Universidade Federal de Mato Grosso
Instituto de Ciências Exatas e da Terra
Departamento de Matemática

Ensino de funções trigonométricas com modelagem matemática

Adriana Tenir Egéa de Oliveira
Mestrado Profissional em Matemática: PROFMAT/SBM

Orientador: **Prof. Dr. Geraldo Lúcio Diniz**

Trabalho financiado pela Capes

Cuiabá - MT

Março de 2019

Ensino de funções trigonométricas com modelagem matemática

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação, devidamente corrigida e defendida por Adriana Tenir Egéa de Oliveira e aprovada pela comissão julgadora.

Cuiabá, 28 de março de 2019.

Prof. Dr. Geraldo Lúcio Diniz
Orientador

Banca examinadora:

Prof. Dr. Geraldo Lúcio Diniz
Prof. Dr. Moiseis dos Santos Cecconello
Prof. Dr. William Vieira Gonçalves

Dissertação apresentada ao curso de Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT, da Universidade Federal de Mato Grosso, como requisito parcial para obtenção do título de **Mestre em Matemática**.

Dados Internacionais de Catalogação na Fonte.

O48e Oliveira, Adriana Tenir Egéa de.
Ensino de funções trigonométricas com modelagem matemática / Adriana Tenir Egéa de Oliveira. -- 2019
xiv, 80 f. : il. color. ; 30 cm.

Orientador: Geraldo Lúcio Diniz.
Dissertação (mestrado profissional) – Universidade Federal de Mato Grosso, Instituto de Ciências Exatas e da Terra, Programa de Pós-Graduação Profissional em Matemática, Cuiabá, 2019.
Inclui bibliografia.

1. Abordagem conceitual. 2. matemática aplicada. 3. aprendizagem matemática. I. Título.

Ficha catalográfica elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO
PRÓ-REITORIA DE ENSINO DE PÓS-GRADUAÇÃO
Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT
Av. Fernando Corrêa da Costa, 2367 - Boa Esperança – 78.060-900 - Cuiabá/MT
Tel : (65) 3615-8576 – E-mail: profmat@ufmt.br

FOLHA DE APROVAÇÃO

Título: "Ensino de funções trigonométricas com modelagem matemática"

Autor: Adriana Tenir Egéa de Oliveira

defendida e aprovada em 01/03/2019.

Composição da Banca Examinadora:

Presidente Banca/Orientador Doutor Geraldo Lúcio Diniz
Instituição : Universidade Federal de Mato Grosso

Examinador Interno Doutor Moiseis Dos Santos Cecconello
Instituição : Universidade Federal de Mato Grosso

Examinador Externo Doutor(a) William Vieira Gonçalves
Instituição : UNEMAT – Barra do Bugres

Cuiabá, 01/03/2019.

Às minhas certezas... a paciência, o aprendizado e experiências compartilhadas nesta jornada.

Agradecimentos

À Deus, por ter colocado pessoas especiais ao meu lado, sem as quais não teria conseguido chegar até aqui.

Ao meu orientador professor Geraldo Lúcio Diniz, que me acolheu e contribuiu com sua sabedoria e paciência. Agradeço imensamente por acreditar no meu trabalho, por me incentivar e nortear com suas ideias e carinho a realização desta dissertação. Obrigada por compartilhar de suas experiências, o que me fez fortalecer enquanto pesquisadora.

Aos meus pais, Creusa e José, em especial minha mãe, pelas orações e carinho. Por me incentivarem, valorizarem meus sonhos e acreditarem sempre em mim.

Ao meu esposo, Sidnei que esteve junto durante todos os momentos. Soube compreender minhas ausências, os dias tensos e essa jornada distante que trilhei por todos estes dias, pelo apoio e carinho partilhado.

À minha filha Yasmin, apesar da distância está sempre em meu coração, minha fonte de energia, amizade que nunca se questiona.

Às minhas irmãs, Luciana, Leila e Juliana que vibraram comigo a cada conquista e me incentivaram a todo momento.

Aos meus amigos do mestrado pela troca de experiência, o grupo de estudo, discussões que fortaleceram as reflexões e acima de tudo a parceria ímpar nestes anos de dedicação. Com certeza a melhor turma que o PROFMAT já teve nestes anos . . . Claudeir, Claudio, Juliano, Luis, Ondrias, Osvaldo, Paula, Priscila, Silvana, Valcir, Vinícius e Zeila, e em especial Jaqueline Soares e Jaqueline Mariano, amigas conselheiras, confidentes e parceiras, amizades que o mestrado me presenteou e quero para toda a vida. Estou certa que levarei para sempre o convívio e aprendizado destes anos todos com cada um.

Aos professores André Krindges, Djeison Benetti, Hector Callisaya, Moiseis dos Santos Cecconello, Reinaldo de Marchi, Ruikson Silas e Vinicius dos Santos, mais que importantes nesta conquista, pelos ensinamentos, pela dedicação ao curso e contribuição na forma de pensar o ensino, por compartilharem de suas experiências. Ao célebre professor Aldi Nestor, meu respeito e admiração, por tanta sensibilidade e sabedoria quanto ao seu olhar para a educação. Vocês foram referenciais para mim!

Aos professores Willian Vieira Gonçalves e Moiseis dos Santos Cecconello, membros da banca examinadora, pelos conselhos e valiosas contribuições, por terem partilhado de experiências que agregaram mais significados à minha dissertação.

À CAPES pelo apoio financeiro.

À todos os amigos e familiares que acreditaram em mim, em especial aqueles que diretamente me incentivaram.

A influência científica da nossa visão de mundo não se limita a ideias abstratas. Pelo contrário, nossa percepção da realidade é determinada por inovações tecnológicas. Ao entender os mecanismos da natureza, o homem poderá erguer-se, sem medo, perante a criação.

Marcelo Gleiser

Resumo

Nesta dissertação foi realizado um levantamento histórico das dissertações produzidas no Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT, do ano de 2013 a 2018, que trataram o tema Trigonometria. Deste processo de levantamento bibliográfico, emergiram 134 dissertações, classificadas em dois sub-temas: abordagem conceitual e abordagem por aplicações. Este levantamento serviu de suporte teórico para analisar os resultados alcançados no ensino de trigonometria em sala de aula, utilizando as diversas ferramentas metodológicas. Evidenciaram-se os trabalhos que apontam os desafios de ensino. Neste contexto, o objetivo é abordar o ensino de trigonometria através da modelagem matemática, com a finalidade de enriquecer e fomentar o campo de investigação, sistematização de ideias e conceitos. Promover o papel do professor num ensino mais dinâmico e abrangente, aplicar a Matemática em aspectos que possibilite o aluno pensar situações reais, contextualizar as complexidades e ser capaz de perceber-se, enquanto constrói o seu próprio conhecimento. Apresenta uma proposta de ensino que, através de um experimento, analisa pequenas amplitudes do movimento de um pêndulo simples, numa situação real, em que se faz a contextualização de uma situação-problema para o ensino de conteúdos matemáticos, especificamente trigonométricos.

Palavras–chave: Abordagem conceitual, matemática aplicada, aprendizagem matemática.

Abstract

In this master's thesis a historical survey was made of the master theses produced in the Professional Master's Program in Mathematics - PROFMAT, from the year 2013 to 2018, which investigate the topic Trigonometry. From this process of bibliographical survey, 134 master theses emerged, classified in two sub-themes: conceptual approach and application approach. This survey served as a theoretical support to analyze the results achieved in the teaching of trigonometry in the classroom, using the various methodological tools. The work that points out the challenges of teaching has been evidenced. In this way, the objective is to approach the teaching of trigonometry through mathematical modeling, with the purpose of enriching and fostering the field of investigation, as well as the systematization of ideas and concepts. In addition, it is important to promote the role of the teacher in a more dynamic and comprehensive teaching, seeking to apply Mathematics in aspects that enable the student to think real situations, contextualize the complexities and be able to perceive themselves while building their own knowledge. It presents a teaching proposal that, through an experiment, analyzes small amplitudes of the movement of a simple pendulum, in a real situation, in which the contextualization of a problem situation is made for the teaching of mathematical contents, specifically trigonometric.

Keywords: Conceptual approach, applied mathematics, mathematical learning.

Sumário

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Introdução

Embora seja possível observar a matemática presente em diferentes situações que envolvam a atividade humana, entretanto, nas escolas o seu ensino é um dos principais problemas. E, se tratando de pensar matematicamente, as dificuldades em diversas questões desde as mais básicas que envolvem noções elementares, como o cálculo de raízes, razão e proporção, ou até mesmo a porcentagem de um número, são obstáculos que permeiam o espaço escolar.

Quanto ao ensino da trigonometria, o problema é um tanto curioso, ao passo que o conceito e suas aplicações, muitas vezes sequer trabalhados, acabam sendo tratados de forma fragmentada, com cálculos mecanicamente repetitivos e sem significado.

A motivação para a abordagem deste tema deve-se ao fato de ser um conteúdo que, trabalhado em sala, muitas vezes gera desconforto para os alunos. Estes apresentam dificuldades na assimilação dos conceitos e na visualização das situações problemas apresentadas, além de questionarem a sua utilidade. Além do prazo no cumprimento do currículo que quase sempre impossibilita viabilizar uma proposta investigativa interdisciplinar.

Sendo assim, é questionável se este conhecimento, utilizado para a solução de diversos problemas e estudado desde a antiguidade, será necessário nos dias atuais? Terá o professor competências para ensinar trigonometria em uma perspectiva diferenciada, contextualizada e crítica? Em que a modelagem matemática pode contribuir para o ensino da trigonometria? Por que estudar trigonometria, qual a sua utilidade?

Estas indagações é que levaram a esta proposta de trabalho, cuja proposta de abordagem possibilitou a escrita desta dissertação, que propõe uma reflexão sobre o ensino de trigonometria e a modelagem matemática, com o objetivo é estabelecer relações para uma compreensão sistemática com significado prático e de caráter investigativo.

O primeiro capítulo trata brevemente da abordagem histórica da trigonometria e seu ensino, assim como o levantamento de referencial bibliográfico sobre a história da trigonometria até os dias de hoje. Apresenta um levantamento das dissertações do PROFMAT, que tratam sobre o ensino de trigonometria e faz uma análise das dissertações defendidas desde o ano de 2013 até o ano de 2018.

O filtro da pesquisa no banco de dissertações on-line do PROFMAT, foi realizado com as palavras trigonometria e trigonométricas, o que resultou em 134 dissertações, classificadas por abordagem conceitual e abordagem por aplicação.

Após a leitura e análise deste elevantamento foi possível perceber como o ensino de trigometria tem sido proposto e trabalhado, no campo teórico, prático e reflexivo pelos autores.Também são apresentados os conceitos e propriedades da trigonometria, do ponto de vista estritamente matemático, dos quais devem ser trabalhados em sala de aula, como base para a formação neste campo.

No segundo capítulo aborda-se a modelagem matemática com base nas literaturas de Caldeira, Meyer, Bassanezi, Biembengut, Sella e Burak na perspectiva de fundamentar metodologias de ensino, com uma proposta diferenciada. Também são expostas ideias da Etnomatemática em diálogo com a modelagem matemática, da qual se pontua aspectos culturais e sociais que contribuem para o currículo dentro do contexto escolar.

Diante das propostas, discorre-se sobre a modelagem matemática em sala de aula na sua forma de trabalho e possibilidades de subsidiar o professor em suas propostas de ensino de Matemática. São caracterizados alguns métodos específicos no entendimento desta na sua pluralidade, bem como se propõe, ante as perspectivas de Bassanezi e Meyer, um trabalho com modelagem em sala, reconhecendo a necessidade de dinamizar as práticas, explorando aspectos de problematização.

No terceiro capítulo é proposta uma atividade com aplicação da modelagem matemática para alunos do ensino médio, mediante a realização de um experimento, que permite a visualização dos conceitos de trigonometria e sua contextualização com fenômenos físicos. Aborda-se uma alternativa de ensino diferenciada, que planejada e mediada pelo professor, tem a intenção de problematizar o conteúdo a ser ministrado em seu contexto.

Nas considerações finais discute-se o estudo realizado e as contribuições que o trabalho proporciona no decorrer das revisões das bibliografias utilizadas. Busca-se dialogar com a abordagem de ensino adotada e estratégias pedagógicas, bem como o uso da modelagem matemática dentro das situações vivenciadas no espaço escolar. É feita uma reflexão das possibilidades, enquanto professor, de mediar a construção de um currículo que permita significado aos alunos, que não esteja pronto e acabado, e sim em constante mudança.

Capítulo 1

Trigonometria

Neste capítulo é feita uma breve discussão sobre modelagem matemática e um histórico do desenvolvimento da trigonometria. Também são abordados alguns conceitos e propriedades de trigonometria, que o aluno ao término do ensino básico, deve compreender, com a finalidade de desenvolver habilidades e capacidades como representação e comunicação, a investigação e compreensão que integram situações problemas, e a contextualização sociocultural na dimensão da Matemática, em específico no campo da trigonometria, alinhadas ao processo histórico.

1.1 Evidências e relevância do estudo

Discussões sobre modelagem matemática na prática docente e perspectivas que a inserem em diversas pesquisas na área de Educação Matemática, é um dos pontos que se mostra como relevante para o ensino.

Se pode destacar algumas delas, como a de Caldeira (2009) que ao discutir a modelagem matemática numa dimensão sócio-cultural, aponta a importância que é o fazer com que o professor e o estudante compreendam que eles são capazes de produzir conhecimento novo a partir do seu próprio conhecimento, quando perceberem que pode existir um outro conhecimento.

Para Bassanezi (2002) a modelagem matemática, em seus vários aspectos, é um processo que alia teoria e prática, para o entendimento da realidade, seja como um método científico ou como estratégia de ensino e aprendizagem, pois ela é capaz de transformar situações–problema reais em problemas matemáticos, e sua solução ser interpretada na linguagem do mundo real.

Sobre a inserção da modelagem matemática na prática docente, Burak (2005) a considera como um conjunto de procedimentos com o objetivo de estabelecer um paralelo para tentar explicar, matematicamente, os fenômenos presentes no cotidiano do ser humano, ajudando-o a fazer predições e a tomar decisões e, ainda, para que esta tenha efeito desejado na aprendizagem, é preciso interesse e que aconteça no ambiente de convívio das pessoas.

Um estudo desenvolvido por Biembengut (2009) afirma que o número de pesquisas e relatos de experiências em sala de aula, apresentados em eventos de Educação Matemática e sobre Modelagem na Educação Matemática, tem aumentado de forma significativa, ao passo que o interesse se torna maior com diversos trabalhos e publicações.

É a partir dessas reflexões e significados que se pode propor melhorias nos processos de ensino e aprendizagem, inserindo no currículo propostas que deem início a discussões e contribuições para os professores. Envolver no processo escolar novas e diferentes metodologias que promovam o enfrentamento a novos cenários, que possibilitem novas contribuições de outras pesquisas, que deem continuidade ao que se inicia.

No que se refere ao conteúdo de trigonometria, o ensino com significado agregado a outras disciplinas estabelecem ao professor o desafio de reorganizar, planejar e replanejar, justificar aplicações e fenômenos, que historicamente foram sendo desenvolvidos e ressalta, ainda, a continuidade constante em pesquisas e leituras que preparem o trabalho com a modelagem matemática, através de atividades e experimentos investigativos.

Para Meyer et al. (2011) o uso da modelagem matemática promove a descoberta, a busca por respostas a questionamentos, aos quais o aluno é o sujeito do processo cognitivo. Nesta perspectiva, o currículo é dinâmico, flexível e está constantemente sendo construído e reconstruído pelo professor e pelos alunos.

Em razão do uso da modelagem matemática, ser um dos possíveis potenciais nas aulas dos professores, como mencionado pelos autores destacados, é que se sugere a utilização desta concepção de ensino para o ensino e aprendizagem de trigonometria.

O uso da modelagem matemática, vai além de modelos matemáticos e solução de situações–problema, ele permite agregar ferramentas que otimizem a exploração do cenário para prever possíveis comportamentos observados na prática.

A exemplo destas ferramentas, se pode cita a planilha eletrônica, que funciona como uma implementação didática, da qual torna interessante a tabulação de dados e análise gráfica, possibilitando, assim, a avaliação do fenômeno e a sua otimização de forma prática.

Para Saldanha (2016) a interação ao manipular dados numa planilha podendo ver a reação de cada célula, linha ou gráfico observando a dinâmica da mudança das múltiplas representações é uma experiência que não é vivenciada em uma aula tradicional.

Neste sentido, o professor atua como mediador do processo, instiga, provoca questionamentos e lança desafios. Saldanha (2016) ressalta que o uso das planilhas eletrônicas tem se tornado mais frequente em sala de aula, o que modifica de forma gradual os métodos de ensino e as ferramentas utilizadas.

O autor ainda afirma que é possível explorar conceitos matemáticos e observar relações dos diferentes tipos de representações tais como tabelas, gráficos, com mior compreensão uma vez que há a possibilidade de vê-las ao mesmo tempo conectados entre si.

Assim, o trabalho aqui apresentado traz contribuições para uma das possíveis propostas didáticas de ensino de funções trigonométricas, no sentido de promover aulas práticas e significativas em que o aluno é o sujeito do processo.

Espera-se que a proposta aqui apresentada e as reflexões acerca da modelagem matemática descrita no decorrer do trabalho sirvam de orientação para novas propostas, como também a implementação e encaminhamento de atividades envolvendo trigonometria e as funções trigonométricas.

1.2 Um breve histórico sobre a trigonometria

Os primeiros vestígios da trigonometria surgiram na Babilônia e no Egito, não se sabe ao certo em que tempo. Mas, como afirma Eves (2011), as origens da trigonometria são obscuras. Os astrônomos babilônicos dos séculos IV e V a.C. acumularam uma massa considerável de dados de observações e hoje se sabe que grande parte desse material chegou até os gregos.

Foi essa astronomia primitiva que deu origem à trigonometria esférica. Justamente por conta das necessidades e interesses do homem, a astronomia que envolvia questões de religião, conexões com o calendário e previsões de fenômenos, como no caso das inundações, alavancou a sua aplicação como método de orientação nas navegações, técnicas de construção utilizando a ideia de ângulo.

No início do século VI a.C. o florescimento econômico na Grécia proporcionado pelo comércio e o contato com povos diferentes, tornam possíveis novas ideias e avanços científicos.

O envolvimento dos povos e a troca de saberes influenciaram o conhecimento matemático, que foi desenvolvido para uso prático. Boyer (1974) reitera que a trigonometria, como em outros ramos da Matemática, não foi obra de um só homem ou nação.

Neste período aparecem, na Grécia, Tales e Pitágoras, os quais tiveram contato com a geometria no Egito. Tales teve a possibilidade de conhecer tabelas e instrumentos astronômicos, na Babilônia, o que possibilitou-lhe contribuir com a trigonometria, através do teorema que leva seu nome: o Teorema de Tales.

Tales foi comerciante e ao visitar o Egito e a Mesopotâmia, como salienta Mol (2013), tomou contato com a Matemática desenvolvida nesses locais, o que certamente lhe deu base para atuar como matemático.

As concepções físicas e matemáticas de Pitágoras, fundamentou segundo Miorim (1998), ter encontrado nos números os elementos essenciais para a justificativa da existência de uma ordem universal, imutável tanto na sociedade quanto na natureza.

Estas concepções atacadas por Permanedes e Zenão, discretizava o universo e, quando Atenas assumiu a hegemonia na Grécia, estabeleceu seu império de manutenção dos paradoxos, o que estagnou as ideias de transformação, a qual tornou a Matemática grega fundamentalmente geométrica.

No final do século IV, os estados gregos enfraquecidos foram conquistados por Filipe II da Macedônia. Seu filho Alexandre fundou a cidade Alexandria.

Eves (2011) relata que em 323 a.C. após a morte de Alexandre, o império se dividiu entre alguns líderes militares e um deles, Ptolemeu I Soutier (367–283 a.C.), instituiu em seu governo a primeira universidade de Alexandria, com sua famosa biblioteca, que atraiu inúmeros sábios, tornando-se por quase dois séculos o maior centro intelectual do mundo antigo.

Alexandria viria a ocupar o lugar de Atenas como principal polo de conhecimento e cultura do mundo grego (Mol, 2013).

Mol (2013) aponta Euclides como um dentre os estudiosos convidados para trabalhar no Museu de Alexandria. Por volta de 300 a.C. Euclides viveu e ensinou Matemática, período em que escreveu *os Elementos* e, dentre os assuntos expõe a trigonometria, de onde se tem referências por volta do século IV ou V a.C. com os gregos, que pela primeira vez encontram estudos sistemáticos de relações entre ângulos (ou arcos) numa circunferência e os comprimentos das cordas que os subentendem (Boyer, 1974).

O ensino e o conhecimento de atividades intelectuais neste período, eram para o acesso à cultura e, consequentemente, a garantia de uma vida de riquezas, aos que a ela eram ofertados. Desta forma Miorim (1998) destaca que cidadãos livres das cidades estados gregas e proprietários de terras, tinham a ciência helênica como uma ciência da elite e, é claro, para poucos.

Assim como os estudos eram para os poucos, o conhecimento era conservado nas bibliotecas e espaços que nem todos tinham acesso. Dentre os documentos importantes destas épocas, o Papiro de Rhind ou Papiro de Ahmes datado de 1650 a.C., citado por Boyer (1974), resistiu ao desgaste ao longo do tempo. Dos 85 problemas nele registrados, 4 deles trazem um conceito que se relaciona com trigonometria.

No problema 56 menciona o termo *seqt* de um ângulo, usado na construção das pirâmides, conceito da cotangente, em que *seqt* significava o afastamento horizontal de uma reta oblíqua em relação ao eixo vertical para cada variação de unidade na altura.

Mol (2013) e Boyer (1974) apontam ser Claudio Ptolemeu (90-168 d.C.) o autor da obra mais importante da trigonometria na antiguidade, a Síntese matemática, coleção composta por treze volumes, tendo sua obra conhecida como Almagesto, que significa "A maior", em árabe.

Em seu Almagesto, Ptolemeu deu a contribuição mais significativa para a trigonometria na antiguidade, a possibilidade de descrever fenômenos naturais (Mol, 2013). Boyer (1974) ainda afirma que entre as obras mais importantes de Ptolomeu, está a *Geografia* que introduzia o sistema de latitudes e longitudes tal como é usado hoje, descrevendo projeções cartográficas. Também cita as suas ideias de planificação da circunferência em que ele sabia da importância de preservar ângulos.

Na Índia os hindus também contribuíram para o desenvolvimento da trigonometria, por volta de 400 a.C. Eves (2011), afirma ter surgido ... o primeiro trabalho astronômico importante, o anônimo Surya Siddahanta ("o conhecimento do sol"), e ainda aponta que não se tem esclarecido o grau de influência da Matemática grega, babilônica e chinesa sobre a Matemática hindu, mas sim evidências de que estas tenham sido apreciadas.

Ainda Roque (2012) aponta que as evidências dos trabalhos em astronomia empregavam um sistema de posição decimal, inclusive tiveram neste tempo um período de intensa atividade matemática expressa na elaboração dos tratados astronômicos e, claro, elementos para uma trigonometria plana.

Os hindus usavam a relação entre a metade da corda e a metade do ângulo central, essa era a trigonometria empregada, a qual foi denominada por *Jiva*, que representa a metade da corda, a hoje conhecida função seno.

Por volta de 287 a.C. viveu Arquimedes, que segundo Boyer (1974), ficou conhecido como um dos maiores matemáticos de todos os tempos, em seus estudos é possível identificar fórmulas que equivalem às razões trigonométricas. Ele também ficou muito conhecido pelas engenhosidades que construía como, por exemplo, catapultas, alavancas e polias.

Em meados do ano 200 a.C. Eratóstenes de Cirene (276-194 a.C.) desenvolveu, utilizando a semelhança de triângulos e razões trigonométricas, a mais brilhante medida da antiguidade para a circunferência da Terra.

Aristarco de Samos (310-230 a.C.) propôs um tratado sobre os tamanhos e a distância do sol e da Lua, observando a ideia de ângulo e quadrante. Segundo Boyer (1974) Aristarco e Eratóstenes tratavam problemas que indicavam a necessidade de relações mais sistematizadas entre ângulos e cordas.

Hiparco de Nicéia (180 a.C.-125a.C.), astrônomo, que recebeu o título de Pai da Trigonometria por ter compilado a primeira tábua trigonométrica, além de evidências, segundo Boyer (1974) foi um dos responsáveis por grande contribuição aos cálculos e tabulação dos valores correspondentes do arco e da corda, para toda uma série de ângulos. Foi ainda, como cita Eves (2011), ele que deve ter introduzido na Grécia a divisão da circunferência em 360 graus.

No período da idade média, que se estendeu em meados do século V até o século XV, a Matemática não teve feitos importantes, a não ser, o calendário. Após os séculos X e XI, o comércio na europa refloresce e traz as consequências para o desenvolvimento das ciências em especial à Matemática e o contato com a cultura árabe.

Neste período, os trabalhos de traduções para o latim de inúmeras obras foram realizados, dentre as quais, *os Elementos* de Euclides. A primeira tradução latina completa dos Elementos não foi feita do grego mas sim do árabe (Eves, 2011).

Por volta do século XIII, Leonardo de Pisa (1170-1250) conhecido como Fibonacci, segundo Eves (2011), seria o matemático mais talentoso da Idade Média, escreveu algumas obras, entre elas, temos a *Practica Geometriae*, de 1220, que seria uma coleção sobre geometria e trigonometria, numa abordagem habilidosa. Fibonacci preparou o terreno para os progressos que a álgebra italiana teria no período renascentista, dois séculos mais tarde.

No século XV, destaca-se na Europa o redespertar para as ciências, período conhecido como renascimento. ... O ambiente criativo surgido no Renascimento, aliado ao desenvolvimento da técnica e acumulação do saber empírico lançou novos desafios e problemas a serem trabalhados pela ciência (Mol, 2013).

Segundo Eves (2011) e Mol (2013) a evolução das concepções astronômicas na direção de modelos matematizados, apoiados na verificação experimental, surgem como marco da revolução científica renascentista a partir dos trabalhos do astrônomo Nicolau Copérnico.

A primeira exposição européia sistemática de trigonometria plana e esférica, foi tratada na obra de Regiomantanus, como cita Eves (2011). Regiomantanus escreveu *De triangulis omnimodis*, tratando a trigonometria como uma ciência independente da astronomia.

Para Boyer (1974), esta obra marca o renascimento da trigonometria. Época em que funções trigonométricas (seno, cosseno, tangente, cotangente, secante e cossecante) se tornam padronizadas. Regiomantanus foi tido como o mais capaz e influente matemático deste século.

Mol (2013) enfatiza que por volta do início do século XVI aconteceram desenvolvimentos importantes na área da trigonometria. Nesse período, o polonês Nicolau Copérnico (1473-1543) revolucionou a visão de mundo ao conseguir colocar a Terra movendo-se ao redor do Sol.

No entanto, foi Georg Joachim Rheticus (ou Rhaeticus, 1514-1576), um aluno de Copérnico, que juntou as ideias de seu professor, as de Regiomontanus e as suas, e publicou o tratado *Opus palatinum de triangulis*, tido como o mais elaborado tratado de trigonometria escrito até hoje, segundo Boyer (1974). Foi neste tratado que a trigonometria atingiu a sua maioridade.

Viéte (1540-1603), foi quem adicionou um tratamento analítico à trigonometria, em 1580. A qualidade de sua obra em trigonometria indica uma equação algébrica de 45°.

O principal progresso de Viéte em trigonometria foi a aplicação sistemática da álgebra, sendo o primeiro matemático a usar letras para representar coeficientes gerais, também construiu tábuas trigonométricas e calculou o $\text{sen } 1$ com treze casas decimais.

> Com Viéte foi praticamente terminada a trigonometria elementar (não analítica), exceto quanto ao cálculo. A trigonometria de Viéte, como sua álgebra, era caracterizada por uma ênfase maior sobre generalidade e largueza de visão. Ao aplicar a trigonometria a problemas algébricos e aritméticos Viéte ampliava o alcance do assunto. Além disso, suas fórmulas para ângulos múltiplos deveriam ter revelado a periodicidade das funções (Boyer, 1974).

Havia considerável entusiasmo pela trigonometria no final do século XVI e início do século XVII. Foi neste período que o nome trigonometria veio a ser dado ao assunto, como título da exposição de Bartholomeus Pitiscus (1561-1613), publicada pela primeira vez em 1595 (Boyer, 1974).

Foi no Século XVII que a representação gráfica e noção de funcionalidade entre as variáveis, influenciou as compreensões na relação de funcões. Goldfarb (1989) aponta que é neste século em que o universo começa a ser encarado como o da evolução das ideias científicas.

Desencadeou-se um processo de ida sem volta, em que houve a separação entre teologia e conhecimento natural, com a experimentação e a elevação de uma emergente burguesia, ao norte da Itália, na França e na Inglaterra.

Trabalho e engenhosidade: põe mãos à obra no intuito de tecer mais e mais rápido; de plantar e colher mais e mais rápido; construir naves mais e mais ligeiras de maneira a impor-se nas rotas marítimas e nos novos mercados que lhes haviam sido negados (Goldfarb, 1989).

Conceitos como o de quantificação e precisão antes não importantes no pensamento subjetivo antigo, passam a ter sua grande validade a partir do crescimento do mundo das indústrias e o comércio. O suíço Leonhard Euler (1707-1783), foi um dos grandes nomes na história da trigonometria, segundo Eves (2011).

Euler foi um escritor prolífico, sem dúvida quanto a isso na história da Matemática; não há ramo da Matemática em que seu nome não figure. Por suas publicações e estudos nas variadas áreas da Matemática, foi um dos responsáveis pela forma atual da trigonometria.

Mol (2013) enfatiza que Euler definiu à luz da Matemática moderna a caraterização das funções em um universo limitado e, ainda, para ele a função era uma expressão obtida a partir das operações conhecidas em seu tempo, entre elas a trigonométrica.

No entanto, Boyer (1974) comenta que somente no século XVIII, com a invenção do cálculo infinitesinal, a trigonometria desvinculou-se da astronomia, passando a ser um ramo independente e em desenvolvimento na Matemática.

Com a criação do cálculo infinitesimal e do seu prolongamento, a análise matemática, surge a necessidade de atribuir o status de função real a uma variável real, completando as funções trigonométricas (Lima, 2013).

A importância dessas funções se ampliou em 1822, quando Joseph Fourier (1768-1830) mostrou que toda função pode ser obtida pela soma de uma série em termos de seno ou cosseno, do tipo $a \cos nx + b \operatorname{sen} nx$ denominadas série de Fourier (Lima, 2013).

1.3 O ensino de trigonometria nas dissertações do PROFMAT

Neste momento será abordado o que dizem as dissertações do PROFMAT sobre o ensino de trigonometria e os desafios frente a este tema dentro da Matemática. As dissertações estão disponíveis on-line no site do programa PROFMAT, banco de dissertações, desde 2013, ano das primeiras publicações. Das 4126 dissertações publicadas até a data de 25 de novembro de 2018, foram encontradas 134 ao utilizar como filtro as palavras trigonometria e trigonométrica.

Com a análise, levantamento e leitura destas dissertações foi possível classificá-las em abordagem conceitual e abordagem por aplicação, com o propósito de observar processos de intervenção, contribuição, as limitações e perspectivas no ensino. Esta literatura serviu de suporte para subsidiar as discussões acerca do tema trigonometria.

1.3.1 Panorama do ensino de trigonometria nas dissertações do PROFMAT

As primeiras dissertações do programa de mestrado profissional PROFMAT, a nível nacional, foram publicadas no ano de 2013. Ao realizar o levantamento das dissertações que tratam sobre o ensino de trigonometria até o ano de 2018, foi interessante investigar seus conteúdos e deixar registrado por meio de uma análise, alguns apontamentos que norteiam as características.

Sobre o tema que enfatiza o ensino de trigonometria, foi realizado de forma breve, um mapeamento que pudesse fornecer uma investigação didática em aspectos que evidenciam os desafios de aprendizagem dos alunos e o trabalho desenvolvido pelos professores.

Este levantamento serviu de base para a discussão e análise, em relação às produções e contribuições qualitativas no meio acadêmico, que historicamente foi sendo construído acerca dos materiais apresentados.

Dentre as 95 universidades brasileiras associadas até 2018, em 53 delas houve dissertações sobre ensino e aprendizagem em trigonometria e funções trigonométricas, totalizando 134 dissertações referentes ao tema.

As dissertações coletadas do ano de 2013 a 2018, que tratam sobre o tema trigonometria, tiveram como base exploratória: os principais focos abordados, a ênfase na dissertação, os aportes teóricos, abordagens metodológicas e principais resultados na contribuição para o ensino. Em todas as modalidades de ensino, sendo elas, a educação básica do ensino fundamental, ensino médio e ensino superior.

Neste levantamento, foi realizada a leitura do resumo de cada uma das 134 dissertações, com a finalidade de verificar observações relevantes e objeto principal da dissertação. Em algumas das dissertações fez-se a leitura da introdução para melhor compreender o objetivo, e o campo teórico abordado.

Em algumas, foi necessário fazer uma varredura em toda a dissertação, para identificar com mais coerência o objeto do estudo, a abordagem metodológica, os resultados e propostas alcançados na mesma, uma vez que nestas os resumos traziam pouca ou nenhuma informação neste sentido.

1.3.2 Um balanço das publicações no banco de dissertações

Levando em consideração as dissertações de mestrado, as que trabalharam com o tema de trigonometria e funções trigonométricas correspondem a 3,25% do total de publicações. Um número até interessante, se considerar o fato de que há uma grande diversidade em quantidade de conteúdos a serem trabalhados do ensino fundamental, ensino médio e ensino superior.

Trigonometria é um dos temas em matemática que merecem muita atenção, pelo fato deste ser um importante conceito para a contextualização de problemas em Física, Geografia e disciplinas técnicas. Além, é claro, de se perceber que há historicamente um grande desafio em ensinar trigonometria de maneira significativa.

Das 134 dissertações acessíveis on-line no banco de dissertações, fez-se a classificação em dois sub-temas sendo: abordagem conceitual e abordagem por aplicação, segundo as literaturas. Desta forma, classificou-se de acordo com o objeto da dissertação, que 64 remetem à uma abordagem conceitual e as outras 70 a uma abordagem por aplicações.

As abordagens conceituais muitas, ou quase todas, apresentam em sua metodologia o uso de diversas ferramentas para motivar os alunos, tais como: métodos dinâmicos com programas computacionais, régua e compasso para a construção da circunferência, régua T, questionários e coletânia de situações problemas assimilando a proposta com teorias de aprendizagem, jogos e abordagem geométrica, entre outras. As dissertações conceituais abordam aprendizagem, ensino, currículo, avaliação, concepção e formação de professores.

A abordagem por aplicação utiliza-se da Matemática, especificamente a trigonometria, como a chave para a solução de problemas de situações reais, encontradas na medição de alturas, topografia, ondulatória, aplicação no esporte, aplicação à Física em geral, na construção de rampas de acesso, fenômenos cíclicos- roda gigante, em série de Fourier, nas ciências, na música, problemas de otimização, e softwares como: Applets, Stop Motion, Graphmatica, Geogebra. As dissertações na abordagem por aplicação são em maior número.

O que nos leva a questionar e refletir, que os professores tem buscado cada vez mais, meios de inserir em suas aulas, situações problemas desafiadoras que justificam ensinar os conceitos matemáticos de trigonometria em situações concretas.

Das dissertações analisadas, duas delas, especificamente são direcionadas para alunos com deficência visual e, como recurso didático, utilizam o multiplano para trabalhar com ensino e aprendizagem para uma educação inclusiva, e 37 dissertações das 134, utilizaram o Geogebra como ferramenta pedagógica.

Oliveira (2014) enfatiza como característica do Geogebra a possibilidade de interação entre o usuário e os objetos que estão na sua área de trabalho, permite assim a reflexão dos conceitos explorados. Possivelmente as dissertações retratam a busca e mudança necessária da prática, com novas ferramentas e tecnologias para o ensino, segundo Burak (2010)

> É com o entendimento de uma inevitável mudança e que, as necessidades atuais são diferentes das necessidades do século XX, também por uma longa trajetória na Educação, embora reconheça não ser esse o principal motivo para a mudança que consideramos inevitável. Consideramos inevitável sim, a própria mudança no mundo, os novos desafios, o surgimento das novas tecnologias de comunicação e da informação e, sobretudo pelos inevitáveis desafios colocados aos professores da Educação Básica na condução da formação dos nossos estudantes (Burak, 2010).

Em relatos de estudos sobre o uso da dinâmica com softwares educacionais, parece haver uma compreensão de que os alunos se sentem mais motivados e buscam meios de participar da aula, nestas aulas os alunos fixam melhor o conteúdo (Zulatto, 2002).

Em especial, o professor percebe que softwares de geometria dinâmica aliados ao processo de ensino e aprendizagem, afirma ser muito importante na inserção de diversos fatores quando se prepara a aula, levando em conta conhecimentos prévios e o perfil da turma, são nestas aulas que o aluno realiza construções e explora propriedades, como afirma Zulatto (2002).

Fato este, que se afirma ao analisar que a maior parte das dissertações, utiliza práticas de sala de aula e análise destas, para a defesa de suas concepções. As dissertações que sugeriram, por exemplo, o uso do software Geogebra, entre várias delas Iochucki (2016) justifica que tomaram este como recurso para a aprendizagem, uma vez que permite-se mostrar ao aluno o movimento e a observação dos fenômenos trigonométricos, que muitas vezes é difícil de imaginar, sem que seja visualizado realmente.

Há uma clara indicação de que visualizar fatos matemáticos podem induzir os estudantes a desenvolver sua capacidade de abstração, levando-os a inserir-se em um movimento de modelar matematicamente situações problemas (Gonçalves, 2016).

Em sua pesquisa, Gonçalves (2016) apresentou o Geogebra como uma possibilidade de produzir significados matemáticos, das mais diferentes maneiras, sendo relevante para o ensino da Matemática, sugerindo assim por meio de suas análises e entrevistas com professores de matemática usuários experientes do software, o reconhecimento dos diferentes aspectos da matemática do geogebra e da história do Geogebra, como possíveis maneiras de lidar com as possibilidades e limites deste.

Ainda em sua pesquisa, caracteriza os diferentes modos de linguagem dos entrevistados, como produções de significados matemáticos: Matemática do Matemático

(MM), a Matemática da Escola (ME) e a Matemática do GeoGebra (MG).

As dissertações analisadas apontam como desafios para uma aprendizagem significativa, as abordagens metodológicas como ferramentas na perspectiva de ampliar o conhecimento dos alunos (Oliveira, 2014).

As características e contribuições que as dissertações destacam é um trabalho voltado às estratégias de ensino, bem como o levantamento histórico da trigonometria e em que a mesma é utilizada.

Os estudos analisados desenvolveram pesquisas/entrevistas, atividades de intervenção e sequência didática para o processo de produção de conhecimento, atividades práticas e avaliativas.

Na maior parte delas, há um consenso de que o aluno precisa aprender de forma gradual e, acima de tudo, que há uma defasagem em conhecimentos básicos que os impedem de acompanhar os conteúdos nos níveis mais avançados, como por exemplo, alunos com certas lacunas de conteúdos e ideias equivocadas sobre triângulo retângulo e circunferência trigonométrica mencionado por Siqueira (2014).

Ainda, as dissertações apontam que o conteúdo, muitas vezes, parece ser trabalhado superficialmente para cumprir currículo, o que impede o professor de realizar um trabalho mais detalhado para melhor aprendizagem.

Diante das leituras, um dos apontamentos escolhido dentre os múltiplos focos apontados nas dissertações é o que trata sobre os desafios no ensino de trigonometria.

Alguns dos autores abordaram a trigonometria diante do cenário da aprendizagem e ensino da Matemática, o que levou a reflexão de que a mudança e a forma de desvincular-se do ensino tradicional está presente nas dissertações, servindo como aporte teórico para inúmeras análises e investigações.

A partir de então, fez-se uma investigação mais minuciosa nas dissertações dos autores citados e catalogou-se o ano da publicação, autor, problema e objetivos, metodologia, conteúdos e abordagem bibliográfica utilizados como referencial para este estudo, bem como os resultados alcançados.

1.3.3 Desafios no ensino de trigonometria: o que dizem as dissertações

Após a leitura e análise detalhada das dissertações, destacaram-se cinco autores que dos últimos cinco anos pesquisaram sobre o ensino da trigonometria. Dentre os autores Feijó (2018), Alves (2017), Iochucki (2016), Oliveira (2014), Siqueira (2014), descreveram perspectivas referentes às dificuldades em trabalhar com a trigonometria em sala de aula.

Também discutem em seus trabalhos, propostas didáticas de ensino, além de duas destas pesquisas citar o quanto é difícil mensurar porque o ensino da trigonometria tem se tornado um dos assuntos mais temidos no ensino fundamental e médio.

Alves (2017) realizou um trabalho bibliográfico, afim de propor que a metodologia de ensino modelagem matemática aliada a atividades práticas contribui com o meio acadêmico. O autor explicita os conceitos da modelagem matemática como metodologia, e seus benefícios quando trabalhada em sala de aula.

Apresenta a fundamentação teórica e um breve contexto histórico acerca da trigonometria e conceitua as propriedades a serem trabalhadas no triângulo retângulo e na circunferência.

Desenvolve uma proposta de atividade com os alunos, utilizando a modelagem matemática e a investigação com atividades práticas, ressaltando o dinamismo do trabalho com resultados concretos.

Feijó (2018) efetivou um trabalho exploratório com alunos do ensino médio definidas por quatro habilidades e duas competências, da qual elabora uma matriz referência para a análise dos dados.

O autor destaca em seu trabalho as dificuldades específicas em relação aos conceitos trigonométricos como radiano, características e comportamento das funções trigonométricas e conexão entre a circunferência e as funções trigonométricas pela relação de Euler.

Ressalta que as dificuldades vão desde definições e conceitos até manipulações, inferências e generalizações. Quanto à visualização e interpretação inadequada de imagens, o autor atribui ao defasado estudo da geometria, que muitas vezes é deixado de lado, o que impossibilita o avanço dos níveis de aprendizagem.

Com o objetivo de investigar e analisar como os alunos veem a trigonometria e quais os obstáculos enfrentados na aprendizagem do assunto, produziu uma pesquisa mista: quantitativa com um questionário de múltipla escolha e qualitativa com a investigação direcionada individual sobre as respostas, com uma abordagem sobre o desempenho dos alunos pesquisados e aponta ter comprovado pelos resultados, a desconexão dos conceitos aprendidos pelos alunos, com qualquer outra área.

Iochucki (2016) pontua sobre a situação do ensino de trigonometria, que vem enfrentando barreiras com o passar dos anos e descreve de forma gradual em três etapas que o aluno deve aprender no estudo de trigonometria, a saber: na primeira etapa a trigonometria no triângulo retângulo, na segunda a trigonometria na circunferência trigonométrica e na terceira as funcões trigonométricas.

O objetivo de seu trabalho é apresentar algumas propostas de ensino com base em tecnologias e diferentes áreas do conhecimento e ilustrar as dificuldades, quanto à aprendizagem do conteúdo de trigonometria. Cita então os desafios, os processos e metodologias do ensino da matemática e faz uma crítica quanto ao papel do professor, que deve ser capaz de produzir atividades que se liguem a outras disciplinas.

Relata em sua dissertação autores que abordam sobre o fracasso do ensino da trigonometria devido a uma série de fatores, tais como: a formação inicial e continuada do professor, a forma em que ele aborda o conteúdo e o acúmulo de conteúdos mal entendidos pelo aluno.

Aborda a parte histórica da trigonometria até situações atuais e a aplicação em diversas situações. Propõe para o ensino básico, uma sequência didática com atividade utilizando o software Geogebra e, para o ensino superior, propõe uma abordagem com funções contínuas utilizando o software Maxima.

Em sua dissertação, Oliveira (2014) apresenta um estudo sobre o ensino da trigonometria segundo as recomendações dos parâmetros curriculares nacionais para o ensino médio, aborda a aprendizagem significativa e faz a análise de alguns livros didáticos do guia do PNLD 2012.

O autor apresenta um estudo bibliográfico com foco nos destaques e nomes que se consagraram na história da trigonometria e seus feitos. Faz a apresentação de sites como o banco internacional de objetos educacionais, o portal do professor, educar Brasil, conteúdos digitais – softwares educacionais desenvolvido pela Universidade Federal Fluminense e Geogebra, na intenção de contribuir com a divulgação de ferramentas que auxilie o professor na elaboração de suas aulas.

Destaca a teoria da aprendizagem significativa, propondo então uma sequência didática de ensino conforme esta teoria, com atividades elaboradas para a conceituação das propriedades de trigonometria, com uso do software Geogebra.

Siqueira (2014) analisa o contexto histórico e identifica a trigonometria como uma parte da Matemática que objetiva operar cálculos com triângulos. Usa esta como uma extensão da geometria e enfatiza que em tempos históricos a trigonometria era usada para solucionar problemas práticos relacionados a astronomia, como exemplo, a navegação.

Faz uma investigação dos conceitos que devem ser ensinados no ensino fundamental e utiliza a resolução de problemas, a fim de desenvolver competências e habilidades na apreensão dos conceitos trabalhados como estratégia para diminuir os problemas de aprendizagem. Na pesquisa–entrevista realizada com professores que atuam em sala de aula da rede pública e particular, pontuou dificuldades emergentes e causas para o problema de aprendizagem dos alunos. Entre elas, a conceituação dos objetos matemáticos e sua abstração, bem como a assimilação dos conceitos de trigonometria.

Os professores pesquisados ainda apontaram desafios até mesmo nas operações básicas e interpretação, ao se trabalhar com o triângulo retângulo e ressaltaram ser este o mais importante dos temas a serem trabalhados no currículo escolar. Na dissertação o autor propôs a aplicação de uma sequência de aulas que facilite o ensino e aprendizagem dos alunos.

Notavelmente são encontrados diversos trabalhos nesta linha de pesquisa e como de fato é um assunto que instiga a busca por respostas para diversos questionamentos, isso indica que o caminho certo para auxiliar o ensino deste tema, é permanecer em constante pesquisa para aprimorar a prática pedagógica.

É preciso evoluir em novas pesquisas, dados e registros que possam de fato promover soluções para sanar os desafios de ensino deste conteúdo. Ainda, apesar de pesquisas já apontarem que o ensino deve ser dinâmico, a partir de metodologias que inovem o espaço da sala de aula, este assunto ainda é apresentado aos alunos como um banco de fórmulas que apenas são aplicadas sem sentido algum, levando, muitas vezes, ao fracasso da aprendizagem até mesmo com uma aula bem planejada.

Não se deve ater a assuntos desconexos, sem relacionar com situações reais, o que desmotiva a busca pelas respostas, ou a tentativa de solução. Os alunos nos dias de hoje dispõem de muitas tecnologias e recursos que se tornaram mais interessantes do que uma aula em sala com meros exercícios e repetições de cálculos.

Iochucki (2016) afirma que uma das hipóteses para a não aprendizagem é a de que o conteúdo não é ensinado de forma contextualizada. Como os alunos não compreendem a relação entre teoria e prática, podem sentir-se desmotivados.

Isso mostra que assuntos detalhados com situações reais, podem ser abordados e terão um melhor efeito, gerando uma curiosidade para a verificação dos fatos. Aquilo que é instigado se torna, de fato, prazeroso e o interesse gera as possibilidades e a investigação de algo que pode até não ser novo, mas tem uma aplicação concreta sobre uma realidade.

Os alunos hoje são pesquisadores e, desta forma, é possível conceber que se o aluno produz e cria estratégias de solução, ele está caminhando para uma aprendizagem significativa. Segundo Ausubel (2003) a aprendizagem significativa ocorre quando uma nova informação relaciona-se, de maneira substantiva (não-literal) e não-arbitrária às ideias, conceitos e proposições relevantes, já estabelecidos e disponíveis na estrutura cognitiva de quem aprende (*apud* Oliveira, 2014, p.05).

O estudo da Matemática não precisa ser trabalhado apenas de forma mecânica, com uso apenas de exercícios de repetição. Pode ser trabalhada com a utilização de situações-problema, propondo que o aluno busque a solução utilizando a interpretação e a aplicação do conteúdo (Iochucki, 2016).

Oliveira (2014), aponta que o professor que prepara a sua aula, conhece seu público alvo. Deve adensar de um potencial significativo para o aprendiz, com elementos que façam relação com o que o aluno conhece, para que a aprendizagem seja de fato prazerosa e significativa.

É muito importante que o professor efetive um trabalho voltado às especificidades da turma e a cada aula inicie os conteúdos com aspectos que evidenciem relações e temáticas comuns à convivência dos alunos e, a partir disto, avançar para assuntos mais complexos.

Desta maneira, ampliar habilidades, conhecimento, atitudes e tomadas de decisões torna-se natural. Oliveira (2014) afirma que o ensino e aprendizagem se processam pela continuidade e conexões entre os conteúdos, de tal modo que estes se complementam e se integram, para uma aprendizagem significativa.

A dificuldade que os estudantes tem em conceitualizar os objetos matemáticos que se apresentam de forma muito abstrata e a assimilação de assuntos que são pré-requisitos para o estudo da trigonometria, conforme aponta Siqueira (2014), é um dos obstáculos enfrentados em sala de aula. E ainda, o autor discute que outras dificuldades relatadas pelos professores, é que muitos alunos não conhecem as operações básicas, como também não estão familiarizados com a resolução de problemas, o que torna difícil a assimilação do assunto, além de confundirem esses conteúdos com os elementos do triângulo retângulo: catetos e hipotenusa.

Feijó (2018) e Iochucki (2016), complementam a ideia de Siqueira (2014), quando apontam os problemas no aprendizado estar na base do conteúdo, desde os fundamentos de trigonometria, sua compreensão geométrica e definições.

Diante deste fato, pensa-se em buscar uma alternativa de ensino e uma metologia que seja capaz de propor ferramentas ao professor para atuar nos desafios e como estudado por Siqueira (2014), cerca de 90% dos pesquisados responderam que utilizam a sequência dos livros didáticos, assim como fazem uso de softwares de geometria dinâmica, como o Geogebra. Alguns ainda relataram que esporadicamente, dialogam com os colegas na troca de informações e didática empregada para ampliar os recursos metodológicos.

Um esforço em buscar estratégias e meios de promover a aprendizagem tem crescido muito, conforme observa-se entre as inúmeras dissertações desenvolvidas por professores, pesquisadores e educadores matemáticos. A utilização de metodologias diversas, na busca pelo desenvolvimento de espaços criativos que produzam conhecimento e sentido ao estudo, para os alunos, tem produzido cada vez mais material que fundamenta a ação pedagógica.

No ensino da trigonometria, conteúdo considerado pelos alunos como um dos mais difíceis da Matemática, milhares de professores de Matemática possuem a ambição de aprimorar seu trabalho de ensino no que diz respeito à metodologia utilizada (Gonçalves, 2014).

Em sua dissertação, Gonçalves (2014) apresenta uma discussão sobre as dificuldades encontradas pelos alunos na aprendizagem de alguns conteúdos de Matemática, em especial quando se trata de trigonometria e explora por meio de materiais concretos possibilidades de ensino para sanar tais desafios.

Com isso, percebe-se que há uma necessidade em analisar concepções para fundamentar a prática e, sobretudo, saber equilibrar os desafios e objetivar as perspectivas almejadas, construir relações que de fato sejam eficientes e legitimem o currículo. Ao professor cabe pesquisar e explorar as condições de seus alunos, para que consiga diferenciar as possibilidades de trabalho e o contexto ao qual está inserido.

De encontro a este anseio, a modelagem matemática como uma metodologia de ensino que aborda situações reais e as traduzem para a linguagem matemática, pode proporcionar aos professores uma tendência inovadora que inclui aplicações significativas matematicamente.

Segundo Bassanezi (2012), não visa simplesmente a ampliação do conhecimento matemático, mas sobretudo o desenvolvimento da forma de agir e pensar, produzir saber aliado à abstração e formalização, interligadas a fenômenos e processos empíricos.

Sob o enfoque da modelagem matemática, Alves (2017) afirma que o professor se torna mediador entre o conhecimento e os alunos, estes por meio de atividades investigativas e interdisciplinares, "comandam" o ensino e aprendizagem e, ao final do processo, são desenvolvidas criatividade, autonomia e conhecimento.

Diante disso, buscou-se como objeto de pesquisa o ensino de trigonometria e modelagem matemática, nas 134 dissertações analisadas. Verificou-se então que, além das cinco pesquisas com foco no ensino de trigonometria, surgiram quatro dissertações, dos autores, Alves (2017); Santos e Effgen (2017); Duarte Filho (2017), que trataram as concepções da modelagem matemática e propostas didáticas, sob a perspectiva de ensino com uma abordagem por aplicação.

Das dissertações selecionadas analisou-se as características e informações da abordagem proposta com a modelagem matemática para o ensino, conforme a tabela 1.1.

Tabela 1.1: Caracterização das dissertações, concepção de ensino modelagem matemática.

Autor, Ano e Estado	**Foco do trabalho**	**Proposta didática**	**Tema proposto**	**Nível de ensino e contexto**
Alves (2017), MA.	Contribuir com um olhar crítico acerca do ensino tradicional. Fundamenta conceitos teóricos de trigonometria, e apresenta a modelagem matemática como metodologia de ensino para sugerir as atividades práticas.	Síntese de atividades práticas, sendo uma a coleta de dados reais sobre horário de verão, interdisciplinar com geografia. Outra a construção do teodolito artesanal pelos alunos para a medida de alturas a qual se define a tangente com a modelagem matemática.	Duas propostas: Teodolito para medir alturas, e trigonometria no horário de verão (estudo da função máximo e mínimo, análise gráfica).	Ensino médio, Interdisciplinar. (Proposta não aplicada).
Duarte Filho (2017), RJ.	Foco interdisciplinar, possibilitando aos discentes uma interação entre a teoria e a prática. Auxiliar professores com aulas diferenciadas e dinâmicas.	Propõe uma sequência de atividades onde a aplicação matemática ocorre. Em engenharia modelando funções trigonométricas em construções, urbanismo e geografia com análise de mapas e paisagismo e na física com estudo de ondas sonoras em tubos, notas musicais emitidas pela flauta doce.	Uso do Geogebra, plataforma do Google Maps e Imagens para estudo de funções trigonométricas.	3° Ano Ensino médio: Interdisciplinar, arte, geografia, física (Proposta não aplicada).
Santos e Effgen (2017), PR.	Apresentar as principais características de alguns fenômenos cíclicos e mostrar como as funções trigonométricas são adequadas para modelá-los, enfatizando assim a aplicabilidade destas funções.	Propõe a aplicação de 7 atividades de construção no software Geogebra a partir da caixa de entrada. Utiliza dados da roda gigante *Singapore Flyer* e de fenômenos das marés do Porto de Cabedelo - Estado da Paraíba, informações obtidas da companhia através do site para modelar e estudar as funções trigonométricas.	Fenômenos das Marés e funcionamento da roda gigante.	Ensino Médio: Interdisciplinar (Proposta não aplicada).

Os autores definem situações práticas e reais, possibilitando então a abordagem do conteúdo de trigonometria através da modelagem matemática, com objetivo de contribuir com a discussão e promover um olhar crítico para a situação problema.

Fazem o uso das concepções da modelagem matemática aliadas a ferramentas tecnológicas e investigação de possibilidades diversas, como a interdisciplinaridade, para o ensino.

A abordagem sobre o ensino de trigonometria e funções trigonométricas nas dissertações do mestrado profissional em matemática em rede nacional - PROFMAT, e os materiais produzidos para suporte e apoio didático aos professores, podem estar vinculados à busca por novas metodologias que, segundo os autores, ampliam possibilidades e enriquecem o processo de ensino, trazendo situações práticas e reais como auxílio na compreensão visual de comportamentos gráficos de funções trigonométricas, entre tantos outros conceitos.

1.4 A trigonometria do ângulo agudo

Os gregos, há mais de 2000 anos conseguiram determinar por um processo considerado incrivelmente simples, a medida do raio da terra, uma distância inacessível. Hoje, ainda nos deparamos com situações que requerem medida de distâncias inacessíveis. Como um engenheiro realizar a construção de uma ponte sobre um rio, um topógrafo situado na praia determinar a distância entre duas ilhas, são todos exemplos de situações em que são necessárias algumas informações relevantes, para que se possa, de fato, resolver estes problemas. Para tanto, desde antigamente utilizou-se a ideia da semelhança de triângulos imaginários, dos quais a própria palavra trigonometria nos remete a esta ideia. **Trigono** significa triangular e **metria** significa medida (Trotta et al., 1980).

O próprio Tales se utilizou desta ideia para determinar a altura de uma pirâmide egípcia, em que valendo-se da semelhança dos triângulos, determinou a altura da pirâmide, conforme a figura 1.1 (Trotta et al., 1980, p.181). Ele cravou uma estaca em horário oportuno do sol e, utilizando a sombra da pirâmide e a sombra da estaca, calculou a altura desejada.

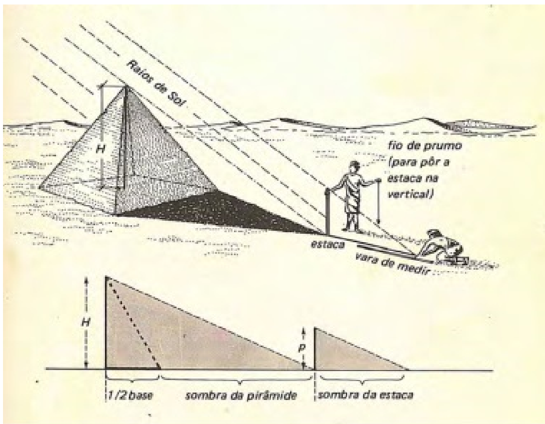


Figura 1.1: Semelhança de triângulos: medição da altura da pirâmide egípcia.
Fonte: Trotta et al. (1980).

Neste contexto, Trotta et al. (1980) aponta que o encontro de duas civilizações antigas, a grega e a egípcia, com todas as suas potencialidades na Matemática, bem como as suas diferenças cultural, social e econômica, caracterizam suas respectivas conquistas e condições sociais. Vale ressaltar que as ideias evoluíram com o passar do tempo e com ela a sistematização da Matemática, a precisão das medidas e dos resultados, assim como a construção de instrumentos de medição.

Levando em consideração que semelhança de triângulos, relações métricas no triângulo retângulo e relações na geometria plana tenham sido trabalhadas, são abordas nas seções seguintes definições e conceitos da trigonometria, que conforme a Base Nacional Curricular Comum são citados como critérios de ensino para alunos em conclusão da educação básica.

1.4.1 Seno, cosseno e tangente: definições e relações

Definição 1.1 (Semelhança de triângulos). *Dado um ângulo α, e por pontos pertencentes a um de seus lados traçemos perpendiculares ao outro lado, conforme a figura 1.2:*

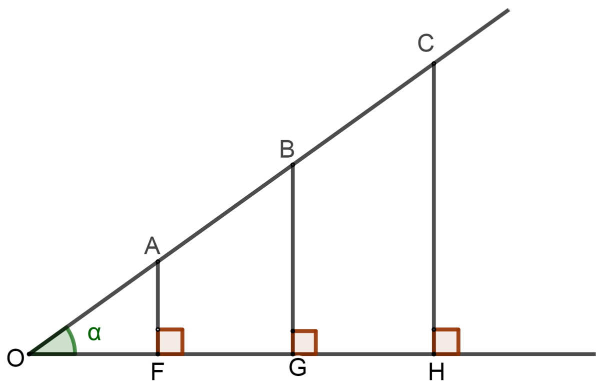


Figura 1.2: Ideias de Tales na visualização da semelhança de triângulos.

Em vista da semelhança de triângulos, se pode dizer que a constante referente ao ângulo α recebe as seguintes denominações:

$$cos(\alpha) = \text{cosseno de } \alpha = \frac{OF}{OA} = \frac{OG}{OB} = \frac{OH}{OC} = \ldots = \frac{cateto\ adjacente}{hipotenusa}$$

$$sen(\alpha) = \text{seno de } \alpha = \frac{AF}{OA} = \frac{BG}{OB} = \frac{CH}{OC} = \ldots = \frac{cateto\ oposto}{hipotenusa}$$

$$tan(\alpha) = \text{tangente de } \alpha = \frac{AF}{OF} = \frac{BG}{OG} = \frac{CH}{OH} = \ldots = \frac{cateto\ oposto}{cateto\ adjacente}$$

As relações existentes estão muito ligadas à precisão de medidas, ao uso destas nas engenharias, arquitetura, topografia, o que de certa forma se relaciona com as necessidades do homem na solução de problemas. Para tanto, é possível usar qualquer triângulo retângulo, basta saber a medida de um dos seus ângulos agudos e usar a relação trigonométrica adequada.

É importante salientar ainda, que $\operatorname{sen}(\alpha)$, $\cos(\alpha)$ e $\tan(\alpha)$ dependem apenas do ângulo α, mas não do tamanho do triângulo retângulo o qual α é um dos seus ângulos agudos.

As razões trigonométricas seno, cosseno e tangente se relacionam de várias formas, por exemplo:

1. Relação Fundamental do triângulo retângulo (1.1):

$$\text{sen}^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1, \quad (0° < \alpha < 90°) \tag{1.1}$$

Demonstração: 1. *Considere um ângulo α de vértice C e um triângulo CAB, retângulo em A, como mostra a figura 1.3*

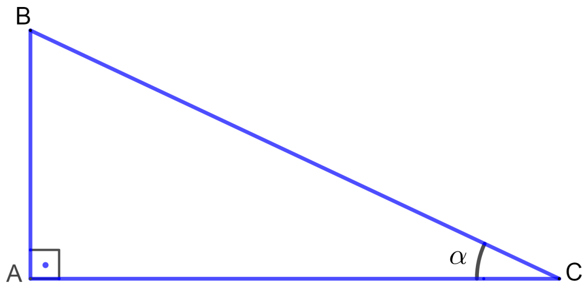


Figura 1.3: Triângulo retângulo.

Observando a figura 1.3 se tem, pelo teorema de Pitágoras, $b^2 + c^2 = a^2$:

$$sen^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = \left(\frac{c}{a}\right)^2 + \left(\frac{b}{a}\right)^2 = \frac{c^2 + b^2}{a^2} = \frac{a^2}{a^2} = 1$$

2. Relação trigonométrica no triângulo retângulo (1.2):

$$\tan\alpha = \frac{\text{sen}\alpha}{\cos\alpha}, \quad (0° < \alpha < 90°) \tag{1.2}$$

Demonstração: 2. *Considere um ângulo α de vértice O e um triângulo OAB, retângulo em B, como mostra a figura 1.4*

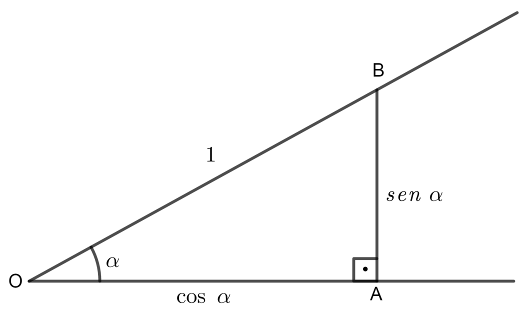


Figura 1.4: Relações trigonométricas no triângulo retângulo.

$$\frac{sen\ \alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}} = \frac{b}{c} = \tan\alpha$$

ou

$$\tan\alpha = \frac{b}{c} = \frac{\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}} = \frac{sen\ \alpha}{\cos\alpha}$$

(dividindo ambos os termos da razão por $a \neq 0$). Portanto,

$$\tan\alpha = \frac{sen\ \alpha}{\cos\alpha}, \quad (0^\circ < \alpha < 90^\circ) \tag{1.3}$$

3. Se dois ângulos, α e β, são complementares ($\alpha + \beta = 90^\circ$), então sen $\alpha = \cos\beta$, figura 1.5.

   Note que o seno de um ângulo é igual ao cosseno do ângulo complementar, e vice-versa.

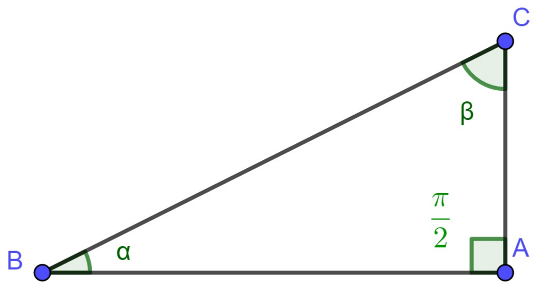


Figura 1.5: Seno e cosseno no triângulo retângulo.

Demonstração: 3. *Aplicando as definições de seno, cosseno e tangente no triângulo da figura 1.5, temos:*

$sen\ \alpha = \frac{b}{a} = \cos\beta$. *Portanto,* $sen\ \alpha = \cos\beta$

$\cos\alpha = \frac{c}{a} = sen\ \beta$. *Portanto,* $\cos\alpha = sen\ \beta$

Convém ressaltar que desta propriedade surgiu o nome cosseno, isto é, seno do complemento. Então, se pode escrever:

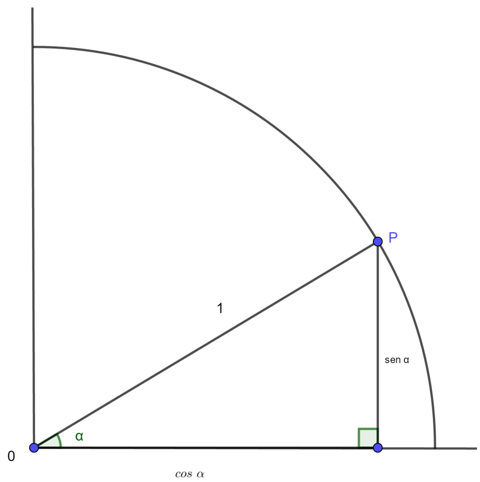
$$sen\ (90^\circ - \alpha) = \cos\alpha \tag{1.4}$$

$$\cos(90^\circ - \alpha) = sen\ \alpha \tag{1.5}$$

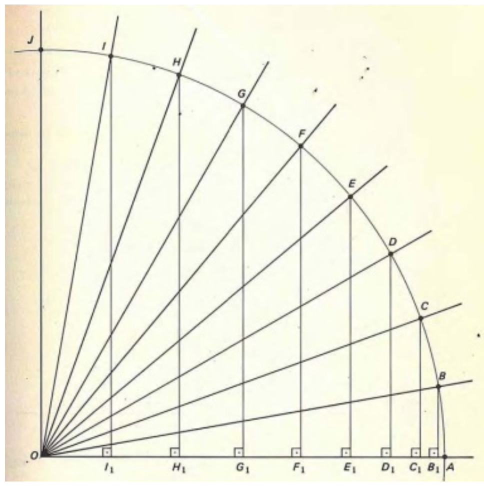
1.4.2 O quadrante trigonométrico

Ao imaginar um quadrante, o qual se pode denominar a quarta parte da circunferência trigonométrica, como na figura 1.6(a) em que um ponto P percorre um arco de uma circunferência de raio unitário, a dinâmica observada é que quando α varia P muda de posição, se pode observar claramente o que acontece com o valores de $\cos\alpha$ e $\operatorname{sen}\alpha$ conforme a figura 1.6(b).

Desta forma a cada novo ângulo, observaremos que um novo triângulo retângulo é formado como mostra a figura 1.6(b) (Trotta et al., 1980), o que permite calcular seno, cosseno e tangente de um ângulo agudo qualquer e estabelecer, assim, a tábua trigonométrica como a que foi calculada por Hiparco.



(a) Quadrante trigonométrico.

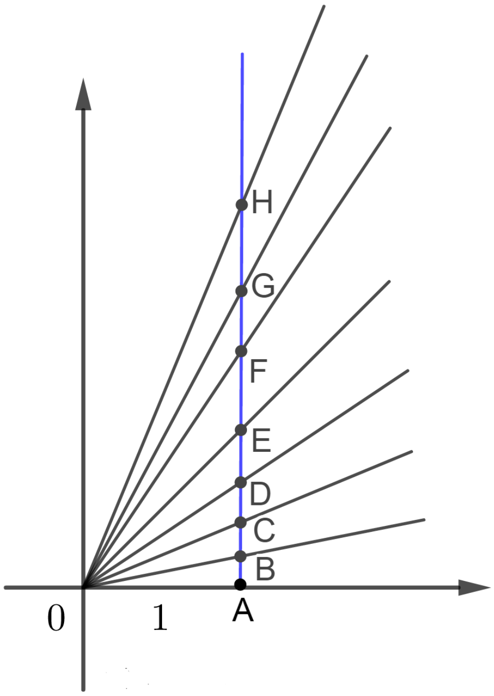


(b) Triângulos retângulos no quadrante trigonométrico.

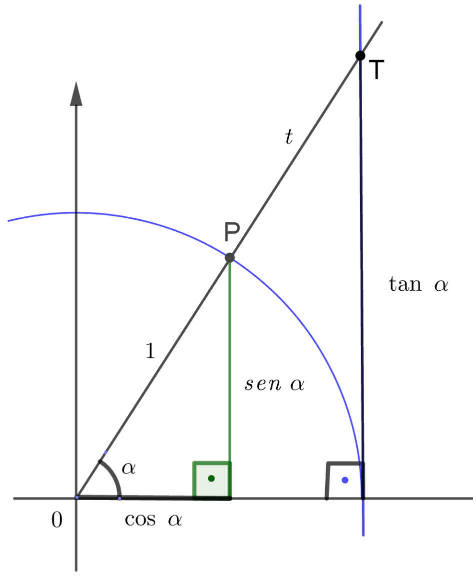
Figura 1.6: Visualização do seno, cosseno e tangente no quadrante trigonométrico. Fonte: Trotta et al. (1980).

A dinâmica para a tangente dada na figura 1.7(a) para um ângulo agudo, possibilita imaginar o ponto T percorrendo a reta t. Assim quando α varia, T muda de posição (Trotta et al., 1980).

Conforme a figura 1.7(b), é possível observar que, conforme a variação do ângulo α, o ponto P percorre o arco da circunferência, enquanto o ponto T percorre a reta t tangente à circunferência. Sendo possível, então, perceber a variação de $\operatorname{sen}\alpha$, $\cos\alpha$ e $\tan\alpha$ em uma mesma figura (Trotta et al., 1980). Na figura 1.7(b) é possível observar este comportamento.



(a) Dinâmica para a tangente.



(b) Seno, cosseno e tangente no quadrante trigonométrico.

Figura 1.7: Comportamento do seno, cosseno e tangente no quadrante trigonométrico. Fonte: Trotta et al. (1980).

1.5 Gráficos das funções trigonométricas

1.5.1 Gráfico de sen(α)

A adoção de um sistema de coordenadas será utilizado para construir o gráfico de senα em função de α, como abordado por Trotta et al. (1980), que utiliza a circunferência trigonométrica conforme a figura 1.8.

Quanto maior a subdivisão da circunferência, maior a precisão do traçado, dado que as partes subdivididas serão representadas no sistema de coordenadas, cujas imagens serão as ordenadas no intervalo real $[-1, 1]$, em que a unidade de medida é dada pelo raio da circunferência e o valor de $\pi = 3,14$.

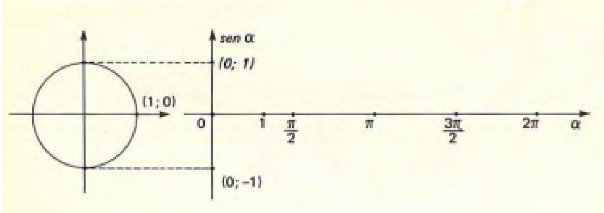


Figura 1.8: Subdivisão de um quadrante da circunferência trigonométrica.
Fonte: Trotta et al. (1980).

O segmento de reta de comprimento 2π será subdividido em dezesseis partes iguais, mesma divisão da circunferência de raio 1. Assim se tem 2π radianos $= (360°)$ divididos em 16 partes iguais, cada uma correspondendo a $\frac{\pi}{8}$. Então, obtém-se os valores de sen $\frac{\pi}{8}$, sen $\frac{\pi}{4}$, sen $\frac{3\pi}{8}$, sen $\frac{\pi}{2}$, sen $\frac{5\pi}{8}$, sen $\frac{3\pi}{4}$ ... transporta-os para a reta de comprimento 2π e, por estensão, obtém-se o gráfico da figura 1.9:

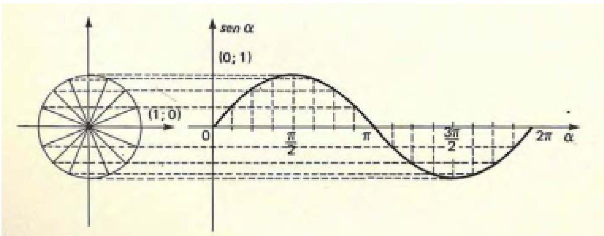


Figura 1.9: Gráfico do seno de α.
Fonte: Trotta et al. (1980).

1.5.2 Gráfico de $\cos\alpha$

Usando o mesmo método acima, para a construção do gráfico de senα, conforme a figura 1.10 subdivide-se a circunferência em 16 partes iguais, e de maneira análoga os valores para cosseno são representados no gráfico de $\cos\alpha$:

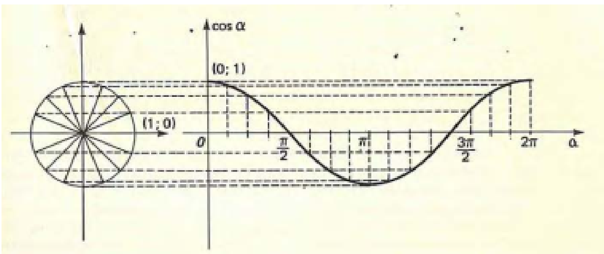


Figura 1.10: Gráfico do cosseno de α.
Fonte: Trotta et al. (1980).

1.5.3 Gráfico de $\tan\alpha$

A construção do gráfico de $\tan\alpha$, é obtida através das construções anteriores, utilizando do mesmo método, resulta na figura 1.11, em que as retas s e u são chamadas de assíntotas da curva. É importante observar que $\tan\alpha$ não existe para valores $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}$, $\frac{5\pi}{2}$, $\frac{7\pi}{2}$ ....

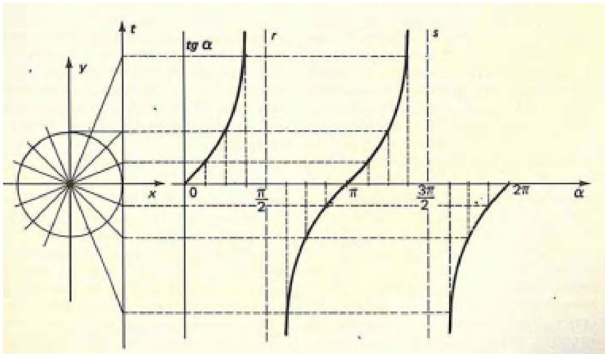


Figura 1.11: Gráfico da tangente de α.
Fonte: Trotta et al. (1980).

1.6 Generalizando a trigonometria

Se pode verifica que a cada ângulo α compreendido entre $0°$ e $360°$, ou seja, 0 e 2π radianos, é possível associar três números, os quais são chamados de seno de α, cosseno de α e tangente de α. Apresentadas as definições que utiliza as coordenadas, se estabelecem relações que são fundamentais para cálculos trigonométricos.

Estudos realizados em mecânica, que trabalha com movimentos periódicos (aqueles que se repetem de tempo em tempo), por exemplo, como o movimento de um pêndulo, de uma mola pulsando, a vibração de uma corda, como diz Trotta et al. (1980), mostrataram a necessidade de ampliar as noções já estabelecidas de seno, cosseno e tangente para ângulos maiores que $360°$ e para ângulos negativos.

Os movimentos periódicos, se relacionam em função ao tempo e comprimento de uma determinada alavanca, por exemplo, que pode ser interpretado no plano cartesiano OXY, do qual toma-se uma circunferência para estabelecer e analisar as razões. Ao verificar os resultados é possível perceber que os períodos se repetem a cada $360°$.

Somando ou subtraindo do ângulo estudado, $360°$, o valor se repete. Desta forma, é possível interpretar que independe do número de voltas que um ângulo qualquer α

contenha, uma vez que ele terá como extremidade um valor correspondente ao quadrante a qual o determina, o mesmo se reduz ao ângulo correspondente a ele sem perda de generalidade. Para a noção de ângulo com medida positiva e/ou negativa, utilizar-se-á a orientação da circunferência trigonométrica.

1.6.1 Cotangente, secante e cossecante

Outras três definições da trigonometria que são abordadas são:

Para todo α, tal que sen $\alpha \neq 0$, se define a cotangente de α, indicada por $\cot\alpha$:

$$\cot\alpha = \frac{\cos\ \alpha}{\text{sen}\ \alpha} \tag{1.6}$$

Para todo α, tal que $\cos\alpha \neq 0$, se define a secante de α, indicada por sec α:

$$\sec\ \alpha = \frac{1}{\cos\ \alpha} \tag{1.7}$$

Por fim, para todo α, tal que sen $\alpha \neq 0$, se define a cossecante de α, indicada por csc α:

$$csc\ \alpha = \frac{1}{\text{sen}\ \alpha} \tag{1.8}$$

1.6.2 A função de Euler

Com base em Lima (2013) sobre as funções trigonométricas e se apresenta a função de Euler para definir as funções trigonométricas.

A relação fundamental,

$$\cos^2(\alpha) + \text{sen}^2(\alpha) = 1$$

indica que, para todo ângulo α, os números $\cos\alpha$ e senα são coordenadas de um ponto da circunferência de raio 1 e centro na origem de $\mathbb{R}^2$, conforme a figura 1.12. Essa circunferência é denotada por

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = 1\}$$

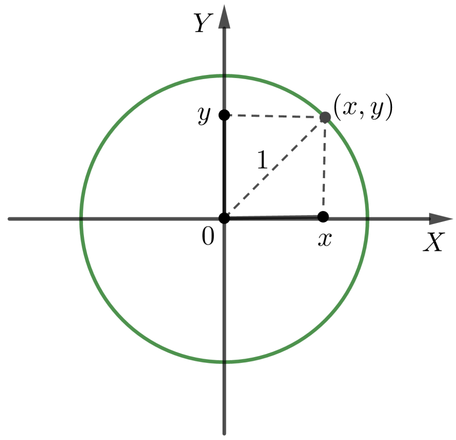


Figura 1.12: Circunferência unitária.

Assim, para todo ponto $(x, y) \in C$ se tem $-1 \leq x \leq 1$ e $-1 \leq y \leq 1$.

Para definir as funções $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $\operatorname{sen} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, associa-se a cada número real t, que será a medida de um ângulo e se considera o cosseno e o seno daquele ângulo. Há duas maneiras de medir um ângulo, dependendo da unidade que se adota: uma delas é o radiano, por ser a mais natural, e a outra o grau, tradicional há milênios.

A definição para as funções trigonométricas tem como ponto de partida a função de Euler $E : \mathbb{R} \to C$, que faz corresponder a cada número real t o ponto $E(t) = (x, y)$ da circunferência unitária, obtido da forma seguinte:

- $E(0) = (1, 0)$
- Se $t > 0$ com t um número real, então os pontos de C são percorridos no sentido positivo (anti-horário ao movimento dos ponteiros de um relógio comum) da circunferência, o ponto final será chamado de $E(t)$.
- Se $t < 0$ com t um número real, então os pontos de C são percorridos no sentido negativo (horário dos ponteiros de um relógio comum) da circunferência, o ponto final será chamado de $E(t)$.

É possível imaginar a função de Euler $E : \mathbb{R} \to C$ como um processo de enrolar a reta, identificada a um fio inextensível, sobre a circunferência C de modo que o ponto $0 \in \mathbb{R}$ caia sobre o ponto $(1, 0) \in C$, indicado na figura 1.13.

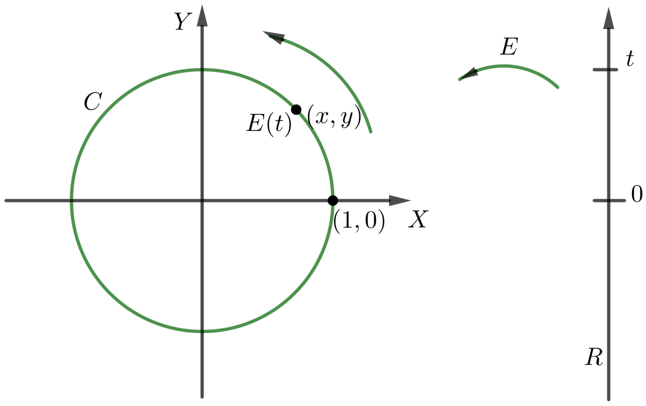


Figura 1.13: Função de Euler.
Fonte: Lima (2013).

A cada vez que um comprimento l é descrito pelo ponto t na reta, tem-se uma imagem $E(t)$ percorrendo a circunferência C com um arco de igual comprimento l. Em particular, como a circunferência unitária tem comprimento igual a 2π, assim que o ponto t descreve um intervalo de comprimento 2π, significa que sua imagem $E(t)$ dá uma volta completa sobre C, retornando ao ponto de partida. Logo, para todo $t \in \mathbb{R}$, tem-se $E(t + 2\pi) = E(t)$ e, mais geralmente, para todo $k \in \mathbb{Z}$, tem-se $E(t + 2k\pi) = E(t)$, seja qual for $t \in \mathbb{R}$.

Reciprocamente, se $t < t'$ em $\mathbb{R}$ tais que $E(t) = E(t')$, isto significa que se um ponto s da reta varia de t a t' sua imagem $E(s)$ se desloca sobre C no sentido positivo, partindo de $E(t)$, dando um número inteiro de k voltas e retornando ao ponto de partida $E(t') = E(t)$. A distância percorrida é $2k\pi$, logo $t' = t + 2k\pi)$, por definição $E(s)$ percorre igual comprimento que s percorre sobre a reta $\mathbb{R}$. Conclui-se que: $E(t') = E(t)$ se, e somente se, $t' = t + 2k\pi)$, com $k \in \mathbb{Z}$. (Para $t' > t$, vale $k \in \mathbb{N}$; quando $t < t'$ tem-se $k < 0$).

Vale destacar que uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é dita periódica quando existe um número $T \neq 0$ tal que $f(t + T) = f(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Se isto ocorre, então $f(t + kT) = f(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$ e todo $k \in \mathbb{Z}$ e, o menor $T > 0$ tal que $f(t + T) = f(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$ é chamado período da função f.

Como a função de Euler é uma função periódica, a figura 1.14 representa todas as propriedades das simetrias.

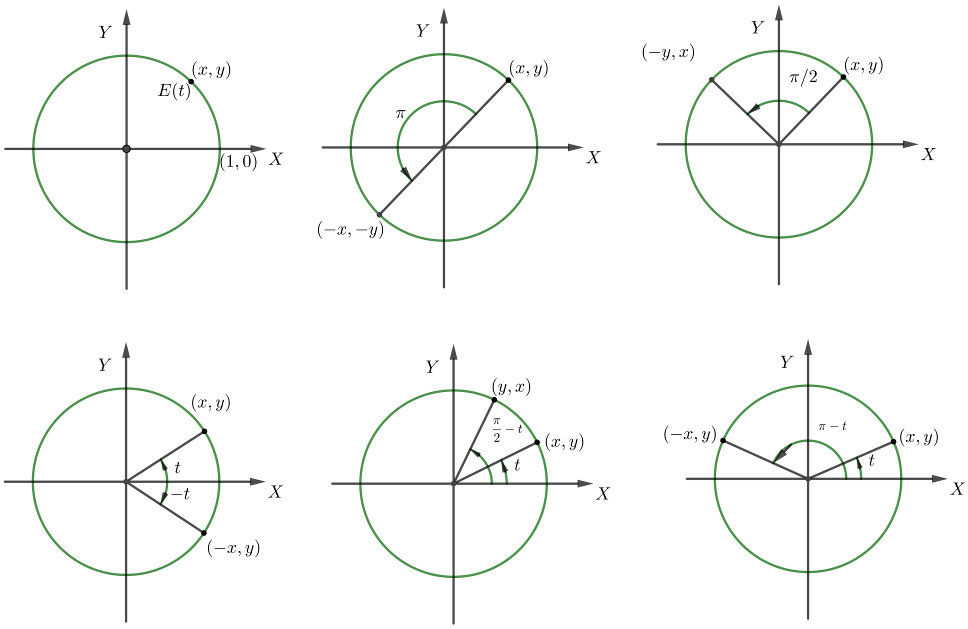


Figura 1.14: Simetrias da função de Euler.
Fonte: Lima (2013).

1.6.3 As funções seno e cosseno

A função cosseno e função seno, são funções trigonoméricas em $\mathbb{R}^2$, e denotamos por $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $\text{sen} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, cuja definição é feita da seguinte forma:

Definição 1.2. *Para cada $t \in \mathbb{R}$, tem-se*

$$E(t) = (\cos t,\, \text{sen}t)$$

Em outras palavras, $x = \cos t$ e $y = \text{sen}t$ são, respectivamente, a abcissa e a ordenada do ponto $E(t)$ da circunferência unitária.

Imediatamente segue desta definição que, para todo $t \in \mathbb{R}$, vale a relação fundamental

$$\cos^2(t) + \text{sen}^2(t) = 1 \tag{1.9}$$

Como já mencionado a função de Euler é periódica, logo as funções cosseno e seno são periódicas de período 2π, ou seja, conhecendo o comportamento da função no intervalo $[0, 2\pi]$, já é possível conhecer o seu comportamento nos intervalos seguintes, ou anteriores de comprimento 2π.

Analisar uma função da forma $y = \cos(t)$ no intervalo $[0, 2\pi]$, é o mesmo que observar qualquer outro intervalo da forma $[2k\pi, 2(k+1)\pi]$, pois o valor de t que percorre ao longo da circunferência dá as coordenadas de um ponto após um número de voltas, sem perda de generalidade. O que permite então restringir o estudo destas funções ao intervalo $[0, 2\pi]$.

Ainda vale ressaltar que as funções cosseno e seno, assumem valores positivos ou negativos dependendo do quadrante em que se encontram. Além disso, uma função é par se tem $f(-t) = f(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$, e ímpar se $f(-t) = -f(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Desta forma, tem-se que para todo $t \in \mathbb{R}$, $E(t) = (\cos t, \text{sen} t)$ e $E(-t) = (\cos(-t), \text{sen}(-t))$ e, observando a propriedade das simetrias apresentadas na figura 1.14, note que quando $E(t) = (x, y)$ tem-se $E(-t) = (x, -y)$, o que implica que $\cos(-t) = \cos(t)$ e $\text{sen}(-t) = -\,\text{sen} t$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Logo, da conclusão acima define-se que a função cosseno é par e a função seno é ímpar. De modo análogo, são estabelecidas outras relações que para todo $t \in \mathbb{R}$, valem:

$$\cos(t+\pi) = -\cos t,\ \text{sen}(t+\pi) = -\,\text{sen} t$$

$$\cos(t+\frac{\pi}{2}) = -\,\text{sen} t,\ \text{sen}(t+\frac{\pi}{2}) = \cos t$$

$$\cos(\frac{\pi}{2}-t) = \text{sen} t,\ \text{sen}(\frac{\pi}{2}-t) = \cos t$$

$$\cos(\pi-t) = -\cos t,\ \text{sen}(\pi-t) = \text{sen} t$$

Se pode representar as funções seno e cosseno graficamente:

Dado um ângulo, cuja medida em radianos é x, a função seno, representada pela figura 1.15 é a função que associa a cada x $\in \mathbb{R}$ o número sen $x \in \mathbb{R}$ e denota-se por:

$$f(x) = \text{sen} x. \tag{1.10}$$

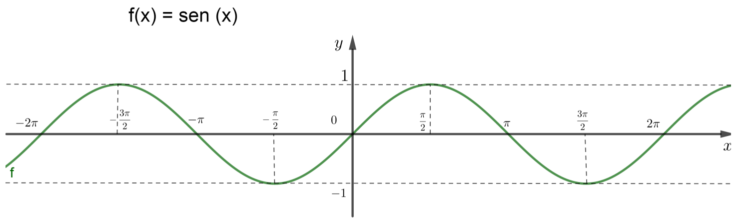


Figura 1.15: Função seno.

Dado um ângulo, cuja medida em radianos é x, a função cosseno, representada pela figura 1.16, é a função que associa a cada x $\in \mathbb{R}$ o número $\cos x \in \mathbb{R}$ e denota-se por:

$$f(x) \ = \cos x. \tag{1.11}$$

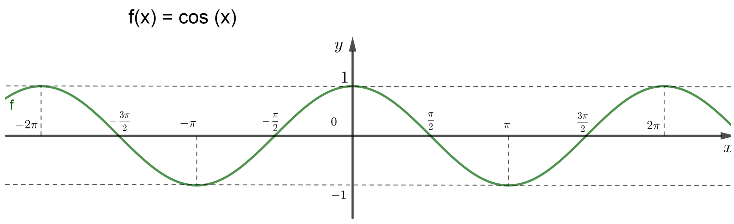


Figura 1.16: Função cosseno.

Observe que tanto a função seno quanto a função cosseno tem domínio igual a $\mathbb{R}$, contradomínio igual a $\mathbb{R}$ e conjunto imagem $\{y \ \in \ \mathbb{R}; -1 \leq \ y \ \leq 1\}$.

1.6.4 A função tangente

Outras funções trigonométricas são obtidas a partir de operações elementares com as funções seno e cosseno, a saber:

$$\tan x = \frac{\text{sen}x}{\cos x} \tag{1.12}$$

a função tangente, determinada pelo quociente, tem seu domínio restrito aos números reais, para os quais o denominador é diferente de zero.

Cabe observar que a função tangente dada pela expressão (1.12), tem como domínio o conjunto dos números reais que não são múltiplos ímpares de $\frac{\pi}{2}$ pois $\cos x = 0$ se, e somente se, $x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$ com $k \in \mathbb{Z}$. Note que o domínio da função $x \to \tan x$ é formado pela reunião dos intervalos abertos $(k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2})$.

Tomando por exemplo o intervalo $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, a função é crescente e, $x \to \tan x$ estabelece uma relação biunívoca entre o intervalo aberto de comprimento π e todos os pontos da reta $\mathbb{R}$.

Mesmo a função tangente não estando definida para todo número real $\mathbb{R}$, será considerada como uma função periódica, de período π, sendo este o menor número real positivo tal que $\tan(x+\pi) = \tan x$ se x e $x+\pi$ pertencem ao domínio da função.

Dado um ângulo, cuja medida em radianos é x com $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, a função tangente representada na figura 1.17, é a função que associa a cada $x \in \mathbb{R}$ o número $\tan x \in \mathbb{R}$ e denotado por:

$$f(x) = \tan x. \tag{1.13}$$

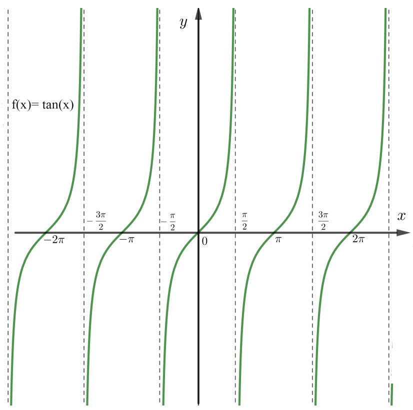


Figura 1.17: Função tangente.

Capítulo 2

Modelagem matemática

Neste capítulo será abordada a modelagem matemática apoiada nos trabalhos de autores que disseminaram ao final da década de 1970 debates acerca de uma proposta que possibilitou a reflexão sobre fazer Matemática, entre eles Bassanezi (2002). A utilização da metodologia de ensino, através da modelagem matemática, pode ser justicida como ferramenta capaz de levar o aluno analisar e compreender de forma crítica situações reais, explícitas na visão de autores como Meyer et al. (2011); Biembengut (2009) e Burak (2005).

Serão tratados tópicos sobre a modelagem matemática e sua concepção de ensino em sala de aula, tomando por relevante a proposta desta metodologia para o estudo de problemas matemáticos, em especial para a trigonometria.

2.1 Perspectivas da modelagem matemática

Ao observar o campo de desafios no ensino da Matemática se optou por buscar uma metodologia de ensino que pudesse proporcionar um conhecimento de situações práticas e reais, uma vez que na literatura se indica que os conteúdos são fragmentados e sem contextualização, um fardo do ensino tradicional nas escolas, indicado como uma das causas das dificuldades dos alunos em aprender.

Seguindo esta linha de trabalho, buscou-se evidenciar a modelagem matemática como ferramenta pedagógica, e analisar os textos de pesquisadores como por exemplo Carlos R. Bassanezi, João Frederico C. A. Meyer, Maria Salett Biembengut, Ademir Donizete Caldeira, que contribuíram com muitas publicações na área, em nosso país.

Diversos autores reforçam a importância da prática e escolha de metodologias que qualifiquem o trabalho do professor, como salienta Burak (2010)

> Podemos considerar que uma prática educativa deve estar embasada em uma ciência e, sem a consideração de uma concepção clara dos fundamentos que constituem essa ciência pode, mais comprometer essa prática, do que propriamente ser a solução para o fim desejado (Burak, 2010).

A proposta pedagógica deve se desprender da prática tradicional de ensino, por essa razão, Alves (2017) afirma que novas metodologias devem ser trazidas para a sala de aula evidenciando as que aproximem os conteúdos matemáticos de suas aplicabilidades e, consequentemente, dos alunos.

Buscando acrescentar ao saber do aluno, práticas que definem conceitos matemáticos abstratos, que justificam seu uso na solução de problemas. A relevância dada na questão, é aplicar e fazer o uso da Matemática, num ensino dinâmico, para, em seguida, conceituar a Matemática em sí e usá-la para avaliar como ferramenta (Meyer et al., 2011).

Estas intenções, desde muito tempo, tem sido provocadas e colocadas em pauta em movimentos matemáticos. Biembengut (2009) cita avanços na aplicação prática dos conhecimentos em Matemática, que teve início com eventos, entre eles o *Lausanne Symposium*, em 1968 na Suíça, com debates acerca de como ensinar Matemática de modo que seja útil, preconizando situações da realidade do aluno, com aplicações não padronizadas e rigorosas e, sim, que favorecesse a habilidade em matematizar e modelar problemas. A partir de então, os grupos que foram sendo formados para os posteriores debates acerca da modelagem matemática, influenciou o Brasil quase que simultaneamente.

O que se quer com a modelagem é ensinar Matemática de uma forma que os estudantes atuem ativamente neste ensino e criem mecanismos de reflexão e de ação (Meyer et al., 2011).

A adoção desta maneira de trabalhar, é propor uma perspectiva com uso de um currículo contextualizado, com significado para professores e alunos, que seja dinâmico e possível de sofrer alterações, além de ser readaptado, reorganizado para atender as especificidades (Biembengut, 2009).

Desta forma, é possível que os estudantes não apenas tenham conhecimentos matemáticos, mas também desenvolvam habilidades para solucionar situações problemas nas mais diversas áreas.

Diante de um cenário de possibilidades, em que os recursos e tecnologias estão cada vez mais presentes no cotidiano, é importante destacar que o ensino da Matemática e suas aplicações estão inseridos num tempo histórico, social e cultural.

Cabendo, então, a partir de pesquisas, fundamentar a modelagem matemática e suas estratégias e relações em sala de aula, discutir as perspectivas da modelagem e sua relação com as outras áreas do conhecimento e propor uma reflexão sobre sua abordagem para o ensino.

Segundo Sella (2016), a modelagem matemática se configura como uma proposta de atividades que visa a aprendizagem dos alunos, partindo de aplicações matemáticas. Contribui para a consolidação de uma imagem desta disciplina como ciência, que faz parte da história e da cultura humana, possibilitando a construção ou produção de conhecimento.

Caldeira (2009) afirma ser a modelagem matemática um dos possíveis caminhos de uma nova forma de estabelecer, nos espaços escolares, a inserção da maneira de pensar as relações dos conhecimentos matemáticos e a sociedade mais participativa e democrática, baseada em pensamentos e pressupostos na sua complexidade, a tal modo que o professor estrutura e media este processo.

Com essas ideias de aproximar o currículo a um planejamento mais amplo com o resgate de outras formas de empregar a Matemática, é possível criar aulas que busquem a interpretação da realidade vivida e o emprego de conhecimentos que, de fato, estejam relacionados a diversas áreas.

2.1.1 Modelagem e Etnomatemática

As necessidades e explicações matemáticas surgiram com o passar dos anos, como contada no decorrer deste trabalho, com elas ficaram evidentes as diversas formas e tentativas de resolver tais necessidades, muitas vezes, analisadas sob uma situação problema. Todas as técnicas e apropriação do conhecimento transmitidos ao logo dos anos, mostram a capacidade de criar e de inovar, além de modificar o espaço, as relações e aplicações destes conhecimentos na percepção da realidade.

Com esta gama de conhecimento, Biembengut (2014) retrata que tais observações fazem da Matemática uma consequência destas necessidades, criadas, modificadas e incorporadas por um grupo, que entende e utiliza de métodos próprios, capazes de explicar conceitos matemáticos.

Estas concepções, D'Ambrosio (1998) denomina de Etnomatemática, a arte ou técnica de explicar, conhecer e entender como uma pessoa ou grupo gera conhecimento matemático, faz uso em seus afazeres, organiza e transmite este conhecimento a outrem (*apud* Biembengut, 2014, p.208).

Em meio ao contexto sociocultural, as ações que uma pessoa ou grupo tende a executar determinadas situações caracterizam seus pensamentos, valores e sua base material e social, tanto que o propósito das práticas matemáticas perpetua sobre manifestações de métodos.

Biembengut (2014) reforça que na Etnomatemática, o foco encontra-se no reconhecimento do fazer e do saber matemático das pessoas, resultantes das necessidades e das vivências delas. Utilizar-se destes fazeres e saberes nas práticas pedagógicas, pode melhor contribuir para a formação acadêmica dos estudantes.

A Etnomatemática busca compreender e analisar as práticas matemáticas vivenciadas ao longo dos tempos, como foram percebidas as ideias e como as atividades foram sendo reconhecidas pelos povos em seus grupos, também como afirma Biembengut (2014), tem o papel de instigar o aluno a conhecer diferentes linguagens e procedimentos na solução de algum problema, valorizar diferentes culturas e formas sociais. Enquanto a modelagem matemática trabalha com problemas reais, instiga o aluno a pesquisar e questionar situações e utilizar-se de conhecimentos já produzidos pela cultura local para sanar tais questões.

Meyer et al. (2011) e Biembengut (2014), concordam que em ambos os casos, Etnomatemática ou modelagem matemática parte-se de uma situação problema que, para solucioná-la, utilizarão de conhecimentos familiarizados em sua convivência local.

Neste sentido, dialogar entre modelagem matemática e conhecimentos construídos anteriormente pelo aluno, é possibilitar a construção de um currículo mais dinâmico que valoriza toda a construção dos envolvidos no processo. Além de facultar ao professor a mediação desta proposta de ensino, sendo o orientador, capaz de colaborar com os alunos para a tomada de decisões, ao selecionar informações, organizar as ideias e hipóteses, construir argumentos para as soluções, compartilhar suas conquistas e descobertas.

A modelagem e a Etnomatemática são consideradas como métodos de ensino e pesquisa, pois têm mostrado aos estudantes mais que regras ou modelos matemáticos. Tem alcançado níveis satisfatórios de conhecimento social e cultural e alguns princípios relativos à realidade que nos cerca (Sella, 2016).

Bassanezi (2002) aponta que a modelagem também se encaixa no paradigma da Etnomatemática e salienta que a proposta com enfoque epistemológico alternativo associa-se a uma historiografia mais ampla, com forte fundamentação cultural à ação pedagógica, fato que justifica ser uma metodologia mais adequada ao se trabalhar com diversas realidades.

Sebastiani Ferreira dedicou-se ao estudo da Etnomatemática, como cita Esquincalha (2018), analisando-a como uma proposta metodológica, que cria ações pedagógicas impulsionadas pela pesquisa etnomatemática seguida da utilização da modelagem matemática para alcançar os objetivos educacionais.

Um modelo pedagógico proposto por Sebastiani Ferreira (1994) que enfatiza o resgate da Matemática que existe nas diferentes formas de expressão cultural e que estão presentes no cotidiano do aluno, é traduzido pelo esquema da figura 2.1, em que se pode observar os caminhos semelhantes ao processo de modelagem matemática em sala de aula Sebastiani Ferreira (1994, p.92).

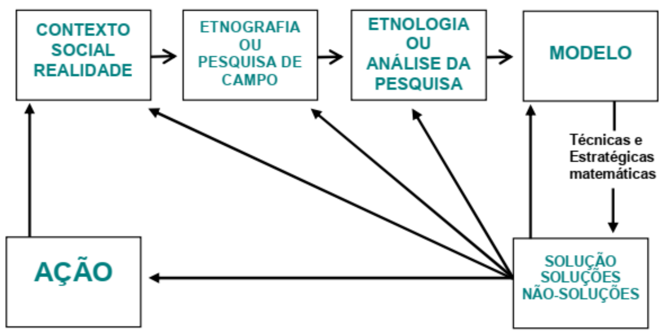


Figura 2.1: Esquema de modelo pedagógico - Sebastiani Ferreira.
Fonte: Sebastiani Ferreira (1994).

A questão da Etnomatemática como um programa de pesquisa científica, citado por Sebastiani Ferreira (2007) em um dos seus trabalhos, aponta autores como D'Ambrósio, como grande precursor no avanço desta linha de pesquisa. Reforça também a forte interação do indivíduo com seu convívio social, o que remete a ideia de que trabalhar com a realidade que o cerca traz muito mais sentido para os conceitos da Matemática.

Para D'Ambrosio (2011) existe uma relação importante quando se fala de modelagem e Etnomatemática, dado que as informações que foram sendo recebidas e aprimoradas no ciclo do conhecimento, por meio de memórias, registros, sentidos, código genético, se processaram e foram organizadas para representar a realidade como modelos. Tal o qual se nomeia este processo de modelagem, utilizando instrumentos disponíveis que é denominada Etnomatemática.

Neste sentido, a aproximação da Etnomatemática com a modelagem, como um dos possíveis caminhos de uma nova forma de estabelecer a inserção da maneira de pensar as relações dos conhecimentos matemáticos, implica em incorporar o educar matematicamente nas práticas dos professores (Meyer et al., 2011).

2.1.2 Modelagem matemática no contexto de sala de aula

Ao pontuar as inúmeras situações que ocorrem em sala de aula, como métodos tradicionais de ensino, a falta de recursos pedagógicos, as inúmeras opções atrativas fora de sala e avanços tecnológicos que chegam de forma morosa dentro das escolas para o trabalho didático–pedagógico, observa-se que é primordial a busca por novas perspectivas e metodologias capazes de motivar os alunos.

Segundo Bassanezi (2002), a modelagem pode ser um método aplicado em várias situações, cuja intensão seja a de estimular alunos e professores de Matemática a desenvolverem suas próprias habilidades como modeladores.

Meyer et al. (2011), de forma suscinta, analisa as contribuições de diversos autores que tratam as perspectivas da modelagem e afirma que as diferenças que se apresentam, basicamente, é quanto a ênfase na escolha do problema que será investigado e, desta forma, como este será direcionado. Ou seja, se parte do professor, ou ajusta-se num acordo entre alunos e professor ou, se os alunos é que fazem a escolha quanto ao que desejam pesquisar.

Em seu estudo, Biembengut (2014) identifica que estudiosos apontam a importância do estudo da Matemática estar vinculada a outras áreas do conhecimento, o que possibilita ao aluno criar conexões com fatos já conhecidos. Permite, assim, desenvolver habilidades para a solução de diversos problemas, estabelecendo relações não apenas com conteúdos matemáticos.

A modelagem matemática impulsiona os alunos a explorar mais as representações e situações a eles apresentadas, além de estabelecer um conjunto de conhecimentos inter-relacionados. Ela tem o papel de desenvolver habilidades de investigação, formulação e explicação de argumentos, que podem surgir de experiências empíricas contribuindo para a formação científica ampliando assim a compreensão da realidade.

Ambos, Bassanezi (2002) e Burak (2005) concordam que a modelagem matemática favorece e potencializa a aprendizagem não só da Matemática, como também em outras áreas do conhecimento. Implementar aulas sob a perspectiva da modelagem matemática é, de certa forma, um meio de realizar um trabalho interdisciplinar e potencializar uma ampla visão da situação–problema envolvida.

Um dos maiores desafios em trabalhar com a modelagem, como aponta Bassanezi (2002) é a adoção do processo da modelagem. Para a maioria dos professores é preciso transpor a barreira naturalmente criada pelo ensino tradicional. Não se trabalha com linhas delineadas e que obedeçam sequências com o mero cumprimento do currículo. Em sala de aula, só se aprende modelar, modelando.

Bassanezi (2002) define a modelagem matemática como

> um processo dinâmico utilizado para a obtenção e validação de modelos matemáticos. É uma forma de abstração e generalização com a finalidade de previsão de tendências. ... A modelagem é eficiente a partir do momento que nos conscientizamos que estamos sempre trabalhando com aproximações da realidade, ou seja, que estamos elaborando sobre representações de um sistema ou parte dele (Bassanezi, 2002).

A abordagem quanto a proposta de trabalho com a modelagem matemática em sala de aula, será apresentada sob dois olhares, de Meyer e Bassanezi, os quais apresentam-na como ferramenta metodológica de ensino.

Segundo Bassanezi (2002) a modelagem matemática de uma situação–problema segue uma sequência de etapas, descrita na figura 2.2.

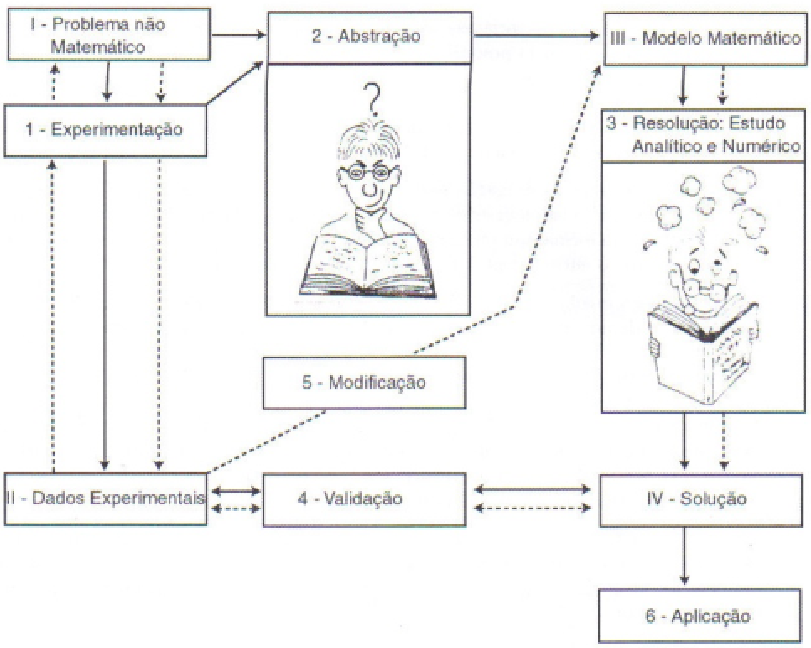


Figura 2.2: Esquema de uma modelagem que descreve uma situação–problema. Fonte: Bassanezi (2002).

Resumidamente, as etapas representadas no esquema são:

1. Experimentação: Atividade em que se obtém os dados, com métodos experimentais, ditados pela própria natureza do experimento e objetivo da pesquisa. Nesta fase, o matemático ajuda a direcionar a pesquisa e contribui posteriormente facilitando o cálculo dos parâmetros envolvidos nos modelos matemáticos.

2. Abstração: Nesta fase formulam-se os modelos matemáticos, busca-se selecionar as variáveis que agem sobre o sistema que devem ser claramente definidas, problematiza-se ou formula-se os problemas teóricos numa linguagem própria, adequando a sistematização de uma investigação. Por mais que uma proposta de tema seja abrangente, a formulação de um problema deve ser mais específica, para que as hipóteses formuladas direcionem o pesquisador a generalizações, observações de fatos, comparação a outros estudos e possibilite, assim, deduções empíricas específicas.

3. Resolução: Nesta fase substitui-se a linguagem natural das hipóteses por uma linguagem matemática coerente, fato que origina o modelo matemático, que terá em sua resolução o grau de complexidade empregado conforme a sua formulação. Em alguns casos o uso de recursos computacionais será a única forma de viabilizar uma solução numérica aproximada.

4. Validação: É o processo de aceitação ou não do modelo proposto, em que os modelos juntamente com suas hipóteses já atribuídas, devem ser testados em confronto com os dados empíricos e comparados com soluções e previsões obtidos no sistema real, dado que este grau de aproximação seja o fator preponderante para sua validação. Um bom modelo matemático deve ser, segundo suas qualidades, suficientemente simples e representar de maneira razoável a situação analisada.

5. Modificação: Conforme os fatores ligados ao problema, o grau de aproximação rejeitado indica que as soluções não condizem com as previsões corretas, além de haver a possibilidade de hipóteses não serem suficientes, alguns dados podem ter sido obtidos de forma incorreta, as hipóteses e dados são verdadeiros mas insuficientes, a possibilidade de haver variáveis necessárias mas não incluídas no modelo. É possível que se tenha cometido algum erro no desenvolvimento matemático formal, fato que leva a reformulação dos modelos, que não pode ser considerado definitivo, podendo o mesmo ser melhorado, oportunizando assim uma retomada das fases.

Para Meyer et al. (2011), o processo de modelagem matemática de uma situação problema, requer a discussão das diversas relações existentes no âmbito escolar, desde a relação deste processo com o currículo e suas especificidades, dos quais os conteúdos matemáticos são, de fato, produto final do conhecimento que nem sempre serão apresentados de forma linear.

Desta forma, trabalhar com a modelagem matemática afim de solucionar problemas e aprofundar conhecimentos partindo da curiosidade e investigação do aluno, como exemplificado pelo esquema da figura 2.3, em que se tem um processo de modelagem segundo Meyer et al. (2011, p.42).

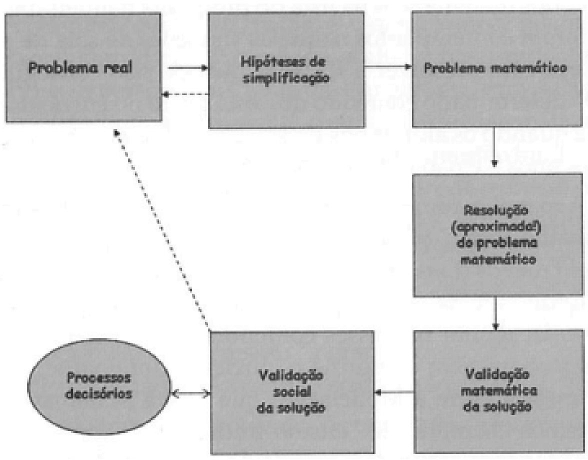


Figura 2.3: Esquema descrevendo um processo de modelagem.
Fonte: Meyer et al. (2011).

Cabe então ao professor analisar as suas estratégias para que possa sensibilizar a turma, encaminhar, incentivar e propor a busca por soluções de problemas reais, além de instigar que os alunos tragam situações de fora para dentro da escola (Meyer et al., 2011).

O objetivo de ensinar sob a perspectiva da modelagem matemática, é capacitar o aluno na busca de ideias matemáticas, que contextualize situações, pesquise, explore, entenda, tome decisões e participe influenciando de forma dinâmica as constantes mudanças no processo (Meyer et al., 2011).

Quando há possibilidades de novas estratégias de ação pedagógica, o professor pode observar resultados e motivação por ele e por parte dos alunos, também pode criar e manifestar interesse em formar um estilo novo e próprio de ensinar, como apontam Mutti e Klüber (2018).

Mutti e Klüber (2018) evidenciaram a transformação na prática do professor quando experimentam a satisfação e aprendizagem dos alunos com suas aulas. Estas novas experiências propõem abertura e busca para um sentido nas mudanças produzidas, por meio de conhecimento no contexto diferenciado a qual são submetidos. Nesta pesquisa, com professores que atuam em sala de aula, identificaram a viabilidade da compreensão e interpretação e de ações que implicam o fortalecimento do conhecimento e das práticas no contexto, quando trabalhado através da modelagem matemática.

Capítulo 3

Proposta para abordagem da trigonometria

Neste capítulo é proposto um trabalho pedagógico com aplicação da modelagem matemática para alunos do ensino médio. Buscando provocar um cenário dinâmico para a aplicação de uma sequência didática, dando oportunidade de realização de um trabalho que, de forma interdisciplinar, promova discussões e contemple ideias acerca da organização das etapas de ensino.

3.1 Oscilação do pêndulo simples como tema motivador

A discussão de acontecimentos bem como a aplicação da modelagem matemática em situações–problema reais, torna o espaço da sala de aula um ambiente oportuno na construção do conhecimento, prazeroso ao professor e aluno, principalmente, quando se promove um cenário de experimentos com recursos materiais e com simulações. Diante disso, a assimilação de conceitos científicos formados através de processos que instigam pesquisa, reflexão e busca por soluções, são melhor absorvidos.

Como abordado em 2.1.2, se deve adotar a organização das etapas da modelagem matemática para a sequência didática, definida conforme o objetivo do professor.

A etapa inicial se dá com a escolha do tema e a definição dos conteúdos matemáticos inseridos no estudo destes, devem ser estabelecidos e escolhidos de forma prévia, levando em conta que novos conteúdos possam surgir no decorrer do próprio processo.

Considerando o tema, oscilações do pêndulo simples, os conteúdos de Matemática a serem estudados previstos nas etapas são: medida de comprimento, medida de tempo, razão e proporção, as relações trigonométricas na circunferência trigonométrica, função cosseno, periodicidade das funções trigonométricas.

Para a atividade, o professor poderá definir duplas, apresentar o objetivo do experimento e estabelecer o tempo da aula prática, com a finalidade de agilizar e envolver os alunos na organização.

Para dar início à atividade (etapa 1), uma vez escolhido o tema, é necessário definir uma questão problematizadora, a qual irá conduzir a experimentação, bem como a busca por informações.

Daí, se realiza a atividade com o experimento prático e a coleta de dados. O professor neste processo direciona, orienta e acompanha a atividade feita pelos alunos. Com a obtenção dos dados, a intenção é construir uma tabela numa planilha eletrônica para facilitar a leitura e análise de forma mais eficiente.

Esta planilha também será utilizada para a construção de gráficos, dos quais os alunos farão a análise. As planilhas permitem aos alunos se concentrarem nas manipulações, no raciocínio e na "programação" ao invés dos cálculos rotineiros, que podem ser entediantes para muitos dos estudantes (Saldanha, 2016).

Na etapa 2, os alunos farão o levantamento das hipóteses e questionam as possibilidades de solução, podendo ser das mais diferentes formas pelas duplas. São elencados os conceitos matemáticos que irão comprovar as tentativas de solução para os dados obtidos.

Neste momento, os alunos formulam modelos matemáticos que respondam a questão problematizadora e observam se esta responde ao questionamento.

Na etapa 3, é feita a resolução e análise do modelo obtido, verificando se o mesmo traduz matematicamente o fenômeno. É claro, que outros aspectos interessantes podem surgir, como o estudo do pêndulo, do ponto de vista físico, o que associa e agrega maior conhecimento se o professor da disciplina puder contribuir com uma aula sobre movimento harmônico simples.

A expressão que surge, a partir do experimento real, passa a ser um instrumento que caracteriza a função cosseno, a peridicidade de uma função. A partir de então são discutidas as aplicações da trigonometria em situações reais.

Na etapa 4, é validado o modelo formulado e isso pode ser feito com acompanhamento gráfico, a partir dos dados inseridos na planilha eletrônica. Assim, é possível fazer a comparação do modelo obtido por meio do experimento, com apoio do recurso computacional, aplicando a fórmula da função em relação ao tempo.

Aqui é possível que a dupla discuta, argumente e analise as soluções obtidas, aceitando ou não o modelo. Apontem as dificuldades encontradas e a eficiência dos métodos utilizados. Diante das conclusões é que se refuta ou não o modelo, se acaso o refutar, o processo se repete evidenciando novos caminhos e autoavaliando o trabalho realizado.

Ao professor cabe a responsabilidade de estar em constante diálogo com os alunos, questionando os resultados e instigando a comprovação do método.

Finalmente, os alunos farão a apresentação do experimento e do modelo matemático e destacarão os conceitos matemáticos que aprenderam e sua aplicação.

Com a atividade aplicada, a intenção é mostrar o potencial que uma atividade prática, que não é uma tarefa trivial, pode oferecer no ensino de trigonometria, ou que muitas vezes, por simples que seja, pode abrir reflexões para inúmeras possibilidades de ensino.

3.2 Organização metodológica

3.2.1 Contextualização da situação problema

O movimento do pêndulo simples proporciona diversos dados que mostram o seu comportamento. Dentre estes se considera o seu deslocamento dado por uma unidade de medida equidistante adotada, medido em segundos, o qual é aproximado por uma equação matemática que descreve seu movimento.

3.2.2 Materiais necessários:

1. Pêndulo do tipo prumo. (Este poderá ser montado, com fio de nylon ou barbante e um objeto de massa considerável).

2. Cartolina.

3. Pincel marcador.

4. Celular ou câmera filmadora.

5. Computador ou notebook com planilha eletrônica.

6. Suporte em formato de U retangular, ou suporte em formato de L invertido, com base, a ser transportado para qualquer lugar. Confeccionar o mesmo com ripas de madeiras presas por parafusos ou barras de ferro soldadas em suas extremidades, conforme a figura 3.1. Este instrumento pode ser confeccionado antes da aula prática pelos próprios alunos.

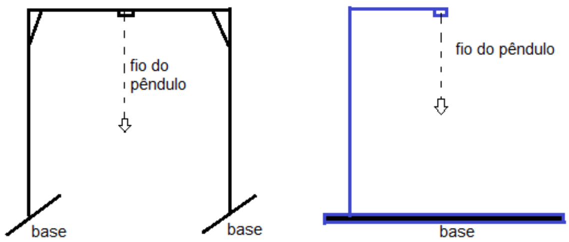


Figura 3.1: Exemplo de suporte em L e em U retangular invertidos.

3.2.3 Objetivos específicos

– Estabelecer relações entre os conceitos matemáticos e o aprender a pensar matematicamente, explorando propriedades de trigonometria;

– Identificar que o uso da trigonometria, bem como a compreensão das técnicas e cálculos para facilitar as medições e explorar sua aplicação e contextualização;

– Promover debates e envolvimento dos alunos no processo de ensino;

– Promover situações–problema práticas aplicadas no contexto histórico com significado aos conceitos matemáticos, com vista à leitura de mundo e sua transformação desde a antiguidade;

– Analisar a dinâmica da modelagem matemática como ferramenta pedagógica;

– Promover reflexões e análise crítica sobre a construção histórica do pensamento matemático bem como a sistematização da trigonometria;

3.2.4 Sequência da atividade

A sequência didática aqui proposta parte do princípio que os alunos já tenham familiaridade com conceitos trigonométricos. Se propõe uma atividade experimental, expressa na tabela 3.1 (pg. 58) de forma resumida, tendo como objetivo dar significado ao estudo de trigonometria e suas aplicações.

3.2.5 Planejamento das atividades

3.2.5.1 1° momento: Aula conceitual

A sugestão é apresentar conceitos matemáticos sobre o pêndulo, que historicamente teve sua utilização desde a antiguidade e conceituar o sistema de funcionamento do pêndulo e suas variáveis conforme indicado no apêndice A.1. Problematizar o uso das medidas de tempo e sua padronização promovendo debates.

Como questão problematizadora do tema, oscilações do pêndulo simples, tem-se uma possível questão: em tempos antigos, os relógios de pêndulo eram utilizados como padrão à uma constante, chamada tempo. Considerando que é possível utilizar diferentes medidas de comprimento L para o fio que sustente o pêndulo, apresentado conforme a figura 3.2, qual o comportamento do pêndulo em relação ao tempo e sua posição de largada, quando observados durante um intervalo de tempo? Quais serão as frequências, ao soltar um pêndulo comprido e um pêndulo curto, em um mesmo intervalo de tempo? Como é possível medir o tempo corretamente?

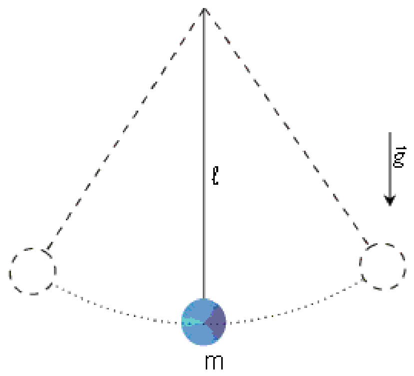


Figura 3.2: Pêndulo simples.
Fonte: https://www.sofisica.com.br/conteudos/Ondulatoria/MHS/pendulo.php.

Ao término da aula, o professor irá verificar as curiosidades, sugerir pesquisas sobre o tema e discutir com os alunos a situação–problema, gerando a questão problema que será o ponto de partida para a busca de soluções.

Nesta aula, o professor poderá solicitar que os alunos se organizem e tragam os materiais necessários para a realização do experimento, com antecedência, levando em consideração que não será oneroso para os alunos, caso a escola não disponha de tal material.

3.2.5.2 2° momento: Aula prática

Solicitar aos alunos que se organizem em duplas e distribuir entre eles os materiais que serão utilizados na aula prática.

A dupla definirá a função de cada um e fará um trabalho coletivo, ajudando-os mutuamente, sempre em diálogo e constante socialização das dúvidas. O professor atuará neste momento com a orientação e acompanhamento da atividade.

O experimento será montado em sala de aula, com a finalidade de que haja menor influencia possível de fatores externos. Cada dupla terá um suporte com base fixa, em formato de U ou L invertido (ver modelo na figura 3.1). A montagem do pêndulo será feita por cada uma das duplas, de forma que as medidas do comprimento do fio não precisam ser as mesmas. A base de sustentação do pêndulo ficará posicionada próxima à parede, onde estará colada a cartolina para as marcações do movimento do pêndulo.

Cada dupla irá escolher um comprimento qualquer para o fio inextensível do pêndulo. Em seguida, será feito na cartolina o desenho da trajetória que o pêndulo já fixado fará, em formato de setor circular, com auxílio do pincel marcador.

É marcada a posição estacionária do pêndulo, o qual está parado na posição vertical. À direita desta posição são marcadas as posições positivas e à esquerda do ponto da posição vertical são marcadas as posições negativas, de 1 em 1, utilizando uma medida equidistante. Os alunos poderão utilizar o polegar, ou qualquer medida de comprimento adotada para a marcação das posições, conforme a figura 3.3.

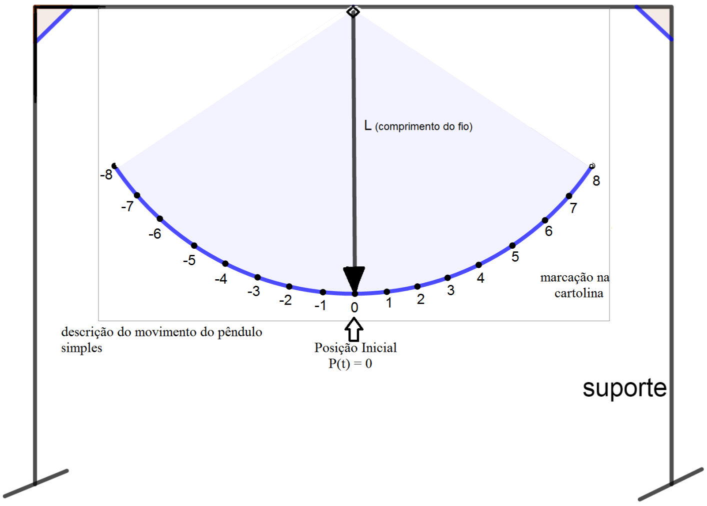


Figura 3.3: Exemplo da montagem final do experimento.

3.2.5.3 3° momento: Aula prática

Após montado o sistema do pêndulo simples para o experimento, os alunos deverão definir um espaço ideal para que a filmagem do experimento aconteça. Um deles se posiciona em local estratégico para a filmagem, enquanto o outro fará o lançamento do pêndulo.

O pêndulo será solto à direita, na posição positiva, com abertura aleatória desde que permaneça no limite da marcação feita. A partir de então, inicia-se a filmagem. Cada segundo capturado descreverá uma posição para o pêndulo, ao longo de sua trajetória.

Durante a atividade, os alunos terão o cuidado de registrar, organizar e definir o tempo de observação do experimento, lembrando que o professor deverá orientar que, para uma melhor precisão, é importante observar um intervalo maior de tempo para a coleta de informações, o suficiente para analisar o experimento.

A dupla poderá coletar a quantidade de tempo que considera ideal, podendo ou não utilizar todas as medições, uma vez que eles poderão selecionar a quantidade de dados que irão utilizar para a análise.

3.2.5.4 4° momento: Aula prática

Esta aula poderá ser realizada no laboratório de informática, ou se os alunos possuírem notebook, o professor poderá solicitar que os tragam para a aula, neste dia.

Após o experimento prático, é momento de anotar os dados da filmagem. Para facilitar a atividade, os alunos registrarão as informações colhidas em uma planilha eletrônica. Para isso terão que, inicialmente, baixar o vídeo no computador e assistí-lo para que observem a posição do pêndulo em função do tempo (em segundos).

Para cada segundo, na tabela será feito o registro da posição que o pêndulo se encontra, negativa ou positiva, conforme a posição obtida no experimento. Considerando as medidas registradas, é possível organizar as colunas 1 e 2, conforme exemplo dado na tabela 3.1. Lembrando que o intervalo de tempo observado será o número de linhas definidas na tabela.

Em seguida, os alunos farão a análise dos dados obtidos, construindo o gráfico com auxílio da planilha eletrônica, do tipo dispersão, com a finalidade de observar o tempo que o pêndulo leva para descrever um ciclo completo, representado no eixo horizontal pela variável t, que define o período da função. Além disso, no decorrer do intervalo observado, a oscilação máxima das alternâncias em torno da posição estacionária, representada no eixo vertical, mostra a amplitude do movimento.

3.2.5.5 5° momento: Aula interativa e prática

Posterior a análise dos dados, o professor irá explicar aos alunos que este período de oscilação, ocorre a cada 2π e é necessário encontrar a amplitude do movimento e o valor de ω definido na equação 3.1, dada em radianos e que descreva esta função. O valor de ω o qual é denominado frequência angular, representa uma taxa de variação de uma grandeza angular em radianos por segundo.

$$\omega = 2\pi f \tag{3.1}$$

sendo f a razão entre o número de ciclos e o tempo necessário para realizá-los. Ciclo é uma oscilação completa, por exemplo: se sai de um ponto A, vai até $-A$ e retorna para o ponto A, temos assim um ciclo completo (Young e Freddman, 2003).

A amplitude, no eixo vertical, será o deslocamento máximo do corpo a partir da posição de equilíbrio. Por isso será um valor sempre positivo.

O professor conceituará a função cosseno, fará a análise do gráfico com situações–problema, e fará comparação com as informações reais obtidas no experimento.

Os alunos deverão modelar matematicamente, uma função analítica que represente o movimento do pêndulo em função do tempo, dada em 3.2.

$$f(x) = A \cdot \cos(\omega \cdot x) \quad (3.2)$$

Farão a terceira coluna da tabela 3.1, utilizando a equação 3.2 e o intervalo de tempo do experimento.

Posteriormente farão as comparações do valor real do experimento com o valor analítico do modelo obtido, aproximando ao máximo com os dados reais. Esta comparação gráfica, será feita com as colunas 2 e 3, da tabela 3.1 utilizando o recurso da planilha eletrônica para desenhar o gráfico por dispersão, reorganizando, então, o modelo matemático para uma melhor aproximação possível.

Na tabela, o professor irá solicitar que os alunos simulem o cálculo, verificando quais variáveis devem ser utilizadas, surge neste momento a construção dos conhecimentos matemáticos sobre trigonometria. Sendo possível, então, que os alunos façam a relação entre teoria e prática vivenciada em sala de aula.

Desta forma, se dá oportunidade que os alunos gerenciem a sua atividade, testando valores e calculando-os, para encontrar o valor de ω adequado ao experimento, que mais aproxime o modelo analítico para os dados obtidos. A manipulação deste dois parâmetros (A e ω) dará credibilidade ao aluno, que estará produzindo e re-significando sua aprendizagem.

Considerando que as aproximações das medidas encontradas e calculadas, indicam uma possível solução e que estes valores se repetem a cada intervalo de tempo, o aluno é capaz de verificar que a relação existente entre estes parâmetros demonstra a periodicidade da função.

Além disso, é interessante discutir com os alunos o que ocorre com estes parâmetros, ao variar o comprimento do fio.

Tabela 3.1: Dados do experimento para a planilha eletrônica.

t	**P(t)**	**f(x)**
0	P_0	$f(0)$
1	P_1	$f(1)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	P_n	$f(n)$

Na tabela 3.1:

- **t** – representa o instante de tempo, em segundos.

- **P(t)** – representa a posição do pêndulo, no instante t, obtida pelo experimento.
- **f(x)** – representa a função posição do pêndulo $f(x) = A \cdot \cos(\omega \cdot x)$, é o modelo matemático que melhor se "aproxima" do fenômeno estudado.

É importante destacar os resultados alcançados pelos grupos que utilizaram as medidas diferentes no comprimento do fio, cujas simulações da atividade prática tem intuito de fazer a reflexão sobre as situações envolvidas. Este procedimento é a modelagem matemática da situação–problema.

3.2.5.6 6° momento: Aula avaliativa

Aos alunos será solicitado que façam os registros pertinentes a realização da atividade, a construção de um portifólio contendo as observações, desde como se deu a organização e socialização da atividade na dupla e o que tal atividade contribuiu para sua aprendizagem.

Todo registro como figuras, anotações, conclusões, o desafio da atividade, execução, enquanto produziam os modelos que representavam o experimento, podem fazer parte do portifólio da dupla.

A avaliação se dará numa pespectiva de observar pontos positivos e negativos da atividade, a participação e comprometimento da dupla, por meio de entrevista e diálogo com os alunos, a fim de que os mesmos exponham suas opiniões.

Será observado individualmente cada aluno para o diagnóstico da aprendizagem, bem como possibilitar melhorias nos encaminhamentos metodológicos. O professor poderá organizar um momento da aula para socializar os modelos matemáticos das duplas e sua validade.

A tabela 3.2 detalha resumidamente a sugestão da atividade, dentro da proposta da modelagem matemática, sendo possível o professor utilizá-la como base para novas aplicações nas diversas etapas para o ensino.

Tabela 3.2: Sequência didática.

Aula	**Objetivo**	**Análise da realidade**	**Metodologia**	**Número de aula**
Conceitual	Definir matematicamente o pêndulo simples. Elaborar questões problemas.	Problematizar situações reais. Definir o problema.	Aula expositiva e dialogada.	1
Prática	Organizar e compreender a atividade prática.	Organização da dupla, preparar a atividade.	Montagem do sistema para o experimento.	1
Prática	Desenvolver a capacidade de observação, análise e compreensão.	Realizar o experimento prático, observar o fenômeno do movimento periódico.	Filmagem do experimento e coleta de dados.	2
Prática	Desenvolver a capacidade de organizar dados em planilha eletrônica.	Sistematizar os dados reais, fazer comparações.	Organizar informações e analisar graficamente o comportamento dos mesmos.	1
Interativa e prática	Modelar e Validar a solução matemática encontrada, construindo significados. Relacionar teoria e prática.	Fazer conclusões sobre a atividade prática e situações–problema.	Aula expositiva e procedimental.	2
Avaliativa	Identificar e avaliar os conhecimentos.	Construção do portifólio.	Organizar os registros e dados obtidos. Sistematizar os conceitos e aprendizagem individual e coletiva.	No decorrer da atividade.

O que diferencia a sequência didática aqui apresentada dos demais trabalhos já observados em outras dissertações, é que este utiliza um experimento prático construído pelos alunos, de forma que a coleta de dados e a manipulação destes é feita passo a passo, construindo percepções para se obter o conceito de função trigonométrica.

Permite ao aluno visualizar e compreender a construção do modelo matemático que identifica o movimento harmônico simples do pêndulo, com o comportamento dado por uma oscilação periódica. Não se traz uma fórmula pronta, mas sim possibilita que o aluno a construa, com significados a partir de sua prática.

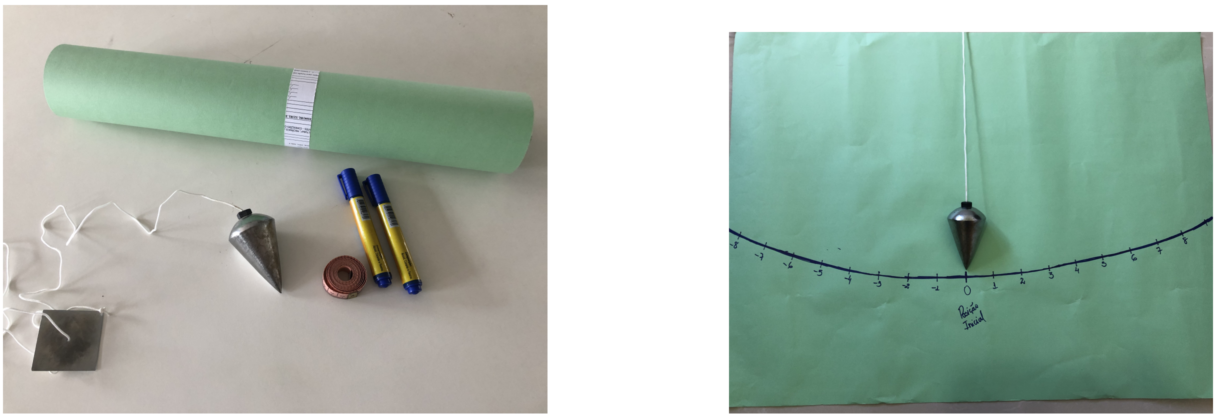
Esta sequência didática é realizada num espaço dinâmico do qual o aluno pode utilizar o celular como uma ferramenta de aprendizagem. Não se trata de uma atividade estagnada com propostas restritas, e sim da aplicação de um fenômeno, cujos dados promovem a formulação de hipóteses, a organização e visualização deste comportamento graficamente e posterior a essas observações a definição de funções trigonométricas. Além do aluno poder realizar um experimento que o possibilite descobrir como as tecnologias e planilhas eletrônicas podem otimizar a compilação de dados.

O ensino de funções trigonométricas contextualizado traz a proposta para a compreensão do modelo matemático obtido a fim de explicar o fenômeno, não apenas com a realização de cálculos mecanicamente. Dá oportunidade para a análise e consistência lógica da situação–problema, a formalização e troca de ideias e reflexões, a construção de conhecimentos matemáticos.

3.2.6 Experimento teste com o pêndulo simples

Neste momento será feita a realização da atividade, com dados obtidos a partir de um experimento teste feito pela autora deste trabalho, utilizando materiais sugeridos conforme a figura 3.4(a). A montagem e execução, desde o desenho da descrição do movimento do pêndulo simples conforme a figura 3.4(b).

A coleta dos dados através da filmagem e a elaboração da planilha eletrônica seguem todos os encaminhamentos da sequência didática, com objetivo de mostrar como a abordagem e manipulação dos dados devem ser discutidas e como podem ser trabalhadas a construção dos conceitos de funções trigonométricas.



(a) Materiais para a montagem do experimento.

(b) Descrição do movimento do pêndulo simples com marcação equidistante.

Figura 3.4: Montagem do experimento.

Para este experimento teste foi tomado o tempo de observação para os 15 primeiros segundos, registrados na planilha eletrônica, conforme a tabela 3.3.

Tabela 3.3: Planilha eletrônica - teste pêndulo simples.

t	**P(t)**
0	5
1	-5
2	5
3	-5
4	3
5	-2
6	0
7	1
8	-3
9	4
10	-5
11	5
12	-5
13	4
14	-4
15	2

Inseridos os dados na planilha eletrônica, neste caso se utilizou o aplicativo Excel™da Microsoft™, foi feito o gráfico de dispersão com os dados das duas colunas, tempo e posição em função de tempo, que resultou na figura 3.5.

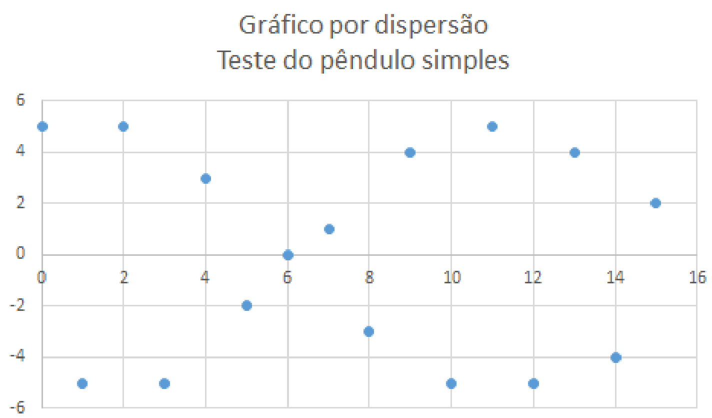


Figura 3.5: Experimento teste do pêndulo simples, posição $P(t)$ em função do tempo t.

No gráfico, o sistema ortogonal OXY, fornece a oscilação da variável $P(t)$ em relação ao eixo vertical y, cujas medidas correspondem a posição em função do tempo, e eixo horizontal x do tempo medido em segundos.

A amplitude, comportamento das oscilações no eixo y, terá um deslocamento máximo do corpo a partir da posição de equilíbrio, e este valor será sempre positivo. Neste teste, a amplitude máxima foi 5.

No eixo x um ciclo é estabelecido a cada vez que a variável sai de uma posição positiva máxima e retorna para esta mesma posição, neste teste foram observados 8 ciclos ao longo do tempo total.

Após a análise dos dados e a conceituação das funções seno e cosseno, foi utilizada a tabela 3.3 acrescentando uma terceira coluna, com os dados de $f(t)$ conforme a equação 3.2 da página 58, ou seja, $f(t) = A \cdot \cos(\omega \cdot t)$ representa o modelo analítico da posição do pêndulo em segundos. Daí, se obtém a tabela apresentada na planilha eletrônica da figura 3.6, cujos cálculos devem ser devidamente inseridos bem como as respectivas variáveis, descritas na sequência.

Para cada linha da coluna C utiliza-se o comando correspondente ao cálculo com a variável tempo, e o valor fixo de ω. Neste momento é que se trabalha com o recurso da planilha eletrônica com a finalidade de otimizar os cálculos.

Agora é a etapa em que se modela a função que representa o experimento, portanto a manipulação dos dados é de extrema importância, a fim de que se compreenda que as propostas de cálculos sugeridas no modelo podem ou não representar o fenômeno, o que depende das escolhas bem feitas.

O valor de ω é dado por: $\omega = 2\pi f$, com $f = \dfrac{n}{\Delta t}$, sendo n o número de ciclos observados no experimento e Δt o intervalo de tempo.

$$\omega = \frac{2\pi \cdot 8}{\Delta t} = \frac{16\pi}{\Delta t} \tag{3.3}$$

Substituindo os valores para $A = 5$ e ω, para a variável de tempo correspondente a t, tem-se a equação de forma geral:

$$f(t) = 5 \cdot \cos(\frac{16\pi}{\Delta t} \cdot t) \tag{3.4}$$

Finalmente, usa-se a equação (3.4) com o valor fixo aproximado de $\pi = 3,14159265358979$ e substituindo o tempo $t = 15$ segundos na equação (3.3), se utiliza a célula $D1$ da planilha do Excel, para armazenar este valor calculado. Na figura 3.6, os valores utilizados para os comandos de produto e divisão, para ω, é o modelo matemático inserido da forma:

$$\omega = 16 * 3,14159265358979/15 = 3,351032 \tag{3.5}$$

A ferramenta de cálculo do Excel compila os cálculos conforme a entrada do modelo matemático, então estabelecidas as variáveis t de tempo, π e ω com valor dado na equação (3.5), se tem:

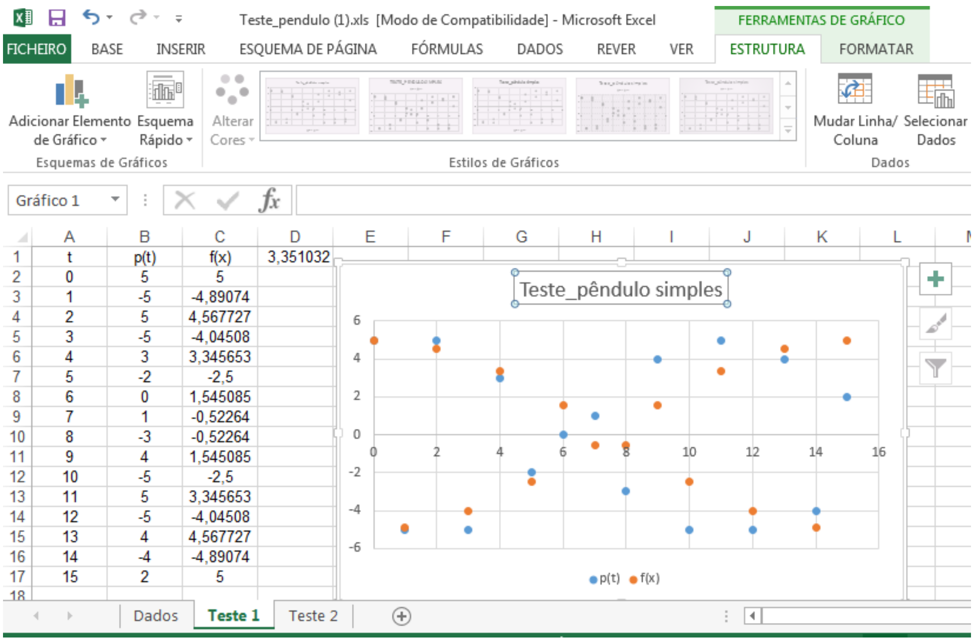
Para o tempo $t = 0$ segundos, na célula $C2$

$C2 = 5 * COS(A2 * \$D\$1) = 5 * COS(0 * 3,351032) = 5 * COS(0) = 5.$

Para o tempo $t = 1$ segundos, na célula $C3$

$C3 = 5 * COS(A3 * \$D\$1) = 5 * COS(1 * 3,351032) = 5 * COS(3,351032) = -4,89074,$

Ao repetir na coluna C o modelo analítico definido, para a compilação dos cálculos, sucessivamente, se tem a coluna C da figura 3.6. Daí, se faz a inserção do gráfico para a opção de dispersão, utilizando as colunas A, B e C para uma comparação entre os dados do experimento prático e o modelo matemático obtido.



	A	B	C	D
1	t	p(t)	f(x)	3,351032
2	0	5	5	
3	1	-5	-4,89074	
4	2	5	4,567727	
5	3	-5	-4,04508	
6	4	3	3,345653	
7	5	-2	-2,5	
8	6	0	1,545085	
9	7	1	-0,52264	
10	8	-3	-0,52264	
11	9	4	1,545085	
12	10	-5	-2,5	
13	11	5	3,345653	
14	12	-5	-4,04508	
15	13	4	4,567727	
16	14	-4	-4,89074	
17	15	2	5	

Figura 3.6: Teste 1 pêndulo simples.

Como a intenção é obter um modelo que melhor represente o experimento, se deve ajustar os parâmetros A e ω, até que possa ser alcançado uma melhor aproximação do modelo com os dados coletados no experimento, uma vez que cada célula da coluna C

contém as informações do modelo matemático.

Para o tempo $t = 14,75$ segundos, ajusta-se um modelo mais plausível, que está representado na figura 3.7. Com a inserção do gráfico do tipo dispersão e os dados das colunas A, B e C se pode observar uma relação mais próxima entre o experimento prático e o modelo matemático.

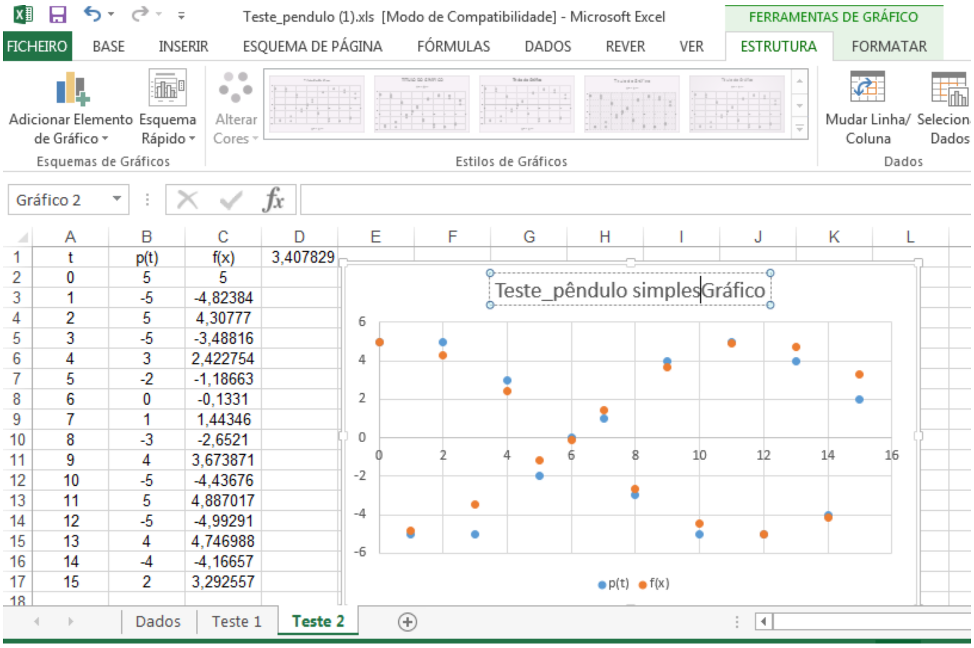


Figura 3.7: Teste 2 pêndulo simples.

O que configura nesta relação entre os dados gráficos é a análise da coerência e a consistência da solução para $f(t)$. O modelo dado na equação 3.4 é definido por uma taxa de variação de uma grandeza angular em radianos por segundo e descreve a oscilação do pêndulo no experimento teste, uma vez que os dados coletados e originados pelos cálculos são muito próximos.

Assim, o conhecimento empírico se formaliza através do experimento, que forneceu dados satisfatórios na construção da função trigonométrica que, por definição, repete o comportamento das variáveis a cada intervalo de tempo, chamada de período da função.

Ao finalizar as discussões e apontamentos, é interessante mostrar que o uso da função seno é possível para demonstrar o modelo analítico do experimento. Porém para que o movimento aconteça a partir da posição inicial, o instante $t = 0$ não pode anular a função, devendo haver uma translação em relação a posição incial. Segue, portanto, que a equação 3.6 pode ser utilizada para modelar o experimento.

$$F(x) = A \cdot \text{sen}(\omega \cdot (\frac{\pi}{2} - t)) \tag{3.6}$$

Considerações finais

Muitas respostas para muitas perguntas é o que se busca enquanto professor. Entre elas, aquelas que certamente se materializam no contexto sociocultural, pela vivência do aluno. Então, dialogar com as possibilidades e propor o olhar, o sentido e a percepção da mudança é um dos instrumentos que deve ser potencializado nas salas de aula. É preciso aprofundar em ações, que integrem o conhecimento na sua pluralidade.

Ao questionar o conhecimento que a Matemática, em específico a trigonometria, promove em sala de aula, é possível notar que a solução de diversos problemas está entrelaçada a uma série de requisitos básicos. Está na visualização de situações nas suas diversas formas de ser, no entendimento e uso da Matemática pelo homem em um contexto histórico. Na literatura encontrada o foco está na ideia de uma busca constante por metodologias que inovem o espaço de ensino.

Para isso, é preciso que o espaço escolar seja dinâmico, que estimule no aluno a curiosidade, a pesquisa e a defesa de suas ideias. Que assuma o papel de protagonista na construção dos conceitos e saberes, crie estratégias para intervir na sua realidade sabendo sua importância no processo.

Os estudantes devem, como aborda o documento Ministério da Educação (2018), utilizar conceitos, procedimentos e estratégias não apenas para resolver problemas, mas também para formulá-los, descrever dados, selecionar modelos matemáticos e desenvolver o pensamento computacional, por meio da utilização de diferentes recursos da área.

Este espaço não apenas transmite conhecimento, D'Ambrosio (1996) afirma que a contextualização se dá em caráter avaliativo, de capacidades e habilidades cognitivas reconhecendo fatos históricos que são construídos ao longo do tempo, que leva a uma posição como parte desta evolução, caracteriza cada indivíduo e suas organizações intelectuais.

É desta forma de ensino e educação que esta proposta se refere enquanto uma perspectiva diferenciada, contextualizada e crítica que se estabelece, propondo através da modelagem matemática estas possíveis contribuições. Não é preciso ir muito longe, os alunos trazem consigo o que está fora da escola, o que está dentro das suas possibilidades, o que lhe atrai e, certamente, aquilo que o desperta.

Assim como a modelagem pode contribuir para o ensino da trigonometria, em uma perspectiva de motivação e análise da realidade, ela pode propor a experimentação de aproximações da realidade, quanto à sua aplicação.

A proposta do experimento prático abre um leque para inúmeras discussões com os alunos, podendo o professor trabalhar com diversas relações da Matemática neste contexto, aplicando a validade das fórmulas analíticas com os dados do experimento. Permitindo, assim, que o aluno se conecte a n-ésimas situações, interprete e assimile o conhecimento produzido através de suas estratégias, com sentido e significado.

Quanto à possibilidade de trabalhar com a Matemática aplicada na Física, Bassanezi (2002) afirma que criam-se condições favoráveis para que os estudantes se sintam motivados pelas aplicações. Portanto, é importante permanecer atuando em sala de aula, de forma que se promova reflexões e discussões críticas a respeito do que se espera ensinar e como a aprendizagem pode ser significativa para o aluno.

Trabalhar com trigonometria, ou qualquer outro conteúdo da Matemática, de forma contextualizada é possibilitar ao aluno uma interrelação com as demais áreas do conhecimento e, embora haja uma sequência de atividades que surpreendam os alunos, o professor como mediador deste processo é o facilitador que vai encaminhar e mediar as propostas e ele é, acima de tudo, co-responsável pelo sucesso da aula, além de capacitar os alunos a organizar sistemática e criticamente as conexões de ideias para a solução de situações–problema.

Espera-se que este trabalho tenha fornecido elementos que suscitem outros questionamentos e ideias para abordagens que trate sobre os problemas aqui elencados. Contribua para as ações de futuros professores e professores que já atuam em sala, na intenção de abrir espaço para outras ações e até mesmo que amplie esta já realizada, buscando compreender o que o ensino de trigonometria pode contribuir também na formação do aluno, em particular, que pensamentos e situações são desenvolvidos com o estudo deste conteúdo. Buscando uma perspectiva em que a modelagem matemática possa ser aplicada no espaço da sala de aula, como uma ferramenta pedagógica capaz de criar dinâmicas e desafios, descobertas e possibilidades num campo mais amplo de saberes.

Para finalizar, registro o privilégio de estender minha capacitação profissional pelo programa da Capes. Enquanto educadora, me fortalece e abre caminhos para aplicar este trabalho em sala de aula, bem como compartilhá-lo com outros professores.

Com o sentimento de provocação à minha prática, buscarei expandir minhas perspectivas quanto à continuidade na pesquisa e busca pela solução dos desafios no ensino da Matemática. Uma busca por novas vivências, descobertas e o que a modelagem contribui neste vasto caminho de possibilidades.

Referências Bibliográficas

Albarello, J. R., Duarte, K. P., e Faoro, V. (2013). Oscilação e velocidade do pêndulo simples na modelagem matemática. *Vivências*, 09(17):83–94.

Alves, G. A. (2017). Modelagem matemática no ensino da trigonometria. Dissertação de Mestrado, UFMA, São Luiz/MA.

Ausubel, D. P. (2003). *Aquisição e retenção do conhecimento: Uma perspectiva cognitiva.* Ed. Plátano, Lisboa, 1a. edição. *apud* Oliveira, C.A.C. (2014). Trigonometria: o radiano e as funções seno, cosseno e tangente. Dissertação de Mestrado, PROFMAT–UFCG, Campina Grande/PB.

Bassanezi, R. C. (2002). *Ensino aprendizagem com modelagem matemática.* Ed. Contexto, S.Paulo.

Bassanezi, R. C. (2012). *Temas & Modelos*, páginas 10–36p. UFABC, Campinas.

Biembengut, M. S. (2009). 30 anos de modelagem matemática na educação brasileira: das propostas primeiras às propostas atuais. *Alexandria–Revista de Educação em Ciência e Tecnologia*, 2(2):7–32.

Biembengut, M. S. (2014). Modelagem matemática & resolução de problemas, projetos e etnomatemática: Pontos confluentes. *Alexandria–Revista de Educação em Ciência e Tecnologia*, 7(2):197–219.

Boyer, C. B. (1974). *História da Matemática.* Edusp, S.Paulo.

Burak, D. (2005). Modelagem matemática: experiências vividas. *Analecta*, 6(2):33–48.

Burak, D. (2010). Modelagem matemática sob um olhar de educação matemática e suas implicações para a construção do conhecimento matemático em sala de aula. *Revista de Modelagem na Educação Matemática*, 1(1):10–27.

Caldeira, A. D. (2009). Modelagem matemática: um outro olhar. *Alexandria–Revista de Educação em Ciência e Tecnologia*, 2(2):33–54.

D'Ambrosio, U. (1996). *Educação matemática: da teoria à prática.* Ed. Papirus, Campinas/SP.

D'Ambrosio, U. (1998). *Etnomatemática: Arte ou técnica de explicar e conhecer.* Ed. Ática, São Paulo. *apud* Biembengut, M. S. (2014). Modelagem Matemática & Resolução de Problemas, Projetos e Etnomatemática: Pontos Confluentes. Alexandria, Revista de Educação em Ciência e Tecnologia. Vol.7. n.2. p.127–219.

D'Ambrosio, U. (2011). *Etnomatemática Elo entre as tradições e a modernidade.* Ed. Autêntica, Belo Horizonte/MG.

Duarte Filho, S. R. A. (2017). Uma abordagem do ensino de funções trigonométricas por meio de atividades interdisciplinares. Dissertação de Mestrado, Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro. Centro de Ciência e Tecnologia- UENF, Campo dos Goytacazes/RJ.

Esquincalha, A. C. (2018). URL: http://www.ufrrj.br/leptrans/arquivos/etnomatematica.pdf. Acesso 10/12/2018.

Eves, H. (2011). *Introdução à História da Matemática.* Ed. UNICAMP, Campinas/SP.

Feijó, R. S. A. A. (2018). Dificuldades e obstáculos no aprendizado de trigonometria: um estudo com alunos do ensino médio do distrito federal. Dissertação de Mestrado, UNB, Brasília/DF.

Geymonat, L. (1997). *Galileu Galilei.* Ed. Nova Fronteira, Rio de Janeiro. *apud* Issa Mendes, G. H. G. (2014). Matematização e ensino de física: uma discussão de noções docentes. Dissertação de Mestrado, Universidade Estadual de Londrina. Centro de Ciências Exatas, Londrina/PR.

Goldfarb, A. M. A. (1989). Ciência e sociedade no século XVII europeu: a formação da cosmologia moderna. *Cad. Cat. Ens. Fís.*, 6(Especial):49–55.

Gonçalves, F. L. (2014). O ensino das razões trigonométricas por meio de material concreto: uma proposta pedagógica. Dissertação de Mestrado, Universidade Estadual do Mato Grosso do Sul, Dourados/MS.

Gonçalves, W. V. (2016). *O transitar entre a matemática do matemático, a matemática da escola e a matemática do Geogebra: um estudo de como professores de matemática lidam com as possibilidades e limitações do Geogebra*. Tese de Doutorado, Universidade Estadual Paulista - Faculdade de Ciências, Bauru/SP.

Iochucki, S. K. P. (2016). Propostas para o ensino da trigonometria: introdução à aproximação de funções periódicas por polinômios trigonométricos. Dissertação de Mestrado, UEPG, Ponta Grossa/PR.

Issa Mendes, G. H. G. (2014). Matematização e ensino de física: uma discussão de noções docentes. Dissertação de Mestrado, Universidade Estadual de Londrina. Centro de Ciências Exatas, Londrina/PR.

Lima, E. L. (2013). *Números e funções reais*. SBM, Rio de Janeiro.

Meyer, J. F. C. A., Caldeira, A. D., e Malheiros, A. P. S. (2011). *Modelagem em Educação Matemática*. Ed. Autêntica, Belo Horizonte.

Ministério da Educação (2018). URL: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/wp-content/up-loads/2018/12/BNCC_19dez2018_site.pdf. Acesso 20 de dezembro de 2018.

Miorim, M. A. (1998). *Introdução à História da Matemática*. Ed. Atual, S.Paulo.

Mol, R. S. (2013). *Introdução à História da Matemática*. Ed. CAED-UFMG, Belo Horizonte/MG.

Mutti, G. S. e Klüber, T. M. (2018). Aspectos que constituem práticas pedagógicas e a formação de professores em modelagem matemática. *Alexandria–Revista de Educação em Ciência e Tecnologia*, 11(2):85–107.

Oliveira, C. A. C. (2014). Trigonometria : o radiano e as funções seno, cosseno e tangente. Dissertação de Mestrado, PROFMAT – UFCG, Campina Grande/PB.

Roque, T. (2012). *História da Matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas*. Ed. Zahar, Rio de Janeiro/RJ.

Saldanha, P. V. A. (2016). Uma análise do uso de planilhas eletrônicas como estratégia no ensino de função afim. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Vale do São Francisco, Juazeiro/BA.

Santos, G. V. H. e Effgen, L. F. (2017). Fenômenos cíclicos - modelagem com funções trigonométricas. Dissertação de Mestrado, Departamento de Matemática–UFPR, Curitiba/PR.

Sebastiani Ferreira, E. (1994). A importância do conhecimento etnomatemático indígena na escola dos não–índios. *Em Aberto*, 14(62):89–95.

Sebastiani Ferreira, E. (2007). Programa de pesquisa científica etnomatemática. *Revista Brasileira de História da Matemática*, Especial(1):273–280.

Sella, A. A. (2016). Modelagem matemática na educação básica. Dissertação de Mestrado, ICET–UFMT, Cuiabá/MT.

Siqueira, A. S. R. B. (2014). Uma proposta didática para o ensino da trigonometria no ensino fundamental. Dissertação de Mestrado, UFAL, Maceió/AL.

Trotta, F., Imenes, L., e Jakubovic, J. (1980). *Matemática aplicada: 1a. série,* 2° *grau.* Ed. Moderna LTDA, S.Paulo/SP.

Young, H. D. e Freddman, R. A. (2003). *Física* I*: termodinâmica e ondas*, páginas 36–71p. Pearson, S. Paulo/SP.

Zulatto, R. B. A. (2002). Professores de matemática que utilizam softwares de geometria dinâmica: suas características e perspectivas. Dissertação de Mestrado, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro/SP.

Apêndice: Material adicional

.

A.1 Pêndulo simples

Galileu Galilei foi quem desenvolveu o estudo da natureza das oscilações e como descoberta referente ao movimento pendular, a sua periodicidade. O movimento envolve basicamente uma grandeza simbolizada por T a qual chama-se período, que corresponde ao intervalo de tempo que o objeto leva para percorrer toda a trajetória, que é retornar a sua posição original de lançamento (Albarello et al., 2013).

Geymonat (1997) afirma que Galileu iniciou seus próprios estudos matemáticos ao observar o isocronismo das oscilações pendulares, em que um período de um pêndulo independe da sua amplitude, para pequenas oscilações apenas (*apud* Issa Mendes, 2014, p.50). Ainda em sua dissertação, Issa Mendes (2014) relata como nos séculos XVII e XVIII essa descoberta foi tão importante para a navegação.

A necessidade da medição de longitude, despertou interesse nos cientistas que poderiam ganhar grandes prêmios para a solução do problema com medições precisas. A autora aborda toda a evolução histórica da matematização do pêndulo e suas demonstrações, descrevendo passagens no tempo e grandes nomes que contribuíram para a construção do relógio do tipo pêndulo.

Um pêndulo simples é um modelo idealizado constituído por um corpo puntiforme suspenso por um fio inextensível de massa desprezível. Quando o corpo puntiforme é puxado lateralmente a partir da sua situação de equilíbrio e libertado a seguir, ele oscila em torno da posição de equilíbrio. Situações como uma criança sentado em um balanço, ou uma bola de demolição presa num gindaste, são exemplos que podem ser consideradas pêndulos simples (Young e Freddman, 2003).

A trajetória do corpo puntiforme (algumas vezes chamado de peso) não é uma linha reta, mas um arco de circunferência de raio L igual ao comprimento do fio, conforme a figura 3.2, página 54. Usando como coordenada a distância x medida ao longo do arco.

Para que a oscilação seja um movimento harmônico simples é necessário que a força restauradora seja diretamente proporcional à distância x ou a θ, pois $x = L\theta$ (Young e Freddman, 2003).

A força restaurada (movimento executado por uma partícula sujeito a uma força) é fornecida pela gravidade; a tensão T atua meramente para fazer o peso puntiforme se deslocar ao longo de um arco. A força restauradora não é proporcional a θ, mas sim a $\operatorname{sen}\theta$, desta forma quando o ângulo é pequeno, $\operatorname{sen}\theta$ é aproximadamente igual a θ em radianos. Por exemplo, quando $\theta = 0,1$radiano, $\operatorname{sen}\theta = 0,09998$.

A força restauradora é proporcional à coordenada para pequenos deslocamentos e a constante da força é dada por $k = \dfrac{mg}{L}$ (Young e Freddman, 2003).

A frequência angular ω de um pêndulo simples com amplitude pequena é dada por $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}} = \sqrt{\dfrac{\frac{mg}{L}}{m}} = \sqrt{\dfrac{g}{L}}$

As relações não envolvem a massa da partícula, desta forma concluí-se que o período de um pêndulo simples para um dado valor de g, é determinado exclusivamente pelo comprimento L do fio.

A.2 Propriedades trigonométricas

A.1 Seno e cosseno da soma e da diferença

Para obter as fórmulas que relacionam os valores de $\cos(\alpha + \beta)$ e $\operatorname{sen}(\alpha + \beta)$, será usada a figura A.1 (Trotta et al., 1980), em que aparecem os triângulos retângulos que tenham ângulos agudos iguais a α e β e $\alpha + \beta$

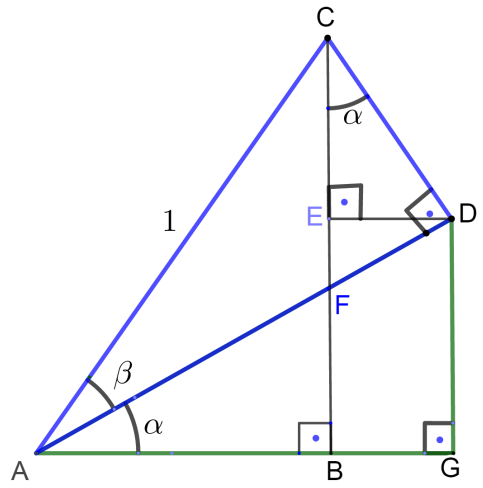


Figura A.1: Seno e cosseno da soma.
Fonte: Trota et al.,1980.

Observando os triângulos $B\hat{A}F$ e $D\hat{C}F$, note que $G\hat{A}D = \alpha$, então $D\hat{C}E = \alpha$, e no triângulo ABC se tem que:

$$\cos\ (\alpha + \beta) = \frac{AB}{1} = AB = \ AG\ -\ BG \tag{A.1}$$

No triângulo ADG $\cos\ \alpha = \dfrac{AG}{AD} \therefore AG = \ AD \cdot \cos\ \alpha$ e no triângulo ADC: $\cos\ \beta = \dfrac{AD}{1} = \ AD$ Substituindo este valor de AD em $AG = \ AD \cdot \cos\ \alpha$, tem-se:

$$AG = \cos\ \alpha \cdot \cos\ \beta \tag{A.2}$$

Note que $BG \ = \ DE$ e no triângulo CDE: $\text{sen}\ \alpha = \dfrac{DE}{CD} \therefore BG \ = \ DE = \ CD \cdot \text{sen}\ \alpha$; no triângulo ACD: $\text{sen}\ \beta = \dfrac{CD}{1} \ = \ CD$ e, substituindo este valor de CD em $BG \ = CD \cdot \text{sen}\ \alpha$ tem-se:

$$BG = \text{sen}\ \alpha \cdot \text{sen}\ \beta \tag{A.3}$$

Finalmente, substituindo (A.2) e (A.3) em (A.1) vem:

Propriedade 3.1. *Cosseno da soma*

$$\cos\ (\alpha + \beta) = \cos\alpha \ \cdot \ \cos\ \beta - \ \text{sen}\alpha \ \cdot \ \text{sen}\ \beta \tag{A.4}$$

Ainda, considerando o triângulo ABC da figura A.1, se pode verificar a demons-

tração para o seno da soma. No triângulo ABC se tem:

$$\text{sen } (\alpha+\beta) = \frac{BC}{1} = BC = BE + CE \tag{A.5}$$

No triângulo ADG: $\text{sen } \alpha = \dfrac{DG}{AD} \therefore DG = \text{sen } \alpha \cdot AD$ *e no triângulo ADC:*
$\text{sen } \beta = \dfrac{CD}{1} = CD$ *e* $\cos\ \beta = \dfrac{AD}{1} = AD$.

Note que $BE = DG$, segue que $DG = BE =$ sen $\alpha \cdot AD$, como $AD = \cos\ \beta$, substituindo este valor de AD em $BE =$ sen $\alpha \cdot AD$, tem-se

$$BE = \text{sen } \alpha \cdot \cos\beta \tag{A.6}$$

No triângulo CDE: $\cos\ \alpha = \dfrac{CE}{CD} \therefore CE = CD \cdot \cos\ \alpha$*; e subsituindo o valor de $CD =$ sen β em $CE = CD \cdot \cos\ \alpha$ daí se chega na equação*

$$CE = \text{sen } \beta \cdot \cos\ \alpha \tag{A.7}$$

Finalmente, substituindo (A.6) e (A.7) em (A.5) vem:

Propriedade 3.2. *Seno da soma*

$$\text{sen } (\alpha+\beta) = \text{sen}\alpha \cdot \cos\ \beta + \text{sen } \beta \cdot \cos\ \alpha \tag{A.8}$$

Note ainda que no triângulo ABC da figura A.1, e pela equação (A.1), tomando $-\beta$ em vez de β, como $\cos(-\beta) = \cos\beta$ e $\text{sen}(-\beta) = -\text{sen}\beta$, e substituindo-os em

$\cos\ (\alpha+\beta) = \cos\alpha \cdot \cos\ \beta - \text{sen}\alpha \cdot \text{sen } \beta$,

se obtém:

Propriedade 3.3. *Cosseno da diferença*

$$\cos\ (\alpha-\beta) = \cos\alpha \cdot \cos\ \beta + \text{sen}\alpha \cdot \text{sen } \beta \tag{A.9}$$

Como demonstrado o seno da soma é dado por: $\text{sen } (\alpha+\beta) = \text{sen}\alpha \cdot \cos\ \beta + \text{sen } \beta \cdot \cos\ \alpha$,

Então, tomando $-\beta$ em vez de β, resulta imediatamente que

Propriedade 3.4. *Seno da diferença*

$$\text{sen }(\alpha - \beta) = \text{sen}\alpha \ \cdot \ \cos \ \beta - \ \text{sen } \beta \ \cdot \ \cos \ \alpha \tag{A.10}$$

A partir das relações obtidas acima, tomando $\alpha = \beta$ se obtém:

Propriedade 3.5. *Cosseno do arco duplo:*

$$\cos \ (2\alpha) = \cos^2 \alpha - \ \text{sen}^2\alpha \tag{A.11}$$

Propriedade 3.6. *Seno do arco duplo:*

$$\text{sen } (2\alpha) = 2 \ \text{sen } \alpha \ \cdot \ \cos \ \alpha \tag{A.12}$$

A.2 A circunferência trigonométrica

A trigonometria criada para resolver problemas de distâncias inacessíveis, hoje encontra muitas outras aplicações, de forma que suas ideias iniciais evoluíram para a superação de problemas e a criação de condições necessárias para a solução de situações desafiadoras.

Segundo Trotta et al. (1980), a necessidade de ampliar as noções de seno, cosseno e tangente de um ângulo, viu-se a necessidade de libertar o triângulo retângulo, surgindo assim um substituto à ele, o quadrante trigonométrico.

No plano cartesiano OXY, considere a circunferência de centro $(0, 0)$ e raio um, dos quais a circunferência fica dividida em quatro partes iguais chamadas quadrantes. Seja P um ponto da circunferência, neste caso, localizado no primeiro quadrante e T a reta tangente à circunferência no ponto $(1, 0)$.

Girando P no sentido anti-horário serão descritas as ideias em que os valores de seno, cosseno e tangente do ângulo α são determinados de acordo com o movimento, o qual pode ser positivo ou negativo. Conforme a figura A.2 (Trotta et al., 1980), é possível verificar enquanto P percorre a circunferência e T percorre a reta tangente.

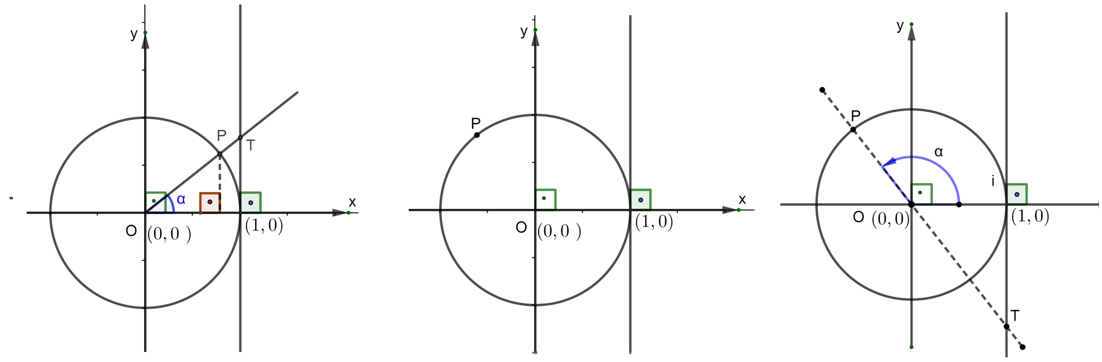


Figura A.2: Tangente na circunferência trigonométrica.
Fonte: Trotta et al. (1980).

Assim, estabelecendo uma relação entre as razões trigonométricas e o ponto P na circunferência se chega às definições:

Definição 3.1. *Dado um ângulo α, tal que $0° \leq \alpha \leq 360°$, é chamado de $\cos\alpha$ à abcissa do ponto P de intersecção da circunferência trigonométrica com a semireta onde repousará a parte positiva do eixo das abcissas, depois de descrever o ângulo dado α no sentido anti-horário. Afirmando que o sentido positivo é o anti-horário e o sentido negativo é o horário (Trotta et al., 1980).*

Definição 3.2. *Será chamado de $\text{sen}\alpha$ a ordenada de P, ou seja, as coordenadas desse ponto são, de acordo com esta definição, $P(\cos\alpha, \text{sen}\alpha)$ (Trotta et al., 1980).*

Definição 3.3. *Dado um ângulo α, tal que $0° \leq \alpha \leq 360°$, porém diferentes de $90°$ e $270°$, será chamada de $\tan\alpha$ a ordenada do ponto T de intersecção da reta tangente à circunferência trigonométrica no ponto $(1,0)$, com a semireta onde repousará a parte positiva do eixo das abcissas, depois de descrever o ângulo dado α no sentido anti-horário. Assim, as coordenadas do ponto são $T = (1, \tan\alpha)$ (Trotta et al., 1980).*

A.3 Lei do seno e lei do cosseno

Com a ampliação das ideias de seno, cosseno e tangente na circunferência trigonométrica é possível estabelecer algumas relações, que possibilitam trabalhar com triângulos quaisquer, bastando apenas conhecer alguns dos elementos deste, é possível utilizar estes elementos e partir para noções já conhecidas, a exemplo $\cos 90° = 0$ e que $\cos(180 - A) = -\cos A$ quando A for obtuso.

Qualquer que seja o triângulo ABC, se tem

A.1 Lei dos Cossenos

:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A \tag{A.13}$$

A.2 Lei dos senos

:

$$\frac{a}{\text{sen}A} = \frac{b}{\text{sen}B} = \frac{c}{\text{sen}C} \tag{A.14}$$

A.4 Relação fundamental da trigonometria

A equação da circunferência de centro $(0,0)$ e raio 1 é escrita da forma $x^2+y^2=1$. Como as coordenadas do ponto que percorre a circunferência de raio um e centro $(0,0)$ são cosseno e seno, $P = (\cos\alpha, \text{sen}\alpha)$ então se pode escrever $\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, para todo α tal que $0 \leq \alpha \leq 2\pi$.

A.5 Tangente da soma e da diferença

Considerando todos os ângulos no intervalo $[0, 2\pi]$ e cossenos não nulos, então:

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 \ - \ \tan \ \alpha \ \tan \ \beta} \tag{A.15}$$

$$\tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 \ + \ \tan \ \alpha \ \tan \ \beta} \tag{A.16}$$