



ALDI ALVINO RODRIGUES

**GEOMETRIA PROJETIVA NA EDUCAÇÃO BÁSICA**

**Santo André, 2019**





**UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC**

**PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM MESTRADO PROFISSIONAL EM  
MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL**

**ALDI ALVINO RODRIGUES**

**GEOMETRIA PROJETIVA NA EDUCAÇÃO BÁSICA**

**Orientador: Prof. Dr. Márcio Fabiano da Silva**

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa  
de Pós Graduação em Mestrado Profissional em  
Matemática em Rede Nacional para obtenção do  
título de Mestre

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE A VERSÃO FINAL DA DISSERTAÇÃO  
DEFENDIDA PELO ALUNO ALDI ALVINO RODRIGUES,  
E ORIENTADA PELO PROF. DR. MÁRCIO FABIANO DA SILVA.

**SANTO ANDRÉ, 2019**

**Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do ABC**  
Elaborada pelo Sistema de Geração de Ficha Catalográfica da UFABC  
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Rodrigues, Aldi Alvino  
Geometria Projetiva na Educação Básica / Aldi Alvino Rodrigues. — 2019.

110 fls.

Orientador: Márcio Fabiano da Silva

Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do ABC, Mestrado  
Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Santo  
André, 2019.

1. Geometria Projetiva. 2. Perspectiva. 3. Projetividade. 4. Razão  
Cruzada. 5. Cônicas. I. Silva, Márcio Fabiano da. II. Mestrado Profissional  
em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, 2019. III. Título.

**Este exemplar foi revisado e alterado em relação à versão original, de acordo com as observações levantadas pela banca no dia da defesa, sob responsabilidade única do autor e com a anuência de seu orientador.**

Santo André, 26 de fevereiro de 2019.

Assinatura do autor: \_\_\_\_\_

*AD.*

Assinatura do orientador: \_\_\_\_\_

*Márcio Fabiano da Silva*



**MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO**  
**Fundação Universidade Federal do ABC**  
**Programa de Pós-Graduação em Mestrado Profissional em Matemática**  
**em Rede Nacional**

Avenida dos Estados, 5001 – Bairro Santa Terezinha – Santo André – SP  
CEP 09210-580 · Fone: (11) 4996-0017  
profmat@ufabc.edu.br

**FOLHA DE ASSINATURAS**

Assinaturas dos membros da Banca Examinadora que avaliou e aprovou a Defesa de Dissertação de Mestrado do candidato Aldi Alvino Rodrigues, realizada em 28 de novembro de 2018:

*Márcio Fabiano da Silva*

Prof.(a) Dr.(a) **Márcio Fabiano da Silva** (Universidade Federal do ABC) – Presidente

*Sinue Dayan Barbero Lodovici*

Prof.(a) Dr.(a) **Sinue Dayan Barbero Lodovici** (Universidade Federal do ABC) – Membro Titular

*Alexandre Lymberopoulos*

Prof.(a) Dr.(a) **Alexandre Lymberopoulos** (Universidade de São Paulo) – Membro Titular

Prof.(a) Dr.(a) **Rafael de Mattos Grisi** (Universidade Federal do ABC) – Membro Suplente

Prof.(a) Dr.(a) **Barbara Corominas Valerio** (Universidade de São Paulo) – Membro Suplente

---

Dedico este trabalho às minhas queridas filhas  
Larissa e Valentina





---

## **AGRADECIMENTOS**

---

Agradeço a meus pais Alvino e Alaide, minha esposa Daniela e minha irmã Aracele pelo grande apoio e carinho durante esse projeto em minha vida.

Ao meu orientador Márcio Fabiano da Silva, pela paciência e dicas valiosas.

À Capes pelo apoio financeiro.



---

*“Na vida, não existe nada a temer, mas a entender.”*

(Marie Curie)



---

## RESUMO

---

Este trabalho tem como objetivo apresentar alguns resultados da Geometria Projetiva de modo que possa ser apreciado por alunos do ensino médio. Uma das diferenças com a geometria euclidiana está no fato de que, na geometria projetiva, as retas paralelas não existem. Focaremos no conceito de perspectiva e projetividade (transformações projetivas) apresentando tópicos de geometria projetiva analítica para demonstrar teoremas famosos como o de Desargues e Pappus. Traremos ainda definições, do ponto de vista projetivo, para as cônicas e, finalmente, dez atividades para consolidação dos temas abordados.

**Palavras-chave:** Perspectiva, projetividade, razão cruzada.



---

## ABSTRACT

---

This work aims to present some results of Projective Geometry so that it can be appreciated by high school students. One of the differences with Euclidean geometry lies in the fact that, in projective geometry, parallel lines do not exist. We will focus on the concept of perspective and projectivity (projective transformations) by presenting topics of analytical projective geometry to demonstrate famous theorems such as Desargues and Pappus. We will also present definitions, from a projective point of view, the conics and, finally, ten activities to consolidate the themes studied.

**Keywords:** Perspective, projectivity, cross ratio.





---

# CONTEÚDO

---

INTRODUÇÃO	1
1 PERSPECTIVA E GEOMETRIA PROJETIVA	7
1.1 O estudo de geometria . . . . .	7
1.2 Um modelo de perspectiva . . . . .	8
1.3 Perspectiva Plana . . . . .	17
2 GEOMETRIA PROJETIVA ANALÍTICA	27
2.1 Coordenadas Homogêneas . . . . .	27
2.2 Pontos ideais e retas ideais . . . . .	28
2.3 Propriedades elementares de pontos e retas . . . . .	31
2.4 Os teoremas de Desargues e Pappus . . . . .	35
3 TRANSFORMAÇÕES PROJETIVAS	41
3.1 Perspectivas de retas e razão cruzada . . . . .	41
3.2 Transformações projetivas no plano . . . . .	51
3.2.1 Isometrias . . . . .	54
3.3 Cônicas . . . . .	61
4 GEOMETRIA PROJETIVA NA ESCOLA	71
4.1 Atividade 1 . . . . .	71
4.2 Atividade 2 . . . . .	72
4.3 Atividade 3 . . . . .	73
4.4 Atividade 4 . . . . .	76
4.5 atividade 5 . . . . .	79
4.6 Atividade 6 . . . . .	80
4.7 Atividade 7 . . . . .	81
4.8 Atividade 8 . . . . .	82
4.9 Atividade 9 . . . . .	82
4.10 Atividade 10 . . . . .	84
4.11 Atividade 11 . . . . .	84

A	APÊNDICE: UM POUCO DE MATEMÁTICA ELEMENTAR	89
A.1	Matrizes e suas operações . . . . .	89
A.2	Determinantes . . . . .	93
A.3	Sistemas lineares . . . . .	96
A.4	Equação da reta no espaço . . . . .	100
A.5	Alguns resultados da Geometria Plana . . . . .	101
	Bibliografia	109

---

## INTRODUÇÃO

---

A origem da geometria projetiva podem ser encontradas na preocupação do homem de representar objetos tridimensionais num plano. Ao contrário das outras geometrias (euclidiana, hiperbólica etc), no entanto, a geometria projetiva originou-se de problemas mais estéticos do que práticos e aqueles que contribuíram para seu desenvolvimento eram artistas e não matemáticos.

De acordo com [14] embora os pintores da Grécia e de Roma antigas tivessem tentado, com algum sucesso dar a seu trabalho um efeito tridimensional, eles estavam mais preocupados com temas religiosos que eram mais místicos do que realistas, pintavam com uma noção bem limitada de profundidade, até que na época do Renascimento, os artistas procuraram tornar seus trabalhos mais naturais e realistas. Posteriormente, no século XV, houve mais progressos na representação realista de cenas tridimensionais na tela bidimensional do pintor, avançando no desenvolvimento de uma teoria matemática da perspectiva e os homens que a criaram, embora bastante competentes na matemática da sua época, eram principalmente artistas. Albrecht Dürer, um dos artistas renascentistas alemães dessa época, desenvolveu máquinas e ferramentas para desenhar em perspectiva, que tinham a finalidade de facilitar os desenhos de objetos reais em uma superfície plana.

A figura 1 mostra o artista fazendo um retrato utilizando o método do vidro, esse dispositivo permitia aos artistas fazer uma imagem mais precisa de objetos ou cenas que visualizavam.

Na figura 2 o desenho sendo produzido por dois operadores, um que define os pontos e o outro que estabelece suas coordenadas.

Dominada a técnica de perspectiva nas pinturas, houve artistas que brincavam com elas, como Escher, que criava pinturas cujas imagens eram impossíveis de representar a realidade. Observe a figura 3 onde não sabemos se a água está caindo ou subindo,



Figura 1: Artista desenhando com a ajuda de um vidro quadriculado.

Disponível em <http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm2000/icm33/Durer2.htm>.

Acesso em 15/02/2019

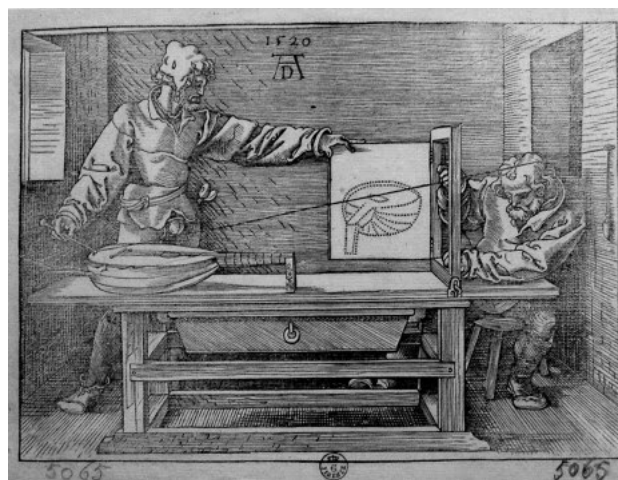


Figura 2: Máquina de perspectiva.

Disponível em

<https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/6/69/358durer.jpg>

Acesso em 15/02/2019

enquanto que na figura 4, não é possível determinar se as pessoas na escada estão subindo ou descendo.

Ao prestarmos atenção numa simples imagem frontal de uma linha de trem, observamos que os trilhos não estão paralelos, parece que eles se intersectam em algum lugar, assim como ocorre com as calçadas de uma rua e por mais que nos aproximamos dessa intersecção (numa situação real), nunca chegamos a ela, assim, podemos dizer que os trilhos se intersectam no infinito (no horizonte). Esse exemplo ilustra bem um conceito importante: o paralelismo de retas, que não existe na geometria projetiva. Essas retas,



Figura 3: Waterfall.

Disponível em [https://en.wikipedia.org/wiki/M.\\_C.\\_Escher#/media/File:Escher\\_Waterfall.jpg](https://en.wikipedia.org/wiki/M._C._Escher#/media/File:Escher_Waterfall.jpg). Acesso em 15/02/2019

que são paralelas na geometria euclidiana, se intersectam em um ponto denominado ponto de fuga correspondente a um ponto no infinito no plano geométrico, que é o plano onde os objetos reais estão apoiados. Plano geométrico e objetos apoiados nele são representados no plano visual, denominado plano imagem e no presente trabalho, analisaremos a relação entre esses planos no capítulo um. Aqui nossa fonte de pesquisa encontra-se, principalmente em [12] e [14].

No capítulo dois apresentamos alguns tópicos de geometria projetiva analítica, onde será definido um importante recurso que auxilia na demonstração de alguns teoremas: o princípio da dualidade. São demonstrados dois teoremas famosos da geometria projetiva que são o de Desargues e o de Pappus. Os resultados deste capítulo apoiam-se na bibliografia anterior.

As transformações projetivas são o tema do terceiro capítulo. Iniciamos esse estudo definindo perspectivas e projetividades, pois vimos nos capítulos anteriores que apesar de distância e ângulos serem deformados, existe uma importante relação que não se perde nas transformações projetivas, que é a razão cruzada entre quatro pontos. Com essa ferramenta podemos obter exatamente a distância entre imagens de pontos, isso significa que podemos determinar com exatidão a imagem de um objeto. Para nortear

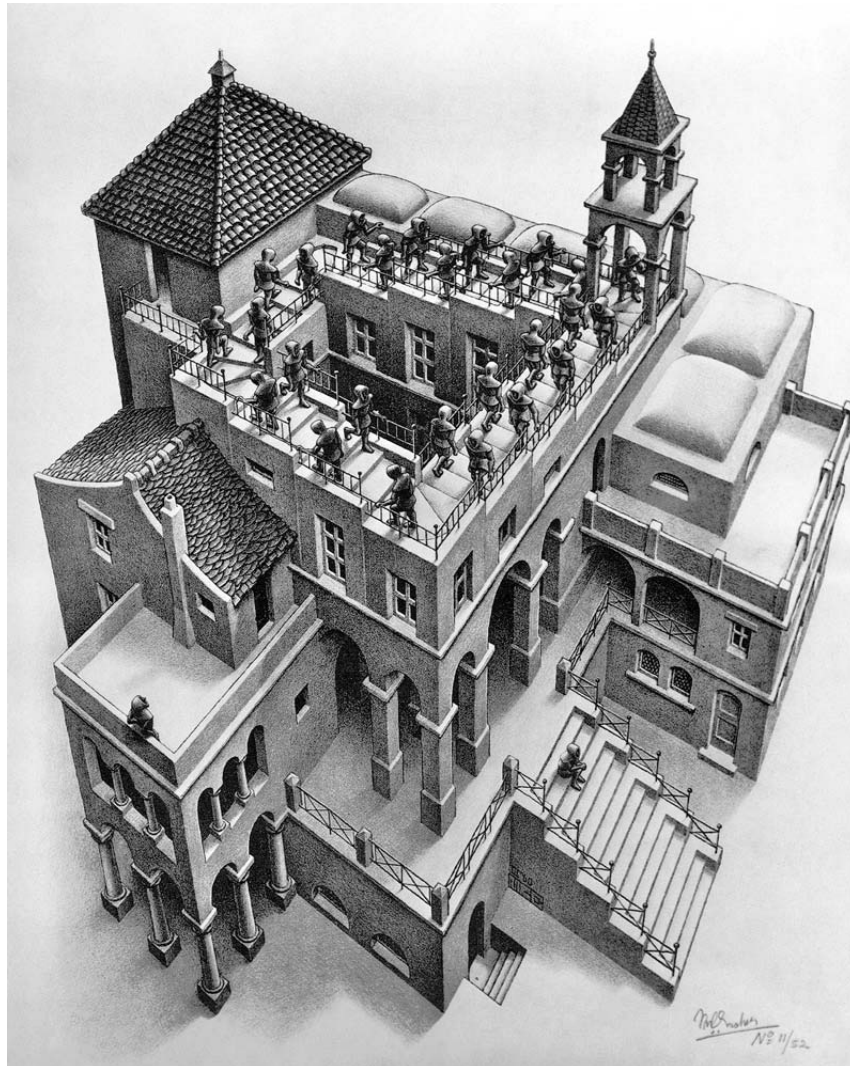


Figura 4: Ascending and Descending.

Disponível em

[https://en.wikipedia.org/wiki/Ascending\\_and\\_Descending#/media/File:Ascending\\_and\\_Descending.jpg](https://en.wikipedia.org/wiki/Ascending_and_Descending#/media/File:Ascending_and_Descending.jpg). Acesso em 15/02/2019

o desenvolvimento do capítulo tomamos como base o famoso livro [5], adicionando alguns teoremas ou demonstrando-os de outra forma, como é o caso do teorema fundamental da geometria projetiva para retas e planos, onde foram utilizadas as notas de aula do professor Francisco Rui Tavares de Almeida, usamos estas notas, [8] e [9], no desenvolvimento do tópico sobre isometrias. Encerramos o capítulo com as cônicas, definindo sob um ponto de vista projetivo, apresentamos os teoremas de Pascal e o seu dual (teorema de Brianchon) para que, com o auxílio desses, pudéssemos construir

cônicas com um algoritmo mostrado em [2]. A bibliografia utilizada aqui foi [5], [4]. Os lemas da geometria plana utilizados na demonstração foram encontrados em [6].

O quarto capítulo é um conjunto de dez problemas que envolvem os principais resultados no presente trabalho. Acreditamos que suas resoluções contribuirão de forma positiva para o completo entendimento do que foi abordado nos três primeiros capítulos. Finalmente, no apêndice, mostramos conteúdos de matemática elementar que são pré-requisitos para um melhor entendimento do conteúdo. Para escrevê-lo usamos [7], [6] e [11], este último foi usado para a demonstração do teorema de Tales.





---

## PERSPECTIVA E GEOMETRIA PROJETIVA

---

### 1.1 O ESTUDO DE GEOMETRIA

Quando se fala em geometria, geralmente se pensa em geometria euclidiana. A maioria das pessoas se surpreendem ao saber que existem várias geometrias. A geometria estudada nesta dissertação de mestrado é a geometria projetiva.

Na geometria euclidiana estuda-se as propriedades de objetos (planos e espaciais) que são invariantes por rotações, translações e reflexões, discutem-se os conceitos de congruência e paralelismo. Na geometria projetiva estuda-se a maneira como os objetos são vistos, por isso ela também é conhecida como geometria da visão. Os exemplos a seguir destinam-se a esclarecer a distinção entre o formato de um objeto e a maneira como ele é visto. Considere um par de trilhos de trem que desaparecem da visão no horizonte. Se você estivesse de pé no meio dos trilhos e olhando para o horizonte você veria o que está ilustrado na figura 5.

Observe que embora, na realidade, os trilhos sejam paralelos, na figura 5, as retas que os representam convergem para um ponto no horizonte. Além disso, embora os comprimentos de todos os dormentes e a distância entre eles sejam aproximadamente iguais, na imagem eles parecem diminuir à medida que você se aproxima do horizonte. Finalmente, apesar dos quatro ângulos formados por quaisquer par de dormentes e trilhos (formando um retângulo) serem aproximadamente ângulos retos, não parecem ser congruentes na imagem.

O aro da xícara de café ilustrado na figura 6 é circular, mas na figura ele parece com uma elipse.



Figura 5: trilhos paralelos.

Disponível em <https://www.publicdomainpictures.net/pt/view-image.php?image=23982&picture=trilhos-de-trem>. Acesso em 15/02/2019



Figura 6: vista lateral da aba da xícara.

Disponível em <https://pixabay.com/pt/vectors/copa-caf%C3%A9-bebidas-cer%C3%A2mica-quente-156743/>. Acesso em 15/02/2019

No exemplo dos trilhos da ferrovia, os comprimentos, ângulos e paralelismo são distorcidos, assim como na imagem do tabuleiro de xadrez ilustrado na figura 7.

Embora os exemplos anteriores constituem o que chamamos de perspectiva, objeto de estudo da próxima seção, nesse trabalho focaremos na imagem de objetos planos como retas, polígonos e cônicas que pertençam a um plano denominado *plano objeto*.

## 1.2 UM MODELO DE PERSPECTIVA

Em perspectiva (ver figura 8), um objeto é desenhado em uma tela como se fosse transparente através da qual o desenhista vê um quadrado. Os raios de luz de cada

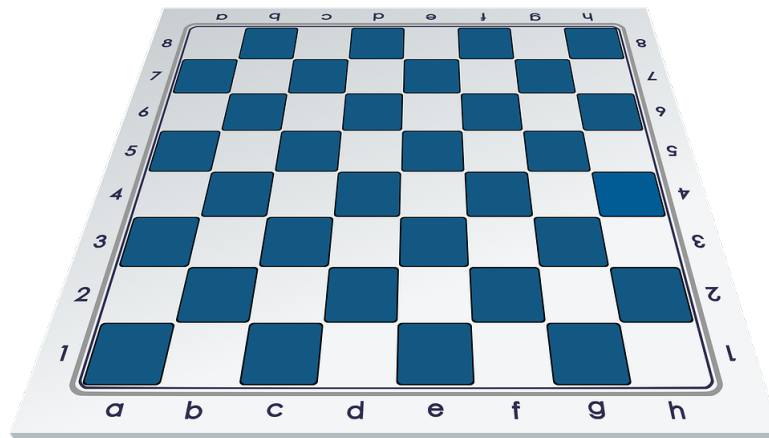


Figura 7: tabuleiro de xadrez.

Disponível em <https://pixabay.com/pt/vectors/xadrez-tabuleiro-de-xadrez-placa-2154428/>.

Acesso em 15/02/2019

ponto do quadrado passam pela tela e convergem para o olho do observador. O conjunto de pontos em que esses raios de luz se encontram com a tela é o que o artista desenha. Conforme ilustrado na seção anterior, a perspectiva distorce comprimentos, ângulos, paralelismo e formatos. No entanto, o olho e a mente automaticamente aceitam e sintetizam essa perspectiva em uma impressão de realidade.

Na verdade, o que chamamos de perspectiva é mais propriamente a perspectiva linear que consiste na representação de um objeto do espaço tridimensional num plano, chamado de plano imagem (ou quadro). As teorias da perspectiva que não sejam a perspectiva linear podem ser obtidas substituindo o plano de visão por outra superfície (como parte de uma esfera, por exemplo) ou substituindo projetores lineares por projetores curvos. Não abordaremos esses modelos de perspectivas, pois não cabe no conteúdo do ensino médio.

Como podemos perceber, pela figura 8, há uma correspondência entre os pontos do objeto e os pontos da imagem, que é estabelecida associando a cada ponto do objeto o ponto de interseção do plano da imagem com a linha que passa pelo ponto do objeto e o olho do observador.

Para que uma imagem pareça mais real considere, por exemplo, um par de trilhos que desaparecem conforme seus dormentes ficam mais distantes, vemos na figura 9 a

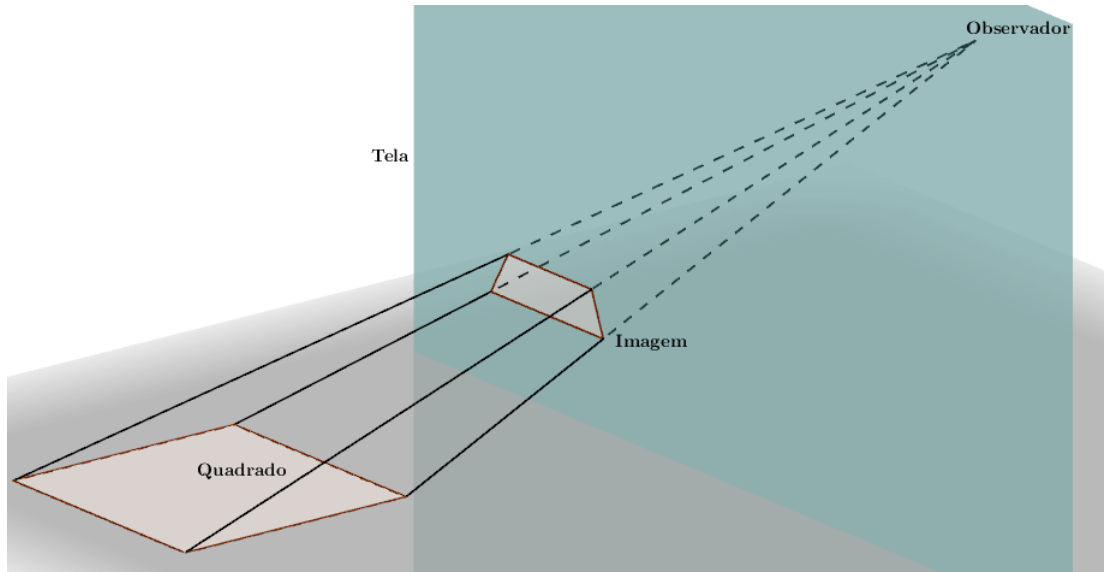


Figura 8: Olhando um quadrado em perspectiva.

representação de uma linha de trem que o desenhista acrescenta um ponto imagem, esse ponto é conhecido como ponto de fuga ( $F$ ), que é aquele ponto em uma imagem na qual duas linhas paralelas na cena parecem se encontrar.

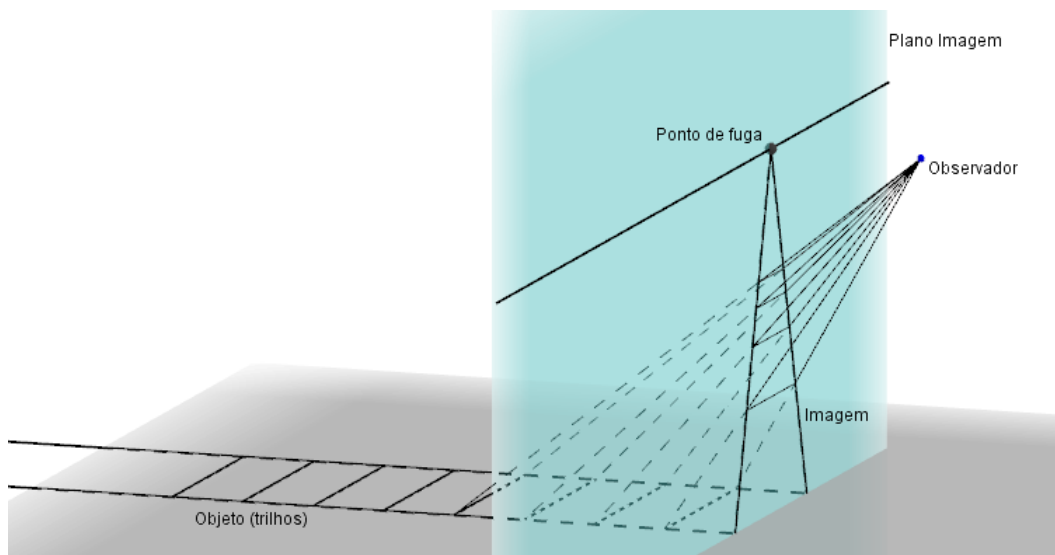


Figura 9: O ponto de fuga para uma imagem de trilhos de trem.

Alguns outros elementos da perspectiva que merecem destaque são os seguintes:

- a intersecção ortogonal entre o plano horizontal  $\pi_o$  (que contém o objeto real) e o plano imagem (vertical)  $\pi_i$  é chamada de linha de terra.
- o ponto que representa o olho do observador ( $C$ ) é o centro da perspectiva ou olho (que não está no plano imagem)
- a reta que une o centro de perspectiva  $C$  a qualquer ponto  $P$  do plano  $\pi_o$  é chamada de reta de projeção (ou reta de vista). Esta reta intersecta o plano  $\pi_i$  em um ponto  $P'$  que é a imagem do ponto  $P$
- o plano horizontal  $\pi_o$  em que estão apoiados o objeto e o observador é chamado de plano geometral horizontal, caso o objeto seja plano e esteja contido nele o chamaremos de plano objeto
- traçando por  $C$  um plano paralelo ao plano  $\pi_o$  e fazendo a intersecção com plano  $\pi_i$ , determinamos a reta  $f$ , chamada de reta de fuga (ou reta do horizonte). Ela é formada por pontos do plano  $\pi_i$  que não são imagens de nenhum ponto do plano  $\pi_o$ . Sobre a reta de fuga, o ponto de fuga é aquele para o qual convergem as retas paralelas do plano geometral, observe que diferentes direções de conjuntos de retas paralelas determinam diferentes pontos de fuga
- traçando por  $C$  um plano paralelo a  $\pi_i$  determinamos uma reta  $v$  que é a intersecção deste plano com o plano  $\pi_o$ . A reta  $v$  é formada por pontos do plano geometral que não têm imagem no plano  $\pi_i$

---

**Exemplo 1.1.** Considere o plano objeto e o plano imagem como sendo os planos de equação  $z = 0$  e  $y = 0$ , respectivamente, no espaço euclidiano com coordenadas  $(x, y, z)$ . Podemos determinar as coordenadas de  $P'$  sabendo as coordenadas do centro de perspectiva e de cada ponto  $P$  do objeto:

A reta que passa por dois pontos  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  e  $P_1(x_1, y_1, z_1)$  no espaço tem como equação:

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0}$$

Supondo que o centro de perspectiva seja o ponto  $C = (0, 2, 3)$ , a linha de terra seja o eixo  $x$ , a linha de fuga  $f$  é a reta  $y = 0, z = 3$ , um dos pontos de fuga é  $F = (0, 0, 3)$ . A reta dos pontos do plano objeto que não têm imagem é a reta  $y = 2, z = 0$ . Finalmente,

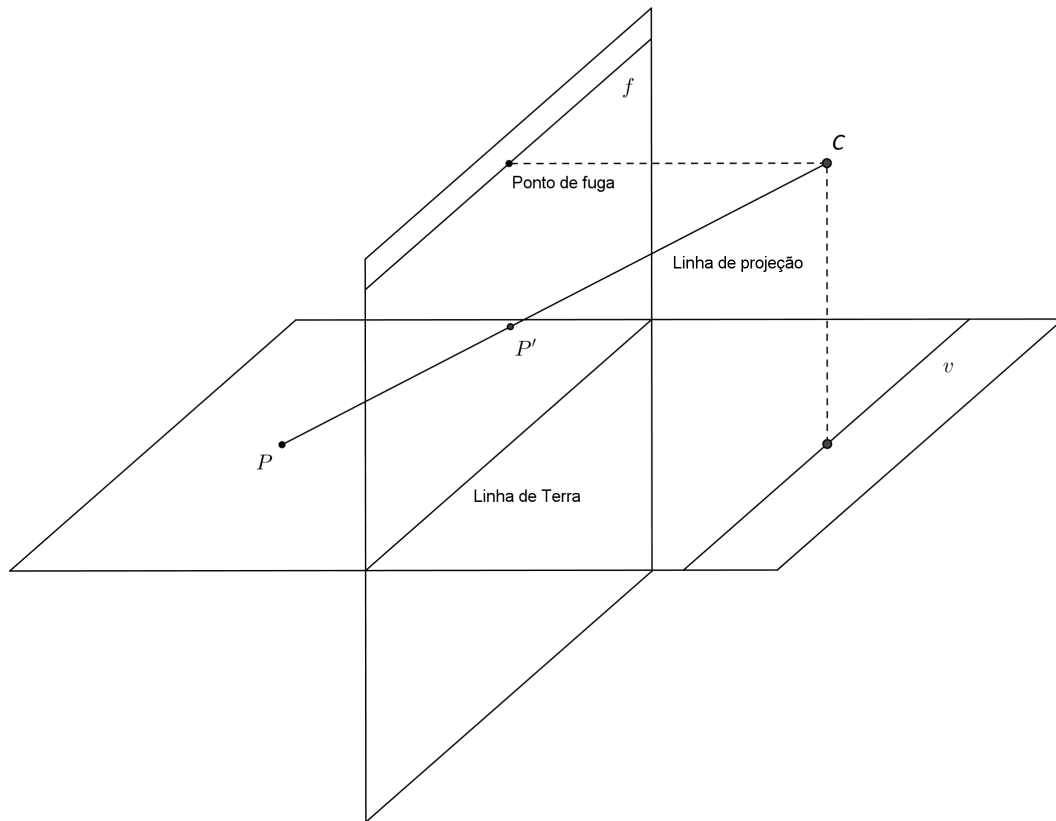


Figura 10: Elementos de perspectiva

denotando as coordenadas de um ponto do plano objeto por  $P = (X, Y, 0)$ , obtemos a equação da linha de projeção  $\overleftrightarrow{CP}$  como sendo:

$$\frac{x - 0}{X - 0} = \frac{y - 2}{Y - 2} = \frac{z - 3}{0 - 3}$$

Para determinar as coordenadas do ponto imagem  $P'$ , basta encontrar o ponto de interseção da reta de projeção  $\overleftrightarrow{CP}$  com o plano imagem. Para fazer isto notamos que as coordenadas dos pontos que pertencem ao plano imagem são dadas por  $(X', 0, Z')$ , logo:

$$X' = \frac{-2X}{Y-2} \quad \text{e} \quad Z' = \frac{3Y}{Y-2}$$

ou seja

$$P' = \left( \frac{-2X}{Y-2}, 0, \frac{3Y}{Y-2} \right)$$

Neste modelo de perspectiva, o ponto de fuga é o limite das imagens que o observador pode enxergar à medida que os pontos do plano objeto ficam cada vez mais distantes do plano imagem. Ele pode ser localizado geometricamente como a seguir:

Sabemos que por uma reta e um ponto fora dela passam um único plano. Assim, como ilustrado na figura 11, para cada uma das retas paralelas  $l_1$  e  $l_2$ , ortogonais à linha de terra, no plano  $\pi_o$ , existe um único plano  $\pi_1$  e  $\pi_2$ , respectivamente, que contém o ponto representado pelo olho do observador. Uma vez que  $\pi_1$  e  $\pi_2$  contêm um ponto comum (ou seja, o olho), a sua intersecção é uma reta  $l$  que é paralela a  $l_1$ ,  $l_2$  e ao plano do objeto. O ponto em que  $l$  encontra o plano imagem é o ponto de fuga  $F$  associado a  $l_1$  e  $l_2$ .

Podemos obter a imagem de uma reta  $r$ , não paralela à linha de terra, com seu respectivo ponto de fuga  $F$  da seguinte maneira:

Traçamos a reta  $r'$  paralela à reta  $r$  passando pelo ponto  $C$ , temos que  $r' \cap \pi_i = F$ , e a intersecção do plano que contém  $r$  e  $r'$  com o plano imagem é a imagem de  $r$ , como na figura 12.

Dessa forma podemos enunciar:

**Teorema 1.1.** *Retas paralelas no plano objeto, têm como imagem retas que passam por um único ponto de fuga.*

*Demonstração.* Sejam  $r_1, r_2, r_3, \dots, r_n$  retas paralelas distintas no plano objeto, e  $\pi_{r_i}$  os planos determinados por  $r_i$ ,  $i = 1, 2, 3, \dots, n$ , e o ponto  $C$ , como na figura 13 segue do paralelismo das retas  $r_1, r_2, r_3, \dots, r_n$  que

$$\pi_{r_1} \cap \pi_{r_2} \cap \pi_{r_3} \cap \dots \cap \pi_{r_n} = t$$

em que  $t$  é a única reta paralela a  $r_k$ ,  $k = 1, \dots, n$  que passa por  $C$ .

Sendo

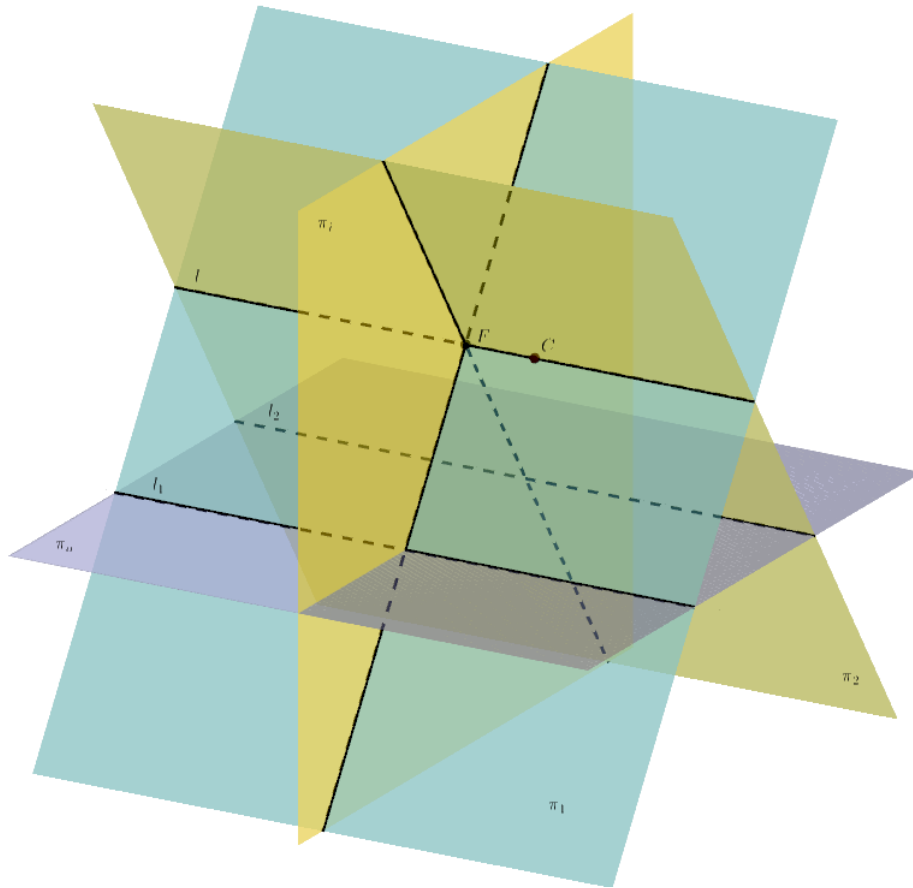


Figura 11: Localização do ponto de fuga geometricamente.

$$\{F\} = t \cap \pi_i$$

temos que as retas imagens de cada reta  $r_k, k = 1, \dots, n$  passam por  $F$ .

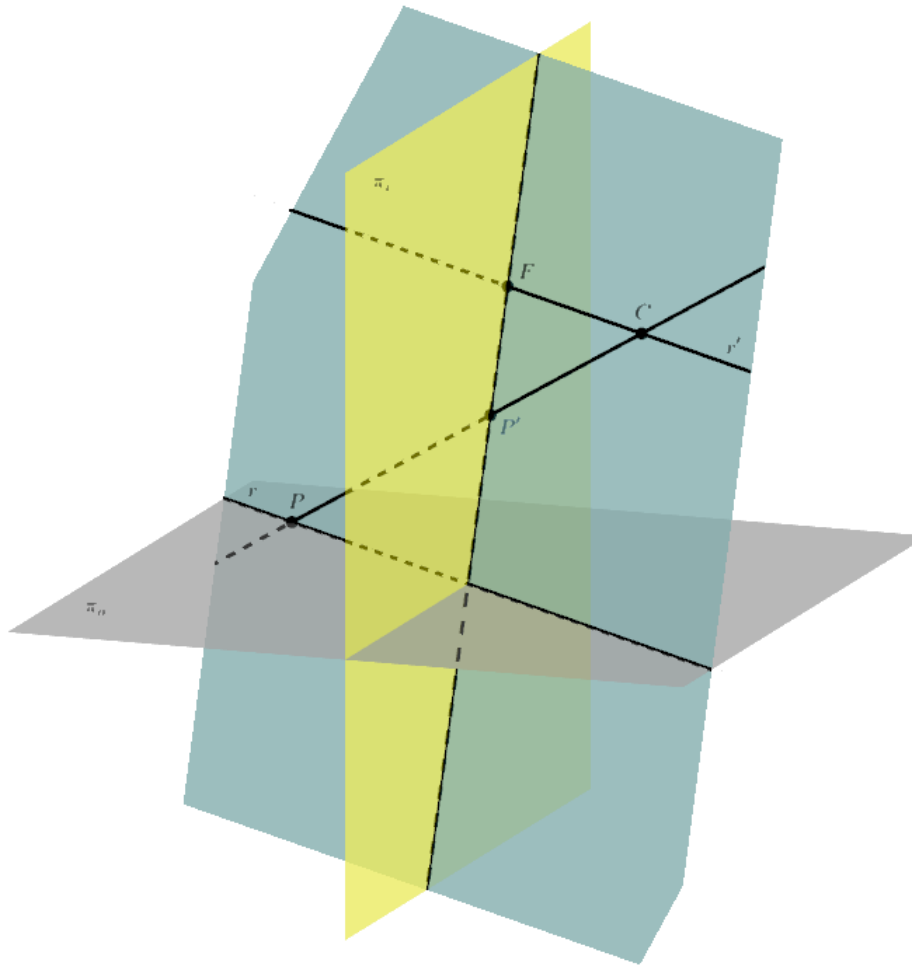
□

Caso essas retas paralelas sejam perpendiculares à linha de terra, diremos que o ponto de fuga obtido por elas é o ponto de **fuga principal** ( $F_p$ ).

**Exemplo 1.2.** Vamos determinar a imagem da reta  $r_o$  de equação  $4x - 3y = 12$  cujo centro de perspectiva é o ponto  $C = (0, 2, 3)$ .

Nas hipóteses do exemplo 1.1, tem-se:



Figura 12: Imagem de uma reta  $r$ .

$$X' = \frac{-2X}{Y-2} \text{ e } Z' = \frac{3Y}{Y-2} \implies$$

Assim,

$$X = \frac{-3X'}{Z'-3} \text{ e } Y = \frac{2Z'}{Z'-3}$$

Substituindo  $X$  e  $Y$  na equação de  $r_o$ , obtemos a reta imagem  $r_i$  de equação:

$$2X' + 3Z' = 6$$

Observe que  $r_o$  contém o ponto de coordenada  $(\frac{9}{2}, 2, 0)$ , que é um ponto do plano objeto que não tem imagem. A semi-reta dos pontos de  $r_o$  com  $Y > 2$  é projetada na

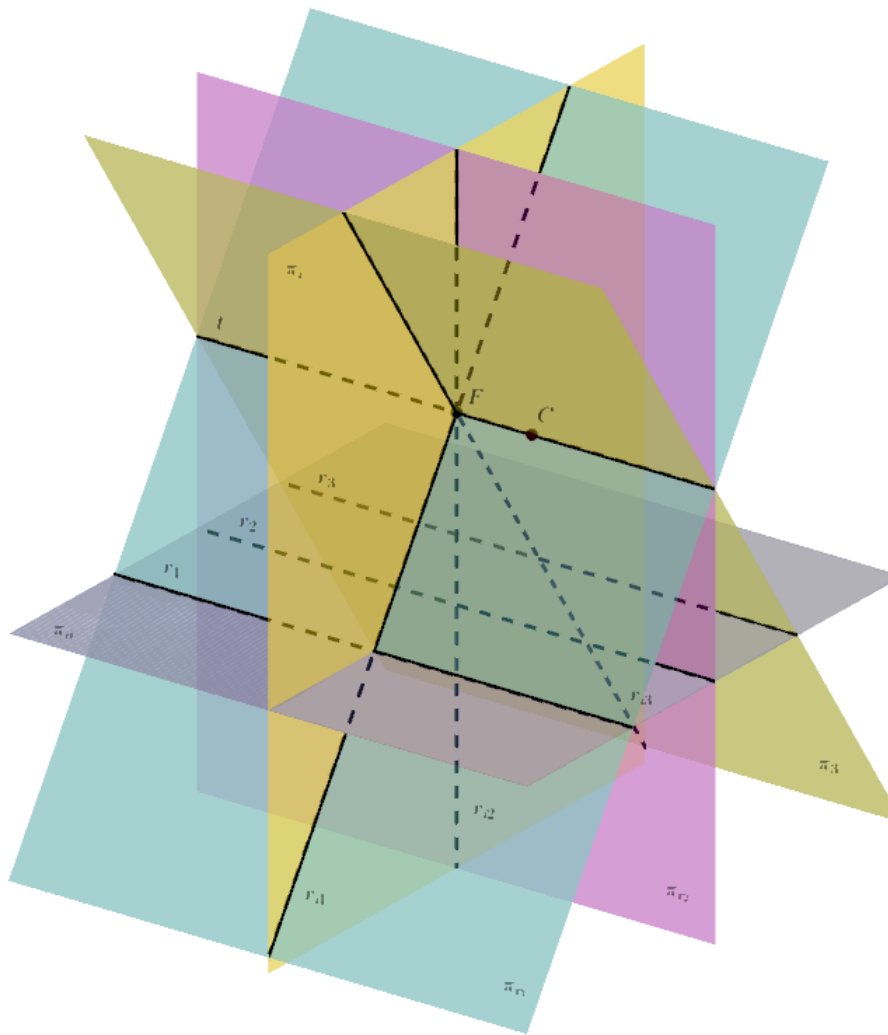


Figura 13: Construção do ponto de fuga  $F$ .

semi-reta dos pontos de  $r_i$  com  $Z' > 3$  e a semi-reta dos pontos de  $r_0$  com  $Y < 2$  é projetada na semi-reta dos pontos de  $r_i$  com  $Z' < 3$ . Além disto, se  $Y \rightarrow +\infty$ , temos que  $Z' \rightarrow 3$  (com  $Z' > 3$ ) e, também, se  $Y \rightarrow -\infty$  temos que  $Z' \rightarrow 3$  (com  $Z' < 3$ ).

Neste exemplo, a reta  $v$  é dada por  $y = 2$  do plano objeto  $\pi_0$  de modo que  $v$  divide  $\pi_0$  em dois semi-planos,  $\pi_{0_1}$  e  $\pi_{0_2}$  e também a reta  $f$ , de equação  $z' = 3$  no plano  $\pi_i$  divide o plano  $\pi_i$  em dois semi-planos,  $\pi_{i_1}$  e  $\pi_{i_2}$  de tal forma que a perspectiva estabelece uma bijeção entre  $\pi_{0_1}$  e  $\pi_{i_1}$  e outra bijeção entre  $\pi_{0_2}$  e  $\pi_{i_2}$ . Os pontos da reta  $v$  e também os pontos da reta  $f$  ficam sem correspondentes euclidianos nesta perspectiva. Isso é resolvido completando cada um dos planos objeto e imagem com uma reta

de pontos ideais. A reta de pontos ideais do plano objeto ficará em correspondência biunívoca com os pontos da reta  $f$  e a reta de pontos ideais do plano imagem ficará em correspondência biunívoca com os pontos da reta  $v$ .

---

### 1.3 PERSPECTIVA PLANA

Nesta seção mostraremos como mapear a perspectiva do plano objeto ( $\pi_o$ ) sobre o plano imagem ( $\pi_i$ ) quando este for rotacionado em torno da linha de terra ( $t$ ) até que ambos fiquem coincidentes ( $90^\circ$  no sentido anti-horário para o lado oposto do centro de perspectiva).

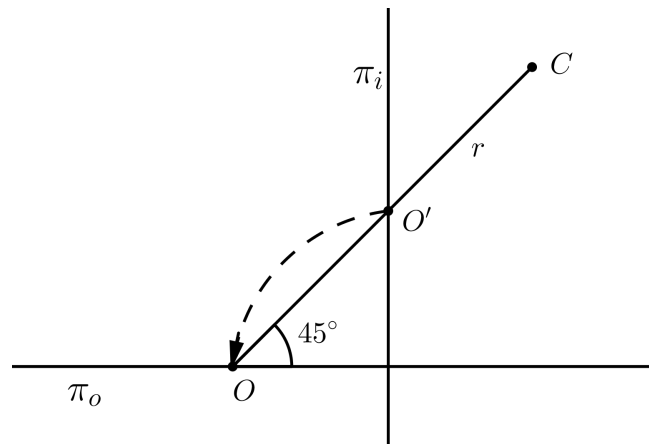


Figura 14: Rotação do plano imagem.

Evidentemente, após essa rotação, um ponto  $P$ , sua imagem  $P'$  e o centro de perspectiva  $C$  não serão colineares e não será possível determinar  $P'$  por projeção na reta de perspectiva.

Considere um plano  $\pi$  que seja perpendicular aos planos  $\pi_i$ ,  $\pi_o$  que passa pelo centro de perspectiva  $C$  e seja  $r$  a reta de perspectiva que forma com  $\pi_o$  um ângulo de  $45^\circ$ , sendo  $\{O\} = r \cap \pi_o$ , após a rotação teremos  $O = O'$ , onde  $O'$  é a imagem de  $O$  em  $\pi_i$ .

Seja  $s \in \pi_o$  a reta que passa por  $O$  e por um ponto  $X \in t$  qualquer. Após tal rotação,  $s$  coincide com  $\overleftrightarrow{O'X}$ , pois  $O'$  coincide com  $O$  e a linha de terra  $t$  é fixa pela rotação. Porém os demais pontos de  $s$ , diferentes de  $O$  e  $X$  não são coincidentes com suas

imagens. Para a construção da imagem de um ponto  $P \in \pi_o$  deve ser dado, além do ponto  $O$  e da linha de terra  $t$ , um ponto  $Q \in \pi_o$ ,  $Q \neq O$   $Q'$  arbitrário e a imagem  $\tilde{Q}$  de  $Q'$  pela rotação.

O ponto  $\tilde{P}$  (imagem de  $P'$  pela rotação) pertence à reta  $\overleftrightarrow{O\tilde{P}}$ , pois essa reta possui dois pontos fixos ( $O$  e  $T$ ) que bastam para obter a imagem de  $\overleftrightarrow{O\tilde{P}}$ , suponha que a reta  $\overleftrightarrow{PQ}$  e a reta  $t$  não sejam paralelas e que  $\overleftrightarrow{PQ} \cap t = \{L\}$ , assim os pontos  $L$  e  $\tilde{Q}$  pertencem à imagem de  $\overleftrightarrow{P'Q'}$  pela rotação que é a reta  $\overleftrightarrow{L\tilde{Q}}$  e o ponto  $\tilde{P}$  também pertence à reta  $\overleftrightarrow{L\tilde{Q}}$ , logo  $\{\tilde{P}\} = \overleftrightarrow{O\tilde{P}} \cap \overleftrightarrow{L\tilde{Q}}$  como ilustrado na figura 15.

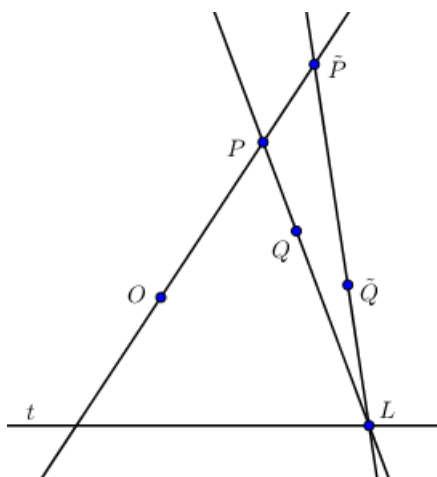


Figura 15: Construção da imagem (ponto  $\tilde{P}$ ) pela rotação da imagem  $P'$  de  $P$ .

Supondo agora que as retas  $\overleftrightarrow{PQ}$  e  $t$  sejam paralelas, podemos primeiro escolher um ponto  $Q_1$  tal que  $\overleftrightarrow{Q_1Q}$  não seja paralela a  $t$  e então usar a construção acima para encontrar a imagem  $\tilde{Q}_1$  de  $Q_1$  e, finalmente, determinar a imagem de  $P$  usando os pontos  $Q_1$  e  $\tilde{Q}_1$ .

A transformação acima é chamada de perspectiva plana, onde a reta invariante  $t$  é conhecida como eixo de transformação e o ponto invariante  $O$  é o centro de transformação.

Observe que se as retas  $\overleftrightarrow{OP}$  e  $\overleftrightarrow{QL}$  forem paralelas, a imagem do ponto  $P'$  não existe. Para determinar os pontos que não têm imagem, traçamos uma reta  $p$  através de  $O$  e uma reta passando por  $Q'$  paralela a  $p$  que intersecta  $t$  no ponto  $L$ , assim a intersecção da reta  $\overleftrightarrow{LQ}$  com a reta  $p$  é um ponto que não possui imagem (veja figura 16).

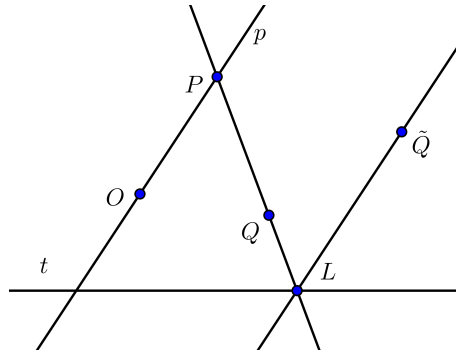


Figura 16: Construção de um ponto que não possui imagem.

Para determinarmos a reta  $v$ , traçamos a reta  $r$  perpendicular à reta  $t$  e que passa em  $P$ . A imagem da reta  $r$  será a reta  $\tilde{r}$  que passa por  $\tilde{P}$  e pela intersecção das retas  $r$  e  $t$ . Traçamos por  $O$  a reta  $s$ , paralela a  $\tilde{r}$ , e determinamos o ponto  $V$  que é a intersecção de  $r$  com  $s$ , assim, a reta  $v$  será a reta paralela a  $t$  que passa por  $V$  (veja figura 17).

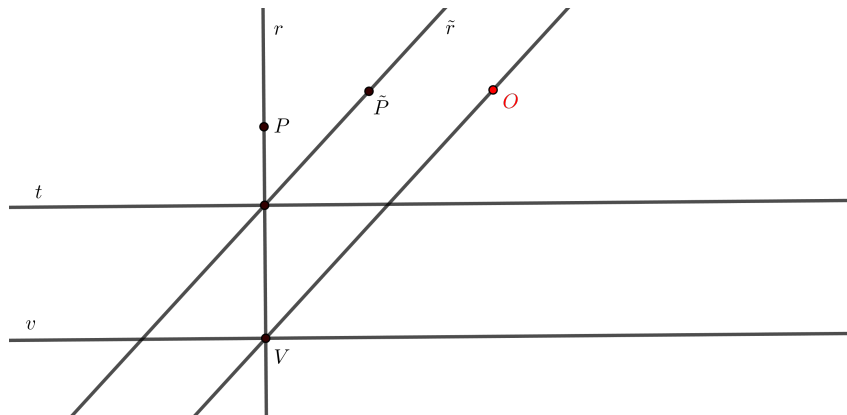


Figura 17: Construção da reta  $v$ .

A seguir veremos que é possível encontrar uma perspectiva plana na qual transforma um determinado quadrilátero em um quadrado ou uma elipse em um círculo.

Os teoremas abaixo nos auxiliarão a justificar essas construções. Com as convenções anteriores temos o seguinte resultado:

**Teorema 1.2.** *Seja  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma perspectiva plana cuja linha de terra é  $t$ , centro  $O$  e reta de fuga  $\tilde{f}$  em  $\pi_o$ , que é a imagem da reta de fuga  $f$  em  $\pi_i$  pela rotação de  $90^\circ$ .*

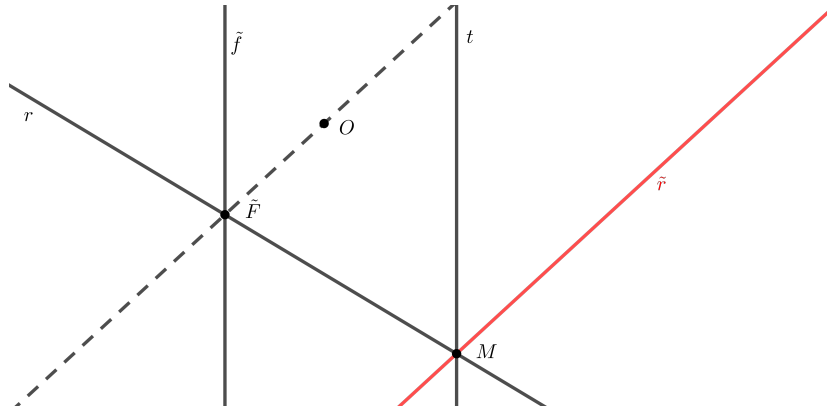


Figura 18: Imagem de uma reta arbitrária.

Então a imagem, por  $T$ , de uma reta arbitrária,  $r \in \pi_o$ , encontrando  $t$  em um ponto  $M$  e  $\tilde{f}$  em um ponto  $\tilde{F}$ , é a reta  $\tilde{r}$  paralela à reta  $\overleftrightarrow{O\tilde{F}}$  passando por  $M$  (figura 18).

*Demonstração.* Seja  $\tilde{r} = T(r)$ , suponha que  $\tilde{r}$  não seja paralela à reta  $\overleftrightarrow{O\tilde{F}}$ ; logo existiria um ponto  $P$  tal  $\{P\} = \overleftrightarrow{O\tilde{F}} \cap \tilde{r}$ . Neste caso  $P$  seria a imagem do ponto  $\tilde{F}$  ( $r \cap \tilde{f}$ ), o que é um absurdo pois os pontos de fuga não possuem imagem. Portanto a reta  $\tilde{r}$  deve ser paralela a  $\overleftrightarrow{O\tilde{F}}$ . Além disso passando pelo ponto  $M$  que é fixo,  $M \in r$  e  $\tilde{r} = T(r)$ , então  $M \in \tilde{r}$ . □

Afim de facilitar a notação chamaremos  $\tilde{X}$  de  $X$  e a imagem de um ponto  $X$  pela perspectiva plana de  $X'$  pois trataremos apenas de perspectiva plana.

**Teorema 1.3.** *Seja  $T$  uma perspectiva plana com o centro  $O$ , linha de fuga  $f$ , um ponto  $Q$ , sua imagem  $Q'$ , um ponto  $P$  arbitrário e o ponto  $F$  que é a interseção de  $f$  com a reta  $\overleftrightarrow{PQ}$ . Então  $P'$  (que é a imagem de  $P$  por  $T$ ) é a interseção da reta  $\overleftrightarrow{OP}$  com a reta paralela a  $\overleftrightarrow{OF}$  que passa por  $Q'$ .*

*Demonstração.* Temos que a imagem  $P'$  do ponto  $P$  por  $T$ ,  $P \neq Q$  e  $P \neq O$ , pertence à imagem da reta  $\overleftrightarrow{PQ}$  por  $T$  que, pelo teorema 1.2, é a reta paralela a  $\overleftrightarrow{OF}$  que passa por  $Q'$ . Além disso,  $P'$  também pertence à reta  $\overleftrightarrow{OP}$ , logo  $P'$  é a interseção de  $\overleftrightarrow{OP}$  com a reta paralela a  $\overleftrightarrow{OF}$  que passa por  $Q'$ . □

Podemos, agora, mostrar como transformar objetos com perspectiva plana, iniciando por um quadrilátero arbitrário em um paralelogramo:

Seja  $ABCD$  um quadrilátero arbitrário,  $F_1$  a intersecção das retas opostas  $\overleftrightarrow{AB}$  e  $\overleftrightarrow{CD}$ ,  $F_2$  a intersecção das retas opostas  $\overleftrightarrow{BC}$  e  $\overleftrightarrow{AD}$  (fig. 19), sabemos que a família de retas que passam por qualquer ponto da reta de fuga de uma perspectiva plana é transformada em uma família de retas paralelas. Por isso, sendo  $\overleftrightarrow{F_1F_2}$  a reta de fuga, independentemente da localização da linha de terra  $t$ , ou do centro  $O$ , as imagens, pela perspectiva, dos segmentos  $\overline{AB}$  e  $\overline{CD}$  serão paralelas e as imagens dos segmentos  $\overline{BC}$  e  $\overline{AD}$  também serão paralelos. Para construir essas imagens, escolhemos o ponto  $O$  e a imagem  $A'$  de  $A$  pela perspectiva. Pelo teorema 1.2 as imagens de  $\overleftrightarrow{AB}$  e  $\overleftrightarrow{CD}$  por retas paralelas a  $\overleftrightarrow{OF_1}$  e as imagens de  $\overleftrightarrow{BC}$  e  $\overleftrightarrow{AD}$  por retas paralelas a  $\overleftrightarrow{OF_2}$  são conhecidas. Então  $B'$  pode ser localizado como a intersecção das retas  $\overleftrightarrow{OB}$  e a reta paralela a  $\overleftrightarrow{OF_1}$  passando por  $A'$  e  $D'$  pode ser localizado como a intersecção das retas  $\overleftrightarrow{OD}$  com a reta paralela a  $\overleftrightarrow{OF_2}$  passando por  $A'$ . Finalmente  $C'$  é determinado pela intersecção da reta paralela a  $\overleftrightarrow{A'D'}$  que passa por  $B'$  com a reta paralela a  $\overleftrightarrow{A'B'}$  que passa por  $D'$ .

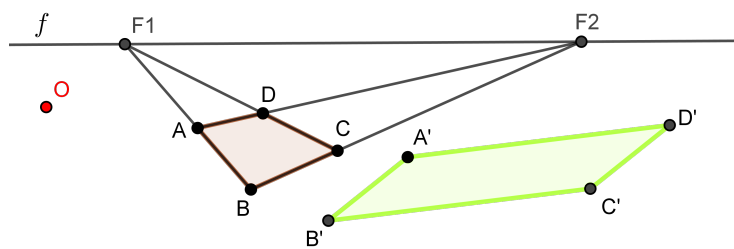


Figura 19: Paralelogramo como imagem de um quadrilátero pela perspectiva plana.

Para que o quadrilátero  $ABCD$  seja transformado em um retângulo, o centro  $O$  não pode ser escolhido arbitrariamente. Para determiná-lo é necessário que  $\overleftrightarrow{D'C'} \parallel \overleftrightarrow{OF_1}$  e  $\overleftrightarrow{D'A'} \parallel \overleftrightarrow{OF_2}$ , o ângulo  $\angle C'D'A'$  for reto e, portanto, o ângulo  $\angle F_1OF_2$  também deve medir  $90^\circ$ . Uma vez que um ângulo inscrito em um semicírculo é um ângulo reto, o centro  $O$  deve ser escolhido no círculo que tem o segmento  $\overline{F_1F_2}$  como diâmetro (fig. 20).

Se quisermos transformar o quadrilátero  $ABCD$  em um quadrado, o centro  $O$ , ainda está restrito e não pode ser escolhido arbitrariamente no círculo tendo o segmento  $\overline{F_1F_2}$  como diâmetro. Para determinar a posição de  $O$  devemos lembrar que as diagonais de um quadrado são perpendiculares, assim tomamos mais dois pontos de fuga,  $F_3$  e  $F_4$  de modo que  $F_3$  seja o ponto de intersecção das retas  $\overleftrightarrow{AC}$  e  $f$  e  $F_4$  seja o ponto de intersecção das retas  $\overleftrightarrow{BD}$  e  $f$ . Então,  $\overleftrightarrow{A'C'} \parallel \overleftrightarrow{OF_3}$  e  $\overleftrightarrow{B'D'} \parallel \overleftrightarrow{OF_4}$ . As diagonais da

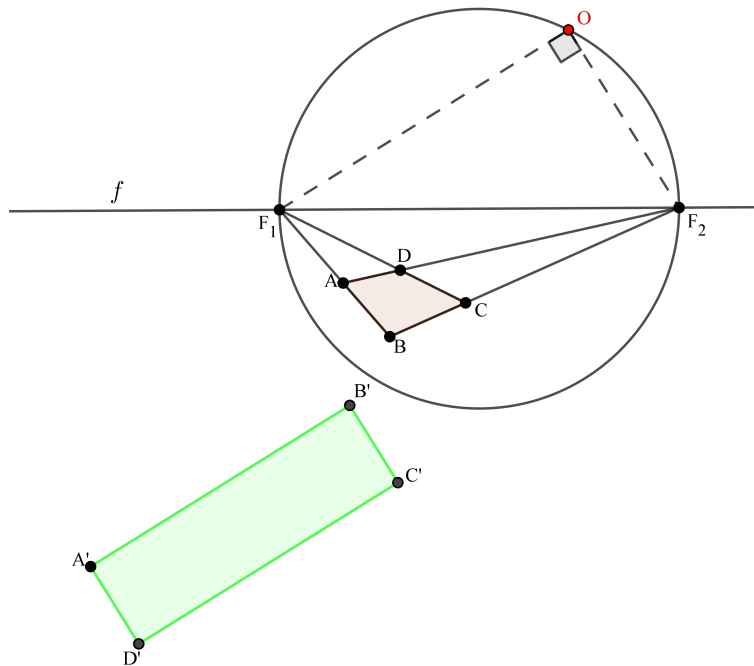


Figura 20: Retângulo como imagem de um quadrilátero pela perspectiva plana

imagem do quadrilátero  $ABCD$  serão perpendiculares se, e somente se, o centro  $O$  for escolhido de modo que o ângulo  $\angle F_3OF_4$  também seja um ângulo reto e isso ocorrerá se o centro  $O$  for uma das duas intersecções das circunferências de diâmetros  $\overline{F_1F_2}$  e  $\overline{F_3F_4}$  (fig. 21 ).

A seguir, veremos como a perspectiva plana transforma uma circunferência por meio de ilustrações feitas com a ferramenta lugar geométrico do software Geogebra.

Como primeira possibilidade, suponha que a circunferência não cruze a linha de fuga, neste caso as imagens dos pontos de  $\Gamma$  formam uma elipse (fig. 22).

Em seguida, suponha que a circunferência interseccione a reta de fuga  $f$  em dois pontos,  $F_1$  e  $F_2$ .

No entanto, para obter a imagem de um ponto  $P$  qualquer, basta considerar o centro  $O$  da perspectiva no ponto  $Q$ , sua imagem e a linha de fuga  $f$ . A imagem  $P'$  de  $P$  fica determinada pela aplicação do teorema 1.3.



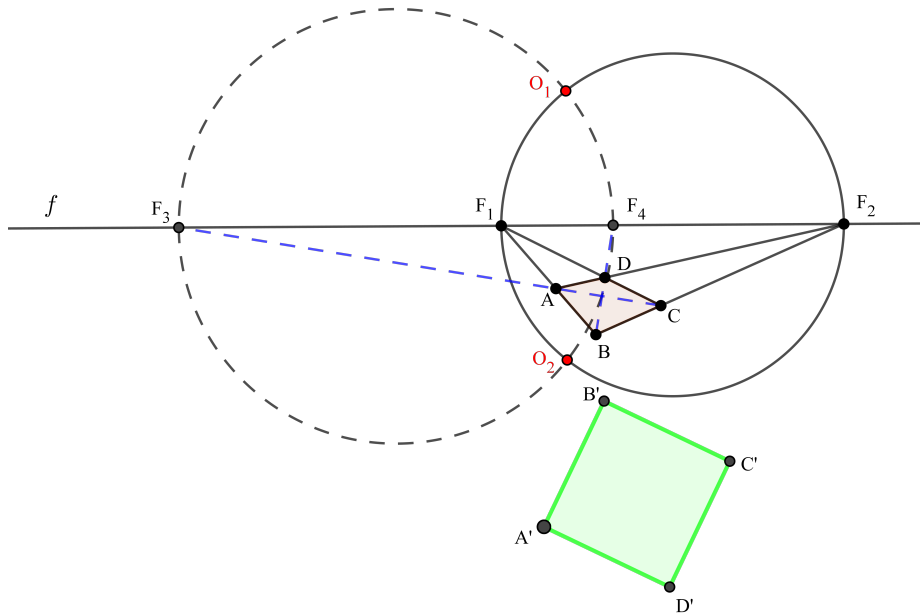


Figura 21: Quadrado como imagem de um quadrilátero pela perspectiva plana.

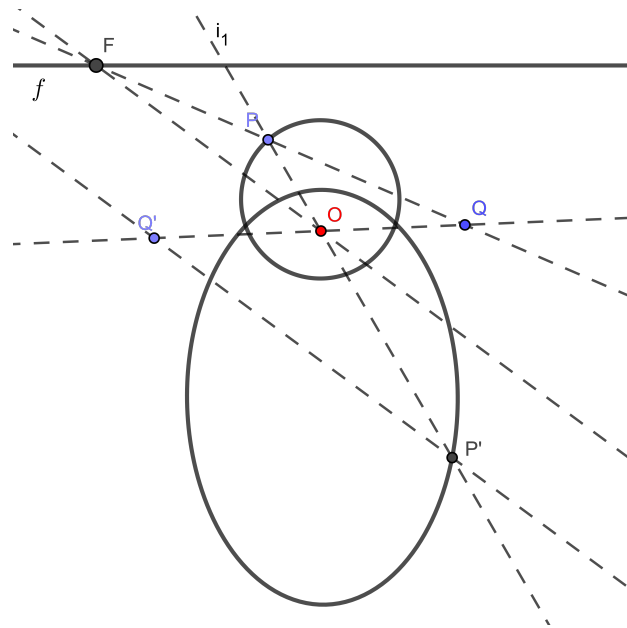


Figura 22: Elipse como imagem de uma circunferência.

Neste caso a imagem da circunferência  $\Gamma$  é uma hipérbole cujas assíntotas são as imagens das tangentes a  $\Gamma$  em  $F_1$  e  $F_2$  (fig. 23).

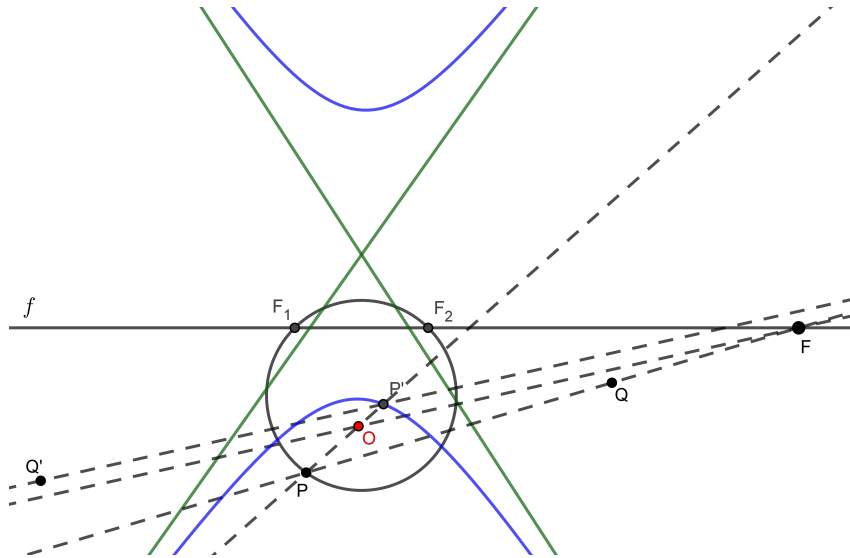


Figura 23: Hipérbole como imagem de uma circunferência.

Finalmente, no caso em que a circunferência  $\Gamma$  é tangente à linha de fuga, digamos no ponto  $F_1$ , a imagem de  $\Gamma$  é uma parábola cujo eixo é paralelo a  $\overleftrightarrow{OF}$  (fig. 24). A imagem  $P'$  de  $P$  fica determinada pela aplicação do teorema 1.3.

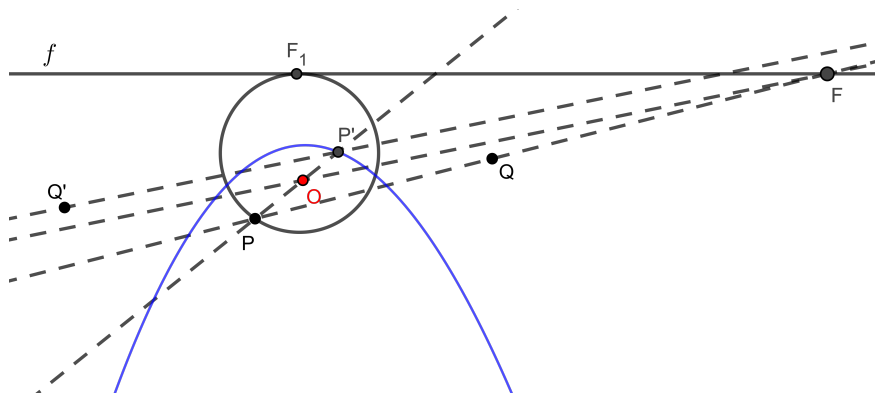


Figura 24: Parábola como imagem de uma circunferência.

Para justificar que a imagem de uma circunferência  $\Gamma$  é uma cônica  $\Gamma'$  vamos determiná-la por projeção na reta de perspectiva, como fizemos no exemplo 1.2:

Temos que a equação de uma circunferência é dada por  $a(x^2 + y^2) + bx + cy + d = 0$  e pelas hipóteses do exemplo 1.1, trocando as coordenadas do centro de perspectiva

para  $C(c_1, c_2, c_3)$  e dado um ponto  $P = (X, Y, 0)$  no plano objeto e  $P' = (X', 0, Z')$ , temos que

$$X = \frac{(-X' + c_1)c_3}{Z' - c_3} + c_1$$

e

$$Y = \frac{c_2c_3}{Z' - c_3} + c_2$$

Substituindo na equação geral da circunferência:

$$\begin{aligned} & a \left[ \left( \frac{-X'c_3 + c_1c_3}{Z' - c_3} + c_1 \right)^2 + \left( \frac{c_2c_3}{Z' - c_3} + c_2 \right)^2 \right] + \\ & b \left( \frac{-X'c_3 + c_1c_3}{Z' - c_3} + c_1 \right) + c \left( \frac{c_2c_3}{Z' - c_3} + c_2 \right) + d = 0 \implies \\ & ac_3^2X'^2 - (ac_3c_1 + bc_3)X'Z' + (ac_1 + ac_2^2 + bc_1 + cc_2)Z'^2 + \\ & bc_3X' - (bc_1c_3 + cc_2c_3 + 2dc_3)Z' + dc_3^2 = 0 \end{aligned}$$

Como a equação geral da cônica é dada por  $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ , segue que a imagem da circunferência é uma cônica, onde  $A = ac_3^2$ ,  $B = -ac_3c_1 - bc_3$ ,  $C = ac_1 + ac_2^2 + bc_1 + cc_2$ ,  $D = bc_3$ ,  $E = -bc_1c_3 - cc_2c_3 - 2dc_3$  e  $F = dc_3^2$ .

Não apresentaremos a teoria que classifica as cônicas de acordo com sua equação, porém o leitor a encontrará em [4] que essa classificação depende dos parâmetros  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ ,  $E$  e  $F$ , logo, pelos cálculos acima, observamos que o tipo de cônica que será a imagem da circunferência depende apenas do centro de perspectiva  $C$ .

Lembrando que os pontos da reta  $v : y = c_2$  estão em correspondência com os pontos ideais do plano imagem e se a circunferência for tangente ou secante a esta reta então sua imagem será uma parábola ou hipérbole respectivamente.



---

## GEOMETRIA PROJETIVA ANALÍTICA

---

### 2.1 COORDENADAS HOMOGÊNEAS

Sabe-se que, no plano euclidiano, duas retas que não têm ponto em comum são ditas paralelas. No entanto, é interessante considerar a possibilidade do plano euclidiano usual ser ampliado para um sistema que contenha certos pontos adicionais para servir como as intersecções de retas que são paralelas. Para investigar esta questão, é conveniente começar com o plano cartesiano da geometria analítica elementar e introduzir o que é conhecido como coordenadas homogêneas.

**Definição 2.1.** Se  $(x, y)$  são as coordenadas de um ponto arbitrário  $P$  no plano euclidiano  $\mathbb{R}^2$ , e se  $\{x_1, x_2, x_3\}$  são três números reais com  $x_3 \neq 0$  tais que:

$$\frac{x_1}{x_3} = x \quad \text{e} \quad \frac{x_2}{x_3} = y \quad (2.1)$$

então a terna  $(x_1, x_2, x_3)$  são as coordenadas homogêneas de  $P$ .

Observe que se as coordenadas homogêneas  $(x_1, x_2, x_3)$  de um ponto forem dadas, suas coordenadas retangulares  $(x, y)$  são determinadas de forma única, porém se as coordenadas retangulares de um ponto são dadas, as coordenadas homogêneas desse ponto não são determinadas de forma única, isto é, se  $(x_1, x_2, x_3)$  são coordenadas homogêneas de um ponto  $P = (x, y)$ , então, para todos os valores reais de  $k$  diferentes de zero,  $(kx_1, kx_2, kx_3)$  também são coordenadas homogêneas de  $P$ , uma vez que

$$\frac{kx_1}{kx_3} = \frac{x_1}{x_3} = x \quad \text{e} \quad \frac{kx_2}{kx_3} = \frac{x_2}{x_3} = y$$

**Definição 2.2.** Se  $l_1x + l_2y + l_3 = 0$  é a equação de uma reta  $r$ , em coordenadas cartesianas, então a terna  $[l_1, l_2, l_3]$  são as coordenadas homogêneas de  $r$ , onde  $[l_1, l_2, l_3] = (kl_1, kl_2, kl_3), \forall k \in \mathbb{R}^*$ .

Perceba que uma terna de coordenadas homogêneas  $[l_1, l_2, l_3]$  para uma reta  $r$  determinam uma única equação de reta, porém uma determinada equação de reta não determina uma única terna de coordenadas homogêneas para essa reta pois

$$l_1x + l_2y + l_3 = 0 \quad \text{e} \quad kl_1x + kl_2y + kl_3 = 0, \quad \text{com} \quad k \neq 0,$$

representam a mesma reta  $r$

Assim, podemos escrever a equação de uma reta, em coordenadas retangulares, de equação  $l_1x + l_2y + l_3 = 0$ , em coordenadas homogêneas, como:

$$l_1x_1 + l_2x_2 + l_3x_3 = 0$$

## 2.2 PONTOS IDEAIS E RETAS IDEAIS

O uso de coordenadas homogêneas possibilita a representação de objetos que não podem ser expressos por coordenadas cartesianas, que são chamadas de coordenadas de pontos e retas ideais.

Como na geometria projetiva temos que duas retas sempre se encontram, vamos agora determinar as coordenadas homogêneas de pontos no infinito e a reta formada por eles, que são os pontos e reta ideais:

Sejam as retas  $r$  e  $s$ , paralelas, cujas equações são, respectivamente, dadas por

$$\begin{cases} l_1x + l_2y + l_3 = 0 \\ l_1x + l_2y + l'_3 = 0 \end{cases}$$

com  $l_3 \neq l'_3$  e  $l_1, l_2$  não simultaneamente nulos. Substituindo as coordenadas retangulares pelas coordenadas homogêneas, segue que:

$$\begin{cases} l_1x_1 + l_2x_2 + l_3x_3 = 0 \\ l_1x_1 + l_2x_2 + l'_3x_3 = 0 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema acima, temos:

$$(l_3 - l'_3)x_3 = 0$$

donde segue que

$$x_3 = 0$$

Assim,

$$l_1x_1 + l_2x_2 = 0$$

Logo, existe  $k \neq 0$  tal que:

$$x_1 = kl_2 \quad \text{e} \quad x_2 = -kl_1$$

Observe que não encontramos um ponto comum às duas retas paralelas pois, mesmo com a restrição que  $k \neq 0$ , as coordenadas  $(kl_2, -kl_1, 0)$  não corresponde a ponto algum em  $\mathbb{R}^2$ , uma vez que o seu terceiro componente é igual a zero. No entanto, se o plano euclidiano fosse ampliado adicionando-lhe pontos cujas coordenadas são da forma,

$$(kl_2, -kl_1, 0) \quad \text{com} \quad k \neq 0 \quad \text{e} \quad l_1, l_2 \quad \text{não ambos zero}$$

as retas paralelas em  $\mathbb{R}^2$  teriam um ponto de intersecção nesse plano estendido. Além disso, uma vez que os números  $(kl_2, -kl_1, 0)$  satisfazem a equação  $l_1x_1 + l_2x_2 + l_3x_3 = 0$  para qualquer valor de  $l_3$ , o novo ponto da forma  $(kl_2, -kl_1, 0)$  pertence a cada reta da família de retas paralelas à reta de equação  $l_1x_1 + l_2x_2 + l_3x_3 = 0$  com  $l_1, l_2$  constantes e  $l_3$  variável. Esse é um ponto ideal.

Caso  $l_1 = l_2 = 0$ , na equação de reta  $l_1x_1 + l_2x_2 + l_3x_3 = 0$  teremos  $l_3x_3 = 0$  que corresponde à reta  $[0, 0, 1]$  ou  $x_3 = 0$ . Porém, esta equação não corresponde a nenhuma reta de  $\mathbb{R}^2$ . Assim ampliamos o plano euclidiano com uma reta que é a união de pontos ideais, conhecida como reta ideal, este novo sistema é definido como o plano euclidiano estendido,  $\mathbb{RP}^2$ , ou plano projetivo.

No plano euclidiano estendido as retas  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 0$  e  $x_3 = 0$  são os eixos do sistema de coordenadas homogêneas, estas três retas formam um “triângulo” conhecido como *triângulo de referência* e os pontos  $(1, 0, 0)$ ,  $(0, 1, 0)$  e  $(0, 0, 1)$ , no qual estas retas se cruzam são chamados de vértices do triângulo de referência (veja fig. 25).

Como cada ponto ideal é caracterizado pela condição  $x_3 = 0$ . Para  $x_3 \neq 0$ , temos o plano euclidiano tradicional, excluindo a reta ideal e seus pontos.

Analogamente se quisermos determinar um plano estendido para o plano euclidiano de modo que  $x_2 = 0$  seja a reta ideal, devemos remover a reta  $x_2 = 0$  e todos os seus pontos. Isso pode ser feito atribuindo valores diferentes de zero para  $x_2$  como, por exemplo  $x_2 = 1$ . Então,

$$\frac{x_1}{x_2} = x_1 \quad \text{e} \quad \frac{x_3}{x_2} = x_3,$$

com um novo sistema de coordenadas retangulares,  $x'$  e  $y'$ . Como os pontos da reta  $x_3 = 0$  permanecem no novo plano euclidiano, segue que as retas que eram paralelas

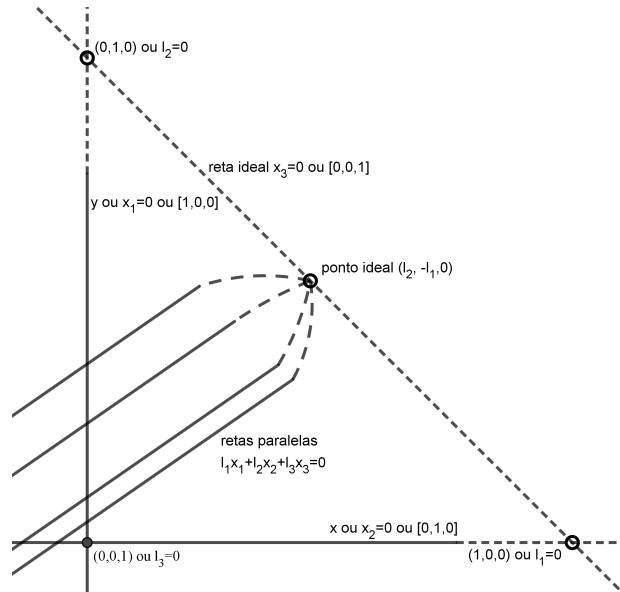


Figura 25: Triângulo de referência.

no plano euclidiano original, isto é, quando  $x_3 \neq 0$ , serão retas concorrentes no novo plano euclidiano. Por outro lado, as retas no plano euclidiano original que se cruzam em pontos no eixo  $x$ , ou seja, pontos na reta  $x_2 = 0$ , serão paralelas no novo plano euclidiano. O mesmo aplica-se a  $x_1 = 0$

**Exemplo 2.1.** Se as equações das retas paralelas  $r_1 : y = 2x + 3$  e  $r_2 : y = 2x + 4$  forem expressas em coordenadas homogêneas (considerando  $x_3 = 0$  como equação da reta ideal), teremos, respectivamente as equações  $2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0$  e  $2x_1 - x_2 + 4x_3 = 0$ . Caso considerarmos  $x_2 = 0$  como a equação da reta ideal, teremos:

$$r_1 : \frac{2x_1}{x_2} - 1 + \frac{3x_3}{x_2} = 0 \quad \text{e} \quad r_2 : \frac{2x_1}{x_2} - 1 + \frac{4x_3}{x_2} = 0$$

Eliminando a reta ideal e usando coordenadas retangulares  $x'$  e  $y'$  tais que

$$x' = \frac{x_1}{x_2} \quad \text{e} \quad y' = \frac{x_3}{x_2}$$

e considerando  $x_2 = 1$ , as retas  $r_1$  e  $r_2$  terão as seguintes equações:

$$r_1 : 2x' + 3y' - 1 = 0 \quad \text{e} \quad r_2 : 2x' + 4y' - 1 = 0$$

que não são mais paralelas.

**Exemplo 2.2.** A equação da parábola  $y = x^2$  é expressa em coordenadas homogêneas como:

$$\frac{x_2}{x_3} = \left(\frac{x_1}{x_3}\right)^2, \quad \text{isto é,} \quad x_2x_3 = x_1^2$$



Caso considerarmos  $x_1 = 0$  como a reta ideal, a equação torna-se

$$\frac{x_2 x_3}{x_1 x_1} = 1$$

Eliminando-se a reta ideal e usando coordenadas retangulares  $x'$  e  $y'$  tais que

$$x' = \frac{x_2}{x_1} \quad \text{e} \quad y' = \frac{x_3}{x_1}$$

e considerando  $x_1 = 1$ , teremos a seguinte equação:

$$x'y' = 1, \quad \text{ou seja,} \quad y' = \frac{1}{x'}$$

que representaria uma hipérbole no sistema cartesiano usual.

### 2.3 PROPRIEDADES ELEMENTARES DE PONTOS E RETAS

Quando estudamos geometria no plano projetivo observamos que os conceitos mais básicos desta geometria são ponto, reta, “contém” e “está contido”. Esses conceitos podem ser dualizados, ou seja, para cada um destes, escolhemos um outro que será o seu dual. Desta forma definiremos no plano projetivo que o dual de ponto é a reta, de reta é o ponto, de “contém” é “está contido” e o conceito dual de “está contido” é “contém”. Se tivermos uma definição ou uma proposição qualquer, é possível, usando os conceitos duais, enunciar uma outra definição ou uma outra proposição, que será chamada de definição dual ou de proposição dual.

Como um simples exemplo, vamos considerar o seguinte axioma:

*Dois pontos distintos no plano projetivo determinam uma única reta.*

A proposição dual deste axioma, trocando ponto por reta e reta por ponto e notando que a frase “determinam uma única reta” significa “estão contidos em uma única reta”, será:

*Duas retas distintas no plano projetivo contém (se interceptam) um único ponto.*

Essa proposição dual é certamente verdadeira no plano projetivo, entretanto ela é falsa no plano euclidiano, pois neste existem retas que não se interceptam (paralelas).

De fato, existe em geometria projetiva um princípio, chamado de princípio da dualidade, que afirma o seguinte:

**Princípio da Dualidade.** Em geometria projetiva o dual de todo resultado válido é válido.

A demonstração se encontra em [3] (p. 212), não será apresentada aqui devido à teoria axiomática usada na demonstração.

É conveniente lembrar que três pontos,  $(a_1, a_2, a_3)$ ,  $(b_1, b_2, b_3)$  e  $(c_1, c_2, c_3)$ , em  $\mathbb{R}P^2$ , são colineares se, e somente se, existir uma reta  $[l_1, l_2, l_3]$  que contenha cada um dos pontos dados e este será o caso se, e somente se, simultaneamente valerem

$$\begin{cases} a_1 l_1 + a_2 l_2 + a_3 l_3 = 0 \\ b_1 l_1 + b_2 l_2 + b_3 l_3 = 0 \\ c_1 l_1 + c_2 l_2 + c_3 l_3 = 0 \end{cases}$$

De acordo com o teorema A.22, este sistema de equações lineares homogêneas será satisfeito por uma terna ordenada não trivial de números  $[l_1, l_2, l_3]$  se, e somente se, o determinante dos coeficientes do sistema for igual a zero; isto é, se e somente se

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Devido ao princípio da dualidade, temos que três retas,  $[l_1, l_2, l_3]$ ,  $[m_1, m_2, m_3]$  e  $[n_1, n_2, n_3]$ , em  $\mathbb{R}P^2$ , passam pelo mesmo ponto se, e somente se, existir um ponto  $(a_1, a_2, a_3)$  que pertence a cada uma das retas dadas e este será o caso se, e somente se, simultaneamente valerem

$$\begin{cases} l_1 a_1 + l_2 a_2 + l_3 a_3 = 0 \\ m_1 a_1 + m_2 a_2 + m_3 a_3 = 0 \\ n_1 a_1 + n_2 a_2 + n_3 a_3 = 0 \end{cases}$$

ou seja, se

$$\begin{vmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Assim, estabelecemos o seguintes resultados:

1. Três pontos em  $\mathbb{R}P^2$  são colineares se, e somente se, o determinante da matriz cujas linhas são coordenadas dos pontos é igual a zero.
2. Três retas em  $\mathbb{R}P^2$  são concorrentes se e somente se o determinante da matriz cujas linhas são formadas pelas coordenadas das retas é igual a zero.

E o seguinte teorema:

**Teorema 2.3.** *Um ponto  $C = (c_1, c_2, c_3)$  é colinear com os pontos distintos  $A = (a_1, a_2, a_3)$  e  $B = (b_1, b_2, b_3)$  se, e somente se, existem números  $\lambda$  e  $\mu$  tais que,  $c_i = \lambda a_i + \mu b_i$  com  $i = 1, 2, 3$ , isto é, as coordenadas do ponto  $C$  são uma combinação linear das coordenadas de  $A$  e  $B$ .*

*Demonstração.* Se  $A, B$  e  $C$  são colineares, existe uma reta  $[l_1, l_2, l_3]$  que passa por eles, ou seja,

$$\begin{cases} a_1 l_1 + a_2 l_2 + a_3 l_3 = 0 \\ b_1 l_1 + b_2 l_2 + b_3 l_3 = 0 \\ c_1 l_1 + c_2 l_2 + c_3 l_3 = 0 \end{cases}$$

Pelo teorema A.22:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Pelo teorema A.14:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Pelo Teorema A.22 segue que existem  $\alpha, \beta$  e  $\gamma$ , não todos nulos, tais que  $\alpha a_i + \beta b_i + \gamma c_i = 0$  com  $i = 1, 2, 3$ , então

$$c_i = \frac{-\alpha a_i}{\gamma} - \frac{\beta b_i}{\gamma}. \quad \text{Portanto} \quad \lambda = -\frac{\alpha}{\gamma} \quad \text{e} \quad \mu = -\frac{\beta}{\gamma}.$$

Observe que nessa solução, o número  $\gamma$  deve ser diferente de zero, porque se  $\gamma$  fosse zero, teríamos que  $(a_1, a_2, a_3)$  e  $(b_1, b_2, b_3)$  seriam proporcionais, contrariando a hipótese de que  $A$  e  $B$  são pontos distintos em  $\mathbb{R}P^2$ .

Reciprocamente, se as coordenadas de  $C$  são combinações lineares das coordenadas de  $A$  e  $B$ , temos, pelo teorema A.15 que:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & \lambda a_1 + \mu b_1 \\ a_2 & b_2 & \lambda a_1 + \mu b_1 \\ a_3 & b_3 & \lambda a_1 + \mu b_1 \end{vmatrix} = 0$$

e, pelo teorema A.22 que os pontos  $A, B$  e  $C$  são colineares. □

No teorema 2.3, os pontos  $A$  e  $B$  são considerados distintos e  $C$  pode ser qualquer ponto colinear com  $A$  e  $B$ . Assim, esse teorema estabelece uma correspondência biunívoca entre os pontos da reta  $\overleftrightarrow{AB}$  e o conjunto de pares ordenados  $(k\lambda, k\mu)$  com  $\lambda$  e  $\mu$  não ambos iguais a zero e  $k \neq 0$ .

Essa correspondência é chamada de parametrização dos pontos na reta  $\overleftrightarrow{AB}$ , e dizemos que  $\overleftrightarrow{AB}$  foi parametrizada em termos de  $A$  e  $B$  como pontos base, com  $\lambda$  e  $\mu$  como parâmetros. Em particular, nessa parametrização  $A$  corresponde ao conjunto de pares ordenados da forma  $(k, 0)$ , com  $k \neq 0$  e  $B$  corresponde ao conjunto de pares ordenados da forma  $(0, k)$ , com  $k \neq 0$ .

Temos o dual do teorema 2.3, que faz a afirmação correspondente sobre as retas. Sua prova é omitida aqui pois é algebricamente idêntica à prova do teorema 2.3:

**Teorema 2.4.** *Uma reta  $n = [n_1, n_2, n_3]$  é concorrente com as retas distintas  $l = [l_1, l_2, l_3]$  e  $m = [m_1, m_2, m_3]$  se, e somente se, existem números  $\lambda$  e  $\mu$  tais que,  $n_i = \lambda l_i + \mu m_i$  onde  $i = 1, 2, 3$ , isto é, as coordenadas da reta  $n$  são combinação linear das coordenadas de  $l$  e  $m$ .*

O teorema 2.4 estabelece uma correspondência biunívoca entre as retas que passam pela intersecção de  $l$  e  $m$  e os conjuntos de pares ordenados  $[k\lambda, k\mu]$  com  $\lambda$  e  $\mu$  não ambos iguais a zero e  $k \neq 0$ .

Essa correspondência é chamada de parametrização de retas no ponto  $lm = l \cap m$ , e dizemos que  $lm$  foi parametrizado em termos de  $l$  e  $m$  como retas de base, com  $\lambda$  e  $\mu$  como parâmetros. Em particular, nessa parametrização  $l$  corresponde ao conjunto de pares ordenados da forma  $[k, 0]$ , com  $k \neq 0$  e  $m$  corresponde ao conjunto de pares ordenados da forma  $[0, k]$ , com  $k \neq 0$ .

Os dois teoremas seguintes mostram como os demais pontos e retas de  $\mathbb{R}P^2$  podem ser parametrizados.

**Teorema 2.5.** *Se,  $A(a_1, a_2, a_3)$ ,  $B(b_1, b_2, b_3)$  e  $C(c_1, c_2, c_3)$  são três pontos não colineares, então as coordenadas de qualquer ponto  $D(d_1, d_2, d_3)$  é linearmente dependente às coordenadas dos pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$ ; isto é, existem números  $(\lambda, \mu, \nu)$ , de modo que  $d_i = \lambda a_i + \mu b_i + \nu c_i$ , com  $i = 1, 2$  e  $3$ .*

Ou seja,

$$\begin{cases} d_1 = \lambda a_1 + \mu b_1 + \nu c_1 \\ d_2 = \lambda a_2 + \mu b_2 + \nu c_2 \\ d_3 = \lambda a_3 + \mu b_3 + \nu c_3 \end{cases} \quad (2.2)$$

*Demonstração.* Por hipótese, temos que  $A, B$  e  $C$  são pontos não colineares então, pelo teorema A.22 segue

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0$$

Além disso, pelo menos um dos números  $d_1, d_2$  ou  $d_3$  é diferente de zero, pois estas são as coordenadas do ponto  $D$  em  $\mathbb{RP}^2$ . Portanto o sistema (2.2) não é homogêneo. Pelo teorema A.20, existe um conjunto único de valores  $(\lambda, \mu, \nu)$ , que satisfazem essas equações, e o teorema é comprovado. Obviamente que  $(\lambda, \mu, \nu) \neq (0, 0, 0)$ , pois isso implicaria  $d_1 = d_2 = d_3 = 0$ , o que é impossível.  $\square$

E temos o resultado dual do teorema 2.5 para retas:

**Teorema 2.6.** *Se,  $l[l_1, l_2, l_3]$ ,  $m[m_1, m_2, m_3]$  e  $n[n_1, n_2, n_3]$  são retas que não se interceptam no mesmo ponto, então as coordenadas de qualquer reta  $p[p_1, p_2, p_3]$  é linearmente dependente às coordenadas das retas  $l, m$  e  $n$ ; isto é, existem números  $(\lambda, \mu, \nu)$ , de modo que  $p_i = \lambda l_i + \mu m_i + \nu n_i$ , com  $i = 1, 2$  e  $3$ .*

A demonstração foi omitida pois é análoga ao seu dual.

## 2.4 OS TEOREMAS DE DESARGUES E PAPPUS

Usando os resultados da seção anterior, podemos agora provar os famosos teoremas de Desargues e Pappus para a geometria projetiva.

**Teorema 2.7. (Teorema de Desargues)** *Se, em um plano, dois triângulos,  $\triangle ABC$  e  $\triangle A'B'C'$  forem tais que as retas que contém os vértices correspondentes ( $\overleftrightarrow{AA'}$ ,  $\overleftrightarrow{BB'}$  e  $\overleftrightarrow{CC'}$ ) concorrem em um ponto  $O$ , então os pontos que são intersecções das retas que contém os pares de lados correspondentes —  $\{P\} = \overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{A'B'}$ ,  $\{Q\} = \overleftrightarrow{AC} \cap \overleftrightarrow{A'C'}$  e  $\{R\} = \overleftrightarrow{BC} \cap \overleftrightarrow{B'C'}$  — são colineares.*

*Demonstração.* Observe, inicialmente, que se um par de vértices correspondentes, por exemplo  $A$  e  $A'$ , coincidem, então a afirmação do teorema é verdadeira, pois teremos  $A = A' = P = Q$  (fig. 26).

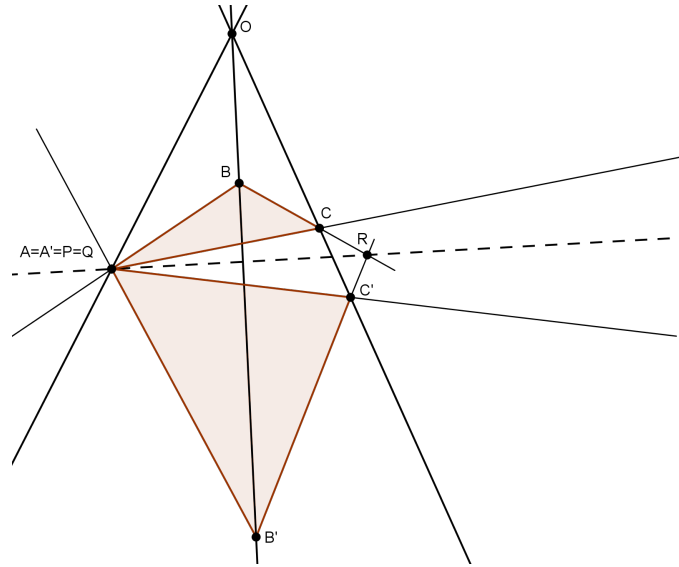


Figura 26: Caso e que um par de pontos correspondentes são coincidentes.

Considere, agora  $A \neq A', B \neq B', C \neq C'$  e  $O(o_1, o_2, o_3)$ ,  $A(a_1, a_2, a_3)$ ,  $B(b_1, b_2, b_3)$ ,  $C(c_1, c_2, c_3)$ ,  $A'(a'_1, a'_2, a'_3)$ ,  $B'(b'_1, b'_2, b'_3)$  e  $C'(c'_1, c'_2, c'_3)$ . Pelo teorema 2.3 e por hipótese, segue que existem  $\lambda_1, \mu_1, \lambda_2, \mu_2, \lambda_3, \mu_3 \in \mathbb{R}$  tais que

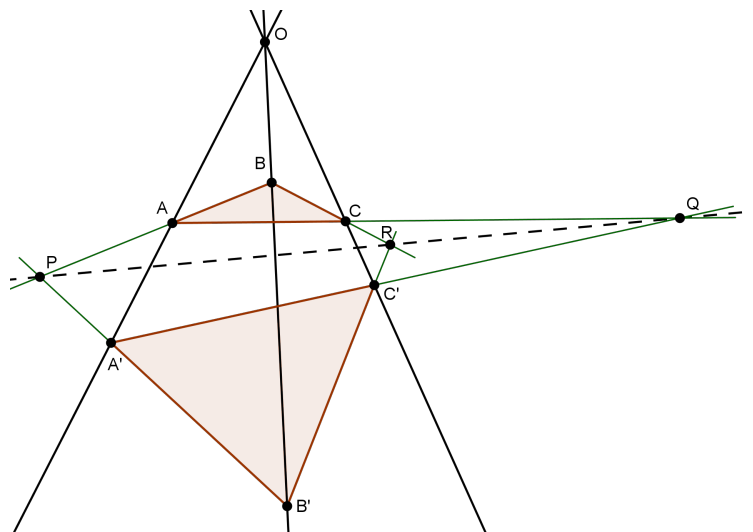


Figura 27: Teorema de Desargues.

$$o_i = \lambda_1 a_i + \mu_1 a'_i = \lambda_2 b_i + \mu_2 b'_i = \lambda_3 c_i + \mu_3 c'_i \tag{2.3}$$

$$\Rightarrow \lambda_2 b_i - \lambda_3 c_i = -\mu_2 b'_i + \mu_3 c'_i \tag{2.4}$$

com  $i = 1, 2, 3$ .

Além disso,  $\lambda_2 b_i - \lambda_3 c_i \neq 0$ , pois se  $\lambda_2 b_i - \lambda_3 c_i = 0$  teríamos  $b_i = k c_i$  e, consequentemente,  $B = C$ , contrariando a hipótese logo, pela equação (2.4), existe um ponto  $R(r_1, r_2, r_3)$  tal que

$$r_i = \lambda_2 b_i - \lambda_3 c_i = -\mu_2 b'_i + \mu_3 c'_i, \quad \text{com } i = 1, 2, 3 \quad (2.5)$$

ou seja,  $\overleftrightarrow{BC} \cap \overleftrightarrow{B'C'} = \{R\}$

Da mesma forma, as outras duas igualdades da equação (2.3), fornecem os pontos  $P(p_1, p_2, p_3)$  e  $Q(q_1, q_2, q_3)$ , tais que

$$p_i = \lambda_1 a_i - \lambda_2 b_i = -\mu_1 a'_i + \mu_2 b'_i \quad (2.6)$$

$$q_i = \lambda_1 a_i - \lambda_3 c_i = -\mu_1 a'_i + \mu_3 c'_i \quad (2.7)$$

ou seja,  $\overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{A'B'} = \{P\}$  e  $\overleftrightarrow{AC} \cap \overleftrightarrow{A'C'} = \{Q\}$ . Para completar a prova temos de mostrar que  $P, Q$  e  $R$  são colineares, ou seja, que as coordenadas de  $P$  são combinações lineares das coordenadas de  $Q$  e  $R$ , segue das equações (2.5), (2.6) e (2.7) que

$$\begin{aligned} q_i - r_i &= (\lambda_1 a_i - \lambda_3 c_i) - (\lambda_2 b_i - \lambda_3 c_i) \\ &= \lambda_1 a_i - \lambda_2 b_i \\ &= p_i, \quad \text{com } i = 1, 2, 3 \end{aligned}$$

□

**Teorema 2.8. (Teorema de Pappus)** Dados três pontos de uma reta  $r$ ,  $A(a_1, a_2, a_3)$ ,  $B(b_1, b_2, b_3)$  e  $C(c_1, c_2, c_3)$  e três pontos,  $A'(a'_1, a'_2, a'_3)$ ,  $B'(b'_1, b'_2, b'_3)$  e  $C'(c'_1, c'_2, c'_3)$ , de uma reta  $r'$ , sendo que nenhum destes pontos coincidam com a intersecção,  $O(o_1, o_2, o_3)$  de  $r$  e  $r'$ , então as intersecções das retas  $\overleftrightarrow{AB'} \cap \overleftrightarrow{A'B}$ ,  $\overleftrightarrow{AC'} \cap \overleftrightarrow{A'C}$  e  $\overleftrightarrow{BC'} \cap \overleftrightarrow{B'C}$  são colineares.

*Demonstração.* Sejam os pontos

$$\begin{aligned} \{P(p_1, p_2, p_3)\} &= \overleftrightarrow{AB'} \cap \overleftrightarrow{A'B} \\ \{Q(q_1, q_2, q_3)\} &= \overleftrightarrow{AC'} \cap \overleftrightarrow{A'C} \\ \{R(r_1, r_2, r_3)\} &= \overleftrightarrow{BC'} \cap \overleftrightarrow{B'C} \end{aligned}$$

∈ ℝ

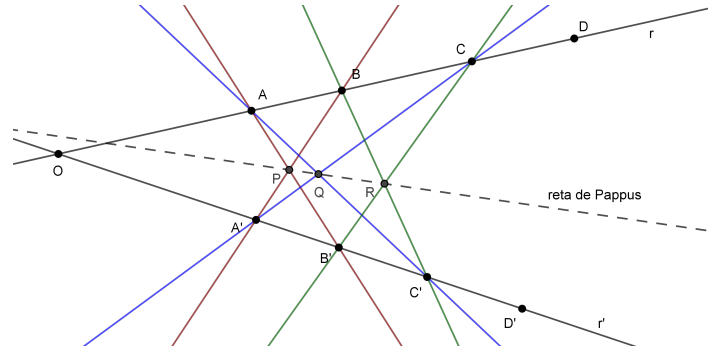


Figura 28: Teorema de Pappus.

Escolhemos um ponto  $D(d_1, d_2, d_3) \in r$ ,  $D \neq O$  para ser usado com  $O$  como ponto base da parametrização de  $r$ . Assim

$$a_i = \alpha_1 o_i + \alpha_2 d_i \tag{2.8}$$

$$b_i = \beta_1 o_i + \beta_2 d_i \tag{2.9}$$

$$c_i = \gamma_1 o_i + \gamma_2 d_i \tag{2.10}$$

Como o ponto  $O$  é diferente dos pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$ , então  $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$  são não nulos. Dessa forma, podemos reescrever (2.8), (2.9) e (2.10) como

$$\begin{cases} a_i = \alpha o_i + d_i \\ b_i = \beta o_i + d_i \\ c_i = \gamma o_i + d_i \end{cases}, \text{ com } i = 1, 2, 3. \tag{2.11}$$

Analogamente podemos parametrizar  $r'$  a partir de  $O$  e de um ponto  $D'(d'_1, d'_2, d'_3)$ , com  $D' \neq O$

$$\begin{cases} a'_i = \alpha' o_i + d'_i \\ b'_i = \beta' o_i + d'_i \\ c'_i = \gamma' o_i + d'_i \end{cases} \text{ com } i = 1, 2, 3 \tag{2.12}$$

Como  $P(p_1, p_2, p_3)$  pertence às retas  $\overleftrightarrow{A'B}$  e  $\overleftrightarrow{AB'}$ , temos que para determinados  $\lambda, \mu, \lambda'$  e  $\mu'$ ,

$$\begin{aligned} p_i &= \lambda a_i + \mu' b_i \\ &= \lambda' a'_i + \mu b_i \end{aligned}$$



Determinamos, a seguir, uma condição necessária para esses coeficientes substituindo as equações (2.11) e (2.12) nas expressões de  $p_i$ :

$$\begin{aligned} p_i &= \lambda(\alpha o_i + d_i) + \mu'(\beta' o_i + d'_i) \\ &= (\lambda\alpha + \mu'\beta')o_i + \lambda d_i + \mu' d'_i \end{aligned} \quad (2.13)$$

e

$$\begin{aligned} p_i &= \lambda'(\alpha' o_i + d'_i) + \mu(\beta o_i + d_i) \\ &= (\lambda'\alpha' + \mu\beta)o_i + \lambda' d'_i + \mu d_i \end{aligned} \quad (2.14)$$

Observe que, pelas equações (2.13) e (2.14), o ponto  $P$  é uma combinação linear dos pontos  $O$ ,  $D$ , e  $D'$  (não colineares), assim:

$$\lambda\alpha + \mu'\beta' = (\lambda'\alpha' + \mu\beta)k \quad (2.15)$$

$$\lambda = k\mu \quad (2.16)$$

$$\mu' = k\lambda' \quad (2.17)$$

Substituindo as equações (2.16) e (2.17) na equação (2.15), teremos

$$\begin{aligned} \lambda\alpha + \mu'\beta' &= \mu'\alpha' + \lambda\beta \\ \Rightarrow \lambda(\alpha - \beta) &= \mu'(\alpha' - \beta') \end{aligned}$$

Tomando  $\lambda = \alpha' - \beta'$  e  $\mu' = \alpha - \beta$  e substituindo na equação (2.13), teremos:

$$\begin{aligned} p_i &= [(\alpha' - \beta')\alpha + (\alpha - \beta)\beta']o_i + (\alpha' - \beta')d_i + (\alpha - \beta)d'_i \\ &= (\alpha'\alpha - \beta\beta')o_i + (\alpha' - \beta')d_i + (\alpha - \beta)d'_i \end{aligned} \quad (2.18)$$

Da mesma forma encontramos:

$$q_i = (\gamma'\gamma - \alpha\alpha')o_i + (\gamma' - \alpha')d_i + (\gamma - \alpha)d'_i \quad (2.19)$$

$$r_i = (\beta'\beta - \gamma\gamma')o_i + (\beta' - \gamma')d_i + (\beta - \gamma)d'_i \quad (2.20)$$

com  $i = 1, 2$  e  $3$ .

A partir de (2.18), (2.19) e (2.20), temos  $p_i = -q_i - r_i$ . Assim, pelo Teorema 2.3 segue que os pontos  $P$ ,  $Q$  e  $R$  são colineares.  $\square$

A reta que contém os pontos  $P$ ,  $Q$  e  $R$  no teorema de Pappus é muitas vezes chamada de reta de Pappus de duas triplas colineares  $(A, B, C)$  e  $(A', B', C')$ .

Os duais dos teoremas de Desargues e Pappus são propostos como atividades no capítulo 4.



---

## TRANSFORMAÇÕES PROJETIVAS

---

Como vimos, uma perspectiva plana é uma transformação do plano euclidiano  $\pi_0$  (menos os pontos da reta  $v$ ) no plano  $\pi_0$  (já que o plano  $\pi_i$  foi rebatido sobre o plano  $\pi_0$ ). Esta transformação tem como pontos fixos, os pontos da linha de terra e o centro da perspectiva  $O$ , e apenas estes. Podemos denotar tal transformação por  $p : \pi_0 - \{v\} \rightarrow \pi_0 - \{f(reb)\}$ , onde  $f(reb)$  é a reta de fuga rebatida no plano  $\pi_0$ . Usaremos a letra  $p$  para a notação das demais transformações projetivas (ou projetividades).

### 3.1 PERSPECTIVAS DE RETAS E RAZÃO CRUZADA

**Definição 3.1.** Uma perspectiva de retas é uma transformação que leva pontos de uma reta fixada (reta objeto) em uma outra reta fixada (reta imagem) de tal forma que cada par de pontos correspondentes é colinear com o ponto fixo  $O$ , chamado centro da perspectiva que não está nem na reta objeto nem na reta imagem.

**Definição 3.2.** Uma transformação projetiva de retas ou uma projetividade de retas é uma perspectiva de retas ou uma composta de perspectivas de retas.

**Lema 3.3.** Uma perspectiva  $p : r \rightarrow r'$  é uma aplicação bijetiva.

*Demonstração.* Devemos provar que  $p$  é uma aplicação injetiva e sobrejetiva. Sejam  $r$  a reta objeto e  $r'$  a reta imagem

- $p$  é injetiva:

Sejam  $A, B \in r$  tais que  $p(A) = A'$  e  $p(B) = A'$ , como  $\{A\} = \overleftrightarrow{A'O} \cap r$  e  $\{B\} = \overleftrightarrow{A'O} \cap r$  segue que  $A = B$ .

- $p$  é sobrejetiva: Seja  $A' \in r'$  um ponto qualquer. Observe que a reta  $\overleftrightarrow{A'O}$  cruza a reta  $r$  em um único ponto  $A$  que pode ser um ponto ideal, caso  $r$  seja paralela a  $r'$ , ou num ponto euclidiano, caso  $r$  seja concorrente a  $r'$ .

Logo  $p$  é uma aplicação bijetiva. □

**Teorema 3.4.** *Uma projetividade  $p : r \rightarrow r'$  é uma aplicação bijetiva.*

*Demonstração.* A prova segue do lema 3.3 e do fato que a composta de aplicações bijetivas é uma aplicação bijetiva. □

No caso em que uma projetividade de uma reta  $r$  numa reta  $r'$  leva um ponto  $A$  em  $A'$ ,  $B$  em  $B'$  e  $C$  em  $C'$ , a notação é  $r(A, B, C) \bar{\wedge} r'(A', B', C')$  e no caso em que uma projetividade de uma reta  $r$  numa reta  $r'$  é uma perspectiva de centro  $O$  e esta perspectiva leva os pontos  $A$  em  $A'$ ,  $B$  em  $B'$  e  $C$  em  $C'$ , a notação é  $r(A, B, C) \stackrel{O}{\wedge} r'(A', B', C')$ , a existência e unicidade desse resultado será provado nos teoremas 3.5 e 3.10, respectivamente.

**Exemplo 3.1.** Dados quatro pontos distintos  $A, B, C$  e  $D$  de uma reta  $r$ , construa uma projetividade de  $r$  que leva  $A$  em  $D$  e deixa  $B$  e  $C$  fixos.

A notação para esta projetividade é  $r(A, B, C) \bar{\wedge} r(D, B, C)$ . Observe que esta projetividade  $r(A, B, C) \bar{\wedge} r(D, B, C)$  é a composta das perspectivas

$$r(A, B, C) \stackrel{P}{\wedge} s(A', B, C') \stackrel{Q}{\wedge} r(D, B, C)$$

como está ilustrado na figura 29.

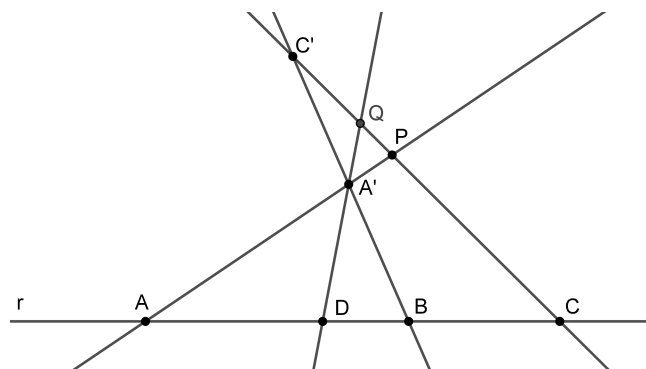


Figura 29: Projetividade de uma reta.

Neste exemplo, precisamos escolher um ponto  $A'$  para ser a imagem de  $A$  e um ponto  $P \neq A$  na semi-reta  $\overrightarrow{AA'}$ . Desse modo,  $A'$  é a imagem de  $A$  pela perspectiva de centro  $P$ . Sejam  $\{C\} = \overleftrightarrow{BA'} \cap \overleftrightarrow{CP}$  e  $s = \overleftrightarrow{BA'}$ . Em seguida, seja  $\{Q\} = \overleftrightarrow{A'D} \cap \overleftrightarrow{CC'}$

Um método para construir uma projetividade  $p : r \rightarrow r'$  tal que  $p(A) = A'$ ,  $p(B) = B'$  e  $p(C) = C'$ , onde  $A, B$  e  $C$  são pontos distintos de  $r$  e  $A', B', C'$  são três pontos distintos de  $r'$ , pode ser visto na prova do seguinte teorema.

**Teorema 3.5.** *Sejam  $r$  e  $r'$  duas retas do plano projetivo. Tomando  $A, B, C$  pontos distintos de  $r$  e  $A', B', C'$  pontos distintos de  $r'$ , existe uma projetividade  $p : r \rightarrow r'$  tal que  $p(A) = A'$ ,  $p(B) = B'$  e  $p(C) = C'$ .*

*Demonstração.* Vamos supor inicialmente que  $r \neq r'$ . Temos três tipos de situações a considerar:

- Caso 1:  $\{A\} = \{A'\} = r \cap r'$ .

Temos  $r(A, B, C) \stackrel{O}{\wedge} r'(A', B', C')$ , onde  $P = \overleftrightarrow{BB'} \cap \overleftrightarrow{CC'}$  é a projetividade procurada.

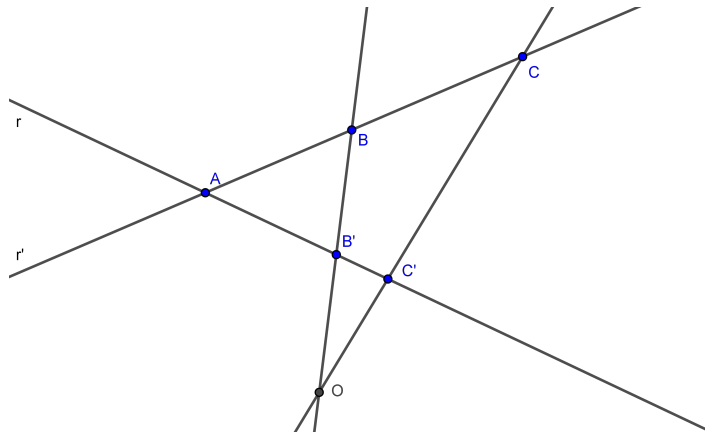


Figura 30: Exemplo do caso 1 do teorema 3.5.

- Caso 2:  $A, B, C, A', B', C' \notin r \cap r'$ .

Sejam  $\{M\} = \overleftrightarrow{AB'} \cap \overleftrightarrow{A'B}$ ,  $\{N\} = \overleftrightarrow{AC'} \cap \overleftrightarrow{A'C}$  e  $t$  a reta que contém  $M$  e  $N$ , então  $r(A, B, C) \stackrel{A'}{\wedge} t(A'', M, N) \stackrel{A}{\wedge} r'(A', B', C')$  é a projetividade procurada, onde  $\{A''\} = \overleftrightarrow{AA'} \cap t$ .

- Caso 3  $A, B, C \notin r \cap r'$  e  $\{A'\} = r \cap r'$ .

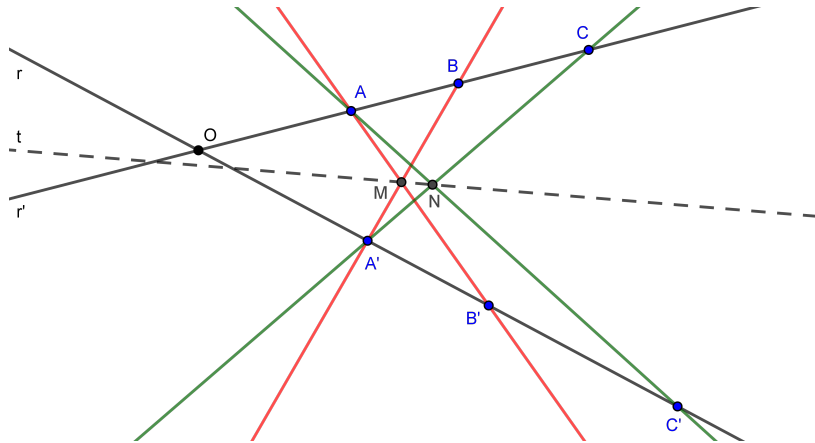


Figura 31: Exemplo do caso 2 do teorema 3.5.

Usando uma reta auxiliar  $s$  tal que  $s \cap r = \{A\}$ , e um ponto  $O$ , define-se a perspectiva de centro  $O$  e  $r(A, B, C) \xrightarrow{O} s(A, B'', C'')$  onde  $\{O\} = \overleftrightarrow{BB''} \cap \overleftrightarrow{CC''}$ . Logo teremos o caso 2 e, assim,  $r(A, B, C) \xrightarrow{O} s(A, B'', C'') \xrightarrow{A'} t(A'', M, N) \xrightarrow{A'} r'(A', B', C')$  é a projetividade procurada, onde  $\{M\} = \overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{A'B''}$ ,  $\{N\} = \overleftrightarrow{AC} \cap \overleftrightarrow{A'C''}$ ,  $t = \overleftrightarrow{MN}$  e  $\{A''\} = t \cap r$ .

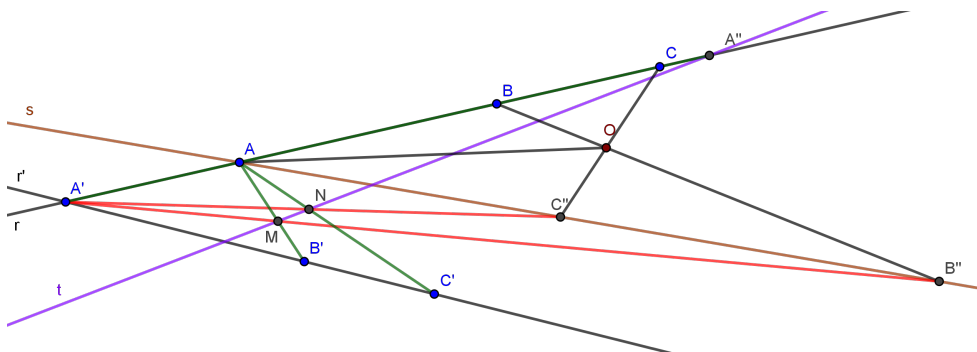


Figura 32: Exemplo do caso 3 do teorema 3.5.

Finalmente, se  $r' = r$ , usamos uma reta auxiliar  $m$  e um ponto  $O$  para definir uma perspectiva de centro  $O$ , de  $r$  em  $m$  e  $r(A, B, C) \xrightarrow{O} m(A'', B'', C'')$ . Agora basta construir a perspectiva de  $m$  em  $r$  que leva  $A''$  em  $A'$ ,  $B''$  em  $B'$  e  $C''$  em  $C'$ , conforme feito nos casos anteriores. □

Sabemos que conceitos métricos da geometria euclidiana como comprimento de segmento e medida de ângulo não são preservados pela perspectiva e desta forma não se-

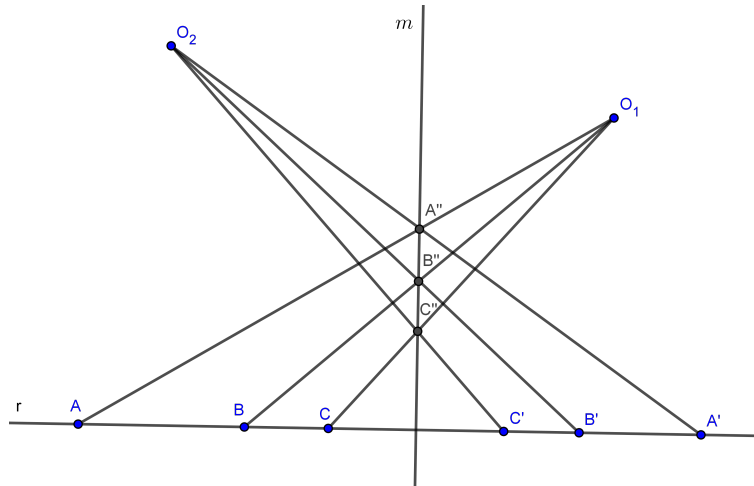


Figura 33: Exemplo do teorema 3.5 em que todos os pontos estão na reta  $r$ .

rão preservados por uma transformação projetiva, tanto do plano projetivo, como por uma projetividade de retas. Entretanto, existe um conceito métrico que é preservado por qualquer projetividade de retas. Este conceito, conhecido como razão cruzada, é básico em geometria projetiva e tem aplicações nas construções, uma vez que ele define uma escala no desenho em perspectiva.

Dados dois pontos  $P$  e  $Q$  do plano euclidiano, a notação  $PQ$  é tradicionalmente usada para denotar a distância de  $P$  a  $Q$ . Nesta dissertação, usaremos a distância orientada relativa aos pontos  $P$  e  $Q$ : sendo  $r$  a reta que contém  $P$  e  $Q$  e dada uma orientação em  $r$ , se o segmento  $\overline{PQ}$  tiver a mesma orientação que a reta  $r$ , então a distância orientada de  $P$  para  $Q$  é positiva, caso contrário ela será negativa. Faremos então a seguinte convenção:  $PQ$  denota a distância orientada de  $P$  para  $Q$  de modo que  $PQ = -QP$ .

**Definição 3.6.** Em uma reta projetiva tomamos quatro pontos distintos  $A, B, C$  e  $D$ . Considere os números reais

$$R(A, B, C, D) = \frac{AC}{BC} \cdot \frac{BD}{AD}, \quad \text{se } A, B, C \text{ e } D \text{ são euclidianos,}$$

$$R(A, B, C, D) = \frac{BD}{BC}, \quad \text{se } B, C \text{ e } D \text{ são euclidianos e } A \text{ é um ponto ideal.}$$

$R(A, B, C, D)$  é chamado de razão cruzada associada aos pontos  $A, B, C$ , e  $D$ .

É importante observar que a definição acima independe da orientação escolhida para a reta que contém os pontos  $A, B, C$  e  $D$ , uma vez que mudando a orientação da reta,

todos os sinais das distâncias orientadas dos segmentos são trocados, o que mantém o sinal da razão cruzada.

Suponha que os números  $AC$ ,  $AD$ ,  $BC$  e  $BD$  que aparecem na razão cruzada  $R(A, B, C, D)$  são todos positivos, observe que isto nos dá uma orientação para os pontos  $A, B, C$  e  $D$  de modo que  $A - B - C - D$ . Esta suposição é feita apenas para facilitar a prova do seguinte lema:

**Lema 3.7.** *Sejam  $r$  e  $r'$  retas projetivas e  $p : r \rightarrow r'$  uma perspectiva de centro  $O$ . Então  $R(A, B, C, D) = R(A', B', C', D')$ , onde  $A, B, C, D$  pertencem a  $r$  e  $A', B', C', D'$  pertencem a  $r'$  com  $A' = p(A), B' = p(B), C' = p(C)$  e  $D' = p(D)$ .*

*Demonstração.* Caso 1: Começamos a prova supondo que  $A, B, C$  e  $D$  são pontos euclidianos da reta  $r$  e que suas respectivas imagens  $A', B', C'$  e  $D'$  são também pontos euclidianos. Trace pelo ponto  $O$  a perpendicular à reta  $r$ , e seja  $H$  a projeção ortogonal de  $O$  sobre  $r$ . Então

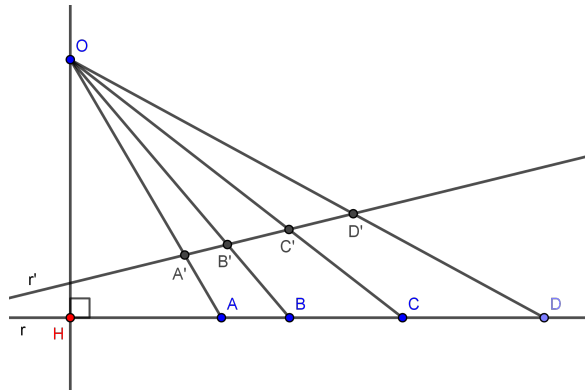


Figura 34: Projeção de  $O$  sobre  $r$ .

$$\begin{aligned}
 R(A, B, C, D) &= \frac{AC}{BC} \cdot \frac{BD}{AD} \\
 &= \frac{\frac{1}{2}HO \cdot AC}{\frac{1}{2}HO \cdot BC} \cdot \frac{\frac{1}{2}HO \cdot BD}{\frac{1}{2}HO \cdot AD} \\
 &= \frac{\text{área}(\triangle AOC)}{\text{área}(\triangle BOC)} \cdot \frac{\text{área}(\triangle BOD)}{\text{área}(\triangle AOD)} \\
 &= \frac{\frac{1}{2}AO \cdot CO \cdot \text{sen}(\angle AOC)}{\frac{1}{2}BO \cdot CO \cdot \text{sen}(\angle BOC)} \cdot \frac{\frac{1}{2}BO \cdot DO \cdot \text{sen}(\angle BOD)}{\frac{1}{2}AO \cdot DO \cdot \text{sen}(\angle AOD)} \\
 &= \frac{\text{sen}(\angle AOC)}{\text{sen}(\angle BOC)} \cdot \frac{\text{sen}(\angle BOD)}{\text{sen}(\angle AOD)}
 \end{aligned}$$



Traçando pelo ponto  $O$  a perpendicular à reta  $r'$  e sendo  $H'$  a projeção ortogonal de  $O$  sobre  $r'$ , temos de modo análogo que

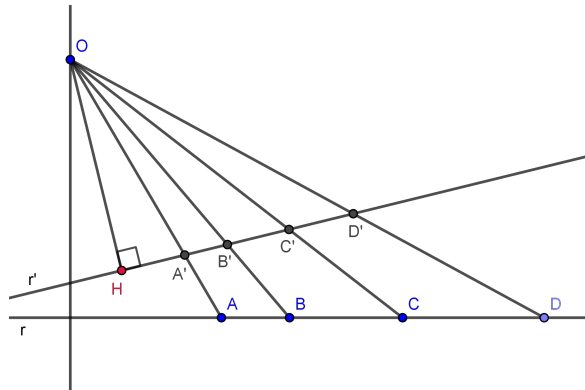


Figura 35: Projeção de  $O$  sobre  $r'$ .

$$\begin{aligned} R(A', B', C', D') &= \frac{\text{sen}(\angle A'OC')}{\text{sen}(\angle B'OC')} \cdot \frac{\text{sen}(\angle B'OD')}{\text{sen}(\angle A'OD')} \\ &= \frac{\text{sen}(\angle AOC)}{\text{sen}(\angle BOC)} \cdot \frac{\text{sen}(\angle BOD)}{\text{sen}(\angle AOD)} \\ &= R(A, B, C, D) \end{aligned}$$

Caso 2: Consideremos o caso em que o ponto  $A$  é um ponto ideal e todos os outros pontos  $B, C, D, A', B', C'$  e  $D'$  são pontos euclidianos. Procedemos de maneira análoga ao caso 1, obtendo que:

$$\begin{aligned} R(A, B, C, D) &= \frac{BD}{BC} \\ &= \frac{\frac{1}{2}HO \cdot BD}{\frac{1}{2}HO \cdot BC} \\ &= \frac{\text{área}(\triangle BOD)}{\text{área}(\triangle BOC)} \\ &= \frac{\frac{1}{2}DO \cdot BO \cdot \text{sen}(\angle BOD)}{\frac{1}{2}CO \cdot BO \cdot \text{sen}(\angle BOC)} \\ &= \frac{DO \cdot \text{sen}(\angle BOD)}{CO \cdot \text{sen}(\angle BOC)} \end{aligned}$$

e que

$$\begin{aligned} R(A', B', C', D') &= \frac{\text{sen}(\angle A'OC')}{\text{sen}(\angle B'OC')} \cdot \frac{\text{sen}(\angle B'OD')}{\text{sen}(\angle A'OD')} \\ &= \frac{\text{sen}(\angle A'OC)}{\text{sen}(\angle BOC)} \cdot \frac{\text{sen}(\angle BOD)}{\text{sen}(\angle A'OD)} \end{aligned}$$

Como  $A$  é um ponto ideal então a reta que passa por  $O$  e  $A'$  é paralela à reta  $r$ . Consequentemente,  $\angle A'OC \cong \angle(OCH)$  e  $\angle A'OD \cong \angle(ODH)$ , pois eles são pares de ângulos alternos internos.

Além disso, como os triângulos  $\triangle OHC$  e  $\triangle OHD$  são retângulos em  $H$ , temos que

$$\text{sen}(\angle A'OC) = \text{sen}(\angle OCH) = \frac{OH}{OC} \quad \text{e}$$

$$\text{sen}(\angle A'OD) = \text{sen}(\angle ODH) = \frac{OH}{OD}$$

Consequentemente,

$$\frac{\text{sen}(\angle A'OC)}{\text{sen}(\angle A'OD)} = \frac{OD}{OC} = \frac{DO}{CO}$$

e, portanto,  $R(A, B, C, D) = R(A', B', C', D')$ .

Caso 3: Consideremos agora que o ponto  $A$  é um ponto ideal e um dos pontos imagem também é um ponto ideal, por exemplo,  $B'$  (observe que para  $B'$  ser ponto ideal a reta  $\overleftrightarrow{OB}$  deve ser paralela à reta  $r$ ). Reduzimos este caso ao caso 2 tomando uma reta auxiliar  $s$ , diferente de  $r'$ , que passa por  $A'$ , não seja paralela às retas  $\overleftrightarrow{OC}$  e  $\overleftrightarrow{OD}$ . A projetividade

$$r(A, B, C, D) \stackrel{O}{\wedge} s(A', B_s, C_s, D_s) \stackrel{O}{\wedge} r'(A', B', C', D')$$

é composta por duas perspectivas de retas que satisfazem o caso 2 e, portanto, preserva a razão cruzada. Portanto a razão cruzada é preservada por qualquer composta de perspectivas de retas (veja a figura 36). □

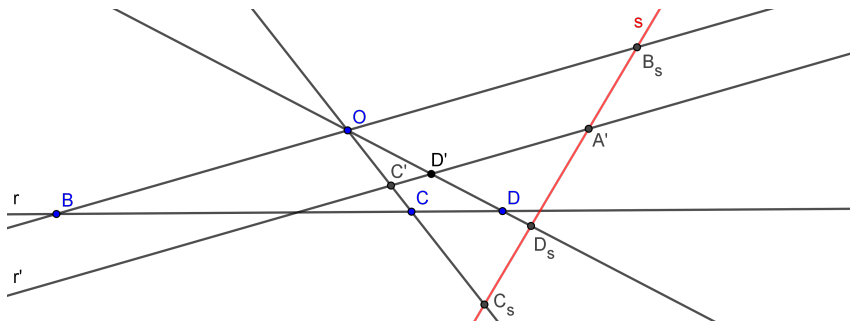


Figura 36: Caso 3 do lema 3.7.

Podemos também definir a razão cruzada de quatro retas  $a, b, c$  e  $d$  coplanares e concorrentes em um ponto  $O$  como a razão cruzada de quatro pontos (respectivamente

$A, B, C$  e  $D$ ) de intersecção destas retas com uma outra reta  $r$  contida no mesmo plano. A posição desta quinta reta é independente por causa da invariância da razão cruzada sob projeção:

$$R(a, b, c, d) = \frac{\text{sen}(a, c)}{\text{sen}(b, c)} \cdot \frac{\text{sen}(b, d)}{\text{sen}(a, d)}$$

Nesta definição,  $(a, b)$ , por exemplo, indica o ângulo oposto ao segmento  $\overline{AB}$ , isto é,  $\angle AOB$ .

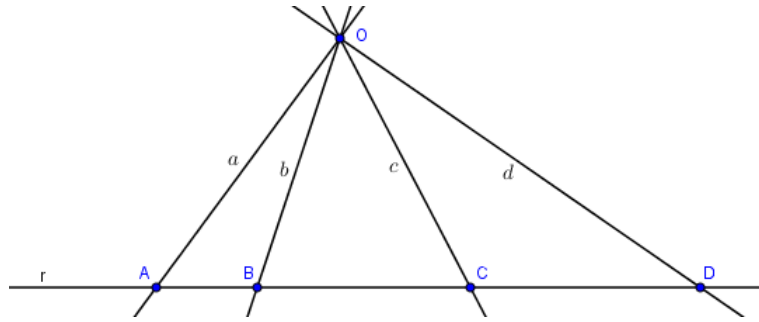


Figura 37: Razão cruzada de retas.

**Teorema 3.8.** *Seja  $p : r \rightarrow r'$  uma projetividade de retas. Então  $R(A, B, C, D) = R(A', B', C', D')$ , onde  $A, B, C, D$  pertencem a  $r$  e  $A', B', C', D'$  pertencem a  $r'$  com  $A' = p(A)$ ,  $B' = p(B)$ ,  $C' = p(C)$  e  $D' = p(D)$ .*

*Demonstração.* Segue da definição de projetividade e do lema 3.7 que a razão cruzada é preservada por qualquer composta de perspectivas de retas, portanto é preservada por qualquer projetividade  $\square$

**Teorema 3.9.** *Seja  $p : r \rightarrow r'$  uma aplicação injetora de retas no plano projetivo, com  $A, B, C$  e  $D$  pontos distintos de uma reta  $r$  e  $A' = p(A)$ ,  $B' = p(B)$ ,  $C' = p(C)$  e  $D' = p(D)$ . Então  $p$  é uma projetividade de retas se, e somente se,  $R(A, B, C, D) = R(A', B', C', D')$ .*

*Demonstração.* Pelos teoremas 3.4 e 3.8 segue que se  $p : r \rightarrow r'$  é uma projetividade com  $A, B, C$  e  $D$  pontos distintos de uma reta  $r$  e  $A' = p(A)$ ,  $B' = p(B)$ ,  $C' = p(C)$  e  $D' = p(D)$  então  $R(A, B, C, D) = R(A', B', C', D')$ .

Para provar a recíproca, tome três pontos distintos  $A, B$  e  $C$  em uma reta  $r$  e suas imagens  $A', B'$  e  $C'$  em  $r'$  e construa uma projetividade  $p_1 : r \rightarrow r'$  tal que  $A' = p_1(A)$ ,  $B' = p_1(B)$  e  $C' = p_1(C)$ . Considere agora um ponto qualquer  $D$  em  $r$  diferente de  $A$ ,

$B$  e  $C$  e sejam  $D' = p(D)$  e  $D'_1 = p_1(D)$ . Sabemos que tanto  $p$  quanto  $p_1$  preservam a razão cruzada. Assim,

$$R(A, B, C, D) = R(A', B', C', D') = R(A', B', C', D'_1)$$

Suponha que  $D' \neq D'_1$  e que  $A' - B' - C' - D' - D'_1$ , neste caso,  $B'D'_1 = B'D' + D'D'_1$  e  $A'D'_1 = A'D' + D'D'_1$ .

Mas,

$$\frac{B'D'_1}{A'D'_1} = \frac{B'D' + D'D'_1}{A'D' + D'D'_1} = \frac{B'D'}{A'D'}$$

se, e somente se,  $B'D' = A'D'$ , o que não ocorre, pois  $A' \neq B'$  e  $A' - B' - D'$ .

logo  $D' = D'_1$  e portanto  $p = p_1$ , pois  $D$  era arbitrário em  $r$ .  $\square$

Agora podemos enunciar o seguinte teorema:

**Teorema 3.10. (Teorema Fundamental da Geometria Projetiva - para retas)** *Sejam  $r$  e  $r'$  duas retas do plano projetivo. Dados  $A, B, C$  três pontos distintos em  $r$  e  $A', B', C'$  três pontos distintos em  $r'$ , existe uma única projetividade  $p : r \rightarrow r'$  tal que  $p(A) = A', p(B) = B'$  e  $p(C) = C'$ .*

*Demonstração.* Temos que o teorema 3.5 garante a existência da projetividade e o teorema 3.9 garante sua unicidade.  $\square$

Voltando à geometria analítica, vamos determinar um procedimento matricial para encontrar a imagem de um ponto  $P(p_1, p_2, p_3)$  a partir da equação da reta  $r'$  e das coordenadas do centro de perspectiva  $O(o_1, o_2, o_3)$ :

**Teorema 3.11.** *Sejam  $r'$  a reta de equação  $ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0$  e o ponto  $O(o_1, o_2, o_3)$  no plano projetivo. Então, a perspectiva  $p : r \rightarrow r'$  de centro  $O$  é representada pela matriz*

$$M = \begin{bmatrix} bo_2 + co_3 & -ao_2 & -ao_3 \\ -bo_1 & ao_1 + co_3 & -bo_3 \\ -co_1 & -co_2 & ao_1 + bo_2 \end{bmatrix}$$

Portanto, dado um ponto  $P(p_1, p_2, p_3)$ , sua imagem  $p(P)$  tem coordenadas homogêneas representadas pelo seguinte produto:

$$\begin{bmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} bo_2 + co_3 & -ao_2 & -ao_3 \\ -bo_1 & ao_1 + co_3 & -bo_3 \\ -co_1 & -co_2 & ao_1 + bo_2 \end{bmatrix}$$

*Demonstração.* A equação da reta que passa pelos pontos  $O$  e  $P$  é determinada por

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ o_1 & o_2 & o_3 \\ p_1 & p_2 & p_3 \end{vmatrix} = 0$$

Resolvendo o determinante, obtemos:

$$(o_2p_3 - o_3p_2)x_1 + (o_3p_1 - o_1p_3)x_2 + (o_1p_2 - o_2p_1)x_3 = 0$$

O ponto  $p(P)$  é a intersecção desta reta com a reta  $r'$ . Calculamos então o determinante cujas linhas são as coordenadas das retas  $\overleftrightarrow{OP}$ ,  $r'$  e  $\overrightarrow{i}$ ,  $\overrightarrow{j}$ ,  $\overrightarrow{k}$  são os vetores básicos de  $\mathbb{R}^3$

$$\begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ o_2p_3 - o_3p_2 & o_3p_1 - o_1p_3 & o_1p_2 - o_2p_1 \\ a & b & c \end{vmatrix} = 0$$

Logo,  $p(P)$  terá as coordenadas

$$\begin{aligned} & (p_1(co_3 + bo_2) - p_2(bo_1) - p_3(co_1), -p_1(ao_2) + p_2(ao_1 + co_3) - p_3(co_2), \\ & -p_1(ao_3) - p_2(bo_3) + p_3(ao_1 + o_2)), \end{aligned}$$

que podem ser escritas matricialmente como

$$\begin{bmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} bo_2 + co_3 & -ao_2 & -ao_3 \\ -bo_1 & ao_1 + co_3 & -bo_3 \\ -co_1 & -co_2 & ao_1 + bo_2 \end{bmatrix}$$

□

A matriz  $M$  é conhecida como a matriz que representa a perspectiva  $p$ . Além disto, se  $p_1 : r \rightarrow s$  é uma perspectiva de centro  $O_1$ , representada pela matriz  $M_1$  e  $p_2 : s \rightarrow t$  é uma perspectiva de centro  $O_2$ , representada pela matriz  $M_2$ , então a composta de perspectivas  $p_2 \circ p_1 : r \rightarrow t$  é uma projetividade de retas representada pela matriz  $M_1 \cdot M_2$ .

### 3.2 TRANSFORMAÇÕES PROJETIVAS NO PLANO

Em uma perspectiva plana,  $p : \mathbb{RP}^2 \rightarrow \mathbb{RP}^2$ , como definido no capítulo 1, vale também que se  $P(p_1, p_2, p_3) \in \mathbb{RP}^2$ , existe uma matriz  $M$ , de ordem 3, tal que

$$\begin{bmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \end{bmatrix} \cdot M = \begin{bmatrix} p'_1 & p'_2 & p'_3 \end{bmatrix}$$

onde  $(p'_1, p'_2, p'_3)$  é a imagem  $p(P)$ .

A seguir, apresentamos um método para obtenção de uma matriz de qualquer transformação projetiva do plano projetivo desde que sejam dados quatro pontos distintos do plano projetivo, três a três não colineares, e suas imagens, distintas e três a três não colineares.

Considere quatro pontos distintos, três a três não colineares,  $A(a_1, a_2, a_3)$ ,  $B(b_1, b_2, b_3)$ ,  $C(c_1, c_2, c_3)$ ,  $D(d_1, d_2, d_3)$ , e outros quatro pontos distintos, também, três a três não colineares,  $A'(a'_1, a'_2, a'_3)$ ,  $B'(b'_1, b'_2, b'_3)$ ,  $C'(c'_1, c'_2, c'_3)$  e  $D'(d'_1, d'_2, d'_3)$ , em  $\mathbb{RP}^2$ , com  $a_i + b_i + c_i = d_i$  e  $a'_i + b'_i + c'_i = d'_i$  com  $i = 1, 2$  e  $3$ .

Considere também as matrizes

$$M_1 = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \quad M'_1 = \begin{bmatrix} a'_1 & a'_2 & a'_3 \\ b'_1 & b'_2 & b'_3 \\ c'_1 & c'_2 & c'_3 \end{bmatrix},$$

e os pontos  $P(1, 0, 0)$ ,  $Q(0, 1, 0)$ ,  $R(0, 0, 1)$  e  $S(1, 1, 1)$ . Logo,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot M_1 = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot M_1 = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot M_1 = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot M_1 = \begin{bmatrix} d_1 & d_2 & d_3 \end{bmatrix}$$

Seja  $M_2$  a matriz adjunta de  $M_1$ , isto é, a transposta da matriz cofatora de  $M_1$ . Temos que

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix} \cdot M_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} \cdot M_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \cdot M_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} d_1 & d_2 & d_3 \end{bmatrix} \cdot M_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Além disso,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot M'_1 = \begin{bmatrix} a'_1 & a'_2 & a'_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot M'_1 = \begin{bmatrix} b'_1 & b'_2 & b'_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot M'_1 = \begin{bmatrix} c'_1 & c'_2 & c'_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot M'_1 = \begin{bmatrix} d'_1 & d'_2 & d'_3 \end{bmatrix}$$

Finalmente, seja  $M = M_2 \cdot M'_1$ . Dessa forma, temos que

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix} \cdot M = \begin{bmatrix} a'_1 & a'_2 & a'_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} \cdot M = \begin{bmatrix} b'_1 & b'_2 & b'_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \cdot M = \begin{bmatrix} c'_1 & c'_2 & c'_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} d_1 & d_2 & d_3 \end{bmatrix} \cdot M = \begin{bmatrix} d'_1 & d'_2 & d'_3 \end{bmatrix}$$

Portanto, obtivemos uma matriz que representa uma projetividade que leva  $A$  em  $A'$ ,  $B$  em  $B'$ ,  $C$  em  $C'$  e  $D$  em  $D'$ .

Observe que se os pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$  fossem colineares o algoritmo acima não funcionaria pois teríamos

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix} \cdot M_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} \cdot M_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \cdot M_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

não sendo possível determinar  $M_1$  e, conseqüentemente,  $M$ . Observe ainda que, pelo teorema A.18,  $M_2$  é inversível, portanto, pelo teorema A.9,  $M$  também é inversível.

Na verdade, os quatro pontos e suas imagens caracterizam uma projetividade. Usaremos o seguinte lema para garantir este resultado.

**Lema 3.12.** *Se  $p : \mathbb{R}P^2 \rightarrow \mathbb{R}P^2$  é uma projetividade que fixa os pontos  $(1, 0, 0)$ ,  $(0, 1, 0)$ ,  $(0, 0, 1)$  e  $(1, 1, 1)$  de  $\mathbb{R}P^2$  então  $p = Id_{\mathbb{R}P^2}$ , onde  $Id_{\mathbb{R}P^2}$  é a aplicação identidade de  $\mathbb{R}P^2$ .*

*Demonstração.* Como  $1 = 1 + 0 + 0 = 0 + 1 + 0 = 0 + 0 + 1$  então as coordenadas dos pontos  $(1, 0, 0)$ ,  $(0, 1, 0)$ ,  $(0, 0, 1)$  e  $(1, 1, 1)$  já estão nas condições do algoritmo que acabamos de construir. Assim, de acordo com o algoritmo, a matriz  $M = M_2 \cdot M'_1$  que representa a projetividade  $p$  é a matriz identidade em  $\mathbb{R}P^2$ . Portanto,  $p = Id_{\mathbb{R}P^2}$ .  $\square$

Agora, estamos prontos para enunciar o seguinte teorema de caracterização de projetividades no plano:

**Teorema 3.13. (Teorema fundamental da geometria projetiva para planos)** *Sejam  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$  quatro pontos do plano projetivo, três a três não colineares e  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  e  $D'$  quatro pontos do plano projetivo, três a três não colineares. Então existe uma única projetividade que leva  $A$  em  $A'$ ,  $B$  em  $B'$ ,  $C$  em  $C'$  e  $D$  em  $D'$ .*

*Demonstração.* A existência é garantida pelo algoritmo anterior. Para provar a unicidade, sejam  $p_1, p_2 : \mathbb{R}P^2 \rightarrow \mathbb{R}P^2$  duas transformações projetivas que levam  $A$  em  $A'$ ,  $B$  em  $B'$ ,  $C$  em  $C'$  e  $D$  em  $D'$ . Também de acordo com o algoritmo anterior, podemos considerar  $q_1, q_2 : \mathbb{R}P^2 \rightarrow \mathbb{R}P^2$  transformações projetivas tais que  $q_1(1, 0, 0) = A$ ,  $q_1(0, 1, 0) = B$ ,  $q_1(0, 0, 1) = C$ ,  $q_1(1, 1, 1) = D$ ,  $q_2(1, 0, 0) = A'$ ,  $q_2(0, 1, 0) = B'$ ,  $q_2(0, 0, 1) = C'$  e  $q_2(1, 1, 1) = D'$ .

Considere a transformação projetiva  $p = (q_2^{-1} \circ p_1 \circ q_1) \circ (q_1^{-1} \circ p_2^{-1} \circ q_2)$ . Temos que  $p$  fixa os pontos  $(1, 0, 0)$ ,  $(0, 1, 0)$ ,  $(0, 0, 1)$  e  $(1, 1, 1)$ . Pelo lema 3.12, temos que  $p$  é a aplicação identidade em  $\mathbb{R}P^2$ . Assim,  $p_1 \circ p_2^{-1} = \text{Id}_{\mathbb{R}P^2}$  e, portanto,  $p_1 = p_2$ .  $\square$

Vejamos, a seguir como as transformações euclidianas, (isometrias, homotetias e semelhanças) são exemplos interessantes quando vistas como transformações projetivas no plano.

### 3.2.1 Isometrias

Uma transformação do plano  $\pi$  é uma aplicação bijetora de  $\pi$  em  $\pi$ . Uma isometria do plano  $\pi$  é uma transformação  $T : \pi \rightarrow \pi$  que preserva distâncias. Mais precisamente,  $T$  é uma isometria quando se tem

$$d(T(P), T(Q)) = d(P, Q),$$

para quaisquer pontos  $P$  e  $Q$  do plano  $\pi$ .

**Teorema 3.14.** *Sejam  $T : \pi \rightarrow \pi$ , uma isometria,  $P$  e  $Q$  pontos de  $\pi$ ,  $T(P) = P_1$  e  $T(Q) = Q_1$ . Então  $T$  transforma todo ponto  $R$  do segmento  $\overline{PQ}$  num ponto  $R_1$  do segmento  $\overline{P_1Q_1}$ .*

*Demonstração.* Como  $R \in \overline{PQ}$ , temos:

$$d(P, Q) = d(P, R) + d(R, Q)$$

Sendo  $R_1 = T(R)$ , como  $T$  é uma isometria, então

$$d(P_1, Q_1) = d(P, Q), \quad d(P_1, R_1) = d(P, R), \quad d(R_1, Q_1) = d(R, Q).$$

Logo,

$$d(P_1, Q_1) = d(P_1, R_1) + d(R_1, Q_1).$$

Segue da desigualdade triangular que  $R_1 \in \overline{P_1Q_1}$ .  $\square$



O teorema acima diz que toda isometria leva pontos colineares em pontos colineares. Temos o seguinte teorema.

**Teorema 3.15.** *A imagem de uma reta  $r$  por uma isometria  $T$  é uma reta  $r_1 = T(r)$ .*

*Demonstração.* Sejam  $P$  e  $Q$  pontos distintos de  $r$ ,  $T(P) = P_1$  e  $T(Q) = Q_1$  suas imagens por  $T$ . Chamemos de  $r_1$  a reta que passa pelos pontos  $P_1$  e  $Q_1$ . Dado qualquer outro ponto  $R$  de  $r$  temos que  $R \in \overline{PQ}$ ,  $P \in \overline{QR}$  ou  $Q \in \overline{PR}$ , assim, pela propriedade anterior, temos que  $R_1 \in \overline{P_1Q_1}$ ,  $P_1 \in \overline{Q_1R_1}$  ou  $Q_1 \in \overline{P_1R_1}$ , logo todos os pontos de  $r$  são transformados pela isometria  $T$  em pontos da reta  $r_1$ .

Reciprocamente, se  $R_1$  é um ponto qualquer da reta  $r_1$ , suponha que  $P_1 \in \overline{R_1Q_1}$ , seja  $R$  o ponto da reta  $r$  tal que  $P \in \overline{RQ}$  e  $d(R, Q) = d(R_1, Q_1)$ , então  $d(R, Q) = d(T(R), Q_1) = d(R_1, Q_1)$  e como  $P \in \overline{RQ}$  e  $P_1 \in \overline{R_1Q_1}$  segue que  $T(R) = R_1$ . Assim, todos os pontos de reta  $r_1$  são imagens por  $T$  de pontos da reta  $r$ , portanto  $T(r) = r_1$ .  $\square$

A seguir, estudamos as matrizes de transformações no plano euclidiano e projetivo. Para facilitar os cálculos, usaremos  $z = 1$  nas coordenadas homogêneas.

### Translação

A translação  $T_v : \mathbb{RP}^2 \rightarrow \mathbb{RP}^2$  determinada pelo vetor  $v(a, b)$  é a transformação que leva cada ponto  $P(x, y, 1)$  do plano  $\mathbb{RP}^2$  no ponto  $T_v(P)(x + a, y + b, 1)$ . A translação  $T_v$  transforma toda figura  $F$  numa figura  $T_v(F) = F'$ , cujos pontos são obtidos trasladando-se os pontos  $P$  de  $F$  pelo mesmo vetor  $v$ .

A matriz da transformação  $T_v$  é dada por

$$M_{T_v} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ a & b & 1 \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

e é tal que

$$\begin{bmatrix} x & y & 1 \end{bmatrix} \cdot M_{T_v} = \begin{bmatrix} x + a & y + b & 1 \end{bmatrix}.$$

**Exemplo 3.2.** Podemos construir uma matriz de translação  $M_{T_{(1,2)}}$ , determinada pelo vetor  $v(1, 2)$ , utilizando o teorema 3.13:

Sejam os pontos  $A(1, 2, 1)$ ,  $B(3, 1, 1)$ ,  $C(2, 0, 1)$ ,  $D(1, 1, 1)$  não colineares e suas respectivas imagens  $A'(2, 4, 1)$ ,  $B'(4, 3, 1)$ ,  $C'(3, 2, 1)$  e  $D'(2, 3, 1)$ .

Antes de determinar as matrizes  $M_1$  e  $M'_1$  devemos ajustar as coordenadas dos pontos  $A(1, 2, 1)$ ,  $B(3, 1, 1)$ ,  $C(2, 0, 1)$ ,  $D(1, 1, 1)$  de modo que

$$\begin{cases} 1\alpha + 3\beta + 2\gamma = 1\delta \\ 2\alpha + 1\beta + 0\gamma = 1\delta \\ 1\alpha + 1\beta + 1\gamma = 1\delta \end{cases} \implies \begin{cases} \alpha + 3\beta + 2\gamma - \delta = 0 \\ 2\alpha + \beta - \delta = 0 \\ \alpha + \beta + \gamma - \delta = 0 \end{cases}$$

Assim,

$$\alpha = \frac{2}{3}\delta, \quad \beta = \frac{-1}{3}\delta \quad \text{e} \quad \gamma = \frac{2}{3}\delta.$$

Fazendo  $\delta = 3$ , temos  $\alpha = 2$ ,  $\beta = -1$  e  $\gamma = 2$ , donde  $A(2, 4, 2)$ ,  $B(-3, -1, -1)$ ,  $C(4, 0, 2)$ ,  $D(3, 3, 3)$ . Analogamente, ajustando as coordenadas das imagens,

$$\begin{cases} 2\epsilon + 4\phi + 3\tau = 2\mu \\ 4\epsilon + 3\phi + 2\tau = 3\mu \\ \epsilon + \phi + \tau = \mu \end{cases}$$

Assim,

$$\epsilon = \frac{2}{3}\mu, \quad \phi = \frac{-1}{3}\mu \quad \text{e} \quad \tau = \frac{2}{3}\mu.$$

Fazendo  $\mu = 3$ , temos  $\epsilon = 2$ ,  $\phi = -1$  e  $\tau = 2$ , donde  $A'(4, 8, 2)$ ,  $B'(-4, -3, -1)$ ,  $C'(6, 4, 2)$  e  $D'(6, 9, 3)$ . Assim,

$$M_1 = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ -3 & -1 & -1 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad M'_1 = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 2 \\ -4 & -3 & -1 \\ 6 & 4 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad M_2 = \begin{bmatrix} -2 & -8 & -2 \\ 2 & -4 & -4 \\ 4 & 16 & 10 \end{bmatrix}$$

Portanto

$$M_{T(1,2)} = M_2 \cdot M'_1 = \begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 \\ 12 & 24 & 12 \end{bmatrix}$$

Observe que a matriz acima e a matriz dada em (3.1), para  $a = 1$  e  $b = 2$ , são representantes da mesma transformação projetiva.

### Rotação

A rotação  $R_{\theta, O} : \mathbb{R}P^2 \rightarrow \mathbb{R}P^2$  determinada por um ângulo  $\theta$  em torno da origem transforma o ponto  $P(x, y, 1)$  no ponto  $P'(x', y', 1)$  com

$$x' = x \cos \theta - y \sin \theta$$

e

$$y' = x \operatorname{sen} \theta + y \operatorname{cos} \theta.$$

A seguir, apresentamos a prova dessas relações para o caso em que  $\alpha$  é o afixo de um ponto  $P(x, y)$  e  $\alpha + \theta$  é o afixo de  $P' = R_{\theta, O}(P)$  de coordenadas  $(x', y')$ .

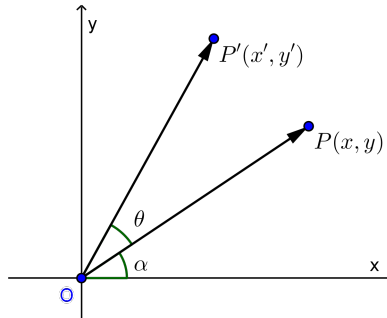


Figura 38: Rotação com centro na origem e ângulo  $\theta$ .

$$\begin{aligned} x' &= OP' \operatorname{cos}(\alpha + \theta) \\ &= OP'(\operatorname{cos} \alpha \cdot \operatorname{cos} \theta - \operatorname{sen} \alpha \cdot \operatorname{sen} \theta) \\ &= OP' \cdot \operatorname{cos} \alpha \cdot \operatorname{cos} \theta - OP' \cdot \operatorname{sen} \alpha \cdot \operatorname{sen} \theta. \end{aligned}$$

Mas,  $OP = OP'$ ,  $x = OP \cdot \operatorname{cos} \alpha$  e  $y = OP \cdot \operatorname{sen} \alpha$ . Logo,

$$\begin{cases} x' = x \operatorname{cos} \theta - y \operatorname{sen} \theta \\ y' = x \operatorname{sen} \theta + y \operatorname{cos} \theta. \end{cases}$$

A matriz  $T_{R_\theta}$  dessa transformação é dada por

$$M_{R_{\theta, O}} = \begin{bmatrix} \operatorname{cos} \theta & \operatorname{sen} \theta & 0 \\ -\operatorname{sen} \theta & \operatorname{cos} \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

e é tal que

$$\begin{bmatrix} x & y & 1 \end{bmatrix} \cdot M_{R_{\theta, O}} = \begin{bmatrix} x \operatorname{cos} \theta - y \operatorname{sen} \theta & x \operatorname{sen} \theta + y \operatorname{cos} \theta & 1 \end{bmatrix}.$$

Para a rotação determinada por um ângulo  $\theta$  em torno de um ponto  $C(a, b)$  qualquer,  $M_{R_{\theta, C}}$ , basta fazer uma translação pelo vetor  $-(a, b)$  para deslocar o centro de rotação

até a origem, fazer uma rotação de ângulo  $\theta$  em torno da origem  $O(0,0,z)$  e, em seguida, uma translação determinada pelo vetor  $(a,b)$ , isto é:

$$R_{\theta,C} = T_{(a,b)} \circ R_{\theta,O} \circ T_{-(a,b)}.$$

Assim, teremos a seguinte matriz de transformação:

$$M_{R_{\theta,C}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -a & -b & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos \theta & \text{sen } \theta & 0 \\ -\text{sen } \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ a & b & 1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & \text{sen } \theta & 0 \\ -\text{sen } \theta & \cos \theta & 0 \\ -a \cos \theta + b \text{sen } \theta + a & -a \text{sen } \theta - b \cos \theta + b & 1 \end{bmatrix}.$$

### Reflexão

A reflexão  $R_m : \mathbb{RP}^2 \rightarrow \mathbb{RP}^2$  em relação a uma reta  $m$  é uma transformação que fixa todos os pontos de  $m$  e associa cada ponto  $P(x, y, 1)$ , fora de  $m$ , a um ponto  $P'(x', y', 1)$ , simétrico com relação a  $m$ . Dizemos que o ponto  $P'$  é simétrico a  $P$  em relação à reta  $m$ . Neste caso,  $m$  é a mediatriz do segmento  $\overline{PP'}$ .

No plano  $\mathbb{RP}^2$  tal qual o eixo  $x$  coincida com a reta  $m$ , para cada ponto  $P(x, y, 1)$  temos o ponto  $P'(x, -y, 1)$ . Daí resulta que a reflexão inverte a orientação do plano, pois deixa o eixo  $x$  fixo e inverte a orientação do eixo  $y$ . Em termos de vetores unitários  $e_1(1, 0)$  e  $e_2(0, 1)$  dos eixos, transforma  $e_1$  em si mesmo e  $e_2$  em  $-e_2$ .

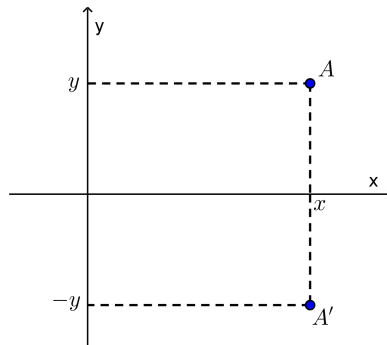


Figura 39: Reflexão de um ponto com relação ao eixo  $x$ .

Caso  $m$  seja uma reta que passa pela origem e faz um ângulo  $\alpha$  com o eixo  $x$ ,  $R_m$  transforma-o no eixo  $x_1$ , obtido de  $x$  por rotação de ângulo  $2\alpha$  e transforma o eixo  $y$

no eixo  $y_1$  tal que o ângulo de  $y$  para  $y_1$  também é de  $2\alpha$ , obtendo, assim, um novo sistema ortogonal de coordenadas.

A construção a seguir será dada para o caso em que  $0 < 2\alpha < 90^\circ$ , como está ilustrado na figura 40). Considere um ponto  $P(x, y)$  qualquer no primeiro quadrante tal que  $y > \operatorname{tg}(2\alpha)x$ . Sejam  $(x_1, y_1)$  as coordenadas de  $P$  no novo sistema  $Ox_1y_1$ . Sejam  $B$  e  $C$  as projeções ortogonais de  $P$  sobre os eixos  $Ox_1$  e  $Ox$ , respectivamente,  $D$  e  $A$  as projeções ortogonais de  $B$  sobre o eixo  $Ox$  e sobre a reta  $\overleftrightarrow{CP}$ , respectivamente.

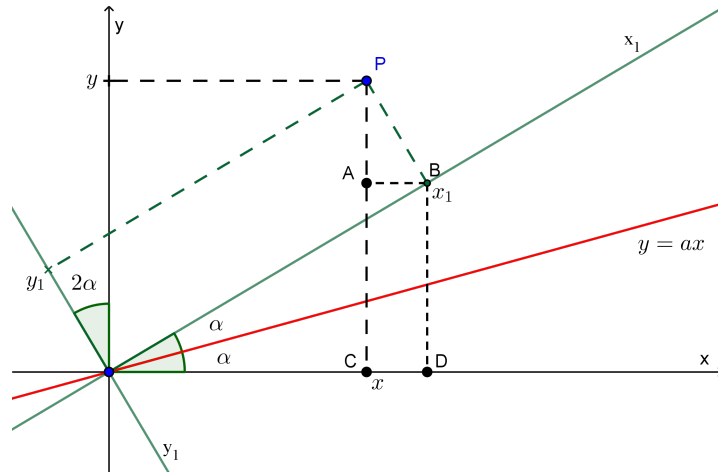


Figura 40: Reflexão dos eixos  $x$  e  $y$  com relação à reta  $y = ax$ .

Então

$$\begin{cases} x = OD - CD = OD - AB \\ y = CA + AP = DB + AP \end{cases} \quad (3.3)$$

Observe que o eixo  $y_1$  é paralelo à reta  $\overleftrightarrow{BP}$  cortado pela reta  $\overleftrightarrow{CP}$ , logo, pelo teorema dos ângulos alternos internos formado por um par de retas paralelas cortadas por uma transversal, o ângulo  $\angle APB$  mede  $2\alpha$  e que no triângulo  $\triangle PAB$  temos:

$$AB = y_1 \operatorname{sen}(2\alpha) \quad \text{e} \quad AP = y_1 \operatorname{cos}(2\alpha)$$

e no triângulo  $\triangle OBD$ :

$$OD = x_1 \operatorname{cos}(2\alpha) \quad \text{e} \quad DB = x_1 \operatorname{sen}(2\alpha)$$

Substituindo os valores de  $AB$ ,  $AP$ ,  $OD$  e  $DB$  em (3.3), temos

$$\begin{cases} x = x_1 \operatorname{cos}(2\alpha) - y_1 \operatorname{sen}(2\alpha) \\ y = x_1 \operatorname{sen}(2\alpha) + y_1 \operatorname{cos}(2\alpha) \end{cases} \quad (3.4)$$

Resolvendo o sistema (3.4), obtemos:

$$\begin{cases} x_1 = x \cos(2\alpha) + y \operatorname{sen}(2\alpha) \\ y_1 = x \operatorname{sen}(2\alpha) - y \cos(2\alpha). \end{cases}$$

Para determinar a imagem de um ponto  $P$  qualquer pela reflexão em torno na reta  $m$  que forma um ângulo  $\alpha$  com o eixo  $x$  note que se  $e_1, e_2, f_1$  e  $f_2$  forem, respectivamente, os vetores unitários dos eixos  $x, y, x_1$  e  $y_1$ , então

$$\begin{cases} f_1 = \cos(2\alpha) \cdot e_1 + \operatorname{sen}(2\alpha) \cdot e_2 \\ f_2 = \operatorname{sen}(2\alpha) \cdot e_1 - \cos(2\alpha) \cdot e_2. \end{cases}$$

A reflexão  $R_m$  transforma um ponto  $P(x, y, 1)$  no ponto  $P'(x', y', 1)$  tal que  $P' = x f_1 + y f_2$ . Ou seja,

$$\begin{cases} x' = x \cos(2\alpha) + y \operatorname{sen}(2\alpha) \\ y' = x \operatorname{sen}(2\alpha) - y \cos(2\alpha) \end{cases} \quad (3.5)$$

Assim, a matriz de transformação  $M_{R_m}$  da reflexão com relação à reta de equação  $y = ax$  é dada por

$$M_{R_m} = \begin{bmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha & 0 \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e é tal que

$$\begin{bmatrix} x & y & 1 \end{bmatrix} \cdot M_{R_m} = \begin{bmatrix} x \cos 2\alpha + y \operatorname{sen} 2\alpha & x \operatorname{sen} 2\alpha - y \cos 2\alpha & 1 \end{bmatrix}.$$

Considere agora a reta  $m$  de equação  $y = ax + b$ , a qual corta o eixo  $y$  no ponto  $(0, b, 1)$ .

A reta  $m_1$ , de equação  $y = ax$  passa pela origem e faz com o eixo  $x$  o mesmo ângulo  $\alpha$ . Para obter a imagem do ponto  $P(x, y, 1)$  pela reflexão  $R_m$  em torno da reta  $m$ , primeiro daremos a  $P$  a translação vertical de vetor  $(0, -b)$ , obtendo  $P_1(x, y - b, 1)$ . Em seguida, refletimos  $P_1$  em torno da reta  $m'$ , obtendo o ponto  $P_2(x_2, y_2, 1)$  com

$$\begin{cases} x_2 = x \cos 2\alpha + (y - b) \sin 2\alpha \\ y_2 = x \sin 2\alpha - (y - b) \cos 2\alpha. \end{cases}$$

Finalmente, damos a  $P_2$  a translação vertical de vetor  $(0, b)$ , chegando a  $P'(x', y', z)$  com

$$\begin{cases} x' = x \cos 2\alpha + (y - b) \sin 2\alpha \\ y' = x \sin 2\alpha - (y - b) \cos 2\alpha + b. \end{cases}$$

Assim, a reflexão em torno de uma reta  $m$  qualquer será dada por

$$R_m = T_{(0,b)} \circ R_{m_1} \circ T_{(0,-b)},$$

onde  $R_{m_1}$  é a reflexão em torno da reta  $m_1$  paralela a  $m$  que passa pela origem.

Observe que as isometrias fixam todos os pontos da reta ideal, ou seja todos os pontos cujas coordenadas são do tipo  $(x_1, x_2, 0)$ .

### 3.3 CÔNICAS

As cônicas (elipse, hipérbole e parábola) podem ser definidas de várias maneiras. As usuais referem-se aos focos.

A definição projetiva de cônicas é dada a seguir.

**Definição 3.16.** Uma cônica é uma projeção de um círculo em um plano.

Dessa definição decorre que qualquer propriedade do círculo que seja invariante sob projeção também será possuída por qualquer cônica.

Como a razão cruzada é invariante sob a projeção, temos o seguinte teorema.

**Teorema 3.17.** Dada uma cônica  $\Gamma$ , cinco pontos  $A, B, C, D, O$  com  $O$  variável em  $\Gamma$  e  $\overleftrightarrow{OA} = a$ ,  $\overleftrightarrow{OB} = b$ ,  $\overleftrightarrow{OC} = c$  e  $\overleftrightarrow{OD} = d$ , então  $R(a, b, c, d)$  permanece constante.

*Demonstração.* Começemos considerando  $\Gamma$  como sendo uma circunferência. Pelo teorema do ângulo inscrito, são congruentes os ângulos com vértice em  $O$  subtendido pelo mesmo arco formado por dois pontos dentre  $A, B, C, D$ , independentemente da posição de  $O$ . As quatro retas  $a, b, c, d$  determinam uma razão cruzada  $R(a, b, c, d)$  que depende apenas dos ângulos subtendidos pelos arcos  $\widehat{AOC}$ ,  $\widehat{BOC}$ ,  $\widehat{AOD}$ ,  $\widehat{BOD}$ . Se considerarmos um outro ponto  $O'$  na circunferência  $\Gamma$ , obtemos quatro retas  $a' = \overleftrightarrow{O'A}$ ,  $b' = \overleftrightarrow{O'B}$ ,  $c' = \overleftrightarrow{O'C}$  e  $d' = \overleftrightarrow{O'D}$ . Consequentemente,  $R(a, b, c, d) = R(a', b', c', d')$ .

Agora, se  $\Gamma$  for uma cônica qualquer com  $O, A, B, C, D \in \Gamma$ , com  $O$  variável e  $A, B, C, D$  fixos, aplicamos uma projetividade de  $\Gamma$  sobre uma circunferência. Como a razão cruzada é preservada na circunferência e também por projeções, concluímos que

$$R(a, b, c, d) = R(a', b', c', d').$$

□

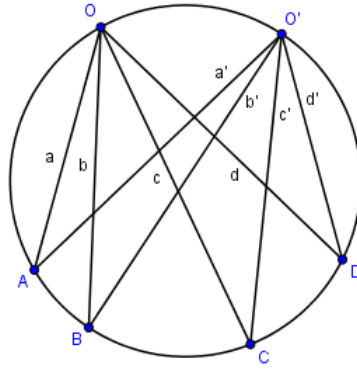


Figura 41: Razão cruzada na circunferência.

Para podermos definir uma cônica de maneira puramente projetiva, precisaremos do conceito de *feixe de retas e correspondência projetiva*.

**Definição 3.18.** Feixe de retas é o conjunto de todas as retas em um plano que passam por um determinado ponto  $O$ .

**Definição 3.19.** Considere os feixes que passam por dois pontos  $O$  e  $O'$  de uma cônica  $\Gamma$ . Entre as retas do feixe  $O$  e as do feixe  $O'$  podemos estabelecer uma correspondência bijetora associando uma reta  $a$  de  $O$  a uma reta  $a'$  de  $O'$  sempre que  $a$  e  $a'$  se encontrarem em um ponto  $A$  da cônica  $\Gamma$ . Então, pelo teorema 3.17 quatro retas quaisquer  $a, b, c$  e  $d$  do feixe  $O$  terão a mesma razão cruzada que as quatro retas correspondentes  $a', b', c'$  e  $d'$  de  $O'$ . Qualquer correspondência bijetora entre dois feixes de retas com esta propriedade é chamada de correspondência projetiva.

Diz-se que os feixes entre os quais se definiu uma correspondência projetiva estão relacionados projetivamente. Agora, podemos definir uma cônica de um ponto de vista projetivo.

**Definição 3.20.** Uma cônica é o lugar geométrico das intersecções de retas correspondentes em dois feixes relacionados projetivamente.

Pares de feixes de retas relacionados projetivamente podem ser obtidos do seguinte modo: Projete todos os pontos  $P$  sobre uma reta  $l$  a partir de dois centros diferentes  $O$  e  $O''$ ; nos feixes de projeção faça com que as retas  $a$  e  $a''$ , que se cortam em  $l$ , correspondam uma à outra. Assim, os dois feixes estarão relacionados projetivamente. Em seguida, transporte o feixe  $O''$  para qualquer posição  $O'$  traçando, para cada reta  $a''$  do feixe de  $O''$ , uma reta paralela  $a'$  em  $O'$ . O feixe de  $O'$  resultante estará relacionado



projetivamente a  $O$  de modo que as intersecções de  $a$  e  $a'$  formam uma cônica (observe um exemplo na figura 42).

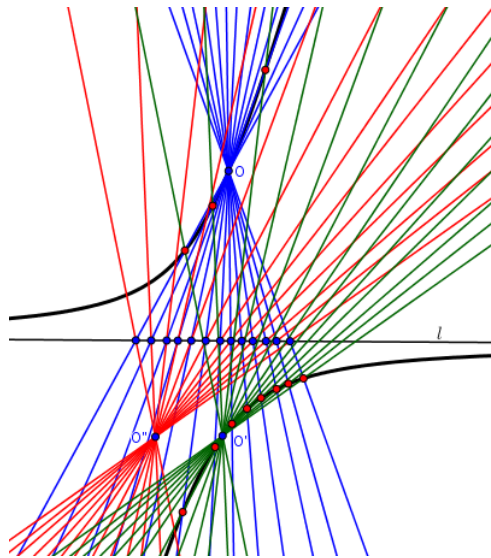


Figura 42: Cônica gerada por feixes projetivos.

As propriedades projetivas das tangentes às cônicas são baseadas no seguinte teorema fundamental.

**Teorema 3.21.** *A razão cruzada dos pontos de intersecção de quatro tangentes fixas a uma cônica com uma quinta tangente que as intersecta é a mesma para qualquer posição da quinta tangente nesta condição de intersecção não vazia.*

*Demonstração.* Como uma cônica é uma projeção de um círculo, e uma vez que o teorema diz respeito apenas a propriedades invariantes sob projeção, uma prova para o caso do círculo será suficiente para demonstrar o teorema em geral.

Sejam  $P, Q, R$  e  $S$  quatro pontos distintos quaisquer em um círculo  $\Gamma$ , e pelos quais passam respectivamente as tangentes  $a, b, c$  e  $d$ ,  $T$  um outro ponto com a tangente  $t$ , cortada por  $a, b, c$  e  $d$  em  $A, B, C$  e  $D$ , respectivamente. Sem perda de generalidade, suponha que os pontos  $P, Q, R, S, T$  estejam posicionados como na figura 43. Se o ponto  $M$  é o centro de  $\Gamma$  então  $m(\angle TMA) = \frac{1}{2}m(\angle TMP)$ , a qual, por sua vez, é igual à medida do ângulo  $\angle TXP$  inscrito em  $\Gamma$  com  $X$  não pertencente ao arco  $\widehat{PQT}$ .

Analogamente,  $\frac{1}{2}m(\angle TMQ) = m(\angle TMB)$  e é igual à medida do ângulo  $\angle TYQ$  inscrito em  $\Gamma$  com  $Y$  não pertencente ao arco  $\widehat{QRT}$ . Assim,

$$\begin{aligned} m(\angle AMB) &= m(\angle TMA) - m(\angle TMB) \\ &= \frac{1}{2}m(\angle TMP) - \frac{1}{2}m(\angle TMQ) \\ &= \frac{1}{2}m(\angle PMQ) \end{aligned}$$

e  $\frac{1}{2}m(\angle PMQ)$  é igual à medida de um ângulo inscrito em um ponto do arco  $\widehat{QTP}$ .

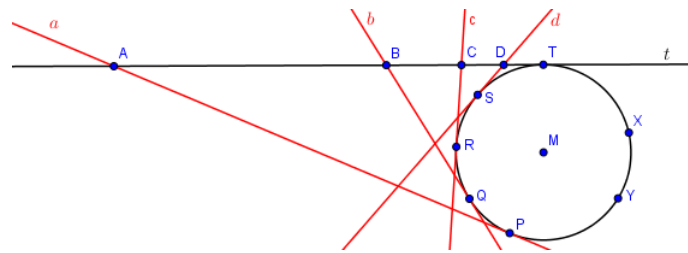


Figura 43: Propriedade das tangentes no círculo.

Analogamente, para os ângulos  $\angle BMC$  e  $\angle CMD$ . Assim, os pontos  $A, B, C, D$  são projetados a partir de  $M$  por quatro retas cujos ângulos são dados pelas posições fixas de  $P, Q, R$  e  $S$  decorrendo daí que a razão cruzada  $R(A, B, C, D)$  depende apenas das quatro tangentes  $a, b, c, d$  e não da posição da quinta tangente.  $\square$

O teorema 3.21 nos possibilita dualizar a construção de uma cônica que foi feita marcando os pontos de intersecção de retas correspondentes em dois feixes relacionados projetivamente.

Sejam  $a$  e  $a'$  duas tangentes de uma cônica  $\Gamma$ . Uma terceira tangente  $t$  cortará  $a$  e  $a'$  em dois pontos  $A$  e  $A'$ , respectivamente. Deslocando  $t$  ao longo da cônica ocorrerá projetividade entre os pontos de  $a$  em  $a'$  pois, pelo teorema 3.21, quaisquer quatro pontos de  $a$  terão a mesma razão cruzada que os quatro pontos correspondentes de  $a'$ . Assim, podemos dar uma definição projetiva de uma cônica como uma "curva de retas":

**Definição 3.22.** Uma cônica  $\Gamma$  é o conjunto de retas que unem pontos correspondentes de duas retas relacionadas projetivamente.

Uma cônica de retas pode ser construída da seguinte maneira: Projete todos os pontos  $P$  de uma reta  $r$  sobre uma outra reta  $r'$  a partir de um centro  $O_1$  obtendo os

pontos  $P'$  em  $r'$ ; projete os pontos  $P'$  em  $r''$  a partir de um segundo centro de projeção  $O_2$ , obtendo os pontos  $P''$ . Assim, cada reta  $\overleftrightarrow{PP''}$  é uma tangente da cônica, a figura 44 e a cônica construída (figura 45).

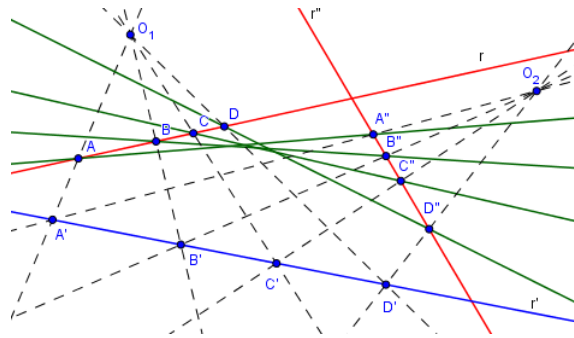


Figura 44: Construção de cônicas de retas.

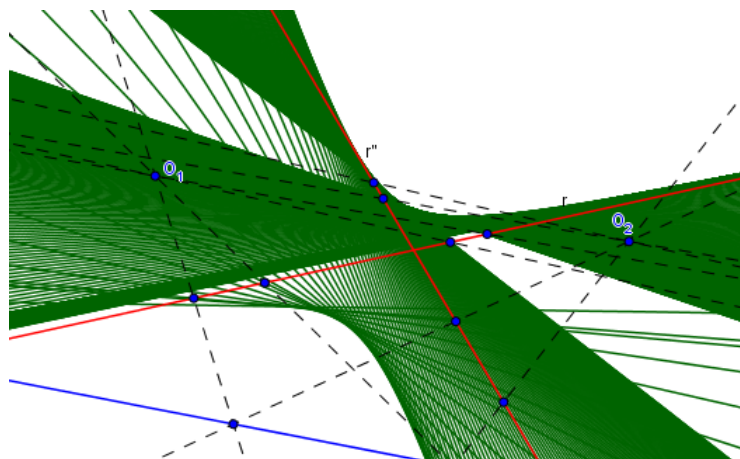


Figura 45: Cônicas de retas.

Agora, podemos considerar a tangente a uma cônica em um ponto como o elemento dual ao próprio ponto, e se considerarmos uma como “cônica de retas” (o conjunto de todas as suas tangentes) como o dual de uma “cônica de pontos” (o conjunto de todos os seus pontos), então concluímos que o dual de uma cônica é a própria cônica, em um caso, definida por seus pontos e no outro, por suas tangentes.

Um resultado interessante do princípio da dualidade para cônicas é a relação entre os teoremas de Pascal e de Brianchon. O primeiro foi descoberto em 1640 e o segundo somente em 1806. No entanto, um é consequência imediata do outro, uma

vez que qualquer teorema envolvendo apenas cônicas, retas e pontos deve se manter verdadeiro se substituído por seu enunciado dual. Para provar o Teorema de Pascal, usaremos o teorema de Menelaus:

**Teorema 3.23. (Teorema de Menelaus)** *Sejam três pontos  $L$ ,  $M$  e  $N$  sobre as retas suportes dos lados  $\overleftrightarrow{AB}$ ,  $\overleftrightarrow{BC}$  e  $\overleftrightarrow{CA}$ , respectivamente, de um triângulo  $\triangle ABC$  (qualquer) e diferentes dos vértices. Então  $L$ ,  $M$  e  $N$  são colineares se, e somente se*

$$\frac{LA}{LB} \cdot \frac{MB}{MC} \cdot \frac{NC}{NA} = 1. \quad (3.6)$$

*Demonstração.* Pelo vértice  $A$ , traça-se a paralela  $r$  à reta  $\overleftrightarrow{LM}$  passando por  $A$ . Seja  $\{D\} = r \cap \overleftrightarrow{BC}$ .

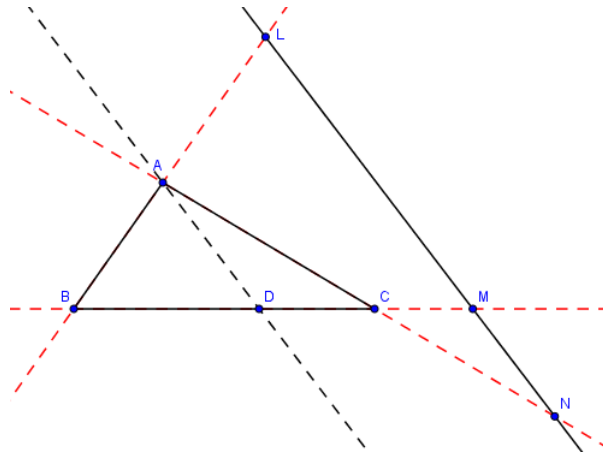


Figura 46: Aplicação do teorema de Tales.

Pelo teorema de Tales (teorema A.28),

$$\frac{LA}{MD} = \frac{LB}{MB} \implies \frac{LA}{MD} \cdot \frac{MB}{LB} = 1, \quad (3.7)$$

e

$$\frac{MD}{NA} = \frac{MC}{NC} \implies \frac{MD}{NA} \cdot \frac{NC}{MC} = 1. \quad (3.8)$$

Multiplicando 3.7 e 3.8, obtemos

$$\frac{LA}{LB} \cdot \frac{MB}{MC} \cdot \frac{NC}{NA} = 1.$$

Reciprocamente, sejam  $L$ ,  $M$  e  $N$  pontos pertencentes às retas  $\overleftrightarrow{AB}$ ,  $\overleftrightarrow{BC}$  e  $\overleftrightarrow{CA}$ , respectivamente, de um  $\triangle ABC$  para os quais vale (3.6). Seja  $N'$  o ponto de intersecção de  $\overleftrightarrow{LM}$  com  $\overleftrightarrow{AC}$ , conforme figura 47. Pelo que foi provado, temos que

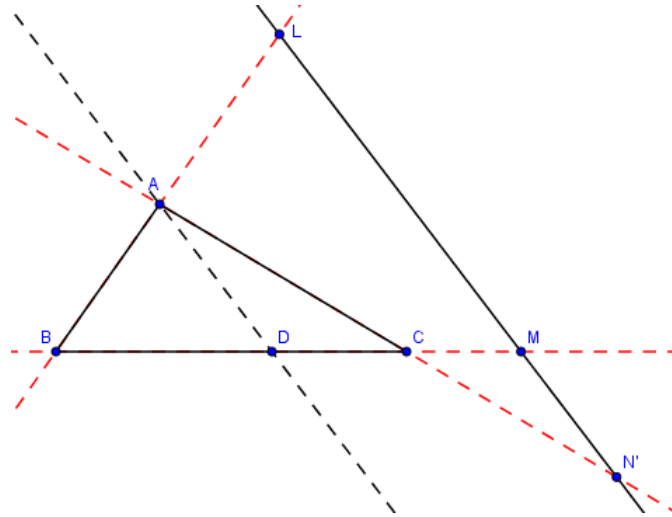


Figura 47: Unicidade do ponto  $N$  no teorema de Menelaus.

$$\frac{LA}{LB} \cdot \frac{MB}{MC} \cdot \frac{N'C}{N'A} = 1. \tag{3.9}$$

De 3.6 e 3.9, temos que

$$\frac{NC}{NA} = \frac{N'C}{N'A}.$$

Suponha, por absurdo, que  $N' \neq N$ . Sem perda de generalidade, suponha que  $A - C - N' - N$ . Então

$$\frac{NC}{NA} = \frac{N'C + NN'}{N'A + NN'} = \frac{N'C}{N'A},$$

donde segue que  $N'C = N'A$ , o que é absurdo, pois  $A - C - N' - N$ . Portanto,  $N = N'$  e  $L, M$  e  $N$  são colineares.  $\square$

**Teorema 3.24. (Teorema de Pascal)** *Seja  $ABCDEF$  um hexágono (convexo ou não) inscrito em uma cônica. Considere os pontos de intersecção dos lados opostos do hexágono,  $\{P\} = \overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{DE}$ ,  $\{Q\} = \overleftrightarrow{BC} \cap \overleftrightarrow{EF}$  e  $\{R\} = \overleftrightarrow{CD} \cap \overleftrightarrow{FA}$ . Então,  $P, Q$  e  $R$  são colineares. Observe que se um par de lados forem paralelos, então a intersecção das retas que contém esses lados é um ponto ideal.*

*Demonstração.* Como uma cônica é uma projeção de uma circunferência, e uma vez que o teorema diz respeito apenas a propriedades invariantes sob projeção, uma prova para o caso da circunferência será suficiente para demonstrar o teorema.

Sejam os pontos  $\{X\} = \overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{EF}$ ,  $\{Y\} = \overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{DC}$ ,  $\{Z\} = \overleftrightarrow{DC} \cap \overleftrightarrow{EF}$ . Consideramos

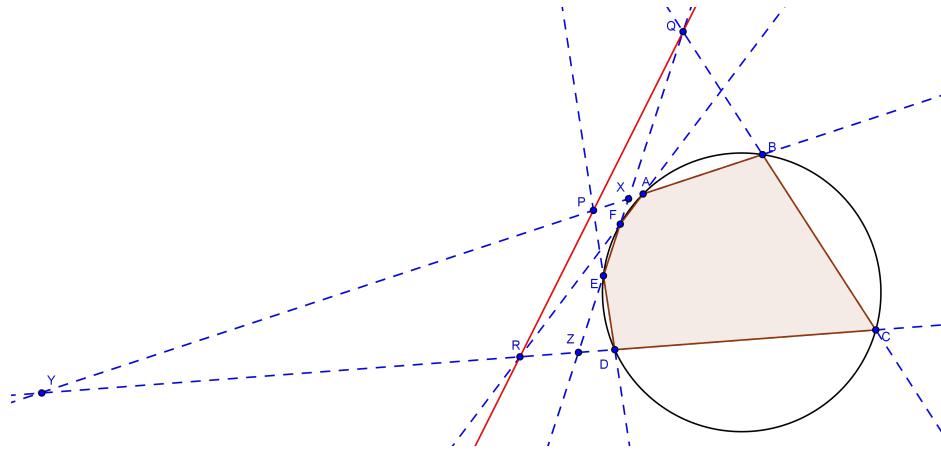


Figura 48: Teorema de Pascal em um hexágono convexo.

o triângulo  $\triangle XYZ$  (ilustrado na figura 48) e aplicamos o teorema de Menelaus (teorema 3.23) três vezes:

$\triangle XYZ$  com  $P, D, E$  colineares:

$$\frac{PX}{PY} \cdot \frac{DY}{DZ} \cdot \frac{EZ}{EX} = 1, \tag{3.10}$$

$\triangle XYZ$  com  $Q, B, C$  colineares:

$$\frac{QZ}{QX} \cdot \frac{BX}{BY} \cdot \frac{CY}{CZ} = 1, \tag{3.11}$$

$\triangle XYZ$  com  $R, A, F$  colineares:

$$\frac{RY}{RZ} \cdot \frac{AX}{AY} \cdot \frac{FZ}{FX} = 1. \tag{3.12}$$

Usando potência de ponto (teorema A.26), temos

$$XA \cdot XB = XE \cdot XF$$

$$YA \cdot YB = YC \cdot YD$$

$$ZC \cdot ZD = ZE \cdot ZF.$$

Consequentemente, multiplicando as equações (3.10), (3.11) e (3.12), obtemos

$$\frac{PX}{PY} \cdot \frac{QZ}{QX} \cdot \frac{RY}{RZ} = 1.$$

Logo, pelo teorema de Menelaus aplicado ao triângulo  $\triangle XYZ$ , temos que os pontos  $P$ ,  $Q$  e  $R$  são colineares. A reta  $\overleftrightarrow{PQ}$  é conhecida com a reta de Pascal.  $\square$

**Teorema 3.25. (Teorema de Brianchon)** *As diagonais que contêm os três pares de vértices opostos de um hexágono  $ABCDEF$  (convexo ou não) circunscrito a uma cônica são concorrentes em um ponto.*

A demonstração do teorema de Brianchon é uma consequência do princípio da dualidade de pontos. O ponto em que as diagonais concorrem é chamado de ponto de Brianchon.

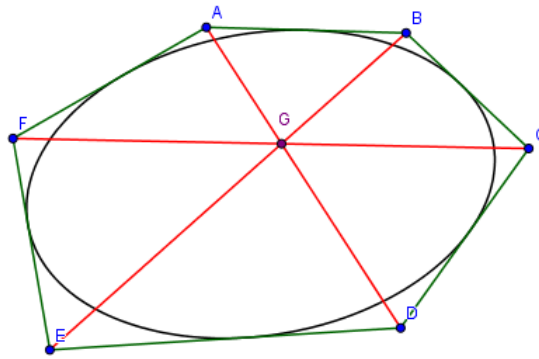


Figura 49: Teorema de Brianchon em um hexágono convexo.





---

## GEOMETRIA PROJETIVA NA ESCOLA

---

Neste capítulo serão propostas algumas atividades mostrando como podemos trabalhar a geometria projetiva no ensino básico (anos finais do ensino fundamental e médio). Acreditamos que essas serão significativas para os alunos, uma vez que a geometria tem aplicações interessantes, inclusive em Artes, o que contribui para a formação e desenvolvimento dos alunos.

### 4.1 ATIVIDADE 1

Esta atividade foi proposta em [13]. Achamos interessante incluí-la pois pode ser trabalhada com alunos dos 6º e 7º anos, sendo um primeiro contato com a ideia de perspectiva.

a) Solicite aos alunos que desenhem alguns objetos. Em seguida, discuta o resultado obtido nos desenhos e compare com o objeto real. Compare com o objeto real e questione-os se conseguiram dar a ideia de realidade ao desenho. Neste momento, já podemos dizer que para dar realidade ao desenho é necessário algum conhecimento sobre técnicas de perspectiva e de desenho de observação.

b) Mostre uma fotografia de um ambiente qualquer, uma sala de estar, por exemplo. Questione sobre como isso é possível se a fotografia tem apenas duas dimensões e a sala fotografada tem três dimensões. Solicite que eles forneçam informações que remetem ao espaço real como o tamanho dos objetos, suas alturas, as distâncias entre eles, as proporções, etc. Adicionando o conhecimento que temos, a priori, do que é cada objeto da foto, mostre que podemos representar o espaço fotografado.

c) Solicite aos alunos que montem equipes com três integrantes. Dois seguram uma transparência de retroprojektor (para que fique bem firme) e o terceiro desenha nessa lâmina o que ele vê (no corredor da escola, onde sejam representadas as linhas do teto, do chão, a parede do fundo, as janelas, portas, etc. Na análise dos trabalhos será definido, com o auxílio dos desenhos, o que são os elementos da perspectiva: quadro (plano imagem), observador, linha de terra, linha do horizonte (reta de fuga), ponto de fuga.

#### 4.2 ATIVIDADE 2

Após mostrar como funciona o software Geogebra 3D, solicite aos estudantes que criem um plano (plano imagem -  $\pi_i$ ), perpendicular ao plano  $xy$  (plano objeto -  $\pi_o$ ) cuja intersecção com este é o eixo  $y$ , um ponto  $O$  (observador) que não pertença a nenhum dos planos anteriores, por exemplo,  $(3, 2, 5)$  e um ponto  $P$  em  $\pi_o$ . Em seguida, trace a reta  $\overleftrightarrow{OP}$  cuja intersecção com  $\pi_i$  será o ponto  $P'$  (imagem do ponto  $P$ ). Peça ainda que tracem, a partir de  $O$ , uma reta perpendicular a  $\pi_i$  intersectando  $\pi_i$  no ponto  $F$  e uma reta  $f$  paralela à intersecção de  $\pi_i$  com  $\pi_o$  (linha de terra) passando por  $F$ . Sugira que respondam às seguintes questões:

- O que acontece com o ponto  $P'$  ao afastar o ponto  $P$  da linha de terra?
- O que acontece com o ponto  $P'$  quando  $P$  estiver do lado oposto (com relação à linha de terra) do que estava antes?
- Construa um quadrado  $PQRS$  em  $\pi_o$  e obtenha sua imagem em  $\pi_i$ .
- Construa um círculo em  $\pi_o$  e obtenha sua imagem em  $\pi_i$ . Qual o formato da imagem do círculo?

Nos itens c) e d) o professor pode auxiliar os alunos nas construções sugeridas, principalmente no item d) onde ele poderá obter a imagem do círculo utilizando a ferramenta lugar geométrico.

SOLUÇÃO:

- Observa-se que  $P'$  se aproxima de  $f$ .
- Ficará ao lado oposto ao que estava com relação à reta  $f$ .
- Observe que a imagem do quadrado não será um quadrado.





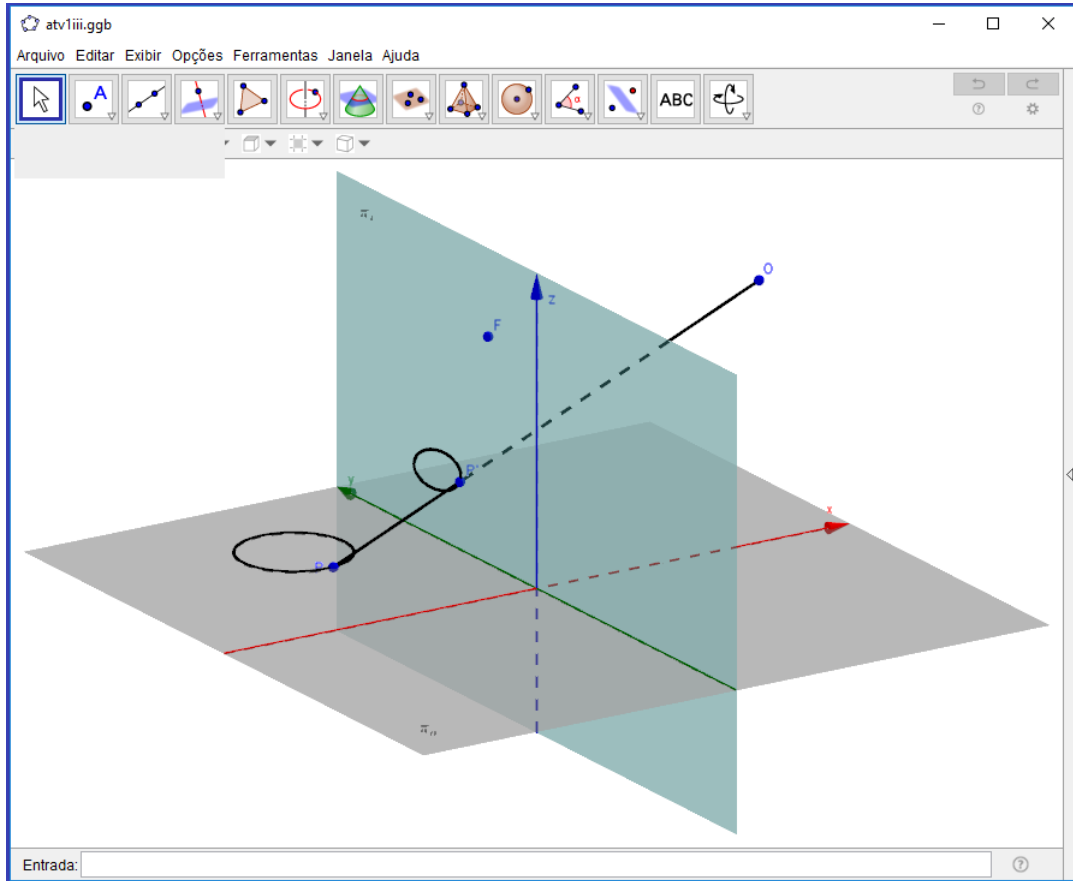


Figura 52: Imagem de um círculo (item d da atividade 2).

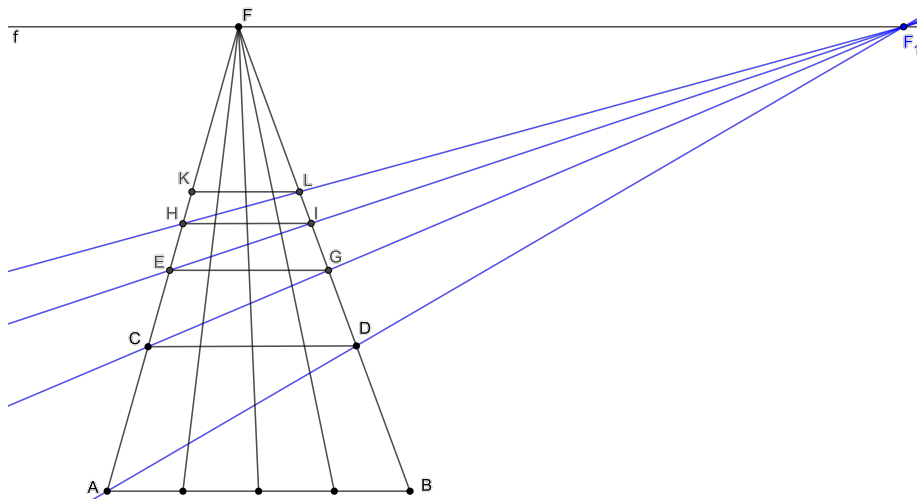


Figura 53: Construção do tabuleiro em perspectiva frontal (item a da atividade 3).

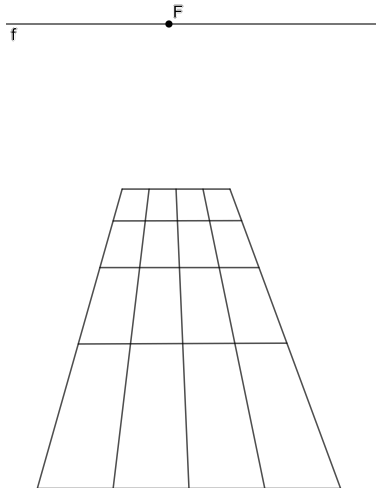


Figura 54: Tabuleiro em perspectiva frontal (item a da atividade 3).

Desse modo, construímos a primeira casa do tabuleiro (quadrilátero  $ABCD$ ). Trace a reta  $\overleftrightarrow{BF_3}$  cuja interseção com  $\overleftrightarrow{DF_2}$  é o ponto  $E$ . Trace  $\overleftrightarrow{EF_1}$ , cuja interseção com  $\overleftrightarrow{AF_3}$  é o ponto  $G$ . Trace  $\overleftrightarrow{GF_2}$ , cuja interseção com  $\overleftrightarrow{DF_3}$  é  $H$ . Observe que até aqui foi construído um tabuleiro  $2 \times 2$ , repita esse procedimento até terminar o tabuleiro.

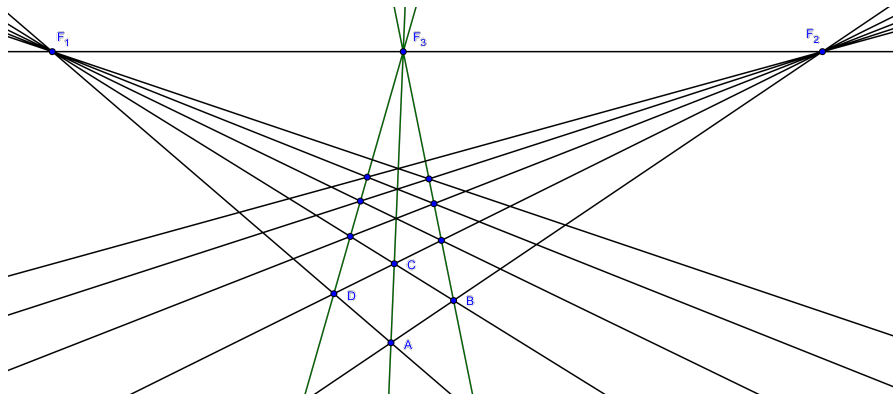


Figura 55: Construção do tabuleiro em perspectiva oblíqua (item b da atividade 3).

#### 4.4 ATIVIDADE 4

Construa uma perspectiva plana que transforma um triângulo  $\triangle ABC$  em:

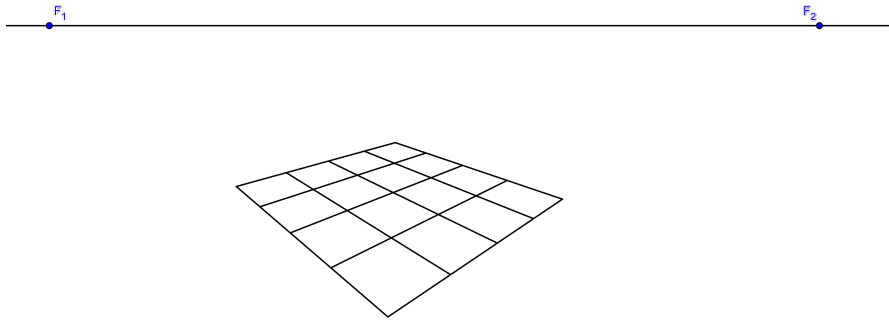


Figura 56: Tabuleiro em perspectiva oblíqua (item b da atividade 3).

- a) Um triângulo retângulo.
- b) Um triângulo isósceles.
- c) um triângulo equilátero.

#### SOLUÇÃO

a) Inicialmente observe que ponto  $O$  não pode estar em qualquer lugar pois as imagens das retas  $\overleftrightarrow{AC}$  e  $\overleftrightarrow{AB}$  devem ser perpendiculares. Logo, o ponto  $O$  deve estar na circunferência cujo diâmetro é o segmento  $\overline{F_1F_2}$ . Portanto, com o teorema 1.3 podemos realizar a construção (figura 57).

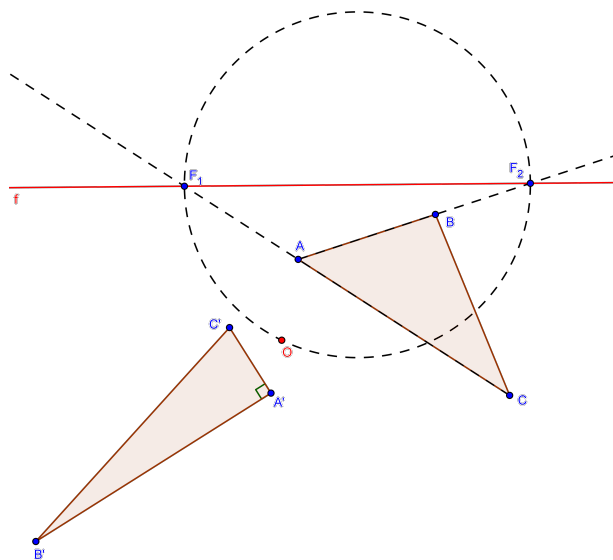


Figura 57: perspectiva plana para o item a da atividade 4.

b) Seja o triângulo  $\triangle ABC$ , localizamos os pontos de fuga  $F_1$ ,  $F_2$  e  $F_3$  determinados pela intersecção de  $f$  com as retas pelas retas  $\overleftrightarrow{AB}$ ,  $\overleftrightarrow{AC}$  e  $\overleftrightarrow{BC}$ , respectivamente. Supondo que os ângulos  $\angle B'A'C'$  e  $\angle B'C'A'$  sejam congruentes, observe que o ponto  $O$  deve ser a intersecção das circunferências cujas cordas  $\overline{F_1F_2}$  e  $\overline{F_2F_3}$  determinam ângulos centrais congruentes. Para fazer essa construção, trace as mediatrizes  $m_1$  e  $m_2$  dos segmentos  $\overline{F_1F_2}$  e  $\overline{F_2F_3}$ , respectivamente. Escolha um ponto de  $m_1$  para ser o centro  $C_1$  da primeira circunferência de raio  $\overline{C_1F_2}$ . Em seguida, trace uma reta paralela a  $\overline{C_1F_2}$  passando por  $F_3$ . A intersecção desta reta com  $m_2$  será o centro  $C_2$  da segunda circunferência. Assim, o ponto  $O$  pertence às intersecções das duas circunferências.

Agora aplique o teorema 1.3 para determinar os pontos  $A'$ ,  $B'$  e  $C'$  (figura 58).

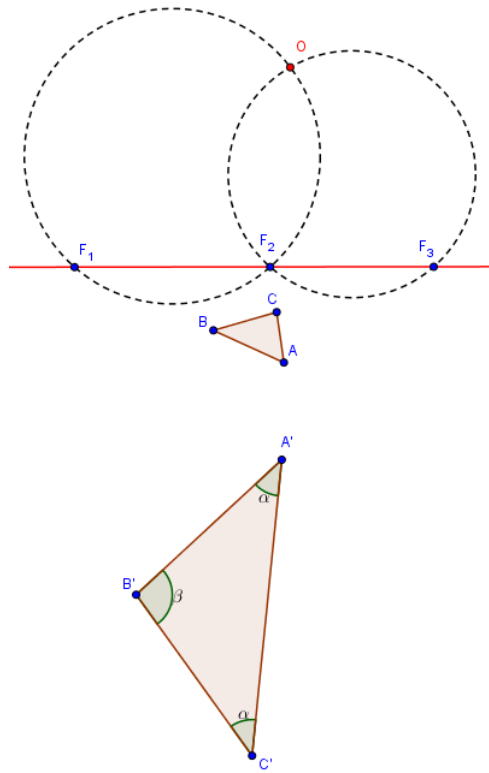


Figura 58: perspectiva plana para o item b da atividade 4.

c) Realize a mesma construção do item b) apenas tendo o cuidado para que o ângulo central das circunferências correspondentes às cordas  $\overline{F_1F_2}$  e  $\overline{F_2F_3}$  meçam  $120^\circ$ . Para realizar essa construção, trace uma circunferência  $C_1$  de diâmetro  $\overline{F_1F_2}$ . Trace outra circunferência  $C_2$  com o mesmo raio de  $C_1$  e cujo centro  $C'_1$  é uma das intersecções



da mediatriz  $m$  de  $\overline{F_1F_2}$  com  $C_1$ . Sejam  $P_1$  e  $P_2$  os pontos de intersecção de  $C_1$  e  $C_2$ . Note que o ângulo  $\angle P_1C_1P_2$  mede  $120^\circ$ . Trace uma reta paralela  $n$  ao segmento  $\overline{C_1P_2}$  passando por  $F_2$ . A intersecção da mediatriz  $m$  com  $n$  é o centro  $C_1$  da circunferência procurada.

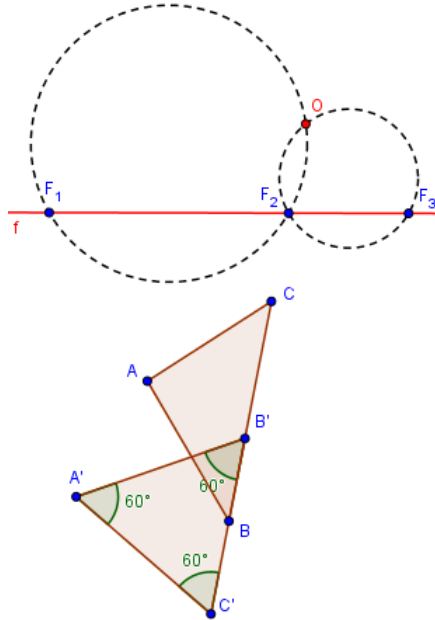


Figura 59: perspectiva plana para o item c da atividade 4.

#### 4.5 ATIVIDADE 5

Construa uma perspectiva plana que transforma um retângulo  $ABCD$  em outro retângulo  $A'B'C'D'$ .

SOLUÇÃO:

Observe que os lados opostos  $\overline{AB}$  e  $\overline{DC}$  do retângulo  $ABCD$  são paralelos, logo suas imagens se interceptam num ponto de fuga  $F_1$  que é ideal pois as imagens desses lados,  $\overline{A'B'}$  e  $\overline{D'C'}$  também são paralelas, analogamente para os lados opostos  $\overline{AD}$  e  $\overline{BC}$  cujas imagens se interceptam no ponto ideal  $F_2$ .

Escolhendo o ponto  $O$ , a imagem  $A'$  de  $A$  e aplicando o teorema 1.3 para encontrar as imagens  $B$ ,  $C$  e  $D$  determinamos a imagem do retângulo  $ABCD$

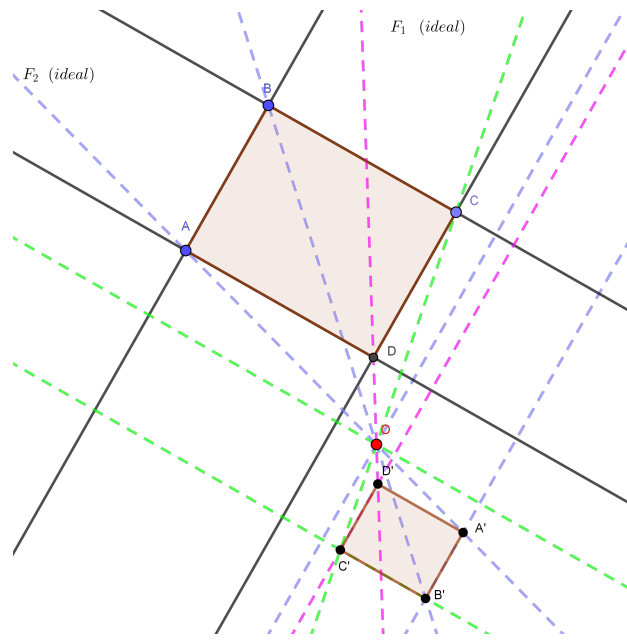


Figura 60: Retângulo como imagem de um retângulo

Note que o ângulo  $\angle D'A'B'$  mede  $90^\circ$  pelo fato de  $\overline{A'B'} \parallel \overline{OF_1} \parallel \overline{AB}$  e  $\overline{D'A'} \parallel \overline{OF_2} \parallel \overline{DA}$ , analogamente para os ângulos  $\angle A'B'C'$ ,  $\angle B'C'A'$  e  $\angle C'D'A'$ .

#### 4.6 ATIVIDADE 6

Enuncie os duais dos teoremas de Desargues e Pappus.

SOLUÇÃO:

Dual do teorema de Desargues:

Se, em um plano, dois triângulos  $\triangle ABC$  e  $\triangle A'B'C'$  são tais que as retas correspondentes se intersectam nos pontos  $\{P\} = \overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{A'B'}$ ,  $\{Q\} = \overleftrightarrow{AC} \cap \overleftrightarrow{A'C'}$  e  $\{R\} = \overleftrightarrow{BC} \cap \overleftrightarrow{B'C'}$  colineares sobre uma reta  $r$ , então as retas que contém os vértices correspondentes –  $\overleftrightarrow{AA'}$ ,  $\overleftrightarrow{BB'}$  e  $\overleftrightarrow{CC'}$  – são concorrentes.

Dual do teorema de Pappus:

Dadas três retas concorrentes num ponto  $P$ ,  $a[a_1, a_2, a_3]$ ,  $b[b_1, b_2, b_3]$  e  $c[c_1, c_2, c_3]$  e três retas concorrentes num ponto  $P'$ ,  $a'[a'_1, a'_2, a'_3]$ ,  $b'[b'_1, b'_2, b'_3]$  e  $c'[c'_1, c'_2, c'_3]$ , sendo que nenhuma dessas retas coincidam com a reta  $\overleftrightarrow{PP'}$ , e os pontos  $A = a \cap b'$ ,  $B = a' \cap b$ ,

$C = a \cap c'$ ,  $D = a' \cap c$ ,  $E = b \cap c'$ ,  $F = b' \cap c$ , então as retas  $\overleftrightarrow{AB}$ ,  $\overleftrightarrow{CD}$  e  $\overleftrightarrow{EF}$  se interceptam em um único ponto.

#### 4.7 ATIVIDADE 7

Dado que a reta determinada pelos pontos médios de dois lados de um triângulo em  $\mathbb{R}^2$  é paralela ao terceiro lado (teorema da base média), prove que as medianas de um triângulo são concorrentes.

SOLUÇÃO:

Seja  $\triangle ABC$  um triângulo arbitrário no plano euclidiano e sejam  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  respectivamente, os pontos médios dos segmentos  $\overline{BC}$ ,  $\overline{CA}$ ,  $\overline{AB}$ . Então,  $\overline{AB} \parallel \overline{A'B'}$ ,  $\overline{BC} \parallel \overline{B'C'}$  e  $\overline{CA} \parallel \overline{C'A'}$ .

Interpretando essas relações no plano projetivo, vemos que os pares de retas  $\overleftrightarrow{C'B'}$ ,  $\overleftrightarrow{BC}$ ;  $\overleftrightarrow{B'A'}$ ,  $\overleftrightarrow{AB}$  e  $\overleftrightarrow{C'A'}$ ,  $\overleftrightarrow{AC}$  que contêm os lados correspondentes dos triângulos  $\triangle ABC$  e  $\triangle A'B'C'$  se intersectam na reta de ideal. Portanto, pelo dual do teorema de Desargues,  $\triangle ABC$  e  $\triangle A'B'C'$  segue que as retas  $\overline{AA'}$ ,  $\overline{BB'}$  e  $\overline{CC'}$  são concorrentes. Como estas retas contêm as medianas do triângulo  $\triangle ABC$ , segue a tese.

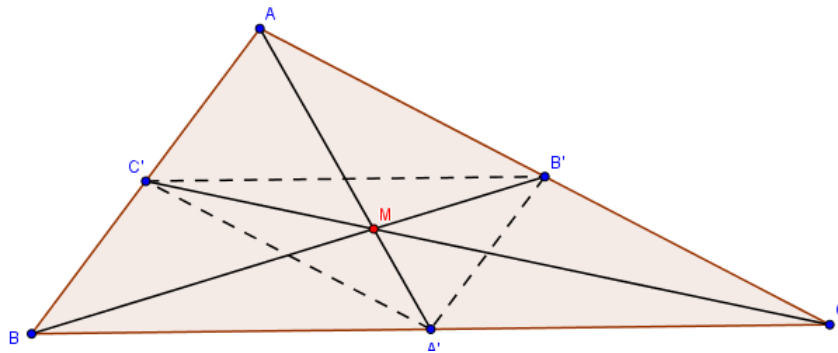


Figura 61: Intersecção das medianas do  $\triangle ABC$ .

## 4.8 ATIVIDADE 8

Em uma semirreta de origem  $O$ , a razão cruzada de 4 pontos,  $A, B, C$  e  $D$  tais que  $O - A - B - C - D$  é  $R(A, B, C, D) = \frac{3}{4}$ . Sabendo-se que  $OA = 3$ ,  $OB = 5$  e  $OC = 8$ , determine a distância  $OD$ .

SOLUÇÃO:

Temos que

$$AC = 8 - 3 = 5$$

$$BC = 8 - 5 = 3$$

$$OD = x$$

Logo

$$R(A, B, C, D) = \frac{3}{4} \implies \frac{AC}{AD} \cdot \frac{BD}{BC} = \frac{3}{4} \implies \frac{5}{x-3} \cdot \frac{x-5}{3} = \frac{3}{4} \implies x = \frac{73}{11}$$

Portanto  $OD = \frac{73}{11}$ .

## 4.9 ATIVIDADE 9

O desenho inicial de uma rua, com 4 postes ( $A, B, C$  e  $D$ ) de luz igualmente espaçados, em perspectiva frontal apresenta os três primeiros postes. No desenho, a distância do primeiro para o segundo vale 1 unidade e do segundo para o terceiro vale  $\frac{1}{2}$ . Determine a distância do terceiro para o quarto postes e a posição do ponto de fuga.

SOLUÇÃO:

Suponha que a distância real entre os postes  $A$  e  $B$  seja igual a  $a$  (figura 62). Logo,

$$R(A, B, C, D) = \frac{AC}{BC} \cdot \frac{BD}{AD} = \frac{2a}{a} \cdot \frac{2a}{3a} = \frac{4}{3}$$

No desenho, teremos:

$$R(A', B', C', D') = \frac{A'C'}{B'C'} \cdot \frac{B'D'}{A'D'} = \frac{1 + \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} \cdot \frac{\frac{1}{2} + x}{\frac{3}{2} + x} = \frac{3 + 6x}{3 + 2x}$$

Como  $R(A, B, C, D) = R(A', B', C', D')$ , segue que:

$$\frac{4}{3} = \frac{3 + 6x}{3 + 2x} \implies x = \frac{3}{10}$$

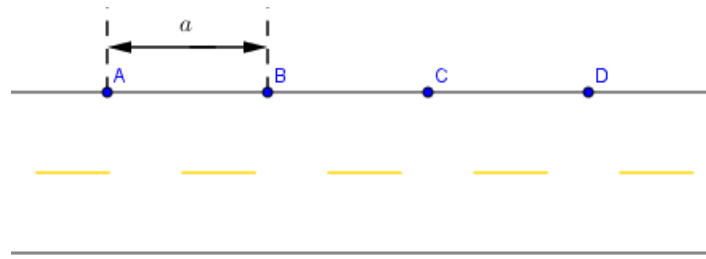


Figura 62: Representação real da rua com os postes A, B, C e D

Ou seja, a distância do terceiro para o quarto poste no desenho é de  $\frac{3}{10}$ .

Para determinar a posição do ponto de fuga (figura 63) devemos calcular a razão cruzada  $R(A, B, C, D)$  com  $D$  no infinito, assim:

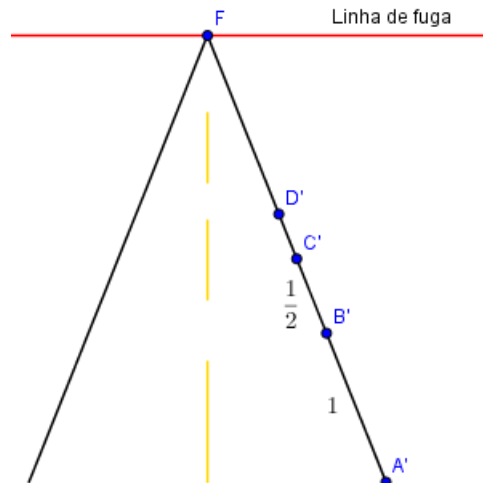


Figura 63: Desenho em perspectiva frontal do problema 8.

$$R(A, B, C, D) = \frac{AC}{BC} = \frac{2a}{a} = 2.$$

Logo  $D'$  estará na linha de fuga e

$$R(A, B, C, D) = R(A', B', C', D') \implies 2 = \frac{1 + \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} \cdot \frac{\frac{1}{2} + x}{\frac{3}{2} + x} \implies x = \frac{3}{2}.$$

Assim, o ponto de fuga está a  $1 + \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 3$  unidades do ponto  $A'$ .

## 4.10 ATIVIDADE 10

O teorema de Pascal nos dá um algoritmo para a construção de uma cônica que passa por cinco pontos dados, sendo três deles não colineares.

Dados os pontos  $A, B, C, D$  e  $E$ , queremos obter um outro ponto  $F$  da cônica. Para isso basta determinar o ponto  $\{P\} = \overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{DE}$  e considerar uma reta qualquer  $r$  que passe por  $P$ . Observe que  $\overline{AB}$  e  $\overline{DE}$  são lados opostos do hexágono  $ABCDEF$  e que  $r$  é a reta de Pascal.

a) Construa, em um aplicativo de geometria dinâmica (Geogebra, por exemplo), os pontos  $Q$  e  $R$  da reta de Pascal e o ponto  $F$  do hexágono (que pertence à cônica).

b) Ao girar a reta  $r$  em torno do ponto  $P$ , o lugar geométrico de  $F$  será uma cônica. No Geogebra, escolha cinco pontos e construa uma cônica habilitando a ferramenta “habilitar rastro” no ponto  $F$ , gire a reta em torno de  $P$ .

SOLUÇÃO:

a) Sabemos que  $\{Q\} = \overleftrightarrow{AF} \cap \overleftrightarrow{CD}$  e que pertence a  $r$ , logo  $\{Q\} = \overleftrightarrow{CD} \cap r$ . Analogamente,  $\{R\} = \overleftrightarrow{BC} \cap r$  e como  $F$  pertence às retas  $\overleftrightarrow{AQ}$  e  $\overleftrightarrow{ER}$ , logo  $\{F\} = \overleftrightarrow{AQ} \cap \overleftrightarrow{ER}$  (figura 64).

b) Cônica construída no Geogebra (figura 65):

## 4.11 ATIVIDADE 11

Assim como no teorema de Pascal, podemos construir um algoritmo (dual do apresentado na atividade 9) para a construção de uma cônica por cinco tangentes, tendo por base o teorema de Brianchon:

Dadas cinco retas  $a, b, c, d$  e  $e$  tal que cada reta contenha um lado do hexágono circunscrito à cônica, queremos obter uma outra reta  $f$  tangente à cônica e que contenha o último lado do hexágono. Para isso basta determinar uma reta  $p$  que passe pelos pontos  $\{A\} = a \cap b$  e  $\{D\} = d \cap e$  e considerar um ponto  $P$  que pertença a  $p$ . Observe que  $A$  e  $D$  são vértices opostos do hexágono circunscrito à cônica e que  $P$  é o ponto de Brianchon.

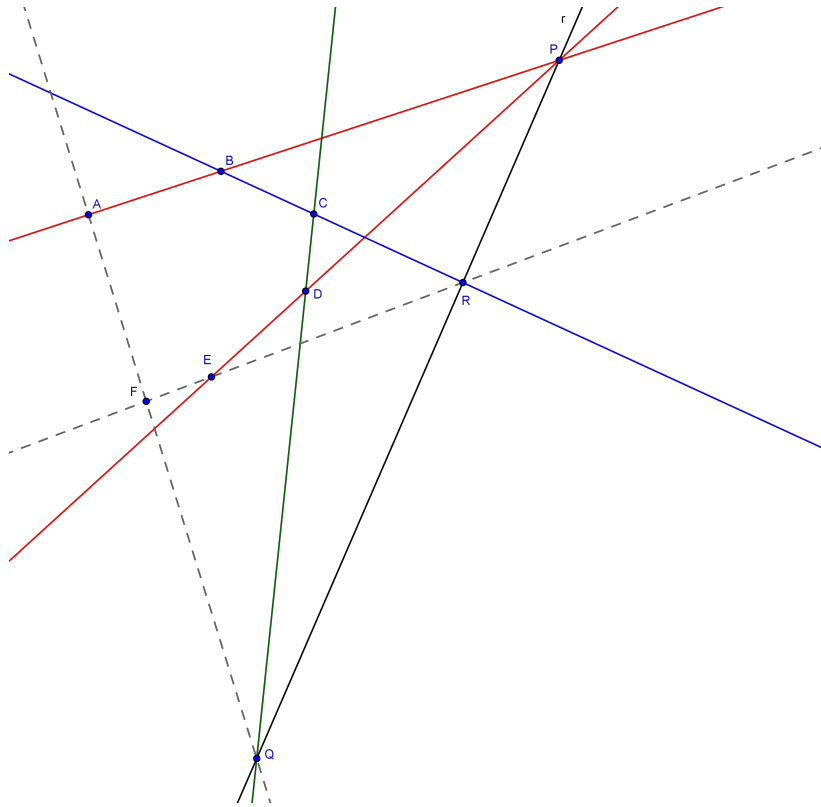


Figura 64: Construção dos pontos  $Q$ ,  $R$  e  $F$  da atividade 9a.

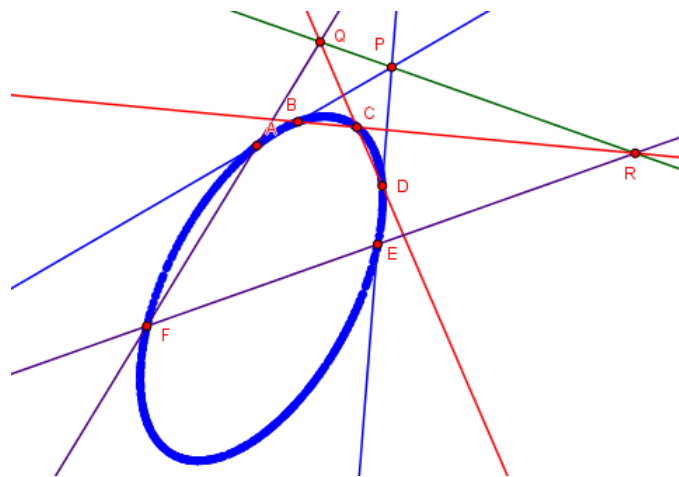


Figura 65: Construção de uma cônica por 5 pontos (atividade 9b).

a) Construa, em um aplicativo de geometria dinâmica (Geogebra, por exemplo), as retas  $q$  e  $r$  que sejam concorrentes no ponto de Brianchon e a reta  $f$ .

b) Ao deslizar o ponto  $P$  sobre a reta  $q$ , o lugar geométrico da reta  $f$  será uma cônica. Escolha cinco retas distintas e habilitando a ferramenta “rastros” na reta  $f$ , deslize o ponto  $P$  sobre a reta  $p$ .

### SOLUÇÃO

a) Sabemos que  $q$  contém  $P$  e  $\{B\} = b \cap e$  (vértices opostos), logo  $q = \overleftrightarrow{PB}$ ; analogamente,  $r$  contém  $P$  e  $b \cap c$  e como  $f$  contém  $\{F\} = a \cap q$  e  $\{E\} = e \cap r$ . Segue que  $f = \overleftrightarrow{EF}$ .

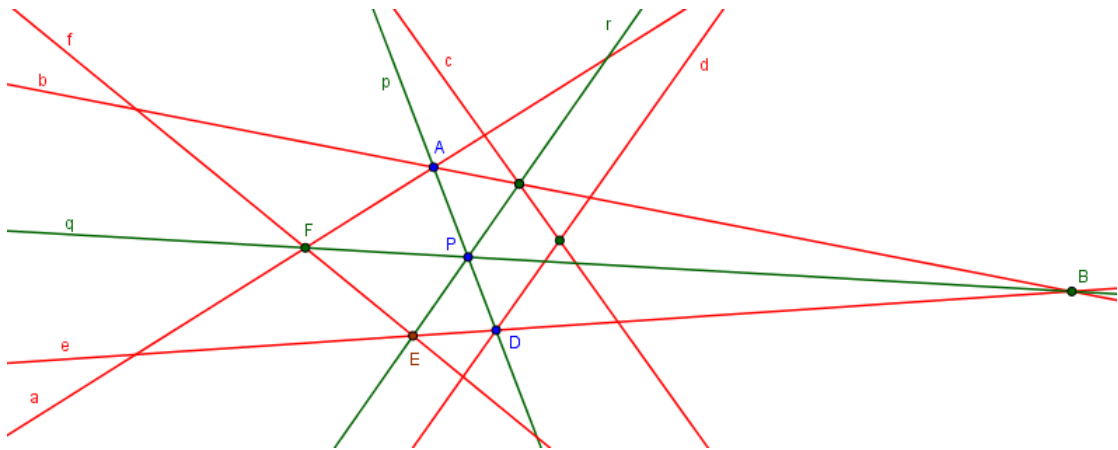


Figura 66: Construção das retas  $q$ ,  $r$  e  $f$  da atividade 10a.

b) Cônica construída no Geogebra (figura 67):



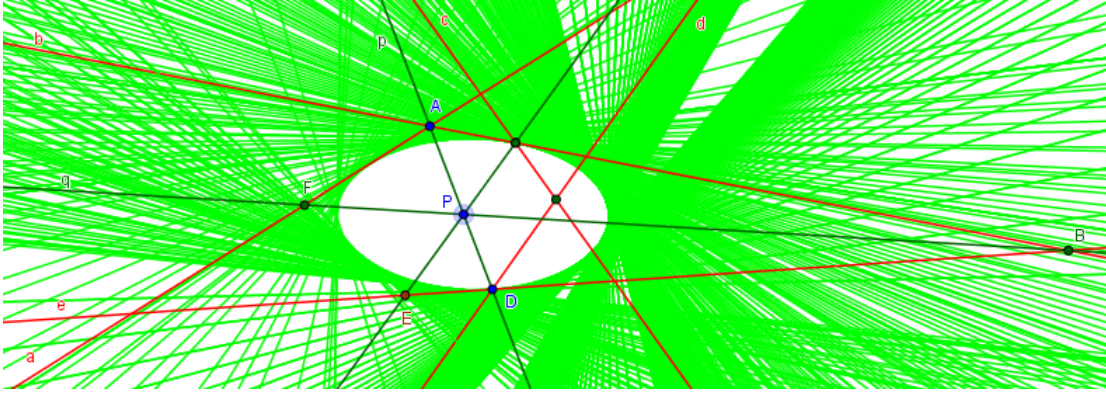


Figura 67: Construção das retas  $q$ ,  $r$  e  $f$  da atividade 10b.





---

## APÊNDICE: UM POUCO DE MATEMÁTICA ELEMENTAR

---

Usaremos este espaço para definir ou provar alguns resultados da matemática do ensino médio que foram tratados no presente texto.

### A.1 MATRIZES E SUAS OPERAÇÕES

As matrizes nos permitem realizar, de uma forma organizada, operações com vários números, auxiliando, por exemplo, na resolução de sistemas de equações lineares ou operações com coordenadas de transformações.

**Definição A.1.** Uma matriz  $A_{m \times n}$  ( $m$  por  $n$ ), é uma tabela de  $m \cdot n$  números dispostos em  $m$  linhas e  $n$  colunas:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

onde a  $i$ -ésima linha de  $A$  é

$$\begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \end{bmatrix}$$

para  $i = 1, \dots, m$  e a  $j$ -ésima coluna de  $A$  é

$$\begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}$$

para  $j = 1, \dots, n$ .

Usamos também a notação  $A = (a_{ij})_{m \times n}$ . Dizemos que  $a_{ij}$  ou  $[A]_{ij}$  é o elemento ou a entrada de posição  $i, j$  da matriz  $A$ . Se  $m = n$ , dizemos que  $A$  é uma matriz quadrada de ordem  $n$  e os elementos  $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$  formam a chamada diagonal principal de  $A$ .

**Exemplo A.1.** Considere as seguintes matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & -2 \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad F = \begin{bmatrix} 3 \end{bmatrix}$$

As matrizes  $A$  e  $B$  são quadradas de ordem 2. A matriz  $C$  é  $2 \times 3$ ,  $D$  é  $1 \times 3$ ,  $E$  é  $3 \times 1$  e  $F$  é  $1 \times 1$ . De acordo com a notação que introduzimos, exemplos de elementos de algumas das matrizes dadas acima são  $a_{12} = 2$ ,  $c_{23} = -2$ ,  $e_{21} = 4$ ,  $[A]_{22} = 4$  e  $[D]_{12} = 3$ .

Dois matrizes são consideradas iguais se elas têm o mesmo tamanho (número de linhas e colunas respectivamente iguais) e os elementos correspondentes são iguais, ou seja,  $A = (a_{ij})_{m \times n}$  e  $B = (b_{ij})_{p \times q}$  são iguais se  $m = p$ ,  $n = q$  e  $a_{ij} = b_{ij}$  para  $i = 1, \dots, m$  e  $j = 1, \dots, n$ .

**Definição A.2.** A soma de duas matrizes de mesmo tamanho  $A = (a_{ij})_{m \times n}$  e  $B = (b_{ij})_{m \times n}$  é definida como sendo a matriz  $A + B = C = (c_{ij})_{m \times n}$  obtida somando-se os elementos correspondentes de  $A$  e  $B$ , ou seja,  $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ , para  $i = 1, \dots, m$  e  $j = 1, \dots, n$ . Escrevemos também  $[A + B]_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ .

**Observação A.1.1.** Seja a matriz  $A = (a_{ij})_{m \times n}$  cujos elementos são  $a_{ij}$ , a matriz  $-A$  será a matriz cujos elementos são  $-a_{ij}$ . Assim, a subtração das matrizes será dada por  $B - A = B + (-A)$ .

**Exemplo A.2.** Considere as matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & -4 \end{bmatrix}$$

Se chamamos de  $C$  a soma das duas matrizes  $A$  e  $B$ , então

$$C = A + B = \begin{bmatrix} 1 + (-2) & 2 + 1 & -3 + 5 \\ 3 + 0 & 4 + 3 & 0 + (-4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 3 & 7 & -4 \end{bmatrix}$$

**Definição A.3.** A multiplicação de uma matriz  $A = (a_{ij})_{m \times n}$  por um escalar  $\alpha \in \mathbb{R}$  é a matriz  $B = \alpha A$  obtida multiplicando-se cada elemento da matriz  $A$  por  $\alpha$ , ou seja,  $b_{ij} = \alpha a_{ij}$ , para  $i = 1, \dots, m$  e  $j = 1, \dots, n$ . Escrevemos também  $[\alpha A]_{ij} = \alpha a_{ij}$ . Dizemos que a matriz  $B$  é um múltiplo escalar da matriz  $A$ .

**Exemplo A.3.** O produto da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

pelo escalar  $-3$  é dado por

$$-3A = \begin{bmatrix} (-3) \cdot 1 & (-3) \cdot 2 & (-3) \cdot (-3) \\ (-3) \cdot 3 & (-3) \cdot 4 & (-3) \cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -6 & 9 \\ -9 & -12 & 0 \end{bmatrix}.$$

**Definição A.4.** O produto de duas matrizes, tais que o número de colunas da primeira matriz é igual ao número de linhas da segunda,  $A = (a_{ij})_{m \times n}$  e  $B = (b_{jk})_{n \times p}$  é definido pela matriz

$$AB = C = (c_{ik})_{m \times p}$$

obtida da seguinte forma:

$$c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \dots + a_{in}b_{nk}.$$

A equação acima está dizendo que o elemento  $c_{ik}$  do produto é igual à soma dos produtos dos elementos da  $i$ -ésima linha de  $A$  pelos elementos correspondentes da  $j$ -ésima coluna de  $B$ .

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ip} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1k} & \dots & b_{1n} \\ a_{21} & b_{22} & \dots & b_{2k} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ b_{p1} & b_{p2} & \dots & b_{pk} & \dots & b_{pn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & \dots & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & \dots & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & c_{ik} & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & \dots & \dots & c_{mn} \end{bmatrix}$$

**Exemplo A.4.** Dadas as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix}$$

O produto  $AB$  é dado da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 7 + 2 \cdot 8 + 3 \cdot 9 \\ 4 \cdot 7 + 5 \cdot 8 + 6 \cdot 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50 \\ 122 \end{bmatrix}$$

**Teorema A.5.** *Sejam as matrizes  $A$ ,  $B$  e  $C$ , desde que as multiplicações sejam possíveis, temos:*

$$(AB)C = A(BC)$$

*Demonstração.* Suponha que as matrizes  $A$ ,  $B$  e  $C$  sejam de ordens  $n \times r$ ,  $r \times s$  e  $s \times m$ , respectivamente. Temos que

$$\begin{aligned} ((AB)C)_{ij} &= \sum_{k=1}^s (AB)_{ik} c_{kj} = \sum_{i=1}^s \left( \sum_{l=1}^r a_{il} b_{lk} \right) c_{kj} = \\ &= \sum_{l=1}^r a_{il} \left( \sum_{k=1}^s b_{lk} c_{kj} \right) = \sum_{l=1}^r a_{il} (BC)_{lj} = (A(BC))_{ij} \end{aligned}$$

□

**Definição A.6.** Chama-se matriz identidade de ordem  $n$  (indicamos por  $I_n$ ) toda matriz quadrada em que todos os elementos da diagonal principal são iguais a 1 e o demais elementos são iguais a 0.

**Exemplo A.5.**

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Observe que dada uma matriz  $A$  de ordem  $n$  temos que  $AI_n = I_n A = A$ .

**Definição A.7.** Dada uma matriz  $A = (a_{ij})_{m \times n}$ , chama-se matriz transposta de  $A$  a matriz  $A^t = (a'_{ji})_{n \times m}$  tal que  $a'_{ji} = a_{ij}$  para todo  $i$  e todo  $j$ , isto é, a  $i$ -ésima coluna de  $A^t$  é igual a  $i$ -ésima linha de  $A$ .

**Exemplo A.6.** Se

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \longrightarrow A^t = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

**Definição A.8.** Dada uma matriz  $A$ , de ordem  $n$ , chama-se inversa de  $A$  a matriz  $A^{-1}$  tal que  $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$ .

**Teorema A.9.** Se  $A$  e  $B$  são matrizes inversíveis, então  $A \cdot B$  é inversível.

*Demonstração.* Temos, pelo teorema A.5, que

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AI_nA^{-1} = AA^{-1} = I_n$$

e

$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}I_nB = B^{-1}B = I_n$$

Portanto,  $AB$  é inversível. □

## A.2 DETERMINANTES

Não daremos uma definição geral de determinantes, pois foge ao objetivo do presente trabalho.

**Definição A.10.** Consideremos o conjunto das matrizes quadradas de elementos reais. Seja  $M$  uma matriz de ordem  $n$  desse conjunto. Chamamos determinante da matriz  $M$  (e indicamos por  $\det M$ ) o número que podemos obter operando com os elementos de  $M$  da seguinte forma:

- Se  $M$  é de ordem  $n = 1$ , então  $\det M$  é o único elemento de  $M$ .

$$M = [a_{11}] \implies \det M = a_{11}.$$

Podemos indicar o determinante de  $M$  pelo símbolo  $|a_{ij}|$ .

- Se  $M$  é de ordem  $n = 2$  então  $\det M$  é igual ao produto dos elementos da diagonal principal menos o produto dos elementos da diagonal secundária

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \implies \det M = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

- Se  $M$  é de ordem  $n = 3$ , isto é,

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \implies \det M = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

**Exemplo A.7.** Ordem 1:

$$M = [6] \implies \det M = 6.$$

Ordem 2:

$$M = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \implies \det M = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot 2 - 4 \cdot (-1) = 10.$$

Ordem 3

Se  $M$  é de ordem  $n = 3$ , isto é,

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 5 & 2 & -3 \\ 1 & 4 & 2 \end{bmatrix} \implies \det M = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 5 & 2 & -3 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix} \\ = 1 \cdot 2 \cdot 2 + 3 \cdot (-3) \cdot 1 + 4 \cdot 5 \cdot 4 - 4 \cdot 2 \cdot 1 - 1 \cdot (-3) \cdot 4 - 3 \cdot 5 \cdot 2 = 49.$$

**Definição A.11.** Considere uma matriz  $M$  de ordem  $n \geq 2$ , seja  $a_{ij}$  um elemento de  $M$ . O menor complementar do elemento  $a_{ij}$ , indicado por  $D_{ij}$ , é o determinante da matriz que se obtém retirando-se a linha  $i$  e a coluna  $j$  de  $M$ .

**Exemplo A.8.** Seja a matriz

$$M = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \\ 3 & 3 & 2 \end{bmatrix},$$

para calcular  $D_{11}$  devemos retirar a linha 1 e a coluna 1 de  $M$ , assim:

$$D_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -13.$$

**Definição A.12.** Considere uma matriz  $M$  de ordem  $n \geq 2$ , seja  $a_{ij}$  um elemento de  $M$ , o cofator de  $a_{ij}$ , indicado por  $A_{ij}$ , é o número  $(-1)^{i+j} \cdot D_{ij}$ .

**Exemplo A.9.** O cofator  $A_{11}$  da matriz  $M$  do exemplo A.8 será dado por:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot D_{11} = (-1)^{1+1} \cdot (-13) = 13.$$

**Definição A.13.** Seja  $M$  uma matriz quadrada de ordem  $n$  e  $M'$  a matriz dos cofatores de  $M$ . Chamamos de matriz adjunta de  $M$ , e indicamos por  $M_{adj}$ , a transposta da matriz  $M'$ , isto é,  $M_{adj} = (M')^t$ .



**Exemplo A.10.** Vamos calcular a matriz adjunta da matriz do exemplo A.8:

Temos que

$$M = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \\ 3 & 3 & 2 \end{bmatrix} \implies M' = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -13 & 11 & 3 \\ 6 & -4 & -3 \\ 11 & -12 & -2 \end{bmatrix}$$

Logo,

$$M_{adj} = \begin{bmatrix} -13 & 6 & 11 \\ 11 & -4 & -12 \\ 3 & -3 & -2 \end{bmatrix}.$$

**Teorema A.14.** Se  $M$  é uma matriz de ordem  $n$  com  $n = 1$ ,  $n = 2$  ou  $n = 3$  e  $M^t$  sua transposta, então  $\det M^t = \det M$ .

*Demonstração.* Observamos que para  $n = 1$  o teorema é verdadeiro.

Para  $n = 2$  segue que

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \implies M^t = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}.$$

Então  $\det M = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \det M^t$ .

Para  $n = 3$ , temos:

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \implies M^t = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

Logo,

$$\det A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} = \det A^t.$$

□

**Teorema A.15.** Se uma matriz  $A$  de ordem  $n = 2$  ou  $n = 3$  tem uma linha (ou coluna) que é combinação linear de outras linhas (ou colunas) então  $\det A = 0$ .

*Demonstração.* Seja a matriz de ordem  $n = 2$

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}.$$

Suponha que a primeira linha seja combinação linear da segunda, assim:

$$M = \begin{bmatrix} \alpha a_{21} & \alpha a_{22} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

Então  $\det M = \alpha a_{21} a_{22} - \alpha a_{22} a_{21} = 0$ . Analogamente para a segunda linha ser combinação linear da primeira e uma coluna ser combinação linear de outra.

Para  $n = 3$ , considere a matriz

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

Suponha que a primeira linha seja combinação linear das demais linhas, assim:

$$M = \begin{bmatrix} \alpha a_{21} + \beta a_{31} & \alpha a_{22} + \beta a_{32} & \alpha a_{23} + \beta a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

Então  $\det M = (\alpha a_{21} + \beta a_{31})a_{22}a_{33} + (\alpha a_{22} + \beta a_{32})a_{23}a_{31} + (\alpha a_{23} + \beta a_{33})a_{21}a_{32} - (\alpha a_{23} + \beta a_{33})a_{22}a_{31} - (\alpha a_{21} + \beta a_{31})a_{23}a_{32} - (\alpha a_{22} + \beta a_{32})a_{21}a_{32} = 0$ . Os cálculos são análogos caso a segunda ou a terceira linha seja combinação linear das demais.

Se a primeira coluna for combinação linear das demais, teremos

$$M = \begin{bmatrix} \alpha a_{12} + \beta a_{13} & a_{12} & a_{13} \\ \alpha a_{22} + \beta a_{23} & a_{22} & a_{23} \\ \alpha a_{32} + \beta a_{33} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Então  $\det M = (\alpha a_{12} + \beta a_{13})a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}(\alpha a_{32} + \beta a_{33}) + a_{13}(\alpha a_{22} + \beta a_{23})a_{32} - a_{13}a_{22}(\alpha a_{32} + \beta a_{33}) - (\alpha a_{12} + \beta a_{13})a_{23}a_{32} - a_{12}(\alpha a_{22} + \beta a_{23})a_{33} = 0$ . Os cálculos são análogos caso a segunda ou a terceira coluna seja combinação linear das demais.  $\square$

### A.3 SISTEMAS LINEARES

Vários problemas são modelados por sistemas de equações lineares e como vimos, no presente trabalho, não é diferente com a geometria projetiva. Os teoremas a seguir foram reescritos para sistemas lineares de 3 equações e três incógnitas. Caso o leitor queira consultá-los na forma geral, indicamos a referência [7], assim como os resultados para determinantes vistos na seção anterior, onde trabalhamos com determinantes de matrizes de ordem 3.

**Definição A.16.** Uma equação linear com  $n$  incógnitas  $x_1, \dots, x_n$  é uma equação da forma  $a_1x_1 + \dots + a_nx_n = b$ , onde  $a_1, \dots, a_n, b$  são constantes reais.

**Definição A.17.** Um sistema de  $m$  equações lineares em  $n$  incógnitas é um conjunto de equações lineares da forma

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

onde  $a_{ij}, b_k$  para  $i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$  e  $k = 1, \dots, m$ , são constantes reais, chamados coeficientes do sistema.

Usando a notação de matrizes e a maneira como o produto de matrizes foi definido, o sistema linear acima pode ser representado pela equação matricial

$$AX = B$$

onde

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

A matriz  $A$  é chamada de matriz do sistema.

**Teorema A.18.** Se  $M$  é uma matriz quadrada de ordem 3 e  $I_3$  é a matriz identidade de ordem 3, então  $M \cdot M_{adj} = M_{adj} \cdot M = \det M \cdot I_3$ .

*Demonstração.* Seja

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} \implies M_{adj} = \begin{bmatrix} a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32} & a_{13}a_{32} - a_{12}a_{33} & a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22} \\ a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33} & a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31} & a_{13}a_{21} - a_{11}a_{23} \\ a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31} & a_{12}a_{31} - a_{11}a_{32} & a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \end{bmatrix}$$

e  $\det M = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$

Assim

$$M \cdot M_{adj} = \begin{bmatrix} \det M & 0 & 0 \\ 0 & \det M & 0 \\ 0 & 0 & \det M \end{bmatrix} = \det M \cdot I_3.$$

□

**Teorema A.19.** *Se  $M$  é uma matriz quadrada de ordem 3 e  $\det M \neq 0$ , então a inversa de  $M$  é*

$$M^{-1} = \frac{1}{\det M} \cdot M_{adj}.$$

Usando o teorema A.18, temos:

*Demonstração.*

$$M \cdot \left(\frac{1}{\det M}\right) \cdot M_{adj} = \frac{1}{\det M} \cdot (M \cdot M_{adj}) = \frac{\det M}{\det M} \cdot I_3 = I_3 \tag{A.1}$$

$$\left(\frac{1}{\det M}\right) \cdot M_{adj} \cdot M = \frac{1}{\det M} \cdot (M_{adj} \cdot M) = \frac{\det M}{\det M} \cdot I_3 = I_3 \tag{A.2}$$

Assim, de A.1, A.2 e da definição de matriz inversa que

$$M^{-1} = \frac{1}{\det M} \cdot M_{adj}$$

□

**Teorema A.20.** *Seja  $A$  uma matriz de coeficientes de um sistema de 3 equações e 3 incógnitas. Se  $\det A \neq 0$ , então o sistema possui a solução única  $(x_1, x_2, x_3)$ , tal que*

$$x_i = \frac{\det A_i}{\det A}, \text{ tal que } i = 1, 2, 3$$

*e que  $\det A_i$  é o determinante da matriz obtida de  $A$ , substituindo-se a  $i$ -ésima coluna pela coluna dos termos independentes das equações do sistema.*

*Demonstração.* Consideremos o sistema

$$S \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

Consideremos as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}.$$

Observe que o sistema  $S$  pode ser escrito na forma matricial como  $A \cdot X = B$ . Provemos que tal equação matricial admite solução única.

Como  $\det A \neq 0$  segue que existe a matriz  $A^{-1}$ . Consideramos a matriz  $X_0 = A^{-1}B$  e provemos que ela é solução da equação matricial  $AX = B$ .

Como

$$A(A^{-1}B) = (AA^{-1})B = I_3B = B,$$

então está garantida a existência da solução  $X_0$ .

Para provar a unicidade, considere que  $AX = B$  tenha outra solução  $X_1$ , logo:

$$X_1 = I_3X_1 = (AA^{-1})X_1 = A^{-1}(AX_1) = A^{-1}B = X_0$$

Portanto o sistema possui solução única.

Considerando que  $X_0 = A^{-1}B$  é a solução do sistema  $A \cdot X = B$ , segue pelo teorema A.19 segue que

$$X_0 = A^{-1}B \implies X_0 = \frac{1}{\det A} \cdot A_{adj} \cdot B$$

Lembrando que

$$X_0 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad A_{adj} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

temos

$$x_i = \frac{1}{\det A} \cdot (A_{1i}b_1 + A_{2i}b_2 + A_{3i}b_3) = \frac{\det A_i}{\det A}$$

□

**Definição A.21.** Chamamos de sistema linear homogêneo aquele em que os termos independentes de todas as equações valem zero.

**Exemplo A.11.**

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 0 \\ 4x_1 - 1x_2 - 7x_3 = 0 \\ 2x_1 - 5x_2 - 9x_3 = 0 \end{cases}$$

**Teorema A.22.** Um sistema homogêneo de  $n$  equações lineares em  $n$  incógnitas tem uma solução não trivial, isto é, uma solução diferente de  $x_1 = x_2 = x_3 = 0$  se o determinante dos coeficientes for igual a zero.

*Demonstração.* Observe que qualquer sistema linear homogêneo sempre tem, ao menos, uma solução,  $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ . Caso o determinante dos coeficientes seja diferente

de zero, pelo teorema A.20, segue que ele admite solução única. Como, por hipótese, esse determinante é igual a zero, segue que ele possui mais de uma solução que é diferente da trivial.  $\square$

#### A.4 EQUAÇÃO DA RETA NO ESPAÇO

Em  $\mathbb{R}^3$ , ou seja, num sistema de coordenadas tridimensional, um vetor  $v(a, b, c)$  determina uma direção no espaço. Dado um ponto  $P_0(x_0, y_0, z_0)$ , existe uma única reta  $r$  paralela ao vetor  $v$  passando pelo ponto  $P_0$ .

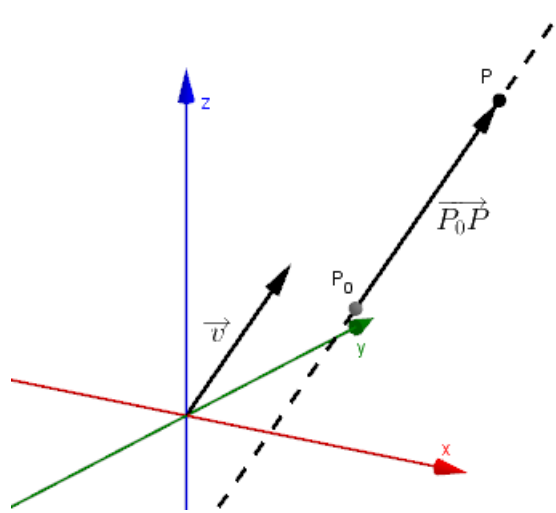


Figura 68: Reta no espaço paralela passando por  $P_0$  paralela a um vetor  $v$ .

Para encontrar a equação desta reta  $r$ , considere um ponto  $P(x, y, z) \in r$  de modo que  $\overrightarrow{P_0P}$  seja múltiplo de  $v$ , isto é, se

$$\overrightarrow{P_0P} = t \overrightarrow{v},$$

para  $t \in \mathbb{R}$ . As coordenadas do vetor  $\overrightarrow{P_0P}$  são dadas por

$$\overrightarrow{P_0P} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OP_0} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0).$$

Portanto,  $P$  pertence a esta reta se e somente se

$$(x - x_0, y - y_0, z - z_0) = (ta, tb, tc).$$

Ou seja, se e somente se

$$\begin{cases} x = x_0 + ta \\ y = y_0 + tb \\ z = z_0 + tc \end{cases}$$

Assim, qualquer ponto  $P$  de coordenadas  $(x_0 + ta, y_0 + tb, z_0 + tc) = \overrightarrow{OP_0} + t \vec{v}$  pertence à reta dada. Esta equação é chamada de equação paramétrica da reta  $r$  e  $v$  é chamado de vetor direção da reta.

**Exemplo A.12.** Encontre uma equação paramétrica para a reta que passa pelos pontos  $P_1(1, 3, -2)$  e  $P_2(4, -5, -2)$ .

Como o segmento orientado  $\overrightarrow{P_1P_2} = (1, 3, -2) - (4, -5, -2) = (-3, 6, 0)$  pertence a esta reta, ele representa um vetor direção para ela. Qualquer um dos pontos  $P_1$  ou  $P_2$  pode ser escolhido para construir uma equação paramétrica para a reta:

$$\begin{cases} x = 1 - 3t \\ y = 3 + 6t \\ z = -2 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x = 4 - 3t \\ y = -5 + 6t \\ z = -2 \end{cases}$$

são duas equações paramétricas possíveis para esta reta.

A partir da equação paramétrica da reta

$$\begin{cases} x = x_0 + ta \\ y = y_0 + tb \\ z = z_0 + tc \end{cases}$$

podemos resolver em  $t$ , se todas as componentes do vetor  $v$  são não-nulas, obtendo as **equações simétricas** da reta:

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

## A.5 ALGUNS RESULTADOS DA GEOMETRIA PLANA

Para justificar a demonstração do teorema de Menelaus (teorema 3.23) e de Pascal (teorema 3.24), precisaremos dos seguintes resultados:

**Teorema A.23.** *Se dois triângulos têm ordenadamente congruentes um lado e os dois ângulos a ele adjacentes, então esses triângulos são congruentes.*

*Demonstração.* Sejam os triângulos  $\triangle ABC$  e  $\triangle A'B'C'$ . Por hipótese,

$$\angle ABC \equiv \angle A'B'C' \tag{A.3}$$

$$\overline{BC} \equiv \overline{B'C'} \tag{A.4}$$

$$\angle ACB \equiv \angle A'C'B' \tag{A.5}$$

Marcamos um ponto  $X$  na semirreta  $\overrightarrow{B'A'}$  tal que

$$\overline{B'X} \equiv \overline{BA} \tag{A.6}$$

Pelo postulado de congruência lado-ângulo-lado, temos que

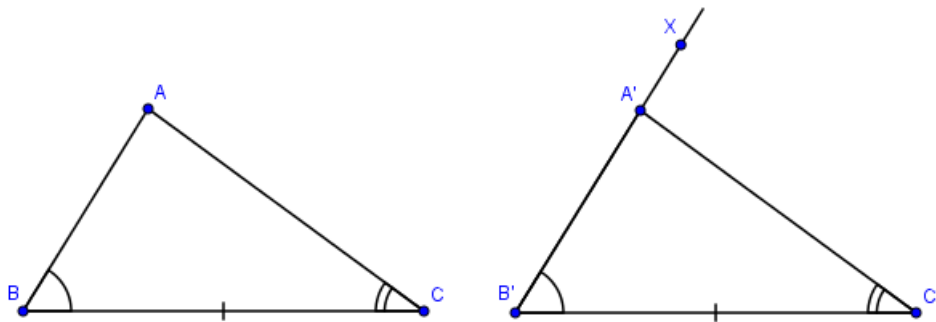


Figura 69: Caso de congruência ângulo lado ângulo.

$$\triangle ABC \equiv \triangle XB'C' \iff \angle BCA \equiv \angle B'C'X \tag{A.7}$$

De A.5 e A.7, segue que  $\overleftrightarrow{B'A'} \equiv \overleftrightarrow{C'X} = \overleftrightarrow{C'A}$  intersectam-se num único ponto  $X = A'$ .

De  $X = A'$ , com A.6, decorre que  $\overline{B'A'} \equiv \overline{BA}$ , então, pelo postulado de congruência lado-ângulo-lado, temos que  $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$ .  $\square$

**Definição A.24.** Dois triângulos são semelhantes se, e somente se, os três pares de ângulos correspondentes forem congruentes e os três pares de lados correspondentes forem proporcionais.

Na figura 70, temos:

$$\angle BAC \equiv \angle B'A'C',$$

$$\angle ABC \equiv \angle A'B'C',$$

$$\angle ACB \equiv \angle A'C'B',$$

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}.$$



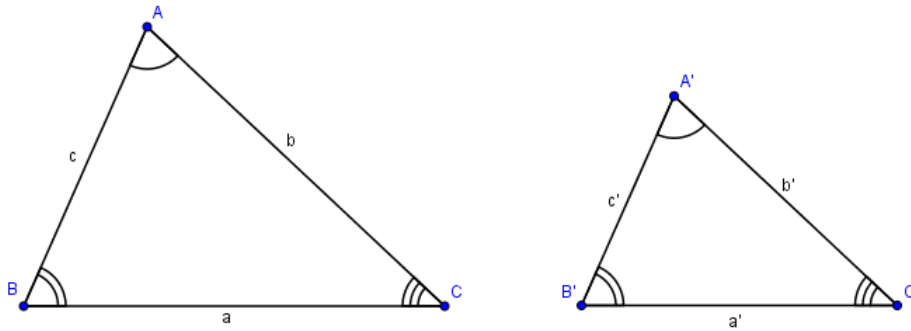


Figura 70: Definição de triângulos semelhantes.

Então  $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$  (o símbolo  $\sim$  significa “semelhante”).

**Teorema A.25.** *Se dois triângulos possuem dois ângulos ordenadamente congruentes, então eles são semelhantes.*

*Demonstração.* Vamos supor que  $\overline{AB} > \overline{A'B'}$ .

Considere os triângulos  $\triangle ABC$  e  $\triangle A'B'C'$  de modo que  $\angle BAC \equiv \angle B'A'C'$  e  $\angle ABC \equiv \angle A'B'C'$ .

Sejam  $D$  um ponto de  $\overline{AB}$  tal que  $\overline{AD} \equiv \overline{A'B'}$ . O triângulo  $\triangle ADE$  com  $\angle ADE \equiv \angle A'B'C'$  e o ponto  $E$  no lado  $\overline{AC}$  (figura 71). Pelo teorema 75,  $\triangle ADE \sim \triangle A'B'C'$ ,

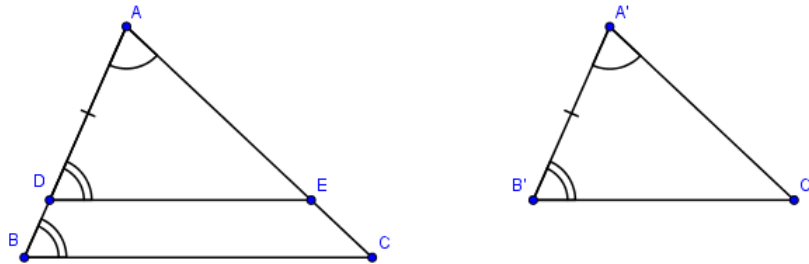


Figura 71: Triângulos semelhantes.

$\angle ABC \equiv \angle A'B'C'$  e  $\angle A'B'C' \equiv \angle ADE$ . Logo,  $\angle ABC \equiv \angle ADE$ . Então  $\overleftrightarrow{DE}$  paralela a  $\overleftrightarrow{BC}$ . Assim,  $\triangle ABC \sim \triangle ADE$  e, finalmente,  $\triangle ADE \sim \triangle A'B'C'$ .  $\square$

**Teorema A.26.** *Se por um ponto  $P$  passam duas retas concorrentes que interceptam um círculo nos pontos  $A, B, C$  e  $D$ , respectivamente, então  $PA \cdot PB = PD \cdot PC$ .*

*Demonstração.* A demonstração é análoga para o caso em que o ponto  $P$  é externo (figura 72) ou interno (figura 73) ao círculo.

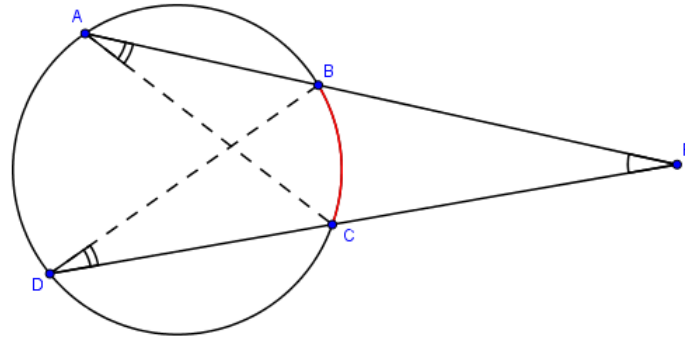


Figura 72: Teorema A.26 com  $P$  externo ao círculo.

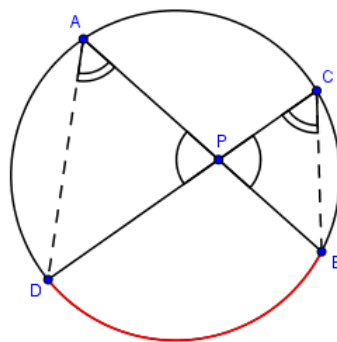


Figura 73: Teorema A.26 com  $P$  interno ao círculo.

Considere os triângulos  $\triangle PAC$  e  $\triangle PDB$ . Temos que

$$\angle APC \equiv \angle BPC \quad (\text{ângulo comum})$$

$$\angle PAC \equiv \angle PDB$$

Logo, pelo teorema A.25, segue que  $\triangle PAC \sim \triangle PDB$ , assim:

$$\frac{PA}{PD} = \frac{PC}{PB} \implies PA \cdot PB = PD \cdot PC$$

□

**Lema A.27.** Se duas retas  $r$  e  $r'$  são transversais a um feixe de retas paralelas distintas e um segmento de uma delas é dividido em  $p$  partes congruentes entre si e pelos pontos de di-

visão são conduzidas retas do feixe, então o segmento correspondente da outra transversal também é dividido em  $p$  partes congruentes entre si.

*Demonstração.* Parte 1):  $\overline{AB}$  e  $\overline{A'B'}$  são segmentos correspondentes e  $\overline{AB}$  é dividido em  $p$  partes por retas do feixe.

Se  $\overline{A'B'}$  ficasse dividido em menos partes (ou mais partes), pelo menos duas retas do feixe encontrariam-se em pontos de  $\overline{AB}$  (ou de  $\overline{A'B'}$ ), o que é absurdo pois as retas do feixe são paralelas.  $\square$

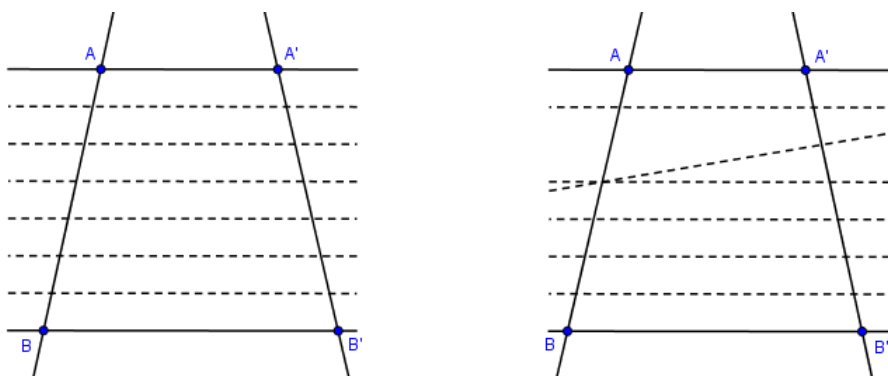


Figura 74: Os segmentos correspondentes são divididos em um mesmo número de partes quando cortados por retas paralelas

Parte 2):  $\overline{AB}$  é dividido em partes congruentes a  $x$ .

Pelos pontos de divisão de  $\overline{A'B'}$ , conduzindo paralelas a  $\overline{AB}$ , obtemos um triângulo para cada divisão. Pelo lema 75 todos os triângulos são congruentes (basta notar os paralelogramos e os ângulos de lados respectivamente paralelos que são obtidos).

Portanto  $\overline{A'B'}$  é dividido em partes congruentes pelos pontos de divisão.

**Teorema A.28. (Teorema de Tales)** *Se duas retas são transversais a um feixe de retas paralelas, então a razão entre dois segmentos quaisquer de uma delas é igual à razão entre os respectivos segmentos correspondentes da outra.*

*Demonstração.* Sejam  $r$  e  $r'$  as retas transversais, os pontos  $A, B, C$  e  $D$  pertencentes a  $r$  e os respectivos pontos correspondentes  $A', B', C'$  e  $D'$  pertencentes a  $r'$ , dividiremos a prova em dois casos:

Caso 1:  $\overline{AB}$  e  $\overline{CD}$  são comensuráveis.

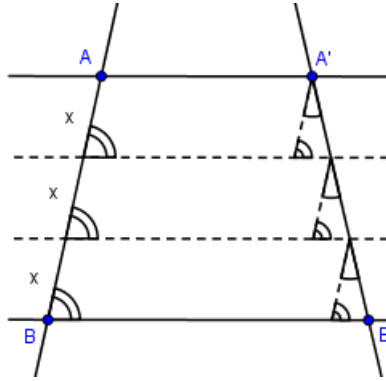


Figura 75:  $\overline{A'B'}$  dividido em partes congruentes.

Existe um segmento  $x$  que é submúltiplo de  $\overline{AB}$  e de  $\overline{CD}$ , assim  $AB = px$  e  $CD = qx$  com  $p$  e  $q$  pertencente aos números reais. Logo,

$$\frac{AB}{CD} = \frac{p}{q}. \tag{A.8}$$

Conduzindo retas do feixe pelos pontos de divisão de  $\overline{AB}$  e  $\overline{CD}$  (figura 76) e aplicando o teorema (lema A.27), temos que  $A'B' = px'$  e  $C'D' = qx'$ , logo

$$\frac{A'B'}{C'D'} = \frac{p}{q}. \tag{A.9}$$

Comparando A.8 e A.9, temos:

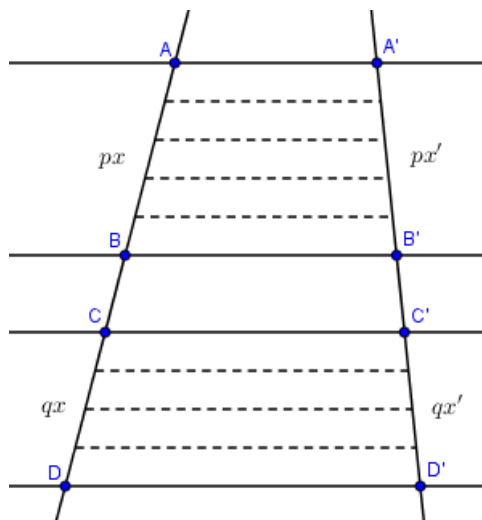


Figura 76: Esquema da primeira parte da prova do teorema de Tales.

$$\frac{AB}{CD} = \frac{A'B'}{C'D'}$$

Caso 2:  $\overline{AB}$  e  $\overline{CD}$  são incomensuráveis, isto é, não existe segmento submúltiplo comum de  $\overline{AB}$  e  $\overline{CD}$ , ou seja  $\frac{AB}{CD} = x$ , com  $x$  sendo um número irracional.

Escolha uma sequência  $(a_n)_{n \geq 1}$  de racionais positivos, tal que

$$x < a_n < x + \frac{1}{n},$$

para todo número natural  $n > 0$ . Em seguida, marque o ponto  $D_n$  na reta  $r$  (figura 77) tal que

$$\frac{AB}{CD_n} = a_n.$$

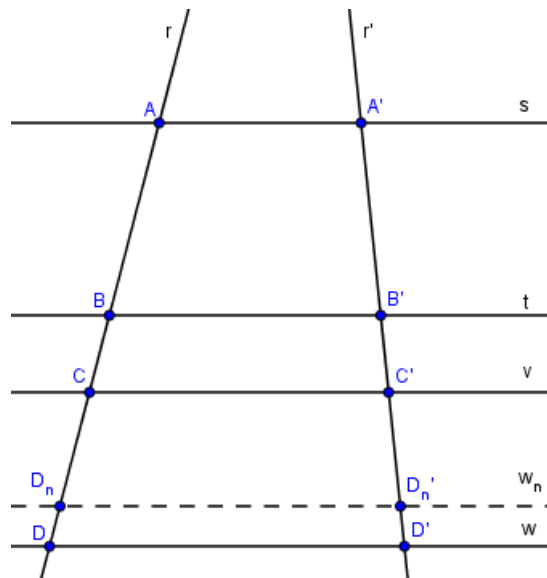


Figura 77: Esquema da segunda parte da prova do teorema de Tales.

Seja a reta  $w_n$  paralela às retas  $s$ ,  $t$  e  $v$  e  $w$  traçada por  $D_n$  e  $D'_n$  o ponto onde  $w_n$  intersecta  $r'$ . Como  $a_n$  é um número racional, um argumento análogo ao anterior garante que

$$\frac{A'B'}{C'D'_n} = a_n.$$

De outra forma, obtivemos que

$$x < \frac{AB}{CD_n} < x + \frac{1}{n} \implies x < \frac{A'B'}{C'D'_n} < x + \frac{1}{n},$$

ou ainda,

$$\frac{AB}{CD} < \frac{AB}{CD_n} < \frac{AB}{CD} + \frac{1}{n} \implies \frac{AB}{CD} < \frac{A'B'}{C'D'_n} < \frac{AB}{CD} + \frac{1}{n}. \quad (\text{A.10})$$

Observe, agora, que as desigualdades do primeiro membro acima garantem que, à medida em que  $n$  aumenta, os pontos  $D_n$  aproximam-se mais e mais do ponto  $D$ . Mas como  $w_n$  é paralela a  $t$ , segue então que os pontos  $D'_n$  aproximam-se mais e mais do ponto  $D'$ , de maneira que a razão  $\frac{A'B'}{C'D'_n}$  aproxima-se mais e mais da razão  $\frac{A'B'}{C'D'}$ . Abreviamos isso escrevendo

$$\frac{A'B'}{C'D'_n} \longrightarrow \frac{A'B'}{C'D'} \quad \text{quando } n \longrightarrow \infty.$$

Por outro lado, utilizando notação análoga à da linha acima, podemos claramente inferir, a partir das desigualdades do segundo membro de A.10, que

$$\frac{A'B'}{C'D'_n} \longrightarrow \frac{AB}{CD} \quad \text{quando } n \longrightarrow \infty.$$

Utilizando, agora, o fato (justicado rigorosamente em [10]) de que uma sequência  $(a_n)_{n \geq 1}$  de números reais não pode aproximar-se simultaneamente de dois números reais distintos quando  $n \longrightarrow \infty$ , portanto podemos concluir que

$$\frac{AB}{CD} = \frac{A'B'}{C'D'}.$$

□

---

## BIBLIOGRAFIA

---

- [1] ALMEIDA, F. R. T. de, *Notas de aula de geometria projetiva*. São Paulo: IME-USP. 2018. Disponível em <<https://www.ime.usp.br/~rui/form3.pdf>>. Acesso em 26 de outubro de 2018.
- [2] ANDRADE, L. N. de, *A Construção de Cônicas e o Teorema de Pascal*. Revista do Professor de Matemática, vol. 45, 2001.
- [3] BORCEUX, FRANCIS, *An axiomatic approach to geometry*. Springer, 2014
- [4] CORREIA, M. C. L. F., *Diferentes Abordagens ao Estudo das Cônicas*, 2013.
- [5] COURANT, R.; ROBBINS, H., *O que é matemática: uma abordagem elementar de métodos e conceitos*. Ciência Moderna, 2000.
- [6] DOLCE, O.; POMPEO, J. N., *Fundamentos de matemática elementar, 9, geometria plana*. Ed. Atual, 2004.
- [7] IEZZI, G.; HAZZAN, S., *Fundamentos de matemática elementar, 4, sequências, matrizes, determinantes, sistemas*. Ed. Atual, 2004.
- [8] LIMA, E. L.; CARVALHO, P. C. P., *Coordenadas no plano com as soluções dos exercícios: geometria analítica, vetores e transformações geométricas*. Rio de Janeiro: SBM, 2005.
- [9] MELO, H. S. *Isometrias no plano: uma abordagem segundo a geometria analítica*. Ed. Influx, 2010.
- [10] NETO, A. C. M., *Fundamentos de cálculo*. Rio de Janeiro: SBM, 2015.
- [11] NETO, A. C. M., *Geometria (Coleção PROFMAT)*. Rio de Janeiro: SBM, 2013.
- [12] PENNA, M.; PATTERSON, R. R., *Projective geometry and its applications to computer graphics*. New Jersey: Prentice-Hall Englewood Cliffs, 1986.
- [13] SEARA, H. F., *Atividades de Geometria Projetiva para a sala de aula*. In X Encontro Nacional de Educação Matemática, Salvador, 2010. Disponível em <[http://www.lematec.net.br/CDS/ENEM10/artigos/MC/T12\\_MC382.pdf](http://www.lematec.net.br/CDS/ENEM10/artigos/MC/T12_MC382.pdf)>. Acesso em 26 de outubro de 2018.

- [14] WYLIE, C. R., *Introduction to projective geometry*. Courier Corporation, 2011.