Universidade Federal de Goiás
Instituto de Matemática e Estatística
Programa de Mestrado Profissional em
Matemática em Rede Nacional

O estudo de determinantes sob a ótica do grupo de permutações

Walter José Rodrigues de Moraes

Goiânia

2013

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAR ELETRONICAMENTE OS TRABALHOS DE CONCLUSÃO DE CURSO NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei nº 9610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou *download*, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

1. Identificação do material bibliográfico: **Trabalho de Conclusão de Curso de Mestrado Profissional**

2. Identificação do Trabalho

Autor (a):	Walter José Rodrigues de Moraes				
E-mail:	walterjrmoraes@gmail.com				
Seu e-mail pode ser disponibilizado na página? [X]Sim [ ] Não					
Vínculo empregatício do autor	Secretaria de Estado de Educação do Distrito Federal				
Agência de fomento:	Coordenação de aperfeiçoamento de pessoal de nível superior	Sigla:	CAPES		
País:	Brasil	UF:		CNPJ:	00.889.834/0001-08
Título:	O estudo de determinantes sob a ótica do grupo de permutações				
Palavras-chave:	Determinantes. Grupos. Permutação.				
Título em outra língua:	The study of determinants from the perspective of permutation groups				
Palavras-chave em outra língua:	Determinants. Groups. Permutations.				
Área de concentração:	Matemática do ensino básico				
Data defesa:	28/02/2013				
Programa de Pós-Graduação:	Mestrado profissional em Matemática em rede nacional				
Orientador (a):	Mário José de Souza				
E-mail:	mariojsouza@gmail.com				
Co-orientador(a):*					
E-mail:					

*Necessita do CPF quando não constar no SisPG

3. Informações de acesso ao documento:

Concorda com a liberação total do documento [X] SIM [ ] NÃO[1]

Havendo concordância com a disponibilização eletrônica, torna-se imprescindível o envio do(s) arquivo(s) em formato digital PDF ou DOC do trabalho de conclusão de curso.

O sistema da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações garante aos autores, que os arquivos contendo eletronicamente as teses, dissertações ou trabalhos de conclusão de curso, antes de sua disponibilização, receberão procedimentos de segurança, criptografia (para não permitir cópia e extração de conteúdo, permitindo apenas impressão fraca) usando o padrão do Acrobat.

____ Data: ____ / ____ / _____

Assinatura do (a) autor (a)

[1] Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. A extensão deste prazo suscita justificativa junto à coordenação do curso. Os dados do documento não serão disponibilizados durante o período de embargo.

Walter José Rodrigues de Moraes

O estudo de determinantes sob a ótica do grupo de permutações

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.
Área de Concentração: Matemática do Ensino Básico
Orientador: Prof. Dr. Mário José de Souza

Goiânia
2013

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
GPT/BC/UFG

M827e

Moraes, Walter José Rodrigues.
O estudo de determinantes sob a ótica do grupo de permutações [manuscrito] / Walter José Rodrigues de Moraes. – 2013.
xv, 44 f. : il., figs, tabs.

Orientador: Prof. Dr. Mário José de Souza.
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Goiás, Instituto de Matemática e Estatística, 2013.
Bibliografia.
Inclui lista de figuras, abreviaturas, siglas e tabelas.
Apêndices.

1. Permutação. 2. Determinante. 3. Grupos. I. Título.

CDU: 512.542.7

Walter José Rodrigues de Moraes

O Estudo de Determinantes sob a Ótica do Grupo de Permutações

Trabalho de Conclusão de Curso defendido no Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT/UFG, do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, área de concentração Matemática do Ensino Básico, aprovado no dia 28 de fevereiro de 2013, pela Banca Examinadora constituída pelos professores:

Prof. Dr. Mário José de Souza
Instituto de Matemática e Estatística-UFG
Presidente da Banca

Prof. Dr. Flávio Raimundo de Souza
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia – Campus Goiânia-GO

Profa. Dra. Ivonildes Ribeiro Martins
Instituto de Matemática e Estatística-UFG

Walter José Rodrigues de Moraes

Licenciado em Matemática e especialista em Educação Matemática pela UNB. Professor da Secretaria de Educação do Distrito Federal, atuando no ensino médio desde 1990.

À minha esposa e filhos, pelo reconhecimento dos valiosos incentivos à conclusão de mais uma etapa de minha vida.

Agradecimentos

Aos professores, tutores e coordenadores do IME-UFG pelo empenho e dedicação mostrados ao longo do curso, em especial ao Prof. Dr. Mário José de Souza, aos colegas de turma pelo apoio e compreensão nos momentos difíceis e à CAPES pelo suporte financeiro.

Sempre me pareceu estranho que todos aqueles que estudam seriamente esta ciência acabam tomados de uma espécie de paixão pela mesma. Em verdade, o que proporciona o máximo prazer não é o conhecimento e sim a aprendizagem, não é a posse mas a aquisição, não é a presença mas o ato de atingir a meta

Carl Friedrich Gauss,
A Magia dos Números.

Resumo

O estudo sobre o desenvolvimento dos determinantes por meio das permutações efetuadas sobre suas linhas ou colunas remonta a 1812, com uma memória apresentada por Cauchy à academia de ciências da França. O presente trabalho é, em certo sentido, um resgate histórico. Em primeiro lugar define-se uma permutação: sob um ponto de vista superior tem-se uma aplicação bijetiva e, como tal, o conjunto das permutações possui uma estrutura de grupo; do ponto de vista elementar, tem-se um ordenamento de elementos de um conjunto. O fato fundamental é que, em segundo lugar, a definição de determinante se ajusta perfeitamente às duas concepções, tomando por base a paridade das permutações. Baseando nas definições, as propriedades dos determinantes são apresentadas e, assim, pode-se proceder com as devidas justificativas sobre a validade das mesmas. Uma regra que associe a cada matriz quadrada um número real definirá uma função real de variável matricial, a função determinante. É a forma atual como os determinantes são apresentados em níveis superiores: o determinante é a única função multilinear alternada das linhas (colunas) de uma matriz quadrada, conforme exibido em [10]. Com tal apresentação, tem-se em mente, o fato de poder servir de inspiração em estudos posteriores.

Palavras-chave

Determinantes. Grupos. Permutação.

Abstract

The study of determinants development through the permutations made on their lines or columns dates back to 1812, a memory presented by Cauchy to the French Academy of Sciences. The present work is, in some way, a historical rescue. Firstly, a permutation is defined: from a superior point of view there is a bijective application and, as such, the set of permutations has a group structure; from the elementary point of view, there is an ordainment of a group's elements. The fundamental fact is, secondly, that the definition of determinant adjusts perfectly to both conceptions, based on the parity of the permutations. Based on the definitions, the determinants properties are presented and, therefore, it is possible to proceed with the appropriate justifications about their validity. A rule that associates each square matrix to a real number will define a real function of the variable matrix, the determinant function. This is the actual way in which determinants are presented in higher levels: the determinant is the unique alternated multilinear function of the lines (*columns*) of a square matrix, as indicated in [10]. By this presentation there is in mind the fact that it can be served as an inspiration to posterior studies.

Keywords

Determinants. Groups. Permutation.

Sumário

Introdução

Como descrito em [13] e [16], em 1812, perante a Académie Des Sciences, na França, Augustin Louis Cauchy (1789-1857) fazia a leitura da Mémoire Sur Les Fonctions Qui Ne Peuvent Obtenir que Deux Valeurs Égales Et de Signes Contraires Par Suite Des Transpositions Opérés Entre Les Variables Qu'elles Renferment. Na primeira parte dessa memória de 84 páginas, Cauchy apresenta as considerações gerais sobre as funções simétricas alternadas. Para tanto, faz uso das permutações, bem como da aplicação das transposições entre os elementos de um conjunto, mostrando como a operação de transposição altera o sinal dos mesmos e adotando a notação S($\pm$ K) para representar as funções alternadas simétricas. No restante do trabalho descreve os determinantes como uma classe das funções simétricas alternadas, decorrendo daí suas propriedades e aplicação na resolução de sistemas lineares.

Diferentemente do que se pratica hoje, ou seja, começar com a disposição matricial e dar um valor a ela por uma expansão em termos das transposições das permutações, Cauchy começa com os n elementos $a_1, a_2, ..., a_n$ e forma o produto desses por todas as diferenças entre os elementos distintos do conjunto. Assim:

$$a_1a_2a_3...a_n(a_2-a_1)(a_3-a_1)...(a_n-a_1)(a_3-a_2)...(a_n-a_{n-1})$$

Como ilustração, considere o caso quando se tem 3 elementos a_1, a_2, a_3:

$$\begin{aligned}
(a_1a_2a_3)(a_2-a_1)(a_3-a_1)(a_3-a_2) &= \\
(a_1a_2^2a_3-a_1^2a_2a_3)(a_3-a_1)(a_3-a_2) &= \\
(a_1a_2^2a_3^2-a_1^2a_2^2a_3-a_1^2a_2a_3^2+a_1^3a_2a_3)(a_3-a_2) &= \\
a_1a_2^2a_3^3-a_1a_2^3a_3^2-a_1^2a_2^2a_3^2+a_1^2a_2^3a_3-a_1^2a_2a_3^3+a_1^2a_2^2a_3^2+a_1^3a_2a_3^2-a_1^3a_2^2a_3 &= \\
a_1a_2^2a_3^3-a_1a_2^3a_3^2+a_1^2a_2^3a_3-a_1^2a_2a_3^3+a_1^3a_2a_3^2-a_1^3a_2^2a_3 &
\end{aligned}$$

Em seguida, Cauchy define essa expressão como o determinante, transformando as potências indicadas em índices, de modo que a_i^j fica $a_{i.j}$ e escreve isso como $S(\pm a_{1.1}a_{2.2}a_{3.3})$. Assim o resultado acima, toma a seguinte forma:

$$a_{1.1}a_{2.2}a_{3.3} - a_{1.1}a_{2.3}a_{3.2} + a_{1.2}a_{2.3}a_{3.1} - a_{1.2}a_{2.1}a_{3.3} + a_{1.3}a_{2.1}a_{3.2} - a_{1.3}a_{2.2}a_{3.1}$$

Nesse momento é que Cauchy dispõe as n^2 quantidades diferentes desse determinante em uma disposição semelhante a que usamos hoje:

$$\begin{array}{ccccc} a_{1.1} & a_{1.2} & a_{1.3} & \cdots & a_{1.n} \\ a_{2.1} & a_{2.2} & a_{2.3} & \cdots & a_{2.n} \\ a_{3.1} & a_{3.2} & a_{3.3} & \cdots & a_{3.n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n.1} & a_{n.2} & a_{n.3} & \cdots & a_{n.n} \end{array}$$

Essas n^2 quantidades formam segundo Cauchy "um sistema simétrico de ordem n". A partir disso, define termos conjugados como os elementos cuja ordem dos índices está invertida e os autoconjugados como os elementos principais e, finalmente, determina o sinal dos termos na expansão usando substituições circulares.

A análise de livros didáticos de Matemática constitui um parâmetro indicador do estado atual em que se encontra o ensino da mesma. Especificamente no ensino médio, pode-se constatar pela leitura de [12] que o conteúdo de determinantes é apresentado simplesmente como um instrumento computacional.

Percebe-se que em praticamente todas as obras consultadas, define-se o determinante como um número real associado a uma matriz a partir de operações entre os elementos da mesma segundo algumas regras. Dessa forma, poder-se-ia objetar: que regras são essas? como provar proposições sobre os determinantes utilizando-se dessa definição? Após definido o determinante de acordo com a forma citada, calculam-se os determinantes de ordens 2 e 3, segundo as regras dadas e passa-se a enunciar algumas de suas propriedades. Nesse ponto compreende-se o motivo pelo qual as propriedades são apenas enunciadas: não tem como apresentar uma demonstração inteligível a alunos do ensino médio a partir da definição dada. Essa é exatamente a justificativa dos autores para a não apresentação das demonstrações, pois "são muito trabalhosas e não contribui para um melhor entendimento do teorema". Ou seja, perpetua-se o erro arraigado em nossa cultura escolar de que as proposições matemáticas não precisam ser demonstradas.

Considerando o determinante como instrumento computacional, deixa-se de apresentar fatos relacionados ao mesmo que são importantes em contextos mais amplos, por exemplo, o de que o determinante é função linear dos elementos de uma linha ou coluna.

Diante do exposto faz-se necessária uma reformulação na exposição dos conteúdos matemáticos que privilegie a correção dos conceitos, bem como a apresentação sistemática e fundamentada das proposições enunciadas.

Esse trabalho está dividido em 2 capítulos. O capítulo 1 contém a definição de grupo e de permutação, mostrando que o conjunto das permutações possui a estrutura de um grupo denominado grupo de permutações ou grupo simétrico. A seguir enunciam-se as proposições referentes às permutações. De posse da fundamentação teórica passa-se à definição de determinantes e enunciam-se suas propriedades, bem como suas respectivas demonstrações. O capítulo 2 contém uma proposta de aplicação do conteúdo de determinantes no ensino médio. Nesse sentido, define-se a permutação da forma consagrada pela Análise Combinatória, apresenta-se um dispositivo prático [1] para determinar a paridade de uma permutação, define-se o determinante, enunciam-se suas propriedades e procedem-se com as respectivas demonstrações, exemplificando a utilização das mesmas na resolução de questões envolvendo os determinantes.

CAPÍTULO 1

Grupo de Permutações e Determinantes

Neste capítulo são apresentados os conceitos de grupo de permutações e de determinantes necessários para o desenvolvimento deste trabalho. Para maiores detalhes sobre o assunto, indicamos as referências [3], [6], [9], [11] e [14].

1.1 Grupos

Definição 1 - *Um grupo é um conjunto não vazio G munido de uma operação binária definida sobre G, aqui representada por $*$, satisfazendo as seguintes propriedades:*

(P_1) *ASSOCIATIVA*
$\forall\, a,\, b,\, c \in G,\; a*(b*c) = (a*b)*c$

(P_2) *ELEMENTO NEUTRO*
$\forall\, a \in G,\; a*e = e*a = a$

(P_3) *ELEMENTO INVERSO*
$\forall\, a \in G,\; \exists\, a' \in G : a*a' = a'*a = e$

OBSERVAÇÕES

(1) Caso o conjunto G seja finito, teremos um grupo finito e o número de elementos de G é chamado de ordem do grupo G.

(2) Caso a operação $*$ definida sobre G satisfaça a propriedade comutativa, ou seja, se para todo a, b $\in G$, $ab = ba$, dizemos que o grupo G é comutativo ou abeliano.

1.2 Permutações

Definição 2 - *Seja I_n o conjunto dos números naturais de 1 a n, ou seja, $I_n = \{1, 2, \cdots, n\}$. Chama-se Permutação de I_n a toda aplicação bijetiva $\pi : I_n \longrightarrow I_n$.*

Indicamos por S_n o conjunto de todas as permutações de I_n. Para representar um elemento de S_n, usualmente é utilizada uma notação de duas linhas, onde abaixo de cada elemento da linha superior escreve-se sua imagem sob π.

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ \pi(1) & \pi(2) & \pi(3) & \cdots & \pi(n) \end{pmatrix}$$

No conjunto I_n, tomemos a aplicação idêntica, que de agora em diante denotaremos por i_d. Assim $i_d : I_n \longrightarrow I_n$ é a aplicação definida por $i_d(x) = x$ para todo $x \in I_n$. Essa aplicação, também sendo bijetiva, a demonstração encontra-se em [14], é uma permutação:

$$i_d = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n \end{pmatrix}$$

A permutação inversa de uma permutação $\pi : I_n \longrightarrow I_n$ é a aplicação $\pi^{-1} : I_n \longrightarrow I_n$. Ainda de [14], temos que a inversa de π é uma aplicação bijetiva.

$$\pi^{-1} = \begin{pmatrix} \pi(1) & \pi(2) & \pi(3) & \cdots & \pi(n) \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ \pi^{-1}(1) & \pi^{-1}(2) & \pi^{-1}(3) & \cdots & \pi^{-1}(n) \end{pmatrix}$$

Exemplo 1 - *Seja $I_n = \{1,2,3,4,5,6\}$ e $\pi : I_n \longrightarrow I_n$ dada por:*

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

A permutação idêntica de π é:

$$i_d = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

A permutação inversa de π é:

$$\pi^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 4 & 1 & 2 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 1 & 3 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

Sejam $\pi : I_n \longrightarrow I_n$ e $\omega : I_n \longrightarrow I_n$ duas permutações de I_n. As composições $\pi \circ \omega$ e $\omega \circ \pi$ são bijetoras (conforme [14]) e, por isso, também são permutações de I_n.

Exemplo 2 - *Sejam* $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$ *e* $\omega = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

A permutação composta $\pi \circ \omega$ é:

$$\begin{array}{rclclcl}
(\pi\circ\omega)(1) & = & \pi(\omega(1)) & = & \pi(4) & = & 5\\
(\pi\circ\omega)(2) & = & \pi(\omega(2)) & = & \pi(5) & = & 4\\
(\pi\circ\omega)(3) & = & \pi(\omega(3)) & = & \pi(3) & = & 2\\
(\pi\circ\omega)(4) & = & \pi(\omega(4)) & = & \pi(1) & = & 3\\
(\pi\circ\omega)(5) & = & \pi(\omega(5)) & = & \pi(2) & = & 1
\end{array}$$

$$\pi\circ\omega = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

O símbolo $\circ$ de composição de permutações, a partir de agora, será omitido. Assim $\pi\circ\omega$ será denotado por $\pi\omega$, onde deve ficar claro que primeiro aplicamos ω e depois π.

Proposição 1 - *O conjunto S_n munido da operação de composição de funções é um grupo.*

Prova. S_n é fechado em relação à operação de composição de permutações. De fato, sejam π_1 e $\pi_2 \in S_n$. Vamos mostrar que $\pi_1\pi_2$ é uma bijeção em I_n. $\pi_1\pi_2$ é injetiva, pois, dados x, $y \in S_n$, com $x \neq y$, temos por hipótese que π_1 e π_2 são injetivas e, assim, $\pi_1(x) \neq \pi_1(y)$ e $\pi_2(x) \neq \pi_2(y)$. Decorre daí que $\pi_1\pi_2(x) \neq \pi_1\pi_2(y)$. $\pi_1\pi_2$ é sobrejetiva. Considere $z \in I_n$. Sabendo que π_1 e π_2 são sobrejetivas, então existem x, $y \in I_n$, tais que $\pi_1(y) = z$ e $\pi_2(x) = y$, ou seja, existe $x \in I_n$ tal que $\pi_1(\pi_2(x)) = \pi_1(y) = z$. Portanto $\pi_1\pi_2$ é sobrejetiva. Assim $\pi_1\pi_2$ é uma bijeção em I_n, ou seja, S_n é fechado em relação à composição de funções.

A composição de permutações é associativa. Sejam π, ω e δ permutações de S_n. Devemos mostrar que $\{\pi(\omega\delta)\}(x) = \{(\pi\omega)\delta\}(x)$ para todo $x \in I_n$.

Assim,

$$\{\pi(\omega\delta)\}(x) = \pi\{(\omega\delta)(x)\} = \pi\{\omega(\delta(x))\}$$

e

$$\{(\pi\omega)\delta\}(x) = (\pi\omega)\{\delta(x)\} = \pi\{\omega(\delta(x))\},$$

o que estabelece a igualdade desejada.

O elemento neutro da composição de permutações é a permutação idêntica $i_d(x) = x$, para todo $x \in I_n$ e que cumpre a igualdade $\pi i_d = i_d\pi = \pi$, $\forall\, \pi \in S_n$.

De fato,

$$(\pi i_d)(x) = \pi(i_d(x)) = \pi(x)$$

e

$$(i_d\pi)(x) = i_d(\pi(x)) = \pi(x),$$

o que estabelece a igualdade desejada.

Para cada $\pi \in S_n$, $\exists\ \pi^{-1} \in S_n$, tal que $\pi^{-1}\pi = \pi\pi^{-1} = i_d$. Com efeito, dado $\pi \in S_n$ definimos $\pi^{-1} : I_n \longrightarrow I_n$ por $\pi^{-1}(x) = y \iff x = \pi(y)$. Vamos provar, primeiramente, que π^{-1} está bém definida. Para isso, sejam $x, z \in I_n$, tais que $x = z$. Devemos mostrar que $\pi^{-1}(x) = \pi^{-1}(z)$. Com efeito, sejam $\pi^{-1}(x) = y$ e $\pi^{-1}(z) = z'$. Da equivalência acima, tiramos que $x = \pi(y)$ e $z = \pi(z')$. Como $x = z$, então $\pi(y) = \pi(z')$ e como π é bijetiva, tiramos que $y = z'$. Decorre daí que $\pi^{-1}(x) = y$ e $\pi^{-1}(z) = y$. Portanto, $\pi^{-1}(x) = \pi^{-1}(z)$ como queríamos demonstrar.

Agora deveremos verificar as igualdades $\pi^{-1}\pi = \pi\pi^{-1} = i_d$.

Temos que:

$$(\pi\pi^{-1})(x) = \pi(\pi^{-1}(x)) = \pi(y) = x = i_d(x),$$

e

$$(\pi^{-1}\pi)(x) = \pi^{-1}(\pi(x)) = \pi(y) = x = i_d(x),$$

para todo $x \in I_n$, o que estabelece a igualdade desejada.

Satisfeitas as três propriedades, concluímos que S_n munido da operação de composição de permutações é um grupo. □

Proposição 2 - *Se o conjunto I_n tem mais de dois elementos, então o grupo S_n não é abeliano.*

Prova. Suponhamos que $I_2 = \{1,2\}$. As únicas aplicações bijetivas serão a identidade e a que leva 1 em 2 e vice-versa, isto é, $i_d(1) = 1$, $i_d(2) = 2$, $\pi(1) = 2$ e $\pi(2) = 1$.

Se n $\geq$ 3, então o grupo S_n não é comutativo. Para verificarmos, suponhamos, sem perda de generalidade, que $I_3 = \{1,2,3\}$ e sejam $\pi, \omega \in S_n$ definidas por:

$$\pi(1) = 2,\ \ \pi(2) = 1,\ \ \pi(3) = 3$$

$$\omega(1) = 3,\ \ \omega(3) = 1,\ \ \omega(2) = 2$$

Assim,

$$(\omega\pi)(1) = \omega(\pi(1)) = \omega(2) = 2$$

$$(\pi\omega)(1) = \pi(\omega(1)) = \pi(3) = 3$$

Como $(\omega\pi)(1) \neq (\pi\omega)(1)$, segue que para n $\geq$ 3, S_n não é abeliano. □

1.2.1 Ciclos

Definição 3 - *Considere uma permutação* $\pi \in S_n$ *e* $J_n = \{n_1, n_2, ..., n_k\}$, $1 \leq k \leq n$ *um subconjunto de* I_n. *Diz-se que* α *é um ciclo de comprimento k ou um k-ciclo se as seguintes condições se verificam:*

(i) $\alpha(n_i) = n_{i+1}$, $1 \leq i < k$

(ii) $\alpha(n_k) = n_1$

(iii) $\alpha(n) = n$ *para* $n \notin J_n = \{n_1, n_2, ..., n_k\}$

NOTAÇÃO: $\alpha = (n_1 n_2 ... n_k)$, em que os elementos que α transforma em si mesmo são omitidos.

Exemplo 3 - *A permutação* $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, *é um 4-ciclo ou um ciclo de comprimento 4.*

Podemos escrever um k-ciclo de k maneiras distintas. Por exemplo, (1 5 2 4) = (5 2 4 1) = (2 4 1 5) = (4 1 5 2).

Indicaremos com (1), o ciclo de comprimento 1 correspondente à permutação idêntica. Um ciclo de comprimento k ≥ 2 movimenta os k elementos do subconjunto J_n e deixa fixos os n - k elementos restantes. No caso do ciclo de comprimento 1, todo elemento do conjunto permanece fixo.

Dizemos que um 2-ciclo ou um ciclo de comprimento 2 é uma transposição.

Exemplo 4 - *A permutação* $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \end{pmatrix}$ *é uma transposição.*

Dois ciclos $\alpha = (n_1 n_2 ... n_k) \in S_n$ e $\beta = (m_1 m_2 ... m_r) \in S_n$ são disjuntos se $\{n_1, n_2, ..., n_k\} \cap \{m_1, m_2, ..., m_r\} = \emptyset$, ou seja, se nenhum elemento do conjunto I_n é movimentado simultaneamente pelos ciclos α e β.

Exemplo 5 - *Sejam* $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix} \in S_5$ *e* $\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} \in S_5$.

$\alpha = (45)$ *é uma transposição e* $\beta = (132)$ *é um ciclo de comprimento 3.* α *e* β *são disjuntos, pois* $\{4,5\} \cap \{1,3,2\} = \emptyset$.

Proposição 3 - *Se* α *e* β *são dois ciclos disjuntos, então* $\alpha\beta = \beta\alpha$.

Prova. Seja $i \in I_n$, o elemento que α deixa fixo. Então α também deixa fixo $\beta(i)$, assim, $\alpha\beta(i) = \beta(i) = \beta\alpha(i)$. Analogamente, seja $j \in I_n$, o elemento que β deixa fixo. Então β também deixa fixo $\alpha(j)$, de onde vem, $\alpha\beta(j) = \alpha(j) = \beta\alpha(j)$. Agora seja $k \in I_n$, o elemento em que α e β deixam fixo. Nesse caso é evidente que $\alpha\beta(k) = \beta\alpha(k) = k$. $\square$

A composição de ciclos é feita através das permutações que eles representam.

Exemplo 6 *Sejam os ciclos* $\alpha = (1346) \in S_6$ *e* $\beta = (246) \in S_6$.

$$\alpha\beta(1) = \alpha(\beta(1)) = \alpha(1) = 3$$

$$\alpha\beta(2) = \alpha(\beta(2)) = \alpha(4) = 6$$

$$\alpha\beta(3) = \alpha(\beta(3)) = \alpha(3) = 4$$

$$\alpha\beta(4) = \alpha(\beta(4)) = \alpha(6) = 1$$

$$\alpha\beta(5) = \alpha(\beta(5)) = \alpha(5) = 5$$

$$\alpha\beta(6) = \alpha(\beta(6)) = \alpha(2) = 2$$

$$\alpha\beta = (134)(26)$$

Definição 4 - *Seja* $\theta \in S_n$ *e* $s \in I_n$. *Dá-se o nome de órbita de s em relação à permutação* θ *ao conjunto* $\theta_s = \{s, \theta(s), \theta^2(s), ...\}$.

Exemplo 7 - *Seja a permutação* $\theta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 4 & 8 & 5 & 9 & 7 & 6 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in S_9$.

Para s = 1, temos:

$\theta(1) = 3$

$\theta^2(1) = \theta(\theta(1)) = \theta(3) = 8$

$\theta^3(1) = \theta(\theta^2(1)) = \theta(8) = 1$

$\theta^4(1) = \theta(\theta^3(1)) = \theta(1) = 3$

$\theta_1 = \{1, 3, 8\}$

Para s = 2, temos:

$\theta(2) = 4$

$\theta^2(2) = \theta(\theta(2)) = \theta(4) = 5$

$\theta^3(2) = \theta(\theta^2(2)) = \theta(5) = 9$

$\theta^4(2) = \theta(\theta^3(2)) = \theta(9) = 2$

$\theta_2 = \{2, 4, 5, 9\}$

Para s = 6, temos:
$\theta(6) = 7$
$\theta^2(6) = \theta(\theta(6)) = \theta(7) = 6$
$\theta_6 = \{6, 7\}$
Os ciclos correspondentes às órbitas são, respectivamente, (1 3 8), (2 4 5 9) e (6 7).

Proposição 4 - *Toda permutação de S_n se escreve como uma composição de ciclos disjuntos de comprimento $n \geq 2$; essa composição é única, a menos da ordem em que os ciclos são escritos.*

Prova. Devemos decompor o conjunto I_n como a união disjunta de suas órbitas, ou seja, formar os ciclos c_1, ... , c_t. $\theta = c_1 \cdots c_t$. De fato, seja $s \in I_n$. Então s aparece em somente um dos ciclos (pois são disjuntos). Digamos que esse ciclo seja c_i.
Assim, $c_1 \cdots c_t(s) = c_1 \cdots c_i(s) = c_1 \cdots c_{i-1}(\theta(s)) = \theta(s)$.
Para provar a unicidade, sejam $c_1 \cdots c_r = d_1 \cdots d_s$ duas decomposições de θ em produto de ciclos disjuntos de comprimento $n \geq 2$. Se θ movimenta x, então um dos c_i move x e também um dos d_j move x. Como ciclos disjuntos comutam (Proposição 3), podemos assumir, sem perda de generalidade, que c_1 e d_1 movem x. Assim, para todo inteiro t, temos $\theta^t(x) = c_1^t(x) = d_1^t(x)$. Como um ciclo é completamente determinado pelo conjunto de suas potências sobre um elemento que ele move, temos $c_1 = d_1$. Façamos a prova por indução sobre sobre o min(r,s) tal que $r = s$ e que, a menos da ordem dos fatores, $c_i = d_i$, $\forall i$. Se esse mínimo é 1, tem-se $c = d_1 \cdots d_s$. Agora, pelo fato dos ciclos serem disjuntos, $c = d_i$ para algum i. Como ciclos disjuntos comutam (Proposição 3), podemos supor $i = 1$. Se s fosse maior do que 1, simplificando, a permutação idêntica $(1) = d_2 \cdots d_s$ moveria os índices desses ciclos, o que é impossível. Logo, $s = 1$. Suponhamos, agora, que min(r,s) > 1. Então, continuando com o mesmo raciocínio, $c_1 = d_1$ e, simplificando, $c_2 \cdots c_r = d_2 \cdots d_s$. Temos assim, por indução, que $r - 1 = s - 1$ e, a menos da ordem, $c_j = d_j$, $j \geq 2$. □

Proposição 5 - *Toda permutação de S_n, com $n \geq 2$, pode ser escrita como uma composição de transposições.*

Prova. Utilizando-se do resultado da Proposição 4, basta mostrar que todo k-ciclo é uma composição de k-1 transposições.
De fato, $(n_1 n_2 \cdots n_k) = (n_1 n_k)(n_1 n_{k-1}) \cdots (n_1 n_2)$ □

Deve-se observar, no entanto, que o mesmo k-ciclo admite diferentes composições em transposições.

Exemplo 8 - *Seja* $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1 & 7 & 6 \end{pmatrix} \in S_7$.

Como um composto de ciclos disjuntos, esta permutação escreve-se:

$$\pi = (135)(24)(67)$$

De outro modo, exprimindo o ciclo (135) como um composto de transposições, temos:

$$\pi = (15)(13)(24)(67)$$

Por ser (135) = (351) = (31)(35), também podemos escrever:

$$\pi = (31)(35)(24)(67)$$

Também podemos inserir nessa decomposição de π, *um composto idêntico, tal como (26)(62) = (1) e escrever:*

$$\pi = (31)(35)(26)(62)(24)(67)$$

Percebe-se, dessa forma, que a permutação π *pode ser escrita como uma composição de transposições de uma infinidade de maneiras.*
Apesar do número de transposições em que se decompõe uma permutação não ser único, a sua importância reside no fato de que a paridade deste número é única, ou seja, se a permutação for escrita de duas maneiras distintas, digamos com m e n transposições, respectivamente, então m e n são ambos pares ou são ambos ímpares.
De fato, se m < n, a diferença n - m é necessariamente um inteiro par, pois ao acrescentar uma nova transposição à permutação, devemos acrescentar, também, para não alterar o resultado, a respectiva transposição inversa.

Definição 5 - *Uma permutação* $\pi \in S_n$, *diz-se par ou ímpar conforme for par ou ímpar, respectivamente, o número de transposições em que* π *se decompõe.*

Definição 6 - *Seja* $\pi = \alpha_1 ... \alpha_k \in S_n$, *uma permutação decomposta em k ciclos disjuntos. Define-se o sinal de* π *por* $sgn(\pi) = (-1)^{n-k}$.

Proposição 6 - *Se t é uma transposição, então sgn(t) = -1.*

Prova. Sendo t uma transposição, então move dois números e fixa cada um dos outros $n-2$ números. Assim, $k = (n-2)+1 = n-1$. Assim, $sgn(t) = (-1)^{n-(n-1)} = (-1)^1 = -1$. □

Diante do exposto, verificamos que a permutação idêntica é par e seu sinal é 1, pois pode ser escrita como a composição de duas transposições. Além disso, podemos dizer que uma permutação é par se o seu sinal é 1; é ímpar, se o seu sinal é -1.

Proposição 7 - *Se π e π' são permutações de S_n, então $sgn(\pi\pi') = sgn(\pi)sgn(\pi')$.*

Prova. Da Proposição 6, infere-se que se π é decomposta em k transposições, então $sgn(\pi) = (-1)^k$. Assim, se π e π' são compostas, respectivamente, por k e k' transposições, então:

$$sgn(\pi\pi') = (-1)^{k+k'} = (-1)^k(-1)^{k'} = sgn(\pi)sgn(\pi')$$

□

Proposição 8 - *Se $\pi \in S_n$, então $sgn(\pi) = sgn(\pi^{-1})$.*

Prova. Temos que $1 = sgn(i_d) = sgn(\pi\pi^{-1}) = sgn(\pi)sgn(\pi^{-1})$. Então, $sgn(\pi) = sgn(\pi^{-1}) = 1$ ou $sgn(\pi) = sgn(\pi^{-1}) = -1$, ficando assim provada a proposição. □

Exemplo 9 - *Seja* $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 2 & 5 & 7 & 6 & 1 & 4 \end{pmatrix} \in S_7$.

π pode ser decomposta da seguinte forma: (1356)(47) = (16)(15)(13)(47). Assim, $sgn(\pi) = (-1)^4 = 1$. Portanto, π é uma permutação par.

1.3 Determinantes

Definição 7 - *Seja $A = (a_{ij})$ uma matriz quadrada de ordem n. Define-se o determinante de A por*

$$Det(A) = \sum_{\pi \in S_n} sgn(\pi)a_{1\pi(1)}a_{2\pi(2)}...a_{n\pi(n)}.$$

Observemos que o determinante de A é a soma de $n!$ parcelas, visto que há uma parcela para cada permutação de S_n. Cada parcela contém um produto da forma $a_{1\pi(1)}a_{2\pi(2)}...a_{n\pi(n)}$. Os n escalares são as n entradas da matriz que estão em n linhas e colunas distintas. Da mesma forma, se escolhemos n entradas de A que estão em linhas e colunas distintas, o produto desses n escalares aparecerá em somente uma das parcelas que definem o determinante. A permutação correspondente será a que associa a cada linha, a coluna onde está a entrada escolhida. Assim, o determinante de A é a soma de todos esses possíveis produtos, cada um deles com um sinal determinado pela permutação correspondente.

Exemplo 10 - *Se A é a matriz de ordem 1, $A = (a_{11})$, teremos somente a permutação idêntica. Assim $Det(A) = sgn(i_d)a_{1i_d(1)} = 1.a_{11} = a_{11}$*

Exemplo 11 - *Se A é a matriz de ordem 2, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, temos duas permutações em S_2: π_1 e π_2, sendo a primeira par e a segunda ímpar. Assim:*

$$\pi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad e \quad \pi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} Det(A) &= \sum_{\pi_i \in S_2} sgn(\pi)a_{1\pi(1)}a_{2\pi(2)} \\ &= sgn(\pi_1)a_{11}a_{22} + sgn(\pi_2)a_{12}a_{21} \\ &= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \end{aligned}$$

Exemplo 12 - *Se A é a matriz de ordem 3, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, temos seis permutações em S_3. Assim:*

$$\pi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} (PAR), \pi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} (ÍMPAR), \pi_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} (ÍMPAR)$$

$$\pi_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} (PAR), \pi_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} (PAR), \pi_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} (ÍMPAR)$$

$$\begin{aligned} Det(A) &= \sum_{\pi_i \in S_3} sgn(\pi)a_{1\pi(1)}a_{2\pi(2)}a_{3\pi(3)} \\ &= sgn(\pi_1)a_{11}a_{22}a_{33} + sgn(\pi_2)a_{11}a_{23}a_{32} + sgn(\pi_3)a_{12}a_{21}a_{33} + \\ &\quad sgn(\pi_4)a_{12}a_{23}a_{31} + sgn(\pi_5)a_{13}a_{21}a_{32} + sgn(\pi_6)a_{13}a_{22}a_{31} \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \end{aligned}$$

Calculando os determinantes utilizando-se da definição, percebemos que os mesmos exigem muitos cálculos (para $n = 4$, já teremos *24* parcelas). Sendo assim, para ordens superiores a três, o conhecimento das propriedades dos determinantes podem ser de grande valia para a realização dos cálculos.

1.3.1 Propriedades dos Determinantes

Propriedade 1 - *O determinante de uma matriz e de sua transposta são iguais.*

Prova. Seja $B = (b_{ij})$ a transposta da matriz $A = (a_{ij})$. Dessa forma, temos que $b_{ij} = a_{ji}$. Sabemos que toda permutação possui uma inversa e os seus sinais são iguais. Seja δ a inversa da permutação π. Assim, se $\pi(i) = j$, então $\delta(j) = i$, de forma que $a_{i\pi(i)} = a_{\delta(j)j}$. Portanto, os produtos $a_{1\pi(1)}a_{2\pi(2)}...a_{n\pi(n)}$ e $a_{\delta(1)1}a_{\delta(2)2}...a_{\delta(n)n}$ são iguais. Assim, $Det(A) = \sum_{\pi \in S_n} sgn(\delta)a_{\delta(1)1}a_{\delta(2)2}...a_{\delta(n)n} = \sum_{\delta \in S_n} sgn(\delta)b_{1\delta(1)}b_{2\delta(2)}...b_{n\delta(n)} = Det(B)$ □

A partir da demonstração dessa propriedade, todas as propriedades relativas às linhas de um determinante se aplicam, também, às suas colunas.

Propriedade 2 - *O determinante da matriz identidade de ordem n é igual a 1.*

Prova. Sabemos que as entradas da matriz identidade são 1, se $i = j$ e *0*, se $i \neq j$. Assim, o produto $sgn(\pi)a_{1\pi(1)}a_{2\pi(2)}...a_{n\pi(n)}$ somente será diferente de zero se π for a permutação idêntica. Assim, $Det(I_n) = sgn(i_d)a_{11}a_{22}...a_{nn} = 1$ □

Propriedade 3 - *Se permutarmos duas linhas(colunas) de uma matriz, o determinante muda de sinal.*

Prova. Suponhamos que seja B, a matriz obtida da matriz A pela permutação das linhas i e j e seja δ a transposição correspondente. Assim,

$$\begin{aligned}
Det(B) &= \sum_{\pi \in S_n} sgn(\pi)b_{1\pi(1)}...b_{i\pi(i)}...b_{j\pi(j)}...b_{n\pi(n)} \\
&= \sum_{\pi \in S_n} sgn(\pi)a_{1\pi(1)}...a_{j\pi(i)}...a_{i\pi(j)}...a_{n\pi(n)} \\
&= \sum_{\pi \in S_n} sgn(\pi)a_{1\pi(1)}...a_{i\pi(j)}...a_{j\pi(i)}...a_{n\pi(n)} \\
&= \sum_{\pi \in S_n} sgn(\pi)a_{1\pi(\delta(1))}...a_{i\pi(\delta(i))}...a_{j\pi(\delta(j))}...a_{n\pi(\delta(n))}
\end{aligned}$$

Das proposições 6 e 7, sabemos que $sgn(\pi\delta) = sgn\pi.sgn\delta = sgn\pi(-1) = -sgn\pi$. Assim,

$$\begin{aligned} Det(B) &= \sum_{\delta \in S_n} -sgn(\pi\delta) a_{1\pi(\delta(1))} \ldots a_{i\pi(\delta(i))} \ldots a_{j\pi(\delta(j))} \ldots a_{n\pi(\delta(n))} \\ &= -\sum_{\delta \in S_n} sgn(\pi\delta) a_{1\pi(\delta(1))} \ldots a_{i\pi(\delta(i))} \ldots a_{j\pi(\delta(j))} \ldots a_{n\pi(\delta(n))}. \end{aligned}$$

Como neste somatório $\pi\delta$ percorre todas as possíveis permutações, a soma dá precisamente o determinante de A. Logo, $Det(B) = -Det(A)$.
Suponha agora que B se obtém de A pela permutação de duas colunas. Neste caso B^t se obtém de A^t ao permutar duas linhas, logo $Det(B) = Det(B^t) = -Det(A^t) = -Det(A)$. □

Propriedade 4 - *Se A é uma matriz quadrada com duas linhas ou colunas iguais, então Det(A) = 0.*

Prova. É consequência imediata da propriedade 3. Neste caso, A é obtida de si mesma pela permutação das duas linhas ou colunas iguais. Assim, $Det(A) = -Det(A)$. Portanto, $Det(A) = 0$. □

Propriedade 5 - *Se uma linha ou coluna de uma matriz quadrada A for nula, então Det(A) = 0.*

Prova. Seja i a linha nula. Então, para qualquer $\pi \in S_n$, $a_{i\pi(i)} = 0$. Assim, Det(A) = 0. Uma coluna nula na matriz é uma linha nula na sua transposta. Assim, $Det(A^t) = 0$ e, consequentemente, $Det(A) = 0$. □

Propriedade 6 - *Se uma matriz B é obtida pela multiplicação de uma linha ou coluna de uma matriz A por um escalar k, então Det(B) = k.Det(A).*

Prova. Suponhamos que a r-ésima linha de A seja multiplicada por k para se obter B. Então $b_{ij} = a_{ij}$ se $i \neq r$ e $b_{rj} = ka_{rj}$. Assim,

$$\begin{aligned} Det(B) &= \sum_{\pi \in S_n} sgn(\pi) b_{1\pi(1)} b_{2\pi(2)} \ldots b_{r\pi(r)} \ldots b_{n\pi(n)} \\ &= \sum_{\pi \in S_n} sgn(\pi) a_{1\pi(1)} a_{2\pi(2)} \ldots (ka_{r\pi(r)}) \ldots a_{n\pi(n)} \\ &= k \sum_{\pi \in S_n} sgn(\pi) a_{1\pi(1)} a_{2\pi(2)} \ldots a_{r\pi(r)} \ldots a_{n\pi(n)} \\ &= k.Det(A). \end{aligned}$$

□

Propriedade 7 - *Se uma linha (coluna) de uma matriz quadrada A for um múltiplo de outra linha (coluna) de A, então Det(A) = 0.*

Prova. Façamos a demonstração somente para as linhas, sabendo-se que a mesma vale para as colunas, segundo a observação constante da propriedade 1.
Suponhamos que a r-ésima linha de A seja igual a k vezes a s-ésima linha. Assim $a_{rj} = k.a_{sj}$. Então,

$$\begin{aligned} Det(A) &= \sum_{\pi \in S_n} sgn(\pi) a_{1\pi(1)} a_{2\pi(2)} \ldots a_{r\pi(r)} \ldots a_{s\pi(s)} \ldots a_{n\pi(n)} \\ &= \sum_{\pi \in S_n} sgn(\pi) a_{1\pi(1)} a_{2\pi(2)} \ldots (k a_{s\pi(r)}) \ldots a_{s\pi(s)} \ldots a_{n\pi(n)} \\ &= k. \sum_{\pi \in S_n} sgn(\pi) a_{1\pi(1)} a_{2\pi(2)} \ldots a_{s\pi(r)} \ldots a_{s\pi(s)} \ldots a_{n\pi(n)}. \end{aligned}$$

O somatório acima corresponde a um determinante que possui duas linhas iguais. Logo é igual a zero e, assim, $Det(A) = k.0 = 0$. □

Propriedade 8 - *Se A é uma matriz triangular, então Det(A) =* $a_{11}a_{22}\ldots a_{nn}$.

Prova. Seja A uma matriz triangular superior, isto é, $a_{ij} = 0$ para $i > j$. Então, um termo $a_{1\pi(1)}a_{2\pi(2)}\ldots a_{n\pi(n)}$ do determinante de A somente será diferente de zero se $1 \leq \pi(1)$, $2 \leq \pi(2)$, ..., $n \leq \pi(n)$. Dessa forma, devemos ter $\pi(1) = 1$, $\pi(2) = 2$, ..., $\pi(n-1) = n-1$, $\pi(n) = n$. Assim, o único termo do determinante de A que pode ser diferente de zero é o produto dos elementos da diagonal principal de A, que corresponde à permutação idêntica que é par. Portanto, $Det(A) = a_{11}a_{22}\ldots a_{nn}$. De modo análogo, demonstra-se que o determinante da matriz triangular inferior é igual ao produto dos elementos da diagonal principal. □

Propriedade 9 - *Se a matriz quadrada B se obtém da matriz quadrada A pela soma de uma linha(coluna) por um múltiplo de outra linha(coluna) de A, então Det(B) = Det(A).*

Prova. Façamos a demonstração somente para as linhas, sabendo-se que a mesma vale para as colunas, segundo a observação constante da propriedade 1.
Consideremos as linhas r e s ($r \neq s$) da matriz A. Temos que $b_{ij} = a_{ij}$ para $i \neq r$ e $b_{rj} = a_{rj} + c a_{sj}$ com $r \neq s$. Sem perda de generalidade, podemos supor que $r < s$. Então,

$$Det(B) = \sum_{\pi \in S_n} sgn(\pi) b_{1\pi(1)} b_{2\pi(2)} \ldots b_{r\pi(r)} \ldots b_{n\pi(n)}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{\pi \in S_n} sgn(\pi) a_{1\pi(1)} a_{2\pi(2)} \ldots (a_{r\pi(r)} + c a_{s\pi(r)}) \ldots a_{s\pi(s)} \ldots a_{n\pi(n)} \\
&= \sum_{\pi \in S_n} sgn(\pi) a_{1\pi(1)} a_{2\pi(2)} \ldots (a_{r\pi(r)}) \ldots a_{s\pi(s)} \ldots a_{n\pi(n)} + \\
&\quad \sum_{\pi \in S_n} sgn(\pi) a_{1\pi(1)} a_{2\pi(2)} \ldots (c a_{s\pi(r)}) \ldots a_{s\pi(s)} \ldots a_{n\pi(n)} \\
&= Det(A) + c. \sum_{\pi \in S_n} sgn(\pi) a_{1\pi(1)} a_{2\pi(2)} \ldots (a_{s\pi(r)}) \ldots a_{s\pi(s)} \ldots a_{n\pi(n)}.
\end{aligned}$$

O somatório acima corresponde ao determinante de uma matriz que possui duas linhas iguais, que, pela propriedade 4, é igual a zero. Assim, $Det(B) = Det(A) + c.0$. Portanto, $Det(B) = Det(A)$. □

Definição 8 - *Chama-se matriz elementar de ordem n, à matriz que se obtém da identidade por uma única transformação elementar.*

Propriedade 10 - *Se A e E são matrizes quadradas de ordem n e E é uma matriz elementar, então Det(EA) = Det(E)Det(A) = Det(A)Det(E) = Det(AE).*

Prova. Se E é uma matriz elementar obtida pela permutação de duas linhas, então, pelas propriedades 2 e 3, $Det(E) = -1$. Assim, $Det(EA) = (-1).Det(A) = Det(E)Det(A)$.
Se E é uma matriz elementar obtida pela multiplicação de uma linha por um escalar k não nulo, então, pelas propriedades 2 e 6, $Det(E) = k$. Assim, $Det(EA) = k.Det(A) = Det(E)Det(A)$.
Se E é uma matriz elementar obtida pela substituição da i-ésima linha por k vezes a j-ésima linha mais a i-ésima linha, então, pelas propriedades 2 e 9, $Det(E) = 1$. Assim, $Det(EA) = 1.Det(A) = det(E)Det(A)$.
A primeira igualdade é consequência de que EA se obtém de A ao aplicar uma operação elementar por linhas. A segunda igualdade é imediata pela propriedade comutativa do produto e a terceira igualdade se prova de maneira idêntica à primeira, utilizando operações elementares por colunas. □

Propriedade 11 - *Uma matriz quadrada é invertível se, e somente se, o determinante de A é diferente de zero. Além disso,* $Det(A^{-1}) = \frac{1}{Det(A)}$.

Prova. Consideremos uma matriz quadrada A e seja A' a sua forma escalonada reduzida por linhas. Devemos nos lembrar que A' se obtém de A mediante uma sucessão de operações elementares por linhas. Isto equivale a multiplicar pela esquerda, por um conjunto

de matrizes elementares, ou seja, $A' = E_1...E_kA$. Aplicando repetidamente a propriedade anterior, obtemos: Det(A') = Det(E_1)...Det(E_k)Det(A). Como as matrizes elementares têm determinantes diferentes de zero, obtemos que $Det(A) = 0 \iff Det(A') = 0$. Recordemos, ainda, que se A é invertível, A' é a matriz identidade. Logo, $Det(A') = 1$ e, assim, $Det(A) \neq 0$. Por outro lado, se A não é invertível, então A' tem uma fila de zeros. Logo $Det(A') = 0$ e, assim, $Det(A) = 0$.
Agora vamos mostrar que o determinante da inversa de A é igual ao inverso do determinante de A. Sabemos que $AA^{-1} = I$. Aplicando o determinante, obtemos:

$$Det(AA^{-1}) = Det(I)$$

$$Det(A)Det(A^{-1}) = 1$$

$$Det(A^{-1}) = \frac{1}{Det(A)}$$

□

Propriedade 12 - *Sejam A e B matrizes quadradas de ordem n. Então Det(AB) = Det(A)Det(B).*

Prova. Se A é não singular, então $A = E_1...E_k$. Assim, $Det(AB) = Det(E_1...E_kB) = Det(E_1)...Det(E_k)Det(B) = Det(A)Det(B)$. Se A ou B é singular, então AB é singular e Det(AB) = 0 e Det(A)Det(B) = 0. □

Propriedade 13 - *Se A e B são matrizes semelhantes, então Det(A) = Det(B).*

Prova. Sendo A e B semelhantes, então existe uma matriz invertível P, tal que $B = PAP^{-1}$.

$$\begin{aligned} Det(B) &= Det(PAP^{-1}) \\ &= Det(P)Det(A)Det(P^{-1}) \\ &= Det(I)Det(A) \\ &= 1.Det(A) \\ &= Det(A). \end{aligned}$$

□

Propriedade 14 - *O determinante de uma matriz quadrada é uma função linear de cada um dos seus vetores-linha(coluna), quando os outros estão fixos.*

Prova. Façamos a demonstração somente para as linhas, sabendo-se que a mesma vale para as colunas, segundo a observação constante da propriedade 1. Sejam $A, B_1, ..., B_t$ matrizes quadradas de ordem n, tais que:

(i) A linha i de A é a combinação linear das linhas i de $B_1, ..., B_t$, isto é, existem escalares $\alpha_1, ...\alpha_t$, tais que $a_{ij} = \alpha_1 b1_{ij} + ... + \alpha_t bt_{ij}$.

(ii) Para todo $k \neq$ i, as linhas k de $A, B_1, ..., B_t$ são todas iguais.

Devemos provar que $Det(A) = \alpha_1 Det(B_1) + ... + \alpha_t Det(B_t)$. Assim,

$$\begin{aligned}
Det(A) &= \sum_{\pi \in S_n} sgn(\pi) a_{1\pi(1)} ... a_{i\pi(i)} ... a_{n\pi(n)} \\
&= \sum_{\pi \in S_n} sgn(\pi) a_{1\pi(1)} ... (\alpha_1 b1_{i\pi(i)} + ... + \alpha_t bt_{i\pi(i)}) ... a_{n\pi(n)} \\
&= (\sum_{\pi \in S_n} sgn(\pi) a_{1\pi(1)} ... \alpha_1 b1_{i\pi(i)} ... a_{n\pi(n)}) + ... + \\
&\quad (\sum_{\pi \in S_n} sgn(\pi) a_{1\pi(1)} ... \alpha_t bt_{i\pi(i)} ... a_{n\pi(n)}) \\
&= \alpha_1 (\sum_{\pi \in S_n} sgn(\pi) a_{1\pi(1)} ... b1_{i\pi(i)} ... a_{n\pi(n)}) + ... + \\
&\quad \alpha_t (\sum_{\pi \in S_n} sgn(\pi) a_{1\pi(1)} ... bt_{i\pi(i)} ... a_{n\pi(n)}) \\
&= \alpha_1 Det(B_1) + ... + \alpha_t Det(B_t).
\end{aligned}$$

□

Propriedade 15 - *Se uma linha(coluna) de uma matriz quadrada A for combinação linear das demais, então Det(A) = 0.*

Prova. É consequência imediata da propriedade 14. Basta aplicá-la na fila da matriz A que é uma combinação linear das demais, que o determinante desdobra-se numa soma de determinantes todos nulos, por terem filas paralelas proporcionais, ou seja, o determinante de A é zero por ser uma adição de zeros. □

CAPÍTULO 2

Aplicação no Ensino Médio

2.1 Permutação

Nesse capítulo estudaremos a permutação sob um ponto de vista elementar, tendo por base os conceitos da análise combinatória. Sob esse enfoque, o determinante será definido como um somatório de termos envolvidos nas chamadas classes de permutação. Os resultados apresentados neste capítulo podem ser encontrados em [1], [2], [4], [5], [15] e [17].

Definição 1 - *Chama-se permutação de um conjunto de n elementos distintos a qualquer conjunto que se pode construir com os n elementos, diferindo um dos outros pela ordem de seus elementos.*

O número de modos de se ordenar esses n elementos distintos é $n!$. De fato, temos n maneiras para escolher o elemento que ocupará o 1^{o} lugar, $n-1$ maneiras para o segundo lugar, até chegarmos ao último elemento, caso em que teremos 1 maneira de colocá-lo no último lugar. Se representarmos por P_n, o número de permutações distintas de n elementos, então $P_n = n.(n-1).....1 = n!$.

2.1.1 Classes de uma permutação

Dentre as $n!$ permutações simples dos n elementos distintos, escolhamos uma e designamo-la de permutação principal. Seja a permutação principal, por simplicidade, aquela em que os elementos correspondem à sucessão ordenada e crescente dos números naturais, ou seja, $1, 2, ..., n$.

Definição 2 - *Diz-se que numa permutação, dois elementos estão invertidos ou formam inversão, quando se encontram em uma ordem distinta da considerada como principal.*

Definição 3 - *Uma permutação diz-se de classe par quando o número total de inversões entre cada dois elementos da permutação é par; caso contrário, quando o número de inversões é ímpar, diz-se que a permutação é de classe ímpar.*

Exemplo 1 - *Na permutação 2 3 1 4, os pares de elementos* $\{2,1\}$ *e* $\{3,1\}$ *formam inversões. Assim, em relação à permutação principal 1 2 3 4, a permutação 2 3 1 4 possui duas inversões e, assim, é de classe par.*

2.1.2 Processos práticos para se determinar o número de inversões

O número total de inversões pode ser determinado da seguinte maneira:

(i) Fixar o primeiro elemento da permutação e contar quantos elementos que o seguem são menores que ele;

(ii) Continuar dessa forma até atingir o penúltimo elemento.

Exemplo 2 - *Sejam 1 2 3 4 5 6 7 a permutação principal de 7 elementos e 5 3 2 7 4 6 1 uma permutação dos mesmos elementos em que determinaremos a sua paridade. Para tanto, comparemos o* 1^o *elemento 5 com cada um dos elementos seguintes e façamos o mesmo com o restante dos elementos. Obtemos, assim, o seguinte quadro:*

53	***32***	*27*	***74***	*46*	***61***
52	*37*	*24*	***76***	***41***	
57	*34*	*26*	***71***		
54	*36*	***21***			
56	***31***				
51					

Verificamos que há *12* inversões, ou seja, 12 pares em que os números não se apresentam na ordem principal e, assim, *5327461* é uma permutação de classe par.

Em [1] encontra-se um diagrama que nos permite, também, contar o número de inversões de uma permutação. O diagrama é montado da seguinte forma: escrevem-se os elementos da permutação principal em uma linha superior e, imediatamente abaixo, os elementos da permutação que se deseja obter a paridade. Unam-se os elementos iguais através de uma linha de modo que todas as interseções possíveis sejam somente de duas linhas. Então para a permutação anterior, temos:

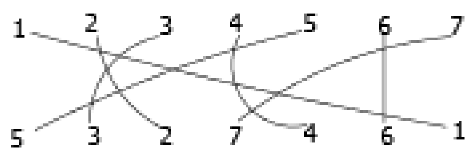

Figura 2.1

Assim, por exemplo, como *5* e *3* não estão na ordem natural, as linhas que unem *5* com *5* e *3* com *3* se intersectam. O mesmo se verifica para toda inversão que se apresenta na linha inferior. O número de interseções, neste caso 12, é igual ao número de inversões.

Proposição 1 - *Em toda permutação, a inversão de dois elementos origina uma mudança de classe.*

Prova. Procederemos à prova, percebendo que temos dois casos a considerar:
1º caso: os dois elementos invertidos são consecutivos.
Consideremos as duas permutações $a_ia_j...a_ra_s...a_z$ e $a_ia_j...a_sa_r...a_z$ em que uma é obtida da outra pela troca dos elementos consecutivos a_r e a_s. Dessa forma, esses dois elementos consecutivos ou estão invertidos na primeira permutação e, consequentemente, pela troca, deixam de estar na segunda permutação, ou não formavam inversão na primeira e ficam invertidos na segunda. Em relação aos outros elementos da permutação, os a_r e a_s continuam a formar as mesmas inversões, pois não foram mudadas as posições relativas deles com a_r e a_s. Sendo assim, o número de inversões da segunda permutação difere da primeira permutação em uma unidade e elas são, pois, de classes diferentes.
2º caso: os dois elementos não são consecutivos.
Suponhamos, agora, que entre a_r e a_s há k elementos: $a_i...\overbrace{a_r...a_s}^{k}...a_z$ e $a_i...\overbrace{a_s...a_r}^{k}...a_z$.
A troca de a_r com a_s pode se reduzir a troca de elementos consecutivos da seguinte forma: primeiro, troca-se a_r com cada um dos k elementos que estão à sua direita, mais o a_s. Temos então $k+1$ trocas; em seguida, troca-se a_s sucessivamente com cada um dos k elementos que estão à sua esquerda, até ocupar o lugar de a_r. Assim, temos k trocas e, no total, obtemos $k+k+1 = 2k+1$ trocas de elementos consecutivos. Como a cada uma das trocas a permutação muda de classe, pelo 1º caso, então a permutação fica com uma classe diferente da que tinha. □

Proposição 2 - *Dentre as n! permutações simples de n elementos distintos, são em igual número as das duas classes.*

Prova. Seja n_1 o número de permutações de classe par e n_2 o número de permutações de classe ímpar. Das $n!$ permutações vamos escolher dois elementos quaisquer e façamos a inversão entre eles. Com isso, todas as permutações mudarão de classe, não haverá repetição de nenhuma permutação e, ainda, duas permutações diferentes de uma mesma classe não dará origem à mesma permutação de outra classe. Consequentemente, $n_1 = n_2$. Dessa igualdade e sabendo que $n_1 + n_2 = n!$, conclui-se que $n_1 = n_2 = \frac{n!}{2}$. □

2.2 Termo de uma matriz quadrada

Definição 4 - *Chama-se termo de uma matriz quadrada de ordem n a qualquer produto de n elementos em que compareça um e apenas um elemento de cada linha e de cada coluna. Consideremos como termo principal, o termo formado pelos elementos de índices iguais.*

Exemplo 3 - *Seja A uma matriz quadrada de ordem 3,* $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$.

De A podemos obter os seguintes termos:

- $a_{11}a_{22}a_{33} \longrightarrow$ *termo principal*
- $a_{11}a_{23}a_{32}$
- $a_{12}a_{21}a_{33}$
- $a_{12}a_{23}a_{31}$
- $a_{13}a_{21}a_{32}$
- $a_{13}a_{22}a_{31}$

2.2.1 Paridade de um termo

Definição 5 - *Um termo de uma matriz é dito par ou ímpar conforme seja par ou ímpar a soma das inversões efetuadas sobre os índices das linhas e das colunas.*

Se o termo for par será precedido do sinal $(+)$, se for ímpar será precedido do sinal $(-)$. Tomando-se o cuidado de formar os termos de modo que os índices das linhas seja a permutação principal, teremos que nos preocupar somente com as inversões efetuadas sobre os índices das colunas. Assim, do exemplo anterior, o termo $a_{13}a_{22}a_{31}$ terá a seguinte paridade $(sinal)$: como os índices das linhas formam a permutação principal, basta contar o número de inversões dos índices das colunas. Assim, não teremos nenhuma inversão dos índices das linhas e *3* inversões dos índices das colunas, ao todo, $0+3=3$. Dessa forma, dizemos que o termo $a_{13}a_{22}a_{31}$ é ímpar e escreve-se $-a_{13}a_{22}a_{31}$.

2.3 Determinantes

Definição 6 - *Dada uma matriz quadrada A, chama-se determinante de A, à soma de todos os seus termos, precedidos do sinal* $(+)$ *ou* $(-)$ *conforme se trate de um termo par ou um termo ímpar, a qual denotaremos* $Det(A)$.

2.3.1 Determinante de ordem 2

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

O termo principal é $a_{11}a_{22}$ o qual corresponde o sinal $(+)$. Conservando fixa a permutação das linhas, façamos todas as permutações dos índices das colunas. São elas *1 2* e *2 1*, a primeira par e a segunda ímpar. Assim,

$$Det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

2.3.2 Determinante de ordem 3

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

O termo principal é $a_{11}a_{22}a_{33}$ o qual corresponde o sinal $(+)$. As permutações dos três índices das colunas são: *1 2 3*, *2 3 1* e *3 1 2* (*pares*) e *1 3 2*, *2 1 3* e *3 2 1* (ímpares). Assim,

$$Det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}. \tag{1}$$

Para o cálculo dos determinantes de ordem superior a *3*, poderíamos seguir exatamente a definição dada. No entanto, o cálculo se torna moroso, uma vez que para o determinante de 4ª ordem, por exemplo, já teríamos que realizar a adição de *24* parcelas. Sendo assim, podemos obter métodos mais eficientes como consequência das propriedades dos determinantes que vamos estabelecer.

2.3.3 Propriedades dos determinantes

Propriedade 1 - *Um determinante não se altera quando se trocam as linhas pelas colunas e vice-versa.*

Prova. Todo termo do primeiro determinante está formado por n elementos, sendo um de cada linha e de cada coluna, pertencendo também ao segundo determinante. O termo principal dos dois determinantes é o mesmo. Logo, de acordo com a lei de formação dos outros termos, os dois determinantes têm os mesmos termos e, assim, são iguais. □

Desta propriedade, conclui-se que toda propriedade dos determinantes pode enunciar-se indiferentemente para as linhas ou para as colunas.

Propriedade 2 - *Um determinante muda de sinal quando se trocam as posições de duas quaisquer de suas linhas*$(colunas)$.

Prova. De fato, a troca equivale a mudar em cada termo dois índices. Sendo assim, a permutação correspondente a cada um dos termos mudará de classe, isto é, de sinal, conforme a Proposição 1. Com todos os termos trocando de sinal, teremos uma mudança no sinal do determinante. □

Propriedade 3 - *Se uma matriz quadrada tem duas linhas* $(colunas)$ *iguais, o seu determinante é igual a zero.*

Prova. Seja Δ o determinante dessa matriz quadrada. Trocando de posição as duas linhas $(colunas)$ iguais, temos pela Propriedade 2, que o determinante muda de sinal, ou seja, obtemos $-\Delta$. Mas pela igualdade das duas linhas $(colunas)$, o novo determinante será idêntico ao anterior. Logo será $\Delta = -\Delta$, implicando que $2\Delta = 0$, o que exige que $\Delta = 0$. □

Propriedade 4 - *Se uma matriz quadrada tem todos os elementos de uma linha* $(coluna)$ *iguais a zero, então o seu determinante é igual a zero.*

Prova. Cada um dos termos em que se desenvolve o determinante contém um elemento dessa linha $(coluna)$. Sendo assim, cada termo será igual a zero. Daí se conclui que o determinante é zero, por ser uma adição de zeros. □

Propriedade 5 - *Se multiplicarmos uma linha* $(coluna)$ *de uma matriz quadrada por um número, o determinante fica multiplicado por esse número.*

Prova. Pela mesma razão apontada na Propriedade 4, cada termo contém um e somente um elemento pertencendo a linha $(coluna)$ considerada. Logo, todos os termos ficam multiplicados pelo número considerado e, portanto, o determinante fica multiplicado por esse número. □

Propriedade 6 - *Se uma linha* $(coluna)$ *de uma matriz quadrada for um múltiplo de outra linha* $(coluna)$ *dessa matriz, então o seu determinante é igual a zero.*

Prova. De fato, seja Δ o determinante dessa matriz quadrada. Multiplicando uma das linhas $(colunas)$ por um número k, coeficiente de proporcionalidade das duas linhas $(colunas)$, elas ficarão iguais. Sendo iguais, pela Propriedade 3, o novo determinante é igual a zero. Além disso, pela Propriedade 5, temos: $k.\Delta = 0$. Portanto, $\Delta = 0$. □

Propriedade 7 - *Se A é uma matriz triangular* $($*inferior ou superior*$)$*, então o seu determinante se reduz ao termo principal.*

Prova. Seja A uma matriz triangular inferior, isto é, aquela em que $a_{ij} = 0$, para $i < j$. Da definição de determinante, em cada termo deve aparecer um e somente um elemento da primeira linha. Somente não serão nulos aqueles em que comparecer o elemento a_{11}. Passando à segunda linha, vemos que ela só possui dois elementos diferentes de zero a_{21} e a_{22}. Destes, o primeiro não pode aparecer em nenhum termo, visto que já faz parte da mesma coluna em que está a_{11}. Portanto, nos termos não nulos, só o elemento a_{22} da segunda linha pode tomar parte no desenvolvimento do determinante. Percebe-se que até essa etapa do desenvolvimento do determinante, temos apenas a_{11} e a_{22} como fatores não nulos. Sendo assim, continuando com raciocínio análogo para as demais linhas, verificaremos que os termos não nulos se reduzem ao termo principal $a_{11}a_{22}...a_{nn}$. De modo idêntico, demonstra-se que o determinante da matriz triangular superior se reduz ao termo principal. □

Propriedade 8 - *O determinante da matriz identidade de ordem n é igual a 1.*

Prova. É consequência imediata da Propriedade 7. Sendo o termo principal par, por não haver inversões, tem-se que $Det(I) = 1.1...1 = 1$. □

Para a demonstração das próximas propriedades valemo-nos das seguintes definições:

Definição 7 - *Consideremos uma matriz quadrada de ordem* $n \geq 2$*. Chama-se menor complementar de um elemento* a_{ij}*, denotado por* D_{ij}*, ao determinante que se obtém, eliminando a linha i e a coluna j de A.*

Definição 8 - *Chama-se cofator de* a_{ij}*, denotado por* A_{ij}*, ao número* $(-1)^{i+j}.D_{ij}$.

Propriedade 9 - *Um determinante qualquer é uma função linear dos elementos de uma mesma linha* $(coluna)$.

Prova. De fato, pela definição, cada termo do determinante contém um e somente um elemento pertencendo a uma determinada linha $(coluna)$. Seja o determinante:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Podemos escrever, ordenando o determinante segundo os elementos da primeira linha, $\Delta = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} + ... + a_{1n}A_{1n}$, onde A_{11} representa o determinante obtido quando se põe em evidência a_{11}; A_{12}, o que se obtém quando se põe a_{12} em evidência e assim sucessivamente. De fato, todos os termos que contém o elemento a_{11} não podem conter nenhum outro elemento pertencendo à primeira linha ou à primeira coluna. Ele deverá, pois, ser multiplicado pelas ordenações possíveis dos restantes elementos tomados nas $n - 1$ linhas e nas $n - 1$ colunas não empregadas no desenvolvimento do determinante. Vê-se que A_{11} é, assim, o cofator relativo a a_{11}. Da mesma forma, A_{12} é o cofator relativo a a_{12} e, assim, sucessivamente. □

O que essa propriedade nos diz é que podemos fazer o desenvolvimento de um determinante segundo os elementos de uma linha ou de uma coluna qualquer de uma matriz quadrada.

Exemplo 4 - *Obter o determinante de uma matriz quadrada de ordem 3, fazendo o desenvolvimento:*

(i) pela primeira linha;
(ii) pela segunda coluna.

(i)

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} \Delta &= a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} \\ &= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}\left(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}\right) - a_{12}\left(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}\right) + a_{13}\left(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}\right) \end{aligned}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

Observe que essa é a mesma expressão (1) *que obtivemos à página 33.*

(ii)

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\Delta &= -a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} - a_{32}A_{32} \\
&= -a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} \\
&= -a_{12}\left(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}\right) + a_{22}\left(a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31}\right) - a_{32}\left(a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21}\right) \\
&= -a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{11}a_{22}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} + a_{13}a_{21}a_{32}.
\end{aligned}$$

A mesma expressão (1) *da página 33.*

Propriedade 10 - *Se em uma matriz quadrada de ordem n, os elementos de uma linha* $($*coluna*$)$ *é uma adição de m parcelas, o seu determinante se desenvolve pela adição de m determinantes, que se obtém do determinante dado, conservando as outras linhas* $($*colunas*$)$ *e substituindo a linha* $($*coluna*$)$ *composta pelas primeiras, segundas, m-ésimas parcelas.*

Prova. Seja Δ o determinante onde os elementos de uma linha k é a adição de m parcelas:

$$a_{k1} = \overbrace{a_1 + b_1 + \cdots + l_1}^{m}$$

$$a_{k2} = \overbrace{a_2 + b_2 + \cdots + l_2}^{m}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$a_{kn} = \overbrace{a_n + b_n + \cdots + l_n}^{m}$$

Desenvolvendo Δ em relação aos elementos da linha k, tem-se:

$$\Delta = (a_1 + b_1 + \cdots + l_1)A_{k1} + (a_2 + b_2 + \cdots + l_2)A_{k2} + \cdots + (a_n + b_n + \cdots + l_n)A_{kn}$$

$$
\begin{aligned}
&= (a_1.A_{k1} + a_2.A_{k2} + \cdots + a_n.A_{kn}) + (b_1.A_{k1} + b_2.A_{k2} + \cdots + b_n.A_{kn}) + \\
&\quad + \cdots + (l_1.A_{k1} + l_2.A_{k2} + \cdots + l_n.A_{kn}) \\
&= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ l_1 & l_2 & \cdots & l_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.
\end{aligned}
$$

□

Propriedade 11 - *O determinante de uma matriz quadrada não se altera se substituirmos uma de suas linhas $(colunas)$ pela adição dela com um múltiplo de outras.*

Prova. Multipliquemos os elementos das linhas $k_1, k_2, \cdots, k_r$ respectivamente por $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_r$ e adicionemos esses produtos aos elementos correspondentes da linha i. Obtém-se, assim, um novo determinante Δ' em que todas as linhas são as do determinante dado Δ, exceto a linha i que fica composta do seguinte modo:

$$
\begin{aligned}
a'_{i1} &= a_{i1} + \lambda_1.a_{(k1)1} + \lambda_2.a_{(k2)1} + \cdots + \lambda_r.a_{(kr)1} \\
a'_{i2} &= a_{i2} + \lambda_1.a_{(k1)2} + \lambda_2.a_{(k2)2} + \cdots + \lambda_r.a_{(kr)2} \\
&\vdots \\
a'_{in} &= a_{in} + \lambda_1.a_{(k1)n} + \lambda_2.a_{(k2)n} + \cdots + \lambda_r.a_{(kr)n}
\end{aligned}
$$

De acordo com a Propriedade 10, Δ' desenvolve-se na adição de r determinantes: $\Delta' = \Delta_1 + \Delta_2 + \cdots + \Delta_{r+1}$. Mas Δ_1, que tem na linha i os elementos $a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in}$, é, precisamente Δ; Δ_2 é nulo, pela Propriedade 6, porque tem na linha i os elementos $\lambda_1.a_{(k1)1}, \cdots, \lambda_1.a_{(k1)n}$ que são proporcionais. Pela mesma razão, são nulos $\Delta_3, \cdots, \Delta_{r+1}$. Portanto $\Delta' = \Delta_1 = \Delta$. □

Propriedade 12 - *Se uma linha $(coluna)$ de uma matriz quadrada é combinação linear das demais, o seu determinante é zero.*

Prova. É consequência imediata da Propriedade 10. Basta aplicá-la à linha $(coluna)$ que é combinação linear das demais. Assim, o determinante desenvolve-se na adição de determinantes todos nulos, por terem linhas $(colunas)$ paralelas proporcionais. Portanto, o determinante é zero. □

Aplicação das propriedades

Exemplo 5 - *Calcular o valor do determinante* $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+x & 1 \\ 1 & 1 & 1+y \end{vmatrix}$.

Aos elementos da 2ª coluna e da 3ª coluna, subtraiamos os da 1ª coluna (o determinante não se altera (Propriedade 11)) e assim:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & x & 0 \\ 1 & 0 & y \end{vmatrix}.$$

Obtemos uma matriz triangular inferior, cujo determinante se reduz ao termo principal (Propriedade 7). Portanto $\Delta = xy$.

Exemplo 6 - *Mostrar que* $\Delta = \begin{vmatrix} b+c & a-b & a \\ c+a & b-c & b \\ a+b & c-a & c \end{vmatrix} = 3abc - a^3 - b^3 - c^3$.

Podemos decompor o determinante, segundo a Propriedade 10, da seguinte forma:

$$\Delta = \begin{vmatrix} b & a & a \\ c & b & b \\ a & c & c \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} b & b & a \\ c & c & b \\ a & a & c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c & a & a \\ a & b & b \\ b & c & c \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} c & b & a \\ a & c & b \\ b & a & c \end{vmatrix}.$$

Os três primeiros determinantes são nulos por possuírem, cada um, duas colunas iguais (Propriedade 3). Então Δ *se reduz a:*

$$\Delta = -\begin{vmatrix} c & b & a \\ a & c & b \\ b & a & c \end{vmatrix}.$$

Desenvolvendo-o pela 1ª linha (Propriedade 9), temos:

$$\Delta = -c\begin{vmatrix} c & b \\ a & c \end{vmatrix} + b\begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix} - a\begin{vmatrix} a & c \\ b & a \end{vmatrix} = -c^3 + abc + abc - b^3 - a^3 + abc.$$

Portanto $\Delta = 3abc - a^3 - b^3 - c^3$.

Exemplo 7 - *Verificar a igualdade:* $\begin{vmatrix} m-n-p & 2m & 2m \\ 2n & n-p-m & 2n \\ 2p & 2p & p-m-n \end{vmatrix} = (m+n+p)^3$.

Chamemos de Δ *o determinante proposto. Aos elementos da 1ª linha, adicionemos os elementos correspondentes das duas outras (pela Propriedade 11, o determinante não se* *altera). Assim,*

$$\Delta = \begin{vmatrix} m+n+p & m+n+p & m+n+p \\ 2n & n-p-m & 2n \\ 2p & 2p & p-m-n \end{vmatrix}.$$

Colocando (m+n+p) em evidência (Propriedade 5), temos:

$$\Delta = (m+n+p)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2n & n-p-m & 2n \\ 2p & 2p & p-m-n \end{vmatrix}.$$

Aos elementos da 2^a e da 3^a coluna, subtraiamos os da 1^a coluna (pela Propriedade 11, o determinante não se altera). Assim, obtemos:

$$\Delta = (m+n+p)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2n & -(m+n+p) & 0 \\ 2p & 0 & -(m+n+p) \end{vmatrix}.$$

Obtemos uma matriz triangular inferior, cujo determinante se reduz ao termo principal (Propriedade 7). Assim, $\Delta = (m+n+p)(m+n+p)^2 = (m+n+p)^3$.

Exemplo 8 *- Demonstrar, sem desenvolver o determinante, que:*

$$\Delta = \begin{vmatrix} a-b & m-n & x-y \\ b-c & n-p & y-z \\ c-a & p-m & z-x \end{vmatrix} = 0.$$

Vamos adicionar à última linha, as duas primeiras (pela Propriedade 11, o determinante não se altera). Assim,

$$\Delta = \begin{vmatrix} a-b & m-n & x-y \\ b-c & n-p & y-z \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Como o determinante tem uma linha nula, então, pela Propriedade 4, é igual a zero.

Exemplo 9 *- Sem desenvolvê-lo, provar que é múltiplo de 12, o determinante:*

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 8 \end{vmatrix}$$

Adicionemos à terceira coluna, a primeira multiplicada por 100 e a segunda multiplicada por 10. O determinante não se altera, conforme a Propriedade 11. Assim, obtemos

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 144 \\ 1 & 2 & 120 \\ 1 & 0 & 108 \end{vmatrix}.$$

Percebemos que 144, 120 e 108 são múltiplos de 12. Colocando 12 em evidência no último determinante (Propriedade 5), obtemos

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 144 \\ 1 & 2 & 120 \\ 1 & 0 & 108 \end{vmatrix} = 12\begin{vmatrix} 1 & 4 & 12 \\ 1 & 2 & 10 \\ 1 & 0 & 9 \end{vmatrix}.$$

Exemplo 10 - *Resolver a equação* $\begin{vmatrix} x & 2 & 2 & 0 \\ 2 & x & 0 & -2 \\ 2 & 0 & -x & -2 \\ 0 & -2 & -2 & -x \end{vmatrix} = 16.$

Adicionemos à primeira linha, a quarta linha (pela Propriedade 11, o determinante não se altera). Obtemos

$$\begin{vmatrix} x & 0 & 0 & -x \\ 2 & x & 0 & -2 \\ 2 & 0 & -x & -2 \\ 0 & -2 & -2 & -x \end{vmatrix} = 16.$$

Adicionemos à quarta coluna, a primeira coluna (pela Propriedade 11, o determinante não se altera). Obtemos

$$\begin{vmatrix} x & 0 & 0 & 0 \\ 2 & x & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -x & 0 \\ 0 & -2 & -2 & -x \end{vmatrix} = 16$$

Temos, assim, uma matriz triangular inferior e, pela Propriedade 7, o seu determinante se reduz ao termo principal. Então $x.x.(-x).(-x) = 16 \Rightarrow x^4 = 16$. *Portanto,* $x = \pm 2$.

Conclusão

Nos capítulos anteriores utilizamo-nos dos conceitos de permutação ao definirmos o determinante. Tal atitude traduz, simplesmente, a preferência do autor desta sobre o modo de se abordar os determinantes, tendo em vista a utilização de uma definição que permita, com maior simplicidade, proceder às demonstrações de suas propriedades. Estas, por sua vez, são importantes para caracterizar o determinante como a única função de matriz que satisfaz a condição de depender linearmente das linhas ($colunas$) da matriz, anular-se quando duas de suas linhas ($colunas$) são iguais e assumir o valor 1 na matriz identidade. Por outro lado, busca-se clareza na abordagem de um conceito matemático que, em nível de ensino médio, carece de um tratamento inteligível, uma vez que é apresentado sem as formalizações necessárias para a sua compreensão.

Ademais, não devemos nos esquecer de que os determinantes, ainda no ensino médio, são utilizados na resolução de sistemas lineares, na determinação da área de figuras planas e no estudo da colinearidade de pontos do plano. Assim, com uma melhor compreensão da definição e das propriedades, os determinantes podem ser aplicados com maior segurança nas situações em que os mesmos são solicitados.

Por outro lado, esperamos estar contribuindo com aqueles que aspiram a uma formação acadêmica superior, baseada em conceitos matemáticos provindos, inicialmente, da álgebra linear e da Matemática em geral.

Por fim, o presente trabalho está em consonância com o denominado Projeto Klein de Matemática. Já na introdução do volume 1 da obra "Matemática Elementar desde um ponto de vista superior", Klein acentua a importância do enlace entre o ensino elementar e o ensino superior, tendo em vista o adequado preparo do professor de Matemática da escola elementar. Desse modo, Klein ainda enfatiza que tais enlaces tem o fim, de certo modo, "de facilitar, por parte do professor, dessa capacidade de extrair da grande base de conhecimentos um estímulo vivo para a sua prática de ensino".

Tendo tal compreensão, o professor do ensino médio tem a oportunidade de transmitir algo da Matemática superior, utilizando-se do currículo escolar. É nesse sentido que o presente trabalho faz a conexão entre a visão elementar e superior das permutações aplicadas à definição de determinantes, oferecendo ao interessado um contato mais próximo entre o ensino e a pesquisa Matemática.

Referências Bibliográficas

[1] AITKEN, A. C. **Determinantes y Matrices**. Dossat, Madrid, 1939.

[2] BOLDRINI, J. L.; COSTA, S. I. R.; RIBEIRO, V. L. F. F.; WETZLER, H. G. **Álgebra Linear**. Harbra, São Paulo, 1978.

[3] CALLIOLI, C. A.; DOMINGUES, H. H.; COSTA, R. C. F. **Álgebra Linear e Aplicações**. Atual, São Paulo, 1989.

[4] DE ALENCAR FILHO, E. **Elementos de Análise Algébrica**. Nobel, São Paulo, 1964.

[5] DE MENEZES, D. L. **Abecedário da Álgebra**. Nobel, São Paulo, 1971.

[6] GONÇALVES, A.; DE SOUZA, R. M. L. **Introdução à Álgebra Linear**. Edgard Blucher, São Paulo, 1977.

[7] HEFEZ, A.; DE SOUZA FERNANDEZ, C. **Introdução à Álgebra Linear**. SBM, Rio de Janeiro, 2012.

[8] KLEIN, F. **Matematica elemental - Desde un punto de vista superior - Vol. I**. Nuevas Gráficas, Madrid.

[9] KUROSCH, A. G. **Curso de Álgebra Superior**. Mir, Moscou, 1968.

[10] LIMA, E. L. **Álgebra Linear**. Impa, Rio de Janeiro, 2004.

[11] LIPSCHUTZ, S. **Álgebra Linear**. MacGraw-Hill, Rio de Janeiro, 1980.

[12] MORGADO, A. C.; JÚDICE, E. D.; WAGNER, E.; LIMA, E. L.; DE CARVALHO, J. B. P.; CARNEIRO, J. P. Q.; GOMES, M. L. M.; CARVALHO, P. C. P. **Exame de textos: Análise de livros de Matemática para o ensino médio**. SBM, Rio de Janeiro, 2001.

[13] MUIR, T. **The Theory of Determinants in the Historical Order of Development - vol.1**. MacMillan, London, 1906.

[14] NACHBIN, L. **Introdução à Álgebra**. MacGraw-Hill, Rio de Janeiro, 1971.

[15] NETTO, F. A. L. **Teoria Elementar dos Determinantes**. Nobel, São Paulo, 1958.

[16] SCIENCES, L. D. **Oeuvres Completes D'Augustin Cauchy**. Gauthier-Villars, France, 1905.

[17] SERRÃO, A. N. **Análise Algébrica**. Globo, Porto Alegre, 1945.