



Universidade de Brasília  
Instituto de Ciências Exatas  
Departamento de Matemática  
Programa de Mestrado Profissional  
em Matemática em Rede Nacional



# **Inversão nas cônicas centrais: composição de transformação circular e de transformações afins**

Roosevelt Bessoni e Silva

Brasília

2019



Roosevelt Bessoni e Silva

**Inversão nas cônicas centrais:  
composição de transformação circular  
e de transformações afins**

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos do “Programa” de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, para obtenção do grau de Mestre.

Universidade de Brasília - UnB  
Departamento de Matemática - MAT  
PROFMAT - SBM

Orientador: Prof. Dr. Guy Grebot

Brasília  
2019

Ficha catalográfica elaborada automaticamente,  
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

SR781i Silva, Roosevelt Bessoni  
Inversão nas cônicas centrais: composição de transformação  
circular e de transformações afins / Roosevelt Bessoni  
Silva; orientador Guy Grebot. -- Brasília, 2019.  
82 p.

Dissertação (Mestrado - Mestrado em Matemática) --  
Universidade de Brasília, 2019.

1. Inversão no círculo. 2. Inversão nas cônicas centrais.  
3. Transformações afins. 4. Números hiperbólicos. 5.  
Hipérbole equilátera. I. Grebot, Guy, orient. II. Título.

Universidade de Brasília  
Instituto de Ciências Exatas - Direção

# Inversão nas cônicas centrais: composição de transformação circular e de transformações afins

por

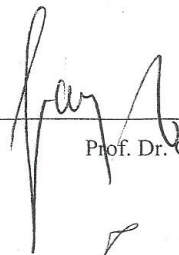
Roosevelt Bessoni e Silva

*Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos "Programa" de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, para obtenção do grau de*

MESTRE EM MATEMÁTICA

Brasília, 08 de março de 2019.

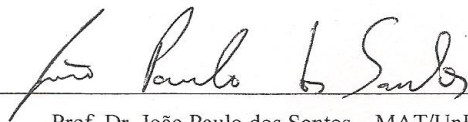
Comissão Examinadora:



Prof. Dr. Guy Grebot – MAT/UnB (Orientador) /



Prof. Dr. Tarcísio Castro Silva – MAT/UnB



Prof. Dr. João Paulo dos Santos – MAT/UnB



*Dedico aos meus pais e irmãos,  
a minha esposa e filhos,  
e aos queridos netos  
que prolongam a linha de minha existência.*





# Agradecimentos

Agradecer é uma decisão da alma. Este trabalho é resultado do esforço individual, mas ele não foi aleatório ou isolado. Ele só foi possível por vários fatores.

O principal deles é a vida. Cheguei até aqui por estar vivo e assim agradeço a Deus, criador de toda natureza!

O resultado da pesquisa, que revelo nesta dissertação, teve o início há bastante tempo, em cidades pequenas, em escolas simples, incentivado por duas pessoas que não tiveram educação formal, mas que fizeram tudo para os filhos terem. Fica aqui meu agradecimento do coração aos meus amados pais, ambos *in memoriam*.

O agradecimento não é apenas para situações ou pessoas que estejam sempre próximas. À distância também há quem incentive e mande palavras que caem no coração e dão energia para a caminhada. Agradeço irmãos, sobrinhos, primos e todos que estão no coração.

O meu desenvolvimento educacional e pessoal também ocorreram pela influência da diversidade de experiências dos colegas de estudos, que tiveram a grandeza de compartilharem. Por isso, meu agradecimento a todos que estiveram juntos nas horas de estudos.

Não poderia de forma alguma esquecer dos mestres. Pessoas que não mediram esforços para explicar, orientar nos estudos, corrigir rumos e incentivar para o alcance dos objetivos. Um agradecimento mais do que especial ao professor Guy Grebot, que não foi apenas orientador, mas também um grande apoiador, ao estabelecer as metas necessárias para o avanço das pesquisas. Jamais deixou de me incentivar a reconhecer os caminhos existentes, mas que eu não percebia, ou avançar nos novos caminhos que eu ainda não conhecia.

Por fim, mas não menos importante, meu coração tem gratidão pelas pessoas que não deixaram de me incentivar, que souberam entender minhas ausências, que suportaram meus momentos de cansaço por noites insones, que me deram as mãos para eu não cair. Um agradecimento que sai do coração para a minha esposa, meus filhos e para quem me deu a felicidade de escutar: vovô, vem cá!



*“É possível criar uma quarta geometria,  
onde uma reta real pode ser  
perpendicular a ela própria.”  
Henri Poincaré*



# Resumo

O foco da pesquisa foi estudar a inversão nas cônicas centrais, elipses e hipérbolos, para apresentar uma nova abordagem para sua compreensão. O estudo se iniciou pela busca de suas raízes na linha do tempo da matemática. Por conta disto, o texto descreve o conceito da inversão em um círculo e suas propriedades básicas e apresenta uma introdução elementar ao estudo das transformações afins. Esta interligação entre transformações circulares e transformações afins produziu o resultado singular que se desejava e proporcionou um tratamento mais geométrico da inversão nas cônicas centrais, ao invés do tratamento analítico presente nos textos originais.

**Palavras-chaves:** Inversão no círculo. Transformação afim. Inversão na elipse. Inversão na hipérbole. Geometria dinâmica.



# Abstract

The subject of the research was to study the inversion in central conics, ellipses and hyperboles, to present a new approach to their understanding. The study began by searching for its roots in the mathematics timeline. Therefore, the text describes the concept of inversion in a circle and its basic properties and presents an elementary introduction to the study of affine transformations. This interconnection between circular transformations and affine transformations produced the singular result that was desired and provided a more geometric treatment of the inversion in central conics, instead of the analytical treatment present in the original texts.

**Key-words:** Inversion in a circle. Affine transformations. Inversion in an ellipse. Inversion in a hyperbole. Dynamic geometry.





# Lista de símbolos

$\overline{AB}$	medida do segmento $AB$
$\underline{AB}$	medida algébrica do segmento $AB$
$\overrightarrow{AB}$	semirreta com origem no ponto $A$ e que passa por $B$
$\vec{AB}$	vetor $AB$ , em expressão vetorial claramente identificada
$\angle OAB$	ângulo com vértice em $O$
$\gamma$	identifica um círculo
$\Gamma$	identifica um círculo de inversão
$\tau_k$	identifica a transformação de compressão com razão $k$
$\mathcal{E}$	identifica uma elipse de inversão
$\varepsilon$	subíndice que identifica uma elipse
$I_{\mathcal{E}}$	identifica a inversão em uma elipse $\mathcal{E}$
$I_{\Gamma}$	identifica a inversão em um círculo $\Gamma$
$r//s$	indica paralelismo entre as duas retas $r$ e $s$
$\overline{H}$	hipérbole dada por $-b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$



# Sumário

	<b>Introdução</b> . . . . .	<b>19</b>
<b>1</b>	<b>INVERSÃO NO CÍRCULO</b> . . . . .	<b>23</b>
<b>2</b>	<b>TRANSFORMAÇÕES AFINS</b> . . . . .	<b>37</b>
<b>3</b>	<b>INVERSÃO NAS CÔNICAS CENTRAIS</b> . . . . .	<b>47</b>
<b>4</b>	<b>ATIVIDADES COM INVERSÕES NO CÍRCULO E NA ELIPSE</b> . . .	<b>55</b>
<b>4.1</b>	<b>Objetivo e organização das atividades</b> . . . . .	<b>55</b>
<b>4.2</b>	<b>Atividades com inversão num círculo</b> . . . . .	<b>55</b>
4.2.1	Imagens de uma reta sob uma inversão no círculo . . . . .	55
4.2.2	Usar a inversão num círculo para obter uma propriedade geométrica	56
4.2.3	Transformar dois círculos em círculos concêntricos, sob uma inversão	57
<b>4.3</b>	<b>Atividades com inversão numa elipse</b> . . . . .	<b>57</b>
4.3.1	Imagens de uma reta sob uma inversão na elipse . . . . .	57
	<b>Considerações Finais</b> . . . . .	<b>61</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b> . . . . .	<b>65</b>
	<b>APÊNDICE A – PROPRIEDADES DAS TRANSFORMAÇÕES AFINS</b>	<b>67</b>
	<b>APÊNDICE B – UMA TRANSFORMAÇÃO AFIM É A COMPOSIÇÃO DE COMPRESSÕES</b> . . . . .	<b>73</b>
	<b>APÊNDICE C – MEDIAÇÕES DAS ATIVIDADES</b> . . . . .	<b>75</b>



# Introdução

Na Matemática, para saborear com prazer o fruto é preciso conhecer bem as suas raízes (Malba Tahan)<sup>1</sup>.

Estudar um tema matemático e desenvolver uma pesquisa tem uma etapa importante que é procurar suas raízes históricas na linha do tempo da matemática. Assim acontece com o estudo sobre inversão nas cônicas centrais, que é o objeto desenvolvido e descrito nesta dissertação. Este conceito foi exposto em maio de 1965, quando o professor *Childress* publicou o artigo (CHILDRESS, 1965), sendo a extensão do conceito de inversão no círculo. Outro texto usado nesta pesquisa foi (NEAS, 2017), sendo que foi deste último que foi apropriada a definição de inversão nas cônicas centrais.

Em decorrência das diferenças entre a definição de inversão nas cônicas centrais existentes nos dois textos, há observações importantes a serem feitas em relação à abordagem aqui adotada: conseguiu-se um resultado com enfoque mais geométrico desta transformação, em contraposição ao tratamento analítico que consta nos textos referenciais; e se identificou a ligação da inversão nas cônicas centrais com a inversão no círculo e as transformações afins, obtendo-se uma propriedade singular da inversão nas cônicas centrais, quando se demonstra que ela é uma composição de uma inversão em um círculo (ou uma hipérbole equilátera) e de compressões (um tipo particular de transformação afim, definido na página 40).

Tendo o próprio autor da definição sobre a inversão nas cônicas centrais, o matemático *Childress*, dito que é uma extensão do conceito de inversão em relação ao círculo no plano Euclidiano real, a pesquisa mostrada nesta dissertação se iniciou pelo entendimento dessa inversão e da sua importância para a matemática.

Ao ser pesquisado quem descobriu a inversão no círculo e como ela se tornou importante na matemática, surpreendentemente surgiu uma relação entre a definição dessa inversão e a propriedade do "*círculo de Apolônio*". Boyer, em (BOYER, 1974), descreve a importância de Apolônio de Perga relacionada aos estudos da matemática e da astronomia. Ao se referir às obras restauradas e que chegaram até nós, é citado o tratado *Lugares planos* e neste momento a propriedade aparece sem maiores detalhes. Nesse tratado estão descritos dois lugares e um deles é "*O lugar dos pontos cuja razão das distâncias a dois pontos fixos é constante (e diferente de um) é um círculo*". Isto caracteriza o lugar geométrico identificado por "*círculo de Apolônio*". Em uma linguagem matemática atual, esta propriedade pode ser escrita como: Sejam dados dois pontos

---

<sup>1</sup> Malba Tahan é como ficou conhecido o matemático brasileiro Júlio César de Mello e Souza, autor de *O homem que calculava*, e outras obras.

fixos  $A$  e  $B$  do plano, o lugar geométrico de um ponto  $P$  tal que  $\overline{AP} = k \cdot \overline{BP}$ , onde  $k > 0$  e  $k \neq 1$ , é um círculo. A demonstração desta propriedade conduz ao resultado interessante:  $\overline{OA} \cdot \overline{OB} = r^2$ , onde  $O$  é o centro do círculo de Apolônio e  $r$  é o raio. Este resultado estabelece que os pontos  $A$  e  $B$  são imagens um do outro pela inversão no círculo de centro  $O$  e raio  $r$ .

Sob o olhar retrospectivo, pula-se para o século XIX, quando vários matemáticos estudaram a inversão no círculo. Esses estudos estão descritos na referência (PATTERSON, 1933), que identifica o matemático *Jacob Steiner* como o primeiro que formalmente criou a inversão no círculo, com base num texto datado de 8 de fevereiro de 1824, e postumamente publicado pelo matemático *Bützberger*.

Nos anos seguintes, matemáticos e físicos redescobriram, de forma independente, as inversões com propriedades específicas para suas particulares aplicações. Uma das aplicações da inversão está na resolução de problemas criados por Apolônio na Antiguidade, chamados de "Problema de Apolônio", cuja descrição é: dadas três coisas, cada uma das quais pode ser um ponto, uma reta ou um círculo, traçar um círculo que é tangente a (ou que passa por) cada uma das três coisas (BOYER, 1974, p.105). Outros problemas resolvidos com a inversão num círculo, são os que envolvem uma cadeia infinita de círculos tangentes contidos em regiões formadas por círculos que se intersectam ou não; problemas que envolvem círculo e retas; problemas com traçado de círculos perpendiculares etc. Uma diversidade de aplicações pode ser encontrada em (YAGLOM, 2009). Da mesma forma, a inversão em cônicas centrais permite resolver extensões de alguns desses problemas (RAMIREZ, 2014).

Como citado acima, a quantidade e a diversidade de problemas que a transformação de inversão no círculo permite resolver lhe confere um certo grau de relevância entre os conteúdos importantes de geometria básica. Ainda que essa transformação não se torne objeto de estudo do programa de ensino básico, pois não consta no documento (DF, 2013), o seu uso enriquece o tratamento dos conteúdos obrigatórios. De fato, o conceito de inversão no círculo, ou sua extensão às cônicas centrais, envolve conceitos e técnicas tais como: círculo, elipses, construção de círculos perpendiculares, teorema de Tales, problema de quarta proporcional, homotetia, compressão, entre outros.

Nesta visão, várias atividades para a sala de aula foram desenvolvidas e estão acompanhadas de indicações para a sua aplicação. Desta forma, fica claro, para o professor, que elas foram criadas e pensadas para serem trabalhadas segundo a metodologia de resolução de problemas, essencial na aprendizagem da matemática. Segundo (ALMOULOU, 2010, p.66):

... a realização de tarefas amplia a situação didática, de modo que outros elementos matemáticos (noção, métodos), nos diferentes quadros<sup>2</sup>, sejam trabalhados do ponto de vista do significado e da técnica.

<sup>2</sup> O quadro é constituído de ferramentas de uma parte da matemática, de relação entre os objetos, de

Sob os fundamentos da didática, apresentados em (ALMOULOUD, 2010), nas atividades estão presentes o quadro geométrico, o quadro algébrico, o quadro de geometria analítica, o quadro numérico. Dentro de cada quadro, há competências específicas que são necessárias. Conforme evidenciado nas pesquisas, para "*evoluir as concepções do aluno*", (ALMOULOUD, 2010), o professor pode explorar a mudança de quadro ou o jogo de quadros.

O resultado do estudo sobre inversão nas cônicas centrais está distribuído nos capítulos que compõem esta dissertação. Iniciando-se com a apresentação do conceito de inversão geométrica no círculo e das demonstrações de várias propriedades no primeiro capítulo.

No Capítulo 2, foi realizado o estudo elementar sobre transformações afins, que se revelaram fundamentais para se obter o resultado singular do estudo da inversão em relação às cônicas centrais. Dentre as transformações afins, a compressão se mostrou como base de todas, pois qualquer umas delas é uma composição de compressões.

O Capítulo 3 trata da inversão nas cônicas centrais que é o tema focal dos estudos descritos nesta dissertação.

No Capítulo 4 estão as sequências didáticas desenvolvidas para os alunos.

A conclusão dos estudos está registrada no quinto capítulo. E, além dos capítulos citados, apêndices foram necessários para que as demonstrações mais densas fiquem disponíveis para quem tem o interesse mais algébrico, e há um apêndice com as mediações relativas às atividades.

---

formulações eventualmente diferentes e de imagens mentais associadas a essas ferramentas e relações. Dois quadros podem ter os mesmos objetos e serem diferentes por causa das imagens mentais e da problemática desenvolvida.





# 1 Inversão no Círculo

Neste capítulo, serão apresentadas as definições e proposições necessárias para se conhecer o significado da inversão em um círculo. Esta transformação do plano tem semelhanças com a reflexão em uma reta e, de forma simplificada, pode ser vista como a troca dos pontos do interior de um círculo pelos pontos do exterior. Depois de se compreender a ação desta transformação sobre os pontos do plano, as proposições mostrarão que retas e círculos se transformam um no outro. Dentre as propriedades desta transformação, destaca-se a preservação do ângulo.

Neste trabalho, também existe a necessidade de se usar um número para representar ora o comprimento, ora a medida algébrica de um segmento de reta. Para isto, adota-se nesta dissertação a escrita  $\overline{AB}$  para representar o comprimento do segmento  $AB$ , e  $\underline{AB}$  para significar a medida algébrica do segmento  $AB$ . As referências (YAGLOM, 2009) e (BAKELMAN et al., 1974) são a base do desenvolvimento dos estudos da inversão no círculo.

**Definição 1.1** A inversão no círculo  $\Gamma$ , de centro  $O$  e raio  $r$ , é a transformação do plano que associa um ponto  $X \neq O$  a um ponto  $X'$ , localizado sobre a semirreta  $\overrightarrow{OX}$  e que satisfaz à equação

$$\overline{OX} \cdot \overline{OX'} = r^2. \quad (1.1)$$

O círculo  $\Gamma$  é o círculo de inversão, o valor  $r^2$  é chamado a *potência* da inversão e o centro  $O$  é o centro da inversão. Estes elementos estão ilustrados na Figura 1.

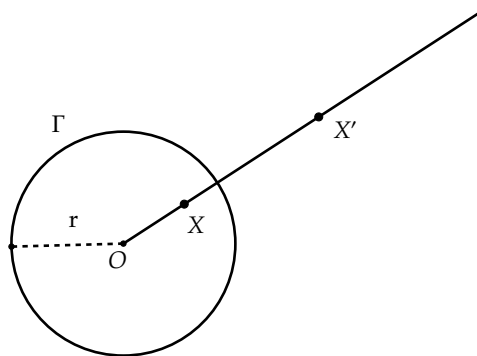


Figura 1 – Inversão no círculo.

A inversão em um círculo  $\Gamma$  será referenciada por  $I_\Gamma$ , a não ser que haja necessidade de uma identificação diferente. Além disso,  $r$  denotará o raio de  $\Gamma$ .

**Lema 1.1** Todos os pontos do círculo de inversão  $\Gamma$  são pontos fixos pela inversão em  $\Gamma$ .

**Demonstração do Lema 1.1** Seja o ponto  $X$  sobre o círculo  $\Gamma$ , logo  $\overline{OX} = r$  e, conseqüentemente, da Equação (1.1) obtém-se

$$\begin{aligned}\overline{OX'} &= \frac{r^2}{\overline{OX}} \\ &= \frac{r^2}{r} = r.\end{aligned}$$

Desde que  $X$  e  $X'$  estão na semirreta  $\overrightarrow{OX}$ , segue desse resultado que  $X = X'$ . ★

**Lema 1.2** *Seja  $I_\Gamma$  a inversão no círculo  $\Gamma$  de centro  $O$  e raio  $r$ . Um ponto  $X \notin \Gamma$ , com  $X \neq O$ , e sua imagem  $I_\Gamma(X)$  estão um no interior de  $\Gamma$  e outro no exterior de  $\Gamma$ .*

**Demonstração do Lema 1.2** Primeiro, seja o ponto  $X$  no interior de  $\Gamma$  e  $X \neq O$ , isto é,  $\overline{OX} < r$ . Pela Equação (1.1), verifica-se que

$$\overline{OX'} = \frac{r^2}{\overline{OX}} > \frac{r^2}{r} = r,$$

ou seja, o ponto  $X'$  está fora do círculo de inversão. Agora, considere-se que o ponto  $X$  está fora do círculo  $\Gamma$ , isto é,  $\overline{OX} > r$ . De novo, pela Equação (1.1), verifica-se que

$$\overline{OX'} = \frac{r^2}{\overline{OX}} < \frac{r^2}{r} = r,$$

ou seja, o ponto  $X'$  está no interior do círculo de inversão. ★

**Lema 1.3** *Uma inversão num círculo é uma involução, isto é, a inversão aplicada sucessivamente duas vezes leva qualquer ponto  $X$  nele mesmo.*

**Demonstração do Lema 1.3** Seja  $\Gamma$  um círculo de centro  $O$  e raio  $r$  e sejam os pontos  $X \neq O$ ,  $X'$  e  $Z$ , todos sobre a semirreta  $\overrightarrow{OX}$ , tais que  $X' = I_\Gamma(X)$  e  $Z = I_\Gamma(X')$ . Então, pela Equação (1.1)

$$\begin{aligned}\overline{OX'} &= \frac{r^2}{\overline{OX}} \\ \overline{OZ} &= \frac{r^2}{\overline{OX'}}.\end{aligned}$$

Por isso,

$$\overline{OZ} = r^2 \cdot \frac{\overline{OX}}{r^2} = \overline{OX}.$$

Como os pontos  $X \neq O$ ,  $X'$  e  $Z$  estão na semirreta  $\overrightarrow{OX}$ , segue que  $Z = X$ . Logo,  $I_\Gamma(X) = X'$  e  $I_\Gamma(X') = Z = X$ . ★

**Teorema 1.1** *Sejam  $O, A$  e  $B$  três pontos não colineares do plano. Seja  $\Gamma$  o círculo de centro  $O$  e raio  $r$  e  $A' = I_{\Gamma}(A)$  e  $B' = I_{\Gamma}(B)$ , as respectivas imagens de  $A$  e  $B$  sob a inversão  $I_{\Gamma}$ . Então os triângulos  $OAB$  e  $OB'A'$  são semelhantes.*

**Demonstração do Teorema 1.1** Pela Equação (1.1), tem-se

$$\overline{OA} \cdot \overline{OA'} = \overline{OB} \cdot \overline{OB'} = r^2.$$

Por isso,

$$\frac{\overline{OA}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{OB'}}{\overline{OA'}}$$

ou

$$\frac{\overline{OA}}{\overline{OB'}} = \frac{\overline{OB}}{\overline{OA'}}.$$

Desta proporção dos lados que formam o ângulo  $\angle A'OB'$ , comum aos triângulos  $OAB$  e  $OB'A'$ , fica provado que os triângulos  $OAB$  e  $OB'A'$  são semelhantes pelo critério de semelhança *LAL* (a Figura 2 ilustra o teorema). ★

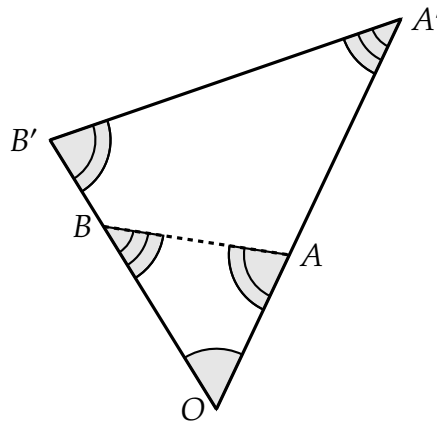


Figura 2 – Inversão no círculo - triângulos semelhantes.

**Teorema 1.2** *Seja um sistema ortogonal de coordenadas cujo centro coincida com o centro do círculo  $\Gamma$ , de raio  $r$ , e  $I_{\Gamma}$  a inversão nesse círculo. As coordenadas  $(x', y')$  do ponto  $X' = I_{\Gamma}(X)$  serão dadas pelas equações*

$$\begin{cases} x' = \frac{r^2}{x^2+y^2}x \\ y' = \frac{r^2}{x^2+y^2}y, \end{cases} \quad (1.2)$$

em que  $(x, y)$  denotam as coordenadas do ponto  $X$  e  $(x, y) \neq (0, 0)$ .

**Demonstração do Teorema 1.2** Pela definição de inversão no círculo  $\overline{OX} \cdot \overline{OX'} = r^2$  e substituindo pelas respectivas expressões de distância do ponto à origem, obtém-se

$$\sqrt{x^2 + y^2} \cdot \sqrt{x'^2 + y'^2} = r^2.$$

Simplificando e considerando, para  $x \neq 0$ ,  $m = y/x = y'/x'$  como a inclinação da semirreta  $\overrightarrow{OX}$ , obtém-se a equação

$$\sqrt{(x \cdot x')^2 \cdot (1 + m^2)^2} = r^2.$$

Desde que  $X$  e  $X'$  estão na mesma semirreta de origem  $(0, 0)$ , então  $x$  e  $x'$  têm o mesmo sinal e portanto  $x \cdot x' > 0$ . Logo,

$$\begin{aligned} x \cdot x' &= \frac{r^2}{1 + m^2}, \\ y \cdot y' &= \frac{r^2 m^2}{1 + m^2} \end{aligned}$$

e, substituindo  $m$ , o teorema fica provado no caso em que  $x \neq 0$ . Se  $x = 0$ , temos  $x' = 0$  e  $y \cdot y' = r^2$  ou  $y' = \frac{r^2}{y}$ . Portanto, as equações (1.2) são válidas. ★

Apesar de uma inversão não ser definida no seu centro, por um abuso de linguagem, este ponto não foi excluído ao se mencionar as imagens que passam por ele.

**Teorema 1.3** *Seja um círculo  $\Gamma$  com centro  $O$  e raio  $r$ . Uma reta  $l$  que passa pelo centro  $O$  é invariante sob a inversão  $I_\Gamma$ .*

**Demonstração do Teorema 1.3** Seja um ponto  $X$  da reta  $l$  e  $I_\Gamma(X) = X'$ . Logo  $X'$  pertence à semirreta  $\overrightarrow{OX}$ , portanto está na reta  $l$ . Assim, cada ponto da reta  $l$  é levado a um ponto imagem pertencente também a  $l$ , ou seja,  $I_\Gamma(l) \subset l$ .

Agora, seja um ponto  $Z$  na reta  $l$  e seja  $X \in l$  com  $X = I_\Gamma(Z)$ . Pelo Lema 1.3,  $I_\Gamma(X) = Z$ . Logo, qualquer ponto da reta  $l$  é imagem de outro ponto que pertence a  $l$ , ou seja  $l \subset I_\Gamma(l)$ . Desse modo,  $I_\Gamma(l) = l$  e fica provado o teorema. ★

**Teorema 1.4** *Uma inversão  $I_\Gamma$  num círculo  $\Gamma$  de centro  $O$  leva uma reta  $l$ , que não passa por  $O$ , em um círculo  $\gamma$  que passa por  $O$ .*

**Demonstração do Teorema 1.4** Seja  $P$  o pé da perpendicular baixada de  $O$  sobre  $l$ , cuja imagem pela inversão no círculo  $\Gamma$  é  $P' = I_\Gamma(P)$ . Seja  $Q$  outro ponto da reta  $l$  cuja imagem é  $Q' = I_\Gamma(Q)$ . Pelo Teorema 1.1, os triângulos  $OPQ$  e  $OQ'P'$  são semelhantes. Por isso,

$$\angle OPQ \cong \angle OQ'P'.$$

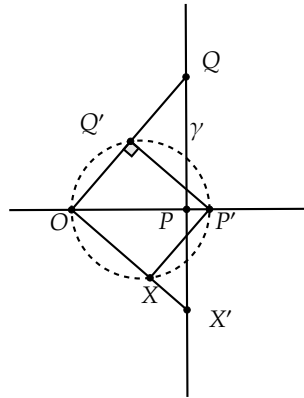


Figura 3 – Reta que não passa pelo centro de inversão.

Como  $\angle OPQ$  é reto, logo  $\angle OQ'P'$  também é reto. Portanto, os pontos  $P'$  e  $Q'$  estão sobre o círculo  $\gamma$  de diâmetro  $\overline{OP'}$ , como ilustra a Figura 3. Isto quer dizer que as imagens dos pontos de  $l$  pertencem ao círculo  $\gamma$  ou seja,  $I_{\Gamma}(l) \subset \gamma$ . Para completar a demonstração, é necessário provar que qualquer ponto do círculo  $\gamma$  é imagem de algum ponto da reta  $l$ , ou o mesmo que  $\gamma \subset I_{\Gamma}(l)$ .

Seja um ponto qualquer  $X \in \gamma$  e  $X \neq O$ . A semirreta  $\overrightarrow{OX}$  irá intersectar a reta  $l$  em um ponto  $X'$ . Isto acontece porque o círculo  $\gamma$  e a reta  $l$  estão do mesmo lado da tangente a  $\gamma$  em  $O$ . O objetivo é provar que  $X = I_{\Gamma}(X')$ . Sendo  $OP'$  o diâmetro do círculo  $\gamma$  e que  $X \in \gamma$ , tem-se que  $\angle OXP'$  é reto. Por isso, os triângulos  $OPX'$  e  $OXP'$  são semelhantes e é válida a proporção

$$\frac{\overline{OX}}{\overline{OP'}} = \frac{\overline{OP}}{\overline{OX'}}.$$

Mas isto é equivalente a

$$\overline{OX} \cdot \overline{OX'} = \overline{OP} \cdot \overline{OP'} = r^2.$$

Pela definição da inversão  $I_{\Gamma}$ ,  $X = I_{\Gamma}(X')$ . Portanto,  $\gamma \subset I_{\Gamma}(l)$ . ★

**Teorema 1.5** Uma inversão  $I_{\Gamma}$  num círculo  $\Gamma$  de centro  $O$  e raio  $r$  leva um círculo  $\gamma$  que passa pelo centro  $O$ , numa reta  $l$  que não passa por  $O$ .

**Demonstração do Teorema 1.5** Seja dado um círculo  $\gamma$  passando por  $O$  e seja  $X$  a outra extremidade do diâmetro de  $\gamma$  com origem em  $O$ , tal que  $X'$  seja a imagem de  $X$  por  $I_{\Gamma}$  (Figura 4). Tome-se um ponto  $Z$  sobre o círculo  $\gamma$ , cuja imagem sob  $I_{\Gamma}$  seja  $Z'$ . Aplicando-se o Teorema 1.1 aos pontos  $O, X, Z$  e às respectivas imagens  $X'$  e  $Z'$ , conclui-se que o triângulo  $OZX$  é semelhante ao triângulo  $OX'Z'$ , logo  $\angle OZX \cong \angle OX'Z'$  e são ângulos retos. Isto significa que o ponto  $Z'$  está sobre a reta  $l$  determinada por  $X'$  e  $Z'$  e perpendicular à reta  $OX'$ , no ponto  $X'$ . Sendo  $Z$  um ponto genérico, segue que qualquer ponto sobre  $\gamma$  tem imagem em  $l$ , ou seja,  $I_{\Gamma}(\gamma) \subset l$ .

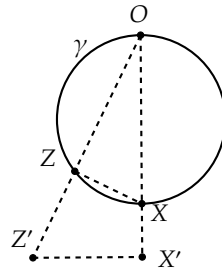


Figura 4 – Imagem do círculo  $\gamma$ .

Para concluir a demonstração é necessário provar que  $l \subset I_{\Gamma}(\gamma)$ .

Considere-se um ponto  $P' \in l$ . Como a reta  $l$  e o círculo  $\gamma$  estão do mesmo lado da tangente ao círculo em  $O$ , a reta  $OP'$  intersecta o círculo  $\gamma$  em um outro ponto  $P$ . Sendo  $\angle OPX$  um ângulo reto, tem-se que o triângulo  $OPX$  é semelhante ao triângulo  $OX'P'$ , logo

$$\frac{\overline{OX}}{\overline{OP}} = \frac{\overline{OP'}}{\overline{OX'}}$$

$$\overline{OP} \cdot \overline{OP'} = \overline{OX} \cdot \overline{OX'}.$$

Como  $X' = I_{\Gamma}(X)$

$$\overline{OP} \cdot \overline{OP'} = r^2.$$

Portanto  $P' \in l$  é imagem de algum ponto  $P \in \gamma$ , o que se desejava provar. ★

**Corolário 1.1** O círculo  $\gamma$ , que passa pelo centro  $O$  da inversão em  $\Gamma$ , tem a tangente em  $O$  paralela à reta  $l$  que é imagem de  $\gamma$  sob  $I_{\Gamma}$ .

**Demonstração do Corolário 1.1** Seja o diâmetro  $OA$  do círculo  $\gamma$ . Pelo Teorema 1.5,  $A' = I_{\Gamma}(A)$  está sobre a reta  $l$  que é perpendicular à reta  $OA$ . Por outro lado, a tangente  $t$  ao círculo em  $O$  é perpendicular a  $OA$ . Portanto, as retas  $l$  e  $t$  são paralelas. ★

**Teorema 1.6** Uma inversão  $I_{\Gamma}$  num círculo  $\Gamma$  de centro  $O$  leva um círculo  $\gamma$ , que não passa pelo centro  $O$ , num outro círculo  $\gamma'$  que também não passa por  $O$ .

**Demonstração do Teorema 1.6** A Figura 5 auxilia no entendimento da demonstração. Sejam  $O_{\gamma}$  o centro do círculo  $\gamma$  e  $l$  a reta determinada por  $O$  e por  $O_{\gamma}$ , intersectando o círculo  $\gamma$  no diâmetro  $MN$  (supondo  $M$  entre  $O$  e  $N$ )<sup>1</sup>. Considere-se um ponto qualquer  $A$  sobre o círculo  $\gamma$  e os pontos  $A'$ ,  $M'$  e  $N'$ , as respectivas imagens dos pontos  $A$ ,  $M$  e  $N$  pela inversão em  $\Gamma$ . Pelo Teorema 1.1, os triângulos  $OAM$  e  $OM'A'$  são semelhantes, bem como os triângulos  $OAN$  e  $ON'A'$ . Por isso,

$$\angle OAM \cong \angle OM'A',$$

$$\angle OAN \cong \angle ON'A'.$$

<sup>1</sup> Essa suposição não restringe a demonstração visto que, nos outros dois casos de ordem entre os pontos  $O$ ,  $M$  e  $N$ , as demonstrações são similares.

Temos as seguintes equações

$$\begin{aligned}\angle OAN &\cong \angle OAM + \angle MAN \\ \angle MAN &\cong \angle OAN - \angle OAM \\ &\cong \angle ON'A' - \angle OM'A',\end{aligned}$$

em que  $\angle MAN$  é reto. O ângulo  $\angle ON'A'$  é externo ao triângulo  $M'A'N'$ , consequentemente

$$\begin{aligned}\angle ON'A' &\cong \angle M'A'N' + \angle OM'A', \\ \angle M'A'N' &\cong \angle ON'A' - \angle OM'A' \cong \angle MAN,\end{aligned}$$

então  $\angle M'A'N'$  é reto. Isto significa que o ponto  $A'$  está sobre o círculo  $\gamma'$  com diâmetro  $M'N'$ , concluindo que  $I_{\Gamma}(\gamma) \subset \gamma'$ .

É necessário provar que  $\gamma' \subset I_{\Gamma}(\gamma)$  para completar a demonstração. Para isto, seja  $X'$  um ponto qualquer sobre o círculo  $\gamma'$  e o ponto  $X$  sobre a semirreta  $\overrightarrow{OX'}$  tal que  $\overline{OX} = \frac{r^2}{\overline{OX'}}$ . Então  $X = I_{\Gamma}(X')$ . Sendo  $M', N'$  e  $X'$  as imagens sob a inversão  $I_{\Gamma}$  dos pontos  $M, N$  e  $X$  respectivamente, pelo Teorema 1.1 segue que

$$\begin{aligned}\angle MXN &= \angle OXN - \angle OXM \\ &= \angle ON'X' - \angle OM'X' \\ &= \angle N'X'M'.\end{aligned}$$

Sendo o  $\angle N'X'M'$  reto, provou-se que o  $\angle MXN$  também é reto, portanto, o ponto  $X$  está sobre o círculo  $\gamma$ . Logo, qualquer ponto  $X' \in \gamma'$  é imagem de um ponto sobre o círculo  $\gamma$ , provando que  $\gamma' \subset I_{\Gamma}(\gamma)$ . ★

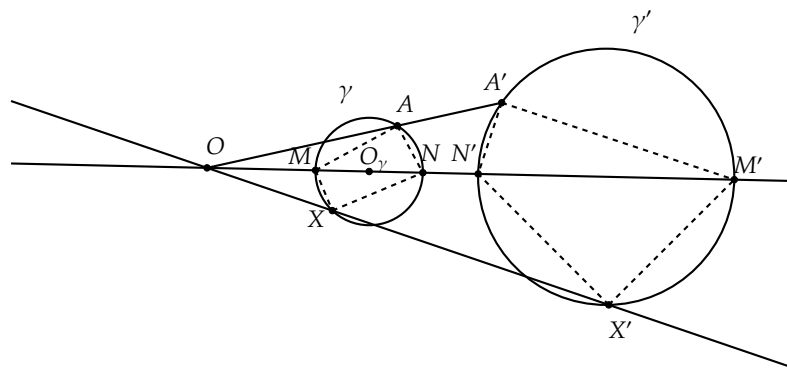


Figura 5 – Imagem do círculo que não passa pelo centro de inversão.

Dado um ponto  $H$  e um número real  $k \neq 0$ , diz-se que um ponto  $X_2$  é a imagem de  $X_1$  pela homotetia de centro  $H$  e razão  $k$  se  $\overrightarrow{HX_2} = k \cdot \overrightarrow{HX_1}$ . Outro conceito relevante na demonstração do teorema 1.7 é o de potência de um ponto  $P$  em relação a um círculo

$\Gamma$ , de raio  $r$ , definido pelo número  $n = d^2 - r^2$ , onde  $d$  é a distância de  $P$  ao centro do círculo  $\Gamma$ .

**Teorema 1.7** O círculo  $\gamma$ , que não passa pelo centro  $O$  do círculo de inversão  $\Gamma$ , é homotético a  $\gamma' = I_\Gamma(\gamma)$ , por uma homotetia de centro  $O$ .

**Demonstração do Teorema 1.7** Existem duas possibilidades para a localização do centro de inversão: ele pode ser exterior a  $\gamma$  ou se localizar no interior de  $\gamma$ . As Figuras 6 e 7 servirão para ilustrar os argumentos da demonstração.

Sejam dados um círculo  $\Gamma$  de centro  $O$  e raio  $r$ . Pelo Teorema 1.6,  $I_\Gamma(\gamma) = \gamma'$ , onde  $\gamma'$  é um círculo que não passa por  $O$ . Seja  $X \in \gamma$  e sua imagem  $X' = I_\Gamma(X) \in \gamma'$ , usando a Equação (1.1)

$$\overline{OX} \cdot \overline{OX'} = r^2.$$

A reta  $OX$  intersecta o círculo  $\gamma$  no segundo ponto  $X_1$ , que poderá se localizar no mesmo lado de  $X$  ou em lado oposto, com relação ao ponto  $O$ . Pela definição de potência, existe uma constante  $k$  tal que

$$\overline{OX} \cdot \overline{OX_1} = \epsilon k,$$

onde  $\epsilon = \pm 1$ , dependendo da localização dos pontos  $X$  e  $X_1$  em relação ao centro de inversão  $O$ .

Destas equações se obtém a igualdade  $\overrightarrow{OX'} = \frac{\epsilon r^2}{k} \overrightarrow{OX_1}$ , evidenciando que  $X'$  é imagem de  $X_1$  pela homotetia de centro  $O$  e razão  $\frac{\epsilon r^2}{k}$ .

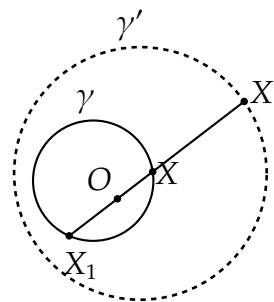
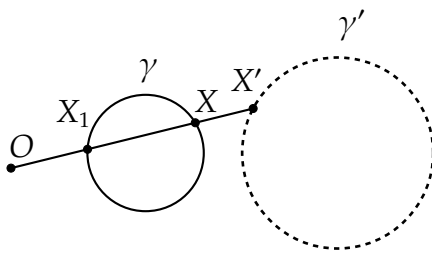


Figura 6 – Centro de inversão externo.

Figura 7 – Centro de inversão interno.

Se o ponto  $X$  for um ponto de tangência do círculo  $\gamma$ , a propriedade de potência permanece igual e basta substituir nas expressões o ponto  $X_1$  por  $X$  para se verificar que o resultado se mantém. Portanto, está provado que o círculo  $\gamma'$  é imagem do círculo  $\gamma$  por uma homotetia de centro  $O$ . ★

O ângulo entre duas curvas é definido como o menor ângulo entre as tangentes a cada curva no ponto  $P$  de intersecção das mesmas. Pelos Teoremas 1.3 e 1.4, a imagem



da tangente a uma curva em  $P$  sob  $I_\Gamma$  será uma reta ou um círculo que será tangente à imagem da curva em  $P' = I_\Gamma(P)$ . Logo, a tangente à imagem da curva em  $P'$  sob  $I_\Gamma$  será a reta imagem da reta tangente em  $P$  ou a reta tangente ao círculo imagem da tangente em  $P$ .

A partir dessa observação, o teorema seguinte mostra que o ângulo entre duas curvas é preservado por uma inversão.

**Teorema 1.8** *Seja um círculo  $\Gamma$  de centro  $O$  e raio  $r$ . A inversão  $I_\Gamma$  é uma transformação conforme.*

**Demonstração do Teorema 1.8** Para a demonstração desse teorema, sejam dadas as retas  $l_1$  e  $l_2$ .

**Caso 1** -  $l_1 \cap l_2 = \{O\}$ : Pelo Teorema 1.3 as retas são invariantes, logo o ângulo entre elas se mantém.

**Caso 2** -  $O \in l_1$  e  $O \notin l_2$ : Pelos Teoremas 1.3 e 1.4,  $l'_1 = I_\Gamma(l_1) = l_1$  e  $l'_2 = I_\Gamma(l_2)$  é um círculo que passa por  $O$ . E devido ao corolário 1.1, a tangente  $t$  ao círculo  $l'_2$  é paralela a  $l_2$  sob  $I_\Gamma$ , como ilustrado na Figura 8.

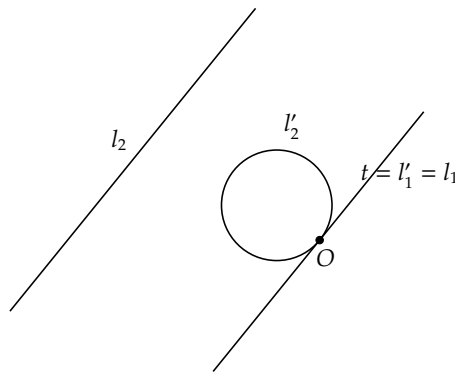


Figura 8 – Teorema 1.8 - caso 2-1.

Quanto às posições relativas das retas  $l_1$  e  $l_2$ , há duas possibilidades:

1.  $l_1 \parallel l_2$ :

Sendo  $l_1$  e  $l_2$  paralelas, o ângulo entre elas é nulo. Como  $l_1$  passa por  $O$ , ela coincide com a tangente  $t$  ao círculo  $l'_2$  em  $O$ . Segue que o ângulo entre  $l'_1$  e  $l'_2$  é nulo, e prova o teorema.

2.  $l_1 \cap l_2 = \{P\} (\neq \emptyset)$ .

Considere-se agora que  $l_1$  e  $l_2$  não são paralelas e se intersectam no ponto  $P$  (Figura 9). Sendo  $\alpha$  o ângulo entre  $l_1 = l'_1$  e  $l_2$ , ele é igual ao ângulo entre  $l_1$  e a tangente  $t$  em  $O$ , pois  $l_2$  é paralela a  $t$ . O ponto  $P$  é levado a sua imagem  $P'$  sob a inversão  $I_\Gamma$ , que é a intersecção de  $l'_1$  e o círculo  $l'_2$ . Pela propriedade de ângulo entre uma reta e um círculo, a reta  $l'_1$ , determinada pela corda  $OP'$

intersecta a tangente  $t_1$  em  $P'$  com o mesmo ângulo formado pela tangente  $t$  em  $O$  que é igual ao ângulo entre  $l_1$  e  $l_2$ , provando o teorema.

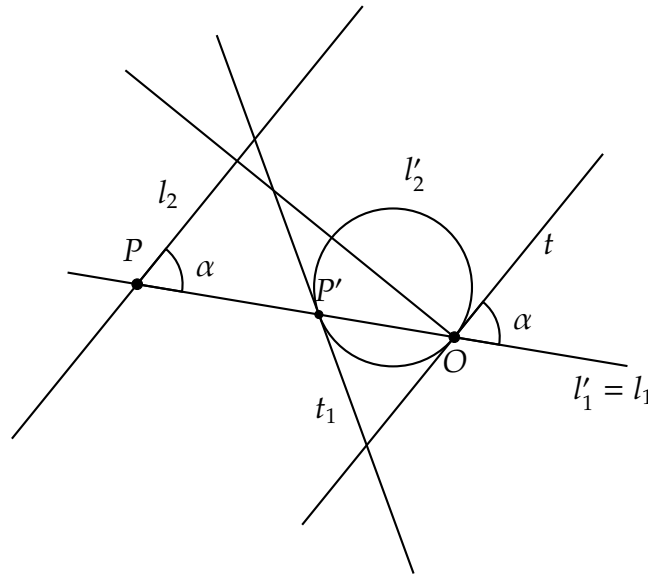


Figura 9 – Teorema 1.8 - caso 2-2.

**Caso 3 -  $O \notin l_1$  e  $O \notin l_2$ :** Neste caso, as imagens  $l_1$  e  $l_2$  serão dois círculos que passam pelo centro de inversão  $O$ .

Portanto, se as retas forem paralelas, os dois círculos serão tangentes em  $O$ , e o ângulo entre eles será nulo, que é o mesmo ângulo entre as retas paralelas, comprovando o teorema.

Mas se  $l_1 \cap l_2 = \{P\}$  (Figura 10), o ângulo entre os círculos em  $O$  é igual ao ângulo entre  $l_1$  e  $l_2$ , desde que as tangentes  $t_1$  e  $t_2$  são paralelas a  $l_1$  e  $l_2$ , respectivamente, provado pelo corolário 1.1. O ponto  $P$  é levado a sua imagem  $P'$  sob a inversão  $I_\Gamma$ , que é a intersecção dos círculos  $l'_1$  e  $l'_2$ . Pela propriedade de ângulo entre círculos, a reta  $OP$ , determinada pela corda  $OP'$  intersecta as tangentes em  $P'$  com o mesmo ângulo formado pelas tangentes em  $O$  que é igual ao ângulo entre  $l_1$  e  $l_2$ , provando o teorema. ★

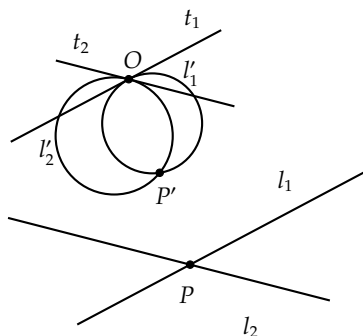


Figura 10 – Teorema 1.8 - caso 3.

**Teorema 1.9** *Sob uma inversão em um círculo, quaisquer dois círculos, ou uma reta e um círculo, podem ser transformados em retas concorrentes, em retas paralelas ou em dois círculos concêntricos.*

**Demonstração do Teorema 1.9** Dado um círculo  $\Gamma$  de centro  $O$  e raio  $r$ , a demonstração será realizada considerando os casos em que os objetos admitem: um único ponto em comum; dois pontos em comum; nenhum ponto em comum.

**Caso 1 - um único ponto em comum:** Sejam dados uma reta  $l$  e um círculo  $\gamma$ , tais que  $l \cap \gamma = \{O\}$ , ou dados dois círculos  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  tais que  $\gamma_1 \cap \gamma_2 = \{O\}$  (Figura 11). Considerando-se este ponto como sendo o centro de inversão, pelos Teoremas 1.3 e 1.5, estes objetos ( $l$  e  $\gamma$  ou  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$ ) serão transformados em duas retas paralelas sob a inversão  $I_\Gamma$  (Figura 12);



Figura 11 – Círculo e reta tangentes. Figura 12 – Imagens por  $I_\Gamma$  de círculo e reta tangentes.

**Caso 2 - Com dois pontos em comum:** Sejam dados uma reta  $l$  e um círculo  $\gamma$  tais que  $l \cap \gamma = \{O, P\}$ , ou sejam dados dois círculos  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  tais que  $\gamma_1 \cap \gamma_2 = \{O, P\}$  (Figura 13). Considerando-se o ponto  $O$  como sendo o centro de inversão, pelos Teoremas 1.3 e 1.5, estes objetos ( $l$  e  $\gamma$  ou  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$ ) serão transformados em duas retas concorrentes sob a inversão  $I_\Gamma$ .

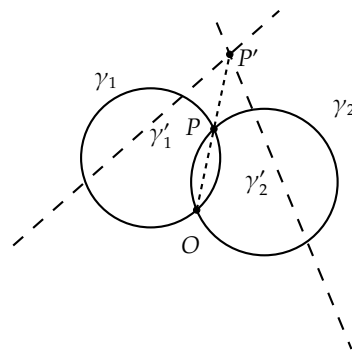


Figura 13 – Círculos secantes.

**Caso 3 - reta e círculo sem pontos em comum:** Sejam dados uma reta  $l$  e um círculo  $\gamma$  de centro  $O_\gamma$ , tais que  $l \cap \gamma = \emptyset$ . Seja  $P$  o pé da perpendicular  $l_p$  baixada sobre  $l$  a partir  $O_\gamma$ . Pelo ponto  $P$ , traçam-se as tangentes ao círculo  $\gamma$  e sejam  $P_1$  e  $P_2$  os pontos de tangência. Considerando-se  $\overline{PP_1}$  como raio, traça-se o círculo  $\bar{\gamma}$  de centro em  $P$ . Logo este círculo é perpendicular à reta  $l$  e ao círculo  $\gamma$ , além de intersectar  $l_p$  em dois pontos ( $O$  e  $O_1$ ) (Figura 14).

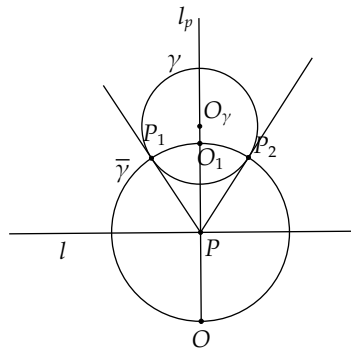


Figura 14 – Círculo  $\gamma$  e reta  $l$  com  $\gamma \cap l = \emptyset$ .

Considere-se  $O$  como sendo o centro da inversão  $I_\Gamma$ , em que  $\Gamma$  é um círculo de raio qualquer e centro  $O$ . Sob a inversão  $I_\Gamma$ , a reta  $l_p$  é invariante e o círculo  $\bar{\gamma}$  se transforma na reta  $\bar{\gamma}'$ . Os Teoremas 1.5 e 1.6 garantem que a reta  $l$  e o círculo  $\gamma$  se transformam, sob esta inversão, em dois círculos  $l'$  e  $\gamma'$ , respectivamente, ambos perpendiculares a  $l_p$  e  $\bar{\gamma}'$ . Mas se um círculo é perpendicular a uma reta, então seu centro está sobre esta reta. Assim, os centros dos círculos  $l'$  e  $\gamma'$  estão sobre as retas  $l_p$  e  $\bar{\gamma}'$ , logo a intersecção dessas retas é o centro comum dos dois círculos. Isso prova que uma reta e um círculo sem pontos em comum podem ser transformados em dois círculos concêntricos sob uma inversão (Figura 15).

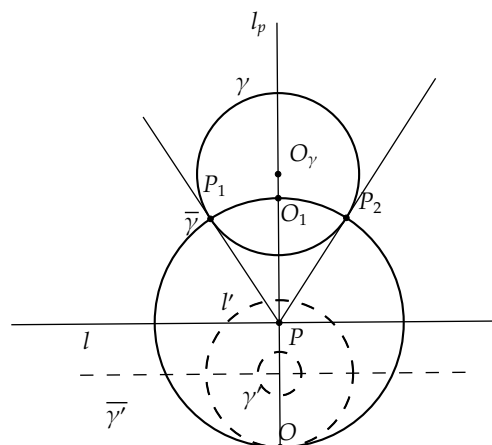


Figura 15 – Círculo  $\gamma$  e reta  $l$ , com  $\gamma \cap l = \emptyset$ , e suas imagens.

**Caso 4 - dois círculos sem pontos em comum:** Para concluir a demonstração do teorema, será utilizada a existência do eixo radical<sup>2</sup> dos dois círculos dados para a construção de um círculo perpendicular a eles. Os elementos da demonstração estão ilustrados nas Figuras 16 e 17.

Sejam dados dois círculos  $\Gamma_A$  e  $\Gamma_B$  de centros  $C_1$  e  $C_2$ , respectivamente, e considere a reta  $l$  determinada por estes centros. Seja  $r$  o eixo radical referente a estes dois círculos que intersecta a reta  $l$  no ponto  $P$ .

Como  $P$  pertence ao eixo radical, o círculo  $\Gamma_C$  de centro  $P$  e raio  $PM$ , em que  $M \in \Gamma_A$  e  $PM$  é tangente ao círculo  $\Gamma_A$ , por exemplo, é perpendicular aos círculos  $\Gamma_A$  e  $\Gamma_B$ .

O círculo  $\Gamma_C$  intersecta a reta  $l$  em dois pontos, então considere-se um desses pontos como sendo o centro  $O$  do círculo de inversão  $\Gamma$ . Os Teoremas 1.5 e 1.6 garantem que as imagens de  $\Gamma_A$ ,  $\Gamma_B$ , e  $\Gamma_C$  sob  $I_\Gamma$  são os círculos  $\Gamma_{a'}$ ,  $\Gamma_{b'}$  e a reta  $c'$ , respectivamente, e que a reta  $l$  é invariante. Como a inversão é conforme, segue que os círculos  $\Gamma_{a'}$  e  $\Gamma_{b'}$  são concêntricos, como se desejava provar. ★

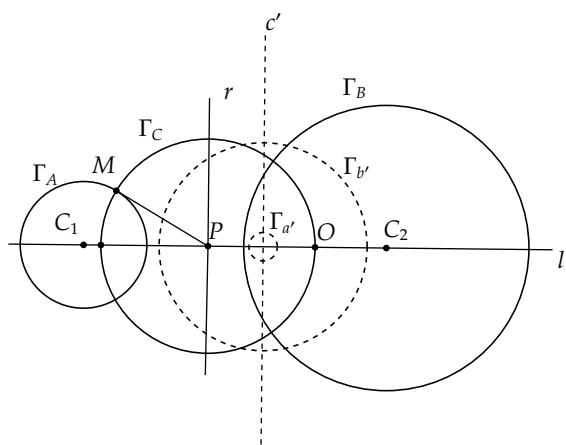


Figura 16 – Círculos exteriores.

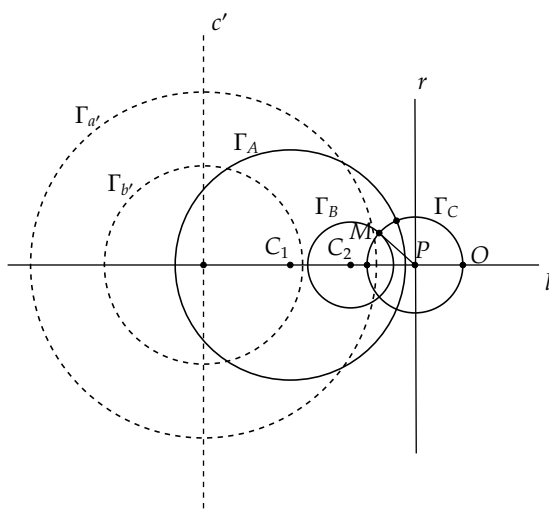


Figura 17 – Círculos internos.

<sup>2</sup> Lugar geométrico dos pontos cujas potências em relação a dois círculos  $C_1$  e  $C_2$  são iguais.



## 2 Transformações Afins

Este capítulo aborda as transformações afins que se revelam um elo importante entre a inversão no círculo e a inversão nas cônicas centrais que será desenvolvida no próximo capítulo. Não tendo como objetivo que este capítulo apresente tratamento completo sobre transformações afins, algumas propriedades serão apenas citadas ou usadas como válidas. Uma transformação afim que se mostra base para a construção de outra transformação afim é a compressão, e terá destaque na apresentação sobre inversão nas cônicas centrais. A visão mais abrangente sobre transformações afins e as proposições e demonstrações deste trabalho são baseadas nos textos de (MODENOV; PARKHOMENKO, 1966) e de (MARTIN, 2012).

Nesta dissertação, onde se fizer necessária a referência a um sistema de eixos coordenados perpendiculares, ele será chamado simplificadaamente por sistema  $OXY$ . E para o mesmo será considerada a definição padrão: um par de eixos, denominados por  $OX$  e  $OY$ , com a mesma unidade de medida e perpendiculares entre si, cuja intersecção destes eixos é a origem do sistema, designada por  $O$ . Além disso, as coordenadas relativas ao eixo  $OX$  são representadas pela letra  $x$ , enquanto que as relativas ao eixo  $OY$  são representadas por  $y$ .

**Definição 2.1** *Uma transformação afim,  $\tau$ , é uma transformação biunívoca do plano tal que as imagens de quaisquer três pontos colineares são também colineares.*

**Teorema 2.1** *Sob uma transformação afim, quaisquer três pontos não-colineares têm imagens não-colineares.*

**Demonstração do Teorema 2.1** Sejam dados uma transformação afim  $\tau$  e três pontos  $A, B, C$  não colineares. Suponha-se que as imagens destes pontos  $A', B'$  e  $C'$ , respectivamente, sob a transformação afim  $\tau$  sejam colineares. Seja  $l'$  a reta que contém estas imagens e  $M$  um ponto qualquer do plano. Seja  $m$  a reta por  $M$  que intersecta o triângulo  $ABC$  no ponto  $D$  entre  $A$  e  $C$ .

Segue do Teorema de Pasch <sup>1</sup> que  $m$  intersecta o lado  $CB$  ou o lado  $AB$  do triângulo. Sem perda de generalidade, podemos supor que  $m$  intersecta o lado  $BC$  no ponto  $E$  (Figura 18).

<sup>1</sup> Se  $A, B$  e  $C$  são pontos não colineares e  $l$  é uma reta que intersecta  $AB$  entre  $A$  e  $B$ , então  $l$  também intersecta  $AC$  ou  $BC$ . Se  $C$  não pertence a  $l$ , então  $l$  não intersecta ambos os segmentos  $AC$  e  $BC$ .

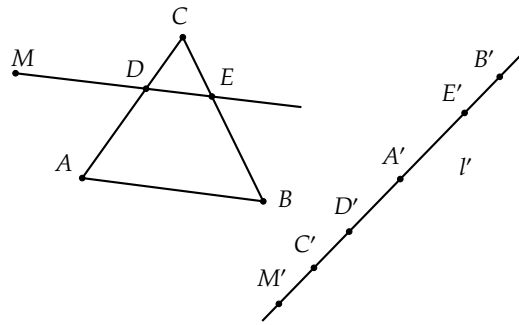


Figura 18 – Demonstração do Teorema 2.1.

Desde que  $C, D, A$  são colineares, a imagem  $D' = \tau(D)$  é tal que  $D' \in A'C' = l'$ . Da mesma forma, temos  $\tau(E) = E' \in l'$ . Logo a reta  $D'E'$  é igual à reta  $l'$ .

Como  $M \in DE$ , segue que  $M' \in D'E'$ . Portanto, todo ponto do plano teria imagem em  $l'$ , o que contradiz o fato de que  $\tau$  é biunívoca. ★

**Corolário 2.1** : *A inversa de uma transformação afim é também uma transformação afim.*

**Demonstração do Corolário 2.1** Sejam dados uma transformação afim  $\tau$  e a sua inversa  $\tau^{-1}$ . Supondo-se que  $\tau^{-1}$  não é uma transformação afim, existem três pontos colineares  $A', B', C'$  tais que suas imagens por  $\tau^{-1}$  são três pontos não colineares  $A, B, C$ , respectivamente. Mas sendo  $\tau$  a transformação inversa de  $\tau^{-1}$ , aconteceria que as imagens  $A', B', C'$  por  $\tau$  dos pontos  $A, B$  e  $C$  não seriam colineares, o que é uma contradição. Portanto, a inversa de uma transformação afim também é afim. ★

**Teorema 2.2** *Sob uma transformação afim  $\tau$ , a imagem de qualquer reta  $l$  é uma reta  $l'$ .*

**Demonstração do Teorema 2.2** Seja uma reta  $l$  e dois pontos distintos  $A$  e  $B$  sobre ela. Sob uma transformação afim  $\tau$ , as imagens  $A' = \tau(A)$  e  $B' = \tau(B)$  são distintas e determinam uma reta  $l'$ . Qualquer  $C \in l$ , distinto de  $A$  e  $B$ , sob  $\tau$  terá a sua imagem  $C'$  também pertencente a  $l'$ , logo  $\tau(l) \subset l'$ .

Tome-se agora qualquer ponto  $X'$  de  $l' = A'B'$ . Então a imagem inversa  $X$  de  $X'$  sob  $\tau$  pertence a  $l = AB$ , desde que a inversa de uma transformação afim é uma transformação afim, já provado no corolário 2.1. Isto quer dizer que  $l' \subset \tau(l)$ .

Portanto, os dois resultados provam o teorema. ★

**Teorema 2.3** *Sob uma transformação afim, as imagens de retas paralelas são retas paralelas e de retas concorrentes são retas concorrentes.*

**Demonstração do Teorema 2.3** Sejam  $l$  e  $m$  duas retas paralelas e uma transformação afim  $\tau$ . Pelo Teorema 2.2, suas imagens sob  $\tau$  são duas retas  $l'$  e  $m'$ . Se estas imagens têm um ponto comum  $P'$ , então a imagem inversa  $P$  de  $P'$  sob  $\tau$  deveria estar sobre  $l$  e  $m$ , que é impossível. Portanto, as retas  $l'$  e  $m'$  são paralelas.



Sejam duas retas  $l$  e  $m$  tais que  $l \cap m = \{P\}$ , então a imagem  $P' = \tau(P)$  deve pertencer simultaneamente a  $l'$  e  $m'$ . Ou seja, as imagens das duas retas também são concorrentes. Estes resultados é o que se desejava provar. ★

**Teorema 2.4** : (Teorema da unicidade) Sejam  $A, B, C$  quaisquer três pontos não colineares de um plano  $\pi$ , e sejam  $A', B', C'$  quaisquer três pontos não colineares de um plano  $\pi'$ . Então, há uma e somente uma transformação afim tal que as imagens de  $A, B$  e  $C$  são respectivamente  $A', B'$  e  $C'$ .

**Demonstração do Teorema 2.4** Seja um sistema de coordenadas construído com a origem no ponto  $C$ , com as retas  $CA$  e  $CB$  como os eixos coordenados e os pontos  $A$  e  $B$  associados às coordenadas  $(1, 0)$  e  $(0, 1)$ , respectivamente. De forma semelhante se introduz o sistema de coordenadas com centro no ponto  $C'$ , os eixos são as retas  $C'A'$  e  $C'B'$  e os pontos  $A'$  e  $B'$  associados às coordenadas  $(1, 0)$  e  $(0, 1)$ , respectivamente.

Seja  $M$  um ponto qualquer do plano  $\pi$  com coordenadas  $(x, y)$ . No sistema de coordenadas  $A'C'B'$ , as coordenadas  $(x, y)$  determinam um ponto  $M'$ . Então seja  $\tau$  a transformação tal que  $\tau(M) = M'$ . Com esta definição, a transformação  $\tau$  é biunívoca.

Seja  $l$  uma reta no plano  $\pi$  de equação  $Px + Qy + R = 0$ , onde  $P, Q, R$  são números reais e  $P$  e  $Q$  não são nulos simultaneamente. Assim,  $M(x, y)$  pertence à reta  $l$  se, e somente se, as suas coordenadas satisfazem esta equação. Seja a reta  $l'$  no plano  $\pi'$  determinada pela mesma equação.

Desde que as coordenadas são as mesmas e as equações também, então  $M'$  está sobre a reta  $l'$  se, e somente se,  $M$  está sobre  $l$ . Isto significa que  $\tau$  leva pontos colineares em pontos colineares e é biunívoca, provando que a transformação  $\tau$  é uma transformação afim.

Agora, seja  $\tau'$  outra transformação afim tal que  $\tau'(A) = A', \tau'(B) = B', \tau'(C) = C'$ . Seja  $M(x, y)$  qualquer ponto do plano  $\pi$  e que não pertença aos eixos  $CA$  ou  $CB$ . Sejam as paralelas aos eixos  $CB$  e  $CA$ , passando por  $M$ , intersectando  $CA$  e  $CB$  nos pontos  $P$  e  $Q$ , respectivamente. As coordenadas de  $M$  são dadas por

$$x = \frac{CP}{CA} \quad e \quad y = \frac{CQ}{CB}.$$

Sejam  $P'$  e  $Q'$  as imagens de  $P$  e  $Q$  pela transformação  $\tau'$ . As coordenadas de  $M'$  são dadas por

$$x' = \frac{C'P'}{C'A'} \quad e \quad y' = \frac{C'Q'}{C'B'}.$$

Como o paralelismo se preserva (Teorema 2.3), e o Teorema A.5 mostra que uma

transformação afim mantém as proporções, então

$$\frac{\overline{C'P'}}{\overline{C'A'}} = \frac{\overline{CP}}{\overline{CA}} = x$$

$$\frac{\overline{C'Q'}}{\overline{C'B'}} = \frac{\overline{CQ}}{\overline{CB}} = y.$$

Ou seja  $\tau'(M) = M' = \tau(M)$ , como se queria provar. ★

**Definição 2.2** : Dado um número real  $k \neq 0$  e uma reta  $l$  do plano  $\pi$ , a compressão  $\tau$  de razão  $k$  sobre  $l$  é a aplicação do plano que, a cada  $M \in \pi$ , associa o ponto  $M' \in \pi$  tal que vale a igualdade vetorial  $\overrightarrow{PM'} = k \cdot \overrightarrow{PM}$ , em que  $P \in l$  é o pé da perpendicular baixada de  $M$  sobre  $l$  (Figura 19).

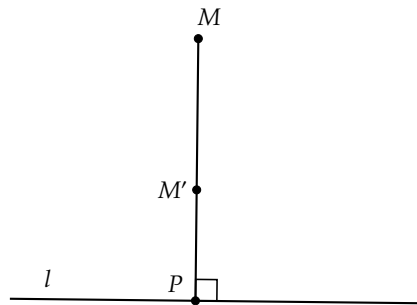


Figura 19 – Compressão de razão  $k$  sobre  $l$ .

**Teorema 2.5** Uma compressão  $\tau$  de razão  $k$  é uma transformação bijetiva.

**Demonstração do Teorema 2.5** Decorre imediatamente da definição que uma compressão é uma transformação injetiva, pois suponha que os pontos  $M$  e  $M_1$ , de mesma projeção  $P$ , tenham a mesma imagem  $Y$  pela compressão  $\tau$ . Segue que  $\overrightarrow{PY} = k \cdot \overrightarrow{PM_1} = k \cdot \overrightarrow{PM}$  e, assim, segue que  $\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{PM_1}$ , logo  $M = M_1$ . Uma compressão também é sobrejetiva, pois dado um ponto  $Y$  do plano, seja  $P$  sua projeção sobre uma reta  $l$ . Para um certo  $k > 0$ , existe  $M$  na semirreta  $\overrightarrow{PY}$  dado por  $\overrightarrow{PM} = \frac{\overrightarrow{PY}}{k}$  e, portanto,  $\overrightarrow{PY} = k \cdot \overrightarrow{PM}$ . Se  $k < 0$ , existe  $M$  na semirreta oposta à semirreta  $\overrightarrow{PY}$ , dado por  $\overrightarrow{PM} = \frac{\overrightarrow{PY}}{k}$  e, portanto,  $\overrightarrow{PY} = k \cdot \overrightarrow{PM}$ . Portanto, dado  $Y$ , existe  $M$  tal que  $\overrightarrow{PY} = k \cdot \overrightarrow{PM}$ . ★

Outro resultado importante é que se  $M$  está sobre  $l$ , então  $M = M'$ . Logo, a compressão sobre  $l$  preserva a reta  $l$ .

Considerando a reta  $l$  como o eixo  $OX$  e qualquer reta perpendicular a ela como o eixo  $OY$ , tem-se que a expressão da compressão  $\tau$  nesse sistema de coordenadas é dada por

$$\begin{cases} x' = x, \\ y' = ky. \end{cases} \quad (2.1)$$

Com a introdução dos eixos  $OX$  e  $OY$ , pode-se definir, de forma análoga, a compressão  $\tau_y$  sobre  $OY$ , de razão  $k \neq 0$ , por  $\tau_y(x, y) = (kx, y)$ . Desse modo se obtém a seguinte propriedade:

**Teorema 2.6** *Uma homotetia  $H$ , de centro  $O$  e razão  $k \neq 0$ , em que  $O$  é o ponto de interseção dos eixos perpendiculares  $OX$  e  $OY$ , é a composição da compressão de razão  $k$  sobre  $OX$  com a compressão sobre  $OY$ , também de razão  $k$ .*

**Demonstração do Teorema 2.6** Considere-se o ponto  $O$  como origem dos eixos coordenados. Se  $\tau_x(x, y) = (x, ky)$  e  $\tau_y(x, y) = (kx, y)$ , tem-se então que

$$(x', y') = \tau_x \circ \tau_y(x, y) = \tau_x(\tau_y(x, y)) = (kx, ky) = k(x, y) = H_{(O,k)}(x, y).$$

Que é o que se desejava provar. ★

**Teorema 2.7** *Uma compressão  $\tau$ , de razão  $k$  sobre uma reta  $l$  dada, é uma transformação afim.*

**Demonstração do Teorema 2.7** Dado que a compressão é uma transformação bijetiva, para provar que é uma transformação afim é suficiente mostrar que a imagem de uma reta  $m$  é uma reta  $m'$  sob a compressão. Sejam dadas as retas não perpendiculares  $l$  e  $m$  que se intersectam em  $O$ . Tomem-se três pontos distintos  $A, B$ , e  $C$  sobre  $m$ , distintos de  $O$ , e sejam  $A_0, B_0$ , e  $C_0$  os pés das perpendiculares baixadas deles sobre  $l$  (Figura 20). Então as imagens  $A', B'$ , e  $C'$  pela compressão  $\tau$  estão sobre as respectivas retas  $AA_0, BB_0$ , e  $CC_0$ , tais que

$$\frac{A'A_0}{AA_0} = \frac{B'B_0}{BB_0} = \frac{C'C_0}{CC_0} = k.$$

Tomando-se  $t$  como a inclinação da reta  $m$ , então  $t = \frac{AA_0}{OA_0}$ . Destas igualdades, conclui-se que  $A', B'$  e  $C'$  são colineares e estão sobre a reta  $m'$  de inclinação  $t' = t.k$ .

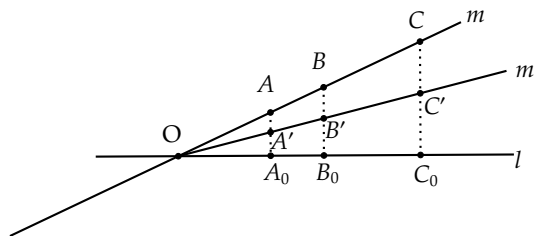


Figura 20 – A compressão é uma transformação afim.

Resta analisar as demais posições relativas entre as retas  $m$  e  $l$ . Considerando que a reta  $m$  seja perpendicular a  $l$  e que  $P$  seja o ponto de interseção das duas, tem-se que dado um ponto  $X \in m$ , então  $\tau(X) = X'$  pertence à própria reta  $m$ , pois  $\overrightarrow{PX'} = k\overrightarrow{PX}$ . No caso de  $m = l$ , já foi visto que a compressão preserva a reta.

Sendo  $m \parallel l$ , se existir algum  $X'$  tal que  $X' \in m' \cap l$  e  $X' = \tau(X)$ , então  $k\overrightarrow{PX} = \overrightarrow{PX'} = \overrightarrow{0}$ . Consequentemente  $X \in l$ , que é uma contradição, pois  $m \cap l = \emptyset$ . Portanto, a reta  $m'$  será paralela a  $m$  e  $l$ .

Conclui-se que uma compressão é uma transformação afim, que é o que se desejava provar. ★

O resultado final deste capítulo será a prova que qualquer transformação afim pode ser escrita como uma composição de compressões. Este resultado generaliza o fato de uma isometria poder ser escrita como composição de reflexões, visto que uma compressão de razão  $k = -1$  sobre a reta  $t$  é a reflexão em torno dessa reta.

Desse modo, a compressão pode ser vista como um elemento básico das transformações afins, semelhantes aos números primos para a construção dos números naturais.

Para se alcançar o resultado esperado, seja introduzido no plano um sistema de coordenadas  $OXY$  ortogonal<sup>2</sup>, com origem  $O$  e os pontos  $U_1 = (1, 0)$  e  $U_2 = (0, 1)$  nos eixos  $OX$  e  $OY$ , respectivamente.

Sejam os pontos  $M(x, y)$  e  $M'(x', y')$  do plano relacionados por

$$\begin{cases} x' = a_1x + b_1y + c_1, \\ y' = a_2x + b_2y + c_2, \end{cases} \quad (2.2)$$

onde  $a_1b_2 - b_1a_2 \neq 0$ .

**Teorema 2.8** *O sistema (2.2) define uma transformação afim.*

**Demonstração do Teorema 2.8** Primeiro, a relação dada pelo sistema (2.2) está bem definida, pois para um dado ponto  $M(x, y)$ , está associado um único ponto  $M'(x', y')$ . Dados  $x'$  e  $y'$ , como  $a_1b_2 - b_1a_2 \neq 0$ , a relação é injetora pois o sistema (2.2) tem uma única solução. Além disto,  $a_1b_2 - b_1a_2 \neq 0$  estabelece uma relação sobrejetiva, pois garante que o sistema tem solução para quaisquer  $x', y'$  dados.

Resta agora provar que esta transformação tem a propriedade de levar reta em reta. Seja  $l'$  uma dada reta que passa pelo ponto  $(x', y')$ . Ou seja

$$A'x' + B'y' + C' = 0,$$

onde  $A'$  e  $B'$  não são ambos iguais a zero. Usando o sistema (2.2), a imagem inversa de  $l'$  é dada por

$$\begin{aligned} A'(a_1x + b_1y + c_1) + B'(a_2x + b_2y + c_2) + C' &= 0, \\ (a_1A' + a_2B')x + (b_1A' + b_2B')y + c_1A' + c_2B' + C' &= 0, \end{aligned}$$

<sup>2</sup> A ortogonalidade não é necessária, mas será aplicada no desenvolvimento do tema.

que é equivalente a

$$Ax + By + C = 0, \quad (2.3)$$

onde  $A = a_1A' + a_2B'$ ,  $B = b_1A' + b_2B'$ ,  $C = c_1A' + c_2B' + C'$ .

Como  $A'$  e  $B'$  não são ambos iguais a zero e  $a_1b_2 - b_1a_2 \neq 0$ , segue que  $A$  e  $B$  também não serão ambos nulos, o que significa que (2.3) define uma reta.

Inversamente, todo ponto que satisfaz a Equação (2.3) tem sua imagem que atende o sistema (2.2).

Sendo a transformação inversa à transformação dada, sistema (2.2), uma transformação afim, segue que a transformação dada, sistema (2.2), é uma transformação afim. ★

**Teorema 2.9** *Uma transformação afim  $\beta$  pode ser representada pelo sistema (2.2).*

**Demonstração do Teorema 2.9** Sejam dados três pontos  $O = (0, 0)$ ,  $U_1 = (1, 0)$  e  $U_2 = (0, 1)$ , tal que suas imagens sob  $\beta$  sejam  $\beta(O) = (p_1, p_2) = P$ ,  $\beta(U_1) = (q_1, q_2) = Q$ , e  $\beta(U_2) = (r_1, r_2) = R$ . Desde que os pontos  $O$ ,  $U_1$  e  $U_2$  não são colineares, as suas imagens sob  $\beta$  também não são. Seja a transformação  $\tau$  representada pelo sistema

$$\begin{cases} x' = (q_1 - p_1)x + (r_1 - p_1)y + p_1, \\ y' = (q_2 - p_2)x + (r_2 - p_2)y + p_2. \end{cases} \quad (2.4)$$

Desse sistema se obtém

$$\begin{vmatrix} q_1 - p_1 & r_1 - p_1 \\ q_2 - p_2 & r_2 - p_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} p_1 & p_2 & 1 \\ q_1 & q_2 & 1 \\ r_1 & r_2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0. \quad (2.5)$$

O resultado não nulo é por serem os pontos  $P$ ,  $Q$  e  $R$  não colineares, portanto, pelo Teorema 2.8, o sistema de equações (2.4) representa uma transformação afim  $\tau$ . Como se verifica que  $\tau(O) = (p_1, p_2) = P$ ,  $\tau(U_1) = (q_1, q_2) = Q$ , e  $\tau(U_2) = (r_1, r_2) = R$ , segue do Teorema da unicidade 2.4 que  $\beta = \tau$ , como se desejava provar. ★

Para se chegar ao importante resultado que prova que qualquer transformação afim é gerada pela composição de compressões, observe-se que uma transformação afim  $\tau$  dada pelo sistema

$$\begin{cases} x' = ax + by + h, \\ y' = cx + dy + k, \end{cases}$$

onde  $ad - bc \neq 0$ , pode ser fatorada na composição

$$\tau = T_1 \circ T_2 \circ T_3, \quad (2.6)$$

onde  $T_1$ ,  $T_2$  e  $T_3$  são transformações dadas pelas seguintes expressões:

$$T_1 : \begin{cases} x' = ax_1 - cy_1 + h, \\ y' = cx_1 + ay_1 + k, \end{cases}$$

$$T_2 : \begin{cases} x_1 = x_2, \\ y_1 = \frac{ad - bc}{a^2 + c^2} y_2, \end{cases}$$

$$T_3 : \begin{cases} x_2 = x + \frac{ab + cd}{a^2 + c^2} y, \\ y_2 = y. \end{cases}$$

A transformação  $T_1$  é uma semelhança, pois sejam dados dois pontos  $P(x_1, y_1)$  e  $Q(x_2, y_2)$ , suas imagens por  $T_1$  serão, respectivamente,

$$P'(ax_1 - cy_1 + h, cx_1 + ay_1 + k) \text{ e } Q'(ax_2 - cy_2 + h, cx_2 + ay_2 + k).$$

Calculando-se as distâncias  $d(P, Q)$  e  $d(P', Q')$ , os resultados são:

$$\begin{aligned} d(P, Q) &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad e \\ d(P', Q') &= \sqrt{(a^2 + c^2)} \cdot \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \end{aligned}$$

Ou seja,  $d(P', Q') = k \cdot d(P, Q)$ , onde  $k^2 = a^2 + c^2$ , caracterizando  $T_1$  como uma semelhança.

A transformação  $T_2$  é uma compressão em relação ao eixo  $OX$  e  $T_3$  é um cisalhamento<sup>3</sup> em relação ao eixo  $OX$ .

O estudo das transformações  $T_1$ ,  $T_2$  e  $T_3$  levará à demonstração do seguinte teorema:

**Teorema 2.10** *Qualquer transformação afim é uma composição de compressões.*

A demonstração completa deste teorema se encontra no apêndice B.1.

Este capítulo se encerra com o estudo da transformação de um círculo, ou de cônicas centrais sob uma compressão, que servirá de base para os resultados que serão obtidos na sequência deste trabalho.

<sup>3</sup> Segundo (MARTIN, 2012), dada uma constante  $k \neq 0$ , o cisalhamento em relação ao eixo  $OX$  é uma transformação do plano dada pelas equações  $x' = x + ky$  e  $y' = y$ . A interpretação geométrica é dada pelo fato que todos os pontos do eixo  $OX$  são fixos e qualquer outro ponto do plano é deslocado paralelamente ao eixo  $OX$ , de uma distância algébrica diretamente proporcional a sua distância algébrica até o eixo  $OX$ .

Em um sistema de coordenadas cartesianas, seja dado um círculo  $C$ , de centro  $(x_0, y_0)$  e raio  $a$ , ou uma hipérbole equilátera  $H$ , de centro  $(x_0, y_0)$  e semi-eixo real  $a$ , com equação

$$(x - x_0)^2 + t_f \cdot (y - y_0)^2 = a^2, \quad (2.7)$$

onde  $t_f = +1$ , se for um círculo ou  $t_f = -1$  se for uma hipérbole equilátera.

Aplicando-se uma compressão  $\tau$  de razão  $k$  sobre o eixo  $OX$ , dada por

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = ky, \end{cases}$$

a Equação (2.7) será transformada em

$$\frac{(x' - x_0)^2}{a^2} + t_f \cdot \frac{(y' - k^2 y_0)^2}{(ka)^2} = 1.$$

Portanto, o círculo ou a hipérbole equilátera se transformam em uma elipse ou em uma hipérbole centrada em  $(x_0, k^2 y_0)$  e com eixos paralelos aos eixos  $OX$  e  $OY$ . Se  $k < 1$ , o semi-eixo maior da elipse será paralelo ao eixo  $OX$ . Se  $k > 1$ , o semi-eixo maior será paralelo ao eixo  $OY$ .

Se a compressão aplicada for sobre o eixo  $OY$ , as conclusões finais serão invertidas.

Por último, sejam duas cônicas centrais homotéticas  $\mathcal{E}_1$  e  $\mathcal{E}_2$ , dadas pelas expressões gerais

$$\frac{(x - x_1)^2}{a^2} + t_{\mathcal{E}} \cdot \frac{(y - y_1)^2}{b^2} = 1 \quad \text{e} \quad \frac{(x - x_2)^2}{(ka)^2} + t_{\mathcal{E}} \cdot \frac{(y - y_2)^2}{(kb)^2} = 1,$$

onde  $t_{\mathcal{E}} = \pm 1$ , se for uma elipse ou uma hipérbole, respectivamente.

Aplique-se a estas duas cônicas uma compressão  $\tau$  com razão igual a  $\frac{a}{b}$ , sobre uma reta paralela ao eixo focal, então

$$(x' - x_1)^2 + t_{\mathcal{E}} \cdot \left(y' - \frac{a}{b} y_1\right)^2 = a^2 \quad \text{e} \quad (x' - x_2)^2 + t_{\mathcal{E}} \cdot \left(y' - \frac{a}{b} y_2\right)^2 = (kb)^2.$$

Portanto, a conclusão é que se duas cônicas centrais são homotéticas e uma delas for transformada em um círculo ou em uma hipérbole equilátera por uma compressão, a outra também será.





### 3 Inversão nas cônicas centrais

Este capítulo apresenta o resultado teórico que é o objetivo desta dissertação. Com base nas propriedades dos capítulos anteriores e nos textos (RAMIREZ, 2014), (CHILDRESS, 1965) e (NEAS, 2017), é apresentada a inversão em relação a uma cônica central, elipse ou hipérbole. As equações básicas destas cônicas serão da forma

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{ky^2}{b^2} = 1, \quad \text{onde } k = \pm 1. \quad (3.1)$$

A menos que haja referência ao contrário,  $a$  e  $b$  são respectivamente os semi-eixos maior e menor da cônica central sob consideração e o centro da cônica será a origem  $(0, 0) = O$ .

Segue a definição fundamental deste capítulo, conforme a visão do texto (NEAS, 2017).

**Definição 3.1** *A inversão em relação a uma cônica central  $\mathcal{E}$ , de centro  $O$ , é a transformação do plano que associa um ponto  $P \neq O$  a um ponto  $P'$ , localizado sobre a semirreta  $\overrightarrow{OP}$ , que intersecta a cônica no ponto  $Q$ , e que satisfaz à equação*

$$\overline{OP} \cdot \overline{OP'} = \overline{OQ}^2. \quad (3.2)$$

A inversão em uma cônica central  $\mathcal{E}$  será referenciada por  $I_{\mathcal{E}}$ , a menos que haja necessidade de uma identificação diferente.

**Teorema 3.1** *Seja  $\mathcal{E}$  uma cônica central, com centro no ponto  $(0, 0)$ . Se  $P(x, y)$  tem por imagem  $P'(x', y')$  sob a inversão  $I_{\mathcal{E}}$ , então as coordenadas  $(x', y')$  serão dadas pelas equações*

$$\begin{cases} x' = \frac{a^2 b^2 x}{b^2 x^2 + k a^2 y^2} \\ y' = \frac{a^2 b^2 y}{b^2 x^2 + k a^2 y^2} \end{cases} \quad (3.3)$$

em que  $(x, y)$  denotam as coordenadas do ponto  $P$  e  $(x, y) \neq (0, 0)$ .

**Demonstração do Teorema 3.1** A demonstração será dividida nos casos  $x = 0$  e  $x \neq 0$ .

**Caso  $x \neq 0$ :** Seja o ponto  $Q \in \mathcal{E} \cap \overrightarrow{OP}$ , tal que  $P' \in \overrightarrow{OP}$  e, sob a inversão  $I_{\mathcal{E}}$ ,  $\overline{OP} \cdot \overline{OP'} = \overline{OQ}^2$ .

Se  $(x_q, y_q)$  são as coordenadas do ponto  $Q \in \mathcal{E}$ , a sua distância ao centro é dada por

$$\overline{OQ}^2 = x_q^2 + y_q^2, \quad (3.4)$$

e elas satisfazem

$$b^2x_q^2 + ka^2y_q^2 = a^2b^2.$$

Como  $x_q \neq 0$  e  $m = \frac{y_q}{x_q}$ , sendo  $m < \frac{b}{a}$  para  $k = -1$ , então

$$x_q^2 = \frac{a^2b^2}{b^2 + ka^2m^2}$$

e, equivalentemente, se obtém a igualdade

$$y_q^2 = \frac{a^2b^2m^2}{b^2 + ka^2m^2}.$$

Substituindo esses resultados na expressão (3.4), obtém-se

$$\overline{OQ}^2 = \frac{a^2b^2(1 + m^2)}{b^2 + ka^2m^2}.$$

Para cada  $P$ ,  $\overline{OP}$  e  $\overline{OP}'$  são tais que

$$\sqrt{x^2 + y^2} \cdot \sqrt{x'^2 + y'^2} = \frac{a^2b^2(1 + m^2)}{b^2 + ka^2m^2}.$$

Sendo  $x$  e  $x'$  de mesmo sinal e  $1 + m^2 > 0$

$$\begin{aligned} x \cdot x'(1 + m^2) &= \frac{a^2b^2(1 + m^2)}{b^2 + ka^2m^2} \\ x \cdot x' &= \frac{a^2b^2}{b^2 + ka^2m^2} \end{aligned}$$

e, como  $m = y/x$ ,

$$x \cdot x' = \frac{a^2b^2}{b^2x^2 + ka^2y^2}x^2.$$

Portanto

$$x' = \frac{a^2b^2x}{b^2x^2 + ka^2y^2}.$$

De forma equivalente, se obtém

$$y' = \frac{a^2b^2y}{b^2x^2 + ka^2y^2}.$$

**Caso  $x = 0$ :** Este caso não se aplica quando  $k = -1$ , pois isso implicaria em  $m > b/a$ .

Quando  $k = 1$ , ocorrerão os valores  $x' = 0$  e  $y' = \frac{kb^2}{y}$ , que estão de acordo com as equações (3.1), e assim fica provado o teorema. ★

**Corolário 3.1** *Seja  $\mathcal{E}$  uma cônica central, centrada em  $(0, 0)$ . Se  $P(x, y) \in \mathcal{E}$ , então  $P$  é fixo sob a transformação  $I_{\mathcal{E}}$ .*

**Demonstração do Corolário 3.1** Este resultado pode ser obtido diretamente da definição, sendo que aqui  $P = Q$ . Logo,

$$\begin{aligned}\overline{OP} \cdot \overline{OP'} &= \overline{OQ}^2 \\ \overline{OP'} &= \frac{\overline{OQ}^2}{\overline{OP}} = \overline{OQ}.\end{aligned}$$

Portanto,  $P' = Q$ , como se desejava provar. ★

**Teorema 3.2** Dada uma cônica central  $\mathcal{E}$ , de centro  $O$  e semi-eixos  $a$  e  $b$ , uma reta  $l$ , que passa pelo centro de  $\mathcal{E}$  e intersecta a cônica no ponto  $Q$ , é invariante sob a inversão  $I_{\mathcal{E}}$ .

**Demonstração do Teorema 3.2** Seja um ponto  $P$  da reta  $l$  e  $I_{\mathcal{E}}(P) = P'$ . Logo  $P'$  pertence à semirreta  $\overrightarrow{OP}$ , portanto está na reta  $l$ . Assim, cada ponto da reta  $l$  é levado a um ponto imagem pertencente também a  $l$ , ou seja,  $I_{\mathcal{E}}(l) \subset l$ .

Agora, seja um ponto  $Z$  na reta  $l$  e seja  $P \in l$  com  $P = I_{\mathcal{E}}(Z)$ . Provado diretamente pela definição, tem-se que  $I_{\mathcal{E}}(P) = Z$ . Logo, qualquer ponto da reta  $l$  é imagem de outro ponto que pertence a  $l$ , ou seja  $l \subset I_{\mathcal{E}}(l)$ .

Desse modo,  $I_{\mathcal{E}}(l) = l$  e fica provado o teorema. ★

**Teorema 3.3** Sejam dados uma cônica central  $\mathcal{E}$  com semi-eixos  $a$  e  $b$ . A inversão em relação a esta cônica central pode ser expressa pelas composições

$$I_{\mathcal{E}}(x, y) = \tau_{1/c} \circ I_F \circ \tau_c(x, y), \quad (3.5)$$

onde  $\tau_c$  é a compressão de razão  $c$  sobre o eixo  $OX$  com razão  $c = \frac{a}{b}$ , e  $I_F$  será uma inversão em um círculo ou numa hipérbole equilátera, dependendo de  $\mathcal{E}$  ser uma elipse ou uma hipérbole, respectivamente.

**Demonstração do Teorema 3.3** Sabe-se que

$$\begin{aligned}\tau_c(x, y) &= (x, cy) \\ I_{\mathcal{E}}(x, y) &= \left( \frac{a^2 b^2 x}{b^2 x^2 + ka^2 y^2}, \frac{a^2 b^2 y}{b^2 x^2 + ka^2 y^2} \right) = (x_{\mathcal{E}}, y_{\mathcal{E}}).\end{aligned}$$

A expressão para a inversão  $I_F$ , onde  $F$  representa um círculo ou uma hipérbole equilátera, é obtida diretamente das expressões (1.2) e (3.3), respectivamente,

$$I_F(x, y) = \left( \frac{r^2 x}{x^2 + ky^2}, \frac{r^2 y}{x^2 + ky^2} \right).$$

Para  $r = a$  e  $c = \frac{a}{b}$

$$\begin{aligned}I_F\left(x, \frac{a}{b}y\right) &= \left( \frac{a^2 b^2 x}{b^2 x^2 + ka^2 y^2}, \frac{a}{b} \cdot \frac{a^2 b^2 y}{b^2 x^2 + ka^2 y^2} \right) \\ &= \left( x_{\mathcal{E}}, \frac{a}{b}y_{\mathcal{E}} \right) \\ &= \tau_{a/b} \circ I_{\mathcal{E}}(x, y).\end{aligned}$$

Também é válido que

$$I_F\left(x, \frac{a}{b}y\right) = I_F \circ \tau_{a/b}(x, y).$$

Logo,

$$\begin{aligned}\tau_{a/b} \circ I_{\mathcal{E}} &= I_F \circ \tau_{a/b} \\ I_{\mathcal{E}} &= \tau_{a/b}^{-1} \circ I_F \circ \tau_{a/b} \\ &= \tau_{b/a} \circ I_F \circ \tau_{a/b}\end{aligned}$$

e o teorema fica provado. ★

A importância deste último teorema se apresenta evidente pela facilidade com que determinadas propriedades podem ser comprovadas. Por isto, ele também altera a forma de estudar inversão em uma cônica central, visto que, nas referências indicadas, o tratamento está no campo da geometria analítica, enquanto a expressão (3.5) tem uma interpretação geométrica.

Neste ponto da dissertação, ganha importância uma reflexão sobre a definição de inversão adotada neste capítulo, em comparação com a definição dada por (CHILDRESS, 1965):

O ponto  $P'$  é a imagem de um ponto  $P$  numa inversão em relação a uma cônica central se  $P'$  pertence à reta  $OP$  e  $\underline{OP} \cdot \underline{OP'} = a^2b^2(1 + m^2)/(b^2 + ka^2m^2)$ , onde  $O$  é o centro da cônica central,  $a$  e  $b$  são respectivamente os semi-eixos maior e menor,  $m$  é a inclinação da reta  $OP$  medida a partir do eixo principal da cônica, e  $k^2 = 1$ . Se  $m$  não existe,  $\underline{OP} \cdot \underline{OP'} = kb^2$ .

A análise é necessária porque existe diferença entre as definições quando se usa uma hipérbole como cônica central de inversão. A definição de (CHILDRESS, 1965) também leva às expressões algébricas (3.3), para todos os pontos do plano, exceto a origem, enquanto a definição adotada neste capítulo se aplica apenas aos pontos da região entre as assíntotas, que contém os dois ramos da hipérbole.

Para se interpretar geometricamente a definição de (CHILDRESS, 1965), serão considerados os valores de  $m$ :  $m < \frac{b}{a}$  e  $m > \frac{b}{a}$ , onde  $m = \frac{y}{x}$ ,  $x \neq 0$ . Para prosseguir com a análise, chame-se por  $H$  a hipérbole de Equação (3.1) com  $k = -1$ .

A desigualdade  $m < \frac{b}{a}$  atende às duas definições sob análise e a imagem do ponto  $P$  sob a inversão  $I_H$  será  $P' = (x', y')$ , de acordo com (3.3). Contudo, se  $m > \frac{b}{a}$ , a imagem do ponto  $P$  sob a inversão  $I_H$ , pela definição de (CHILDRESS, 1965), será

$$P' = I_O \circ I_{\overline{H}}(P),$$

onde  $I_O$  é a homotetia de centro  $O$  e razão  $-1$  e  $I_{\overline{H}}$  é a inversão na hipérbole  $\overline{H}$  dada por

$$-b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2.$$

Segue do que foi dito que a definição dada por Childress, em (CHILDRESS, 1965), impõe uma certa assimetria ao tratar da inversão na hipérbole  $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$  em relação à inversão na hipérbole  $-b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ . As hipérboles  $H$  e  $\bar{H}$  estão ilustradas na Figura 21.

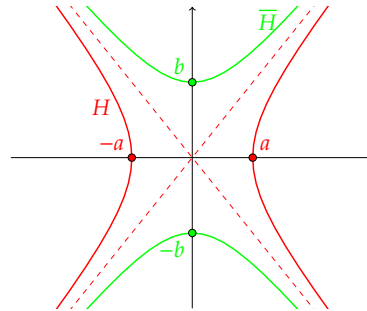


Figura 21 – Hipérboles simétricas.

Em função disso, é de se esperar que algumas propriedades de inversão em elipses não sejam válidas para a inversão na hipérbole. Além dessa diferença, seria também interessante investigar se há como definir inversão na hipérbole, no plano euclidiano, de modo que o tratamento seja simétrico entre  $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$  e  $-b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ . Neste caso, quais propriedades da inversão seriam mantidas? Pela referência básica desta dissertação, (NEAS, 2017), observa-se que o tratamento dado à inversão na hipérbole está intimamente relacionado aos números hiperbólicos<sup>1</sup>.

Devido a estas observações, o tratamento que segue será restrito à inversão na elipse. A inversão na hipérbole será desenvolvida num futuro trabalho.

Para concluir este capítulo, será provado um teorema equivalente ao teorema 1.9, para a inversão na elipse. Note-se que tal propriedade não foi localizada na literatura pesquisada sobre o tema.

**Teorema 3.4** *Sob uma inversão em uma elipse, quaisquer duas elipses homotéticas, ou uma reta e uma elipse, podem ser transformadas em retas concorrentes, em retas paralelas ou em duas elipses concêntricas.*

**Demonstração do Teorema 3.4** A demonstração será realizada considerando os casos em que os objetos (i.e. as elipses dadas ou a elipse e a reta dadas) admitem: um único ponto em comum; dois pontos em comum; nenhum ponto em comum.

**Caso 1 - um único ponto em comum:** Sejam dadas uma reta  $l$  e uma elipse  $\mathcal{E}'$ , tais que

$$l \cap \mathcal{E}' = \{O\}, \text{ ou sejam dadas duas elipses homotéticas } \mathcal{E}_1 \text{ e } \mathcal{E}_2 \text{ tais que } \mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_2 = \{O\}.$$

No caso em que  $l \cap \mathcal{E}' = \{O\}$ , considere este ponto comum o centro de inversão

<sup>1</sup> Números hiperbólicos são da forma  $w = x + jy$ , onde  $x, y \in \mathbb{R}$ ,  $j \neq 1$  e satisfaz  $j^2 = -1$ ; seu conjugado é da forma  $\bar{w} = x - jy$ .

e tome uma reta  $r$  que passe por  $O$  e que seja paralela ao eixo maior da elipse  $\mathcal{E}'$  (Figura 22). Pelas conclusões do capítulo 2, existe uma compressão  $\tau$ , sobre a reta, de razão  $k$  tal que  $\tau(\mathcal{E}')$  é um círculo que será identificado por  $C'$ ; e  $\tau(l)$  é igual à reta  $l'$ . Pelo fato de o ponto  $O$  estar sobre a reta  $r$ , ele permanece invariante sob a compressão  $\tau$ .

Observe-se que agora existem o círculo  $C'$  e a reta  $l'$  e o ponto  $O$  como ponto comum entre eles. Portanto, o problema se tornou equivalente ao que já foi demonstrado no Teorema 1.9, no capítulo 1. Ou seja, existe um círculo  $\Gamma$  de inversão, de centro  $O$ , que transforma  $C'$  e  $l'$  em duas retas paralelas (Figura 23), e já foi demonstrado que uma compressão leva retas paralelas em retas paralelas.

Portanto, este caso fica provado pelo Teorema 3.3, pois a inversão em uma elipse  $\mathcal{E}$  centrada em  $O$  e homotética a  $\mathcal{E}'$  é dada por  $I_{\mathcal{E}}(x, y) = \tau_{1/k} \circ I_{\Gamma} \circ \tau_k(x, y)$ . Com raciocínio equivalente se prova o caso para  $\mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_2 = \{O\}$ .

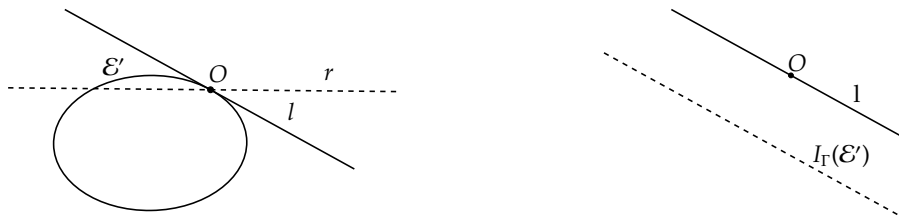


Figura 22 – Elipse e reta tangentes.      Figura 23 – Imagens sob  $I_{\Gamma}$  da elipse e reta tangentes.

**Caso 2 - Com dois pontos em comum:** Sejam dadas uma reta  $l$  e uma elipse  $\mathcal{E}'$  tais que  $l \cap \mathcal{E}' = \{O, A\}$  (Figura 24), ou sejam dadas duas elipses  $\mathcal{E}_1$  e  $\mathcal{E}_2$ , homotéticas e tais que  $\mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_2 = \{O, A\}$ .

No caso em que  $l \cap \mathcal{E}' = \{O, A\}$ , considere-se a reta  $r$  que passe por  $O$  e que seja paralela ao eixo maior da elipse  $\mathcal{E}'$  (Figura 24). Outra vez pelas conclusões do capítulo 2, existe uma compressão  $\tau$ , sobre a reta  $r$ , de razão  $k$  tal que  $\tau(\mathcal{E}')$  é um círculo que será identificado por  $C'$ ; e  $\tau(l)$  é igual à reta  $l'$ . Pelo fato de o ponto  $O$  estar sobre a reta  $r$ , ele permanece invariante sob a compressão  $\tau$ , enquanto o ponto  $A$  tem a imagem  $A'$ .

Observe-se que agora existem o círculo  $C'$  e a reta  $l'$  e os pontos  $O$  e  $A'$  como pontos comuns entre eles. Portanto, o problema se tornou equivalente ao caso correspondente que já foi demonstrado no Teorema 1.9, no capítulo 1. Ou seja, existe um círculo  $\Gamma$  de inversão, de centro  $O$ , que transforma  $C'$  e  $l'$  em duas retas concorrentes (Figura 24), e já foi demonstrado que uma compressão leva retas concorrentes em retas concorrentes. Portanto, este caso está provado, pois pelo Teorema 3.3 a inversão em uma elipse  $\mathcal{E}$  centrada em  $O$  e homotética a  $\mathcal{E}'$  é dada por  $I_{\mathcal{E}}(x, y) = \tau_{1/k} \circ I_{\Gamma} \circ \tau_k(x, y)$ .

Com raciocínio equivalente se prova o caso para  $\mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_2 = \{O, A\}$ .

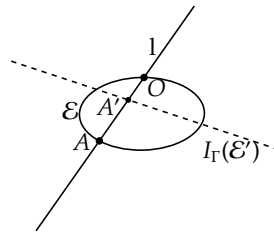


Figura 24 – Elipse e reta secante.

**Caso 3 - reta e elipse sem pontos em comum:** Sejam dadas uma reta  $s$ , uma elipse  $\mathcal{E}_1$  de centro  $(x_0, y_0)$ , tais que  $s \cap \mathcal{E}_1 = \emptyset$  e uma reta  $l$  paralela ao eixo maior de  $\mathcal{E}_1$ . Seja  $\tau$  uma compressão sobre  $l$  com razão  $k$ , tal que  $\tau(s) = s'$  e  $\tau(\mathcal{E}_1) = \mathcal{E}'_1$ , onde  $s'$  é uma reta e  $\mathcal{E}'_1$  é um círculo. Pelo Teorema 1.9, caso 3, existe um círculo  $\Gamma$  tal que  $I_\Gamma(s') = s''$  e  $I_\Gamma(\mathcal{E}'_1) = \mathcal{E}''_1$  são círculos concêntricos. A Figura 25 ilustra o que está aqui escrito.

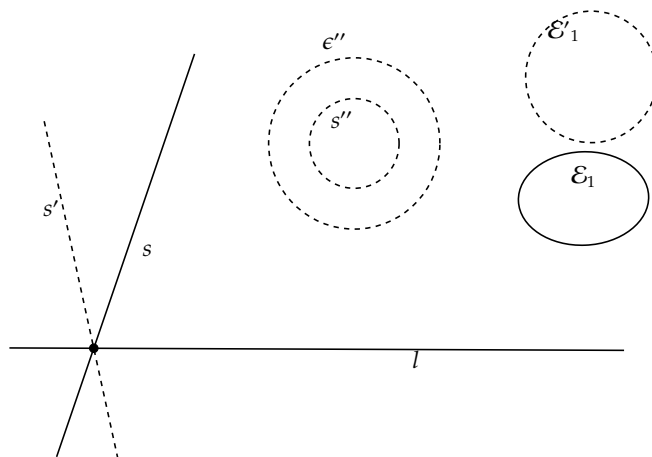


Figura 25 – Elipse  $\mathcal{E}_1$  e reta  $s$  com  $\mathcal{E}_1 \cap s = \emptyset$ .

Agora, aplique-se a compressão  $\tau$  com razão  $\frac{1}{k}$  sobre os círculos  $s''$  e  $\mathcal{E}''_1$ , obtém-se duas elipses concêntricas (Figura 26), de acordo com as observações do final do capítulo 2. A elipse  $\mathcal{E}$  de inversão é a imagem de  $\Gamma$  pela compressão e é, assim, homotética às elipses dadas.

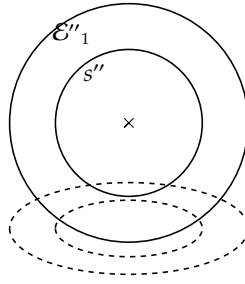


Figura 26 – Elipses concêntricas.

**Caso 4 - duas elipses sem pontos em comum:** Sejam dadas duas elipses homotéticas  $E_1$  e  $E_2$ , tais que  $E_1 \cap E_2 = \emptyset$  e uma reta  $l$  paralela aos eixos maiores das elipses. Seja  $\tau$  uma compressão sobre  $l$  com razão  $k$ , tal que  $\tau(E_1) = E'_1$  e  $\tau(E_2) = E'_2$ , onde estas imagens são círculos. Este caso torna-se equivalente ao caso de mesmo número do Teorema 1.9. Logo, existe um círculo  $\Gamma$  tal que  $I_\Gamma(E'_1)$  e  $I_\Gamma(E'_2)$  são círculos concêntricos. Agora, aplique-se a compressão  $\tau$  com razão  $\frac{1}{k}$  sobre os círculos  $I_\Gamma(E'_1)$  e  $I_\Gamma(E'_2)$  e se obtém duas elipses concêntricas. Isto completa a demonstração do teorema. ★



## 4 Atividades com inversões no círculo e na elipse

### 4.1 Objetivo e organização das atividades

O objetivo deste capítulo é fornecer atividades que contribuam para o processo de ensino-aprendizagem do tema da inversão geométrica, levando em conta a base teórica desenvolvida nesta dissertação. As atividades envolvem os conceitos de inversão no círculo e na elipse para servirem de estímulos a professores, alunos ou interessados no assunto. Cada atividade é composta de etapas que servem de base para prever, observar e explicar resultados obtidos.

As construções geométricas das atividades foram desenvolvidas no ambiente de geometria dinâmica (GD) proporcionado pelo GeoGebra<sup>1</sup>. Este software foi escolhido por ser um aplicativo de acesso livre e grátis, mas esta escolha não impede de, com as devidas adaptações, desenvolver as atividades em qualquer outro aplicativo de GD que esteja disponível ou que seja de conhecimento do desenvolvedor.

Para uma proveitosa utilização de um software de GD, é recomendável que se possua conhecimentos fundamentais de geometria e habilidades mínimas de construção com régua e compasso, tais como construir uma reta perpendicular à outra. Para o bom desenvolvimento das atividades aqui propostas, é necessário que se esteja minimamente acostumado a trabalhar no ambiente GD a ser utilizado.

No apêndice C constam orientações e explicações para o desenvolvimento de cada atividade. Elas são úteis para que o professor faça as mediações das atividades de forma a se alinharem com os objetivos didáticos.

### 4.2 Atividades com inversão num círculo

#### 4.2.1 Imagens de uma reta sob uma inversão no círculo

**Definição 4.1** *A inversão no círculo  $\Gamma$ , de centro  $O$  e raio  $s$ , é a transformação do plano que associa um ponto  $X \neq O$  a um ponto  $X'$ , localizado sobre a semirreta  $\overrightarrow{OX}$  e que satisfaz à equação*

$$\overline{OX} \cdot \overline{OX'} = s^2.$$

**Atividade 4.2.1.1** *Construir e observar a imagem de uma reta sob inversão em um círculo.*

<sup>1</sup> Este software está disponível no sítio [www.geogebra.org](http://www.geogebra.org). A versão usada aqui é 5.0.523.0-d.

**Etapas da atividade 4.2.1.1** Abrir nova janela do GeoGebra para iniciar a atividade.

1. Trace o círculo  $\Gamma$  de centro  $O$  e raio  $s$  quaisquer.
2. Trace uma reta  $r$ .
3. Faça a inversão da reta  $r$  em relação ao círculo  $\Gamma$ , gerando a imagem  $r'$ .
4. Selecione a opção de movimentação, no primeiro ícone da barra de ferramentas, e movimente a reta  $r$ . Observe o que ocorre com  $r'$ .
5. Enuncie pelo menos dois resultados que reflitam o que foi observado no item anterior.

**Atividade 4.2.1.2** *Demonstrar a seguinte propriedade: Uma reta que passa pelo centro de um círculo é invariante pela inversão nesse círculo.*

**Etapas da atividade 4.2.1.2** Utilize a mesma janela do GeoGebra aberta na atividade 4.2.1.1 e os objetos já construídos nela.

1. Movimentar a reta  $r$ , tal que ela passe pelo centro  $O$  do círculo  $\Gamma$ .
2. Use a definição de inversão no círculo para mostrar que se  $P$  é um ponto de  $r$ , a imagem de  $P$  pela inversão em  $\Gamma$  está em  $r$ .
3. De acordo com a argumentação do item anterior, qual é a relação entre os conjuntos  $r$  e  $I_{\Gamma}(r)$ .
4. Qual relação falta ser verificada para provar que  $r = I_{\Gamma}(r)$ ?

## 4.2.2 Usar a inversão num círculo para obter uma propriedade geométrica

**Atividade 4.2.2.1** *Obter uma propriedade ao transformar os vértices de um triângulo retângulo sob uma inversão num círculo  $\Gamma$  de centro  $O$  e raio  $s$ .*

**Etapas da atividade 4.2.2.1** Abrir nova janela do GeoGebra para iniciar a atividade.

1. Trace um triângulo retângulo  $ABC$  e trace um círculo  $\Gamma$  de centro  $O$ , distinto de  $A$ ,  $B$  e  $C$ , e com raio  $s$  qualquer.
2. Encontre as imagens  $A'$ ,  $B'$  e  $C'$ , dos pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$ , respectivamente, sob a inversão em  $\Gamma$ .

3. Use a definição de inversão no círculo para obter a expressão

$$\overline{AB} = \overline{A'B'} \cdot \frac{s^2}{\overline{OA'} \cdot \overline{OB'}}.$$

4. Com raciocínio equivalente ao usado no item anterior, encontre uma expressão para  $\overline{BC}$  em função de  $\overline{B'C'}$ ,  $\overline{OB'}$  e  $\overline{OC'}$ .
5. Com raciocínio equivalente ao usado no item anterior, encontre uma expressão para  $\overline{AC}$  em função de  $\overline{A'C'}$ ,  $\overline{OA'}$  e  $\overline{OC'}$ .
6. Use o teorema de Pitágoras para obter uma expressão em termos de  $\overline{A'B'}$ ,  $\overline{B'C'}$  e  $\overline{A'C'}$ .
7. Enuncie a propriedade encontrada.
8. Interprete a propriedade enunciada no item anterior.

#### 4.2.3 Transformar dois círculos em círculos concêntricos, sob uma inversão

**Atividade 4.2.3.1** *Obter círculos concêntricos sob uma inversão.*

**Etapas da atividade 4.2.3.1** Abrir nova janela do GeoGebra para iniciar a atividade.

1. Criar um círculo  $C_1$  e deixe visível o seu centro.
2. Criar mais dois círculos  $C_2$  e  $C_3$ , deixando seus centros visíveis, e encontrar suas respectivas imagens,  $C_2'$  e  $C_3'$ , pela inversão em  $C_1$ .
3. No caso em que  $C_2$  e  $C_3$  se intersectam, é possível escolher  $C_1$  de tal forma que  $C_2'$  e  $C_3'$  sejam retas?
4. No caso em que  $C_2$  e  $C_3$  não se intersectam, é possível escolher  $C_1$  de tal forma que  $C_2'$  e  $C_3'$  sejam concêntricos?
5. Redigir proposições que descrevam os resultados observados nos itens 3 e 4.

### 4.3 Atividades com inversão numa elipse

#### 4.3.1 Imagens de uma reta sob uma inversão na elipse

**Definição 4.2** *A inversão em relação a uma cônica central  $\mathcal{E}$ , de centro  $O$ , é a transformação do plano que associa um ponto  $P \neq O$  a um ponto  $P'$ , localizado sobre a semirreta  $\overrightarrow{OP}$ , que intersecta a cônica no ponto  $Q$ , e que satisfaz à equação*

$$\overline{OP} \cdot \overline{OP'} = \overline{OQ}^2.$$

A cônica central das atividades apresentadas é a elipse, cuja equação canônica é dada por

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

onde  $a$  e  $b$  são respectivamente os semi-eixos maior e menor da elipse e o centro é a origem  $(0, 0)$ .

**Atividade 4.3.1.1** *Construir e observar a imagem de uma reta sob inversão em uma elipse.*

**Etapas da atividade 4.3.1.1** Abrir nova janela do GeoGebra para iniciar a atividade.

1. Traçar a elipse  $\mathcal{E}$  de centro  $O$ .
2. Traçar uma reta  $r$ .
3. Fazer a inversão da reta  $r$  em relação à elipse  $\mathcal{E}$ , gerando a imagem  $r'$ .
4. Mover a reta  $r$  e observar o que ocorre com  $r'$ .
5. Enunciar pelo menos dois resultados que reflitam o que foi observado no item anterior.
6. Identificar semelhanças e diferenças entre os resultados desta atividade e da atividade 4.2.1.1.

**Atividade 4.3.1.2** *Obter e analisar a equação da imagem de uma reta a partir das coordenadas da imagem de um ponto sob a inversão numa elipse.*

**Etapas da atividade 4.3.1.2** Seja dada uma elipse  $\mathcal{E}$ , de centro  $O$ , considere um sistema de coordenadas ortogonais centrado em  $O$  e com eixos paralelos aos eixos da elipse  $\mathcal{E}$ . Seja a reta  $l$ , dada pela equação  $px + qy + r = 0$  neste sistema de coordenadas.

1. Obter as coordenadas da imagem de um ponto  $P = (x, y)$  sob a inversão em  $\mathcal{E}$ .
2. Usar as coordenadas obtidas no item anterior para escrever a equação de  $l'$ , imagem de  $l$  pela inversão em  $\mathcal{E}$ .
3. Quais são as condições para que  $l'$  seja uma reta?
4. No caso em que  $l'$  não é uma reta, a sua equação descreve qual tipo de curva?

**Atividade 4.3.1.3** *Construir e observar a imagem de uma elipse sob inversão em uma elipse.*

**Etapas da atividade 4.3.1.3** Abrir nova janela do GeoGebra para iniciar a atividade. Seja dada uma elipse  $\mathcal{E}$ , de centro  $O$ , considere um sistema de coordenadas ortogonais centrado em  $O$  e com eixos paralelos aos eixos da elipse  $\mathcal{E}$ .

1. Traçar a elipse  $\mathcal{E}$  e uma elipse qualquer  $\mathcal{E}_1$  que não passa por  $(0, 0)$ .
2. Determinar a imagem de um ponto  $Q \in \mathcal{E}_1$ , pela inversão em  $\mathcal{E}$ .
3. Movimentar  $\mathcal{E}_1$  e conjecturar sob quais condições a sua imagem parece ser uma elipse.

**Atividade 4.3.1.4** *Obter e analisar a equação da imagem de uma elipse homotética a partir das coordenadas da imagem de um ponto sob a inversão numa elipse.*

**Etapas da atividade 4.3.1.4** Seja dada uma elipse  $\mathcal{E}$ , de centro  $O$ , considere um sistema de coordenadas ortogonais centrado em  $O$  e com eixos paralelos aos eixos da elipse  $\mathcal{E}$ .

1. Determine a expressão de uma elipse  $\mathcal{E}_1$  homotética a  $\mathcal{E}$  e centrada no ponto  $(x_0, y_0)$ .
2. Usando as coordenadas obtidas no item 1 da Atividade 4.3.1.2, escreva a equação de  $\mathcal{E}'_1$ , imagem de  $\mathcal{E}_1$  pela inversão em  $\mathcal{E}$ .
3. Que tipo de curva é descrita pela equação obtida no item anterior?
4. Verifique se a propriedade de homotetia usada nesta atividade serve para justificar o que foi observado no item 3 da atividade anterior.
5. Enuncie uma proposição que traduza o resultado observado nesta atividade.



# Considerações Finais

Não é a montanha que conquistamos, mas sim a nós mesmos (Edmund Hillary)<sup>2</sup>.

O objetivo do estudo da inversão nas cônicas centrais não se ateve à solução de um determinado problema, e ele foi cumprido na medida que, a partir da análise das propriedades de transformação no círculo e das transformações afins, se chegou a um resultado singular, apresentando a inversão nas cônicas centrais como

$$I_{\mathcal{E}}(x, y) = \tau_{1/c} \circ I_F \circ \tau_c(x, y),$$

onde  $a$  e  $b$  são os semi-eixos da cônica de inversão,  $\tau_c$  é a compressão de razão  $c = a/b$  sobre o eixo  $OX$  e  $I_F$  será uma inversão em um círculo ou numa hipérbole equilátera, dependendo de  $\mathcal{E}$  ser uma elipse ou uma hipérbole, respectivamente.

Este resultado permite conjecturar que existe uma classe de inversões em elipses que correspondem a uma mesma inversão num dado círculo, e com conjectura semelhante aplicada à inversão numa hipérbole equilátera. A caracterização e a formalização dessas classes de inversões poderia ser objeto de estudos posteriores. Além disso, também é possível se estudar a inversão na hipérbole associada aos números hiperbólicos, conforme consta do texto (NEAS, 2017). Seria também interessante investigar, em pesquisas complementares, se há como definir inversão na hipérbole, no plano Euclidiano, de modo que o tratamento seja simétrico entre  $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$  e  $-b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ , e tentar identificar, neste caso, quais propriedades da inversão seriam mantidas.

Tal como ilustrado na Figura 27, os conteúdos e conceitos matemáticos da pesquisa deixaram claro a importância das inversões no círculo e nas cônicas centrais como área de pesquisa na matemática e com relevância para o ensino básico. Isto vem do fato que as inversões tornam possível novas abordagens de problemas que envolvem construções de círculos perpendiculares; problemas geométricos que tratam de círculos e retas; cônicas centrais e retas e problemas similares.

---

<sup>2</sup> Edmund Hillary foi o primeiro homem a completar a escalada ao monte Everest

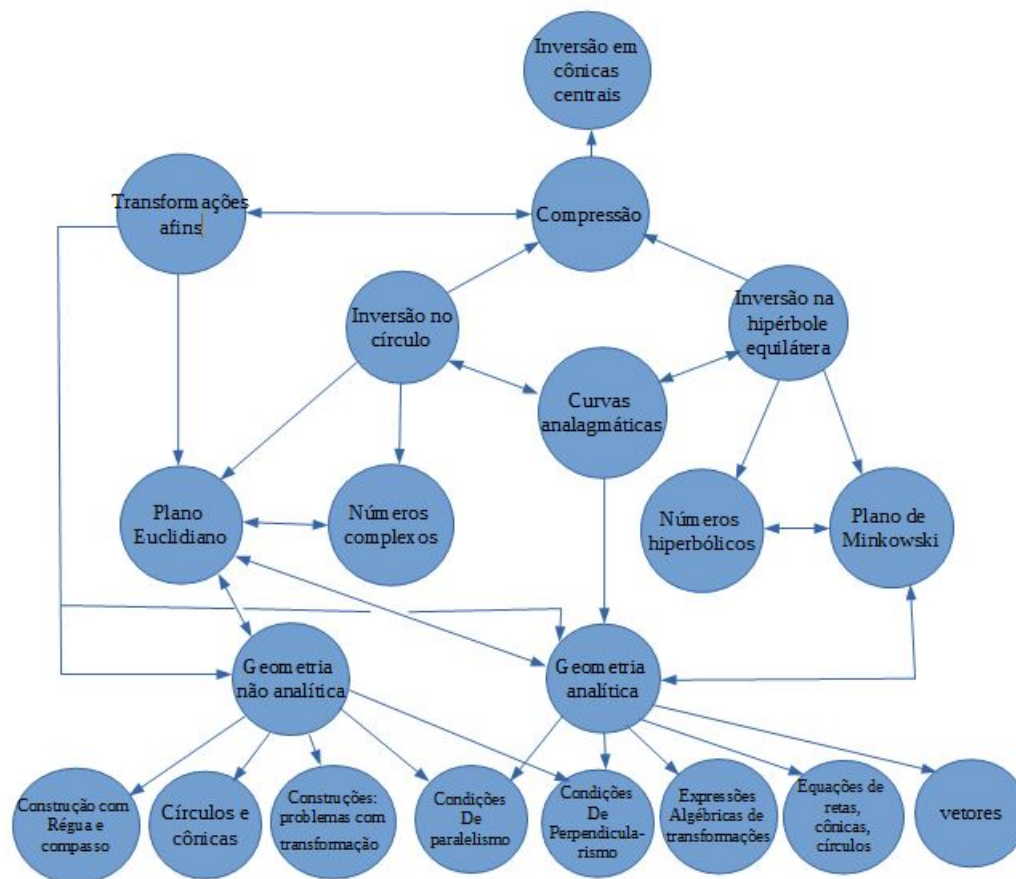


Figura 27 – Mapa conceitual.

As transformações afins também se revelam extremamente importantes para o ensino básico, visto que envolvem as transformações do plano que são as isometrias, semelhanças, homotetias, cisalhamentos e compressões. Mas, é comum se dedicar bastante tempo para o estudo da função afim  $f(x) = ax + b$ , enquanto há muito pouco ou nenhum tempo para a abordagem das transformações afins do plano Euclidiano que, em função das suas inúmeras aplicações, são de extrema importância na formação de um jovem. Em virtude deste tipo equivocado do estudo da matemática, não é dada importância ao estudo e às aplicações das propriedades relevantes das transformações afins, mesmo com a riqueza de abordagens, em função da diversidade de quadros que o tema engloba, que podem ser aplicadas pelos professores.

Especificamente, a propriedade fundamental, que ficou provada no Capítulo 2 e que diz que toda transformação afim é uma composição de compressões, parece ser desconhecida por boa parte dos professores de matemática do ensino básico. No entanto, não foram encontradas referências que permitam confirmar esta observação.

Um dos motivos pelo desconhecimento de propriedades importantes, ou pelo professor não usar, nas situações didáticas do processo de ensino e aprendizagem, os conteúdos aqui abordados, se configura nos documentos que definem os currículos



das escolas públicas, pelo menos no Distrito Federal, veja (DF, 2013) e (PCN, 1999), onde os tópicos são apresentados sem conexão entre eles. Quando, na verdade, existe uma grande e importantíssima interligação entre eles e deles com outras áreas da matemática.

Neste sentido, as atividades foram elaboradas para indicar que o conteúdo pode ser estudado sob variadas abordagens didáticas. O objetivo não é estabelecer dificuldades para o aluno, mas possibilitar o uso de registros variados e quadros diversos que permitam ampliar a sua visão. É nítida a presença de quadros de geometria analítica, de geometria plana, de álgebra, de medidas, de números. Isto torna o ensino mais envolvente e possibilita ao professor diversos métodos de abordagens do conteúdo.



# Referências

- ALMOULOUD, S. A. *Fundamentos da didática da matemática*. Curitiba, PR: Editora UFPR, 2010.
- BAKELMAN, I. I. et al. *Inversions*. Chicago, USA: University of Chicago Press, 1974.
- BOYER, C. B. História da matemática, trad. Elza. F. Gomide, Ed. Edgard Blucher, São Paulo, SP, Brasil, 1974.
- CHILDRESS, N. A. Inversion with respect to the central conics. *Mathematics Magazine*, Taylor & Francis, USA, v. 38, n. 3, p. 147–149, 1965.
- DF, D. F. Currículo em movimento. *Secretaria de Estado de Educação do Distrito Federal. Governo do Distrito Federal*, 2013.
- MARTIN, G. E. *Transformation geometry: An introduction to symmetry*. Albany, NY: Springer Science & Business Media, 2012.
- MODENOV, P. S.; PARKHOMENKO, A. *Euclidean and affine transformations*. New York, USA: Published in cooperation with the Survey of Recent East European Mathematical Literature [by] Academic Press, 1966. v. 1.
- NEAS, S. anallagmatic curves and inversion about the unit hyperbola. *Rose-Hulman Undergraduate Mathematics Journal*, Terra Haute, IN, v. 18, n. 1, p. 6, 2017.
- PATTERSON, B. C. The origins of the geometric principle of inversion. *Isis*, Saint Catherine Press Ltd., Chicago, IL, v. 19, n. 1, p. 154–180, 1933.
- PCN, P. C. N. Ensino médio: ciências da natureza, matemática e suas tecnologias. MEC/SEMT (Org.). *Parâmetros Curriculares Nacionais*, v. 1, 1999.
- RAMIREZ, J. L. Inversions in an ellipse. In: *Forum Geometricorum*. Florida, USA: Department of Mathematical Sciences Florida Atlantic University, 2014. v. 14, p. 107–115.
- YAGLOM, I. M. *Geometric Transformations IV: Circular Transformations*. Washington, DC: MAA, 2009. v. 44.



# APÊNDICE A – Propriedades das Transformações Afins

**Lema A.1** *Dados quaisquer três pontos colineares  $A, B$  e  $C$ , é verdade que*

$$\begin{aligned}\underline{AB} + \underline{BC} + \underline{CA} &= 0, \quad \text{ou} \\ \underline{CB} &= \underline{AB} + \underline{CA}.\end{aligned}$$

**Demonstração do Lema A.1** Sejam dados  $A, B$  e  $C$  distintos, com  $C$  sobre a reta  $AB$ . Então existem três casos a serem considerados:  $C$  entre  $A$  e  $B$ ;  $A$  entre  $B$  e  $C$  e  $B$  entre  $A$  e  $C$ .

No primeiro caso,  $\underline{AB} = \underline{AC} + \underline{CB}$ , portanto  $\underline{AB} - \underline{AC} - \underline{CB} = 0$ , logo  $\underline{AB} + \underline{BC} + \underline{CA} = 0$ ; no segundo caso,  $\underline{AC} = \underline{AB} + \underline{BC}$ , portanto  $\underline{AB} + \underline{BC} - \underline{AC} = 0$ , logo  $\underline{AB} + \underline{BC} + \underline{CA} = 0$ ; no terceiro caso,  $\underline{CB} = \underline{CA} + \underline{AB}$ , portanto  $\underline{AB} - \underline{CB} + \underline{CA} = 0$ , logo  $\underline{AB} + \underline{BC} + \underline{CA} = 0$ . ★

**Teorema A.1** *Se  $y \neq -1$ , então existe um único ponto  $P$  sobre a reta  $AB$  e diferente de  $B$  tal que  $\frac{\underline{AP}}{\underline{PB}} = y$ .*

**Demonstração do Teorema A.1** Observe-se que há uma correspondência biúnivoca entre os pontos  $X$  sobre a reta  $AB$  e os números reais  $x$  dada pela equação  $\underline{AX} = x \cdot \underline{AB}$ . Então

$$\underline{XB} = \underline{AB} + \underline{XA} = \underline{AB} - \underline{AX} = (1 - x)(\underline{AB}).$$

Logo,  $\frac{\underline{AX}}{\underline{XB}} = \frac{x}{1 - x} \neq -1$ . Seja  $f(x) = \frac{x}{1 - x}$ .  $f(x) = f(z)$  implica que  $x = z$  para os números  $x$  e  $z$ , e assim  $\frac{\underline{AX}}{\underline{XB}} = \frac{\underline{AZ}}{\underline{ZB}}$  implica que  $X = Z$  para os pontos  $X$  e  $Z$  sobre a reta  $AB$ .

A conclusão é que se o ponto  $P$  existe, tal que  $\frac{\underline{AP}}{\underline{PB}} = y$ , para algum  $y \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$  dado, ele deve ser único. Mas, dado  $y \neq -1$ , seja  $P$  o ponto sobre a reta  $AB$  tal que  $\underline{AP} = [y/(1 + y)](\underline{AB})$ . Então  $\frac{\underline{AP}}{\underline{PB}} = y$ . Portanto, tal ponto  $P$  existe, que é o que se desejava provar. ★

**Teorema A.2** : *Sob uma transformação afim, a imagem do ponto médio de um segmento é o ponto médio da imagem do segmento.*

**Demonstração do Teorema A.2** Seja dado o segmento  $AB$  e uma transformação afim  $\tau$ . Considere-se um ponto  $C \notin AB$  e os segmentos  $AC$  e  $BC$ . Uma reta passando por

$A$  e paralela a  $BC$  e outra que passe por  $B$  paralela a  $AC$  se intersectarão no ponto  $D$ , conforme a figura 28 ilustra.

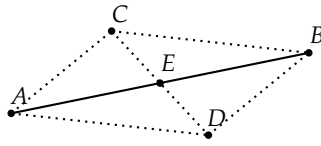


Figura 28 – Ponto médio do segmento  $AB$ .

O quadrilátero  $ADBC$  é um paralelogramo. Pelos teoremas 2.2 e 2.3, a imagem também é um paralelogramo  $A'D'B'C'$ , cujas diagonais se intersectam na imagem  $E'$  de  $E$ . Isto significa que  $E'$  é o ponto médio de  $A'B'$ , como se desejava provar. ★

Ocorrida a comprovação de que as transformações afins preservam os pontos médios e os pontos que dividem um segmento com razão racional, os geômetras buscaram responder se qualquer ponto de um segmento  $AB$  seria preservado. Quem conseguiu dar a resposta foi o matemático francês Darboux<sup>1</sup> (MARTIN, 2012, p. 170-171), cujo lema está em seguida comprovado.

**Lema A.2** (*Lema de Darboux*) Uma transformação afim preserva a ordem entre pontos colineares.

**Demonstração do Lema A.2** Seja dada uma transformação afim  $\tau$ . Para verificar a veracidade deste lema, é suficiente provar que dado um ponto que não pertence ao segmento  $AB$  da reta  $\overleftrightarrow{AB}$ , então sua imagem sob  $\tau$  não pertence ao segmento  $A'B'$ . De fato, se um ponto do interior do segmento  $AB$  tiver como imagem sob  $\tau$  um ponto que não pertence ao segmento  $A'B'$ , a imagem inversa desse ponto seria um ponto interior de  $AB$ .

Considerem-se dois pontos distintos  $A$  e  $B$  do plano  $\pi$  e  $C$  um ponto da reta  $\overleftrightarrow{AB}$  que não pertence ao segmento  $AB$ . Desde que  $\underline{AC}$  e  $\underline{CB}$  têm sinais opostos, é válido

$$\frac{\underline{AC}}{\underline{CB}} = -\lambda^2,$$

para algum real  $\lambda$ . Agora, sejam os pontos distintos  $P$  e  $Q$  da reta  $\overleftrightarrow{AB}$ , tal que  $P \in AB$  e  $Q \notin AB$  e

$$\begin{aligned} \frac{\underline{AP}}{\underline{PB}} &= \lambda, \\ \frac{\underline{AQ}}{\underline{QB}} &= -\lambda. \end{aligned}$$

<sup>1</sup> Gaston Darboux (1842-1917) foi um matemático francês que contribuiu com estudos sobre continuidade em geometria e análise. Foi o primeiro que deu a condição necessária e suficiente para uma função limitada ser integrável num intervalo fechado.

Segue que

$$\frac{\underline{AP} + \underline{PB}}{\underline{AP}} = \frac{1 + \lambda}{\lambda},$$

$$\frac{\underline{AP}}{\underline{AB}} = \frac{\lambda}{1 + \lambda}.$$

Da mesma forma se obtém

$$\frac{\underline{AQ}}{\underline{AB}} = \frac{-\lambda}{-\lambda + 1},$$

$$\frac{\underline{AC}}{\underline{AB}} = \frac{-\lambda^2}{-\lambda^2 + 1}.$$

Assim,

$$\underline{AP} + \underline{AQ} = 2\underline{AC}.$$

Portanto,  $C$  é o ponto médio de  $PQ$ . Tomem-se duas retas paralelas que passem por  $A$  e  $B$  e marque-se, sobre a reta que passa pelo ponto  $A$ , os pontos  $M$  e  $N$  tais que  $\underline{AM} = \underline{AN}$ . Trace as retas  $\overleftrightarrow{QM}$  e  $\overleftrightarrow{QN}$  que encontrem a reta que passa por  $B$  nos pontos  $K$  e  $L$ . Então  $\underline{BL} = \underline{BK}$  e  $\underline{AN}/\underline{BL} = \lambda$ , e os segmentos  $NK$  e  $LM$  se interseccionam em  $P$  (figura 29).

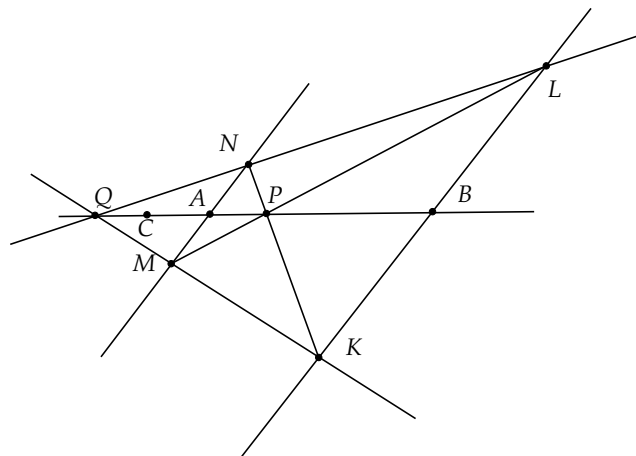


Figura 29 – Lema de Darboux.

Sob uma transformação afim, sabe-se que retas paralelas são levadas em retas paralelas, pontos médios de um segmento são levados em pontos médios da imagem do segmento e pontos colineares são levados em pontos colineares. Assim também ocorre com a figura transformada e, em particular, se um dos pontos  $P'$ ,  $Q'$  é interior ao segmento  $A'B'$ , então o outro é exterior. Por exemplo, seja  $Q'$  interior ao segmento

$A'B'$ , então  $P'$  é exterior tal que

$$\frac{\overline{A'P'}}{\overline{P'B'}} = -\lambda',$$

$$\frac{\overline{A'Q'}}{\overline{Q'B'}} = \lambda',$$

para algum real  $\lambda'$ . Porém  $C'$  é o ponto médio de  $P'Q'$ . Assim, o ponto  $C'$  divide o segmento  $A'B'$  externamente na razão  $(-\lambda')^2$ , e  $C' \notin A'B'$ , como se desejava provar. ★

**Teorema A.3** *Se os pontos  $P_1, P_2, \dots, P_{n-1}$  dividem o segmento  $AB$  em  $n$  partes congruentes, então, sob uma transformação afim  $\tau$ , as suas imagens  $P'_1, P'_2, \dots, P'_{n-1}$  dividem o segmento  $A'B'$ , onde  $A'$  e  $B'$  são as imagens de  $A$  e  $B$  sob  $\tau$ , em  $n$  partes congruentes.*

**Demonstração do Teorema A.3** Sendo  $\overline{AP_1} = \overline{P_1P_2} = \dots = \overline{P_{n-1}B}$ , então  $P_1$  é o ponto médio de  $AP_2$ , de modo que  $P'_1$  é o ponto médio de  $A'P'_2$ , ou seja,  $A'P'_1 = P'_1P'_2$ , o que determina  $P'_2$  univocamente na semirreta  $\overrightarrow{A'P'_1}$ . Da mesma forma,  $P'_3$  é tal que  $P'_2$  seja ponto médio de  $P'_1P'_3$ . O mesmo raciocínio se aplica às imagens dos  $P_i$  com  $i = 4, \dots, n$ , com  $P'_n = B'$ . ★

**Teorema A.4** *Se o ponto  $P$  está entre os pontos  $A$  e  $B$ , tal que a razão  $\frac{\overline{AP}}{\overline{PB}} = \frac{p}{q}$  é racional, então a imagem  $\tau(P)$  está entre as imagens  $\tau(A)$  e  $\tau(B)$  sob uma transformação afim  $\tau$  e é tal que*

$$\frac{\overline{\tau(A)\tau(P)}}{\overline{\tau(P)\tau(B)}} = \frac{p}{q}.$$

**Demonstração do Teorema A.4** Sendo  $\frac{\overline{AP}}{\overline{PB}} = \frac{p}{q}$ , onde  $p$  e  $q$  são inteiros positivos e  $q \neq 0$ , então

$$\frac{\overline{AP} + \overline{PB}}{\overline{AP}} = \frac{p + q}{p},$$

sendo  $\overline{AP} + \overline{PB} = \overline{AB}$  e  $p + q = n$

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AP}} = \frac{n}{p},$$

$$\overline{AB} = n \left( \frac{\overline{AP}}{p} \right).$$

Isso significa que o segmento  $AB$  fica dividido em  $n$  segmentos congruentes. Portanto, pelo teorema A.3, a imagem  $\tau(AB)$  também fica dividida em  $n$  segmentos congruentes. Ou seja,  $\tau(P)$  está entre  $\tau(A)$  e  $\tau(B)$ , pois o ponto  $P$  é a extremidade de um dos segmentos entre  $A$  e  $B$ . Como o segmento  $AP$  está dividido em  $p$  segmentos



congruentes,  $A'P'$  também é dividido em  $p$  segmentos congruentes, de acordo com o teorema anterior, então

$$\begin{aligned}\overline{A'B'} &= n \cdot \frac{\overline{A'P'}}{p} \\ (\overline{A'P'} + \overline{P'B'}) \cdot p &= n \cdot \overline{A'P'} \\ (n-p) \cdot \overline{A'P'} &= p \cdot \overline{P'B'}\end{aligned}$$

de onde segue o resultado

$$\frac{\overline{\tau(A)\tau(P)}}{\overline{\tau(P)\tau(B)}} = \frac{p}{q'}$$

como se queria provar. ★

**Teorema A.5** *Transformações afins preservam a razão entre segmentos.*

**Demonstração do Teorema A.5** Seja dado um segmento  $AB$  e o ponto  $C$  dividindo o segmento, interna ou externamente, na razão  $\lambda$ . Considere-se primeiro que o ponto  $C$  esteja entre  $A$  e  $B$  e seja  $\tau$  uma transformação afim tal que  $\tau(A) = A'$ ,  $\tau(B) = B'$ ,  $\tau(C) = C'$ . Suponha que a razão  $\tau = \frac{AC}{CB}$  não seja um número racional, pois o teorema A.4 já provou este caso, e considere por contradição que

$$\frac{\underline{A'C'}}{\underline{C'B'}} > \frac{\underline{AC}}{\underline{CB}}.$$

O teorema A.1 garante que existe o ponto  $D'$  do segmento  $A'B'$ , tal que

$$\frac{\underline{A'D'}}{\underline{D'B'}} = \frac{\underline{AC}}{\underline{CB}} = \lambda.$$

De acordo com a demonstração do teorema A.1  $D'$  não coincide com  $C'$  e está à esquerda de  $C'$ . Como  $\frac{\underline{A'C'}}{\underline{C'B'}} > \frac{\underline{A'D'}}{\underline{D'B'}}$ , existe um número racional entre esses números reais.

A este racional  $\lambda'$  corresponde  $M'$  entre  $D'$  e  $C'$  tal que  $\lambda' = \frac{\underline{A'M'}}{\underline{M'B'}}$ . Desde que

$$\frac{\underline{A'D'}}{\underline{D'B'}} < \frac{\underline{A'C'}}{\underline{C'B'}}$$

$C'$  está entre  $D'$  e  $B'$ , conseqüentemente  $C'$  também está entre  $M'$  e  $B'$ . Assim  $C$  está entre  $M$  e  $B$ , conforme Lema de Darboux, e

$$\frac{\underline{AC}}{\underline{CB}} = \frac{\underline{A'D'}}{\underline{A'B'}} < \frac{\underline{A'M'}}{\underline{M'B'}} = \frac{\underline{AM}}{\underline{MB}}$$

que é uma contradição.

Se  $C$  pertence à reta  $AB$  mas não pertence ao segmento  $AB$ , então podemos assumir que  $B$  está entre  $A$  e  $C$ , e pelo que já está provado

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}}$$
$$\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{A'C'}}{\overline{B'C'}}$$

como se desejava provar.



# APÊNDICE B – Uma transformação afim é a composição de compressões

**Teorema B.1** *Qualquer transformação afim é a composição de compressões.*

**Demonstração do Teorema B.1** A partir da expressão (2.6), dada por  $\tau = T_1 \circ T_2 \circ T_3$ , já foi verificado que a transformação  $T_1$  é uma semelhança de razão  $k$  e que  $T_2$  é uma compressão. Agora, para que seja possível provar este teorema, deve-se encontrar uma composição adequada da transformação  $T_3$ , lembrando que ela é da forma

$$T_3 : \begin{cases} x_2 = x + \frac{ab + cd}{a^2 + c^2}y, \\ y_2 = y. \end{cases}$$

Para isto, verifica-se com fatoração algébrica, que nem sempre é fácil em matemática, que um cisalhamento com as equações

$$T'_3 : \begin{cases} x' = x + y, \\ y' = y, \end{cases}$$

pode ser fatorado como  $T'_3 = T_4 \circ T_5 \circ T_6$ , em que  $T_4$  é uma semelhança com equações

$$T_4 : \begin{cases} x' = ax_1 + by_1, \\ y' = -bx_1 + ay_1, \end{cases}$$

com  $a^2 + b^2 \neq 0$ .

$T_5$  é a compressão com equações

$$T_5 : \begin{cases} x_1 = kx_2, \\ y_1 = y_2, \end{cases}$$

e  $T_6$  é a semelhança semelhança com equações

$$T_6 : \begin{cases} x_2 = cx - k_1y, \\ y_2 = -k_1x + cy. \end{cases}$$

Por meio das composições acima, a expressão  $T'_3 = T_4 \circ T_5 \circ T_6$  é verdadeira com as

identidades:

$$\begin{aligned}c &= \frac{a+b}{a^2+b^2}, \\k &= \frac{a}{a+b}, \\k_1 &= \frac{-b}{a^2+b^2}, \\kk_1 &= \frac{a-b}{a^2+b^2}, \\ \frac{a}{b} &= \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}.\end{aligned}$$

Surpreendentemente surge o número áureo na solução! E a variável  $k$  é sempre igual a um dos valores  $\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$ .

Por verificação algébrica também se confirma que um cisalhamento com as equações

$$T' : \begin{cases} x' = x + ky, \\ y' = y, \end{cases}$$

pode ser fatorado por  $T' = T_7 \circ T_8 \circ T_9$ , em que  $T_7$  é a compressão com equações

$$T_7 : \begin{cases} x' = kx_1, \\ y' = y_1, \end{cases}$$

$T_8$  é um cisalhamento com equações

$$T_8 : \begin{cases} x_1 = x_2 + y_2, \\ y_1 = y_2, \end{cases}$$

$T_9$  é outra compressão com equações

$$T_9 : \begin{cases} x_2 = \frac{1}{k}x, \\ y_2 = y. \end{cases}$$

Sendo a transformação  $T_8$  equivalente à transformação  $T'_3$ , ela poderá ser escrita como a composição de  $T'_3$ .

Portanto, com estes resultados, chega-se à conclusão que uma transformação afim é a composição de compressões e semelhanças.

Sabe-se que uma semelhança é a composição de uma isometria com uma homotetia de mesma razão e de centro qualquer. Essa homotetia pode ser decomposta em duas compressões sobre retas perpendiculares que se intersectam no centro da homotetia.

Por fim, uma isometria é composta de reflexões que, por sua vez, são compressões de razão igual a  $-1$ . Assim fica provado que transformações afins são composições de compressões. ★

# APÊNDICE C – Mediações das atividades

As construções das figuras geométricas de cada atividade podem ser realizadas automaticamente pelas ferramentas existentes no GeoGebra ou por meio das propriedades básicas da figura. O professor, em sua mediação, tem um importante papel em estimular os alunos a construírem os objetos matemáticos a partir das propriedades ou relações que existam entre eles. Isto contribui significativamente no processo de aprendizagem, estimulando a visão de integração entre as áreas da matemática. O ambiente de GD também possibilita que a solução das atividades ocorra por diferentes registros ou quadros, conforme *as competências supostamente disponíveis para resolver o problema*, na concepção da referência (ALMOULOUD, 2010).

É muito relevante também que o professor, ao fazer a mediação, estimule estudo em grupo, de tal forma que os alunos compartilhem as hipóteses e os resultados.

Para que as construções solicitadas reflitam o que se encontra descrito nas atividades, a utilização da ferramenta de seleção será constante, bem como renomear as figuras. E não havendo orientações ao contrário, o aluno pode construir as figuras geométricas em qualquer parte da área de trabalho do GeoGebra.

## Mediação da atividade 4.2.1.1

Usar a propriedade da quarta proporcional para construir a imagem da reta  $r$  sob a inversão no círculo  $\Gamma$ . Isto deixará mais clara a propriedade de inversão no círculo.

O aluno deve comparar suas construções com as construções dadas pela ferramenta automática do GeoGebra e justificar possíveis divergências que surgirem.

O aluno deve estabelecer as mais diferentes posições relativas entre a reta  $r$  e o círculo  $\Gamma$ , observando o efeito sobre a imagem  $r'$ .

Ao avaliar os textos produzidos pelos alunos, como resultado da atividade, o professor deve ficar atento quanto ao

- uso correto da ortografia portuguesa;
- uso correto da lógica matemática;
- uso correto de símbolos matemáticos, que não podem servir de abreviação para termos da língua portuguesa.

### Mediação da atividade 4.2.1.2

Na solução desta atividade, a seguinte propriedade básica de conjuntos é usada: dados dois conjuntos  $A$  e  $B$ , se diz que  $A = B$  se, e somente se,  $A \subset B$  e  $B \subset A$ .

Inicialmente é percebido que se a reta  $r$  passa pelo centro de  $\Gamma$ , parece coincidir com a imagem  $r'$ .

A partir da definição de inversão, concluir que  $I_{\Gamma}(r) \subset r$ .

Usando o conceito de igualdade de conjuntos, para concluir que  $I_{\Gamma}(r) = r$ , resta provar que  $r \subset I_{\Gamma}(r)$ .

### Mediação da atividade 4.2.2.1

Na solução desta atividade, usa-se o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo  $ABC$ :

$$\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AC}^2, \quad (\text{C.1})$$

que é válida somente se o ângulo reto se localiza no vértice  $B$ . Mas qualquer vértice poderá ser escolhido para o ângulo reto, sem prejuízo de se alcançar o resultado desejado.

E também é usado o teorema de Ptolomeu com a seguinte descrição:

*Se a soma dos ângulos opostos de um quadrilátero convexo é igual a  $180^\circ$ , então a soma do produto de seus lados opostos é igual ao produto de suas diagonais.*

Na construção do círculo de inversão e do triângulo retângulo, existem inúmeras possibilidades de posicionamento entre eles. E isto implica maiores ou menores dificuldades de identificação dos padrões que levam ao entendimento da solução da atividade. Uma figura que realça o quadrilátero  $OA'B'C'$ , formado pelas imagens dos pontos dos vértices  $A$ ,  $B$  e  $C$ , pode ser semelhante à ilustração da figura 30.

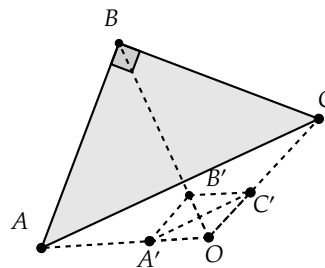


Figura 30 – Atividade.

O aluno deve concluir que os triângulos  $OAB$  e  $OB'A'$  são semelhantes, ao aplicar o conceito de inversão no círculo. Consequentemente, são válidas as seguintes relações de igualdade:

$$\frac{\overline{OA}}{\overline{OB'}} = \frac{\overline{OB}}{\overline{OA'}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}}.$$

A partir da igualdade

$$\frac{\overline{OA}}{\overline{OB'}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}}$$

obtenha

$$\overline{AB} = \overline{A'B'} \cdot \frac{s^2}{\overline{OA'} \cdot \overline{OB'}}.$$

Continuar a verificar a semelhança entre os triângulos  $OCB$  e  $OB'C'$  e entre os triângulos  $OAC$  e  $OC'A'$  e obter as expressões:

$$\overline{BC} = \overline{B'C'} \cdot \frac{s^2}{\overline{OB'} \cdot \overline{OC'}},$$

$$\overline{AC} = \overline{A'C'} \cdot \frac{s^2}{\overline{OA'} \cdot \overline{OC'}}.$$

O aluno deve substituir as expressões encontradas para  $\overline{AB}$ ,  $\overline{BC}$  e  $\overline{AC}$  na equação (C.1).

Pela semelhança apontada entre os triângulos, obtenha o valor para  $\angle OA'B' + \angle OC'B'$ .

A expressão que surge da expressão de Pitágoras é:

$$\overline{A'B'}^2 \cdot \overline{OC'}^2 + \overline{B'C'}^2 \cdot \overline{OA'}^2 = \overline{A'C'}^2 \cdot \overline{OB'}^2.$$

A partir dos resultados obtidos, o teorema que se assemelha ao teorema de Ptolomeu tem o enunciado equivalente a: *Se a soma dos ângulos opostos de um quadrilátero convexo é igual a  $90^\circ$ , então a soma do produto dos quadrados de seus lados opostos é igual ao produto dos quadrados de suas diagonais.*

No enunciado que o aluno produzir sobre a propriedade, o professor deve ficar atento ao

- uso correto da ortografia portuguesa;
- uso correto da lógica matemática;
- uso correto de símbolos matemáticos, que não podem servir de abreviação para termos da língua portuguesa.

#### Mediação da atividade 4.2.3.1

Nesta atividade, o aluno observa o efeito da inversão sobre dois círculos, com a possibilidade de criar imagens concêntricas.

O professor pode mediar a criação dos círculos e as inversões solicitadas por meio das ferramentas disponíveis no GeoGebra, visto que os alunos já desenvolveram as atividades anteriores aplicando as propriedades necessárias.

O professor deve estimular os alunos a encontrarem a condição para que os círculos que foram criados por eles possam ter imagens concêntricas. Por exemplo, eles

podem observar o que ocorre quando o centro do círculo de inversão está sobre a reta que liga os centros dos outros dois círculos.

Não é demais alertar ao professor que na redação das propriedades é importante observar

- o uso correto da ortografia portuguesa;
- o uso correto da lógica matemática; e
- o uso correto de símbolos matemáticos, que não podem servir de abreviação para termos da língua portuguesa.

#### Mediação da atividade 4.3.1.1

Para deixar mais clara a propriedade de inversão na elipse, o aluno deve usar a definição de inversão na elipse para construir a imagem pedida da reta  $r$  sob a inversão numa elipse  $\mathcal{E}$ .

Ao escolher um ponto  $P$  na reta, para chegar ao lugar geométrico da imagem de  $P$  sob a inversão na elipse  $\mathcal{E}$ , o aluno pode concluir antes que o ponto  $Q$  de intersecção da semirreta  $\overrightarrow{OP}$  com a elipse pertence ao círculo de centro  $O$  e raio  $\overline{OQ}$ . Portanto, o problema se reduz a encontrar a imagem de  $P$  sob a inversão no círculo e deduzir a imagem da reta  $r$  sob a inversão na elipse.

Ao avaliar os textos produzidos pelos alunos, como resultado da atividade, o professor deve ficar atento quanto ao

- uso correto da ortografia portuguesa;
- uso correto da lógica matemática;
- uso correto de símbolos matemáticos, que não podem servir de abreviação para termos da língua portuguesa.

#### Mediação da atividade 4.3.1.2

Nesta atividade, o aluno desenvolve o conceito de inversão no quadro da geometria analítica.

Para encontrar as coordenadas da imagem de um ponto sob inversão na elipse, o professor deve fazer o aluno observar que ele deve usar o conceito de distância entre pontos no plano, assim como o conceito de inversão na elipse.

Conhecendo as coordenadas da imagem de um ponto, o aluno precisa substituir, na equação  $px + qy + r = 0$ , a expressão das coordenadas  $(x, y)$  de um ponto da reta em termos das coordenadas da sua imagem. Para tal, existem dois caminhos possíveis:



- 1 - o aluno pode inverter as expressões das coordenadas da imagem de um ponto  $(x', y')$  em termos das coordenadas do ponto  $(x, y)$ ;
- 2 - uma outra forma, que evita efetuar as contas, seria usar a definição e observar que se  $P(x, y)$  tem imagem  $P'(x', y')$ , então  $P'(x', y')$  deve ter imagem  $P(x, y)$ .

As respostas deverão ser escritas, com o professor tomando o devido cuidado quanto ao correto uso do português e à forma de expressar a lógica matemática.

O aluno obteve a equação da imagem da reta dada. Se necessário, o professor deve sugerir e direcionar o aluno a usar o GeoGebra e alterar o sistema de coordenadas para obter um sistema em que a imagem da reta tenha equação canônica.

### **Mediação da atividade 4.3.1.3**

O aluno deve construir a imagem da elipse  $\mathcal{E}_1$  da mesma forma que já fez na atividade 4.3.1.1.

O professor deve deixar claro ao aluno que a movimentação envolve translações, rotações e compostas dessas duas transformações. Mas, uma vez que  $\mathcal{E}_1$  é qualquer, essa elipse poderia também sofrer transformações de alongamento além das isometrias citadas.

Dependendo do conhecimento dos alunos sobre reflexões, o professor tem uma boa oportunidade para fazer os alunos usarem as propriedades vistas e perguntar, por exemplo, se seria necessário usar alguma reflexão para obter um objeto  $\mathcal{E}_1$  diferente dos objetos  $\mathcal{E}_1$  transformados por translações e/ou rotações.

Nesta atividade, conjecturar sobre as imagens de uma elipse qualquer terá implicação importante na conclusão da atividade seguinte.

### **Mediação da atividade 4.3.1.4**

Esta atividade também explora conhecimentos e habilidades algébricas dos alunos.

O professor deve ter conhecimento do nível dos alunos a respeito do conceito de homotetia. Caso este conceito já tenha sido estudado, a sua definição deve ser reobtida a partir das propriedades conhecidas. Caso contrário, a sua definição deve ser dada pelo professor; mas ele deve solicitar explicações por parte dos alunos a respeito de propriedades da homotetia que decorrem da definição.

Conhecendo as coordenadas da imagem de um ponto (já desenvolvido na atividade 4.3.1.2), a atividade se resume em desenvolver a equação da imagem da elipse  $\mathcal{E}_1$  dada e responder corretamente às questões.

Novamente, o GeoGebra permite aos alunos visualizar a curva dada e a sua equação cartesiana.

As respostas deverão ser escritas, com o professor tomando o devido cuidado quanto ao correto uso do português e à forma de expressar a lógica matemática.