Heinrich Lambert (1728 - 1777) foi o primeiro a provar, em 1761, que o número  $\pi$  é irracional. Descobrir se o número  $\pi$  era algébrico ou transcendente demorou, segundo Eves (2011), somente em 1882 o matemático alemão Ferdinand von Lindemann (1852 - 1939) publicou uma prova de que  $\pi$  é um número transcendente, desta forma temos que é impossível exprimir  $\pi$  com um número finito de números inteiros. O matemático brasileiro Djairo Guedes de Figueiredo apresenta uma demonstração sobre números irracionais e transcendentos em (FIGUEIREDO, 2011).

Segundo Boyer (1974), o matemático grego Arquimedes (287 - 212 a.C.) também utilizou os perímetros de polígonos regulares inscritos e circunscritos à circunferência para encontrar uma aproximação para o valor do número  $\pi$ . Ele começou suas tentativas para aproximação de  $\pi$  utilizando um hexágono regular inscrito e outro circunscrito, calculou os perímetros dos polígonos obtidos e foi dobrando sucessivamente o número de lados até chegar a noventa e seis lados. Com esse cálculo ele chegou a uma aproximação para o valor de  $\pi$  expressa pelas desigualdades  $\frac{223}{71} < \pi < \frac{22}{7}$  que em valores decimais aproximados com quatro casas são  $3,1408 < \pi < 3,1428$ . O método descrito, que utiliza polígonos regulares inscrito e circunscritos, é conhecido como método clássico do cálculo de  $\pi$ .

Na tabela 2 estão listados alguns recordes de cálculos das casas decimais de  $\pi$  estabelecidos ao longo do tempo.

Tabela 2 - Quantidade de Casas Decimais de  $\pi$ 

Matemáticos	Ano	Casas Decimais
Egípcios	1650 a.C.	1
Arquimedes	250 a.C.	3
Zu Chongzhi	480 d.C.	7
Ghiyath al-Kashi	1424	16
Ludolph van Ceulen	1596	35
Georg von Vega	1794	126
Gauss	1824	200
William Shanks	1874	527
Levi B. Smith, John W. Wrench	1949	1120
Daniel Shanks, John W. Wrench	1961	100265
Jean Guilloud, M. Bouyer	1973	1000000
Yasumasa Kanada, Sayaka Yoshino, Yoshiaki Tamura	1982	16777206
Yasumasa Kanada, Yoshiaki Tamura, Yoshinobu Kubo	1987	134217700
Chudnovskys	1989	1011196691
Yasumasa Kanada, Daisuke Takahashi	1997	51539600000
Yasumasa Kanada, Daisuke Takahashi	1999	206158430000
Yasumasa Kanada	2002	1241100000000
Daisuke Takahashi	2009	2576980370000
Fabrice Bellard	2010	2699999990000
Shigeru Kondo & Alexander Yee	2010	5000000000000
Shigeru Kondo & Alexander Yee	2011	10000000000000
Universidade de Santa Clara	2013	8000000000000000

Fonte: <https://www.somatematica.com.br/curiosidades/c3.php>

## 1.4 Quadratura do Círculo

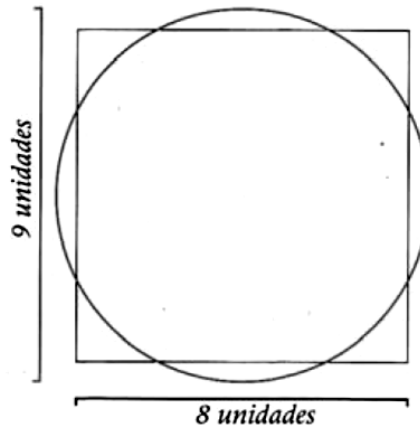
O número  $\pi$  está diretamente relacionado a um antigo problema envolvendo o quadrado e o círculo intitulado *quadratura do círculo* que intrigou grandes matemáticos durante séculos.

O problema da quadratura do círculo consiste em construir, com régua e compasso, um quadrado de lado  $l$  de maneira que sua área seja exatamente igual à área do círculo de raio  $R$ . Como a área do quadrado é expressa por  $l^2$  e a do círculo por  $\pi R^2$ , devemos obter  $l$  de modo que  $l = R\sqrt{\pi}$ .

Provavelmente nenhum outro problema exerceu um fascínio maior ou mais duradouro do que aquele de construir um quadrado de área igual à área de um círculo dado. Já em 1800 a.C. os egípcios haviam “resolvido” o problema, tomando o lado do quadrado igual a  $\frac{8}{9}$  do diâmetro do círculo dado. De lá para cá, literalmente milhares de pessoas trabalharam no problema e, a despeito de já se ter uma demonstração de que a construção é impossível com os instrumentos euclidianos, não há um ano que não tenha sua safra de “quadradores de círculo”. (EVES, 2011, p. 140)

Segundo Skinner (2007), a dificuldade em encontrar a solução desse problema fez com que fosse usada como uma expressão de algo quase impossível e místico. Os números 8 e 9 são os mais citados e com um quadrado de lado 8 unidades e um círculo de diâmetro 9 unidades, como observado na Fig. 12, chegamos a quase igualdade entre as áreas.

Figura 12 - Quadratura do Círculo



Fonte: Skinner (2007)

**Área do círculo:**  $\pi r^2 = \frac{22}{7} \times 4,5 \times 4,5 \cong 63,64 \text{ u.a.}$

**Área do quadrado:**  $8 \times 8 = 64 \text{ u.a.}$

O quadrado e o círculo têm áreas muito próximas, mas não exatamente iguais. Para Lawlor (1996, p. 74), “quando se atinge uma igualdade quase completa entre o círculo e o quadrado, o infinito é capaz de expressar suas dimensões ou qualidades através do finito”.

Possivelmente o matemático Hipócrates de Chios (470 - 410 a.C.) tenha sido o primeiro matemático a tentar resolver o problema da quadratura do círculo utilizando lunas<sup>1</sup>, talvez Hipócrates tenha achado que podendo quadrar lunas, também poderia quadrar o círculo, porém a demonstração de Lindemann que  $\pi$  é um número transcendente então  $\sqrt{\pi}$  também será, mostrou que não há solução para o problema da quadratura do círculo utilizando apenas régua e compasso, pois  $\sqrt{\pi}$  não é raiz de uma equação algébrica, assim não é possível construir um segmento com essa exatidão.

De acordo com Livio (2006), um conceito atribuído a Vitruvius<sup>2</sup> diz que centrando um compasso no umbigo do corpo humano bem formado e o colocando com as mão e pés estendidos, os dedos das mão e dos pés tocarão uma circunferência descrita a partir desse ponto. Além dessa circunferência o corpo humano produz também um quadrado com lados no mesmo comprimento da distância da sola do pé ao topo da cabeça.

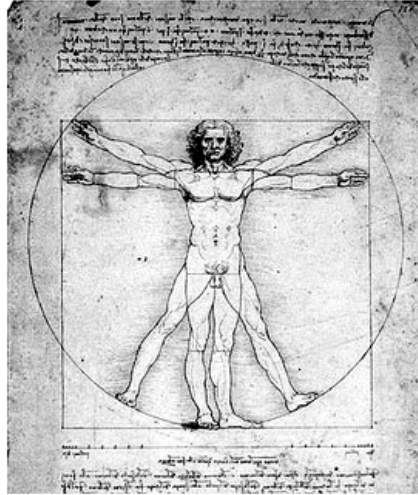
Por volta do ano 1490 Leonardo Da Vinci ilustrou a ideia de Vitruvius (Fig. 13), onde há uma clara relação entre círculo e quadrado. A ilustração é conhecida como

<sup>1</sup> Figura geométrica plana formada por dois arcos circulares de raios diferentes.

<sup>2</sup> Marcus Vitruvius Pollio (80 - 15 a.C.). Arquiteto romano que deixou como legado o tratado *De Architectura*, considerado o primeiro texto teórico ocidental sobre a disciplina.

o *homem vitruviano* e considerada por estudiosos renascentistas uma demonstração da ligação entre o orgânico e a geometria da beleza.

Figura 13 - Homem Vitruviano

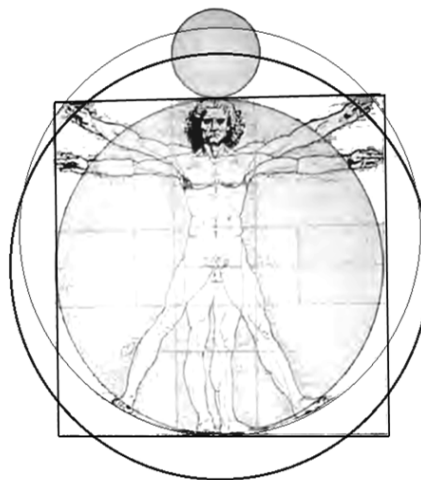


Fonte: Livio (2006)

De acordo com Melchizedek (2010), utilizando a quadratura da circunferência que leva em conta a igualdade entre os perímetros e não das áreas, podemos observar que há uma harmonia entre o tamanho da Terra e o da Lua.

Utilizando o desenho de Da Vinci, desenhamos uma circunferência menor sobre a cabeça do homem (Fig. 14).

Figura 14 - Terra e Lua



Fonte: Melchizedek (2010)

Suponha que as duas circunferências, a que tem o diâmetro medido das extre-

midades do corpo e a menor sobre a cabeça do homem, tenham diâmetros com mesmo comprimento dos diâmetros da Terra e da Lua, respectivamente. Observe também um quadrado que seria circunscrito à Terra e uma outra circunferência  $C$  que passe pelo centro da Lua.

O diâmetro da Terra mede, aproximadamente, 12742 km, que é igual a um lado do quadrado que poderia ser circunscrito a ela. O diâmetro da Lua é, aproximadamente, 3474 km. Como temos um comprimento igual ao raio da Lua na parte acima da cabeça e na parte abaixo dos pés, o diâmetro de  $C$  é de  $12742 + 3474 \cong 16216$  km.

O perímetro do quadrado que poderia ser circunscrito à Terra é de  $4 \times 12742 \cong 50968$  km.

Utilizando o valor de  $\frac{22}{7}$ , que era um número muito usado para a aproximação para  $\pi$ , vem que o perímetro de  $C$  é  $\frac{22}{7} \times 16216 \cong 50964$  km, um valor muito próximo ao perímetro do quadrado.



## 2 ALGUNS SÍMBOLOS SAGRADOS

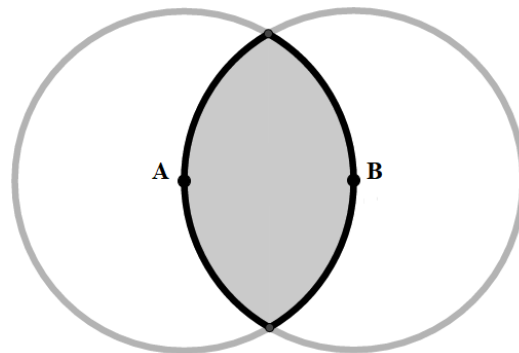
Neste capítulo faremos um estudo de alguns conceitos matemáticos que podem ser explorados em alguns símbolos envolvidos em misticismo. Alguns símbolos geométricos foram utilizados como modelo para construções, estudos sobre as proporções no universo e no corpo humano e também estudos místicos, ou seja, tudo que está a nossa volta. Entre estes símbolos estão a vesica piscis, a flor da vida e a chakana, símbolos místicos que veremos a seguir.

### 2.1 Vesica Piscis

A *vesica piscis*, que em latim significa bexiga de peixe, é uma figura geométrica plana obtida pela interseção de dois círculos de mesmo raio. Para construir uma vesica piscis em um plano, devemos proceder da seguinte forma:

Considere um ponto  $A$  e um círculo de raio  $R$  com centro neste ponto. Escolhendo um ponto  $B$  da circunferência deste círculo, traçamos outro círculo de mesmo raio  $R$ . Com esta construção, formando uma região, a qual é denotada por  $V$ , de sobreposição dos dois círculos conforme mostra a Fig. 15, essa região  $V$  é conhecida como a vesica piscis.

Figura 15 - Vesica Piscis



Fonte: Autor, 2018

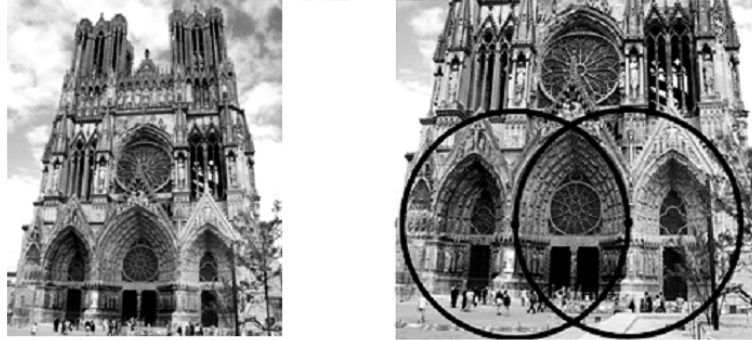
A vesica piscis ocupou uma posição privilegiada na construção de edifícios sagrados e era o diagrama central no misticismo cristão da Idade Média. As edificações góticas<sup>3</sup> apresentam fachadas que remetem a uma parte do desenho da vesica. Um exemplo é a

---

<sup>3</sup> A arte gótica é uma fase da história da arte ocidental, identificável por valores estéticos e filosóficos

fachada da catedral de Amiens, na França, onde podemos observar o formato de uma parte da vesica (Fig. 16).

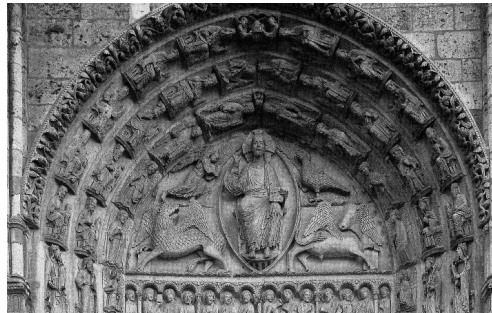
Figura 16 - Catedral de Amiens



Fonte: <https://www.pinterest.com.mx/pin/814236807602220318/>  
(Adaptado)

Em algumas construções religiosas, como na fachada da catedral de Chartres, na França, o Cristo aparece no interior da vesica piscis, como observado na Fig. 17.

Figura 17 - Cristo no Interior da Vesica



Fonte: <https://www.pinterest.com.mx/pin/509047564115641213/>

### 2.1.1 Área e perímetro da vesica piscis

**Proposição 2.1.1.** *Uma vesica piscis  $V$  construída a partir de dois círculos de raio  $R$  tem área:*

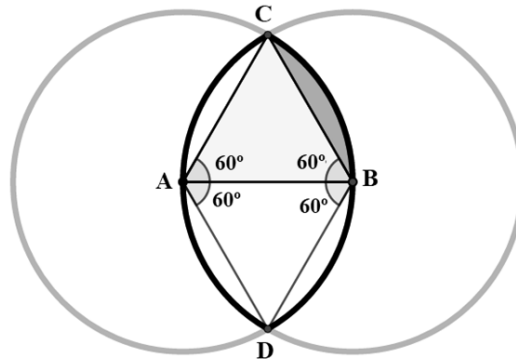
$$S_{vesica} = \frac{R^2}{6}(4\pi - 3\sqrt{3}) \text{ u.a.}$$

*Demonstração.* Sejam os pontos  $A$  e  $B$  os centros dos círculos utilizados na construção de uma vesica  $V$  e sejam  $C$  e  $D$  os pontos de interseção dos bordos dos círculos, o raio dos

círculos é  $R$ , então os segmentos  $AC$ ,  $AB$ ,  $BC$ ,  $AD$ , e  $BD$  são congruentes e por tanto os triângulos  $\triangle ABC$  e  $\triangle ABD$  são equiláteros, de lado  $R$ , e sejam os quatro segmentos circulares congruentes, delimitados pelos segmentos  $AC$ ,  $BC$ ,  $AD$  e  $BD$  (Fig. 18).

Temos que o triângulo equilátero  $\triangle ABC$  de lado  $R$  e o segmento circular definido por  $BC$  formam um setor circular  $ABC$  com ângulo central  $\hat{A} = 60^\circ$  (Fig. 18).

Figura 18 - Área do Setor Circular



Fonte: Autor, 2018

A área  $S_{set.cir.}$  do setor circular  $ABC$  é dada por:

$$S_{set.cir.} = \frac{1}{6}\pi R^2 u.a. \quad (21)$$

A área  $S_{triân.}$  do triângulo equilátero  $\triangle ABC$  é:

$$S_{triân.} = \frac{\sqrt{3}}{4}R^2 u.a. \quad (22)$$

A área  $S_{seg.cir.}$  do segmento circular definido por  $BC$  é a diferença entre as equações (21) e (22), assim:

$$S_{seg.cir.} = \frac{1}{6}\pi R^2 - \frac{\sqrt{3}}{4}R^2 u.a. \quad (23)$$

Somando as áreas dos dois triângulos equiláteros e dos quatro segmentos circulares, obtemos a área da vesica piscis dada por:

$$S_{vesica} = 2\frac{\sqrt{3}}{4}R^2 + 4\left(\frac{1}{6}\pi R^2 - \frac{\sqrt{3}}{4}R^2\right) = \frac{R^2}{6}(4\pi - 3\sqrt{3}) u.a.$$

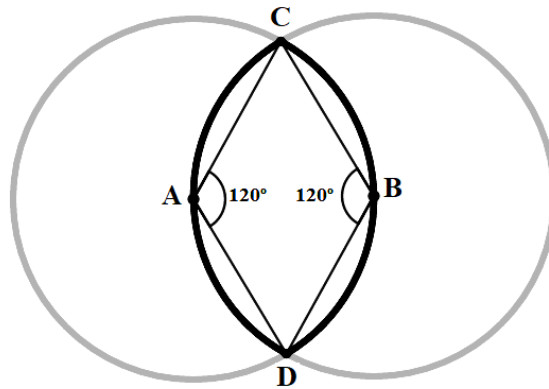
□

**Proposição 2.1.2.** O perímetro da vesica piscis  $P_{vesica}$  é dado por:

$$P_{vesica} = \frac{4R\pi}{3} u.m.$$

*Demonstração.* Sejam os pontos  $A$  e  $B$  centros dos círculos utilizados na construção de uma vesica  $V$  e sejam  $C$  e  $D$  os pontos de interseção dos bordos dos círculos (Fig. 19), como o raio dos círculos é  $R$ , formando dois arcos circulares  $\widehat{CAD}$  e  $\widehat{CBD}$  de mesmo perímetro, pois têm mesmo raio  $R$  e mesmo ângulo central de  $120^\circ$ .

Figura 19 - Perímetro da Vesica Piscis



Fonte: Autor, 2018

O perímetro de uma circunferência de raio  $R$  é dado por  $P_{circ.} = 2\pi R$ , o perímetro  $P_{arc.cir.}$  de um arco circular formado por um ângulo central  $\alpha$  é dado por:

$$P_{arc.cir.} = \frac{2\pi R}{3} u.m. \quad (24)$$

Logo, o perímetro  $P_{vesica}$  da região limitada pela vesica piscis é:

$$P_{vesica} = \frac{4R\pi}{3} u.m.$$

□

### 2.1.2 As raízes de 2, 3 e 5 e a vesica piscis

Vamos construir segmentos de medidas  $\sqrt{2}$ ,  $\sqrt{3}$  e  $\sqrt{5}$  com régua e compasso utilizando por base o princípio da construção da vesica piscis.

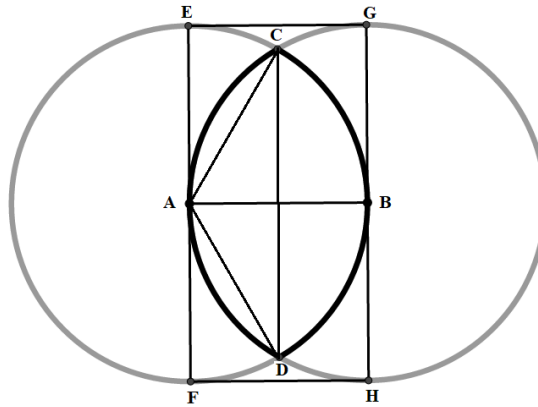
Considerando uma vesica piscis  $V$  construída a partir de duas circunferências de centros nos pontos  $A$  e  $B$  ambas de raios iguais a 1, construiremos os seguintes segmentos:

- $AB$ , raio das circunferências;
- $EF$ , diâmetro da circunferência de centro  $A$  e  $GH$ , diâmetro da circunferência de centro  $B$ , ambos segmentos perpendiculares a  $AB$ ;

- $CD$ , que une os pontos  $C$  e  $D$  interseções das duas circunferências.

Definindo com os segmentos acima o quadrado  $ABGE$ , o triângulo  $\triangle CAD$  e o retângulo  $EFHG$  como pode ser observado na Fig. 20.

Figura 20 - Segmentos na Vesica

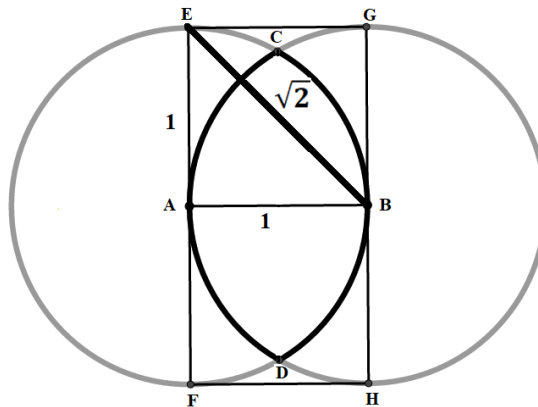


Fonte: Autor, 2018

Então, podemos observar que:

- I -  $AE$  e  $AB$ , raios da circunferência e lados do quadrado  $ABGE$ , formam com a diagonal  $EB$  o triângulo  $\triangle EAB$  reto em  $A$ .

Figura 21 - Segmentos de Comprimento  $\sqrt{2}$



Fonte: Autor, 2018

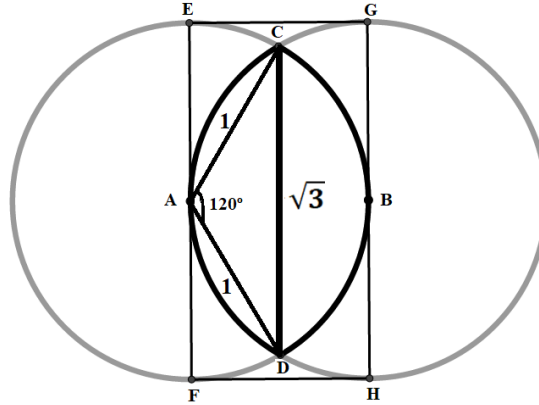
Pelo teorema de Pitágoras segue que

$$\overline{EB}^2 = \overline{AE}^2 + \overline{AB}^2 = 1^2 + 1^2 = 2 \implies \overline{EB} = \sqrt{2}.$$

Logo, o segmento  $EB$  mede  $\sqrt{2}$ .

II -  $AC$  e  $AD$ , raios da circunferência formam com o segmento  $CD$  o triângulo  $\triangle CAD$  com ângulo  $\widehat{CAD}$  medindo  $120^\circ$ .

Figura 22 - Segmentos de Comprimento  $\sqrt{3}$



Fonte: Autor, 2018

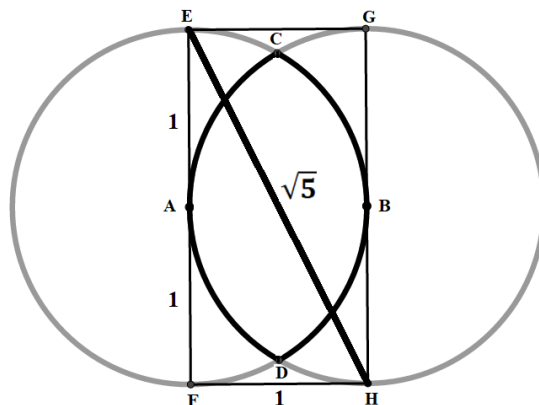
Pela lei dos cossenos segue que

$$\overline{CD}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{AD}^2 - 2 \times \overline{AC} \times \overline{AD} \times \cos 120^\circ \implies \overline{CD}^2 = 1^2 + 1^2 - 2 \times 1 \times 1 \times \left(-\frac{1}{2}\right) \implies \implies \overline{CD} = \sqrt{3}.$$

Logo, o segmento  $CD$  mede  $\sqrt{3}$ .

III -  $EF$ , diâmetro da circunferência e  $FH$ , de mesmo comprimento do raio da circunferência e paralelo a  $AB$ , formam com  $EH$  o triângulo  $\triangle EFH$  reto em  $F$ .

Figura 23 - Segmentos de Comprimento  $\sqrt{5}$



Fonte: Autor, 2018

Pelo teorema de Pitágoras segue que

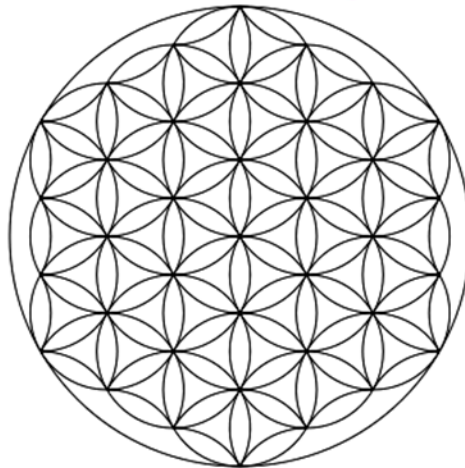
$$\overline{EH}^2 = \overline{EF}^2 + \overline{FH}^2 = 2^2 + 1^2 = 5 \implies \overline{EH} = \sqrt{5}.$$

Logo,  $\overline{EH}$  tem comprimento igual a  $\sqrt{5}$ .

## 2.2 Flor da Vida

A *flor da vida*, ilustrada na Fig. 24, é um símbolo geométrico formado com 19 pequenos círculos de mesmo raio que são sobrepostos e 36 arcos circulares que formam um conjunto de forma hexagonal circunscrito por uma circunferência maior. Os pequenos círculos estão sobrepostos de tal forma que apresentam padrões geométricos similares a flores. É uma forma geométrica muito antiga e envolvida em muito misticismo.

Figura 24 - Flor da Vida



Fonte: Melchizedek (2009)

Este símbolo foi encontrado em diversas civilizações da humanidade como nas ruínas arqueológicas do Egito Antigo, como no templo de Osiris<sup>4</sup>, na arte fenícia<sup>5</sup> e no Oriente Médio. Por isso, segundo Melchizedek (2009), estudiosos da geometria sagrada acreditam que neste símbolo usado como um código em todo o universo e que é a língua primitiva do universo, pura forma e proporção.

Na Fig. 25 observamos uma arte fenícia encontrada por volta de 700 a.C., no Chipre, na qual a flor da vida está esculpida em seu fundo.

<sup>4</sup> Osíris foi um dos deuses mais populares do Antigo Egito.

<sup>5</sup> Fenícios. Civilização da Antiguidade cujo epicentro se localizava no norte da antiga Canaã, ao longo das regiões litorâneas dos atuais Líbano, Síria e norte de Israel.

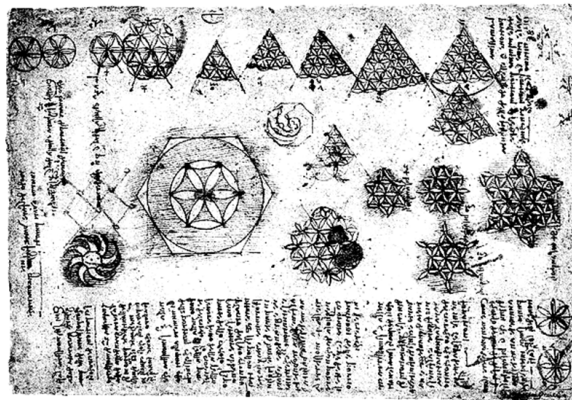
Figura 25 - Arte Fenícia



Fonte: [https://es.wikipedia.org/wiki/Flor\\_de\\_la\\_Vida](https://es.wikipedia.org/wiki/Flor_de_la_Vida)

Segundo Melchizedek (2010) Leonardo Da Vinci<sup>6</sup> (1452 - 1519) calculou ângulos, estudou os padrões e as geometrias associadas à flor da vida e por meio da geometria buscou fundamentos para a manifestação da vida. Na Fig. 26 temos um desenho estudos de Da Vinci sobre estruturas geométricas da flor da vida do Codex Atlânticus, uma coleção constituída por doze volumes.

Figura 26 - Estudos Geométricos de Da Vinci



Fonte: Melchizedek (2010)

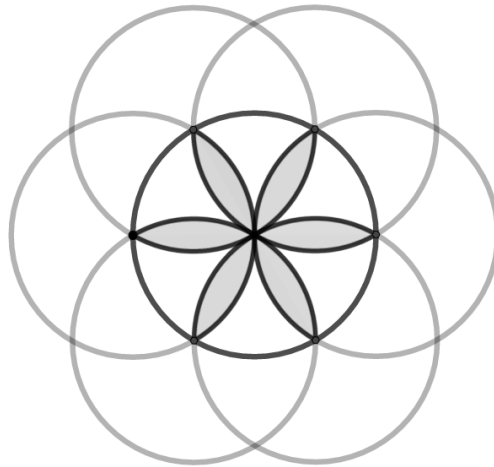
### 2.2.1 Área e perímetro de uma pétala na flor da vida

Retirando da estrutura da flor da vida somente uma circunferência central e outras seis a sua volta, teremos uma forma geométrica semelhante a uma flor inscrita na circunferência central. Nesta forma geométrica, as pétalas são as regiões mais escuras formadas por oito arcos de circunferências congruentes, como podem ser observadas na Fig. 27.

<sup>6</sup> Artista e cientista italiano que tinha um encantamento pelos padrões e formas observados na natureza



Figura 27 - Representação das Pétalas



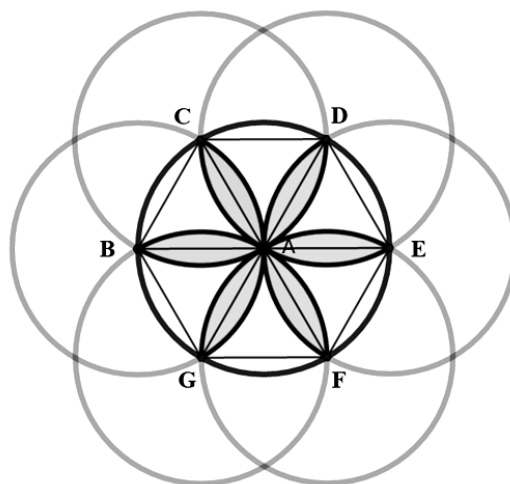
Fonte: Autor, 2018

**Proposição 2.2.1.** *Uma pétala na flor da vida construída a partir de círculos de raio  $R$  tem área  $S_{pétala}$  e perímetro  $P_{pétala}$  dados por*

$$S_{pétala} = \frac{R^2}{6} (2\pi - 3\sqrt{3}) \text{ u.a.} \quad e \quad P_{pétala} = \frac{2R\pi}{3} \text{ u.m.}$$

*Demonstração.* Sejam os pontos  $B, C, D, E, F$  e  $G$  vértices do hexágono inscrito em uma circunferência de raio  $R$  e o ponto  $A$  centro desta circunferência, os segmentos  $AB, AC$  e  $BC$  formam o triângulo equilátero  $\triangle ABC$  de lado  $R$ . Os dois arcos circulares congruentes delimitados pelo segmento secante  $AC$  formam uma pétala, conforme mostra a Fig. 28.

Figura 28 - Área e Perímetro da Pétala



Fonte: Autor, 2018

A área  $S_{pétala}$  de uma pétala é o dobro da área de um segmento circular definido por um triângulo equilátero cujos lados são iguais ao raio  $R$  e possui um dos vértices no centro da circunferência. Como já observado na equação (23) da proposição 2.1.1 a área de uma das pétalas é, então

$$S_{pétala} = 2 \left( \frac{1}{6} \pi R^2 - \frac{\sqrt{3}}{4} R^2 \right) = \frac{R^2}{6} (2\pi - 3\sqrt{3}) \text{ u.a.}$$

O perímetro  $P_{pétala}$  de uma pétala é o dobro do comprimento de um arco circular de raio  $R$  de ângulo central medindo  $60^\circ$ . Como já verificado na equação (24) da proposição 2.1.2 teremos como perímetro de uma das pétalas

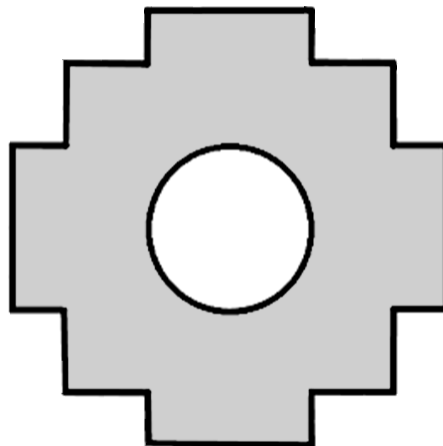
$$P_{pétala} = \frac{2\pi R}{3} \text{ u.m.}$$

□

### 2.3 A Chakana

A *Chakana*, também conhecida como cruz quadrada ou cruz Inca (Fig. 29), foi considerado símbolo sagrado pelas culturas indígenas de América do Sul, em especial pelos Incas. Foi inspirada na constelação do Cruzeiro do Sul, cujas 4 extremidades são relacionadas com os quatro pontos cardeais e representam as estações do ano.

Figura 29 - A Chakana

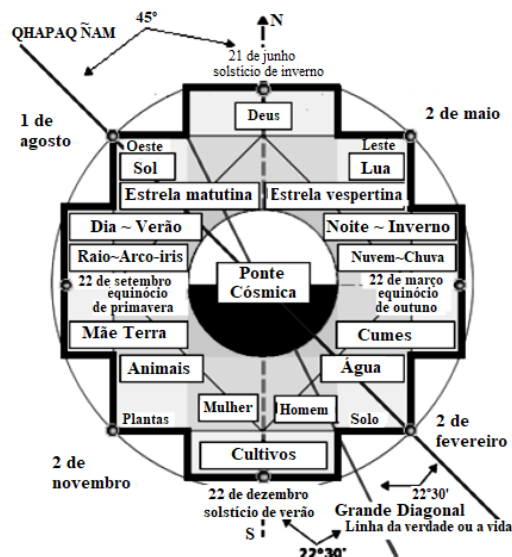


Fonte: Autor, 2018

É uma figura geométrica usada há milhares de anos pelo povo andino que a nomeia. No fundo é uma forma geométrica que representa quatro escadarias de três degraus cada, com um círculo dividido ao meio na parte central do símbolo. Inspirado na constelação do Cruzeiro do Sul, suas quatro extremidades simbolizam as estações do ano e os pontos cardeais norte, sul, leste e oeste. Assim, tinha uso prático, como indicar as épocas de colheita e representar conceitos matemáticos, usados nas construções. Mas também carregava inúmeros significados místicos, como o de representar os mundos espiritual, material, interior e o pós-morte. (MALDONADO, 2016)

Segundo Lambert (2016) especialistas em cultura andina são unânimes em afirmar que a chakana tinha importantes funções para os andinos em vários aspectos: astronômica, cosmológica, agrícola, espiritual, arquitetônico e matemático, Fig. 30.

Figura 30 - Funções da Chakana



Fonte: <https://pueblosoriginarios.com/sur/andina/inca/chakana.html>

Suas quatro pontas representam as quatro estações e cada um dos seus degraus aos meses, servindo como um calendário agrícola para as épocas de plantio e colheita. Na astronomia, servia como forma de estudar e mapear constelações, como o Cruzeiro do Sul. Considerada como um símbolo que demonstra a jornada do ser humano neste plano e em outros, tem na sua parte superior o “mundo habitado pelos deuses”, na parte central, o “mundo da nossa existência” e a inferior o “mundo dos espíritos dos ancestrais”. Assim, como símbolo sagrado, descreve os três planos existentes em nosso universo.

### 2.3.1 Construção da chakana

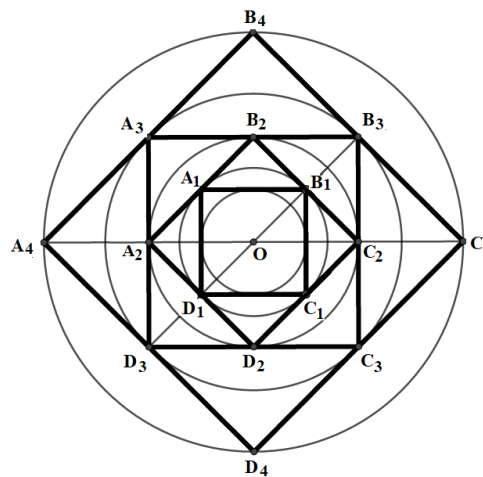
Para dar início a construção geométrica da chakana, primeiramente apresentamos uma expansão de quadrados utilizando as diagonais e circunferências. Na Fig. 31 é

apresentada uma operação geométrica em que cada quadrado tem o lado com mesma medida da diagonal do quadrado anterior, conforme descrito a seguir.

Considere:

- 1) um quadrado inicial  $A_1B_1C_1D_1$  de lado unitário e uma circunferência  $\mathcal{C}_1$  de centro  $O$ , inscrita neste quadrado de diâmetro igual a uma unidade.
- 2) uma circunferência  $\mathcal{C}_2$  com diâmetro  $\sqrt{2}$  circunscrita ao quadrado  $A_1B_1C_1D_1$ .
- 3) o quadrado  $A_2B_2C_2D_2$  de lado  $\sqrt{2}$ , circunscrito a  $\mathcal{C}_2$  de modo que os vértices do quadrado  $A_1B_1C_1D_1$  são os pontos médios do quadrado de seus lados.
- 4) uma circunferência  $\mathcal{C}_3$  de diâmetro 2 circunscrita ao quadrado  $A_2B_2C_2D_2$ .
- 5) um quadrado  $A_3B_3C_3D_3$  de lado medindo 2, circunscrito a  $\mathcal{C}_3$  de modo que os vértices do quadrado  $A_2B_2C_2D_2$  são os pontos médios de seus lados.
- 6) uma circunferência  $\mathcal{C}_4$  de diâmetro  $2\sqrt{2}$  circunscrita ao quadrado  $A_3B_3C_3D_3$ .
- 7) um quadrado  $A_4B_4C_4D_4$  de lado medindo  $2\sqrt{2}$  circunscrito a  $\mathcal{C}_4$  de modo que os vértices do quadrado  $A_3B_3C_3D_3$  são os pontos médios de seus lados.
- 8) uma circunferência  $\mathcal{C}_5$  de diâmetro 4 circunscrita ao quadrado  $A_4B_4C_4D_4$ .

Figura 31 - Expansão de Quadrados



Fonte: Autor, 2018

O processo se repete o quanto se queira, gerando uma sequência de quadrados em que a razão da diagonal para o lado de cada quadrado é igual à razão entre a diagonal e o lado do primeiro quadrado.

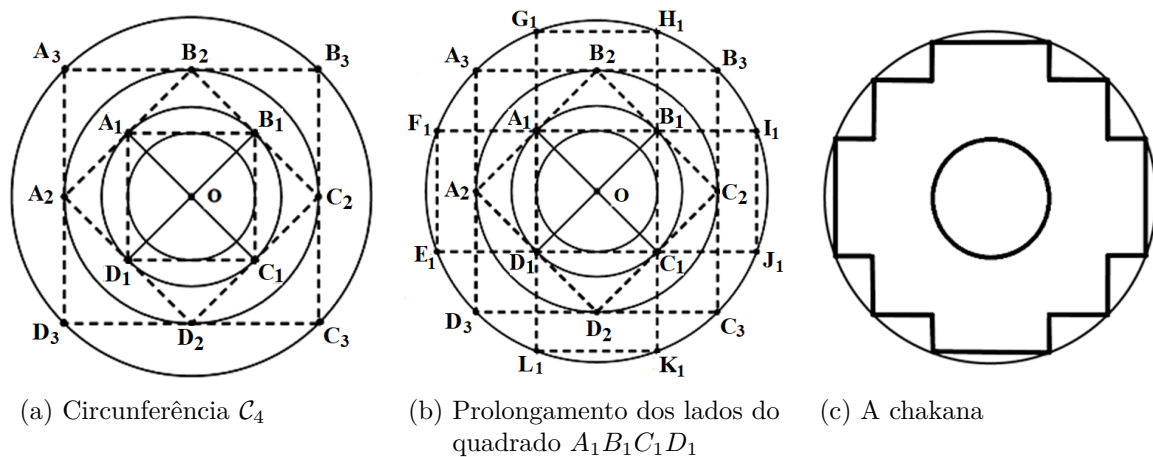
Denotando  $d_n$  como a diagonal e  $l_n$  como o lado do quadrado  $A_nB_nC_nD_n$ , temos

$$\frac{d_1}{l_1} = \frac{\sqrt{2}}{1} = \frac{d_2}{l_2} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{d_3}{l_3} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \frac{d_4}{l_4} = \frac{4}{2\sqrt{2}} = \dots = \frac{d_n}{l_n} = \sqrt{2}$$

Podemos observar na poligonal que os lados dos quadrados consecutivos são apresentados em uma progressão geométrica de razão  $\sqrt{2}$ .

A sequência para construir a chakana observada na Fig. 32, parte do princípio da expansão de quadrados apresentada anteriormente. Sessando a sequência da Fig. 31 no quadrado  $A_3B_3C_3D_3$ , na circunferência  $\mathcal{C}_4$  e prolongando os lados do quadrado  $A_1B_1C_1D_1$ , obtemos os pontos  $E_1, F_1, G_1, H_1, I_1, J_1, K_1, L_1$  interseções dos prolongamentos com  $\mathcal{C}_4$ . A chakana é a figura geométrica inscrita em  $\mathcal{C}_4$ .

Figura 32 - Construção da Chakana



Fonte: Autor, 2018

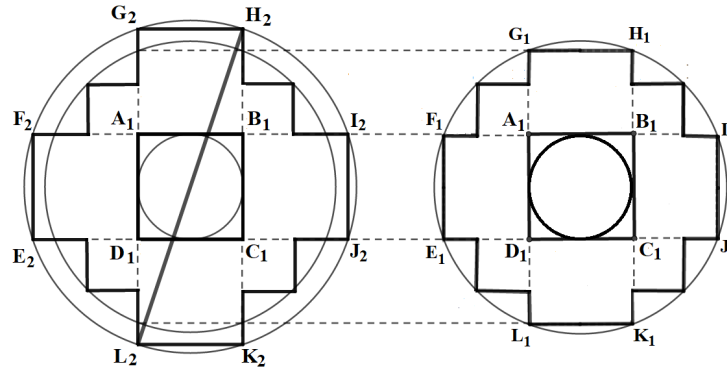
### 2.3.2 A chakana e o número $\pi$

De acordo com Villena (1983) a cruz quadrada é o símbolo geométrico mais difundido no mundo andino e está relacionada às proporções da constelação da Cruz do Sul. Em passagens da História da Matemática encontramos diferentes métodos para a obtenção de um valor para o número  $\pi$ . Comparando esses valores com o método apresentado a seguir, notamos que o povo andino alcançaram, em sua época, um nível matemático semelhante ao de outras culturas, mas por caminhos diferentes.

Começamos a construção da chakana com um quadrado  $A_1B_1C_1D_1$  de lado unitário e alteramos os retângulos  $A_1D_1E_1F_1$ ,  $B_1I_1J_1C_1$ ,  $A_1G_1H_1B_1$  e  $D_1C_1K_1L_1$  de modo a formar os quadrados de lados unitários  $A_1D_1E_2F_2$ ,  $B_1I_2J_2C_1$ ,  $A_1G_2H_2B_1$ ,  $D_1C_1K_2L_2$  e se obter uma nova cruz, como observado na Fig. 33. Uma circunferência  $\mathcal{C}_6$  é circunscrita a esta

nova cruz e pontos  $E_2, F_2, G_2, H_2, I_2, J_2, K_2$  e  $L_2$  são interseções da nova cruz com  $C_6$  de diâmetro  $L_2H_2$ . Temos então que os segmentos  $\overline{H_2K_2} = 3$  e  $\overline{L_2K_2} = 1$  formam com  $L_2H_2$  o triângulo  $\Delta L_2K_2H_2$  reto em  $K_2$ . Logo, pelo teorema de Pitágoras, a hipotenusa  $\overline{L_2H_2} = \sqrt{10}$ .

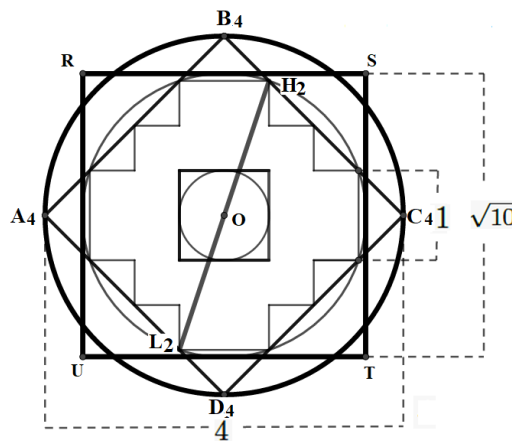
Figura 33 - Diagonal de comprimento  $\sqrt{10}$



Fonte: Autor, 2018

Como a circunferência  $C_6$  tem diâmetro  $\sqrt{10}$ , o quadrado  $RSTU$  que circunscreve  $C_6$  tem lado  $\sqrt{10}$  (Fig. 34). Como foi observado na subseção 2.3.1, a circunferência  $C_5$  tem diâmetro 4, pois circunscreve o quadrado  $A_4B_4C_4D_4$  de diagonal 4.

Figura 34 - Valor aproximado de  $\pi$



Fonte: Autor, 2018

Assim, temos:

- Diâmetro da circunferência  $C_5 = 4$ , então o perímetro de  $C_5$  é  $P_{C_5} = 4\pi$ .
- Lado do quadrado  $RSTU = \sqrt{10}$ , então o perímetro de  $RSTU$  é  $P_{(RSTU)} = 4\sqrt{10}$ .

Igualando o perímetro da circunferência  $P_{C_5}$  e o perímetro do quadrado  $P_{(RSTU)}$ , temos que

$$P_{C_5} = P_{(RSTU)} \implies 4\pi = 4\sqrt{10} \implies \pi = \sqrt{10} \cong 3,16.$$

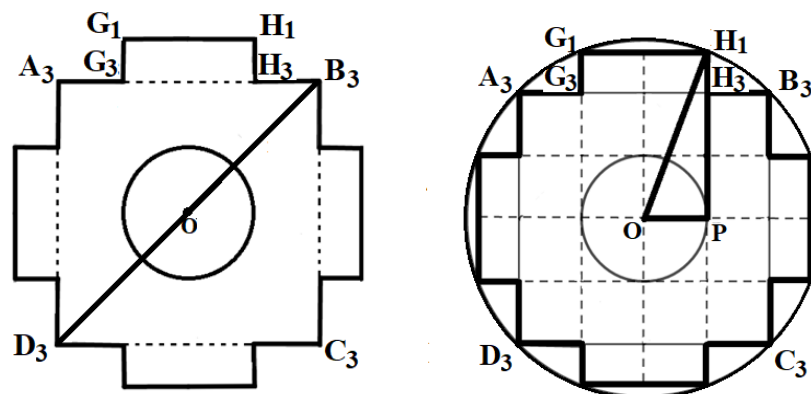
Desta forma os andinos encontraram um valor bem próximo para o número irracional  $\pi$ .

Segundo Villena (1983), para projetar seus calendários e para a observação estelar em um horizonte de  $360^\circ$  os cientistas necessitavam dividir a circunferência e para isso era necessário obter um valor para  $\pi$ . Mesmo que não estivessem a procura exatamente de um valor para  $\pi$ , esse valor era necessário para suas necessidades da época. Como exemplo Villena (1983) cita os observatórios circular de Chavin de Huantar, o das Haldas em Casma e o de Kenko em Cuzco.

### 2.3.3 Área e comprimento do bordo da chakana

Observe na Fig. 35 que podemos dividir a chakana em um quadrado  $A_3B_3C_3D_3$  de lado  $l$  e diagonal  $l\sqrt{2}$ , em quatro retângulos congruentes sendo um deles o retângulo  $G_3G_1H_1H_3$  e na circunferência  $C_1$  de centro no ponto  $O$ , e que o raio de  $C_1$  tem comprimento  $\frac{l}{4}$ , que o raio da circunferência  $C_4$ , circunscrita ao quadrado  $A_3B_3C_3D_3$ , é dado por  $\frac{l\sqrt{2}}{2}$  e que no triângulo  $\Delta OPH_1$ , reto em  $P$ , temos que  $\overline{OP} = \frac{l}{4}$  e  $\overline{OH_1} = \frac{l\sqrt{2}}{2}$ .

Figura 35 - Bordo da Chakana



(a) Divisão da chakana

(b) Raio de  $C_4$

Fonte: Autor, 2018

Vamos determinar  $\overline{H_1P}$  pelo teorema de Pitágoras.

$$\left(\frac{l\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \left(\frac{l}{4}\right)^2 + \overline{H_1P}^2 \implies \overline{H_1P}^2 = \frac{2l^2}{4} - \frac{l^2}{16} = \frac{7l^2}{16} \implies \overline{H_1P} = \frac{l\sqrt{7}}{4}.$$

Como  $\overline{H_3P} = \frac{l}{2}$ , segue que  $\overline{H_1H_3} = \frac{l\sqrt{7}}{4} - \frac{l}{2} = \frac{l(\sqrt{7}-2)}{4}$ .

**Proposição 2.3.1.** *O bordo da chakana com um quadrado de lado  $l$  é dado por*

$$B_{chakana} = \frac{l}{2} (4\sqrt{7} + \pi) \text{ u.m.}$$

*Demonstração.* O bordo da chakana é composto por 16 segmentos congruentes de comprimento  $\frac{l}{4}$ , 8 segmentos congruentes de comprimento  $\frac{l(\sqrt{7}-2)}{4}$  que formam o polígono externo e uma circunferência central  $\mathcal{C}_1$  de raio  $\frac{l}{4}$ , deste modo temos

$$B_{chakana} = 16\frac{l}{4} + 8\frac{l(\sqrt{7}-2)}{4} + 2\pi\frac{l}{4} \text{ u.m.}$$

$$B_{chakana} = \frac{l}{2} (4\sqrt{7} + \pi) \text{ u.m.}$$

□

**Proposição 2.3.2.** *A área da região definida pela chakana é*

$$S_{chakana} = \frac{l^2}{16} (8\sqrt{7} - \pi) \text{ u.a.}$$

*Demonstração.* A área  $S_{chakana}$  é dada pela adição da área  $S_1$  do quadrado  $A_3B_3C_3D_3$  com  $S_2$ , áreas dos quatro retângulos congruentes, subtraindo a área  $S_3$ , do pequeno círculo central de raio  $\frac{l}{4}$ .

$$S_1 = \overline{A_3B_3} \times \overline{B_3C_3} = l^2 \text{ u.a.}$$

$$S_2 = 4 \times \overline{G_1H_1} \times \overline{H_1H_3} = 4 \times \frac{l}{2} \times \frac{l}{4} (\sqrt{7}-2) = \frac{l^2}{2} (\sqrt{7}-2) \text{ u.a.}$$

$$S_3 = \frac{\pi l^2}{16} \text{ u.a.}$$

Assim, a área da chakana será:

$$S_{chakana} = l^2 + \frac{l^2}{2} (\sqrt{7}-2) - \frac{\pi l^2}{16} = l^2 + \frac{l^2\sqrt{7}-2l^2}{2} - \frac{\pi l^2}{16} \text{ u.a.}$$

$$S_{chakana} = \frac{l^2}{16} (8\sqrt{7} - \pi) \text{ u.a.}$$

□



### 3 A RAZÃO ÁUREA E A SEQUÊNCIA DE FIBONACCI

Neste capítulo falaremos sobre as características matemáticas notáveis que a razão áurea e a sequência de Fibonacci apresentam, a construção de algumas figuras geométricas que apresentam a razão áurea e o número de Fibonacci e algumas curiosidades sobre eles.

A razão áurea, também conhecida como número de ouro está intimamente ligada à sequência de Fibonacci. Estudiosos acreditam que a razão áurea está associada à perfeição, está presente na estrutura óssea do corpo humano, nos animais, nas flores e árvores, e também nas dimensões de algumas construções e obras de arte. Por esta razão está ligado a alguns símbolos geométricos considerados sagrados.

De acordo com Lawlor (1996), a razão áurea está presente nas formas geométricas que formam o universo. Para ele, não se encontra o número áureo em qualquer parte da natureza, mas se algo na natureza traz uma harmonia em sua forma, o número áureo ali estará.

Importantes considerações filosóficas, naturais e estéticas surgiram em torno desta proporção, desde que a humanidade começou a refletir sobre as formas geométricas de seu mundo. Está presente na arte sacra do Egito, da Índia, da China, do Islamismo e de outras civilizações tradicionais. Domina a arte e a arquitetura gregas; mantém-se, ainda que oculta, nos monumentos góticos da Idade Média e ressurge para sua consagração durante o Renascimento. Embora impregne muitos aspectos da natureza, nos quais encontram sua inspiração muitos artistas, seria errôneo dizer que se pode descobrir o número áureo em qualquer parte da natureza. Mas pode se dizer que onde quer que exista uma intensificação da função, ou uma especial beleza e harmonia de formas, ali se encontrará o número áureo. É algo que nos lembra a afinidade do mundo criado com a perfeição de sua fonte e de sua potencial evolução futura. (LAWLOR, 1996, p. 53)

#### 3.1 A Razão Áurea

A *razão áurea* é representada pela letra grega  $\Phi$  (Fi), provavelmente a escolha de  $\Phi$  tenha sido por causa do nome do escultor grego Fídias (480 - 430 a.C.), pois acredita-se que Fídias tenha usado a razão áurea quando desenhou o Parthenon<sup>7</sup>.

Há indicações que o estudo da razão áurea vem de muitos séculos. No papiro de Rhind<sup>8</sup> há referência a uma *razão sagrada* que se acredita fazer referência à razão áurea.

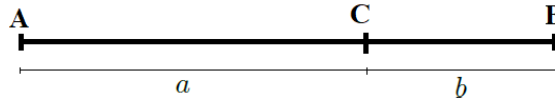
Segundo Livio (2006), o matemático grego Euclides (360 - 295 a.C.), em um dos

<sup>7</sup> Templo dedicado à deusa Athena. O mais conhecido dos edifícios remanescentes da Grécia Antiga.

<sup>8</sup> Também conhecido como papiro de Ahmes é um documento egípcio de cerca de 1650 a.C., onde um escriba de nome Ahmes detalha a solução de 85 problemas matemáticos.

livros da coleção *Elementos*<sup>9</sup>, tenha definido, por volta de 300 a.C., que um segmento  $AB$  de comprimento qualquer é dividido em *razão extrema e média* por um ponto  $C$  sobre o segmento  $AB$  quando este ponto  $C$  forma dois segmentos  $AC$  e  $CB$  de modo que  $\overline{AC} > \overline{CB}$  (Fig. 36), e razão entre  $\overline{AC}$  e  $\overline{CB}$  é igual à razão entre  $\overline{AB}$  e  $\overline{AC}$ . Neste caso, dizemos também que o segmento foi cortado em sua *seção áurea*.

Figura 36 - Segmento Cortado em sua Seção Áurea



Fonte: Autor, 2018

No segmento da Fig. 36, denotando  $\overline{AC} = a$ ,  $\overline{CB} = b$  e  $\overline{AB} = a + b$ , temos

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} \implies \frac{a}{a} + \frac{b}{a} = \frac{a}{b} \implies 1 + \frac{b}{a} = \frac{a}{b}.$$

Fazendo  $\frac{a}{b} = x$  e  $\frac{b}{a} = \frac{1}{x}$ , teremos

$$1 + x = \frac{1}{x} \implies x^2 - x - 1 = 0.$$

Resolvendo a equação, encontramos as raízes

$$x_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad \text{ou} \quad x_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}.$$

Logo,

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \Phi$$

Chamamos a razão  $\frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1,618033\dots = \Phi$  de razão áurea e a razão  $\frac{1 - \sqrt{5}}{2} = -0,618033\dots = -\frac{1}{\Phi}$  chamamos seção áurea.

Podemos perceber claramente que  $\Phi$  é um número irracional, pois é metade da soma de 1 com o número irracional  $\sqrt{5}$ .

Existem várias formas de se obter a razão áurea utilizando régua e compasso. Vejamos alguns desses exemplos a seguir:

### Exemplo 3.1.1.

Considere um segmento  $AB$  qualquer, determine o ponto médio  $M$  de  $AB$  e a reta

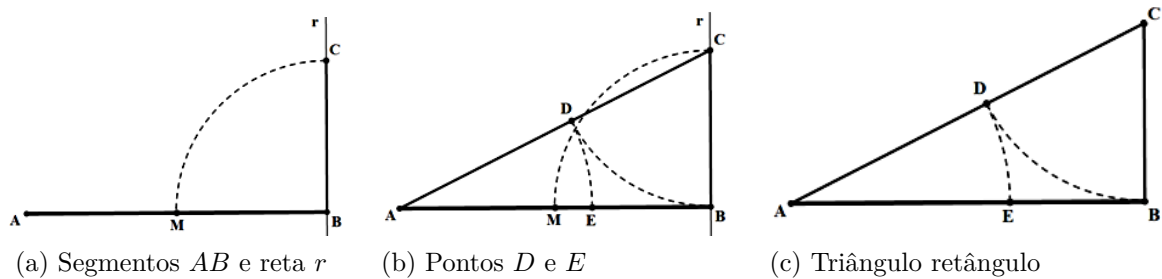
<sup>9</sup> Coleção de Livros, com 13 volumes, que trata da geometria e da teoria dos números.

$r$  perpendicular a  $AB$  passando pelo ponto  $B$ . Com centro no ponto  $B$  e abertura  $\overline{BM}$  trace o arco de circunferência determinando o ponto  $C$ , interseção do arco com a reta  $r$ .

Trace o segmento  $AC$ . Com centro no ponto  $C$  e abertura  $\overline{CB}$ , trace um arco de circunferência determinando o ponto  $D$ , interseção do arco com o segmento  $AC$ . Com centro no ponto  $A$  e abertura  $\overline{AD}$ , trace um arco de circunferência determinando o ponto  $E$ , interseção do arco com o segmento  $AB$ .

Terminado este processo formamos um triângulo  $\Delta ABC$ , reto em  $B$ , com catetos  $AB$  e  $BC$  e hipotenusa  $AC$ . Além disso, ficam determinados os pontos  $D$  em na hipotenusa  $AC$  e  $E$  em no cateto  $AB$  de tal forma que  $\overline{DC} = \overline{BC} = \frac{\overline{AB}}{2}$ . Todo o processo descrito pode ser observado na Fig. 37.

Figura 37 - Obtenção da Seção Áurea



Fonte: Autor, 2018

Pelo teorema de Pitágoras temos

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \left(\frac{\overline{AB}}{2}\right)^2 \Rightarrow \overline{AC} = \frac{\overline{AB}\sqrt{5}}{2}.$$

Então,

$$\overline{AE} = \overline{AD} = \overline{AC} - \overline{CD} = \frac{\overline{AB}\sqrt{5}}{2} - \frac{\overline{AB}}{2} = \overline{AB} \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right).$$

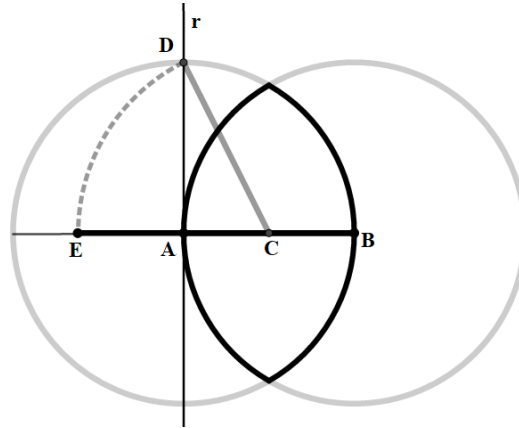
Assim,

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AB} \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \Phi.$$

Desta forma temos a seção áurea no segmento  $AB$ .

### Exemplo 3.1.2.

Construída a vesica piscis com circunferências de raios  $R$  e centros  $A$  e  $B$ , traçamos o segmento  $AB$ ; a reta  $r$ , que passa por  $A$  e é perpendicular ao segmento  $AB$ ; e o ponto  $C$ , médio de  $AB$  (Fig. 38).

Figura 38 - Vesica Piscis e  $\Phi$ 

Fonte: Autor, 2018

Marcamos o ponto  $D$ , interseção da reta  $r$  com a circunferência de centro  $A$ .

Traçando o segmento  $CD$ , temos o triângulo retângulo  $\triangle CAD$  reto em  $A$ . Traçamos o arco de raio  $\overline{CD}$  com centro em  $C$  obtendo assim o ponto  $E$ , interseção do arco com o prolongamento do segmento  $AB$ , definindo assim o segmento  $CE$  de mesmo comprimento que o segmento  $CD$ .

Sendo  $\overline{AD} = R$  e  $\overline{AC} = \frac{R}{2}$ , pelo teorema de Pitágoras segue que

$$\overline{CD}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{AC}^2 = R^2 + \left(\frac{R}{2}\right)^2 = R^2 + \frac{R^2}{4} = \frac{5R^2}{4} \implies CD = \frac{R\sqrt{5}}{2}.$$

Sendo  $\overline{CE} = \overline{CD}$ , temos que  $\overline{CE} = \frac{R\sqrt{5}}{2}$ .

Como  $\overline{BE} = \overline{BC} + \overline{CE}$  temos

$$\overline{BE} = \frac{R}{2} + \frac{R\sqrt{5}}{2} \implies \overline{BE} = R \frac{(1 + \sqrt{5})}{2}.$$

Assim, podemos definir a seguinte razão:

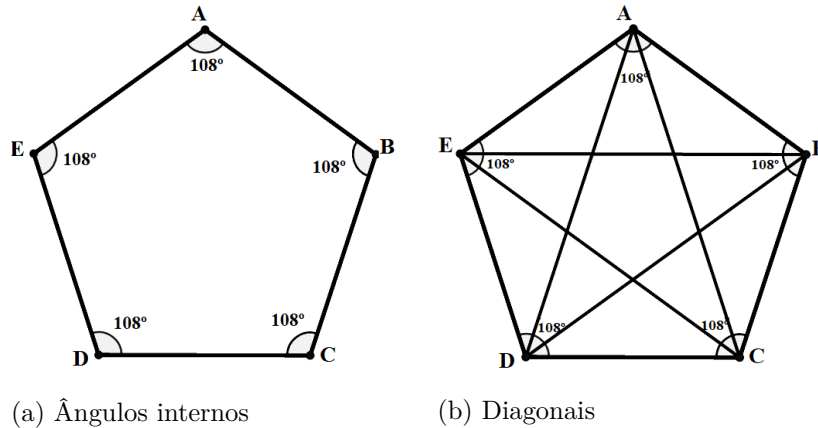
$$\frac{\overline{BE}}{\overline{BA}} = \frac{R \frac{(\sqrt{5} + 1)}{2}}{R} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \Phi$$

Portanto, na vesica piscis  $V$  encontramos um segmento cortado em sua seção áurea.

### Exemplo 3.1.3.

Um pentágono regular  $ABCDE$  possui seus ângulos internos medindo  $108^\circ$  e suas diagonais possuem o mesmo comprimento (Fig. 39).

Figura 39 - Pentágono Regular

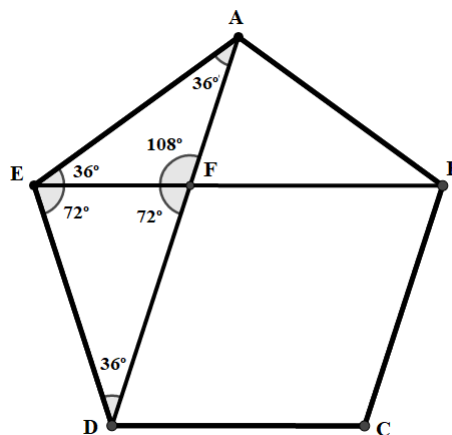


Fonte: Autor, 2018

Denotando como  $l$  e  $d$  os comprimentos dos lados e as diagonais, respectivamente, do pentágono regular, vamos obter a razão  $\frac{d}{l}$ .

As diagonais  $AD$  e  $BE$  cortam-se em um ponto  $F$ . Os lados  $AE$  e  $ED$  e a diagonal  $AD$  determinam o triângulo isósceles  $\triangle AED$ , com ângulos internos de medidas  $E\hat{D}A = D\hat{A}E = 36^\circ$  e  $A\hat{E}D = 108^\circ$ . O lado  $AE$  e os segmentos  $AF$  e  $EF$  determinam o triângulo isósceles  $\triangle AFE$ , de ângulos internos  $E\hat{A}F = A\hat{E}F = 36^\circ$  e  $A\hat{F}E = 108^\circ$  (Fig. 40). Como os triângulos  $\triangle AED$  e  $\triangle AFE$  têm ângulos congruentes, então eles são semelhantes. Além disso, temos que  $\overline{AF} = \overline{EF}$ ,  $\overline{FD} = \overline{ED} = \overline{AE}$  e que  $\overline{AF} = \overline{AD} - \overline{DF}$  ou seja  $\overline{AF} = \overline{AD} - \overline{AE}$ .

Figura 40 - Pentágono e Razão Áurea



Fonte: Autor, 2018

Pela semelhança de triângulos, temos que:

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{AF}}{\overline{AE}} \implies \frac{\overline{AE}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{AD} - \overline{AE}}{\overline{AE}} \implies \frac{\overline{AE}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{AE}} - 1. \quad (25)$$

Denotando a razão  $\frac{d}{l} = \frac{\overline{AD}}{\overline{AE}} = k$ , então

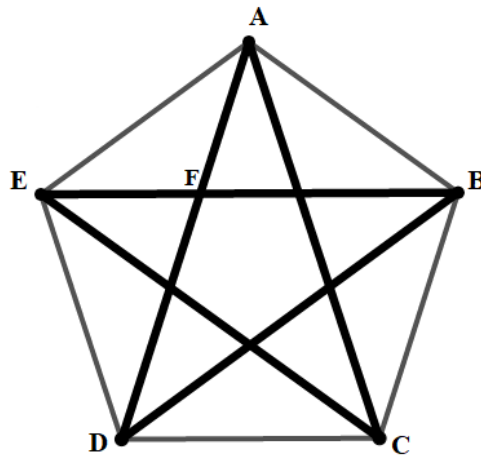
$$\frac{1}{k} = k - 1 \implies k^2 - k - 1 = 0 \implies k = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1,618\dots$$

Portanto a razão entre a diagonal e o lado de um pentágono regular é  $\Phi$ .

#### Exemplo 3.1.4.

A figura geométrica que deriva do pentágono, formada por suas diagonais é o *pentagrama* (Fig. 41). Segundo Lawlor (1996, p. 75), “O pentagrama da estrela formado pelas diagonais do pentágono simboliza a humanidade transformada ou aperfeiçoada, pois todos os segmentos do pentagrama da estrela derivam da secção áurea”. Há relatos que os pitagóricos usaram o pentagrama como símbolo de sua irmandade.

Figura 41 - Pentagrama



Fonte: Autor, 2018

Como já observado no exemplo 3.1.3, na Fig. 40,  $\overline{AE} = \overline{FD}$ . Desta forma, na equação (25), temos que

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{AF}}{\overline{AE}} \implies \frac{\overline{FD}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{AF}}{\overline{FD}} \implies \frac{\overline{FD}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{AD} - \overline{FD}}{\overline{FD}} \implies \frac{\overline{FD}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{FD}} - 1. \quad (26)$$

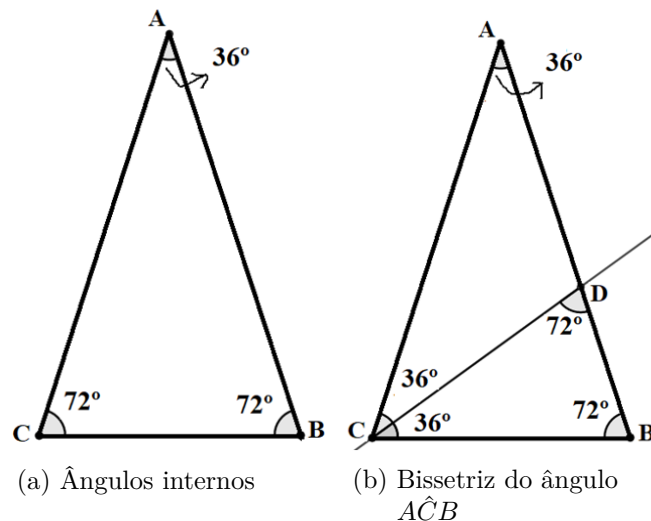
Resolvendo a equação (26), obtemos que  $\frac{AD}{FD} = \Phi$ , ou seja, a razão áurea está presente na construção do pentagrama.

### Exemplo 3.1.5.

Chamamos de *triângulo áureo* qualquer triângulo isósceles de ângulos internos de medidas  $72^\circ$ ,  $72^\circ$  e  $36^\circ$  (Fig. 42) cuja razão entre as medidas de um de seus lados congruentes e sua base é igual a  $\Phi$ .

Considerando um triângulo isósceles  $\triangle ABC$  de lados iguais  $\overline{AB} = \overline{AC} = l$  e base  $\overline{BC} = x$  cujos ângulos internos medem  $72^\circ$ ,  $72^\circ$  e  $36^\circ$ . Traçamos a bissetriz de um ângulo da base determinando o ponto  $D$ , interseção da bissetriz com o lado oposto ao ângulo escolhido (neste caso, foi escolhido o ângulo  $\hat{A}CB$  formando o triângulo  $\triangle BCD$ ). O triângulo  $\triangle BCD$  possui ângulos congruentes aos do triângulo  $\triangle ABC$ , logo  $\triangle ABC$  e  $\triangle BCD$  são semelhantes.

Figura 42 - Triângulo Áureo



Fonte: Autor, 2018

Temos ainda que  $\overline{AD} = \overline{CD} = \overline{BC} = x$ , pois o ângulo  $\hat{D}CA$  é congruente ao ângulo  $\hat{DAC}$  e o ângulo  $\hat{C}DB$  é congruente ao ângulo  $\hat{C}BD$ , e  $\overline{DB} = \overline{AB} - \overline{AD}$ , pela semelhança de triângulos, vem que

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{DB}} \implies \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB} - \overline{AD}} \implies \frac{l}{x} = \frac{x}{l - x}. \quad (27)$$

Desenvolvendo a igualdade (27) obtemos a equação  $l^2 - lx - x^2 = 0$  e resolvendo a equação temos:

$$l = \frac{x \pm \sqrt{x^2 + 4x^2}}{2} = \frac{x \pm x\sqrt{5}}{2} = x \left( \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \right)$$

Como a raiz positiva é  $l = x \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)$ , vem que

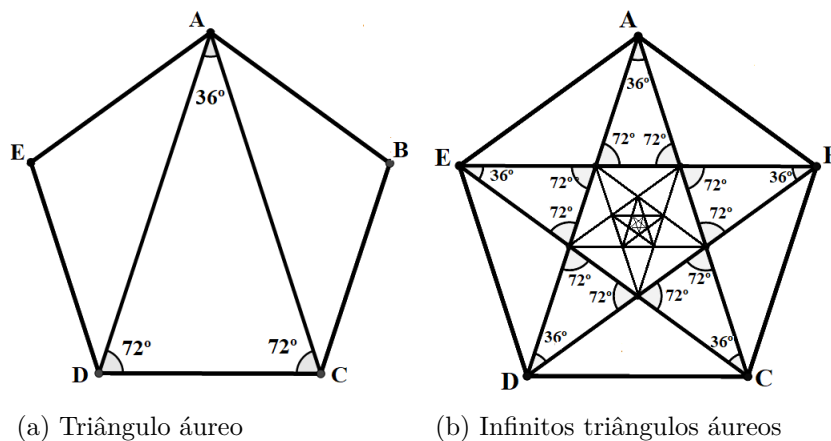
$$\frac{l}{x} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

Ou seja,

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \Phi.$$

Podemos obter triângulos áureos com lados de comprimentos diferentes no interior de um pentágono regular (Fig. 43).

Figura 43 - Triângulo Áureo no Pentágono



Fonte: Autor, 2018

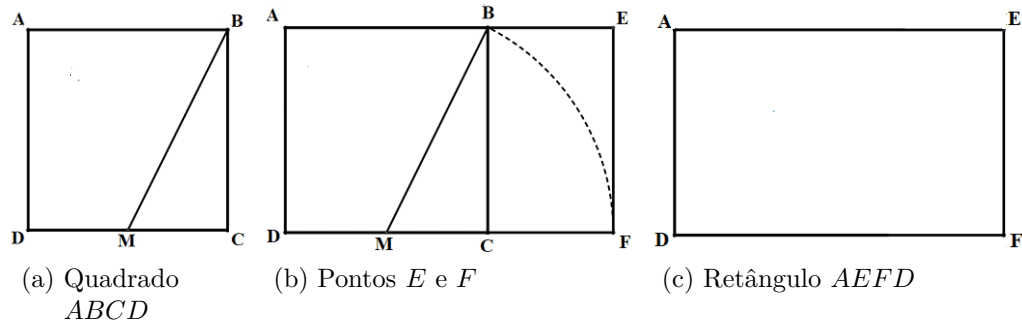
### Exemplo 3.1.6.

Chamamos de *retângulo áureo* qualquer retângulo cuja razão entre as medidas de seus lados, do maior para o menor, é igual a  $\Phi$ .

Para a construção do retângulo áureo (Fig. 44), tomemos um quadrado  $ABCD$  de lado  $l$ . Sobre o lado  $CD$ , marcamos o ponto  $M$ , médio de  $CD$ , obtendo o segmento  $MB$ . Traçamos um arco de circunferência de centro no ponto  $M$  e raio  $\overline{MB}$  que determina o ponto  $F$ , interseção do arco com o prolongamento do lado  $DC$ . Determinamos o ponto  $E$ , interseção da reta que passa por  $F$  perpendicular a  $DC$  com o prolongamento do lado  $AB$ . Assim, os pontos  $A, E, F$  e  $D$  são os vértices de um retângulo.



Figura 44 - Retângulo áureo



Fonte: Autor, 2018

Pelo teorema de Pitágoras

$$\overline{MB}^2 = l^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 \implies \overline{MB} = l\frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Como  $\overline{MB} = \overline{MF}$ , segue que o lado maior do retângulo tem comprimento

$$\overline{DF} = \overline{DM} + \overline{MF} = \frac{l}{2} + l\frac{\sqrt{5}}{2},$$

desta forma vem que

$$\overline{DF} = l\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right).$$

Temos, então

$$\frac{\overline{DF}}{\overline{AD}} = \frac{l\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)}{l} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \Phi.$$

### 3.2 Os Números de Fibonacci

O matemático italiano Leonardo Fibonacci (1170 - 1250), também conhecido como Leonardo de Pisa, tem contribuições diretas na literatura da razão áurea em seu livro sobre geometria, *Practica Geometriae* (Prática de Geometria). Um problema muito conhecido que é atribuído à Fibonacci é o problema dos coelhos que segue as seguintes suposições:

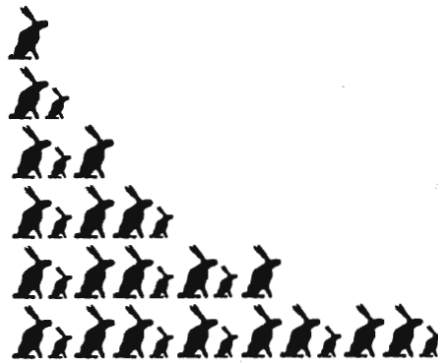
Um casal de coelhos é colocado em um cercado. O casal de coelhos só atinge a maturidade sexual após um mês. Não há problemas genéticos no cruzamento consanguíneo e em todos os meses nasce um novo casal de coelhos. Quantos casais de coelhos serão gerados após um ano?

Começando com um casal adulto, passado o primeiro mês, este gera outro casal,

ficando dois casais, um de adulto e um de filhotes. Após o segundo mês, o primeiro casal gera outro casal de filhotes, enquanto o primeiro casal de filhotes cresce, ficando três casais, dois de adultos e um de filhote. Após o terceiro mês, cada um dos dois casais adultos gera outro casal e o casal de filhotes cresce, o que nos deixa com cinco casais, três de adultos e dois de filhotes. Após o quarto mês, cada um dos três casais adultos gera um casal e os dois casais de filhotes crescem, resultando em um total de oito casais, cinco de adultos e três de filhotes. Após cinco meses, temos um casal de filhotes de cada um dos cinco casais adultos.

O processo descrito é ilustrado na Fig. 45 em que o desenho de um coelho maior representa um casal adulto e o menor um casal de filhotes.

Figura 45 - Casais de Coelhos



Fonte: Livio (2006)

Podemos listar a sucessão da quantidade de casais de coelhos adultos da seguinte maneira: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144. Assim, teremos 233 casais de coelhos ao fim de um ano, sendo 144 casais adultos e 89 de filhotes.

Na sequência numérica que representa a quantidade de casais adultos, cada termo é igual à soma dos dois termos anteriores. Essa sequência é conhecida como *sequência de Fibonacci* que pode ser expressa matematicamente como

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}; n \geq 3, \quad (28)$$

onde  $F_n$  representa o  $n$ -ésimo número da sequência e  $F_1 = F_2 = 1$ .

A sequência de Fibonacci apresenta propriedades interessantes:

- **Propriedade 1:** *Dois números consecutivos da sequência ( $F_n$ ) são primos entre si.*

Na equação (28) da sequência de Fibonacci,  $F_n = 1 \cdot F_{(n-1)} + F_{(n-2)}$ .

Então, a divisão  $\frac{F_n}{F_{(n-1)}}$  tem quociente 1 e resto  $F_{(n-2)}$ .

Como  $F_{(n-1)} = 1.F_{(n-2)} + F_{(n-3)}$ , então  $\frac{F_{(n-1)}}{F_{(n-2)}}$  tem quociente 1 e resto  $F_{(n-3)}$ .

Continuando as divisões dos números consecutivos temos finalmente

$F_4 = 1.F_3 + F_2$ , ou seja,  $\frac{F_4}{F_3}$  tem quociente 1 e resto  $F_2$ .

$F_3 = 2.F_2 + 0$ , ou seja,  $\frac{F_3}{F_2}$  tem quociente 2 e resto 0.

Como o último resto não nulo obtido é  $F_2$ , temos

$$\text{mdc}(F_n, F_{(n+1)}) = F_2 = 1.$$

Portanto, os números  $F_{(n+1)}$  e  $F_n$  são primos entre si.

- **Propriedade 2:** A soma dos  $n$  primeiros termos  $S_{(F_n)}$  é igual a  $F_{(n+2)} - 1$ .

Na sequência de Fibonacci podemos observar que

$$F_1 = F_3 - F_2$$

$$F_2 = F_4 - F_3$$

$$F_3 = F_5 - F_4$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$F_{(n-1)} = F_{(n+1)} - F_n$$

$$F_n = F_{(n+2)} - F_{(n+1)}$$

Somando membro a membro e cancelando os termos simétricos obtemos

$$S_{(F_n)} = F_{(n+2)} - F_2.$$

Como  $F_2 = 1$ , vem que

$$S_{(F_n)} = F_{(n+2)} - 1. \quad (29)$$

- **Propriedade 3:** A soma  $S_{(F_n)^2}$  dos quadrados dos  $n$  primeiros termos da sequência  $(F_n)$  é dada por  $S_{(F_n)^2} = F_n F_{(n+1)}$ .

Podemos escrever da relação da equação (28) que

$$F_{(n-1)} = F_{(n+1)} - F_n \implies F_n = F_{(n+1)} - F_{(n-1)}.$$

Desta forma,

$$(F_n)^2 = F_n F_n = F_n (F_{(n+1)} - F_{(n-1)}) = F_n F_{(n+1)} - F_n F_{(n-1)}.$$

Como  $F_1 = F_2 = 1$ , podemos escrever que

$$\begin{aligned}
 (F_1)^2 &= F_1 F_2 \\
 (F_2)^2 &= F_2 F_3 - F_1 F_2 \\
 (F_3)^2 &= F_3 F_4 - F_2 F_3 \\
 (F_4)^2 &= F_4 F_5 - F_3 F_4 \\
 &\vdots \\
 (F_{n-1})^2 &= F_{(n-1)} F_n - F_{(n-2)} F_{(n-1)} \\
 (F_n)^2 &= F_n F_{(n+1)} - F_{(n-1)} F_n
 \end{aligned}$$

Somando membro a membro e cancelando os termos simétricos, teremos

$$S_{(F_n)^2} = F_n F_{(n+1)}. \quad (30)$$

Para determinar uma fórmula fechada para cada termo da sequência de Fibonacci  $(F_n)$  é necessário notar que escrever a fórmula  $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$  é o mesmo que escrever  $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ , ou seja, trata-se de uma recorrência linear homogênea de segunda ordem com equação característica

$$r^2 - r - 1 = 0. \quad (31)$$

Desta forma, o termo geral  $F_n$  é da forma

$$F_n = C_1 \times r_1 + C_2 \times r_2. \quad (32)$$

Onde  $C_1$  e  $C_2$  são constantes reais e  $r_1$  e  $r_2$  raízes da equação (31).

Resolvendo a equação (31) temos que

$$r_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad \text{e} \quad r_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}.$$

Substituindo na equação (32) temos

$$F_n = \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n C_1 + \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n C_2. \quad (33)$$

Com os valores de  $F_1 = 1$  e  $F_2 = 1$  teremos o sistema:

$$\begin{cases} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)C_1 + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)C_2 = 1 \\ \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 C_1 + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 C_2 = 1 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, teremos que  $C_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}$  e  $C_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ .

Substituindo  $C_1$  e  $C_2$  na equação (33), temos como solução da recorrência

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[ \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \right]. \quad (34)$$

A fórmula da equação (34) é conhecida como *fórmula de Binet* e fornece qualquer termo da sequência  $(F_n)$ . Para uma boa leitura sobre recorrências, fica a sugestão do livro de Matemática Discreta da coleção do PROFMAT (MORGADO; CARVALHO, 2015).

Percebemos que o primeiro termo entre os colchetes é  $\Phi^n$  e o segundo é  $\left(-\frac{1}{\Phi}\right)^n$ , o que já indica uma conexão entre a sequência de Fibonacci e a razão áurea.

Existem outras conexões entre os números de Fibonacci e o número de ouro. Observe as razões entre alguns números consecutivos da sequência  $(F_n)$  de Fibonacci a seguir:

$$\frac{8}{5} = 1,6; \quad \frac{144}{89} = 1,6179\dots; \quad \frac{610}{377} = 1,6180\dots; \quad \frac{2584}{1597} = 1,6180\dots; \quad \frac{6765}{4181} = 1,6180\dots$$

Verificamos que a razão entre os números consecutivos  $\frac{F_{n+1}}{F_n}$  da sequência  $(F_n)$  de Fibonacci parece se aproximar do número  $\Phi$  para valores de  $n$  cada vez maiores. Vamos verificar isto através do seguinte teorema:

**Teorema 3.2.1.** *Na sequência de Fibonacci  $(F_n)$ , a razão entre seus termos consecutivos converge para o número  $\Phi$  quando o valor de  $n$  cresce, ou seja*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \Phi.$$

*Demonstração.* Utilizando a fórmula de Binet da equação (34), com os termos consecutivos  $F_n$  e  $F_{n+1}$ , temos

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[ \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \right] \quad (35)$$

e

$$F_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[ \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} \right]. \quad (36)$$

A razão entre as equações (36) e (35), é

$$\frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{\frac{1}{\sqrt{5}} \left[ \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right]}{\frac{1}{\sqrt{5}} \left[ \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right]} = \frac{\left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \left[ 1 - \frac{\left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1}}{\left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1}} \right]}{\left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n \left[ 1 - \frac{\left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n}{\left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n} \right]}.$$

Desta forma temos

$$\frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \underbrace{\left[ \frac{1 - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}} \right)^{n+1}}{1 - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}} \right)^n} \right]}_{g(n)}.$$

Como  $-1 \leq \frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}} \leq 1$ , vem que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}} \right)^{n+1} = 0.$$

Logo,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g(n) = \frac{1-0}{1-0} = 1$$

Portanto,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \times 1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Concluindo então que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \Phi.$$

□

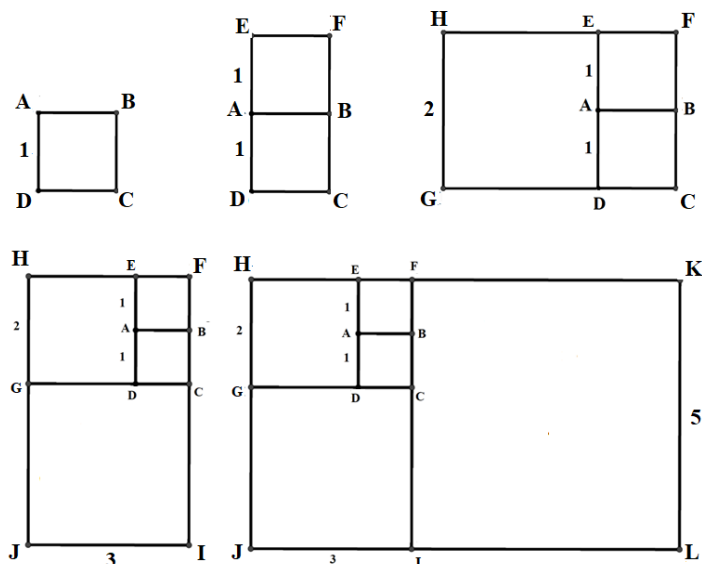
### 3.2.1 Espiral de Fibonacci

Outro fato interessante entre os números de Fibonacci e a razão áurea vem através do retângulo áureo. O retângulo conhecido como *retângulo de Fibonacci* pode ser construído através da justaposição de quadrados cujos lados têm como comprimento os números da sequência de Fibonacci.

Esta construção, ilustrada na Fig. 46, pode ser feita como se segue:

- Iniciamos com um quadrado  $ABCD$  com o comprimento do lado igual a 1.
- Construimos outro quadrado  $AEFB$ , com lado de comprimento também igual a 1, formando um retângulo  $EFCD$  em que o comprimento lado maior é 2, pois é a soma dos comprimentos dos lados dos dois quadrados iniciais.
- Construimos o quadrado  $HEDG$  com comprimento do lado igual a 2, utilizando o lado maior do retângulo  $EFCD$ , formando um retângulo  $HFCD$  em que o comprimento do lado maior é 3, pois é a soma dos comprimentos do lado menor do retângulo  $EFCD$  com o lado do quadrado  $HEDG$ .
- Construimos o quadrado  $GCIJ$  com comprimento do lado igual a 3, utilizando o lado maior do retângulo  $HFCD$ , formando um retângulo  $HFIJ$  em que o lado maior é 5, pois é a soma dos comprimentos do lado menor do retângulo  $HFCD$  com o lado do quadrado  $GCIJ$ .
- Construimos o quadrado  $FKLI$  com comprimento do lado igual a 5, utilizando o lado maior do retângulo  $HFIJ$ , formando um retângulo  $HKLJ$  em que o lado maior é 8, pois é a soma dos comprimentos do lado menor do retângulo  $HFIJ$  com o lado do quadrado  $FKLI$ .

Figura 46 - Retângulo de Fibonacci



Fonte: Autor, 2018

A construção segue até onde se queira. Esta sequência encerra-se no retângulo  $HKLJ$  com comprimento dos lados iguais a 5 e 8.

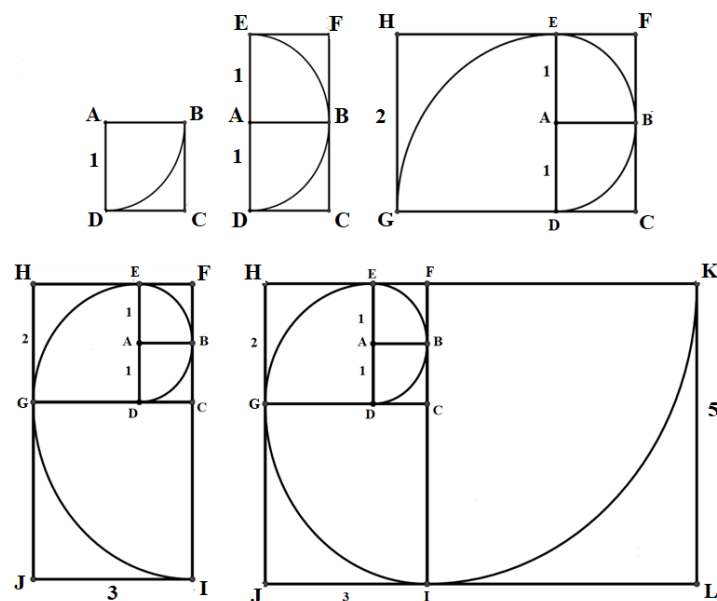
Como os retângulos são construídos com uma sequência de quadrados que têm os comprimentos dos lados seguindo a sequência de Fibonacci (Fig. 46), e como já foi observado que na sequência  $(F_n)$  a razão entre termos consecutivos converge para  $\Phi$  e a razão entre os lados de um retângulo áureo é  $\Phi$ , podemos então concluir que quanto mais se constrói quadrados para formar o retângulo, mais este retângulo se aproxima de um retângulo áureo.

Observamos também que a soma das áreas dos  $n$  quadrados é igual a área do retângulo por eles formado, ou seja, é a interpretação geométrica da fórmula (30) da soma dos quadrados dos  $n$  primeiros termos da sequência  $(F_n)$ .

A espiral obtida através de arcos de circunferências cujos raios são os lados dos quadrados construídos pelo mesmo processo ilustrado na Fig. 46 é conhecida como *espiral de Fibonacci*. Sua construção, observada na Fig. 47, segue os processo descrito a seguir:

- No quadrado  $ABCD$ , com centro no ponto  $A$  e abertura  $\overline{AB}$ , trace o arco  $\widehat{BD}$ .
- No quadrado  $AEFB$ , também com centro no ponto  $A$  e abertura  $\overline{AD}$ , trace o arco  $\widehat{BE}$ .
- No quadrado  $HEDG$ , com centro no ponto  $D$  e abertura  $\overline{DE}$ , trace o arco  $\widehat{EG}$ .
- No quadrado  $GCIJ$ , com centro no ponto  $C$  e abertura  $\overline{CG}$ , trace o arco  $\widehat{GI}$ .
- No quadrado  $FKLI$ , com centro no ponto  $F$  e abertura  $\overline{FI}$ , trace o arco  $\widehat{IK}$ .

Figura 47 - Espiral de Fibonacci





A construção de arcos de circunferência segue até onde se queira. Com essa sequência os arcos construídos formam a espiral  $\epsilon$ .

O comprimento de uma circunferência de raio  $R$  é dado por  $2\pi R$  e cada arco é um quarto de circunferência, pois o ângulo central de cada arco é um ângulo reto, então o comprimento de um arco é dado por

$$\frac{2\pi R}{4} = \frac{\pi R}{2}.$$

Assim, nos quadrados  $ABCD$  e  $AEFB$  os comprimentos de cada arco de raio 1 são iguais a  $\frac{\pi}{2}$ . No quadrado  $HEDG$  o comprimento do arco de raio 2 é igual a  $\frac{2\pi}{2}$ . No quadrado  $GCIJ$  o comprimento do arco de raio 3 é igual a  $\frac{3\pi}{2}$ . No quadrado  $FKLI$  o comprimento do arco de raio 5 é igual a  $\frac{5\pi}{2}$ .

Denotando  $C_\epsilon$  como o comprimento da espiral  $\epsilon$ , temos que  $C_\epsilon$  é a soma dos comprimentos dos arcos construídos, então

$$C_\epsilon = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{2} + \frac{3\pi}{2} + \frac{5\pi}{2}.$$

Colocando  $\frac{\pi}{2}$  em evidência

$$C_\epsilon = \frac{\pi}{2} (1 + 1 + 2 + 3 + 5).$$

Observamos a soma dos números  $n$  primeiros números da sequência  $(F_n)$  de Fibonacci.

Assim, da fórmula (29), vem que

$$C_\epsilon = \frac{\pi}{2} (F_{(n+2)} - 1),$$

onde  $n$  é a quantidade de quadrados utilizados na construção de  $\epsilon$ .

A espiral, não necessariamente de Fibonacci, é um símbolo que foi muito utilizado por diversas culturas como a Hindu, Asteca, Maia, Inca. Símbolo do crescimento, expansão e energia cósmica, tem diferentes significados de acordo com cada civilização, mas todos relacionados com o universo, as estrelas, evolução e transformação.

Na Fig. 48 observamos alguns exemplos de diferentes espirais: espiral gravada na rocha na entrada do Chaco Canyon, Novo México, Estados Unidos; Tumba de Newgrange, Condado de Meath, Irlanda; Complexo megalítico de Tarxien, na ilha de Malta; Urna funerária egípcia; Grande espiral nas linhas de Nasca, no Peru; Espiral de Hopi no Arizona, Estados Unidos.

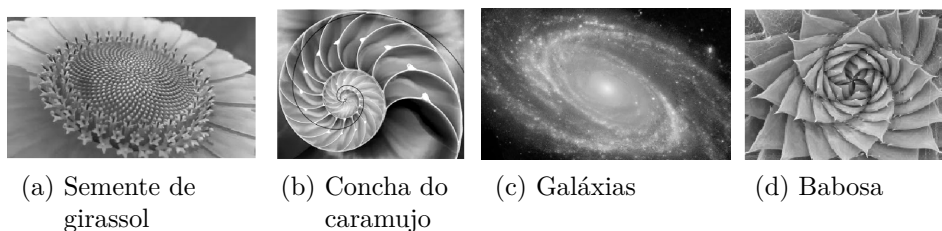
Figura 48 - Espirais Antigas



Fonte: [http://www.tiemposviolentos.org/simbologia\\_de\\_las\\_espirales.php](http://www.tiemposviolentos.org/simbologia_de_las_espirales.php)

Diversos exemplos de espirais que se apresentam na natureza. Alguns deles estão ilustrados na Fig. 49, como a disposição das sementes de girassol, a concha do caramujo, as galáxias e a babosa (*Aloe polyphylla*).

Figura 49 - Espirais na Natureza



Fonte: <https://angelinawittmann.blogspot.com/2013/11/retangulo-aureo-natureza-e-arte.html>

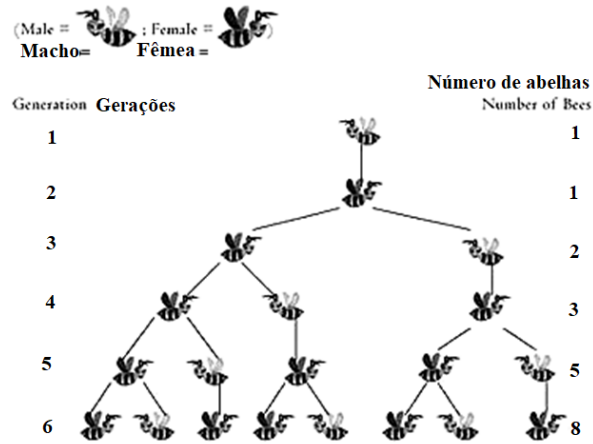
Existem muitas publicações afirmando que a sequência de Fibonacci e a razão áurea estão presentes na natureza, em construções da antiguidade e em obras de artes, como alguns casos apresentados a seguir:

- **Abelhas:**

Na colmeia, o zangão (abelha macho) é chocado de ovos não fertilizados, ou seja, cada zangão não tem pai mas têm um avô por parte materna. A abelha fêmea

exige ambos os pais. Assim, o número de abelhas por geração segue a sequência de Fibonacci, conforme observado na Fig. 50.

Figura 50 - Gerações de abelhas



Fonte: <http://www.chabad.org.br/biblioteca/artigos/codigo/home.html>

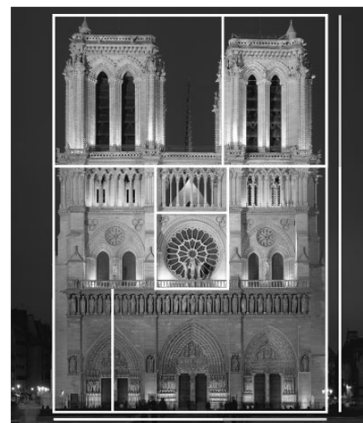
### • Arquitetura:

Existem muitos exemplos sobre o número de ouro na arquitetura. O Partenon e a Catedral de Notre Dame são dois desses exemplos em que algumas publicações afirmam que o retângulo áureo se ajusta às suas construções.

Figura 51 - Razão Áurea nas Construções



(a) Partenon



(b) Catedral de Notre Dame

Fonte: <http://projetobatente.com.br/regra-aurea-na-arquitetura/>

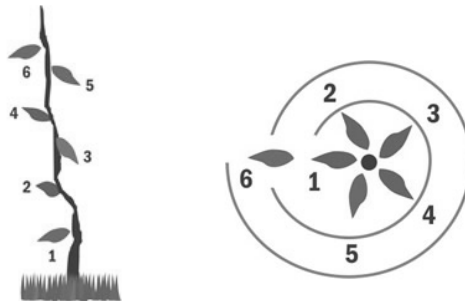
Pennick (1980) afirma que o arquiteto inglês Francis Cranmer Penrose (1817 - 1903) mediu as dimensões do Partenon com precisão e chegou à conclusão que as elevações das fachadas do Partenon foram determinadas pela seção áurea.

- **Plantas:**

O estudo e classificação de diversas formas de disposição e organização das folhas em uma planta é conhecido como filotaxia. Através de experiências com várias plantas biólogos observaram que o número de voltas para nascer uma nova folha que se sobrepõe à primeira e o número de folhas nessas voltas geralmente assumem valores como 1, 2, 3, 5, 8, 13, ..., que são os números da sequência de Fibonacci.

Na Fig. 52 observamos que as folhas crescem de tal forma que para irmos da folha 1 até a folha 6, que se sobrepõe à folha 1, são dadas duas voltas em espiral. A última folha do ciclo, antes de sobreposição é a folha 5, número da sequência de Fibonacci.

Figura 52 - Folhas e Fibonacci



(a) Folhas numeradas (b) Voltas em espiral

Fonte: <http://www.republicaeditorial.com.br/?p=594>

Observando as disposições das folhas de algumas espécies de árvores o estudante de Long Island, Nova York, Aidan Dwyer, com apenas 13 anos, criou uma forma diferente de dispor painéis solares. A estrutura tem a forma de uma árvore com os painéis nos “galhos” ao invés de folhas (Fig. 53).

Figura 53 - Árvore Solar



Fonte: Xavier (2016)

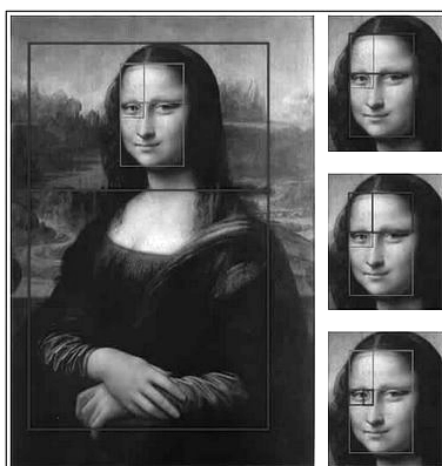
Segundo Xavier (2016), em suas observações, Aidan notou que em algumas espécies de árvores a disposição dos galhos segue uma regra, e esta regra é a sequência de Fibonacci. O carvalho, por exemplo, apresenta a proporção de  $\frac{2}{5}$ , ou seja, são necessários 5 galhos para que a espiral dê um número exato de 2 voltas.

A invenção de Aidan gerou 20% mais eletricidade que painéis planos, pois a disposição dos galhos ajudava em uma melhor captação da luz solar, comprovando a eficiência da natureza.

### • Pintura e Arte:

Muitos pesquisadores acreditam que artistas usaram a razão áurea em seus trabalhos. Um exemplo muito citado é a Mona Lisa de Leonardo da Vinci (Fig. 54) que, ao construir um retângulo em torno de seu rosto, ele terá a proporção do retângulo áureo. Ao subdividir este retângulo usando a linha dos olhos para traçar uma reta horizontal e ter de novo a razão áurea.

Figura 54 - Monalisa

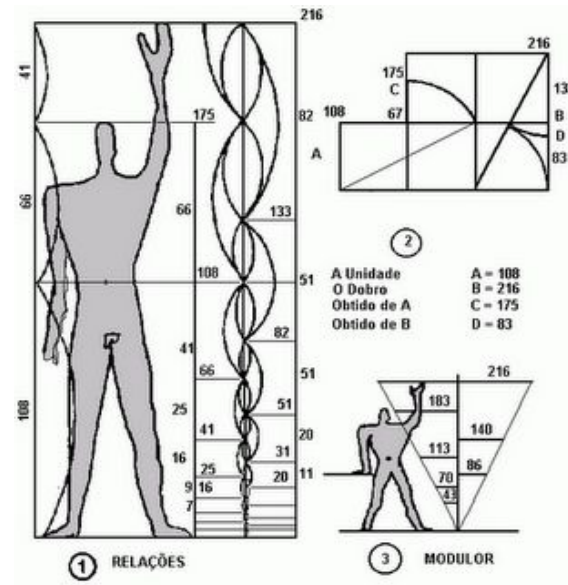


Fonte: <http://blogs.odiario.com/carlossica/2011/09/01/a-divina-proporcao/monalisa/>

### • Corpo Humano:

O estudo da proporção áurea levou o arquiteto francês Le Corbusier (1887-1965) ao Modulor (Fig. 55), que é um sistema de medição baseado no corpo humano e na Matemática. Ele colocou que a altura de um indivíduo imaginário com 1,75 cm, depois com 1,83 cm, com um braço levantado pode ser dividida em partes em pontos que determinam sua posição no espaço: seus pés, seu umbigo, sua cabeça, as pontas dos dedos. Esses três intervalos fornecem uma série da seção áurea.

Figura 55 - O modulator



Fonte: <https://br.pinterest.com/pin/593912269582885976/?lp=true>

Para Le Corbusier essas proporções, diretamente relacionados ao corpo humano, ajudariam os arquitetos a adaptar as construções às necessidades do homem.

## 4 OBJETOS MÍSTICOS TRIDIMENSIONAIS

Neste capítulo, são apresentados as definições de alguns poliedros convexos, com ênfase nas pirâmides e nos sólidos de Platão que são objetos tridimensionais considerados místicos.

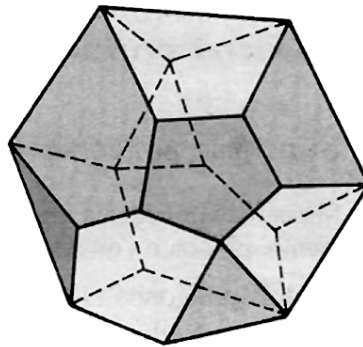
### 4.1 Poliedro Convexo

Dado um número  $k$ ,  $k \in \mathbb{N}$  e  $k \geq 4$ , de polígonos planos convexos de modo que

- i. dois polígonos não estão num mesmo plano;
- ii. cada lado de polígono é comum a dois e somente dois polígonos;
- iii. o plano de cada polígono deixa os demais polígonos num mesmo semiespaço;

são determinados  $k$  semiespaços cada um dos quais tem origem no plano de um polígono e contém os restantes. A interseção desses semiespaços é chamado *poliedro convexo* (Fig. 56).

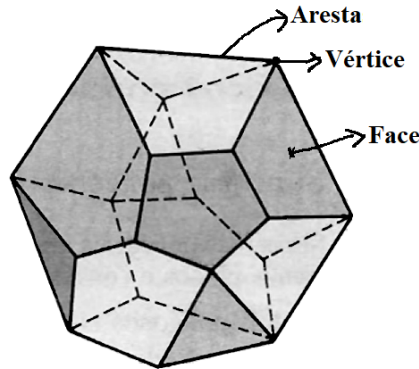
Figura 56 - Poliedro Convexo



Fonte: Dolce e Pompeo (2005)

Um poliedro convexo possui: *faces* planas, que são os polígonos convexos; *arestas*, interseções de duas faces, que são os lados dos polígonos e *vértices*, interseções das arestas, que são os vértices dos polígonos (Fig. 57).

Figura 57 - Faces, Arestas e Vértices



Fonte: Dolce e Pompeo (2005). Adaptado

## 4.2 Relação de Euler

O matemático suíço Leonhard Euler (1707 – 1783) fez a descoberta de uma relação importante para se determinar do número de arestas, vértices e faces de qualquer poliedro convexo. Esta relação também é conhecida como relação de Euler ou teorema de Euler.

**Teorema 4.2.1.** *Se  $P$  é um poliedro convexo com  $F$  faces,  $A$  arestas e  $V$  vértices, então*

$$F - A + V = 2.$$

Uma demonstração do teorema de Euler para poliedros convexos, adequada para o ensino médio é feita a partir da soma dos ângulos internos dos polígonos que compõem as faces do poliedro. A demonstração tem como base a apresentada por Lima (2012).

Para isso é preciso calcular a soma dos ângulos de todas as faces do poliedro utilizando duas formas diferentes e comparar esses resultados no final.

*Demonstração.* Um poliedro convexo pode ser formado por polígonos convexos diferentes, possuindo diferentes quantidades de arestas. Adotando  $F$  como a quantidade de faces do poliedro, numerando as faces de 1 a  $F$  e sendo  $n_i$  o número de arestas em cada face  $i$ , com  $i \in \{1, 2, \dots, F\}$ . Para contar todas as arestas das faces do poliedro podemos somar a quantidade de arestas de cada face do seguinte modo:  $n_1 + n_2 + \dots + n_F$ . Por outro lado, esta soma é o dobro do número de arestas do poliedro, já que cada uma é comum a exatamente duas de suas faces, temos

$$2A = n_1 + n_2 + \dots + n_F. \quad (37)$$

Da mesma forma, adotando  $V$  como a quantidade de vértices do poliedro e numerando os vértices de 1 a  $V$ , sendo  $m_j$  o número de arestas que concorrem em cada vértice  $j$ , com  $j \in \{1, 2, \dots, V\}$ . Para contar todas as arestas que concorrem em cada vértice do



poliedro podemos somar as arestas do seguinte modo:  $m_1 + m_2 + \dots + m_V$ . Por outro lado, esta soma é o dobro do número de arestas do poliedro, já que cada aresta está associada a exatamente dois vértices, temos

$$2A = m_1 + m_2 + \dots + m_V. \quad (38)$$

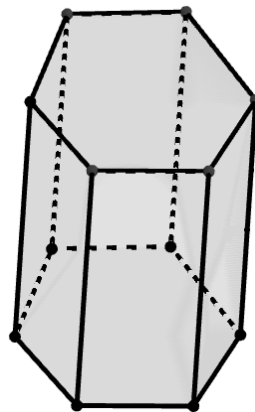
Como exemplo, observe que na Fig. 58 temos que duas faces hexagonais e seis faces quadrangulares, então

$$2A = 2 \times 6 + 6 \times 4 \implies A = 18.$$

Também observamos doze vértices e em cada vértice concorrem 3 arestas, então

$$2A = 3 \times 12 \implies A = 18.$$

Figura 58 - Prisma hexagonal



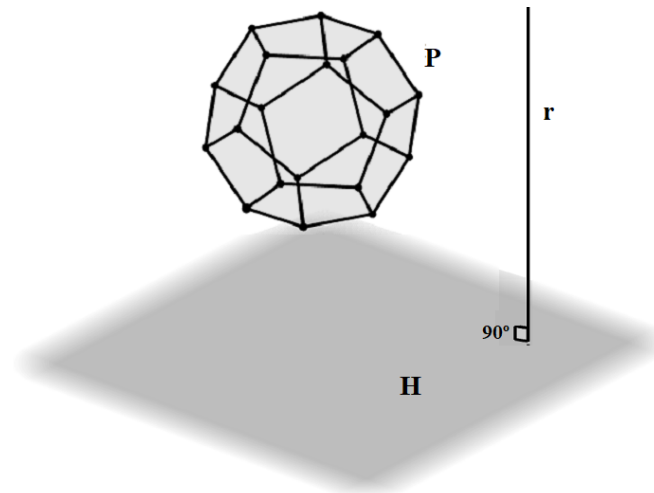
Fonte: Autor, 2018

Em um primeiro momento, do fato das faces de um poliedro convexo serem polígonos convexos e a soma dos ângulos internos de um polígono convexo de  $n$  lados ser  $(n - 2) \times 180^\circ$ , temos que a soma  $S$  dos ângulos internos de todas as faces é

$$\begin{aligned} S &= (n_1 - 2) \times 180^\circ + (n_2 - 2) \times 180^\circ + \dots + (n_F - 2) \times 180^\circ \\ S &= n_1 \times 180^\circ - 2 \times 180^\circ + n_2 \times 180^\circ - 2 \times 180^\circ + \dots + n_F \times 180^\circ - 2 \times 180^\circ \\ S &= (n_1 + n_2 + \dots + n_F) \times 180^\circ - (2 + 2 + \dots + 2) \times 180^\circ. \\ S &= \overbrace{(n_1 + n_2 + \dots + n_F)}^{2A} \times 180^\circ - \overbrace{(2 + 2 + \dots + 2)}^{F \text{ vezes}} \times 180^\circ \\ S &= 2A \times 180^\circ - 2F \times 180^\circ \\ S &= 360^\circ \times (A - F). \end{aligned} \quad (39)$$

Em um segundo momento, escolhemos um poliedro convexo  $P$ , um plano  $H$  e uma reta  $r$  perpendicular ao plano  $H$  que não intersecte o poliedro  $P$  e nem seja paralela a nenhuma das faces de  $P$  (veja a Fig. 59).

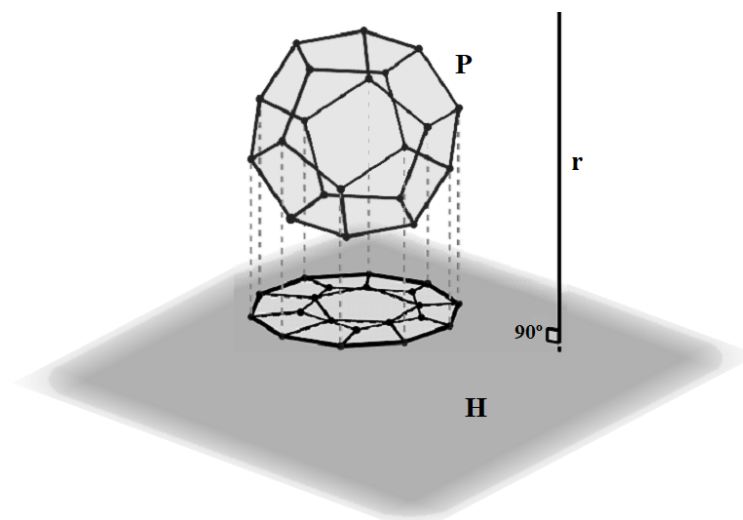
Figura 59 - Reta  $r$ , Plano  $H$  e Poliedro  $P$



Fonte: Autor, 2018

O plano  $H$  será chamado de *plano horizontal* e as retas paralelas a  $r$  serão chamadas de *retas verticais*. O plano  $H$  divide o espaço em dois semi-espacos, um dos quais contém o poliedro. Este será chamado de semi-espaço superior e diremos que seus pontos estão acima de  $H$ . Na Fig. 60 observamos as projeções dos vértices e das arestas do poliedro  $P$  no plano  $H$ .

Figura 60 - Projeção do poliedro no plano  $H$



Fonte: Autor, 2018

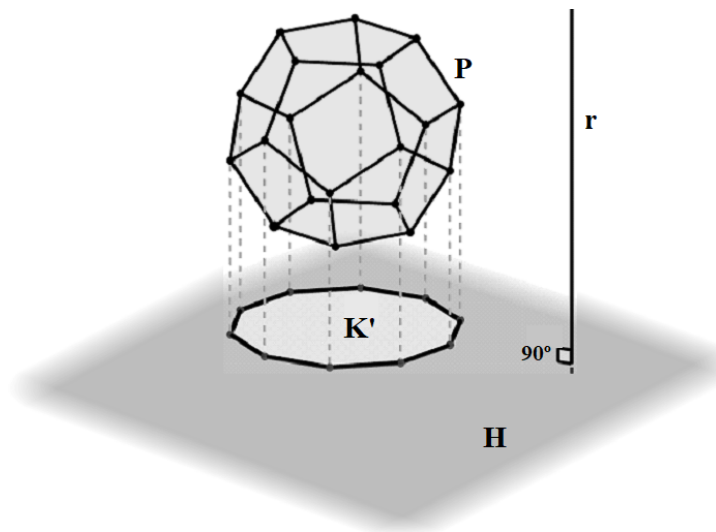
Traçando retas paralelas a  $r$ , logo perpendiculares a  $H$ , as interseções dessas retas

com o poliedro só podem ser 1 ou 2 pontos, do fato do poliedro ser convexo. Olhando apenas as retas que intersectam o poliedro, a interseção dessas retas com o plano  $H$  formam um polígono convexo.

Para melhor ilustrar o nosso raciocínio, imagine o sol brilhando em seu ponto mais alto no semi-espço superior sobre o poliedro  $P$  de modo que seus raios sejam retas verticais. Cada ponto  $X$  do semi-espço superior corresponde um ponto  $X'$  em  $H$ , chamado sombra de  $X$ . A sombra de qualquer conjunto  $C$ , contido no semi-espço superior, é por definição, o conjunto  $C'$ , contido em  $H$ , formado pelas sombras dos pontos de  $C$ .

Assim considerando a sombra  $P'$  do poliedro  $P$ . A sombra  $P'$  tem como contorno um polígono convexo  $K'$  (Fig. 61), que é sombra de uma poligonal fechada  $K$  formada por arestas de  $P$ . Como os raios não são paralelos a nenhuma face e  $P$  é convexo, então cada ponto de  $K'$  é sombra de um único ponto de  $P$ . A poligonal  $K$  é chamada de *contorno aparente* do poliedro  $P$ . Cada ponto interior de  $P'$  é sombra de exatamente dois pontos de  $P$ .

Figura 61 - Polígono Convexo  $K'$



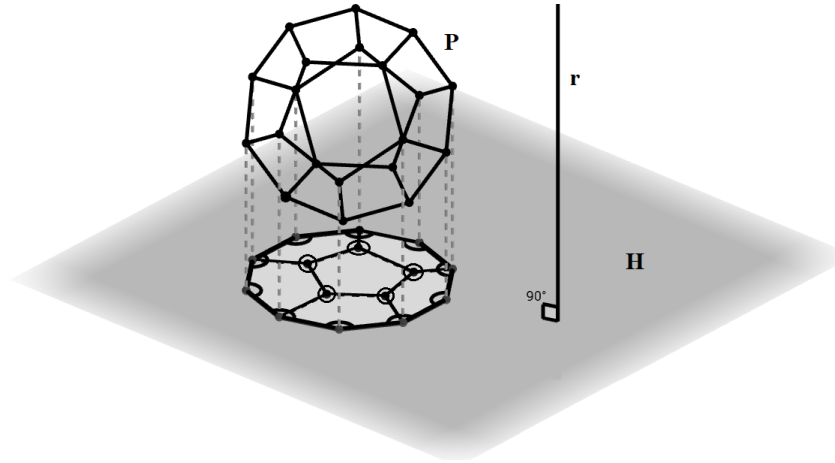
Fonte: Autor, 2018

Dados dois pontos de  $P$  que têm a mesma sombra, o mais distante de  $H$  chamaremos de *ponto iluminado* e o menos distante de  $H$  será chamado de *ponto sombrio*. A soma dos ângulos internos de uma face de  $P$  é a mesma soma dos ângulos internos da sombra dessa face, pois como a face não é paralela aos raios, ou seja, a  $r$ , a sombra será um polígono convexo com o mesmo número de arestas da face.

Sejam  $V_1$  o número de vértices iluminados,  $V_2$  o número de vértices sombrios e  $V_0$  o número de vértices do contorno aparente  $K$ . Então  $V = V_0 + V_1 + V_2$ . Note ainda que  $V_0$  é o número de vértices da poligonal  $K'$ , contorno de  $P'$ ,

Considere então a sombra das faces iluminadas. A sombra das faces iluminadas é um polígono convexo com  $V_0$  vértices em seu contorno e com isso temos que a soma dos ângulos internos desse polígono é  $(V_0 - 2) \times 180^\circ$ . Temos ainda que o polígono tem  $V_1$  pontos interiores que são sombras dos vértices iluminados de  $P$ . Como em torno de cada um desses pontos interiores forma-se um ângulo de  $360^\circ$ , temos que a soma de todos os ângulos dessa figura é  $S_1 = 360^\circ \times V_1 + (V_0 - 2) \times 180^\circ$  (ver Fig. 62).

Figura 62 - Ângulos dos Vértices



Fonte: Autor, 2018

Agora, olhando a sombra das faces sombreadas temos, usando o mesmo argumento anterior, que a soma de todos os ângulos dessa figura é  $S_2 = 360^\circ \times V_2 + (V_0 - 2) \times 180^\circ$ .

Somando  $S_1$  com  $S_2$  temos a soma  $S$  dos ângulos do poliedro  $P$ . Assim,

$$\begin{aligned}
 S &= 360^\circ \times V_1 + (V_0 - 2) \times 180^\circ + 360^\circ \times V_2 + (V_0 - 2) \times 180^\circ \\
 S &= 360^\circ \times (V_1 + V_2) + 360^\circ \times (V_0 - 2) \\
 S &= 360^\circ \times (V_0 + V_1 + V_2 - 2) \\
 S &= 360^\circ \times (V - 2)
 \end{aligned} \tag{40}$$

Da equação (39) temos que  $S = 360^\circ \times (A - F)$  e igualando à equação (40), temos

$$360^\circ \times (V - 2) = 360^\circ \times (A - F) \implies V - 2 = A - F$$

Portanto, para todo poliedro convexo vale a relação

$$F - A + V = 2$$

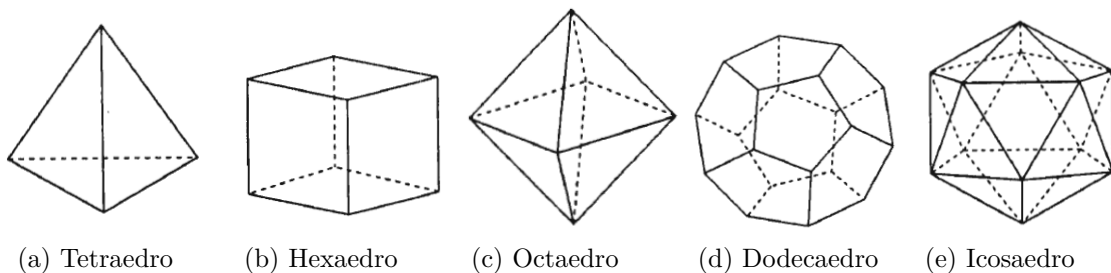
□

### 4.3 Poliedros de Platão

Segundo Boyer (1974), talvez o filósofo e matemático grego Platão (427 a.C. - 347 a.C.) tenha tido conhecimento dos poliedros regulares em um encontro com o também filósofo e matemático grego Arquitas (428 a.C. - 347 a.C.). Há relatos que o amigo de Platão, o matemático grego Teatetus (417 a.C. - 369 a.C.) foi o primeiro a escrever sobre eles.

Os *poliedros de Platão*, *sólidos de Platão* ou *sólidos platônicos* são poliedros convexos regulares, ou seja, em cada um desses poliedros as faces são polígonos regulares, pois possuem arestas com mesmo comprimento e ângulos internos congruentes. Na Fig. 63 podemos observar o tetraedro, que possui quatro faces triangulares; o hexaedro ou cubo com seis faces quadradas; o octaedro com oito faces triangulares; o dodecaedro com doze faces pentagonais; e o icosaedro com vinte faces triangulares.

Figura 63 - Poliedros de Platão



Fonte: Livio (2006)

#### 4.3.1 Poliedros de Platão e relação de Euler

Podemos verificar que só existem cinco desses poliedros utilizando a relação de Euler, como na demonstração do teorema a seguir.

**Teorema 4.3.1.** *Existem apenas cinco poliedros regulares convexos.*

*Demonstração.* Dado um poliedro convexo regular  $P$ , sendo  $V$ ,  $A$  e  $F$  as quantidades de vértices, arestas e faces, respectivamente. Como  $P$  é regular todas as suas faces são congruentes possuindo o mesmo número  $n$  de arestas, então a soma do número de arestas de cada um dos polígonos que formam as faces de um poliedro regular convexo é

$\overbrace{n + n + \dots + n}^{F \text{ vezes}} = nF$ . Do mesmo modo, em cada vértice concorrem o mesmo número  $m$  de arestas, então a soma do número de arestas que concorrem em cada vértice de um poliedro regular convexo é  $\overbrace{m + m + \dots + m}^{V \text{ vezes}} = mV$ .

Como já observado nas equações (37) e (38), temos  $nF = 2A = mV$ . Assim,

$$2A = nF \implies A = \frac{nF}{2} \quad (41)$$

e também,

$$nF = mV \implies V = \frac{nF}{m}. \quad (42)$$

Da Relação de Euler, temos  $V - A + F = 2$ . Substituindo os valores de  $A$  e  $V$  encontrados nas equações (41) e (42), temos

$$\frac{nF}{m} - \frac{nF}{2} + F = 2 \implies 2nF - mnF + 2mF = 4m.$$

Logo,

$$F = \frac{4m}{2n - mn + 2m}. \quad (43)$$

Como  $F > 0$ , vem que

$$2n - mn + 2m > 0 \implies 2n > mn - 2m \implies \frac{2n}{n-2} > m.$$

Sendo  $m$  o número de arestas que concorrem em cada vértice, então  $m \geq 3$ ,

$$\frac{2n}{n-2} > m \geq 3 \implies \frac{2n}{n-2} > 3 \implies 2n > 3n - 6.$$

Portanto,

$$n < 6.$$

Como  $n$  é o número de arestas de uma face, temos  $n \geq 3$  e assim  $3 \leq n < 6$ . Deste modo, temos três possibilidades para  $n$ :  $n = 3$ ,  $n = 4$  ou  $n = 5$ .

Lembrando que  $m \geq 3$  e  $F > 0$  e substituindo os valores de  $n$  na equação (43), temos

- Para  $n = 3$  (Faces triangulares)

$$F = \frac{4m}{6 - 3m + 2m} = \frac{4m}{6 - m}.$$

Temos três possibilidades de  $m = 3$ ,  $m = 4$  ou  $m = 5$ , assim:

- Para  $m = 3$

$$\frac{12}{3} = 4.$$

Um poliedro regular com quatro faces triangulares, o tetraedro regular.

– Para  $m = 4$

$$\frac{16}{2} = 8.$$

Um poliedro regular com oito faces triangulares, o octaedro regular.

– Para  $m = 5$

$$\frac{20}{1} = 20.$$

Um poliedro regular com vinte faces triangulares, o icosaedro.

• Para  $n = 4$  (Faces quadradas)

$$F = \frac{2m}{4 - m}.$$

Temos somente a possibilidade de  $m = 3$ , assim  $F = 6$ .

Um poliedro regular com seis faces quadradas, o cubo.

• Para  $n = 5$  (Faces pentagonais)

$$F = \frac{4m}{10 - 3m}.$$

Temos somente a possibilidade de  $m = 3$ , assim  $F = 12$ .

Um poliedro regular com doze faces pentagonais, o dodecaedro.

Esgotadas as possibilidades concluímos que só existem cinco poliedros convexos regulares, ou seja, cinco poliedros de Platão.

□

O livro *XIII* de *Elementos* de Euclides afirma que três dos cinco sólidos eram devidos aos pitagóricos e foi através de Teagetetus que o octaedro e o icosaedro se tornaram conhecidos. Esses cinco sólidos geométricos são conhecidos como sólidos platônicos devido ao fato de Platão ter construído teorias a respeito da origem do universo e ter associado a eles elementos fundamentais da natureza.

Na tabela 3, temos a relação de Euler nos poliedros de Platão.

Tabela 3 - Relação de Euler nos Poliedros de Platão

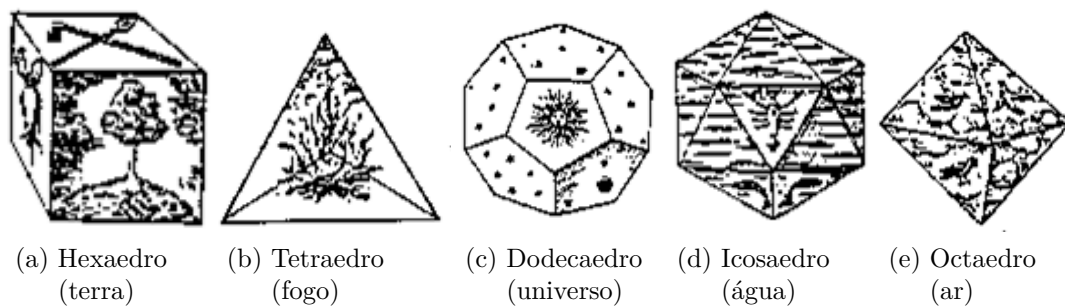
Poliedro	F	A	V	F - A + V
Tetraedro	4	6	4	2
Hexaedro	6	12	8	2
Octaedro	8	12	6	2
Dodecaedro	12	30	20	2
Icosaedro	20	30	12	2

Fonte: Autor, 2018

### 4.3.2 Poliedros de Platão e misticismo

Platão apresentou, em seu *Timeu*<sup>10</sup>, uma descrição dos cinco poliedros regulares e os associou misticamente da seguinte forma: Hexaedro (terra), tetraedro (fogo), dodecaedro (universo), icosaedro (água) e octaedro (ar), como ilustrado na Fig. 64.

Figura 64 - Poliedros e Misticismo



Fonte: [http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm99/icm43/sol\\_plat.htm](http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm99/icm43/sol_plat.htm)

Johannes Kepler (1571 - 1630), mestre da astronomia, matemático e numerologista, deu uma explicação engenhosa para as associações de *Timeu*. Intuitivamente ele assumiu que, desses sólidos, o tetraedro abarca o menor volume para sua superfície, ao passo que o icosaedro o maior. Agora, essas relações volume-superfície são qualidades de secura e umidade, respectivamente, e como o fogo é o mais seco dos quatro “elementos” e a água o mais úmido, o tetraedro deve representar o fogo e o icosaedro a água. Associa-se o cubo com a terra porque o cubo, assentando quadradamente sobre uma de suas faces, tem a maior estabilidade. O octaedro, seguro frouxamente por dois de seus vértices opostos, entre o indicador e o polegar, facilmente rodopia, tendo a instabilidade do ar. Finalmente, associa-se o dodecaedro com o Universo porque o dodecaedro tem 12 faces e o zodíaco tem 12 seções. (EVES, 2011, p. 114)

A versão de Kepler para o sistema solar consistia em sólidos platônicos uns dentro dos outros, relacionando os raios das esferas concêntricas que intervinham com as órbitas dos planetas (LAWLOR, 1996, p. 106), .

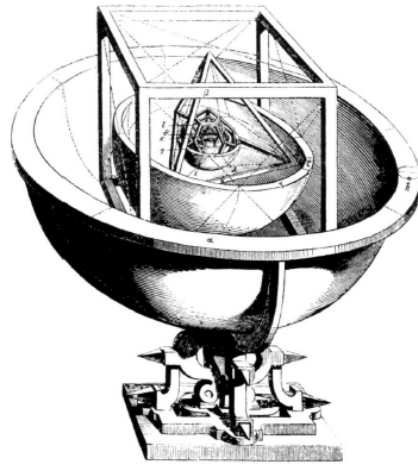
Kepler estabeleceu um modelo para o sistema solar colocando os cinco sólidos platônicos um dentro do outro, separados por uma série de esferas inscritas (Fig. 65), mas acabou abandonando seu modelo, pois era a tentativa de ligar as razões entre os raios das órbitas dos planetas com as razões entre os raios das esferas que circunscrevem os poliedros de Platão e após a descoberta de outros planetas, como Urano, Netuno e

<sup>10</sup> Um longo monólogo do personagem do título. Apresenta a especulação sobre a natureza do mundo físico e os seres humanos.



Plutão, não existiam outros sólidos de Platão para relacionar com os novos planetas, além disso, observou-se que as órbitas dos planetas não são círculos, mas elipses.

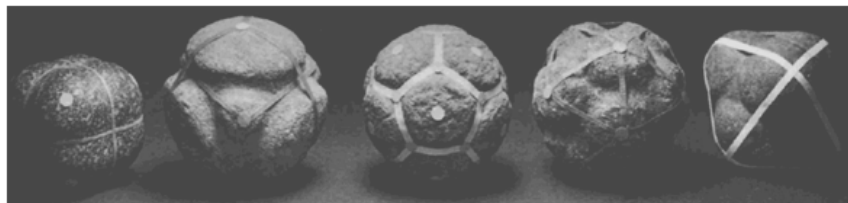
Figura 65 - Sistema Solar Segundo Kepler



Fonte: Lawlor (1996)

Ainda de acordo com Lawlor (1996), há evidências de que os cinco sólidos platônicos eram conhecidos e utilizados muito antes da época de Platão. Uma prova apresentada são as pedras esféricas conservadas no Ashmolean Museum de Oxford, na Inglaterra, talhadas na forma geométrica de cubo, tetraedro, octaedro, icosaedro e dodecaedro (Fig. 66), conhecidos pelos povos neolíticos da Grã-Bretanha pelo menos 1000 anos antes de Platão.

Figura 66 - Pedras Esféricas



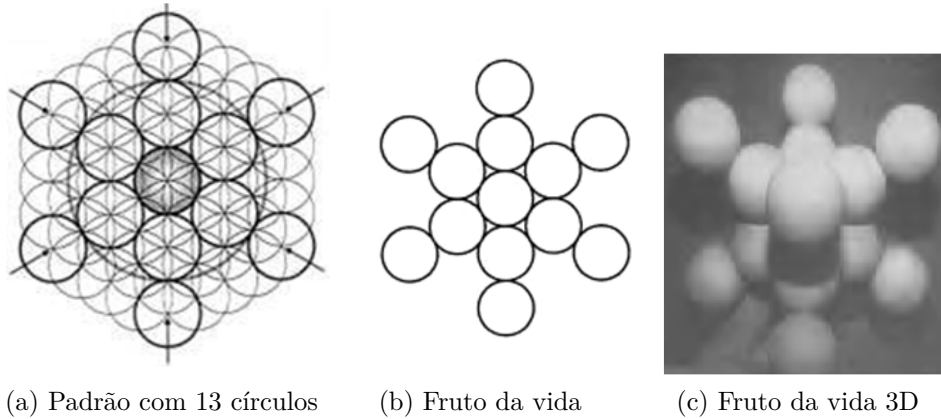
Fonte: Lawlor (1996)

Os sólidos de Platão podem ser observados em outros símbolos da geometria sagrada que são obtidos a partir da flor da vida: o fruto da vida e o cubo de metatron.

O padrão da flor da vida é composto de 19 círculos de mesmo raio, em toda a volta da borda a flor da vida apresenta círculos incompletos, ver Fig. 24. Como podemos observar na Fig. 67, continuando a acrescentar círculos além do padrão original, dentro do grande círculo que circunscreve todo o sistema, os primeiros círculos completos fora do perímetro da flor da vida formam, com outros círculos do interior, um novo padrão com

treze círculos. Quando esse padrão de treze círculos é extraído da flor da vida temos como resultado o *fruto da vida*. Temos também um exemplo do fruto da vida tridimensional apresentado por Melchizedek (2009).

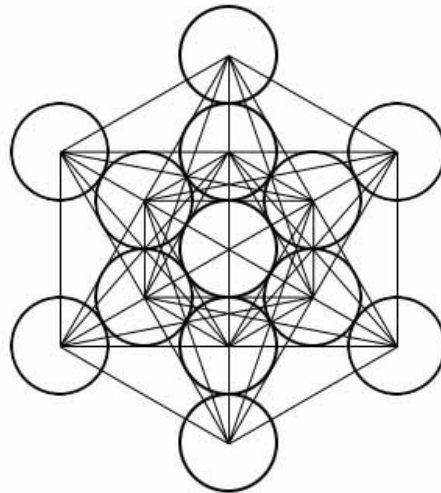
Figura 67 - O Fruto da Vida



Fonte: Melchizedek (2009)

No fruto da vida, ao ligar todos os centros dos círculos (ou esferas) com linhas retas, obtemos um padrão conhecido como *cubo de Metatron* (Fig. 68).

Figura 68 - O Cubo de Metatron

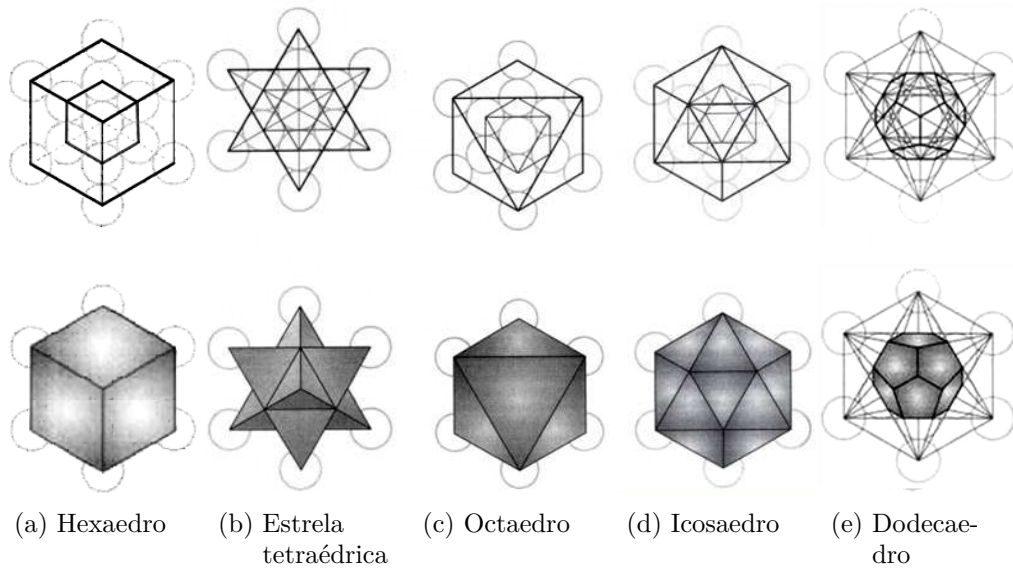


Fonte: Melchizedek (2009)

Segundo Melchizedek (2009), o cubo de Metatron não é apenas geometria, ele afirma que Platão percebeu que era o mapa vivo de toda criação de nossa realidade.

Os cinco sólidos platônicos estão, todos de uma só vez, nas linhas do cubo de Metatron. Apagando algumas linhas e mantendo outras eles podem ser observados separadamente como na Fig. 69.

Figura 69 - O Fruto da Vida e os Poliedros de Platão



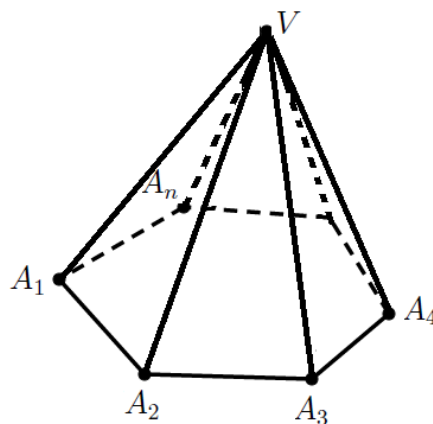
Fonte: Melchizedek (2009)

#### 4.4 Pirâmides

*Pirâmide* é um poliedro que definiremos seguindo a descrição de Neto (2013).

**Definição 4.4.1.** *Dados um polígono convexo  $A_1A_2A_3 \dots A_n$  e um ponto  $V$  não pertencente ao plano de  $A_1A_2A_3 \dots A_n$ , uma pirâmide de vértice  $V$  e base  $A_1A_2A_3 \dots A_n$  é o poliedro delimitado por  $A_1A_2A_3 \dots A_n$  e pelos triângulos  $\Delta VA_iA_{i+1}$ , para  $1 \leq i \leq n$ , com a convenção de que  $A_{n+1} = A_1$  (Fig. 70).*

Figura 70 - Pirâmide de vértice  $V$  e base  $A_1A_2A_3 \dots A_n$



Fonte: Autor, 2018

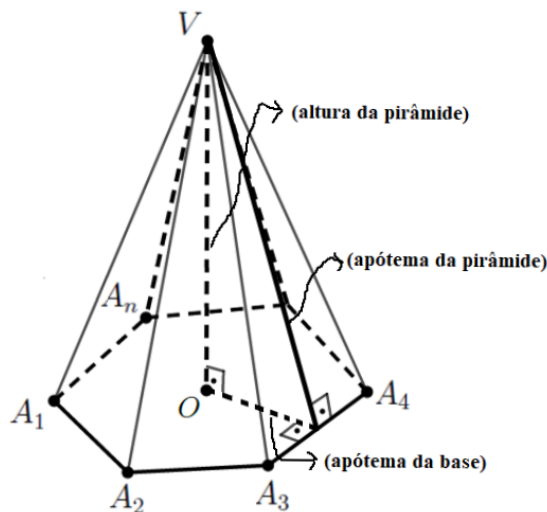
As pirâmides são nomeadas de acordo com o polígono que forma sua base, isto é, se a base é um triângulo é chamada de *pirâmide triangular*, se é um quadrilátero, *pirâmide quadrangular*, se é um pentágono, *pirâmide pentagonal* e assim por diante.

Temos ainda para  $1 \leq i \leq n$ , que os segmentos  $VA_i$  são as *arestas laterais*, os segmentos  $A_iA_{i+1}$  são as *arestas da base* e os triângulos  $\Delta VA_iA_{i+1}$  são as *faces laterais* da pirâmide. Se  $O$  é o pé da perpendicular baixada do vértice  $V$  ao plano da base  $A_1A_2A_3 \dots A_n$  de uma pirâmide, dizemos que o segmento  $VO$  é a *altura* da pirâmide.

Uma pirâmide é dita *regular reta*, se sua base  $A_1A_2A_3 \dots A_n$  for um polígono regular de centro  $O$ . Nesse caso as faces laterais são triângulos isósceles congruentes. Na pirâmide regular, o *apótema da pirâmide* é a distância do vértice  $V$  à aresta da base da pirâmide e o *apótema da base* é a distância da projeção do vértice  $V$  sobre o plano da base da pirâmide a um dos lados do polígono regular que forma esta base.

A Fig. 71 ilustra o exemplo de uma pirâmide regular, sua altura e os apótemas da pirâmide e da base.

Figura 71 - Pirâmide Regular



Fonte: Autor, 2018

O volume  $V_{pirâmide}$  e a área da superfície  $S_{pirâmide}$  de uma pirâmide são dados por

$$V_{pirâmide} = \frac{S_b \times h}{3} \text{ u.v.}$$

$$S_{pirâmide} = (S_l + S_b) \text{ u.a.}$$

Sendo  $h$  a altura da pirâmide,  $S_l$  a área da sua lateral e  $S_b$  a área de sua base.

Tabela 4 - Relação de Euler em Algumas Pirâmides

Base da pirâmide	F	A	V	$F - A + V$
Triângular	4	6	4	2
Quadrada	5	8	5	2
Pentagonal	6	10	6	2
Hexagonal	7	12	7	2

Fonte: Autor, 2018

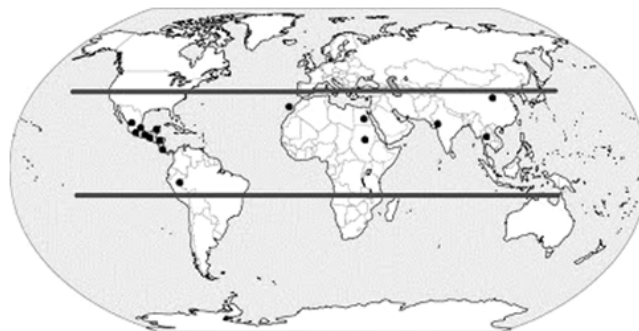
#### 4.4.1 Construções antigas em forma de pirâmides

Existem estruturas monumentais construídas de pedra em forma de pirâmides que normalmente têm uma base quadrangular e são tão grandes que algumas pessoas não acreditam que foram feitas pelo homem, pois não havia os recursos como os que temos hoje na época de suas construções.

São construções colossais e enigmáticas envolvidas em muito misticismo e especulações sobre como foram construídas. Há relatos de haver entre 118 e 138 pirâmides egípcias e que a maioria foi construída como túmulos para os faraós.

Um fato muito curioso a respeito das construções das pirâmides é ser possível encontrar esses monumentos em diversas partes do mundo. Marcando pontos no mapa para representar os locais onde podemos encontrar pirâmides (Fig. 72), percebemos que se forma uma espécie de cinto de pirâmides centralizado no mapa.

Figura 72 - Cinto de Pirâmides no Mundo



Fonte: <http://www.otherkin-hispano.org/t5513-piramides-alrededor-del-mundo>

Algumas dessas pirâmides estão ilustradas na Fig. 73.

- A pirâmide de Quéops, também conhecida como a grande pirâmide, está localizada em Gizé, no Egito. Possui base quadrada com 230,4 metros de comprimento e 146,6 metros de altura, sendo a maior pirâmide do mundo e a mais famosa. Foi construída em torno de 2 570 a.C. e 1 300 a.C..

- A pirâmide de Caio Céstio localizada em Roma, na Itália. É considerada uma das estruturas antigas mais bem preservadas em Roma. Foi construída em torno de 18 a.C. e 12 a.C. com o objetivo de servir de túmulo para Caio Cestius. A pirâmide tem base quadrada de 29,5 metros de largura e atinge uma altura de 37 metros.
- A pirâmide de Kukulcán localizada na antiga cidade de Chichen Itza, no México. Também conhecida como Templo de Kukulcan, foi construída entre os anos de 1100 e 1200. Tem 30 metros de altura e sua base quadrada tem 55,3 metros de comprimento.
- A grande pirâmide Branca, localizada na província de Qinghai na China. Pouco se sabe com exatidão sobre esta pirâmide, arqueólogos sugerem que ela tenha 220 metros de altura e com base retangular com 400 e 450 metros de cada lado.

Figura 73 - Pirâmides pelo Mundo



(a) Pirâmide de Quéops



(b) Pirâmide de Cestius



(c) Pirâmide de Kukulcán



(d) A grande pirâmide Branca

Fonte: <http://www.ensinarhistoriajoelza.com.br/falando-em-piramides/>

#### 4.4.2 Curiosidades matemáticas na pirâmide de Quéops

Além do misticismo envolvendo as construções das pirâmides, outros fatores também intrigam alguns estudiosos da geometria sagrada.

Veremos que alguns cálculos matemáticos são interessantes quando se utiliza as medidas de 230,4 metros para o comprimento do lado da base e 146,6 metros para a altura da grande pirâmide.

A massa da grande pirâmide é estimada em 5,9 milhões de toneladas. O volume de uma pirâmide de altura  $h$  e área da base  $A_b$  é dado por

$$V_{pirâmide} = \frac{A_b \times h}{3}$$

Logo, o volume  $V_{Quéops}$  da pirâmide de Quéops pode ser calculado da seguinte forma:

$$V_{Quéops} = \frac{230,4 \times 230,4 \times 146,6}{3} \cong 2594045 \text{ m}^3$$

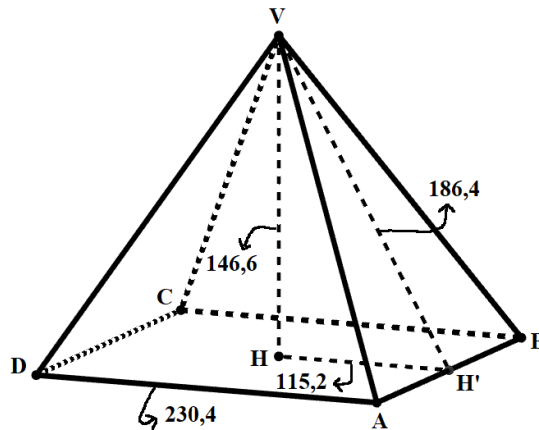
Com essa estimativa, para construir a pirâmide em 20 anos seria necessário instalar aproximadamente 800 toneladas de pedra todos os dias.

Muitas curiosidades envolvem as dimensões da grande pirâmide. Utilizando a Fig. 74 para representar essas dimensões, pelo teorema de Pitágoras encontramos o comprimento do apótema  $VH'$  da pirâmide, em cálculos de valores aproximados temos:

$$\overline{VH'}^2 = \overline{HH'}^2 + \overline{VH}^2 = 115,2^2 + 146,6^2 \cong 13271,0 + 21491,6 \cong 34762,6$$

$$\overline{VH'} \cong \sqrt{34762,6} \cong 186,4 \text{ m}$$

Figura 74 - Medidas da Pirâmide de Quéops



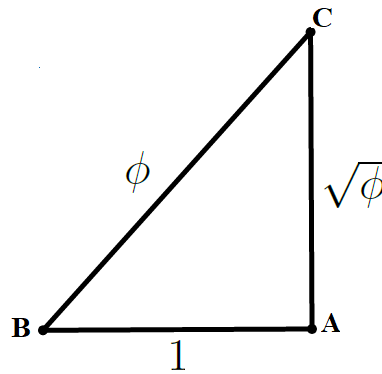
Fonte: Autor, 2018

Note que na Fig. 74 as medidas do triângulo  $\Delta VH'H$  são 186,4 m, 115,2 m e 146,6 m. Dividindo todas as medidas pela medida do apótema da base temos, em valores aproximados:

$$\frac{186,4}{115,2} \cong 1,618 \cong \phi \text{ m} \quad \text{e} \quad \frac{146,6}{115,2} \cong 1,272 \cong \sqrt{\phi} \text{ m}$$

Esses cálculos permitem observar que a grande pirâmide tem uma relação com o número de ouro ( $\Phi$ ). O triângulo formado por seu apótema, sua altura e o apótema da base tem seus lados proporcionais aos lados do triângulo da Fig. 75.

Figura 75 - Triângulo de Lados 1,  $\sqrt{\phi}$  e  $\phi$



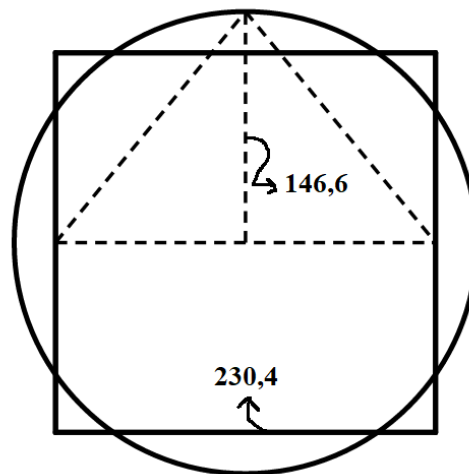
Fonte: Autor, 2018

O primeiro a apresentar o triângulo caracterizado pela relação entre lados igual à proporção áurea foi o matemático e astrônomo alemão Johannes Kepler (1571-1630), por esse motivo o triângulo ficou conhecido como *triângulo de Kepler*.

O triângulo de Kepler relaciona dois conceitos matemáticos importantes, o teorema de Pitágoras e a razão áurea. Kepler considerava esses conceitos como os dois grandes tesouros da geometria.

Outro fato interessante sobre a grande pirâmide é a quadratura da circunferência, pois admitindo-se uma circunferência com raio de mesmo comprimento da altura da pirâmide e um quadrado de lado com mesmo comprimento de sua base (Fig. 76), temos que:

Figura 76 - Grande Pirâmide e Quadratura da Circunferência



Fonte: Autor, 2018



O perímetro da circunferência será

$$2 \times \pi \times 146,6 \cong 921,1 \text{ m}$$

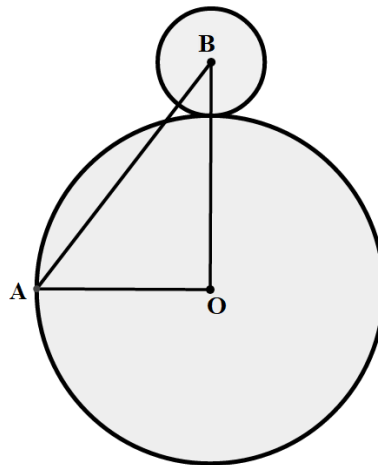
O perímetro do quadrado será

$$4 \times 230,4 = 921,6 \text{ m}$$

Ou seja, o perímetro do quadrado é muito próximo do perímetro da circunferência, fazendo referência à quadratura do círculo pelos perímetros.

Curiosa também é a proporção encontrada entre a grande pirâmide e a relação entre os raios da Terra e da Lua. Na Fig. 77, observamos duas circunferências, a maior simboliza a Terra, cujo raio é de aproximadamente 6371 km, e a menor simboliza a Lua com raio aproximado de 1737 km e um triângulo  $\triangle AOB$ , reto em  $O$ , com o cateto  $OA$  de medida igual ao raio da Terra e o outro cateto  $OB$  igual à soma dos raios da Terra e da Lua.

Figura 77 - Relação entre a Grande Pirâmide,  
a Terra e a Lua



Fonte: Autor, 2018

Dividindo os valores dos catetos do triângulo  $\triangle OAB$  por 6371 km, teremos:

$$\frac{8108}{6371} \cong 1,272 \cong \sqrt{\phi} \text{ km} \quad \text{e} \quad \frac{6371}{6371} = 1 \text{ km}$$

Logo, pelo teorema de Pitágoras, vem que o triângulo  $\triangle OAB$ , tem lados proporcionais ao triângulo de Kepler, e com isso podemos concluir que também há uma relação

com as dimensões do comprimento e da altura da grande pirâmide.

Há ainda uma teoria de que existe uma correlação entre a localização das três maiores pirâmides de Gizé e as três estrelas centrais da constelação de Orion, e que esta correlação foi intencional pelos construtores das pirâmides.

Figura 78 - Posição das Pirâmides de Gizé e da Constelação de Orion



(a) Pirâmides de Gizé

(b) Constelação de Orion

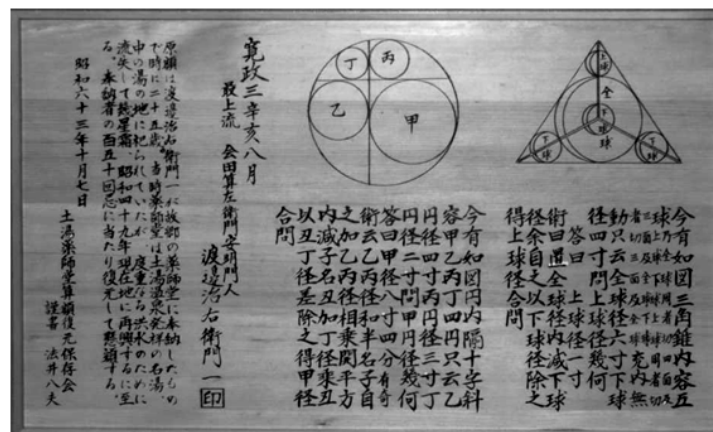
Fonte: <https://piramidalcwb.files.wordpress.com/2012/08/orion-e-egito.jpg>

## 5 SUGESTÕES DE ATIVIDADES PARA O ENSINO MÉDIO

Este capítulo é dedicado a algumas sugestões de atividades para alunos do Ensino Médio que podem ser exploradas com a utilização dos diversos conteúdos relacionados à geometria e a História da Matemática apresentados no desenvolvimento deste trabalho. As atividades estão organizadas por seções seguindo a orientação dos capítulos do trabalho.

Fica a sugestão de uma pesquisa sobre os *sangaku* (Fig. 79), tábuas de madeiras contendo problemas matemáticos colocadas nos templos e santuários japoneses durante o período do Edo Bakufu ou idade de paz ininterrupta (1603 - 1868), época onde houve um forte isolamento político-econômico. Neles são encontrados problemas de geometria euclidiana, e a grande maioria deles não possui um alto grau de dificuldade podendo ser resolvido por alunos do ensino básico utilizando conceitos já conhecidos tais como: o teorema de Pitágoras e semelhança de triângulos.

Figura 79 - Exemplo de um Sangaku



Fonte: <https://br.pinterest.com/pin/572731277597378345/>

Para conhecer um pouco mais sobre os *sangaku*, que também é conhecido como a *Geometria Sagrada do Japão*, é sugerida a leitura dos artigos escritos por Pinto (2011).

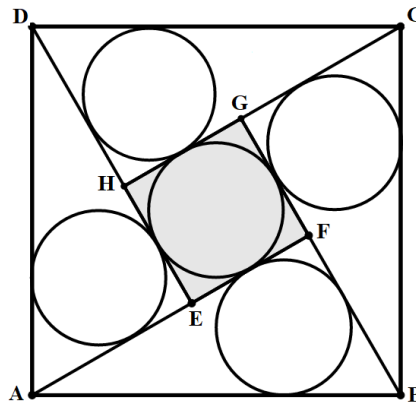
Uma estratégia para exercícios que envolvam construções geométricas com régua e compasso é a utilização de papel quadriculado (exceto nas aulas de desenho geométrico). Com este material o aluno pode construir as figuras geométricas necessárias mesmo sem ter uma noção mais precisa do passo a passo das construções geométricas, assim o professor otimiza o tempo e promove uma aprendizagem ativa.

## 5.1 Atividades Referentes ao Primeiro Capítulo

Nesta seção apresentamos atividades em que o professor pode explorar conceitos matemáticos sobre círculo e circunferência, o número  $\pi$ , as fórmulas da área do círculo e do comprimento da circunferência, entre outros. A primeira atividade é um exemplo de *sangaku* apresentado por Pinto (2011).

**Atividade 1.** Na Fig. 80 temos um quadrado maior  $ABCD$ , um quadrado menor  $EFGH$  e cinco círculos de mesmo raio  $R$ . Considerando o círculo central inscrito no quadrado menor e cada um dos outros quatro círculos, tangentes, externamente, aos lados do quadrado menor e tangentes, internamente, aos lados do quadrado maior, calcule o raio dos círculos em função do lado do quadrado  $ABCD$ .

Figura 80 - Ilustração da Atividade 1



Fonte: Autor, 2018

### Resposta da atividade 1

Seja  $R$  o raio do círculo e  $\overline{BF} = a$ ,  $\overline{AF} = b$  e  $\overline{AB} = c$  as medidas dos lados do triângulo  $\triangle ABF$  e considerando os pontos  $M$ ,  $N$  e  $P$  nos lados do triângulo  $\triangle ABF$  tangentes às circunferências (Fig. 81), tal que  $\overline{BM} = \overline{BN} = x$  e  $\overline{AM} = \overline{AP} = y$ , podemos escrever os lados do triângulo como:  $a = x + R$ ,  $b = y + R$  e  $c = x + y$ , reorganizando temos que:

$$x = a - R, \quad y = b - R$$

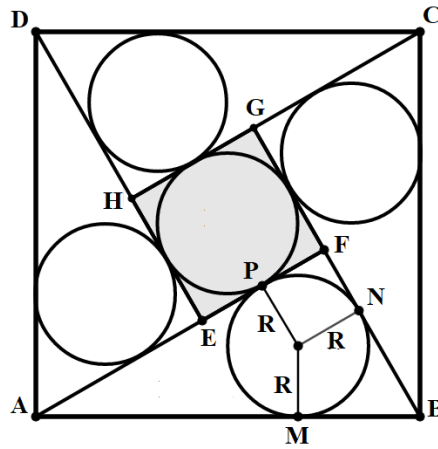
Desta forma,

$$c = a - R + b - R \Rightarrow c = a + b - 2R \Rightarrow R = \frac{a + b - c}{2} \quad (44)$$

Por outro lado, como  $\overline{AF} = \overline{AE} + \overline{EP} + \overline{PF} = b$ ,  $\overline{EP} = \overline{PF} = R$  e  $\overline{AE} = \overline{BF} = a$ , temos que  $b = a + 2R$ , então

$$R = \frac{b - a}{2} \quad (45)$$

Figura 81 - Ilustração da Resposta da Atividade 1



Fonte: Autor, 2018

Das equações (44) e (45), concluímos que

$$\frac{a + b - c}{2} = \frac{b - a}{2} \implies a = \frac{c}{2} \quad (46)$$

Aplicando o teorema de Pitágoras temos que  $c^2 = a^2 + b^2$ , substituindo  $a$  pelo valor encontrado na equação (46) obtemos a equação  $c^2 = \frac{c^2}{4} + b^2$  cuja solução positiva é

$$b = \frac{\sqrt{3}c}{2} \quad (47)$$

Utilizando o resultado encontrado na equação (45) e efetuando sucessivamente as substituições  $b = \frac{\sqrt{3}c}{2}$  e  $a = \frac{c}{2}$ , temos

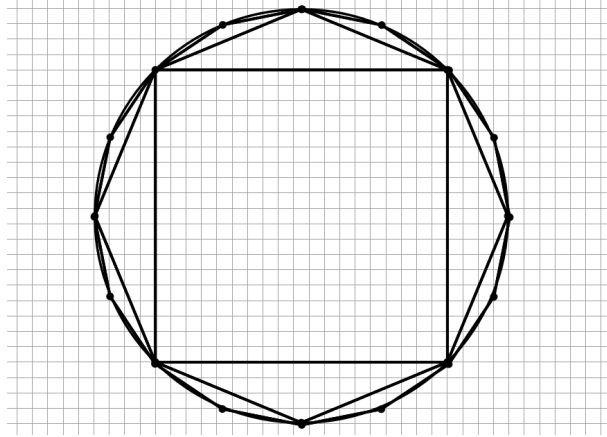
$$R = \frac{\frac{\sqrt{3}c}{2} - \frac{c}{2}}{2} \implies R = \frac{\sqrt{3} - 1}{4}c.$$

**Atividade 2.** *Construa uma circunferência de raio  $R$  e um quadrado inscrito nesta circunferência. Em seguida construa um polígono de oito lados inscrito nesta circunferência de modo que seus vértices sejam os pontos médios dos arcos formados pelos vértices do quadrado. Construa um polígono de 16 lados da mesma forma e responda:*

*Continuando a construir polígonos da mesma forma como citada, qual é a relação entre o perímetro do polígono construído com um número de lados muito grande e o perímetro da circunferência?*

## Resposta da atividade 2

Figura 82 - Ilustração da Resposta da Atividade 2

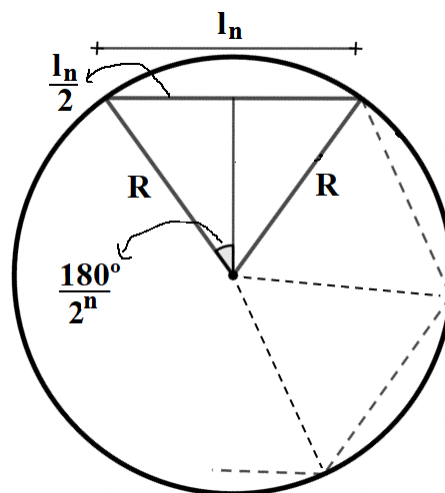


Fonte: Autor, 2018

Esperamos que o aluno, além de compreender o conceito de polígonos regulares inscritos, também compreenda que quanto maior o número de lados do polígono seu perímetro será próximo ao perímetro (comprimento) da circunferência. O professor pode aproveitar para dar uma noção superficial de limite.

**Atividade 3.** Seguindo os conceitos vistos na atividade 2, como todo polígono inscrito pode ser decomposto em triângulos, denotando por  $2^n$  e  $l_n$  o número de lados e o lado do polígono formado, respectivamente, utilizando a Fig. 83 como auxílio:

Figura 83 - Ilustração da Atividade 3



Fonte: Autor, 2018

- a) Calcule a razão entre o comprimento da circunferência ( $C$ ) e o dobro de seu raio ( $2R$ ).
- b) Observando que a altura  $h_n$  do triângulo se aproxima do comprimento do raio  $R$  quando  $n$  é muito grande, calcule a razão entre a área do círculo ( $S_C$ ) e o quadrado de seu raio ( $R^2$ ).
- c) Com o auxílio de uma calculadora complete a tabela 5 para os valores  $n$  dados, determinando os valores de  $\frac{C}{2R}$ .

Tabela 5 - Tabela da Atividade 3c

$n$	$2^n$	$\frac{C}{2R} = 2^n \text{sen} \left( \frac{180^\circ}{2^n} \right)$
2		
3		
4		
⋮	⋮	⋮
8		
9		
10		
⋮	⋮	⋮
20		
⋮	⋮	⋮
30		
⋮	⋮	⋮

Fonte: Autor, 2018

- d) O que podemos concluir com os valores encontrados após preencher a tabela 5?

### Resposta da atividade 3a

Como  $l_n$  e  $2^n$  representam o lado e a quantidade de lados, respectivamente, do polígono inscrito. Utilizando seno, temos que:

$$\text{sen} \left( \frac{180^\circ}{2^n} \right) = \frac{l_n}{2} \Rightarrow l_n = 2R \text{sen} \left( \frac{180^\circ}{2^n} \right)$$

Sendo  $2^n l_n$  o perímetro do polígono regular inscrito, observamos que quanto maior o número de lados do polígono, mais este perímetro se aproxima do comprimento da circunferência, como:

$$2^n l_n = 2^n 2R \text{sen} \left( \frac{180^\circ}{2^n} \right)$$

Logo,

$$C = 2^n 2R \text{sen} \left( \frac{180^\circ}{2^n} \right) \Rightarrow \frac{C}{2R} = 2^n \text{sen} \left( \frac{180^\circ}{2^n} \right)$$

### Resposta da atividade 3b

A área  $S_p$  do polígono regular inscrito é igual à soma das áreas dos  $2^n$  triângulos de base  $l_n$  e altura  $h_n$ , assim:

$$S_p = \frac{2^n l_n h_n}{2}$$

A área  $S_p$  do polígono regular inscrito se aproxima da área  $S_c$  do círculo e a altura dos triângulos  $h_n$  se aproxima de  $R$  quando  $n$  é muito grande, além disso,  $2^n l_n = 2^n 2R \text{sen} \left( \frac{180^\circ}{2^n} \right)$ . Logo,

$$S_p = \frac{2^n 2R \text{sen} \left( \frac{180^\circ}{2^n} \right) R}{2} = S_c \implies S_c = 2^n R^2 \text{sen} \left( \frac{180^\circ}{2^n} \right)$$

Assim,

$$\frac{S_c}{R^2} = 2^n \text{sen} \left( \frac{180^\circ}{2^n} \right)$$

### Resposta da atividade 3c

Como  $\frac{C}{2R} = 2^n \text{sen} \left( \frac{180^\circ}{2^n} \right)$ , completando a tabela temos:

Tabela 6 - Tabela da Resposta da Atividade 3c

$n$	$2^n$	$\frac{C}{2R} = 2^n \text{sen} \left( \frac{180^\circ}{2^n} \right)$
2	4	2,82842...
3	8	3,06146...
4	16	3,12144...
⋮	⋮	⋮
8	256	3,14151...
9	512	3,14157...
10	1024	3,14158...
⋮	⋮	⋮
20	1048576	3,14159...
⋮	⋮	⋮
30	1073741824	3,14159...
⋮	⋮	⋮

Fonte: Autor, 2018



### Resposta da atividade 3d

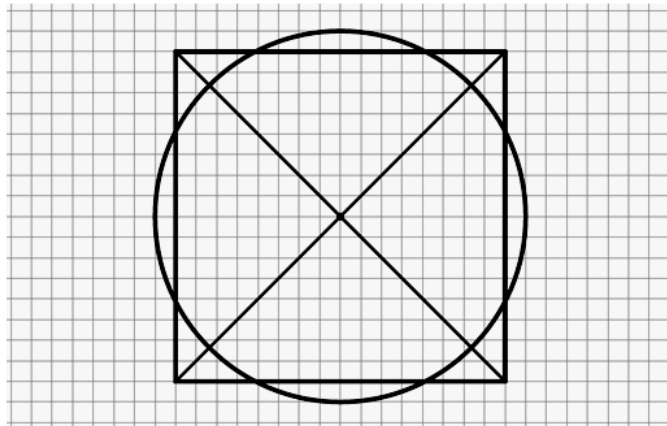
Esperamos que o aluno perceba que a razão entre o comprimento de uma circunferência e seu diâmetro é aproximadamente 3,14159. Com esse conceito construído e aproveitando as razões encontradas nos itens (a) e (b), o professor falar do número  $\pi$  e das fórmulas da área do círculo  $S_C = \pi R^2$  e do comprimento da circunferência  $C = 2\pi R$ .

**Atividade 4.** Para o desenho do item (a), considere cada lado do quadradinho da malha como 0,5 unidades.

- Em um papel quadriculado, desenhe um quadrado de lado 8 unidades e suas diagonais. Com centro na interseção das diagonais desenhe um círculo de diâmetro 9 unidades.
- Calcule a área do quadrado e a área do círculo (considere  $\pi = 3,1415$ ).
- É possível desenhar um quadrado de lado  $l$  e um círculo de raio  $R$  com áreas exatamente iguais utilizando régua e compasso? Por quê?

### Resposta da atividade 4a

Figura 84 - Ilustração da Resposta da Atividade 4a



Fonte: Autor, 2018

### Resposta da atividade 4b

Área do quadrado:

$$S_Q = 8 \times 8 = 64 \text{ u.a.}$$

Área do círculo:

$$S_C = \pi \times 4,5^2 \cong 63,6$$

### Resposta da atividade 4c

Como a área do quadrado é expressa por  $l^2$  e a do círculo por  $\pi R^2$ , devemos obter  $l$  de modo que  $l = R\sqrt{\pi}$ , ou seja, devemos construir um segmento de comprimento  $R\sqrt{\pi}$ . Aqui o professor pode inserir o problema da quadratura do círculo e mostrar que não é possível construir exatamente um segmento de comprimento  $R\sqrt{\pi}$ , logo não é possível se obter áreas de círculo e de quadrado exatamente iguais utilizando régua e compasso.

## 5.2 Atividades Referentes ao Segundo Capítulo

Nesta seção o professor pode explorar os conceitos de área e perímetro de várias figuras planas, além das pesquisas sobre alguns símbolos místicos.

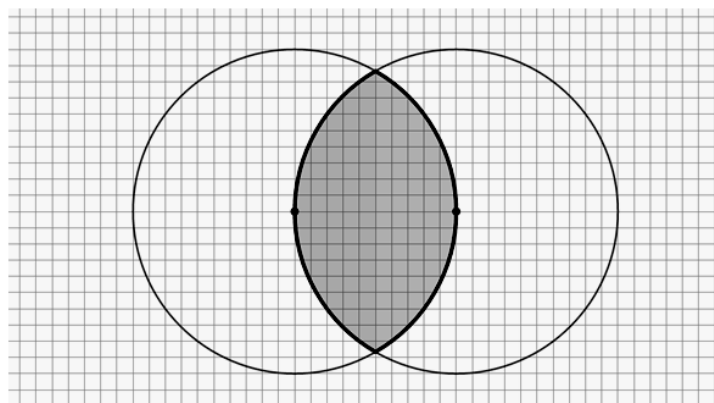
**Atividade 5.** *Em uma folha de papel quadriculada, desenhe um círculo de raio 1 unidade. Escolhendo o centro de um outro círculo sobre a circunferência do primeiro círculo, desenhe outro círculo com raio de mesmo comprimento. Pinte a região  $V$  que é formada pela interseção dos dois círculos.*

*Obs.: Utilize cada lado do quadradinho da malha como 0,1 unidade.*

*Após a construção, resolva as seguintes questões:*

- Calcule a área da região  $V$ .
- Calcule o perímetro da região  $V$ .

Figura 85 - Ilustração da Atividade 5

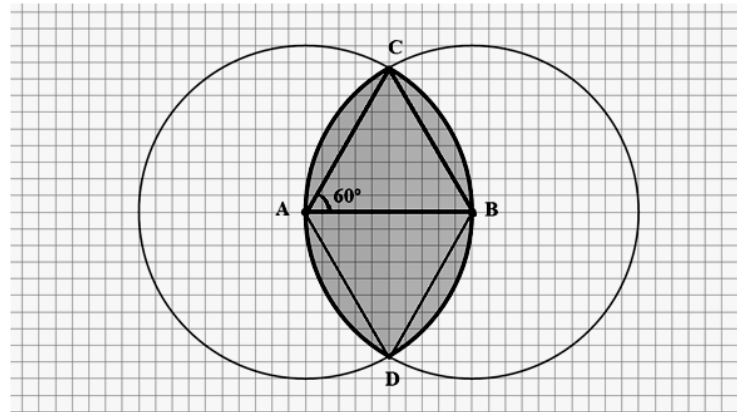


Fonte: Autor, 2018

### Resposta da atividade 5a

O triângulo equilátero  $\triangle ABC$  de lado  $R$  e o segmento circular definido por  $BC$  formam um setor circular  $ABC$  com ângulo central  $\hat{A} = 60^\circ$  (Fig. 86).

Figura 86 - Ilustração da Resposta da Atividade 5a



Fonte: Autor, 2018

A região  $V$  é formada por dois triângulos equiláteros congruentes e quatro segmentos circulares também congruentes.

A área  $S_{set.cir.}$  do setor circular  $ABC$  é dada por:

$$S_{set.cir.} = \frac{1}{6}\pi R^2 \text{ u.a.}$$

A área  $S_{triân.}$  do triângulo  $\triangle ABC$  é:

$$S_{triân.} = \frac{\sqrt{3}}{4}R^2 \text{ u.a.}$$

A área  $S_{seg.cir.}$  do segmento circular definido por  $BC$  é a diferença entre  $S_{set.cir.}$  e  $S_{triâng.}$ :

$$S_{seg.cir.} = \frac{1}{6}\pi R^2 - \frac{\sqrt{3}}{4}R^2 \text{ u.a.}$$

Somando as áreas dos dois triângulos equiláteros e dos quatro segmentos circulares, obtemos a área da região  $V$  dada por:

$$S_V = 2\frac{\sqrt{3}}{4}R^2 + 4\left(\frac{1}{6}\pi R^2 - \frac{\sqrt{3}}{4}R^2\right) \Rightarrow \frac{R^2}{6}(4\pi - 3\sqrt{3}) \text{ u.a.}$$

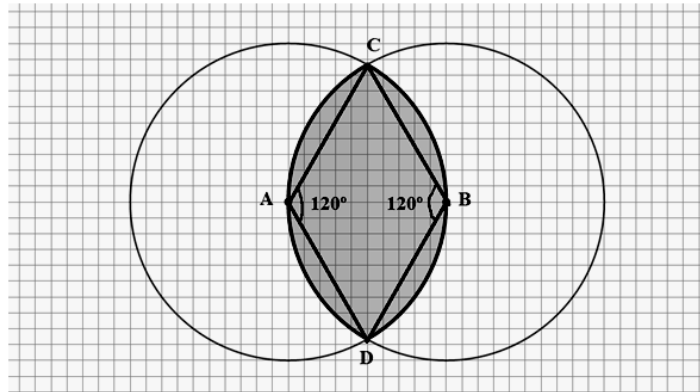
Como os círculos têm raio 1 unidade, temos que a área da região  $V$  será

$$S_V = \frac{4\pi - 3\sqrt{3}}{6} \text{ u.a.}$$

### Resposta da atividade 5b

Nos círculos utilizados na obtenção da região  $V$  formam-se dois arcos circulares  $\widehat{CAD}$  e  $\widehat{CBD}$  de mesmo perímetro, pois têm mesmo raio  $R$  e mesmo ângulo central de  $120^\circ$  (Fig. 87).

Figura 87 - Ilustração da Resposta da Atividade 5b



Fonte: Autor, 2018

O perímetro de uma circunferência de raio  $R$  é dado por  $P_{circ.} = 2\pi R$ , o perímetro  $P_{arc.cir.}$  de um arco circular formado por um ângulo central  $\alpha$  é dado por:

$$P_{arc.cir.} = \frac{2\pi R\alpha}{360^\circ} = \frac{\pi R\alpha}{180^\circ} \text{ u.m.}$$

Assim,

$$P_V = 2 \frac{\pi R 120^\circ}{180^\circ} \implies P_V = \frac{4\pi}{3} \text{ u.m.}$$

**Atividade 6.** *Algumas catedrais antigas têm suas janelas com formato parecido com as janelas da catedral de Milão observada na Fig. 88.*

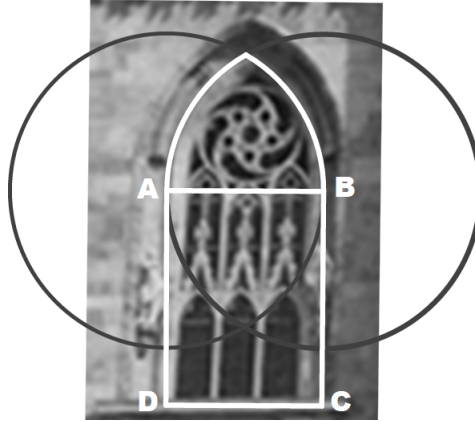
Figura 88 - Ilustração da Atividade 6



Fonte: <https://catedraismedievais.blogspot.com/2016/01/as-catedrais-da-idade-media-germinaram.html>

Suponha que cada uma das três janelas da fachada que aparecem na catedral de Milão (Fig. 88) tenham os formatos iguais ao apresentado na Fig. 89.

Figura 89 - Formato das Janelas



Fonte: Autor, 2018

Se  $ABCD$  é um retângulo com  $\overline{AB} = 1$  m e  $\overline{BC} = 1,5$  m e deseja-se fechar completamente de vidro as três janelas, determine quantos metros quadrados de vidro serão necessários. Use:  $\pi \cong 3,14$  e  $\sqrt{3} \cong 1,73$

### Resposta da atividade 6

Na atividade 5 item (a) calculamos a área da região  $V$  como sendo

$$S_V = \frac{4\pi - 3\sqrt{3}}{6} \text{ u.a.}$$

A janela da Fig. 89 apresenta um retângulo  $ABCD$  e uma região que representa metade da região  $V$ , pois as circunferências têm raio 1 m.

Assim, a área  $S_{janela}$  de uma janela será dada por:

$$S_{janela} \cong 1,00 \times 1,50 + \frac{4\pi - 3\sqrt{3}}{6} \cong 1,50 + \frac{12,56 - 5,19}{12} \cong 1,50 + 0,61 = 2,11 \text{ m}^2$$

Logo a área das três janelas e, conseqüentemente, a quantidade aproximada de metros quadrados de vidros necessários será:

$$3 \times 2,11 = 6,33 \text{ m}^2$$

**Atividade 7.** Da mesma forma que na atividade 5, desenhe um círculo de raio 1 unidade e centro no ponto  $A$ . Desenhe outro círculo de centro no ponto  $B$  também de raio 1 unidade, de tal forma que o ponto  $B$  esteja na circunferência do primeiro círculo.

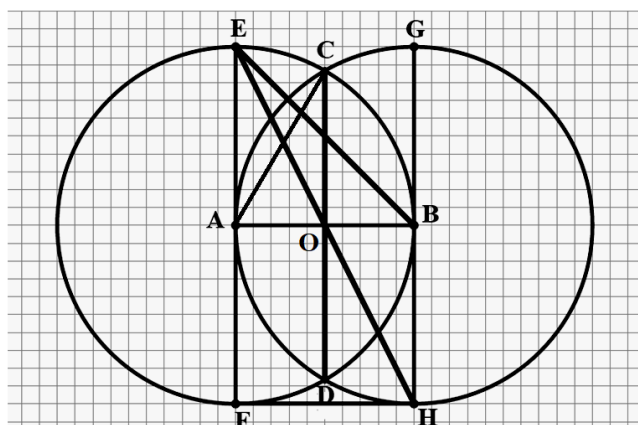
Utilize cada lado do quadradinho da malha como 0,1 unidade e com o auxílio do quadriculado, desenhe os segmentos:

- $AB$  raio das circunferências.
- $EF$  diâmetro da circunferência de centro  $A$  e  $GH$  diâmetro da circunferência de centro  $B$ , ambos perpendiculares a  $AB$ ;
- $CD$  em que os pontos  $C$  e  $D$  são interseções dos bordos das duas circunferências.

Construa, também, os segmentos  $FH$  e  $CA$  definindo assim, os triângulos retângulos  $\triangle EAB$  reto em  $A$ ,  $\triangle EFH$  reto em  $F$  e  $\triangle AOC$  reto em  $O$  e calcule o comprimento dos segmentos  $EB$ ,  $CD$  e  $EH$ .

### Resposta da atividade 7

Figura 90 - Ilustração da Atividade 7



Fonte: Autor, 2018

I -  $AE$  e  $AB$  são raios da circunferência e catetos do triângulo  $\triangle EAB$ . Logo, utilizando o teorema de Pitágoras, segue que:

$$\overline{EB}^2 = \overline{AE}^2 + \overline{AB}^2 = 1^2 + 1^2 = 2 \implies \overline{EB} = \sqrt{2}$$

II -  $CO$  e  $AO$  são catetos do triângulo  $\triangle AOC$ , sendo a hipotenusa  $\overline{AC} = 1$ , pois é raio da circunferência e  $\overline{OA} = \frac{1}{2}$ , metade do raio. Logo, utilizando o teorema de Pitágoras, segue que:

$$\overline{AC}^2 = \overline{AO}^2 + \overline{OC}^2 \implies 1^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \overline{OC}^2 \implies \overline{OC}^2 = 1 - \frac{1}{4} \implies \overline{OC} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Assim,

$$\overline{CD} = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \implies \overline{CD} = \sqrt{3}$$

III -  $\overline{EF} = 2$ , pois é diâmetro da circunferência e  $\overline{FH} = 1$ , pois possui mesmo comprimento do raio da circunferência, formam com  $EH$  o triângulo  $\triangle EFH$ .

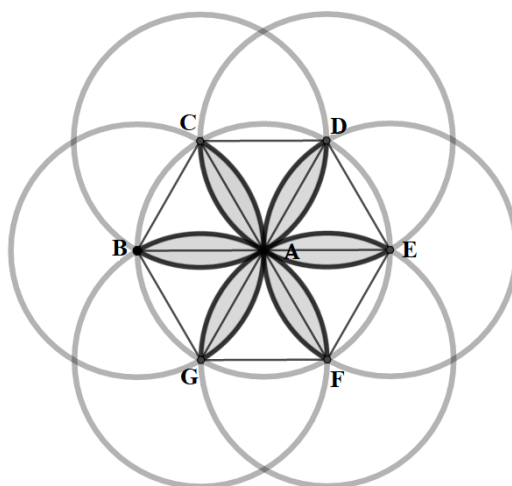
Assim, pelo teorema de Pitágoras:

$$\overline{EH}^2 = \overline{EF}^2 + \overline{FH}^2 = 2^2 + 1^2 = 5 \implies \overline{EH} = \sqrt{5}$$

Nesta atividade o aluno deve perceber que mesmo sendo números irracionais, ou seja, com parte decimal infinita e não periódica, é possível se contruir segmentos com comprimentos  $\sqrt{2}$ ,  $\sqrt{3}$ ,  $\sqrt{5}$ , ...

**Atividade 8.** Observe a figura geométrica formada por uma circunferência central de raio  $R$  e centro no ponto  $A$  e seis outras circunferências com centros na circunferência central e que contém o ponto  $A$  formando um padrão parecido com uma flor, ver Fig. 91.

Figura 91 - Ilustração da Atividade 8



Fonte: Autor, 2018

Considerando a parte mais escura como as pétalas que formam a região  $F$  da flor:

- Calcule a área  $S_{flor}$  da região  $F$ .
- Calcule o perímetro  $P_{flor}$  da região  $F$ .

### Resposta da atividade 8a

Como já observado na atividade 5 item (a), o segmento circular definido pelo segmento  $AC$  tem área:

$$S_{seg.cir.} = \frac{1}{6}\pi R^2 - \frac{\sqrt{3}}{4}R^2 \text{ u.a.}$$

Assim, a área de uma das pétalas é:

$$S_{pétala} = 2 \left( \frac{1}{6}\pi R^2 - \frac{\sqrt{3}}{4}R^2 \right) = \frac{R^2}{6} (2\pi - 3\sqrt{3}) \text{ u.a.}$$

Logo, a área  $S_{flor}$  é dada por:

$$S_{flor} = 6 \frac{R^2}{6} (2\pi - 3\sqrt{3}) = R^2 (2\pi - 3\sqrt{3}) \text{ u.a.}$$

### Resposta da atividade 8b

Da atividade 5 item (b), vem que o arco circular definido pelos pontos  $A$  e  $C$  tem perímetro:

$$P_{arc.cir.} = \frac{\pi R 60^\circ}{180^\circ} = \frac{\pi R}{3} \text{ u.m.}$$

Assim, o perímetro  $P_{pétala}$  de uma das pétalas é:

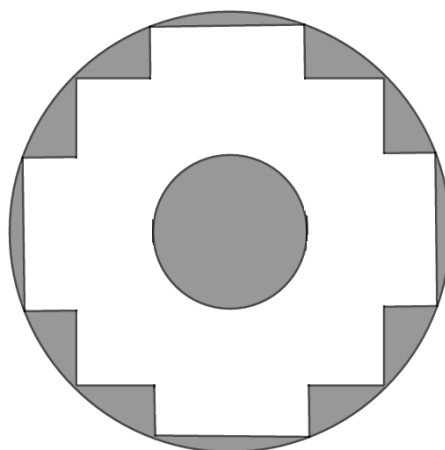
$$P_{pétala} = \frac{2R\pi}{3} \text{ u.m.}$$

Logo, o perímetro  $P_{flor}$  dado por:

$$P_{flor} = 6 \frac{2R\pi}{3} = 4R\pi \text{ u.m.}$$

**Atividade 9.** A figura geométrica representada pela área branca ilustrada na Fig. 92, é conhecida como *chakana* ou *cruz quadrada*. É um símbolo usado há milhares de anos pelos povos andinos e foi considerado como sagrado pelas culturas indígenas da América do Sul. Seu contorno é construído por segmentos de reta e ângulos retos e em seu interior encontra-se um buraco circular.

Figura 92 - Molde para Chakana



Fonte: Autor, 2018

Suponha que se queira construir um molde para se obter lembrancinhas em forma de chakanas, como o exemplo ilustrado na Fig. 93. O molde será feito como na Fig. 92 usando um círculo maior de raio medindo 15 cm, circunscrito à cruz.



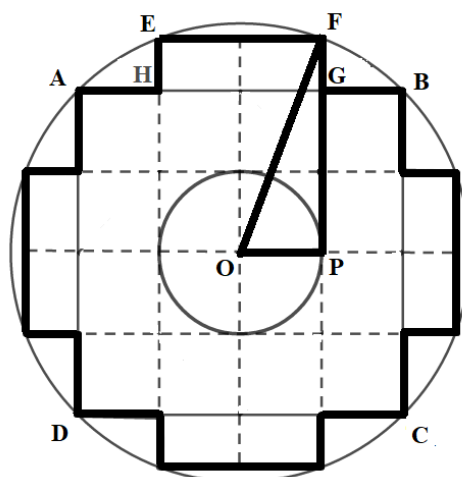
Figura 93 - Lembrancinha



Fonte: Autor, 2018

Tomando a Fig. 94 como base, calcule a área  $S_{molde}$  da região mais escura da Fig. 92 que será o molde das lembrancinhas. Use  $\pi \cong 3,14$ ;  $\sqrt{2} \cong 1,41$ ;  $\sqrt{7} \cong 2,64$ .

Figura 94 - Ilustração para Resposta da Atividade 9



Fonte: Autor, 2018

### Resposta da atividade 9

A área da região do molde será igual a diferença entre a área do círculo circunscrito e a área da chakana.

Observe na Fig. 94 o quadrado  $ABCD$ . Como o raio da circunferência circunscrita à chakana é 15 cm, então a diagonal do quadrado  $ABCD$  é 30 cm e seu lado é  $15\sqrt{2} =$

21,15 cm.

Podemos decompor a chakana em um quadrado  $ABCD$  e quatro retângulos congruentes ao retângulo  $EFGH$  na circunferência central menor com centro no ponto  $O$ . No triângulo  $\triangle OPF$ , reto em  $P$ , temos  $\overline{OP} = \frac{21,15 \times 15}{4} \cong 5,29$  cm e  $\overline{OF} = 15$  cm.

Vamos determinar  $\overline{FP}$  pelo teorema de Pitágoras:

$$\overline{OF}^2 = \overline{OP}^2 + \overline{FP}^2 \implies 15^2 = 5,29^2 + \overline{FP}^2 \implies \overline{FP}^2 = 225 - 27,98 = 197,02 \implies \overline{FP} \cong 14 \text{ cm}$$

Como  $\overline{GP} = \frac{21,15}{2} \cong 10,57$  cm, segue que  $\overline{FG} \cong 14 - 10,57 = 3,43$  cm.

A área  $S_{chakana}$  é dada pela adição da área  $S_1$  do quadrado  $ABCD$  com  $S_2$ , áreas dos quatro retângulos congruentes, subtraindo desta soma a área  $S_3$ , do pequeno círculo central de raio medindo aproximadamente 5,28 cm.

$$S_1 = \overline{AB} \times \overline{BC} \cong 21,15^2 = 447,32 \text{ cm}^2.$$

$$S_2 = 4 \times \overline{EF} \times \overline{FG} \cong 4 \times 10,57 \times 3,43 = 145,00 \text{ cm}^2.$$

$$S_3 = \pi \times 5,28^2 \cong 87,54 \text{ cm}^2.$$

Assim, a área da chakana é:

$$S_{chakana} \cong 447,32 + 145,00 - 87,54 \cong 504,78 \text{ cm}^2.$$

A área  $S_{circulo}$  do círculo circunscrito à cruz é:

$$S_{circulo} = \pi \times 15^2 \cong 706,50 \text{ cm}^2.$$

A área  $S_{molde}$  do molde das lembrancinhas em forma de chakana é:

$$S_{molde} = S_{circulo} - S_{chakana} = 706,50 - 504,78 = 201,72 \text{ cm}^2.$$

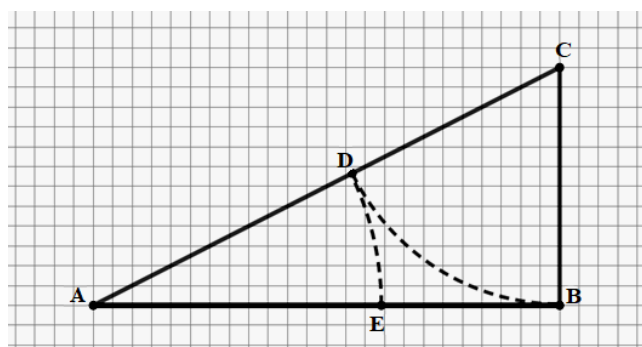
### 5.3 Atividades Referentes ao Terceiro Capítulo

Aqui o professor deve introduzir o conceito de razão áurea através de pesquisas sobre a história, definir a letra grega  $\Phi$  (Fi) como o número áureo  $\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \cong 1,618$  e apresentar a sequência de Fibonacci e sua relação com o número áureo.

**Atividade 10.** *Desenhe um segmento  $AB$  qualquer, determine um segmento  $BC$  perpendicular a  $AB$  com comprimento metade do comprimento  $AB$ . Trace o segmento  $AC$ . Com centro em  $C$  e abertura  $\overline{BC}$ , trace um arco de circunferência e marque o ponto  $D$  sobre  $AC$  deste modo temos  $\overline{CD} = \overline{BC}$ . Com centro em  $A$  e abertura  $\overline{AD}$ , trace um arco*

de circunferência e marque o ponto  $E$  sobre  $AB$ , deste modo temos  $\overline{AE} = \overline{AD}$ .

Figura 95 - Ilustração da Atividade 10



Fonte: Autor, 2018

Terminado este processo forma-se um triângulo  $\triangle ABC$ , reto em  $B$ , com catetos  $AB$  e  $BC$  e hipotenusa  $AC$ . Além disso, ficam determinados os pontos  $D$  em  $AC$  e  $E$  em  $AB$  de tal forma que  $\overline{DC} = \overline{BC} = \frac{\overline{AB}}{2}$ . Determine a razão entre  $\overline{AB}$  e  $\overline{AE}$

#### Resposta da atividade 10

Pelo teorema de Pitágoras temos:

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \left(\frac{\overline{AB}}{2}\right)^2 \Rightarrow \overline{AC} = \frac{\overline{AB}\sqrt{5}}{2}.$$

Então,

$$\overline{AE} = \overline{AD} = \overline{AC} - \overline{CD} = \frac{\overline{AB}\sqrt{5}}{2} - \frac{\overline{AB}}{2} = \overline{AB} \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$$

Assim,

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AB} \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

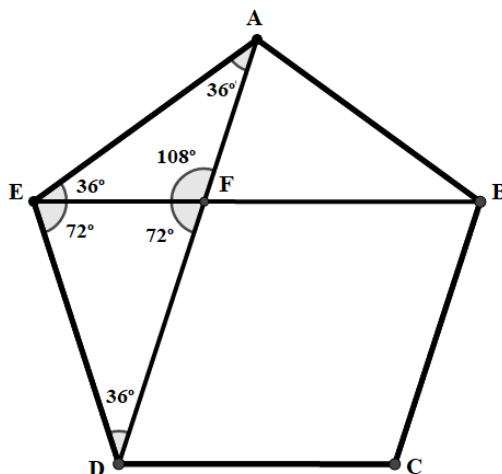
Aqui o professor pode mostrar que o número  $\frac{1+\sqrt{5}}{2} \cong 1,618$  é conhecido como número áureo e é denotado por  $\Phi$ . Desta forma pode solicitar uma pesquisa sobre o número de ouro na natureza, na arquitetura e na arte.

**Atividade 11.** Para esta atividade o professor pode distribuir desenhos de pentágonos regulares  $ABCDE$  de tamanhos diferentes aos alunos e solicitar as seguintes ações: Trace as diagonais  $AD$  e  $BE$  e marque o ponto  $F$ , interseção entre essas diagonais. Utilizando semelhança de triângulos, calcule a razão entre a diagonal  $AD$  e o lado  $AE$  e, com o auxílio de uma régua milimetrada e uma calculadora, faça a divisão direta do comprimento da diagonal  $AD$  e do segmento  $AF$  formado sobre esta diagonal.

### Resposta da atividade 11

As diagonais  $AD$  e  $BE$  cortam-se em um ponto  $F$ . Os lados  $AE$  e  $ED$  e a diagonal  $AD$  determinam o triângulo isósceles  $\triangle AED$  de ângulos internos  $\widehat{EDA} = \widehat{DAE} = 36^\circ$  e  $\widehat{AED} = 108^\circ$ . O lado  $AE$  e os segmentos  $AF$  e  $EF$  determinam o triângulo isósceles  $\triangle AFE$  de ângulos internos  $\widehat{EAF} = \widehat{AEF} = 36^\circ$  e  $\widehat{AFE} = 108^\circ$  (Fig. 96).

Figura 96 - Ilustração da Resposta da Atividade 11



Fonte: Autor, 2018

Denotando como  $l$  e  $d$  os lados e as diagonais, respectivamente do pentágono regular, vamos obter a razão  $\frac{d}{l}$ .

Como os triângulos  $\triangle AED$  e  $\triangle AFE$  têm ângulos congruentes, então eles são semelhantes. Além disso, temos que  $\overline{AF} = \overline{EF}$ ,  $\overline{FD} = \overline{ED} = \overline{AE}$  e que  $\overline{AF} = \overline{AD} - \overline{DF}$  ou seja  $\overline{AF} = \overline{AD} - \overline{AE}$ , pela semelhança de triângulos, temos que:

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{AF}}{\overline{AE}} \Rightarrow \frac{\overline{AE}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{AD} - \overline{AE}}{\overline{AE}} \Rightarrow \frac{\overline{AE}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{AE}} - 1.$$

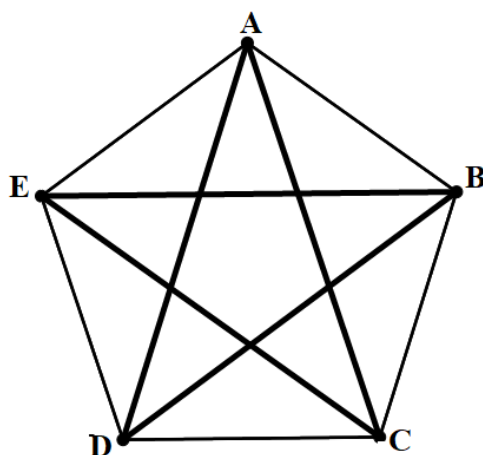
Adotando a razão  $\frac{d}{l} = \frac{\overline{AD}}{\overline{AE}} = k$ :

$$\frac{1}{k} = k - 1 \Rightarrow k^2 - k - 1 = 0 \Rightarrow k = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \cong 1,618.$$

Ao fazer as medições e cálculos solicitados, os alunos perceberão que a divisão será o mesmo número  $\Phi$ . Como cada aluno recebe um pentágono regular de tamanhos diferentes, esperamos que eles percebam que a presença do número áureo não depende do tamanho do pentágono regular.

**Atividade 12.** Um pentagrama é uma figura geométrica obtida através das diagonais de um pentágono, regular ou não. Há indicações que o pentagrama obtido de um pentágono regular (Fig. 97) foi usado como símbolo dos pitagóricos.

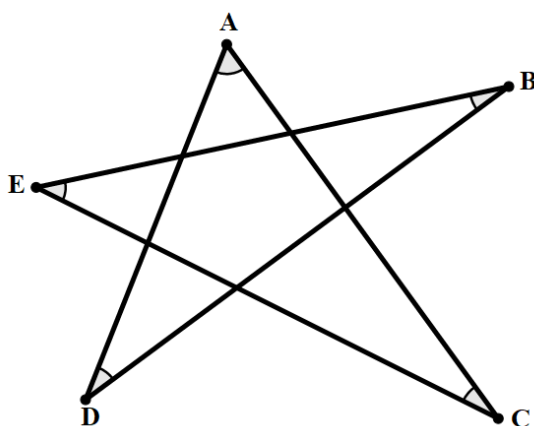
Figura 97 - Pentagrama Regular



Fonte: Autor, 2018

Calcule a soma dos ângulos  $\hat{A}$ ,  $\hat{B}$ ,  $\hat{C}$ ,  $\hat{D}$  e  $\hat{E}$  indicados no pentagrama não regular ilustrado na Fig. 98.

Figura 98 - Pentagrama não Regular



Fonte: Autor, 2018

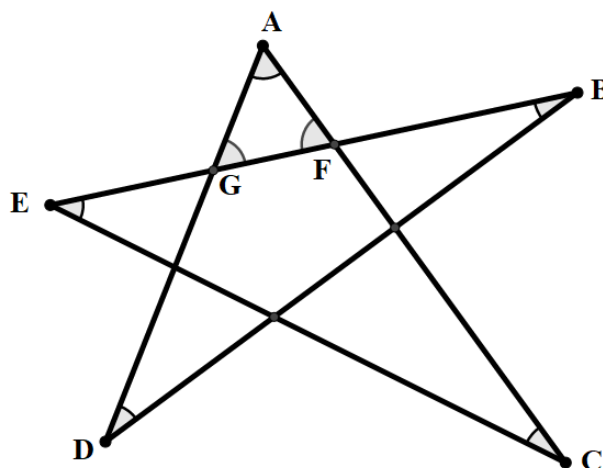
### Resposta da atividade 12

Marcamos os pontos  $F$  e  $G$  e obtemos o triângulo  $\triangle AFG$  com ângulos internos  $\hat{A}$ ,  $\hat{F}$  e  $\hat{G}$  (Fig. 99). A soma dos ângulos internos de um triângulo é sempre  $180^\circ$  e um ângulo

externo obtido pelo prolongamento de um lado do triângulo é sempre igual à soma dos dois ângulos internos do triângulo não adjacentes a este ângulo externo.

Figura 99 - Ilustração para a Resposta da Atividade

12



Fonte: Autor, 2018

Após estas informações, observe na Fig. 99, o triângulo  $\triangle EFC$  e o ângulo  $\hat{F}$  externo a este triângulo, assim  $\hat{F} = \hat{E} + \hat{C}$ . Observe também o triângulo  $\triangle DGB$  e o ângulo  $\hat{G}$  externo a este triângulo, assim  $\hat{G} = \hat{D} + \hat{B}$ .

Como já observado, no triângulo  $\triangle AFG$  temos que  $\hat{A} + \hat{F} + \hat{G} = 180^\circ$ .

Substituindo  $\hat{F} = \hat{E} + \hat{C}$  e  $\hat{G} = \hat{D} + \hat{B}$  temos:

$$\hat{A} + \hat{F} + \hat{G} = \hat{A} + \hat{E} + \hat{C} + \hat{D} + \hat{B} = 180^\circ.$$

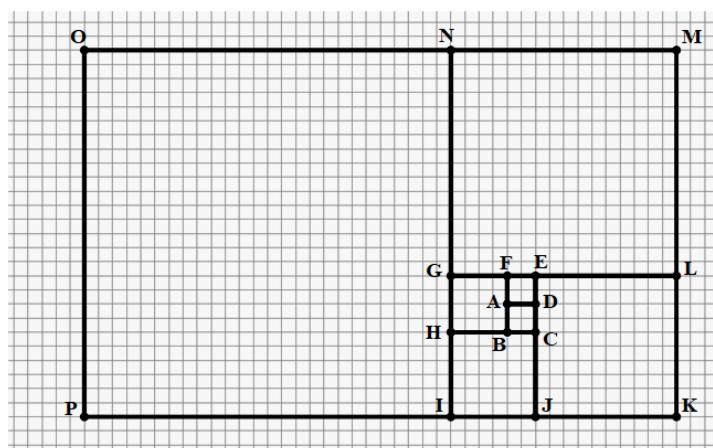
A soma dos ângulos internos das pontas de um pentágono qualquer é  $180^\circ$ .

**Atividade 13.** Desenhe um quadrado  $ABCD$  com o comprimento do lado igual a uma unidade e outro quadrado  $ADEF$ , com lado de comprimento também igual a uma unidade, formando um retângulo  $BCEF$ . Desenhe o quadrado  $BFGH$  com comprimento do lado igual a duas unidades, utilizando o lado maior do retângulo  $BCEF$ , formando um retângulo  $CEGH$ . Desenhe o quadrado  $CHIJ$  com comprimento do lado igual a três unidades, utilizando o lado maior do retângulo  $CEGH$ , formando um retângulo  $EGIJ$ . Desenhe o quadrado  $JKLE$  com comprimento do lado igual a cinco unidades, utilizando o lado maior do retângulo  $EGIJ$ , formando um retângulo  $KLGI$ . Desenhe o quadrado  $LMNG$  com comprimento do lado igual a oito unidades, utilizando o lado maior do retângulo  $KLGI$ , formando um retângulo  $KMNI$ . Desenhe o quadrado  $INOP$  com comprimento do lado igual a treze unidades, utilizando o lado maior do retângulo  $KMNI$ , formando um retângulo  $KMOP$ .

Considere os lados dos quadradinhos da malha como 0,5 unidade e responda às questões:

- Escreva a sequência que tem como termos os lados dos quadrados construídos na ordem da construção.
- Que padrão é utilizado para se obter os números da sequência?
- Utilizando os quinze primeiros termos da sequência, faça a divisão de cada termo por seu antecessor (utilize três casas decimais).
- O que você percebe nas divisões feitas no item c)?

Figura 100 - Construção da Atividade 13



Fonte: Autor, 2018

### Resposta da atividade 13a

(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13)

### Resposta da atividade 13b

Esperamos que o aluno perceba que um termo da sequência é obtido através da soma dos dois termos anteriores a ele. Aqui o professor pode falar sobre a sequência e apresentá-la como a sequência de Fibonacci.

### Resposta da atividade 13c

Tabela 7 - Tabela da Resposta da Atividade 13c

$\frac{1}{1} = 1$	$\frac{2}{1} = 2$	$\frac{3}{2} = 1,5$	$\frac{5}{3} = 1,666\dots$	$\frac{8}{5} = 1,6$	$\frac{13}{8} = 1,625$	$\frac{21}{13} = 1,615\dots$
$\frac{34}{21} = 1,619\dots$	$\frac{55}{34} = 1,617\dots$	$\frac{89}{55} = 1,618\dots$	$\frac{144}{89} = 1,617\dots$	$\frac{233}{144} = 1,618\dots$	$\frac{377}{233} = 1,618$	$\frac{610}{377} = 1,618\dots$

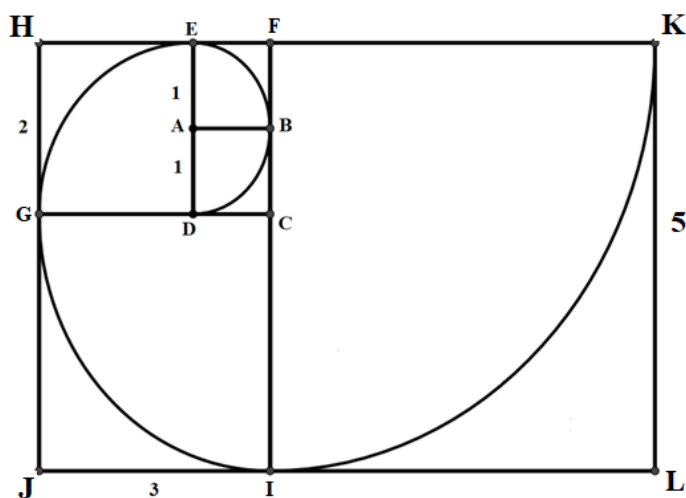
Fonte: Autor, 2018

### Resposta da atividade 13d

Esperamos que o aluno perceba que a razão entre os números consecutivos cada vez maiores da sequência de Fibonacci converge para o número de ouro  $\Phi \cong 1,618$ .

**Atividade 14.** *A espiral conhecida como espiral de Fibonacci é construída por arcos de circunferência cujos raios são os lados dos quadrados que formam o retângulo de Fibonacci. Considerando que a espiral  $\epsilon$  da figura 101 tem o último arco desenhado no quadrado de lado 5, qual será o comprimento da espiral  $\epsilon$ ?*

Figura 101 - Espiral  $\epsilon$  da atividade 14



Fonte: Autor, 2018

### Resposta da atividade 14

Definindo o comprimento da espiral como  $C_\epsilon$  e sabendo que o comprimento de um quarto de circunferência de raio  $R$  é dado por  $\frac{\pi R}{2}$  teremos:

$$C_\epsilon = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{2} + \frac{3\pi}{2} + \frac{5\pi}{2} = \frac{\pi}{2} (1 + 1 + 2 + 3 + 5) = 12\frac{\pi}{2}.$$

Logo o comprimento pedido é:

$$C_\epsilon = 6\pi.$$

## 5.4 Atividades Referentes ao Quarto Capítulo

Nesta seção o professor pode explorar algumas atividades que envolvem conteúdos da geometria espacial como volume de pirâmides, a relação de Euler e os sólidos de Platão, além de combinar com os professores de Português e História para que o aluno escreva uma redação sobre a história das construções em forma de pirâmides.



**Atividade 15.** *Um cristal foi lapidado de tal forma que ficou com a forma de um poliedro convexo que possui cinco faces quadrangulares e seis triangulares. Calcule o número de arestas e de vértices deste cristal.*

**Resposta da atividade 15**

Contando o número de arestas em cada face, teremos  $5 \times 4 + 6 \times 3 = 20 + 18 = 38$  arestas. Como cada aresta é comum a exatamente duas faces, então  $\frac{38}{2} = 19$  é o número de arestas do cristal. Pela relação de Euler vem que

$$F - A + V = 2 \implies 11 - 19 + V = 2 \implies V = 2 + 8 \implies V = 10.$$

Logo, o cristal possui 19 arestas e 10 vértices.

**Atividade 16.** *Em um poliedro convexo o número de arestas excede o número de faces em 12 unidades. Calcule as quantidades de vértices desse poliedro.*

**Resposta da atividade 16**

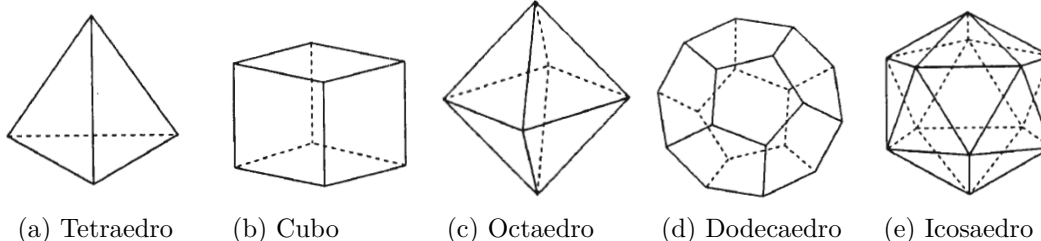
O número de arestas excede o número de faces em 12 unidades, então  $A = F + 12$ . Substituindo na relação de Euler, teremos

$$F - A + V = 2 \implies F - (F + 12) + V = 2 \implies V = 2 + 12 \implies V = 14.$$

Portanto, o poliedro possui 14 vértices.

**Atividade 17.** *Os poliedros de Platão são poliedros convexos regulares (Fig. 102): O tetraedro, que possui quatro faces triangulares; o hexaedro ou cubo com seis faces quadradas; o octaedro com oito faces triangulares; o dodecaedro com doze faces pentagonais; e o icosaedro com vinte faces triangulares. Em cada um desses poliedros as faces são polígonos regulares, ou seja, arestas com mesmo comprimento e ângulos internos congruentes.*

Figura 102 - Poliedros de Platão



Fonte: Livio (2006)

*Se cada um dos poliedros de Platão da Fig. 102 têm arestas medindo 2 cm, qual será a área total da superfície de cada um deles?*

*Utilize se necessário:  $\sin(36^\circ) = 0,58$ ;  $\cos(36^\circ) = 0,80$ ;  $\operatorname{tg}(36^\circ) = 0,72$ .*

### Resposta da atividade 17

- Área do quadrado de lado 2 cm é  $2 \times 2 = 4 \text{ cm}^2$ .

O Cubo é formado por 6 quadrados, logo sua área total será:

$$6 \times 4 = 24 \text{ cm}^2.$$

- Área do triângulo equilátero de lado 2 cm é  $\frac{2^2\sqrt{3}}{4} = \sqrt{3} \text{ cm}^2$ .

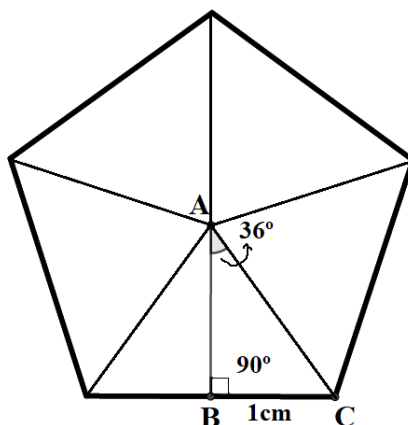
Como o tetraedro regular é formado por 4 faces triangulares, o octaedro por 8 faces triangulares e o icosaedro por 20 faces triangulares, então:

- Área do tetraedro  $4\sqrt{3} \text{ cm}^2$ .
- Área do octaedro  $8\sqrt{3} \text{ cm}^2$ .
- Área do icosaedro  $20\sqrt{3} \text{ cm}^2$ .

- Área do pentágono regular de lado 2 cm

Observe a Fig. 103, a área do pentágono pode ser obtida como a área de cinco triângulos congruentes.

Figura 103 - Área do Pentágono Regular



Fonte: Autor, 2018

Da Fig. 103 temos que  $\text{tg}(36^\circ) = \frac{1}{AB} \implies \overline{AB} = \frac{1}{0,72} \cong 1,39 \text{ cm}$ .

A área do pentágono é

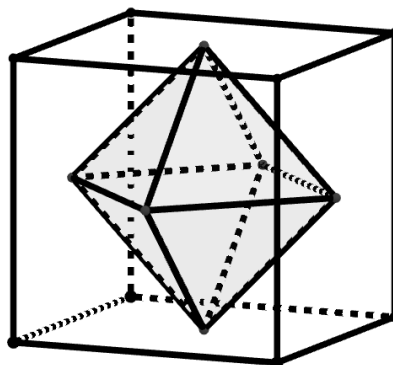
$$5 \times \frac{2 \times 1,39}{2} \cong 6,95 \text{ cm}^2.$$

Logo, a área do dodecaedro é:

$$12 \times 6,95 = 83,4 \text{ cm}^2.$$

**Atividade 18.** Um octaedro regular maciço foi colocado no interior de um cubo de forma que seus vértices tocaram os centros das faces do cubo, ou seja, o octaedro ficou inscrito no cubo (Fig. 104). Se o cubo tem arestas medindo 6 cm e estava completamente cheio de água, ao se colocar o octaedro certa quantidade de água foi derramada.

Figura 104 - Ilustração da Atividade 18

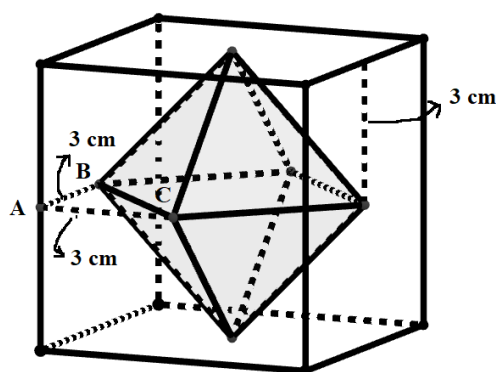


Fonte: Autor, 2018

Calcule o volume de água, em  $\text{cm}^3$ , que sobrou no interior do cubo ao se colocar o octaedro.

### Resposta da atividade 18

Figura 105 - Ilustração para Resposta da Atividade 18



Fonte: Autor, 2018

Observamos na Fig. 105 que, sendo o octaedro regular, ele pode ser decomposto em duas pirâmides de base quadrada de alturas medindo 3 cm, pois são metade do comprimento da aresta do cubo.

O volume de água que foi derramado é equivalente ao volume do octaedro. Desta forma, o volume de água que sobrou no interior do cubo é dado pela diferença entre o volume  $V_{\text{cubo}}$  do cubo e o volume  $V_{\text{octaedro}}$  do octaedro.

O volume do cubo é dado por

$$V_{cubo} = 6^3 = 216 \text{ cm}^3.$$

O comprimento da aresta da base das pirâmides que formam o octaedro pode ser calculado utilizando o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo isósceles  $\triangle BAC$ , reto em  $A$ , de catetos medindo 3 cm, pois é metade do comprimento da aresta do cubo, e hipotenusa de comprimento  $\overline{BC}$ , que é uma das arestas da base da pirâmide. Assim,

$$\overline{BC}^2 = 3^2 + 3^2 \implies \overline{BC} = 3\sqrt{2} \text{ cm}$$

O volume de uma das pirâmides que formam o octaedro será igual a

$$\frac{(3\sqrt{2})^2 \times 3}{3} = 18 \text{ cm}^3$$

E o volume do octaedro será

$$V_{octaedro} = 2 \times 18 = 36 \text{ cm}^3$$

Logo, o volume de água de sobrou no interior do cubo será:

$$V_{cubo} - V_{octaedro} = 216 - 36 = 180 \text{ cm}^3$$

## CONCLUSÃO

O Sistema de Avaliação da Educação Básica (Saeb), utilizado para verificar a qualidade do ensino no Brasil, tem mostrado um baixo desempenho dos nossos alunos, principalmente no que diz respeito ao ensino da Matemática. Educadores em todo o Brasil buscam estratégias para melhorar esse desempenho. Um exemplo disso, são as várias propostas publicadas no sentido de se utilizar da História da Matemática como elemento motivador, mostrando aos alunos como ela se desenvolveu em diferentes culturas de civilizações antigas.

Na elaboração deste trabalho procuramos abordar elementos considerados místicos por algumas entidades ou civilizações e alguns aspectos matemáticos que poderiam justificar tal misticismo com algumas notas históricas, e através de exemplos e exercícios utilizando estes elementos exploramos vários conceitos da Geometria e dos números aliado ao fato da crença das civilizações antigas no misticismo, como os pitagóricos, por exemplo, afirmavam que tudo é número e que os números possuem ligações místicas variadas.

A Geometria e sua conexão com a história das civilizações pode fornecer uma variedade de situações concretas a serem exploradas em sala de aula, tais como: construções, formas geométricas de plantas, crescimento populacional, pinturas artísticas entre outras que permitem, através da Geometria Plana e Espacial um especial ênfase.

O misticismo presente nesses assuntos são elementos que despertam no aluno a curiosidade e aguçam o gosto pela Matemática, tornando-os mais críticos e com maior capacidade de buscar soluções para diferentes situações encontradas além da sala de aula. Além disso, esperamos com este trabalho estimular profissionais da educação em ampliar o interesse e os conhecimentos históricos da Geometria.

## REFERÊNCIAS

- BOYER, C. B. *História da Matemática*. Trad. Elza F. Gomide. São Paulo: Blücher, 1974.
- BRASIL. *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática*. terceiro e quarto ciclos. Brasília: MEC\_SEF, 1998.
- CARVALHO, S. P. *A Área e o Perímetro de um Círculo*: 1º colóquio de matemática da região sudeste. [s.n.], 2011. Disponível em: <<https://www.sbm.org.br/docs/coloquios/SE-1.02.pdf>> Acesso em: 13 jul. 2018.
- DOLCE, O.; POMPEO, J. N. *Fundamentos da Matemática Elementar: Geometria espacial posição e métrica*. vol. 10. 6ª. ed. São Paulo: Atual, 2005.
- EVES, H. *Introdução à História da Matemática*. Trad. Hygino H. Domingues. 5ª. ed. São Paulo: Unicamp, 2011.
- FIGUEIREDO, D. G. *Números Irracionais e Transcendentes*. 3ª. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2011.
- LAMBERT, M. *Chakana, a cruz andina*. 2016. Disponível em: <<http://blog.marcelolambert.com/search?q=chakana>>. Acesso em: 05 abr. 2018.
- LAWLOR, R. *A geometria sagrada: Filosofia e prática - mitos. deuses. mistérios*. Madrid: Edições del Prado, 1996.
- LIMA, E. L. *Meu Professor de Matemática e outras histórias*. 6ª. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012.
- LIVIO, M. *Razão Áurea. A História de  $\phi$ , um número surpreendente*. Trad. Marco Shinobu Matsumura. Rio de Janeiro: Record, 2006.
- MALDONADO, A. P. *Significado dos Símbolos: Cruz Inca ou Chakana*. 2016. Disponível em: <<https://www.altoastral.com.br/significado-dos-simbolos-cruz-inca-ou-chakana/>>. Acesso em: 01 abr. 2018.
- MELCHIZEDEK, D. *O Antigo Segredo da Flor da Vida*: vol. 1. Trad. Henrique A. R. Monteiro. São Paulo: Pensamento, 2009.
- \_\_\_\_\_. *O Antigo Segredo da Flor da Vida*: vol. 2. Trad. Henrique A. R. Monteiro. São Paulo: Pensamento, 2010.
- MORGADO, A. C. O.; CARVALHO, P. C. P. *Matemática Discreta*. 2ª. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2015.
- NETO, A. C. M. *Geometria*. 1ª. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013.
- PENNICK, N. *Geometria sagrada: Simbolismo e intenção nas estruturas religiosas*. Trad. Alberto Feltre. São Paulo: Pensamento, 1980.

PEREIRA, P. C. *Aprendendo Filosofia de Forma Interativa: O oráculo de delfos*. 2009. Disponível em: <<http://aprendendofilosofia.blogspot.com/2009/03/historias-filosoficas.html>>. Acesso em: 25 set. 2018.

PINTO, M. M. Sangaku. desafios matemáticos nos templos do japão. *Gazeta de Matemática*, Lisboa, n. 165, p. 36–42, 2011.

SKINNER, S. *Geometria Sagrada: Descifrando el código*. Madrid: Gaia Ediciones, 2007.

VILLENA, C. M. *Genesis de la Cultura Andina*. Lima, Peru: Fondo Editorial C.A.P., 1983.

XAVIER, T. *O Segredo das Árvores e a Série de Fibonacci*. 2016. Disponível em: <<http://www.blogdaciencia.com/o-segredo-das-arvores-e-a-serie-de-fibonacci/>>. Acesso em: 24 jul. 2018.