



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE  
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE  
NACIONAL**

**GILBERLANIA PEREIRA SANTOS SILVA**

**ENSINO DE GEOMETRIA ESPACIAL:  
UMA ABORDAGEM INVESTIGATIVA**

**ITABAIANA (SE)  
2019**

GILBERLANIA PEREIRA SANTOS SILVA

**ENSINO DE GEOMETRIA ESPACIAL:  
UMA ABORDAGEM INVESTIGATIVA**

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Federal de Sergipe como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. MSc. Wagner Ferreira Santos

ITABAIANA (SE)

2019

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA PROFESSOR ALBERTO CARVALHO  
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE

S586e Silva, Gilberlania Pereira Santos  
Ensino de geometria espacial: uma abordagem investigativa  
/ Gilberlania Pereira Santos Silva; orientador: Wagner Ferreira Santos  
. – Itabaiana, 2019.  
73 f.; il.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade  
Federal de Sergipe, 2019.

1. Matemática. 2. Geometria estudo e ensino. 3. Geometria espacial.  
I. Wagner Ferreira Santos. II. Título.

CDU 516.3:37



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE  
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

---

*Dissertação submetida à aprovação pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Sergipe, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.*

## **Ensino De Geometria Espacial: Uma Abordagem Investigativa**

*por*

*Gilberlania Pereira Santos Silva*

Aprovada pela banca examinadora:

*Wagner Ferreira Santos*

Prof. Wagner Ferreira Santos - UFS  
Orientador

*Mateus Alegri*

Prof. Mateus Alegri - UFS  
Primeiro Examinador

*Tereza Cristina Etcheverria*

Profa. Teresa Cristina Etcheverria - UFS  
Segundo Examinador

São Cristóvão, 15 de Março de 2019

## AGRADECIMENTOS

Um dos significados da palavra agradecer é reconhecer e eu reconheço o quanto sou dependente de Deus e que sem Ele nada sou. Agradeço pelo cuidado que Ele tem comigo e por me permitir cumprir mais uma etapa em minha vida.

E que etapa! Deus demonstrou este cuidado ao colocar pessoas maravilhosas em minha vida, pessoas que sempre estiveram ao meu lado e que de maneira direta ou indireta contribuíram para que este trabalho fosse feito. À estas pessoas, muito obrigada!

Obrigada, meu orientador, professor Wagner pela paciência e empenho com que me orientou neste trabalho.

Obrigada, Samuel, meu esposo e melhor amigo por sempre me incentivar, me apoiar e estar ao meu lado em todos os momentos.

Obrigada, Professor Mateus e Professora Teresa por aceitarem compor a banca e contribuírem de maneira significativa avaliando este trabalho.

Obrigada, Eliana e Renata por tornarem meus dias na UFS menos tensos e por todo companheirismo.

Obrigada, queridos professores do PROFMAT por compartilharem o conhecimento matemático comigo.

Obrigada, pai e mãe por sempre acreditarem em mim e por todo incondicional apoio e amor.

Obrigada, Arlúcio e Rebeca por serem tão atenciosos e cuidadosos.

Obrigada, tia-mãe Edma e a Zefa por sempre me incentivarem e mostrarem que estudar é o melhor caminho.

E por último, mas não menos importante, agradeço aos meus alunos dos 3º anos do IFAL-Piranhas por colaborarem com minha pesquisa.

## RESUMO

O ensino de geometria espacial, na maioria das vezes, é visto como aplicação de fórmulas de volumes de sólidos e cálculo de áreas de superfícies, um processo em que os alunos exercem um papel passivo e o professor assume o papel de expositor de conteúdo. Acreditando que o processo ensino-aprendizagem de geometria tenha maior êxito quando o aluno assume um papel ativo, o conteúdo de geometria espacial foi trabalhado em duas turmas de terceiro ano do ensino médio utilizando uma abordagem de investigação matemática. Para tanto, apoiado nas ideias de Ponte, Oliveira e Brocado (2009), foram analisadas as atividades desenvolvidas em quatorze dias de aula. A fim de verificar quais as vantagens e desvantagens de se trabalhar com esta abordagem ativa. Com isto, observou-se que vários são os desafios encontrados pelo professor: melhor preparação e domínio do conteúdo e das metodologias a serem usadas, maior consumo de tempo para preparação e execução das aulas, ter um olhar mais atento às dificuldades dos alunos, entre outros. Observou-se também que a investigação permite que o professor avalie continuamente seus alunos e detecte, de maneira mais específica, as dificuldades individuais destes. Além disso, proporciona aos discentes uma experiência matemática legítima na qual eles constroem o conhecimento matemático enquanto desenvolvem outras habilidades como trabalhar em grupo e expressar-se matematicamente.

**Palavras-chave:** Investigação Matemática. Geometria Espacial. Ensino-aprendizagem.

## ABSTRAT

The teaching of spatial geometry is most often seen as applying solids formulas and calculating surface areas, a process in which students play a passive role and the teacher assumes the role of content exhibitor. Believing that the teaching-learning process of geometry is more successful when the student assumes an active role, the spatial geometry content was worked in two classes of third year of high school using a mathematical research approach. To do so, based on the ideas of Ponte, Oliveira and Brocado (2009), the activities developed in fourteen days of classes were analyzed. In order to check the advantages and disadvantages of working with this active approach. With this, it was observed that several challenges are encountered by the teacher: better preparation and mastery of the content and methodologies to be used, greater time consumption for preparation and execution of the classes, a closer look at the difficulties of the students, between others. It was also observed that research allows the teacher to continually evaluate his students and to detect, in a more specific way, the individual difficulties of these students. In addition, it provides learners with a legitimate mathematical experience in which they construct mathematical knowledge while developing other skills such as working in groups and expressing themselves mathematically.

**Keywords:** Mathematical Research. Geometry. Teaching-learning.

## LISTA DE FIGURAS

|   |    |
|---|----|
| Figura 2. 1- Poliedro e corpo redondo. ....   | 16 |
| Figura 2. 2-Elementos de um poliedro .....  | 16 |
| Figura 2. 3- Prisma .....   | 17 |
| Figura 2. 4- Prismas .....  | 18 |
| Figura 2. 5- Paralelepípedos .....  | 18 |
| Figura 2. 6- Caixa de sabão em pó OMO .....   | 19 |
| Figura 2. 7- Modelagem matemática da caixa de sabão em pó OMO .....                     | 19 |
| Figura 2. 8- Planificação de um paralelepípedo de base retangular .....                 | 20 |
| Figura 2. 9- Prismas e suas planificações .....   | 20 |
| Figura 2. 10- Cubo unitário e paralelepípedo .....                                      | 21 |
| Figura 2. 11- Volume de um prisma .....   | 23 |
| Figura 2. 12- Pirâmide .....  | 23 |
| Figura 2. 13- Pirâmides .....   | 24 |
| Figura 2. 14- Planificações de pirâmides .....  | 24 |
| Figura 2. 15- Proporção entre áreas e entre alturas de uma pirâmide .....               | 25 |
| Figura 2. 16- Prisma triangular .....   | 26 |
| Figura 2. 17- Decomposição de um prisma triangular em três tetraedros congruentes ..... | 26 |
| Figura 2. 18- Volume de um cilindro .....   | 29 |
| Figura 2. 19- Cilindro de revolução .....   | 29 |
| Figura 2. 20- Planificação de um cilindro .....   | 30 |
| Figura 2. 21- Cone .....  | 30 |
| Figura 2. 22- Planificação de um cone reto .....  | 31 |
| Figura 2. 23- Cone de revolução .....   | 32 |
| Figura 2. 24- Esfera .....  | 32 |
| Figura 2. 25- Volume de uma esfera .....  | 33 |
| Figura 3. 1- Resolução do grupo H .....   | 38 |
| Figura 3. 2- Resolução do grupo G .....   | 38 |
| Figura 3. 3- Situação 1 da atividade investigativa 1 .....                              | 43 |
| Figura 3. 4- Resolução do grupo G .....   | 44 |
| Figura 3. 5- Resolução do grupo H .....   | 44 |
| Figura 3. 6- Resolução do grupo B .....   | 44 |
| Figura 3. 7- Resolução do grupo H .....   | 44 |
| Figura 3. 8- Reconstrução de uma resolução do grupo H .....                             | 45 |



|   |    |
|---|----|
| Figura 3. 9- Situação 2 da atividade investigativa 1 .....                | 46 |
| Figura 3. 10- Resolução do grupo H .....                                  | 46 |
| Figura 3. 11- Resolução do grupo A .....                                  | 48 |
| Figura 3. 12- Resolução do grupo C .....                                  | 48 |
| Figura 3. 13- Resolução do grupo D .....                                  | 48 |
| Figura 3. 14- Resolução do grupo F .....                                  | 49 |
| Figura 3. 15- Aparelho adaptado para trabalhar sólidos de revolução ..... | 51 |
| Figura 3. 16- Situação da atividade investigativa 4 .....                 | 52 |
| Figura 3. 17- Resolução do grupo B .....                                  | 54 |
| Figura 3. 18- Resolução do grupo E .....                                  | 54 |
| Figura 3. 19- Resolução do grupo F .....                                  | 55 |
| Figura 3. 20- Resolução do grupo H .....                                  | 55 |

## SUMÁRIO

|   |           |
|---|-----------|
| <b>INTRODUÇÃO .....</b>   | <b>11</b> |
| <b>CAPÍTULO 1: INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA E A GEOMETRIA ESPACIAL....</b> | <b>12</b> |
| <b>CAPÍTULO 2: FUNDAMENTAÇÃO MATEMÁTICA .....</b>                     | <b>16</b> |
| Prismas e Pirâmides .....   | 17        |
| Prisma.....   | 17        |
| Pirâmide .....  | 23        |
| Corpos redondos .....   | 28        |
| Cilindro .....  | 28        |
| Cone .....  | 30        |
| Esfera.....   | 32        |
| <b>CAPÍTULO 3: RELATO REFLEXIVO DA EXPERIÊNCIA DE ENSINO .....</b>    | <b>35</b> |
| Dia 1 .....   | 36        |
| Dia 2.....  | 39        |
| Dia 3.....  | 40        |
| Dia 4.....  | 41        |
| Dias 5 e 6 .....  | 42        |
| Dia 7.....  | 47        |
| Dias 8, 9 e 10 .....  | 49        |
| Dia 11.....   | 51        |
| Dias 12 e 13 .....  | 51        |
| Dia 14.....   | 57        |
| <b>CONSIDERAÇÕES FINAIS.....</b>                                      | <b>58</b> |
| <b>REFERÊNCIAS .....</b>  | <b>60</b> |
| <b>APÊNDICE</b>   |           |

## INTRODUÇÃO

É comum que o ensino de geometria espacial se resuma à aplicação de um conjunto de fórmulas prontas em problemas diretos como: calcule a área de, calcule o volume de, e assim por diante. Desta maneira, o ensino de geometria não oferece elementos motivadores e transmite para o aluno a compreensão de aprender por aprender. Neste trabalho apresento uma proposta de ensino de geometria espacial por meio da investigação matemática, por considerar que ao assumir o papel ativo no processo de ensino aprendizagem o discente faz reflexões próprias e tira suas conclusões, compreendendo, desta forma, que a matemática é uma ciência em construção e que aprender geometria vai além de decorar fórmulas prontas.

Esta pesquisa foi desenvolvida no Instituto Federal de Alagoas - Campus Piranhas, com objetivo de analisar vantagens e desvantagens no uso dessa abordagem ativa no processo ensino-aprendizagem. As atividades foram aplicadas em duas turmas do terceiro ano do ensino médio para alcançar um leque maior de possibilidades.

Para entender melhor o que significa e como surgiu a investigação matemática, uma nova tendência na Educação Matemática, o capítulo 1 apresenta um breve relato histórico da Educação Matemática no Brasil e uma discussão sobre investigação matemática, no entendimento do autor português João Pedro da Ponte e suas colegas Joana Brocardo e Hélia Oliveira.

Já no capítulo 2, é feita uma abordagem do conteúdo de geometria espacial, seguindo as seguintes referências: Dante (2014), Dolce e Pompeo (1993) e Lima *et. al.* (2006).

O núcleo dessa dissertação é o capítulo 3, que apresenta o relato de experiência dos 14 dias de aulas que totalizaram 21 horas/aula de ensino de geometria espacial. Nesta descrição são destacados pontos considerados relevantes para esta pesquisa e discutidas quatro atividades investigativas.

No final, são feitas algumas considerações e reflexões ressaltando algumas vantagens e desvantagens do uso da investigação matemática e mostrando o potencial dessa metodologia para tornar ativa a aprendizagem de conteúdos matemáticos.

## CAPÍTULO 1

### INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA E O ENSINO DE GEOMETRIA

De acordo com Santos e Santos (2011), em meados da década de 1960, chegou ao Brasil o Movimento da Matemática Moderna que propôs reescrever toda a matemática à luz da Teoria dos Conjuntos e das Estruturas Algébricas. Com esta nova proposta de reestruturação curricular, o ensino da matemática sofreu alguns impactos negativos.

Assim foi o caso do ensino de geometria, um dos ramos mais antigos da matemática e presente em inúmeras situações na nossa vida (natureza, construções, utensílios e etc.). Segundo Lorenzato (1995),

O movimento da Matemática Moderna também tem sua parcela de contribuição no atual caos do ensino da Geometria: antes de sua chegada ao Brasil, nosso ensino geométrico era marcadamente lógico-dedutivo, com demonstrações, e nossos alunos o detestavam. A proposta da Matemática Moderna de algebrizar a Geometria não vingou no Brasil, mas conseguiu eliminar o modelo anterior, criando assim uma lacuna nas nossas práticas pedagógicas, que perdura até hoje. (LORENZATO, 1995, p.4)

Com a finalidade de sanar os problemas advindos deste movimento, surgiu na década de 1980 o movimento da Educação Matemática, defendendo o uso de algumas metodologias de ensino como: resolução de problemas, modelagem matemática, história da matemática, novas tecnologias, jogos e etnomatemática. Sob a justificativa de melhor eficácia no processo de ensino-aprendizagem, uma vez que o aluno passa a ser o protagonista do saber e o professor assumirá o papel de orientador ou mediador, não mais de “total detentor do saber”, este movimento ganhou forças de tal forma que tem gerado diversos estudos na área de ensino de matemática.

É nessa linha que os Parâmetros Curriculares Nacionais destacam a importância atribuída à geometria também como ferramenta para outras áreas do conhecimento.

O aluno desenvolve um tipo especial de pensamento que lhe permite compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo em que vive. [...] O trabalho com noções geométricas contribui para a aprendizagem de números e medidas, pois estimula a criança a observar, perceber semelhanças e diferenças, identificar regularidades e vice-versa. Além disso, se esse trabalho for feito a partir da exploração dos objetos do mundo físico, de obras de arte, pinturas, desenhos, esculturas e artesanato, ele permitirá ao aluno estabelecer conexões entre a Matemática e outras áreas do conhecimento (BRASIL, 1997, p. 39).

Porém, até o final do século XX, verificava-se que as pesquisas na área de geometria eram poucas. Clemente *et. al.*(2015) diz que “o ensino e a aprendizagem da geometria por um longo tempo ficou em segundo plano nos currículos de matemática das escolas brasileiras, estando ausente ou quase ausente”, mas que, nos últimos anos nota-se que tem havido uma crescente preocupação com o mesmo. Ao analisar<sup>1</sup> periódicos da área de Educação Matemática (Bolema, Gepem e Zetetiké), Clemente *et. al.* (2015) constataram que a partir do ano de 2010 houve um aumento considerado de trabalhos publicados nesta área. No entanto, segundo os autores, ainda existem lacunas a serem preenchidas e problemáticas a serem investigadas e discutidas.

Então, o que pode ser feito para melhoria do processo de ensino aprendizagem em geometria? Uma tendência que surgiu com a Educação Matemática foi o trabalho com atividades exploratórias, também conhecidas por atividades investigativas. Tais atividades, de acordo com Ponte, Brocado e Oliveira (2009), podem contribuir de modo significativo para a aprendizagem do aluno, bem como desenvolver o gosto pela disciplina de matemática. Já que, “o envolvimento ativo do aluno é uma condição fundamental da aprendizagem. O aluno aprende quando mobiliza os seus recursos cognitivos e afetivos com vista a atingir um objetivo.” (PONTE; BROCADO; OLIVEIRA, 2009, p. 23)

Mas o que significa investigar em matemática? Como se dá o processo investigativo? Segundo o dicionário Aurélio, investigar significa: “seguir os vestígios, indagar; pesquisar”. Não muito diferente, para os matemáticos “Investigar é descobrir relações entre objetos matemáticos conhecidos ou desconhecidos, procurando identificar as respectivas propriedades” (PONTE; BROCADO; OLIVEIRA, 2009, p. 13)

Para Ponte, Brocado e Oliveira (2009), investigar não é necessariamente lidar com problemas de grande dificuldade, e sim trabalhar a partir de questões que nos confrontem, que inicialmente se apresentem de maneira confusa, mas que se tornem claras à medida que as exploramos e estudamos de modo organizado.

Pensando desta forma, vemos que há uma semelhança entre resolução de problemas e investigação matemática. Mas investigar em matemática vai além da resolução de um problema, pois um problema pode até não ter solução, porém no processo da investigação, podem ser

---

<sup>1</sup> Esta análise é uma proposta do Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática- GREPEM- da Universidade Federal de Juiz de Fora. O grupo desenvolve uma pesquisa documental a partir de artigos que tratam da temática geometria, publicados em dez periódicos da área de Educação Matemática.

feitas descobertas mais ou tão importantes quanto a solução, de maneira que valorizam o trabalho feito. Menezes (2016), diz ainda que:

As atividades investigativas se diferenciam da resolução de problemas no que diz respeito ao seu caráter aberto, na resolução de problemas o aluno precisa chegar em um resultado específico, já nas atividades de investigação os alunos além de chegarem a resultados que nem sempre são pré-determinados, podem também criar outras questões. (MENEZES, 2016, p.12)

O processo investigativo se dá em quatro principais momentos:

O primeiro abrange o reconhecimento da situação, a sua exploração preliminar e a reformulação de questões. O segundo momento refere-se ao processo de formulação de conjecturas. O terceiro inclui a realização de testes e o eventual refinamento das conjecturas. E, finalmente, o último diz respeito a argumentação, à demonstração e a avaliação do trabalho realizado (PONTE; BROCADO; OLIVEIRA, 2009, p.20)

Os autores defendem que, ao passar por estes quatro momentos o aluno constrói um conhecimento, ele “faz” matemática.

O conceito de investigação matemática, como atividade de ensino-aprendizagem, ajuda a trazer para a sala de aula o espírito da atividade matemática genuína, constituindo, por isso, uma poderosa metáfora educativa. O aluno é chamado a agir como um matemático, não só na formulação de questões e conjecturas e na realização de provas e refutações, mas também na apresentação de resultados e na discussão e argumentação com os seus colegas e professor. (PONTE; BROCADO; OLIVEIRA, 2009, p.23)

Mas como deve ser uma aula de investigação? Qual o papel do professor? Qual o papel do aluno? É importante frisar que numa aula com atividade investigativa o professor desempenha um papel determinante desde a elaboração da atividade à culminância da mesma. Durante o procedimento, ele precisa estar atento ao processo de formulação e teste de conjecturas, deve instigar os alunos, levantando questionamentos a todo tempo, fazendo-os refletir e jamais dá-lhes respostas e, ainda, pode se deparar com indagações e percursos não previstos por ele. Desta forma, podemos resumir que o papel do professor é de mediador, de regulador da atividade, de orientador.

No primeiro momento, é importante que o docente garanta que os alunos entendam o objetivo da tarefa. Esta pode ser fornecida escrita ou de maneira oral. E no caso de escrita, o professor pode ler junto com os alunos, mas deverá tomar cuidado para não os condicionar quanto à maneira de explorar o problema. A atividade pode ser feita individualmente, porém é interessante que seja feita em grupos para que eles compartilhem e discutam suas estratégias.

Após discutidas e registradas as ideias nos grupos, a atividade é concluída com a partilha de conhecimentos entre todos os alunos da turma. Neste momento, cada grupo expõe e defende seus resultados. É interessante que o professor conduza este momento para que gerem mais

discussões que enriqueçam a atividade investigativa. Segundo Ponte, Brocado e Oliveira (2009), a fase da discussão final é

[...]fundamental para que os alunos, por um lado, ganhem um entendimento mais rico do que significa investigar e, por outro, desenvolvam a capacidade de comunicar matematicamente e de refletir sobre o seu trabalho e o seu poder de argumentação. Podemos mesmo afirmar que, sem a discussão final, se corre o risco de perder o sentido da investigação. (PONTE; BROCADO; OLIVEIRA, 2009, p.41)

Diante do exposto, ressalta-se a importância de se trabalhar com atividades investigativas em sala de aula pois, a partir do momento em que o aluno assume um papel ativo na construção do conhecimento, a matemática torna-se mais significativa e o processo ensino-aprendizagem atinge resultados positivos. Dessa forma, infere-se que a investigação geométrica pode ser um bom caminho para melhoria do ensino-aprendizagem de matemática.

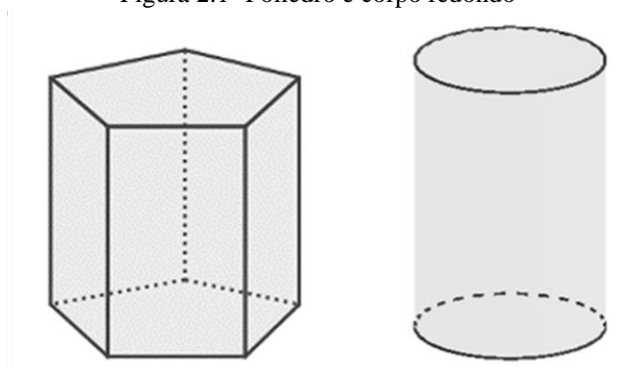
## CAPÍTULO 2

### FUNDAMENTAÇÃO MATEMÁTICA

Estamos rodeados por objetos que têm três dimensões: largura, altura e profundidade. O ramo da matemática que estuda estas três dimensões é a Geometria Espacial. Nesta geometria destaca-se o estudo de dois tipos especiais de sólidos geométricos: poliedros e corpos redondos.

Qual a principal diferença entre eles? Os poliedros são formados por uma reunião finita de regiões poligonais planas chamadas de **faces** e a região do espaço limitada por elas. Já os corpos redondos possuem pelo menos uma superfície curva. Por exemplo, na figura a seguir temos um poliedro e um corpo redondo, respectivamente:

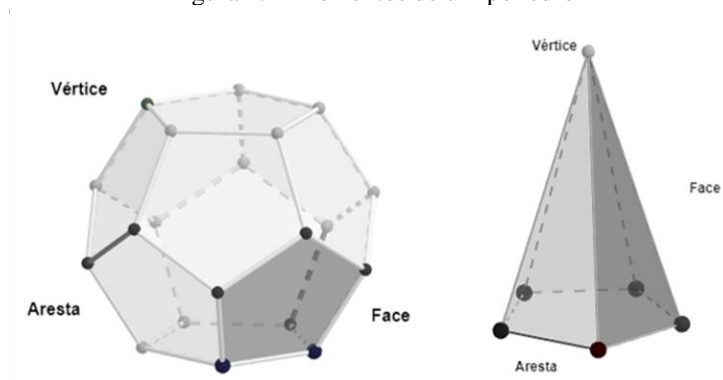
Figura 2.1- Poliedro e corpo redondo



Fonte: acervo da autora

Cada lado de uma região poligonal comum a exatamente duas faces é chamado de **aresta** do poliedro e cada vértice de uma face é um **vértice** do poliedro.

Figura 2. 2-Elementos de um poliedro



Fonte: acervo da autora

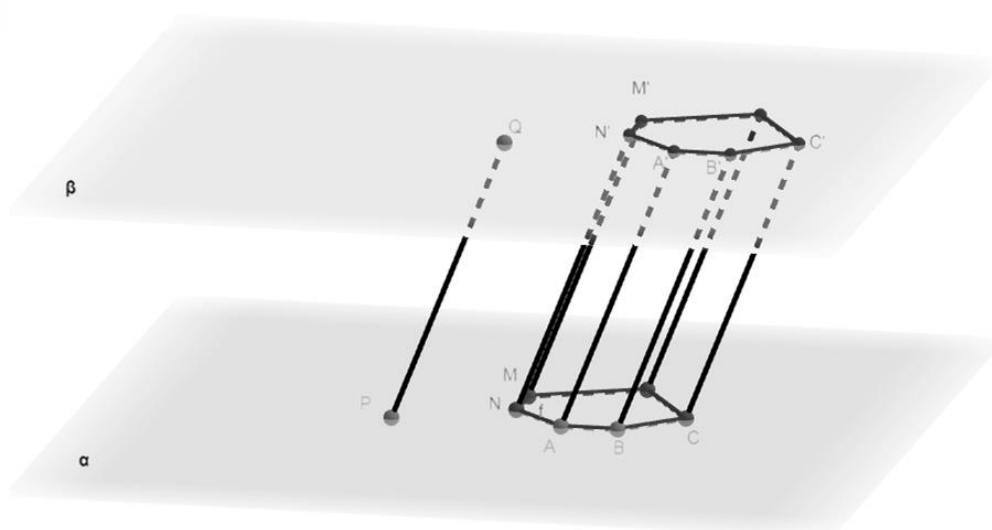


Neste trabalho abordaremos prismas, pirâmides, cilindros, cones e esferas. Os dois primeiros como exemplos de poliedros e os três últimos como exemplos de corpos redondos.

### Prismas e Pirâmides

**Definição:** Consideramos um polígono convexo  $ABCD\dots MN$  situado num plano  $\alpha$  e um segmento de reta  $\overline{PQ}$ , cuja reta suporte intercepta o plano  $\alpha$ . Chama-se **prisma** (ou prisma convexo) a reunião de todos os segmentos congruentes e paralelos a  $\overline{PQ}$ , com uma extremidade nos pontos da região poligonal limitada por  $ABCD\dots MN$  e situados num mesmo semi-espaço dos determinados por  $\alpha$ . Observe que as extremidades dos segmentos são pontos dos polígonos convexos, assim estes polígonos também são parte dos prismas, os quais chamaremos de **bases** do prisma.

Figura 2. 3- Prisma

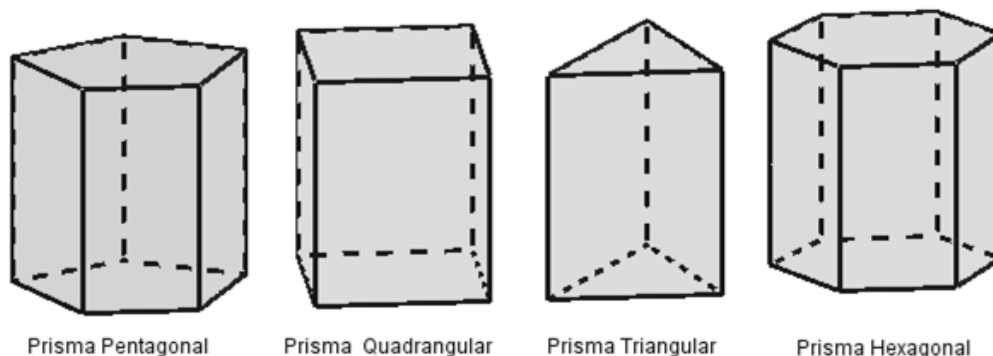


Fonte: acervo da autora

Na figura 2.11, temos um exemplo de um prisma oblíquo, pois os segmentos paralelos a  $\overline{PQ}$  formam ângulos diferentes de  $90^\circ$  com o plano  $\alpha$ . Caso contrário, diríamos que o prisma era reto.

Os prismas ainda são classificados quanto à base (polígonos convexos citados na definição).

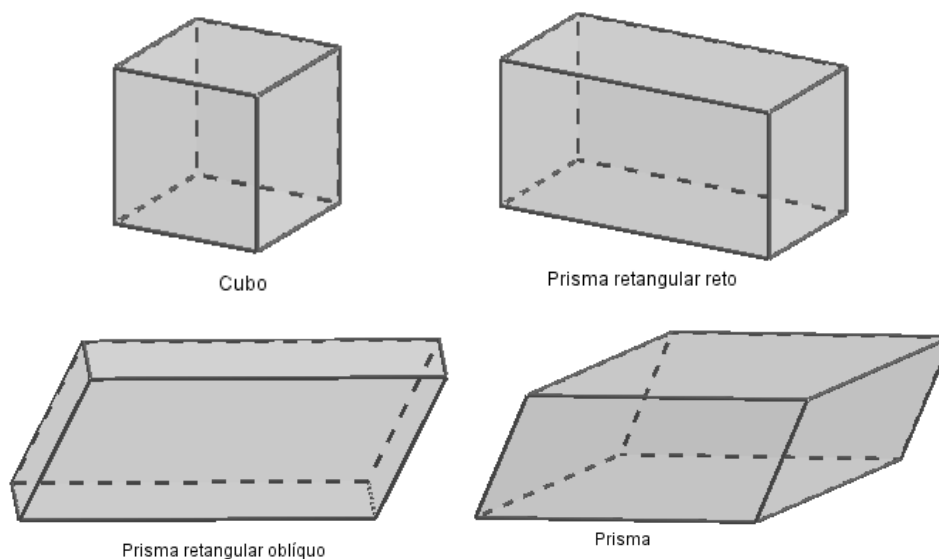
Figura 2. 4- Classificação dos prismas quanto à base



Fonte: acervo da autora

Uma observação interessante é que quando a base do prisma é um paralelogramo ele também pode ser chamado de paralelepípedo. São exemplos de paralelepípedos os sólidos a seguir:

Figura 2. 5- Paralelepípedos



Fonte: acervo da autora

Uma aplicação bastante comum dos prismas são as embalagens de produtos. Agora pensemos na seguinte situação: Quantos centímetros quadrados de papelão são gastos (desprezando as abas) para fazer uma caixa de sabão em pó com dimensões de 144mm de altura, 70mm de largura e 192mm de comprimento?

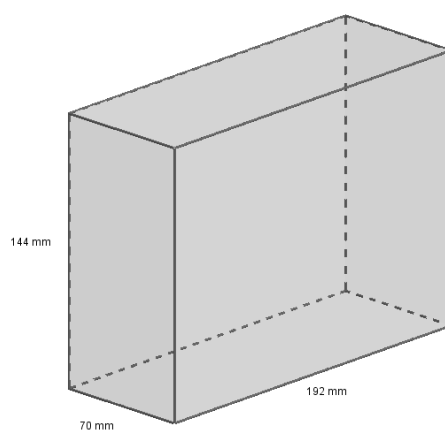
Figura 2. 6- Caixa de sabão em pó OMO



Fonte: Site de vendas Mercado livre<sup>2</sup>

Para solucionar este problema precisamos determinar a área da superfície desta caixa que tem a forma de um paralelepípedo.

Figura 2. 7- Modelagem matemática da caixa de sabão em pó OMO



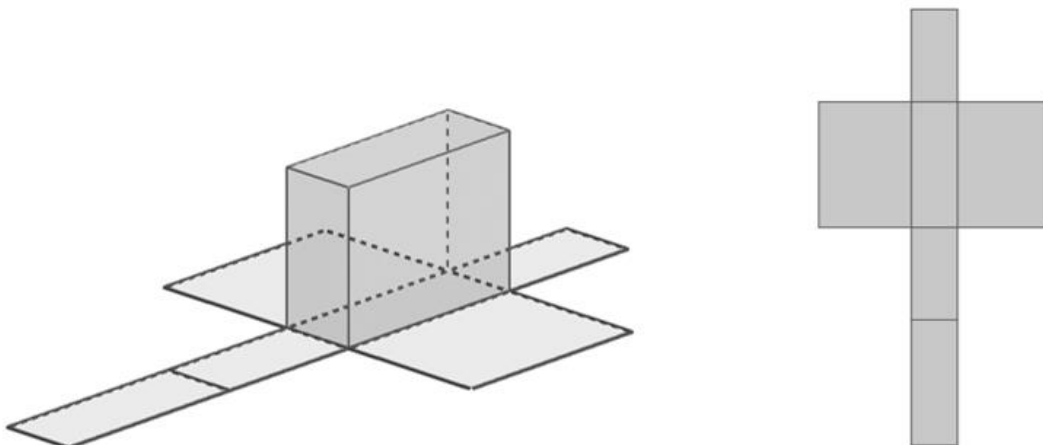
Fonte: acervo da autora

Para isto, é interessante considerarmos uma planificação deste sólido, ou seja, apresentar todas as formas que constituem sua superfície em um plano (em duas dimensões).

---

<sup>2</sup> Disponível em: [https://produto.mercadolivre.com.br/MLB-1018942054-kit-com-06-sabo-em-po-omo-multiacao-caixa-1-kg-\\_JM?quantity=1&variation=23255239437](https://produto.mercadolivre.com.br/MLB-1018942054-kit-com-06-sabo-em-po-omo-multiacao-caixa-1-kg-_JM?quantity=1&variation=23255239437). Acesso em 15 de janeiro de 2019.

Figura 2. 8- Planificação de um paralelepípedo de base retangular



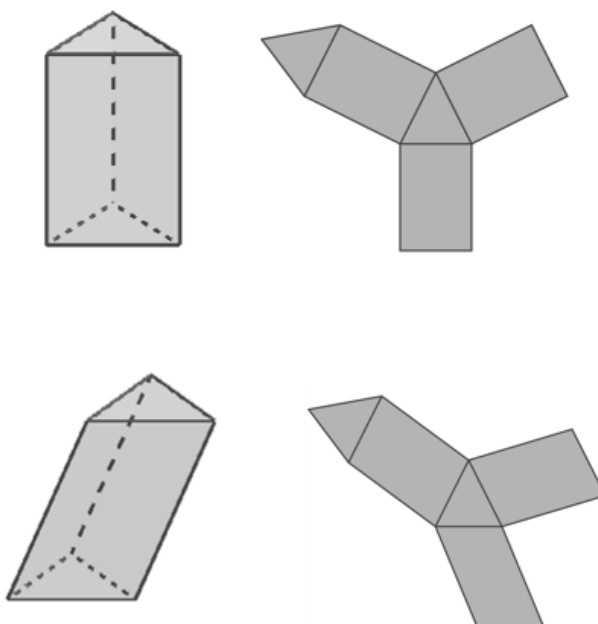
Fonte: acervo da autora

Assim, basta que calculemos as áreas destes retângulos e as somemos. Desta forma, obteremos a área da superfície total do sólido. Logo teríamos:

$$\text{Área total} = 2 \cdot (19,2 \cdot 7) + 2 \cdot (7 \cdot 14,4) + 2 \cdot (19,2 \cdot 14,4) = 1023,36 \text{ cm}^2$$

Pensando desta maneira, a área total da superfície de diferentes tipos de prismas pode ser calculada a partir da planificação dos mesmos. Vejamos na figura a seguir um prisma triangular reto e um prisma triangular oblíquo com suas respectivas planificações.

Figura 2. 9- Prismas e suas planificações



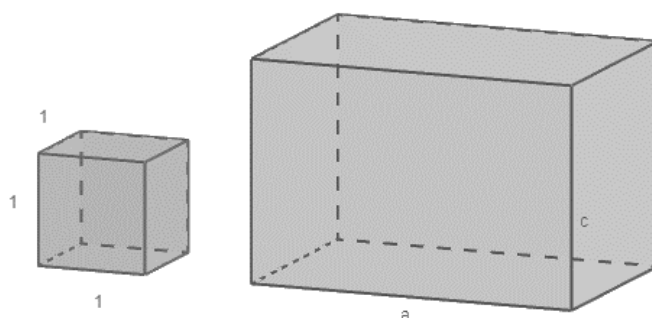
Fonte: acervo da autora

Ainda sobre o problema anterior. Se fosse solicitado também o volume máximo de sabão em pó que cabe na caixa, como calcularíamos? Para isto, precisaríamos saber como calcular o volume de um paralelepípedo retângulo que é o nosso caso.

Um paralelepípedo retângulo fica perfeitamente determinado por três medidas: o seu comprimento ( $a$ ), a sua largura ( $b$ ) e a sua altura ( $c$ ). O seu volume será representado por  $V(a, b, c)$ . Tomando como unidade de volume um cubo de aresta um que tem volume de  $1 \text{ cm}^3$ , como o cubo unitário é um paralelepípedo retângulo cujos comprimentos, largura e altura medem 1, então  $V(1,1,1) = 1$ .

De maneira intuitiva, calcular o volume do paralelepípedo retangular consiste em verificar quantas vezes ele contém o cubo unitário.

Figura 2. 10- Cubo unitário e paralelepípedo



Fonte: acervo da autora

Observe que o paralelepípedo retângulo é proporcional a cada uma de suas dimensões. Isto quer dizer que, se mantivermos, por exemplo, constantes a largura e a altura e, se multiplicarmos o comprimento por um número natural  $n$ , o volume ficará também multiplicado por  $n$ , ou seja,

$$V(na, b, c) = nV(a, b, c)$$

Em outras palavras, se mantidas constantes duas dimensões de um paralelepípedo retângulo, seu volume é proporcional à terceira dimensão. Portanto, sendo  $a, b$  e  $c$ , suas dimensões, temos:

$$\begin{aligned} V(a, b, c) &= V(a \cdot 1, b, c) = a V(1, b, c) \\ &= a V(1, b \cdot 1, c) = ab V(1, 1, c) \\ &= ab V(1, 1, c \cdot 1) = abc V(1, 1, 1) \\ &= abc \cdot 1 = abc \end{aligned}$$

Assim, o volume de um paralelepípedo retângulo é o produto de suas dimensões. Em particular, se a face das dimensões  $a$  e  $b$  está contida em um plano horizontal, chamaremos essa face de *base* e a dimensão  $c$  de *altura*. Como o produto  $ab$  é a área da base, é costume dizer que o volume de um paralelepípedo retângulo é o produto da área da base pela altura.

$$\text{Volume do paralelepípedo} = (\text{área da base}) \cdot (\text{altura})$$

Vimos como calcular o volume de um prisma de base retangular também chamado de paralelepípedo retângulo. Será que poderíamos usar o mesmo princípio intuitivo que usamos para calcular o volume do paralelepípedo retângulo, para calcular, por exemplo, o volume de um prisma de base triangular? Conseguiríamos ocupar todo o volume de um prisma de base triangular com cubos unitários? Como calcular o volume de um prisma de base triangular? Considerando-se que não é possível usar o mesmo princípio intuitivo utilizado no cálculo do volume do paralelepípedo, sugerimos o uso de *Princípio de Cavaliere*:

*Axioma*: São dados dois sólidos e um plano. Se todo plano paralelo ao plano dado secciona os dois sólidos segundo figuras de mesma área, então, esses sólidos têm o mesmo volume.

Considere os sólidos  $S_1$  e  $S_2$ , apoiados sob um plano horizontal  $\alpha$ . Consideremos também o plano  $\beta$ , paralelo a  $\alpha$ , que ao seccionar  $S_1$ , também secciona  $S_2$ , determinando duas regiões planas de áreas  $A_1$  e  $A_2$ .

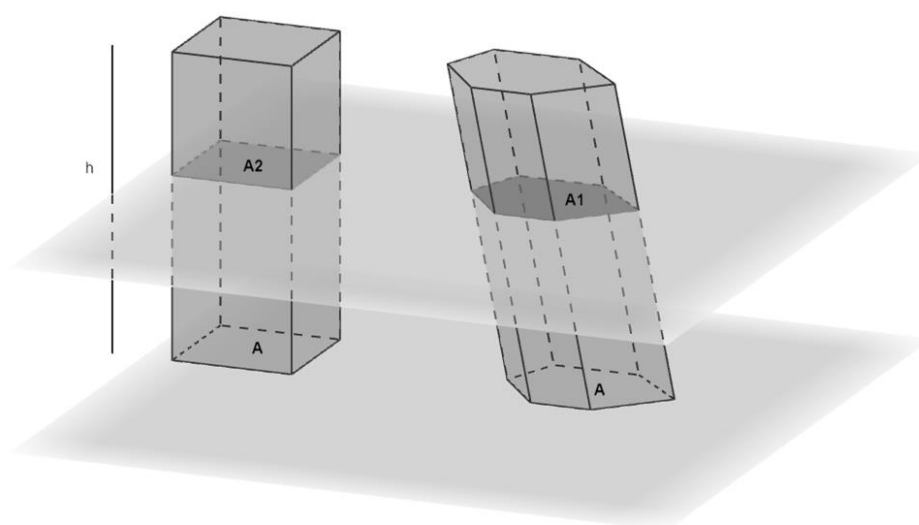
Nestas condições podemos afirmar que, se para todo plano  $\beta$  temos que  $A_1 = A_2$ , então:

$$\text{volume } S_1 = \text{volume } S_2$$

Com este princípio, podemos, sem dificuldade, obter o volume de um prisma qualquer. Imaginemos um plano horizontal que contém as bases de um prisma de altura  $h$ , e de um paralelepípedo retangular de mesma altura e que estas bases possuam área  $A$ . Suponha agora que ambos os sólidos sejam cortados por um outro plano horizontal, que produz seções de áreas  $A_1$  e  $A_2$  no prisma e no paralelepípedo respectivamente. Ora, um paralelepípedo é também um prisma e sabemos que em todo prisma, uma seção paralela à base é congruente à base. Mas figuras congruentes têm mesma área, logo temos  $A_1 = A = A_2$  e, pelo Princípio de Cavaliere, os dois sólidos possuem o mesmo volume. Desta forma,

$$\text{Volume do prisma} = (\text{área da base}) \cdot (\text{altura})$$

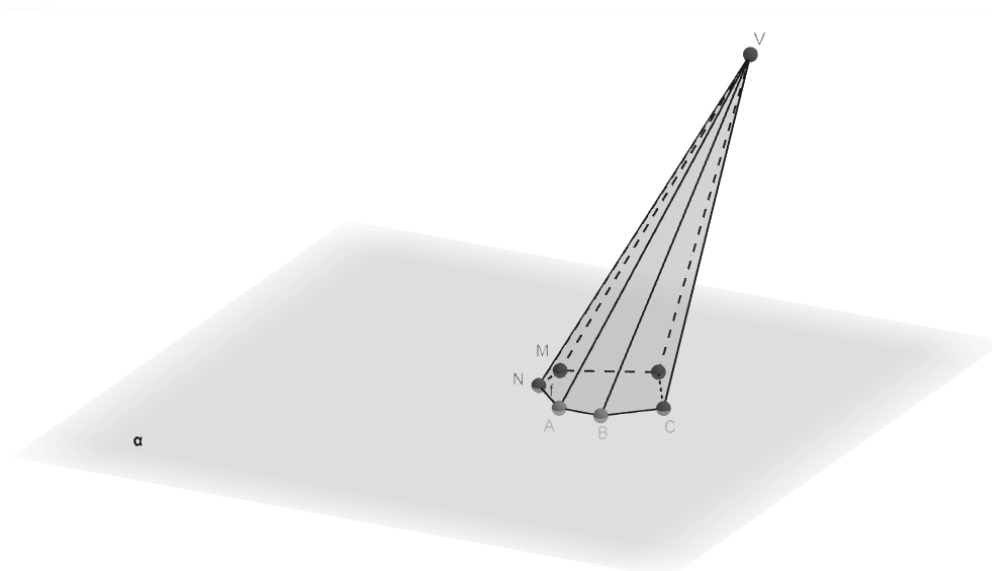
Figura 2. 11- Volume de um prisma



Fonte: acervo da autora

**Definição:** Consideramos um polígono convexo  $ABCD \dots MN$  situado num plano  $\alpha$  e um ponto  $V$  fora de  $\alpha$ . Chama-se **pirâmide** (ou pirâmide convexa) a reunião de todos os segmentos com uma extremidade em  $V$  e a outra nos pontos da região poligonal.

Figura 2. 12- Pirâmide

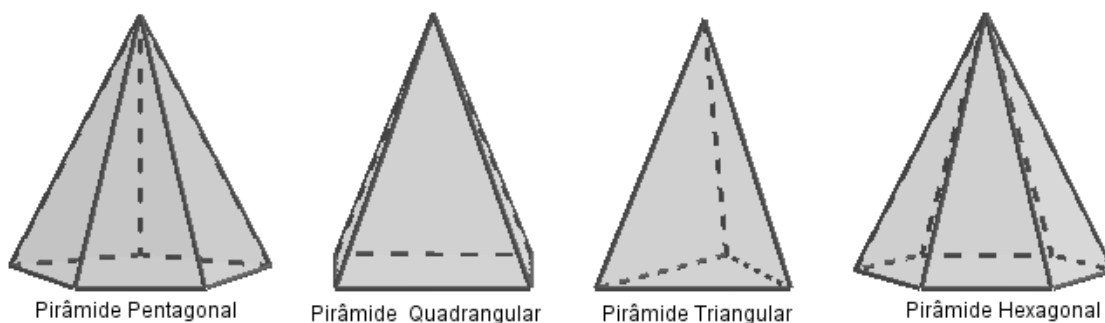


Fonte: acervo da autora

Assim como os prismas, as pirâmides são classificadas quanto à base e a área da superfície é o somatório dos polígonos que a formam, que são mais visíveis na planificação da pirâmide.

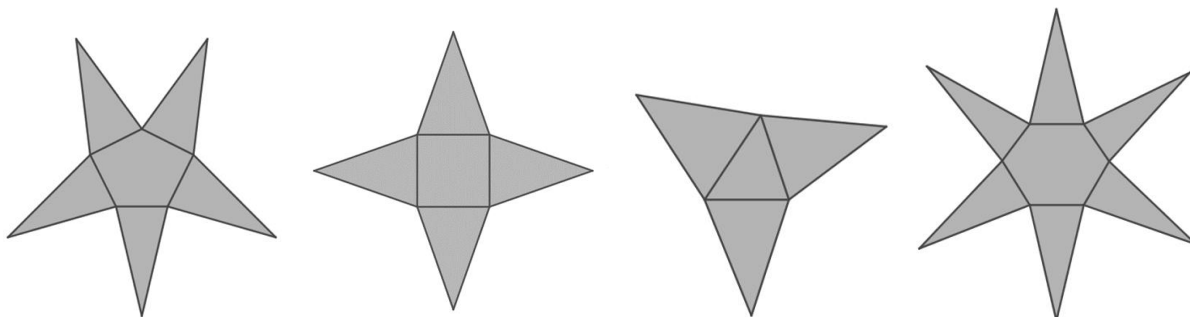
Alguns exemplos de pirâmides e suas respectivas planificações:

Figura 2. 13- Classificação de pirâmides quanto à base



Fonte: acervo da autora

Figura 2. 14- Planificações de pirâmides



Fonte: acervo da autora

Vale ressaltar que uma pirâmide de base triangular é chamada de tetraedro.

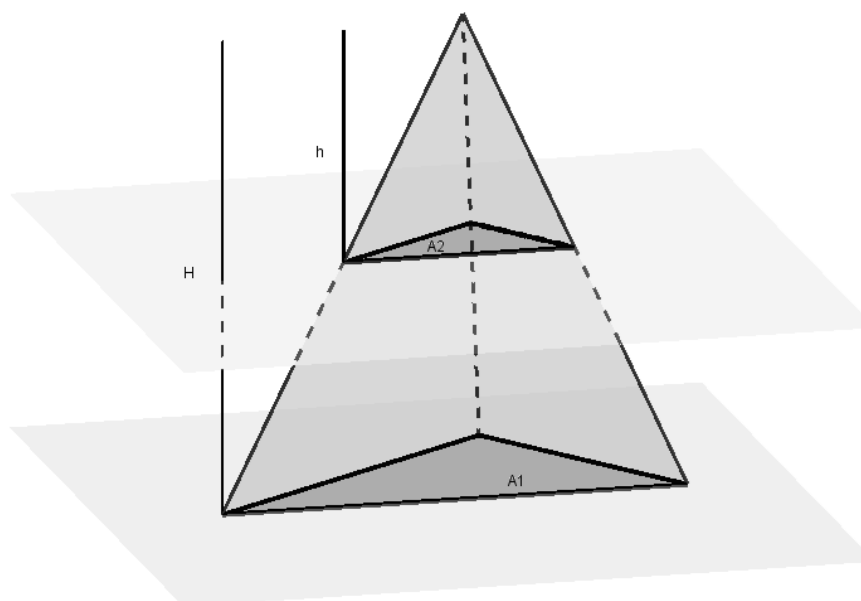
Mas como calcular o volume de uma pirâmide?

Para responder esta pergunta precisamos de alguns resultados adicionais. Vejamos:



Considere a figura a seguir:

Figura 2. 15- Proporção entre áreas e entre alturas de uma pirâmide



Fonte: acervo da autora

Temos que:

- 1) A secção e a base da pirâmide são figuras semelhantes e a razão de semelhança é  $\frac{h}{H}$ .
- 2) A razão entre áreas de figuras semelhantes é o quadrado da razão de semelhança.

Além disso, usaremos também os seguintes teoremas:

Teorema 1: Duas pirâmides de mesma base e mesma altura têm o mesmo volume.

A prova deste teorema será omitida aqui. Mas para prová-lo basta usar o resultado anterior e o Princípio de Cavaliere.

Teorema 2: O volume de uma pirâmide triangular é igual a um terço do produto da área da base pela altura.

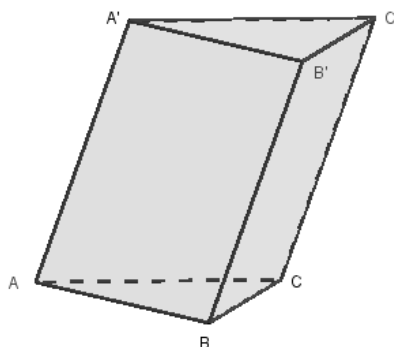
*Prova:* Para facilitar o entendimento, vamos convencionar uma notação especial. Trataremos de diversos tetraedros e como em um tetraedro qualquer face pode ser considerada uma base, vamos convencionar o seguinte. Se em um tetraedro de vértices  $A, B, C$  e  $D$ , imaginamos a face

$ABC$  como base e o ponto  $D$  como vértice dessa pirâmide, vamos representá-lo por  $D - ABC$ . Ainda, o volume desse tetraedro será representado por

$$V(D - ABC) = V(B - ACD) = \dots, \text{etc,}$$

dependendo de qual face estamos considerando como base. Consideremos então um prisma triangular cujas bases são os triângulos  $ABC$  e  $A'B'C'$ , como mostra a figura a seguir.

Figura 2. 16- Prisma triangular



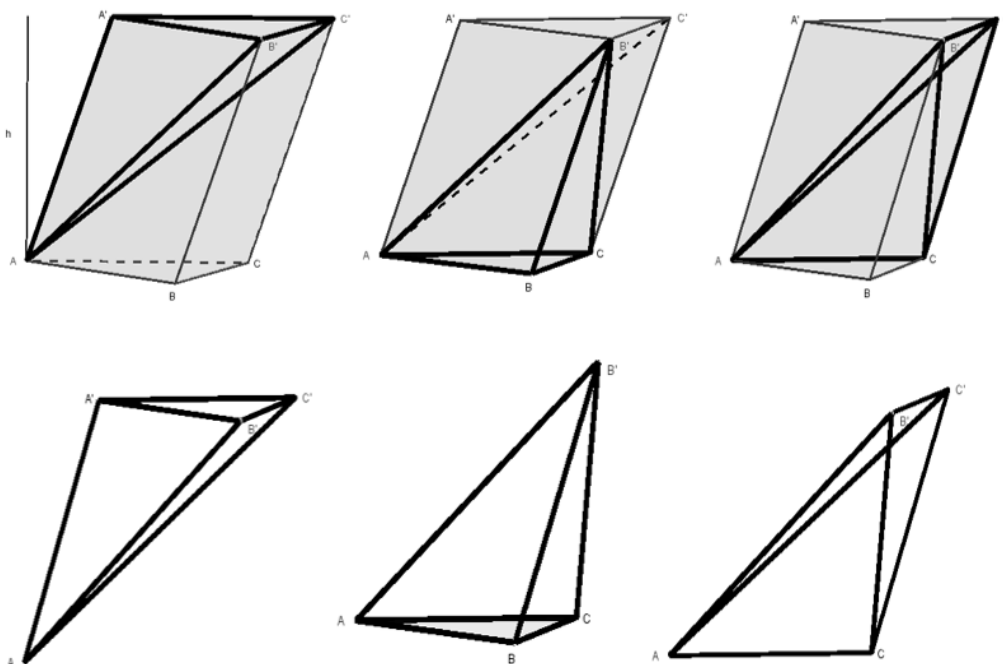
Fonte: acervo da autora

Seja  $A_1$  a área de  $ABC$  e seja  $h$  a altura do prisma. Como sabemos, seu volume é  $A_1 h$ .

Vamos agora, dividir esse prisma em três tetraedros:

$A - A'B'C'$ ,  $B' - ACC'$  e  $B' - ABC$ , como mostram as figuras a seguir.

Figura 2. 17- Decomposição de um prisma triangular em três tetraedros congruentes



Fonte: acervo da autora

Note que,  $A - A'B'C'$  e  $B' - ABC$  têm bases congruentes e alturas iguais. Pois, os triângulos  $ABC$  e  $A'B'C'$  são congruentes e a distância de  $B'$  ao plano que contém o triângulo  $ABC$  é igual a distância de  $A$  ao plano que contém o triângulo  $A'B'C'$  que é a altura  $h$  do prisma. Logo, pelo teorema 1

$$V(A - A'B'C') = V(B' - ABC).$$

Perceba também que,  $A - A'B'C' = B' - AA'C'$ . E ainda que  $B' - AA'C'$  e  $B' - ACC'$  também têm bases congruentes e alturas iguais. De fato, o triângulo  $AA'C'$  é congruente ao triângulo  $ACC'$ , pois cada um deles é a metade do paralelogramo  $AA'C'C$  e altura de cada um desses tetraedros é a distância de  $B'$  ao plano que contém o paralelogramo  $AA'C'C$ . Daí,  $V(A - A'B'C') = V(B' - ACC')$ .

Como  $V(A - A'B'C') = V(B' - ABC)$  e  $V(A - A'B'C') = V(B' - ACC')$  concluímos que os três volumes são iguais. Fazendo  $V(A - A'B'C') = V$  e lembrando que os três tetraedros compõem o prisma, segue que:

$$3V = A_1h$$

Ou seja,

$$\text{Volume do tetraedro} = \frac{(\text{área da base}) \cdot (\text{altura})}{3}$$

Usando o resultado anterior e o Princípio de Cavaliere concluímos que o volume de qualquer pirâmide é igual a um terço do produto da área da base pela altura.

De fato, imaginemos um plano horizontal que contém as bases de um tetraedro de altura  $h$ , e de uma pirâmide qualquer de mesma altura e que suas bases possuam área  $A$ . Pelo Princípio de Cavaliere teremos que estes sólidos terão o mesmo volume. Assim:

$$\text{Volume da pirâmide} = \text{volume do tetraedro}$$

Ou seja,

$$\text{Volume da pirâmide} = \frac{(\text{área da base}) \cdot (\text{altura})}{3}$$

## Corpos Redondos

Falaremos agora de três corpos redondos que são muito importantes para a matemática e áreas afins. São eles: o cilindro, o cone e a esfera.

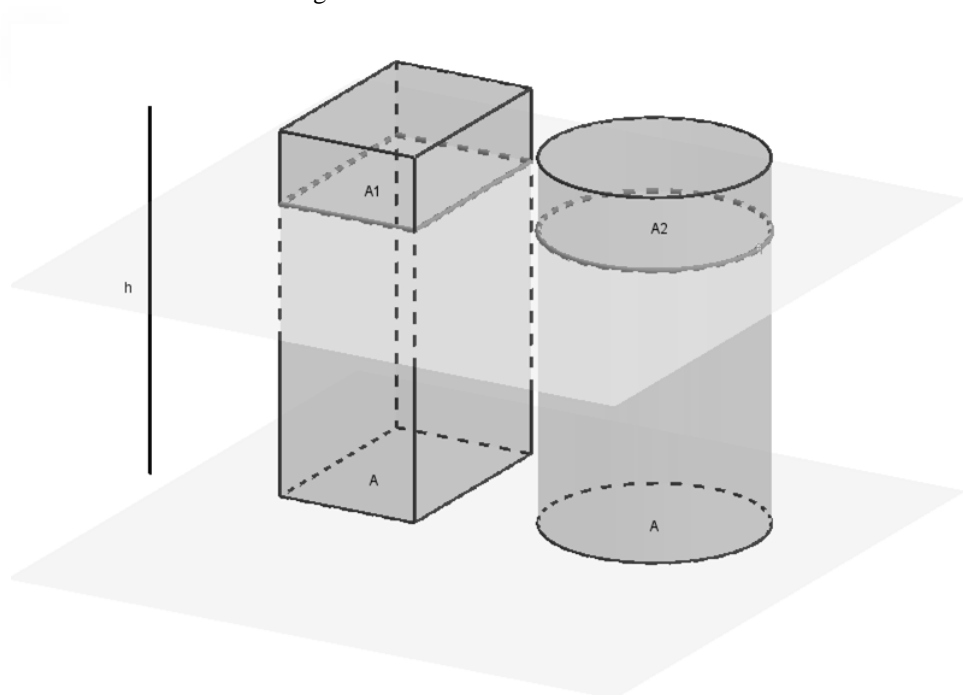
A definição de cilindro se assemelha à do prisma, diferenciando quanto a base. Pois a base do cilindro será sempre um círculo. Vejamos então:

**Definição:** Consideremos um círculo de centro  $O$  e raio  $r$  situado num plano  $\alpha$  e um segmento  $PQ$ , não nulo, não paralelo e não contido em  $\alpha$ . Chama-se **cilindro** à reunião dos segmentos congruentes e paralelos a  $PQ$  com uma extremidade nos pontos do círculo e situados num mesmo semi-espaco dos determinados por  $\alpha$ . No caso de  $PQ$  ser perpendicular a  $\alpha$ , o cilindro é reto.

Assim como num prisma, toda seção paralela à base do cilindro é congruente com essa base. Esse fato permite concluir, pelo Princípio de Cavalieri, que o volume do cilindro é o produto da área de sua base pela sua altura. De fato, se o cilindro tem altura  $h$  e base de área  $A$  contida em um plano horizontal, imaginamos um prisma qualquer (ou em particular um paralelepípedo retângulo) de altura  $h$ , com base de área  $A$  contida no mesmo plano. Se um outro plano horizontal secciona os dois sólidos segundo figuras de áreas  $A_1$  e  $A_2$ , então  $A_1 = A = A_2$  e por consequência, os dois têm mesmo volume. Logo,

$$\text{Volume do cilindro} = (\text{área da base}) \cdot (\text{altura})$$

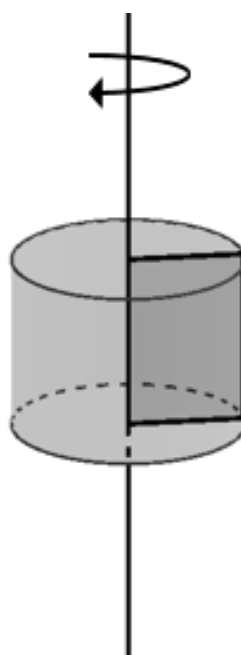
Figura 2. 18- Volume de um cilindro



Fonte: acervo da autora

Um fato que merece atenção é que o cilindro reto também é conhecido como um sólido de revolução, uma vez que ele pode ser obtido ao girar uma região retangular em torno de uma reta que contém um de seus lados. Por este motivo, este cilindro pode ser chamado também de cilindro de revolução.

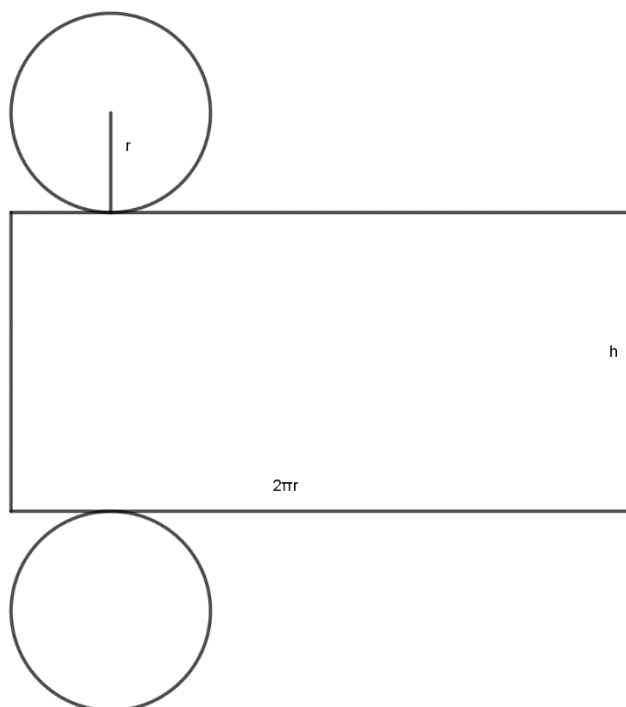
Figura 2. 19- Cilindro de revolução



Fonte: acervo da autora

Observe que a superfície do cilindro é formada por duas partes planas, que são as bases, e uma parte não plana, “arredondada”, que é a superfície lateral. Assim, para calcularmos a área da superfície lateral basta planificar o cilindro e somar as áreas das figuras.

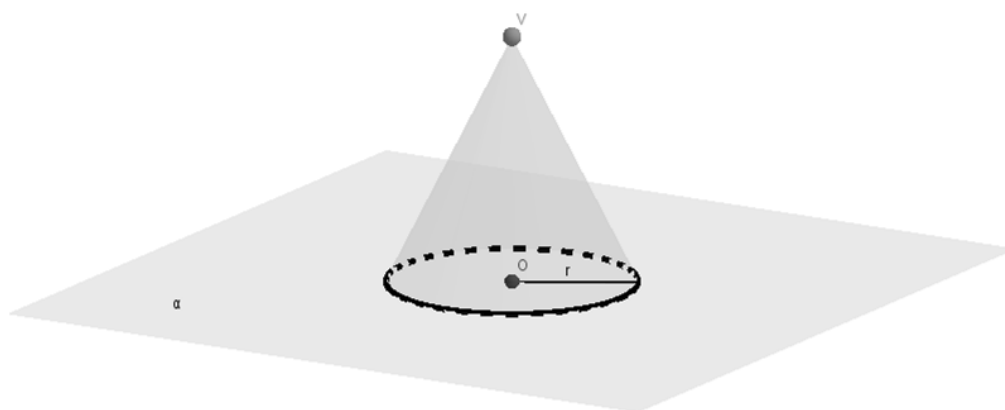
Figura 2. 20- Planificação de um cilindro



Fonte: acervo da autora

**Definição:** Consideremos um círculo de centro  $O$  e raio  $r$  situado num plano  $\alpha$  e um ponto  $V$  fora do plano  $\alpha$ . Chama-se **cone** à reunião dos segmentos com uma extremidade nos pontos do círculo e outra no ponto  $V$ .

Figura 2. 21- Cone



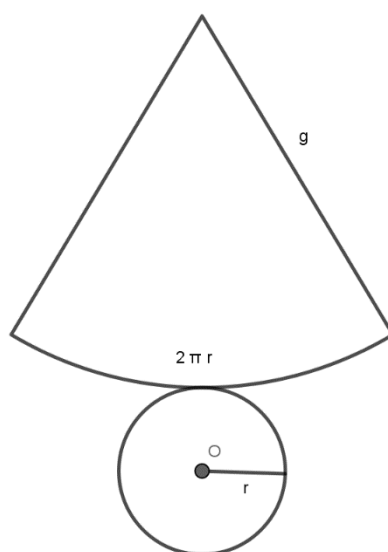
Fonte: acervo da autora

A relação que estabelecemos entre o prisma e o cilindro é a mesma para a pirâmide e o cone. Seguindo o mesmo raciocínio veremos que o volume de um cone é calculado da mesma forma que o volume de uma pirâmide, ou seja,

$$\text{Volume do cone} = \frac{(\text{área da base}) \cdot (\text{altura})}{3}$$

E ainda, para calcular sua área superficial basta que somemos as áreas das figuras planas obtidas pela planificação do cone.

Figura 2. 22- Planificação de um cone reto



Fonte: acervo da autora

Onde  $g$  é chamado de **geratriz**. Encontra-se o quadrado da geratriz somando o quadrado da altura com o quadrado do raio da base do cone, ou seja,

$$g^2 = h^2 + r^2$$

Assim como o cilindro, o cone reto também é classificado como um sólido de revolução. O cone de revolução, como é chamado, é obtido a partir da rotação de uma região triangular em torno de uma reta que contém um de seus lados.

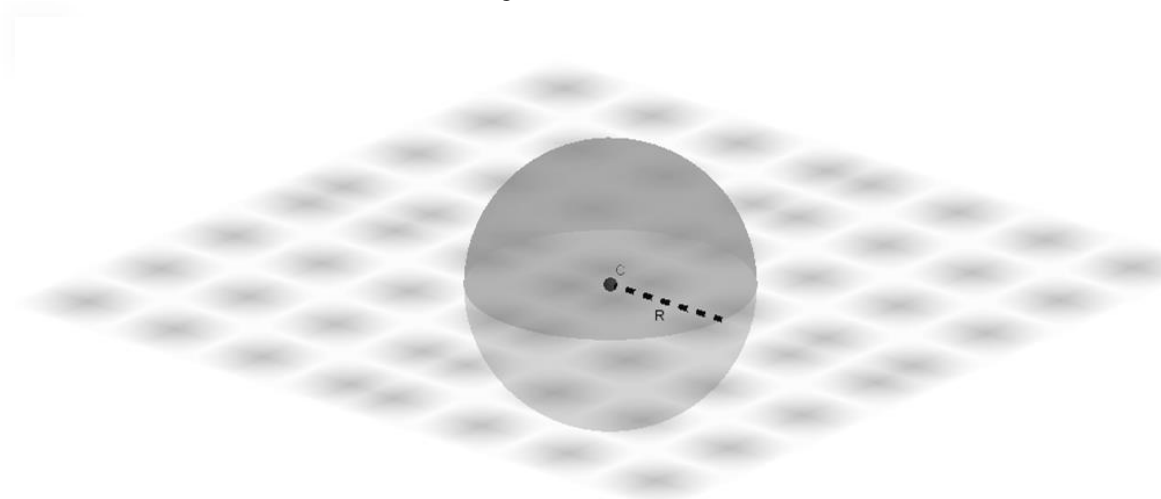
Figura 2. 23- Cone de revolução



Fonte: acervo da autora

**Definição:** Definimos por **esfera** de centro  $C$  e raio de medida  $R$  o conjunto de todos os pontos do espaço que estão a uma distância menor ou igual a  $R$  do ponto  $C$ .

Figura 2. 24- Esfera



Fonte: acervo da autora

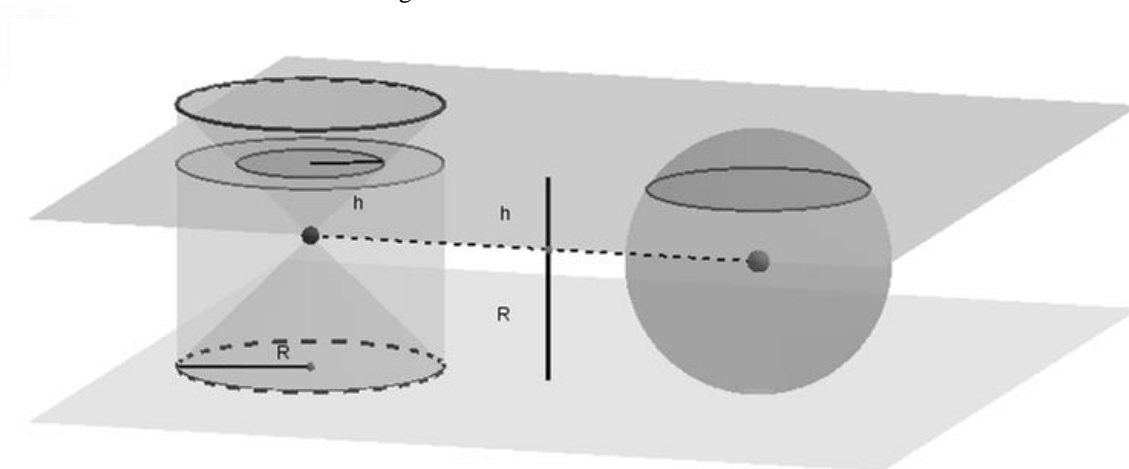
Também usaremos o Princípio de Cavalieri para calcularmos o volume de uma esfera. Desta forma, imaginemos um certo sólido, de volume conhecido e tal que seções produzidas por planos horizontais na esfera e nesse sólido tenham áreas iguais. Observe que em uma esfera



de raio  $R$ , uma seção que dista  $h$  do centro é um círculo de área  $\pi(R^2 - h^2)$ . Porém, esta é também a área de uma coroa circular limitada por circunferências de raios  $R$  e  $h$ .

Vamos então considerar uma esfera de raio  $R$  apoiada em um plano horizontal e, ao lado, um cilindro equilátero de raio  $R$  com base também sobre esse plano. Do cilindro, vamos subtrair dois cones iguais, cada um deles com base em uma base do cilindro e vértices coincidentes no centro do cilindro. Este sólido  $C$  (chamado clepsidra) é tal que qualquer plano horizontal distando  $h$  do seu centro (ou do centro da esfera), produz uma seção que é uma coroa circular cujo raio externo é  $R$  e cujo raio interno é  $h$ . Logo, o volume da esfera é igual ao de  $C$ .

Figura 2. 25- Volume de uma esfera



Fonte: acervo da autora

O volume de  $C$  é o volume do cilindro de raio  $R$  e altura  $2R$  subtraído de dois cones de raio  $R$  e altura  $R$ . Isso dá:

$$\pi R^2 2R - 2 \frac{1}{3} \pi R^2 R = \frac{4}{3} \pi R^3$$

que é o volume da esfera:

$$\text{Volume da esfera} = \frac{4}{3} \pi R^3$$

Já conhecemos o volume da esfera, agora mostraremos de maneira intuitiva que a área  $A$  da superfície esférica é:

$$A = 4\pi R^2$$

Para isto, imaginemos uma esfera de raio  $R$  como a reunião de  $n$  sólidos que parecem cones. Observe que esses sólidos não são cones perfeitos, pois suas bases não são planas.

Suponha que estes  $n$  cones possuem altura aproximadamente igual a  $R$  (tanto mais aproximadamente quanto menor for a base do cone). Assim, podemos admitir que o volume da esfera é equivalente à soma dos volumes de todos esses  $n$  cones ( $n$  suficientemente grande).

Note que desta forma a superfície da esfera fica dividida em um número  $n$  suficientemente grande de “círculos” (bases dos cones), cujas áreas são  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ .

Lembrando que o volume de cada cone é

$$V = \frac{1}{3} (\text{área da base}) \cdot (\text{altura})$$

e que  $A_1 + A_2 + A_3 + \dots + A_n = A$  é a área da superfície esférica, vem:

$$\begin{aligned} \text{Volume da esfera } (V) &= \frac{1}{3}A_1R + \frac{1}{3}A_2R + \frac{1}{3}A_3R + \dots + \frac{1}{3}A_nR \\ &= \frac{1}{3}(A_1 + A_2 + A_3 + \dots + A_n) \end{aligned}$$

Assim temos que:

$$V = \frac{1}{3}AR \Rightarrow \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{1}{3}AR \Rightarrow A = 4\pi R^2$$

Logo, a área da superfície esférica de raio  $R$  é:

$$A = 4\pi R^2$$

## CAPÍTULO 3

### RELATO REFLEXIVO DA EXPERIÊNCIA DE ENSINO

A abordagem do conteúdo de geometria espacial em duas turmas do terceiro ano<sup>3</sup> do ensino médio do Instituto Federal de Alagoas do campus Piranhas foi realizada segundo a metodologia de investigação matemática. As duas turmas foram divididas em grupos. Quatro na turma 1 do curso de agroecologia, que serão nomeados como A, B, C e D, e cinco na turma 2 do curso de agroindústria nomeados por E, F, G, H e I. Para manter o anonimato dos alunos, eles serão identificados como A1, A2, E3, indicando, respectivamente, o primeiro componente do grupo A, o segundo do grupo A e o terceiro do grupo E, por exemplo. Nos diálogos me colocarei em terceira pessoa, chamando-me de professora.

Apesar de ter sido escolhida a metodologia de investigação matemática para analisar vantagens e desvantagens no uso dessa abordagem ativa de ensino-aprendizagem, ela foi trabalhada em conjunto com outras metodologias de ensino, como novas tecnologias, resolução de problemas e modelagem matemática.

Foram aplicadas quatro atividades investigativas<sup>4</sup> que trabalharam os seguintes conteúdos: 1) reflexão e simetria de figuras planas; 2) planificação de sólidos geométricos e projeção ortogonal; 3) planificação de sólidos; 4) volume de sólidos de revolução e área de superfície. Entre as intervenções feitas e o desenvolvimento das atividades, a duração de todo o processo foi de um mês e meio o que foi equivalente, em ambas as turmas, a 21 horas/aula. A duração média esperada para a abordagem do mesmo conteúdo de maneira expositiva tradicional é de 15 horas/aula.

Vale ressaltar que nem sempre identificarei a turma nas descrições a seguir, pois tentei trabalhar de igual modo em ambas, ou seja, usando os mesmos recursos, mesmas propostas de atividades e dispondo do mesmo tempo. Porém, quando vir que é necessário distinguir as turmas, assim farei.

---

<sup>3</sup> O conteúdo de geometria espacial é trabalhado no terceiro ano do ensino médio como é proposto no Projeto Pedagógico do Curso (PPC) dos cursos de agroindústria e agroecologia do Instituto Federal de Alagoas-Piranhas.

<sup>4</sup> Algumas situações (questões) são questões da OBMEP (Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas) ou do ENEM (Exame Nacional do Ensino Médio) que foram adaptadas para que se encaixassem na metodologia proposta.

## **Dia 1**

Foram 2 horas-aula conjuntas totalizando 100 minutos de aula em cada turma. Fiz uma breve revisão expositiva de 20 minutos abordando figuras planas: seus tipos, classificação e cálculo de áreas. Então, expliquei aos alunos o que era a investigação matemática e como conduziria a atividade proposta por mim. Pedi que se dividissem em grupos de no máximo cinco pessoas e apliquei a atividade investigativa 1<sup>5</sup> (vide apêndice 1) sobre reflexão e simetria de figuras planas. A seguir, algumas observações que merecem destaque.

### *Envolvimento ativo do aluno: a resistência a mudança*

Mesmo antes de terem visto a atividade, os alunos da turma 1 disseram que não estavam com disposição para fazer a atividade e demoraram a formar os grupos. Acredito que isso ocorreu pelo fato de estarem acostumados com aulas expositivas. Já na turma 2 não houve resistência e eles se empenharam bastante para tentar resolver a situação proposta.

### *A dependência do professor, visto como validador de pensamentos*

Em ambas as turmas, havia uma preocupação maior em saber se chegariam a resposta correta da maneira que estavam desenvolvendo a problemática. Ao observar os grupos de longe, percebia que se sentiam mais autônomos e defendiam com maior segurança suas hipóteses. No entanto, ao me aproximar para observá-los, sentiam-se intimidados e quando apresentavam uma hipótese para o colega, olhavam para mim e perguntavam: “estou certa professora?”, “será que é assim mesmo?”. E eu continuava perguntando aos colegas do grupo: “Você, o que acha da ideia do colega? Teria alguma outra sugestão?” Para que eles entendessem que precisavam discutir entre si e testar as conjecturas e que meu papel era apenas de orientadora.

### *Formulação de conjecturas: a dificuldade de abstração*

Imaginar as dobraduras no papel fez com eles se sentissem desconfortáveis ao ponto de insistirem que fosse permitido fazer as dobraduras numa folha de papel. Frisei o objetivo abstrato da atividade e pedi que imaginassem a folha de papel e que seguissem os passos dados na questão.

---

<sup>5</sup> Para esta atividade foram selecionadas duas questões da OBMEP coletadas do Banco de Questões 2013, no entanto só foi trabalhada a primeira situação devido ao tempo e ao fato de o conteúdo de geometria plana já ter sido trabalhado.

### *A dificuldade de interpretação*

No início, todos os grupos pensaram que a resposta do item “a” seria duas peças, um triângulo e um trapézio. Solicitei que prestassem mais atenção e verificassem que o papel havia sido dobrado antes de ser cortado. Conforme pode ser notado no registro<sup>6</sup> do diálogo reproduzido abaixo:

E1: “Professora, isto é pegadinha, não é?”

Professora: “Como assim?”

E2: “Tá na cara que são duas peças, um triângulo e um trapézio!”

Professora: “Olhem direito, a folha foi dobrada!”

E1: “Ah! Agora entendi.”

### *Os caminhos que surpreendem*

Embora tenham percorrido um caminho semelhante, alguns grupos chegaram a conclusões diferentes. Quando estava preparando a aula pensei em alguns caminhos diferentes que eles poderiam trilhar, mas não previ que chegariam a conclusões diferenciadas. Isto ratifica a afirmação de Menezes (2016), que nas atividades investigativas o aluno pode chegar a resultados que não são pré-determinados.

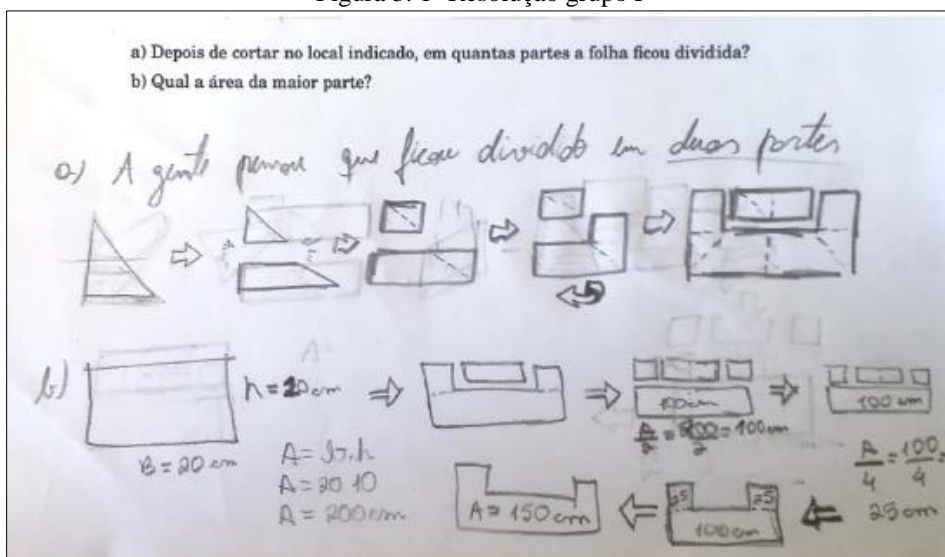
No momento em que os acompanhava em sala de aula percebi que alguns grupos tinham encontrado duas peças, porém diferentes das que eu havia previsto. Pedi que me explicassem o processo que utilizaram e assim notei que na primeira dobradura, uns dobraram o papel para a esquerda e outros para a direita, resultando em figuras diferentes no final. O que enriqueceu bastante a discussão final, visto que foi observado que as peças maiores, apesar diferentes, possuíam a mesma área.

As seguintes resoluções ratificam isto.

---

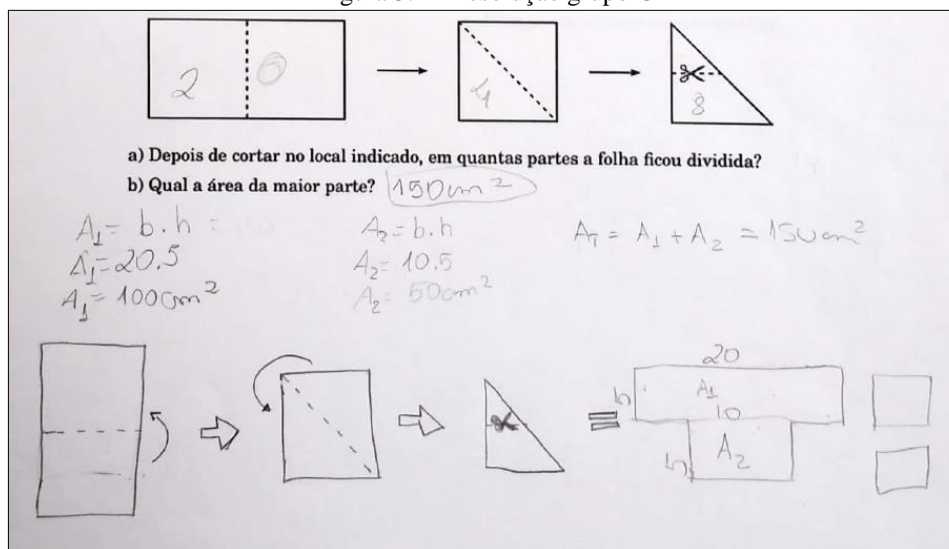
<sup>6</sup> Os áudios das discussões foram gravados durante a aula.

Figura 3. 1- Resolução grupo F



Fonte: acervo da autora

Figura 3. 2- Resolução grupo G



Fonte: acervo da autora

*Discussão e argumentação dos resultados: dificuldade de comunicação*

Quando solicitados que fizessem a exposição das resoluções na frente da sala detalhando todo o raciocínio, os alunos da turma 1 se sentiram intimidados. Foi preciso instigar uma discussão entre eles fazendo algumas perguntas. Como por exemplo, o porquê de no item a as peças resultantes terem sido diferentes. E porque isto não interviu nos valores das áreas, pois a áreas das peças maiores e menores foram as mesmas independentes das formas. Pensaram, discutiram, mas só conseguiram chegar a uma conclusão quando deixei que pegassem uma folha de papel e fizessem as dobraduras. Tentando administrar tal situação, na

turma 2 pedi que fizessem um círculo para que discutíssemos. No início, foi preciso direcionar as perguntas, porém após um tempo eles mesmos estavam questionando entre si.

## **Dia 2**

Antes de começar a trabalhar a geometria espacial com investigação matemática, vi que era necessário fazer algumas intervenções. Uma vez que, para muitos, seria a primeira vez que estudariam este conteúdo. Sendo assim, foi necessário explicar o que estuda a geometria espacial, bem como classificar sólidos, explorar os diversos tipos de sólidos e o que os compõe. Esta aula ocorreu no laboratório de ensino de matemática do Instituto e teve duração de 50 minutos<sup>7</sup>.

### *Envolvimento ativo do aluno: ambiente facilitador da aprendizagem*

Logo que entramos no laboratório, ouvi comentários como: “a gente só entrou neste laboratório uma vez”, “só teve um professor, além da senhora, que nos trouxe aqui”. Percebi que sair do ambiente da sala de aula os impactou de alguma forma.

Diferente do ambiente de sala de aula tradicional, com carteiras enfileiradas, o espaço do laboratório proporcionou maior flexibilidade e interação entre eles, já que no mesmo há uma mesa grande onde os alunos ocupam posições de maneira que ficaram de frente um pro outro.

### *Refinamento de conjecturas: concretizando o abstrato*

Espalhei sobre a mesa alguns sólidos geométricos de acrílico e pedi que cada aluno escolhesse um. E que registrassem, nos cadernos, como ele se classificava, o nome e determinasse, se possível, quantas arestas, vértices e faces tinha. Empenharam-se bastante e inclusive, sem que eu pedisse, escolheram mais um sólido para realizar a atividade. Os deixei bem à vontade neste primeiro momento.

Um fato que me chamou atenção foi o depoimento de uma aluna ao comparar o desenho de um sólido (projetado no slide) com o mesmo em material concreto. “Ah, agora sim consegui entender aqueles sólidos que a professora de desenho técnico nos pedia para reproduzir.” E

---

<sup>7</sup> Para que não seja necessário quantificar o tempo de cada aula em todo o relato. Teremos: dias ímpares, aulas conjuntas totalizando 100 minutos de aula e dias pares, aula de 50 minutos.

continuou falando o quão difícil era fazer a reprodução, pois eles tinham apenas os desenhos no plano e não conseguiam visualizar os sólidos.

### **Dia 3**

Iniciamos a aula com a discussão coletiva dos resultados da atividade de investigação matemática da aula anterior. Após isto, com o auxílio do software GeoGebra<sup>8</sup> e dos sólidos geométricos de acrílico, trabalhei planificação de sólidos. O objetivo desta aula foi fazer uma ponte entre o concreto e o abstrato. Os pontos que mereceram destaques na aula foram:

#### *Refinamento de conjecturas: usando outros recursos para concretizar o abstrato*

Tentando apresentar a planificação de um prisma de base retangular notei que os alunos apresentavam dificuldades para visualizar tal representação. Dessa forma, utilizei uma caixa de remédio, com o mesmo formato e fiz os cortes para planificar. Em seguida, com o auxílio do GeoGebra desenhei um prisma de base retangular e usei o comando<sup>9</sup> de planificação de sólidos deste programa para planificar este sólido e outros que também desenhei no software. Um fato interessante sobre o GeoGebra é que ele permite a visualização da planificação como uma animação que mostra a planificação do sólido como a abertura gradual de cada uma de suas faces. Feito isto, eles disseram que compreenderam melhor.

#### *Refinamento de conjecturas: estratégias utilizadas pelos discentes para contornar dificuldades*

Como verificação de aprendizagem, solicitei que escolhessem dois sólidos quaisquer, dos dispostos na mesa, e desenhassem no caderno sua planificação. Na turma 1 os alunos escolheram prismas. Já na turma 2, além de prismas escolheram sólidos como cone, pirâmides e icosaedro. Embora pareça ser uma atividade simples, para eles não foi. A dificuldade de abstração ainda estava presente, principalmente na turma 2 que além dos prismas escolheram alguns corpos redondos. O que resultou numa discussão produtiva, principalmente nos casos dos sólidos que não dispunham de arestas.

---

<sup>8</sup> Software dinâmico de matemática que combina conceitos de álgebra e geometria numa mesma interface gráfica.

<sup>9</sup> O GeoGebra apresenta a planificação do poliedro a partir do comando Planificação (Poliedro,n), onde n deve ser um número entre 0 e 1 que representa o percentual de abertura das faces, onde  $n = 0$  significa completamente fechado e  $n = 1$  completamente aberta, isto é, planificada.



Como eu não queria interferir falando como deveria ser a planificação, pedi que pensassem mais um pouco. Foi quando um deles pegou uma folha de papel e, cortando-a, construiu um cone para ver como ficaria a planificação após “desmontá-lo”. Talvez esta atitude possa ter sido influenciada pelas animações criadas no GeoGebra que “desmontavam” o sólido até apresentar sua planificação, junto com a exposição que fiz na aula anterior com a caixa de remédios. Isto é, a dificuldade de abstração apresentada inicialmente foi contornada com a utilização de estratégias combinadas, tornando a manipulação de algum objeto concreto facilmente disponível como referência do trabalho abstrato que foi dado.

#### **Dia 4**

O conteúdo trabalhado neste dia foi projeção ortogonal. Além da compreensão do que é projeção ortogonal, o intuito desta aula continuou sendo melhorar a capacidade de abstração dos discentes. Usei o GeoGebra como recurso para me auxiliar nos desenhos dos sólidos e para trabalhar com as projeções, de maneira dinâmica, uma vez que o software permite fazer rotações nos sólidos, colocar e retirar elementos e várias outras funções interessantes que dinamizam a aula. É importante ressaltar que, apesar da aula ter apresentado um caráter expositivo, os alunos participaram de maneira ativa. O engajamento dos alunos foi bastante satisfatório e percebia-se por meio de suas atitudes que participar da aula estava sendo prazeroso. Passo aos pontos de destaque dessa aula.

#### *Refinamento de conjecturas: trabalhando a abstração*

Em ambas as turmas, como auxílio do GeoGebra, desenhei alguns sólidos dos escolhidos por eles na aula anterior e os planifiquei. Usei um recurso do software que permite movimentar a planificação de maneira que o sólido seja “montado e desmontado”. Logo após, introduzi projeção ortogonal, também com o auxílio do software, desenhei alguns segmentos nas faces e no interior do sólido e solicitei que eles fossem ao quadro branco e desenhassem as projeções daqueles segmentos referentes a alguma base pré-determinada por mim. Após cada projeção desenhada no quadro, conferíamos no software de maneira dinâmica.

*Envolvimento ativo do aluno: conquistando o público*

Um fato relevante foi que, diferente do primeiro dia, a maioria os alunos da turma 1 se propôs ir ao quadro e desenhar a projeção solicitada. Alguns se propuseram a ir mais de uma vez, além de discutirem os resultados entre eles sem que minha intermediação fosse necessária.

**Dias 5 e 6**

Apliquei então a segunda atividade investigativa, agora com o conteúdo de geometria espacial. Nela foram abordados os conteúdos vistos nas aulas anteriores: planificação de sólidos e projeções ortogonais. Foram utilizadas 3 horas/aula para a execução completa da mesma. Alguns pontos merecem ser destacados:

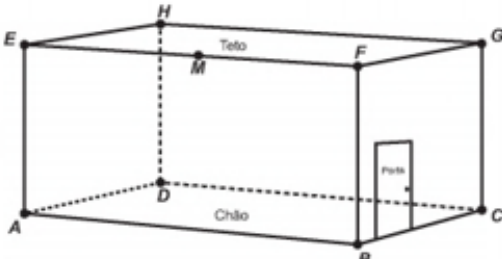
*Envolvimento ativo do aluno: identificação com a metodologia*

Neste momento os alunos já estavam mais à vontade com este tipo de atividade. Inclusive, numa das turmas cujas aulas conjuntas são nos dois últimos horários, os discentes permaneceram na sala, mesmo após o tempo ter se esgotado e eu dizendo que poderiam concluir na aula do dia seguinte.

*Formulação e refinamento de conjecturas: discussões relevantes durante o desenvolvimento da situação 1*

Figura 3. 3- Situação 1 da atividade investigativa 1

**Situação 1.** (Enem 2017-adaptada) Uma lagartixa está no interior de um quarto e começa a se deslocar. Esse quarto, apresentando o formato de um paralelepípedo retangular, é representado pela figura.



A lagartixa parte do ponto  $B$  e vai até o ponto  $A$ . A seguir, de  $A$  ela se desloca, pela parede, até o ponto  $M$ , que é o ponto médio do segmento  $EF$ . Finalmente, pelo teto, ela vai do ponto  $M$  até o ponto  $H$ . Considere que todos esses deslocamentos foram feitos pelo caminho de menor distância entre os respectivos pontos envolvidos.

- Represente a projeção ortogonal desses deslocamentos no plano que contém o chão do quarto.
- Considerando uma planificação do quarto sobre o plano que contém o chão, represente o deslocamento feito pela lagartixa.

Fonte: acervo da autora

No geral, no item a não houve muita dificuldade. O que eles discutiram entre si foi se deveriam representar passo a passo cada uma das projeções ou se deveriam colocar uma projeção incluindo todos os percursos.

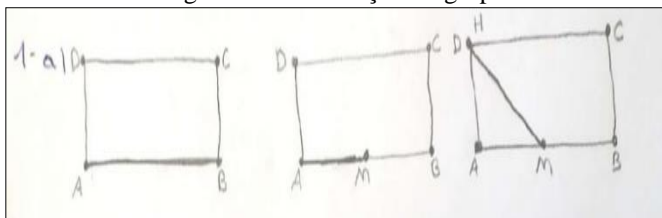
Já no item b, ao planificar o paralelepípedo, uma das dúvidas mais comuns foi onde ficariam os vértices na planificação: “professora, este vértice pode aparecer mais de uma vez?”. “E onde ficará o Ponto  $M$ ?” Sugeri que pensassem no processo inverso. Que, a partir da planificação, eles formassem o sólido novamente e verificassem se os vértices seriam os mesmos do sólido anterior. Com isto, alguns grupos localizaram alguns vértices.

Outros, inicialmente, preferiram não identificar os vértices. Disseram que não influenciaria na resposta. Porém, após tentarem, viram que a identificação dos vértices seria necessária para melhor localizar os segmentos projetados.

Vejamos algumas resoluções:

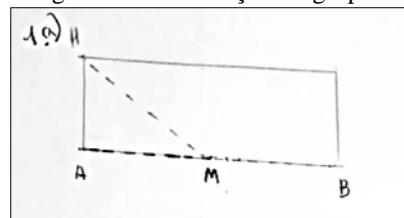
*Situação 1a: Como representar a projeção ortogonal?*

Figura 3. 4- Resolução do grupo G



Fonte: acervo da autora

Figura 3. 5- Resolução do grupo H



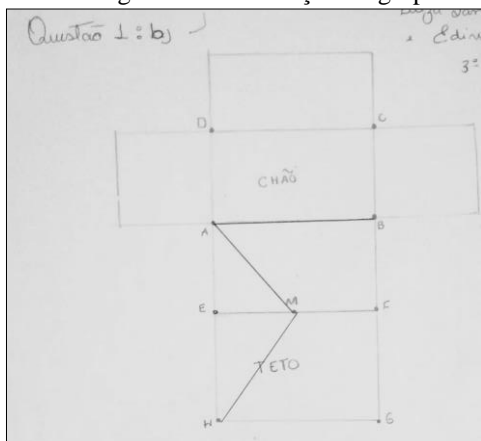
Fonte: acervo da autora

Enquanto o grupo G se preocupou em identificar os vértices e desenhou três vezes a base referente ao chão do quarto para poder representar cada uma das projeções dos segmentos de reta, o grupo E preferiu fazer uma única representação para a projeção de todo o percurso da lagartixa, mas tomaram o cuidado de escurecer parte da projeção para frisar que havia um segmento projetado sobre o outro.

*Situação 1b: Questões topológicas: Onde desenhar o teto? Como traçar MH?*

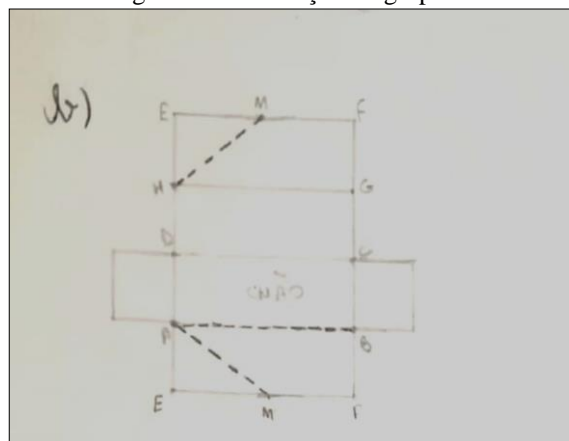
A seguir temos a resolução do item b da situação 1 do grupo B e do grupo H, respectivamente.

Figura 3. 6- Resolução do grupo B



Fonte: acervo da autora

Figura 3. 7 Resolução do grupo H



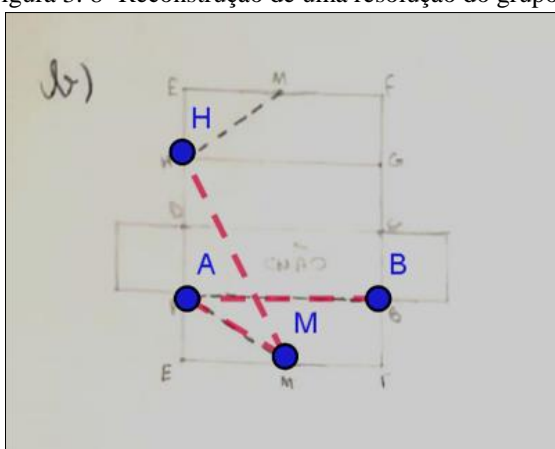
Fonte: acervo da autora

Percebe-se que não identificaram todos os vértices e que a resolução do grupo H difere do grupo B. Nota-se ainda que ao planificar o sólido, o grupo H deixou a aresta GH comum as faces CDHG e EFGH, mas percebeu que o ponto M poderia ser representado duas vezes. Já que o mesmo era ponto médio da aresta EF e esta apareceu duas vezes.

Vale aqui registrar algo que ocorreu durante a atividade. Ao me aproximar do grupo, pude ouvir uma discussão entre os quatro membros. Dois acreditavam que deveriam fazer a planificação e só depois traçar o caminho percorrido pela lagartixa e os demais que deveriam traçar o percurso e depois planificar. Quando me viram pediram que eu dissesse quem estava pensando corretamente. Sugeri que fizessem dos dois jeitos e depois relessem o caminho descrito na questão.

Embora tenha pedido para que não apagassem, acabaram assim fazendo e deixaram apenas o que achavam que estava correto. Por isto reproduzi, em vermelho a outra resolução.

Figura 3. 8- Reconstrução de uma resolução do grupo H



Fonte: acervo da autora

Professora: “Por que ficaram com esta resolução?” (referindo-me a figura 3.5)

H1: “Eu e H2 dissemos desde o começo que era assim, mas insistiram na outra resposta”

Professora: “E você H4, se convenceu de que sua resolução não era a mais coerente de que forma?”

H4: “Eu não me convenci, professora. Continuo achando que estou certa”

Professora: “Então porque deixaram esta?”

H3: “Porque a maioria venceu!”

Professora: “Como você se convenceu de que esta é a resolução correta?”

H3: “Simples, se a outra fosse a correta, indicaria que a lagartixa também teria passado pelo chão e pela outra parede.”

Professora: “Mas os pontos M e H, pertencem ao plano que contém o chão?”

H3: “Acho que não. Mas depois de planificado sim.”

H1: “Elas ainda estão pensando que é pra traçar depois.”

H2: “Imagine que a lagartixa deixa um rastro de tinta, agora planifique o quarto”

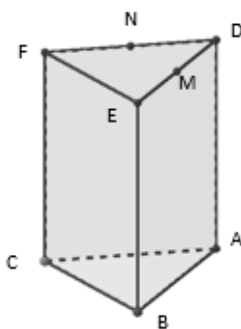
H3: “Hum acho que agora estou entendendo”

H4: “Vá deixe essa!” (Mostrando que ainda não estava convencida)

*Formulação e refinamento de conjecturas: discussões relevantes durante o desenvolvimento da situação 2*

Figura 3. 9- Situação 2 da atividade investigativa 1

**Situação 2-** Uma formiga está no interior de uma caixa e começa a se deslocar. Essa caixa, possui o formato de um prisma, conforme a figura:



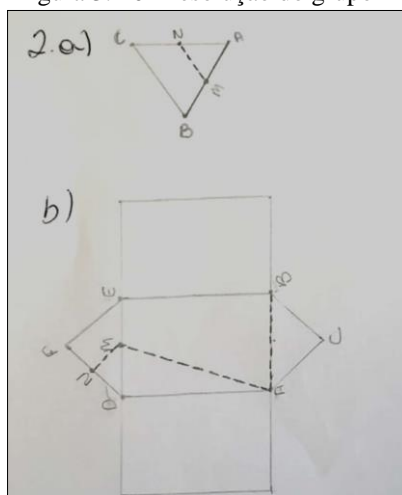
A formiga parte do ponto  $B$  e vai até o ponto  $A$ . A seguir, de  $A$  ela se desloca, pela parede, até o ponto  $M$ , que é o ponto médio do segmento  $DE$ . Finalmente, pelo face superior, ela vai do ponto  $M$  até o ponto  $N$  que é ponto médio do segmento  $DF$ . Considere que todos esses deslocamentos foram feitos pelo caminho de menor distância entre os respectivos pontos envolvidos.

- Represente a projeção ortogonal desses deslocamentos no plano que contém a base  $ABC$
- Considerando uma planificação da caixa sobre o plano que contém o retângulo  $ABDE$  represente o deslocamento da formiga.

Fonte: acervo da autora

A seguir temos a resolução do grupo H

Figura 3. 10- Resolução do grupo H



Fonte: acervo da autora

Embora H4 ainda não estivesse convencido o grupo decidiu pensar de maneira semelhante a situação anterior. Mantiveram, inclusive, a ideia de identificar apenas os vértices e pontos que para eles seriam necessários para a resolução.

#### *Discussão e argumentação dos resultados: dificuldade de comunicação vencida*

Diferentemente da primeira atividade investigativa, não foi necessário induzi-los a discussão na fase final. Eles mesmos apresentaram suas resoluções e questionaram os resultados. Neste momento o grupo H falou da discussão interna que tiveram em relação a resolução do item b da situação 1 o que foi interessante, pois na tentativa de “convencer” H4 de que seu pensamento não fazia sentido, naquele contexto, os outros grupos (que não tinham pensado na possibilidade de ir pelo “caminho” adotado por H4) puderam criar algumas hipóteses e verificar se eram válidas ou não.

#### **Dia 7**

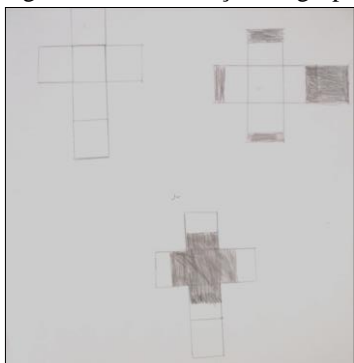
Nesta aula ainda foi trabalhado o conteúdo de planificação de sólidos por meio de uma outra atividade investigativa. Porém a segunda proposta (situação 2) objetivou, além de trabalhar o processo contrário de planificação, ou seja, a partir de uma planificação visualizar o sólido, revisar áreas de figuras planas e identificar sólidos geométricos. Vide a atividade no apêndice 3.

Alguns fatos foram observados durante a execução da atividade. São eles:

#### *Formulação de conjecturas: Um cuidado que não foi tomado ao usar o GeoGebra*

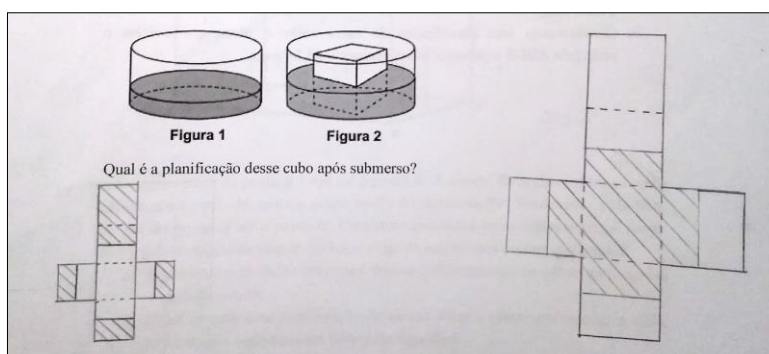
Na situação 1, onde o aluno precisava representar uma planificação de um cubo nas condições dadas, pude perceber que o entendimento de planificação de sólidos não foi alcançado de maneira satisfatória. Pois notei em ambas as turmas, que a maioria dos grupos fez a mesma planificação e ao solicitar que fizessem outra planificação, disseram que independente da face que fixassem obteriam a mesma planificação, o que chamaram de “formato de cruz” e que a única coisa que mudaria seria a parte pintada. Por exemplo:

Figura 3. 11- Resolução do grupo A



Fonte: acervo da autora

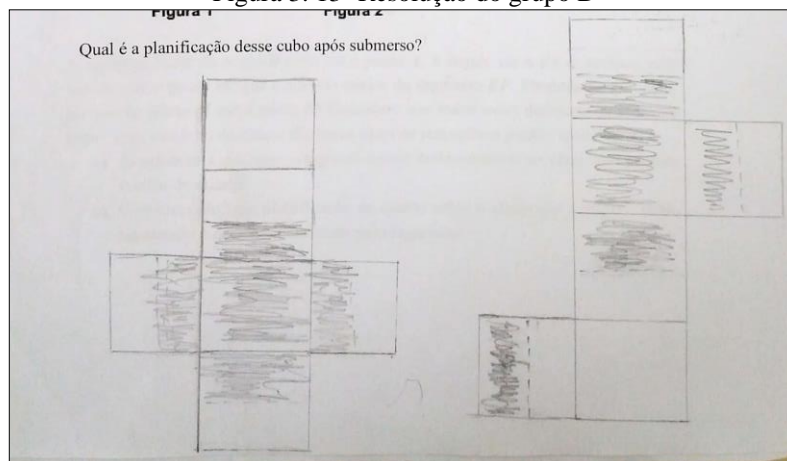
Figura 3. 12- Resolução do grupo C



Fonte: acervo da autora

Porém, o grupo D foi único grupo de ambas as turmas que registrou de imediato uma planificação diferente quando solicitado.

Figura 3. 13- Resolução do grupo D



Fonte: acervo da autora

Na hora da discussão final pude perceber que o conceito que eles tinham sobre planificação se dera pelo fato de, ao usar o GeoGebra como ferramenta para planificar sólidos, o software mostrar apenas as planificações mais simples. Que seriam, à grosso modo, aquelas planificações onde fixa-se uma base e “abre-se” o sólido pelas arestas perpendiculares ou oblíquas as bases.

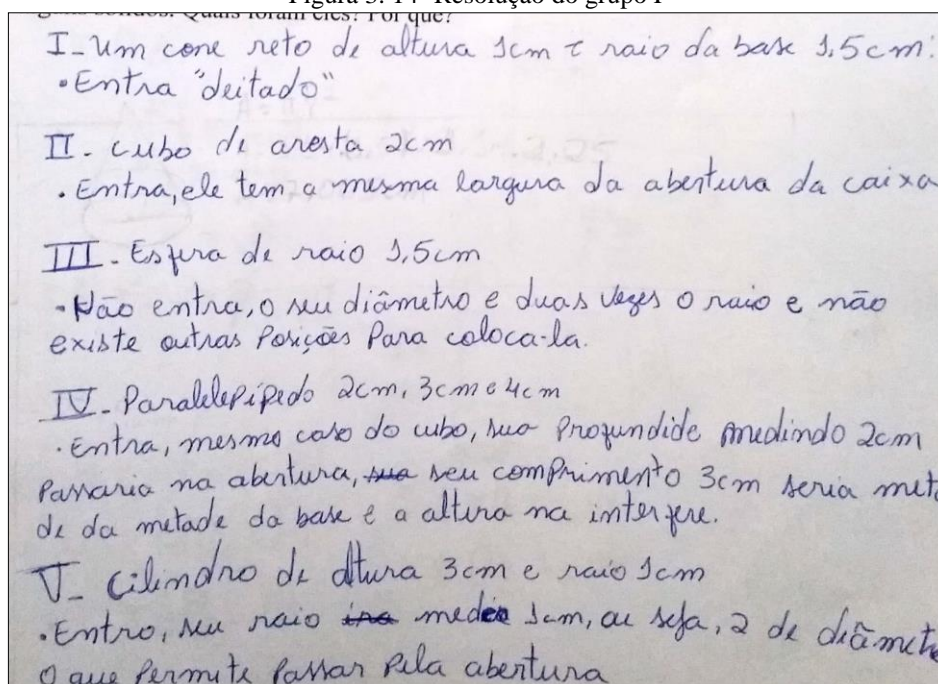
#### *Formulação e refinamento de conjecturas: dificuldade de abstração*

Pensar no processo oposto, a princípio, parece simples. No entanto, os discentes apresentaram muita dificuldade na situação 2 da atividade (vide apêndice 3). Nela eles precisariam pensar no processo inverso da planificação de uma caixa no formato de um paralelepípedo e verificar quais sólidos (com as dimensões propostas no problema) caberiam dentro da mesma. Inicialmente, eles desconsideraram a tampa concluindo então que todos os



sólidos entrariam e caberiam na caixa sem quaisquer dificuldades. Solicitei que lessem novamente o enunciado da questão, assim perceberam que precisavam fazer mais uma “dobradura” e que desta forma teriam uma tampa com uma abertura de dimensões de dois centímetros de largura e nove centímetros de comprimento. Relataram que todos os sólidos caberiam na caixa independentemente de como ficariam organizados, logo o que precisavam averiguar era se os sólidos passariam pela abertura da tampa. A solução que segue foi apresentada pelo grupo F.

Figura 3. 14- Resolução do grupo F



Fonte: acervo da autora

### Dias 8, 9 e 10

Estas aulas foram desenvolvidas no laboratório de matemática. O conteúdo trabalhado nestes dias foram áreas e volumes de sólidos e a metodologia usada foi Resolução de Problemas. Também foram usados recursos como: material dourado<sup>10</sup>, sólidos de acrílico e o software GeoGebra.

*A investigação matemática possibilita fazer uma avaliação instantânea e contínua da aprendizagem do conteúdo.*

<sup>10</sup> Material criado pela médica e educadora italiana Maria Montessori (1870-1952) para trabalhar o conteúdo de aritmética. Porém muitos outros conteúdos podem ser abordados usando este material.

Iniciei com um problema no qual eles precisariam determinar a área da superfície de um objeto que tinha forma cilíndrica. Quando indaguei sobre como resolver o problema, sem hesitar, responderam: “É fácil, basta planificar o cilindro.” Só isso? perguntei. “Tem que encontrar as áreas das figuras planas e somar.”, disse um deles. Neste momento notei que eles conseguiram associar ao objeto um modelo matemático e ainda encontrar uma forma de calcular a área da superfície cilíndrica sem uso de fórmulas prontas, ou seja, por meio do conceito de planificação.

#### *Dedução de resultados matemáticos ao invés de fórmulas prontas*

Com a sugestão dada por eles, conseguimos resolver o problema. Em seguida, fiz as seguintes perguntas: “E se o objeto tivesse o formato de um cone? E de um cubo? E se fosse de uma esfera?”

Para as duas primeiras perguntas eles responderam de maneira semelhante: “basta planificar.” Mas para a última não souberam responder. O que eu já previa. Ressaltei que, como esfera não pode ser planificada precisaríamos deduzir a fórmula de outra forma.

Em seguida trabalhei volume de um paralelepípedo qualquer usando o material dourado tomando como unidade de volume o menor cubo do material. Após desenvolver, de maneira intuitiva, o volume de um prisma de base retangular deduzimos, usando o Princípio de Cavaliere, algumas fórmulas de volume. E a partir do volume da esfera vimos, intuitivamente, como calcular a área da superfície de uma esfera.

Para fixação do conteúdo, ao final da discussão e do desenvolvimento de resultados matemáticos solicitei que resolvessem um problema<sup>11</sup>. Sentaram-se em duplas. O que me chamou atenção durante a resolução foi que a maioria estava tentando resolver o problema sem usar a fórmula pronta, embora fosse muito mais fácil naquele momento aplicar a fórmula, que eles já tinham, estavam tentando entender o problema para deduzi-la. É como se, para eles, a resolução feita desta forma fizesse mais sentido. No entanto, só consegui ter este olhar porque os estava acompanhando e escutando as discussões entre eles, pois se fosse olhar apenas as soluções no caderno, não chegaria a tal conclusão, visto que as respostas aparecem como aplicação da fórmula.

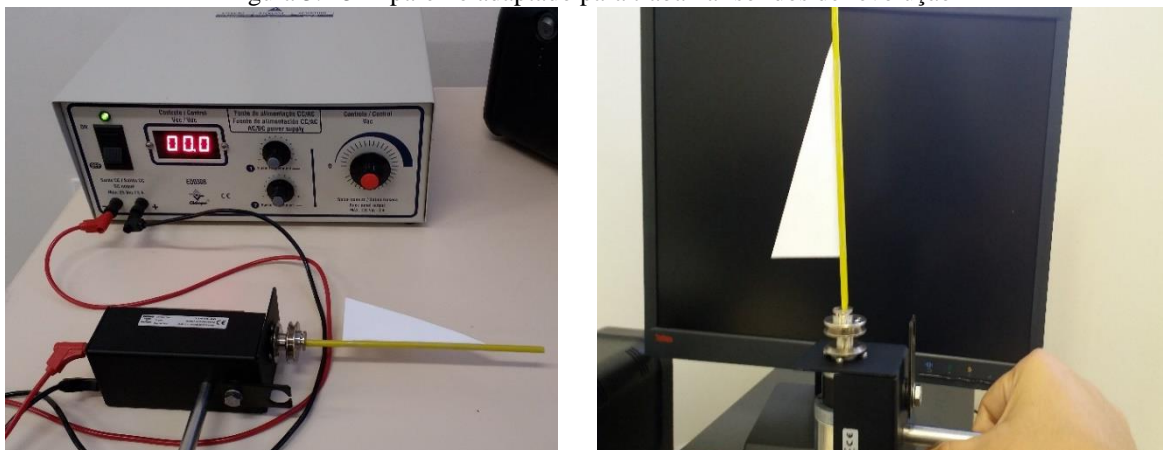
---

<sup>11</sup> O problema é o de número 9 da página 222 do livro de Dante (2014) cuja referência encontra-se junto as outras referências deste trabalho.

## Dia 11

Nesta aula trabalhei sólidos de revolução. Utilizei um recurso, construído com a ajuda de um professor de física do campus, que facilitava a visualização do sólido de revolução a partir de um figura plana e rotação em torno de um eixo. O recurso era composto por uma fonte alimentação, um motor, uma haste e figuras planas feitas em papel cartão.

Figura 3. 15- Aparelho adaptado para trabalhar sólidos de revolução



Fonte: acervo da autora

### *Ainda trabalhando abstração*

Ao pegar cada uma das figuras planas, perguntava a eles que tipo de sólido seria formado quando a haste começasse a girar. Viram que a partir do triângulo com um dos lados sob o eixo de rotação, obtínhamos o cone reto; do retângulo com um dos lados sob o eixo, o cilindro reto; e do semicírculo com diâmetro sob o eixo de rotação, a esfera.

Perguntei depois qual tipo de sólido formaria se ao invés de um dos lados do triângulo fixássemos o vértice. E solicitei que tentassem desenhar, no quadro branco.

A dificuldade de desenhar em três dimensões era visível, salvo um aluno que tem muito potencial para a arte e faz muitos desenhos. No entanto, percebi (por meio de explicações dos desenhos) que eles conseguiam visualizar a maioria dos sólidos.

## Dias 12 e 13

Nestes dias foi aplicada a última atividade investigativa que naquele momento já não tinha um perfil tão investigativo assim, pois o objetivo era verificar o aprendizado dos alunos em relação a maioria do conteúdo de geometria espacial visto.

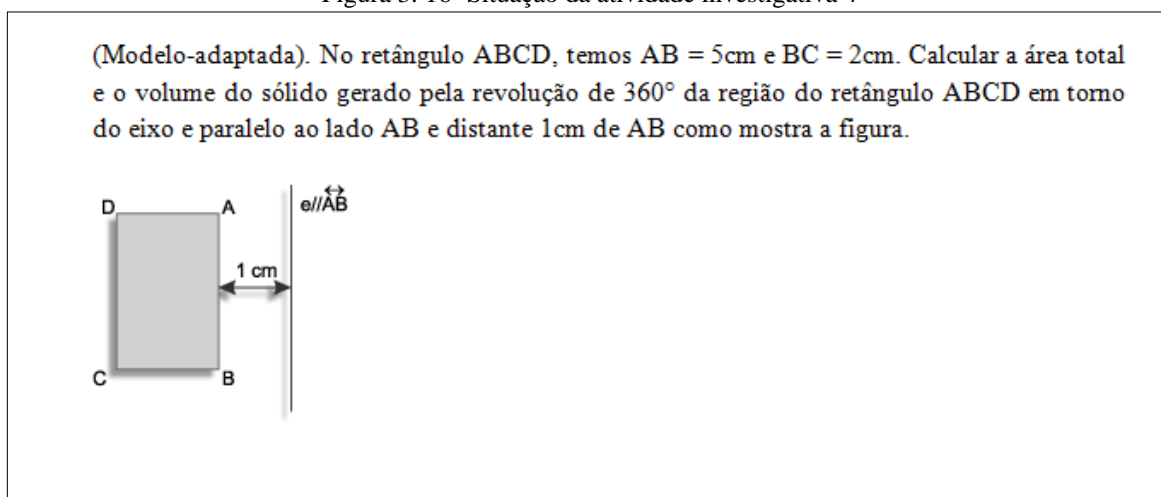
### *A questão do tempo*

A princípio eu tinha programado usar a hora aula do dia 12 e apenas uma hora aula do dia 13. Porém, não foram suficientes duas horas/aula, acabei utilizando as três horas/aula dos dias 12 e 13. Achei que como os alunos já estavam acostumados com este tipo de atividade e como já tinham estudado o conteúdo seria muito mais fácil e rápida a resolução da situação proposta. Mas não foi assim.

### *A dificuldade de abstração continua ou faltou cuidado ao manusear o recurso de rotação?*

A situação proposta foi:

Figura 3. 16- Situação da atividade investigativa 4



Fonte: acervo da autora

A primeira turma em que apliquei a atividade foi a turma 2. A dificuldade de abstração persistiu, tentei auxiliá-los de maneira que não desse a resposta, mas não consegui ajudá-los. Eles só conseguiam enxergar um cilindro, apenas um aluno conseguiu enxergar o sólido formado corretamente. Será que por eu sempre ter colocado uma parte da figura sobre o eixo de rotação dificultou o fato de eles enxergarem a situação proposta no problema?

Vi então que seria interessante levá-los (ainda na aula do dia 12) para o laboratório de informática para que eles mesmos manipulassem o GeoGebra e desta forma se tornasse mais fácil a visualização. Sentaram-se em duplas e fui falando o passo-a-passo para a construção do sólido. Com isto, disseram que conseguiram visualizar o sólido.

Como já tinha passado esta experiência com a turma 2, preferi levar logo a turma 1 para o laboratório de informática. Lá entreguei as atividades aos grupos e, após um tempo, vi que

tinham a mesma dificuldade que a turma 2 em relação a visualizar o sólido. Recorri à manipulação no GeoGebra novamente.

*Análise de algumas discussões e respostas registradas*

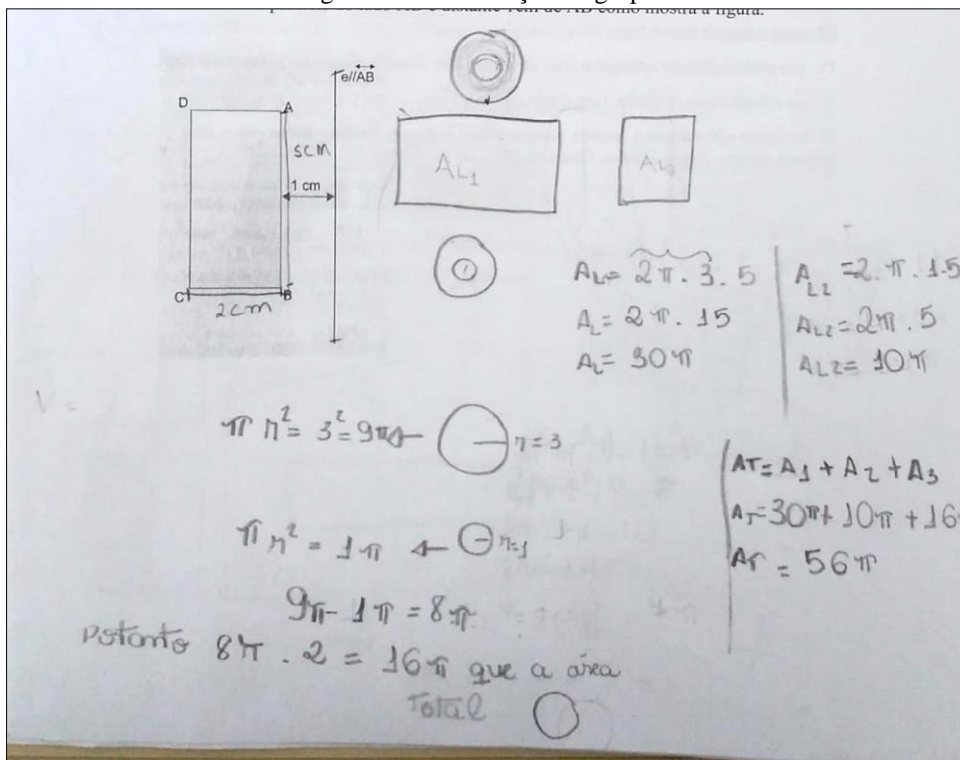
A aula seguinte (dia 13) ocorreu no ambiente de sala de aula. Pedi que continuassem a atividade. Vejamos alguns pontos que se destacaram:

Nenhum dos grupos da turma 1 conseguiu calcular o volume do sólido. Queriam uma fórmula pronta para aplicar as condições do sólido. Na finalização da atividade tentei instigá-los a pensar um pouco mais e se seria possível deduzir um fórmula. Mas não conseguiram. Talvez já estivessem cansados.

Já na turma 2 todos os grupos buscaram meios para calcular o volume. Alguns fizeram uma relação com sólidos conhecidos e outros usaram a noção intuitiva de volume.

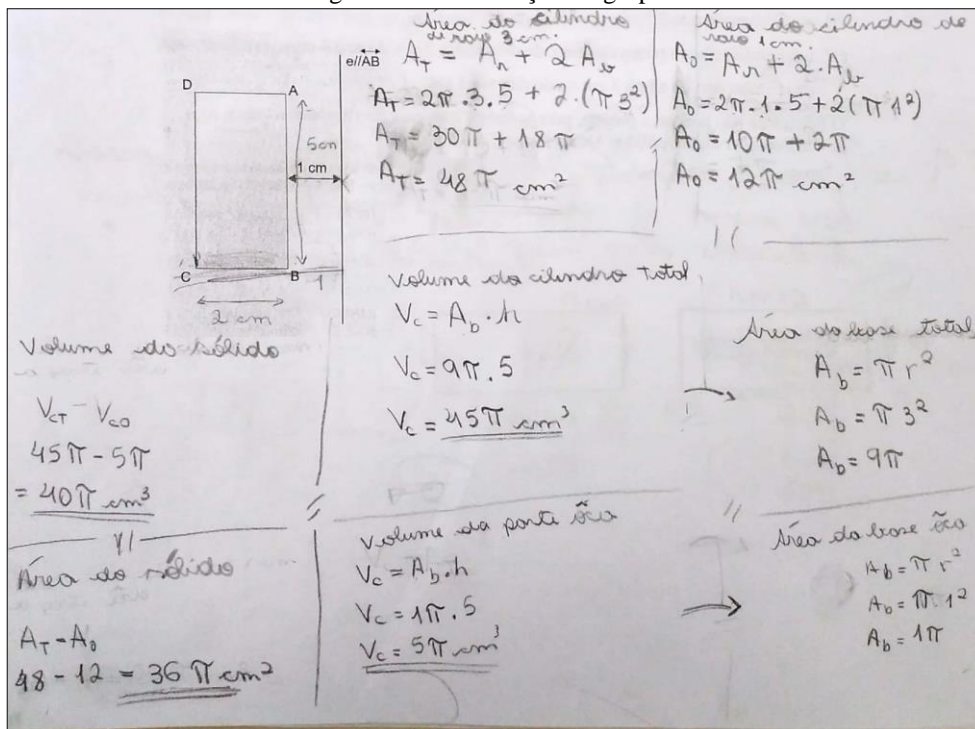
As imagens a seguir ratificam isso. Temos soluções dos grupos B, E , F e H respectivamente.

Figura 3. 17- Resolução do grupo B



Fonte: acervo da autora

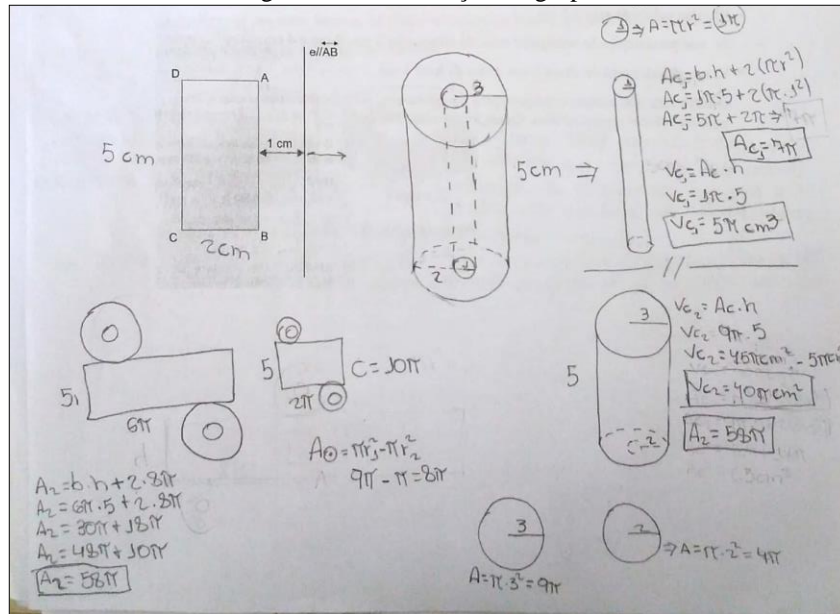
Figura 3. 18- Resolução do grupo E



Fonte: acervo da autora

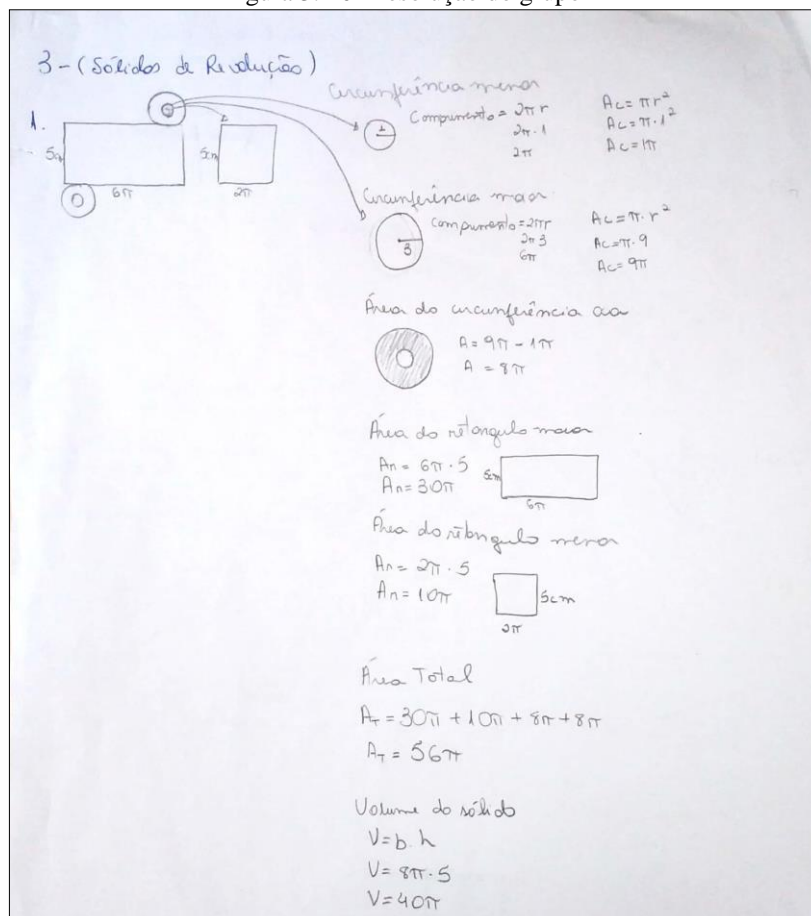


Figura 3. 19- Resolução do grupo F



Fonte: acervo da autora

Figura 3. 20- Resolução do grupo H



Fonte: acervo da autora

Notemos que dos grupos, apenas o E não fez registros de desenhos na folha. Porém eles fizeram num rascunho à parte para poderem visualizar melhor. Logo, todos eles perceberam que o desenho os auxiliaria.

### *O professor visto como detentor do saber*

As resoluções da turma 1 foram muito semelhantes a do grupo B. Percebe-se que separaram “as peças” que formam o sólido e calcularam as áreas de cada uma das figuras planas e depois somaram para encontrar a área total. Isto parece que foi feito em apenas alguns minutos, mas levaram quase 60 minutos para chegarem a um ponto em comum. Enquanto discutia com o grupo B sobre as hipóteses levantadas notei que os demais grupos da turma estavam prestando atenção em nós. Imaginei que seria interessante para eles e os deixei observar. No entanto, percebi que houve uma influência direta, pois ao me aproximar dos demais grupos para ver como estava o desenvolvimento, todos eles haviam apagado suas respostas e feito como o grupo B tinha proposto só porque me viram dizer que a proposta de calcular as áreas era interessante.

Como vi que tinha acontecido isto na turma 1 ao chegar na turma 2 tomei cuidado em não deixá-los ouvir minhas discussões com os demais grupos.

Apesar de as aulas serem nos dois últimos horários do turno, a turma 2 mostrou-se mais disposta para discutir a atividade e fizeram tudo que lhes foi proposto.

### *Destaques no cálculo da área*

Os grupo F e H tiveram o mesmo raciocínio que o grupo B. Com destaque para o grupo F que desenvolveu uma fórmula a partir do observado. Mas nos registros calculou duas áreas uma referente ao cilindro interno e outra referente ao cilindro externo e não a área total.

Já o grupo H, talvez por ter feito inicialmente o cálculo do volume e não da área. Desenvolveu uma fórmula para o cálculo das áreas do cilindro interno e do cilindro externo que compõem o sólido e subtraíram uma área da outra. Pois fizeram a diferença também no volume.



### *Destaques no cálculo do volume*

Conforme dito antes, o grupo H iniciou a atividade calculando o volume. Rapidamente eles perceberam que se não tivesse a parte oca o sólido seria um cilindro. Daí fizeram o volume do cilindro de raio igual a 3cm menos o volume do cilindro de raio igual a 1cm. O grupo F desenvolveu atividade de maneira semelhante ao grupo H. Porém a resolução do grupo E, me chamou muito atenção. Indaguei o fato de terem usado a fórmula do cilindro para calcular o volume do sólido que não era um cilindro. E um dos componentes me falou: “Mas professora não é do cilindro, e sim do sólido “oca”. Se fosse do cilindro colocaríamos a área da base igual a  $9\pi$ .” Perguntei então de onde vieram os  $8\pi$  e disseram que era a área da base do sólido. O que eles chamaram de circunferência “oca”. Notei então que eles usaram a ideia intuitiva de volume de um prisma associada ao princípio de Cavalieri. E começamos a discutir se seria válido para outros sólidos. A discussão se estendeu para a etapa final da atividade investigativa.

### **Dia 14**

Esta foi a última aula com o conteúdo de geometria espacial. Levei uma lista de questões do ENEM (vide apêndice 5) para que pudéssemos discutir algumas delas em sala de aula e as restantes eles fariam em casa e me entregariam. Foi uma aula expositiva-dialogada, com participação ativa dos alunos. Antes de discutirmos as questões eu estipulei um tempo de 15 minutos para que eles tentassem resolver algumas questões para depois (ainda na aula) discutirmos coletivamente as questões.

### *Problemas de interpretação de texto*

Durante este tempo observei os alunos e percebi que as duas primeiras questões foram as que eles fizeram mais rápido e não demonstraram dificuldades. Infelizmente, só deu tempo de discutir coletivamente até a quinta questão. Mas durante as resoluções no quadro pude perceber que a dificuldade de interpretação, presente desde o primeiro dia do processo, ainda persistia em algumas situações, como por exemplo a do problema de número 3, na qual é necessário fazer uma decomposição a partir de um sólido já existente. Por outro lado, vale destacar, que não apresentaram dificuldades na aplicação dos conceitos geométricos estudados.

## CONSIDERAÇÕES FINAIS

Diante do exposto, podemos destacar algumas vantagens e desvantagens do trabalho com Investigação Matemática no processo ensino-aprendizagem, a partir do uso desta metodologia no ensino de geometria espacial.

No relato fica evidente que, ao passar pelas quatro etapas, destacadas por Ponte, Oliveira e Brocado (2009), os discentes se sentiram desafiados e motivados, uma vez que assumiram o papel de protagonistas do conhecimento ao criarem e testarem suas próprias conjecturas. Ainda, ao se reunirem em grupos podiam compartilhar, descobrir e aprender saberes matemáticos. Vendo assim que a matemática é uma ciência em permanente construção.

A abordagem investigativa permite atingir objetivos que talvez de outra forma não fosse possível. É incontestável o quanto os alunos se desempenharam e aprenderam com o uso desta metodologia. Como professora, pude perceber isto ao longo das atividades que me possibilitaram avaliar de maneira contínua e, embora difícil, acompanhar as dificuldades dos alunos mais de perto e assim saber onde trabalhar mais especificamente.

Embora no início tenha havido um pouco de resistência por parte dos discentes, o que é compreensível já que era uma metodologia nova para eles, posteriormente vieram a aceitação e a melhoria no desempenho. Alunos que outrora não demonstravam nenhum interesse pela matemática, destacaram-se argumentando e discutindo os problemas matemáticos propostos.

Além disto, é importante frisar que o professor se depara com situações, respostas e/ou indagações inesperadas, que é desafiador. Desse modo, é preciso estar preparado e com grande domínio do conteúdo. O docente precisa dar apoio aos alunos sem comprometer suas autonomias da aprendizagem. Precisa saber gerir o tempo em sala de aula e também dispor de mais tempo para a preparação de atividades investigativas.

Em contrapartida, ao refletir sobre os efeitos do uso desta metodologia no processo de ensino aprendizagem, nota-se que os desafios que se apresentam e o tempo “gasto” são recompensados, permitindo proporcionar aos alunos uma experiência matemática legítima, na qual puderam ver como as ideias matemáticas são construídas, isto é, notar que a matemática não é um conjunto de fórmulas prontas e acabadas.

Ficam ainda alguns questionamentos para trabalhos futuros: Quais fatores externos e internos influenciam no sucesso da aplicação de investigações matemáticas? Há turmas ou até mesmo escolas com infraestrutura mais adequada para a aplicação dessa metodologia? Dependendo do conteúdo abordado, esta metodologia pode ser mais ou menos indicada? E o fator tempo, será que é possível reduzir o tempo de aplicação da metodologia ou é inerente à

investigação tomar o tempo necessário para que os alunos consigam aprender o conteúdo? Turmas e professores que já conhecem a metodologia, conseguem reduzir o tempo de aplicação? Quais restrições devem ser consideradas ao se trabalhar com investigações matemáticas?

## REFERÊNCIAS

BRASIL. Secretaria da Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática**. Brasília: MEC/SEF, 1998.

CLEMENTE, J.C. *et al.* **Ensino e aprendizagem da geometria: um estudo a partir dos periódicos em educação matemática**. In. VII Encontro Mineiro de Educação Matemática. 2015, São João del-Rei. *Anais eletrônicos...* São João del-Rei: UFSJ, 2015. Disponível em: <http://www.ufjf.br/emem/programacao/comunicacoes-cientificas/cc-textos-completos/>. Acesso em: 17 de ago. 2018.

DANTE, L. R. **Matemática Contexto e Aplicações**. Volume 2. Segunda edição. São Paulo: Ática, 2014.

DOLCE, O. POMPEO, J. N. **Fundamentos de matemática elementar**. 5ª ed. São Paulo: Atual, 1993.

ENEM– Exame Nacional do Ensino Médio. **INEP - Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira**. Ministério da Educação. Disponível em: <http://portal.inep.gov.br/provas-e-gabaritos> . Acesso em: 04 de jun. de 2018.

LIMA, E. L., CARVALHO, P. C. P., WAGNER, E. e MORGADO, A. C. **A Matemática do Ensino Médio**. Volume 2. 6ª edição. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

LORENZATO, S. **Porque não ensinar Geometria?** Educação Matemática em Revista. v. 3, n. 4, p. 3-13, 1995.

MATEMÁTICA: **Conteúdo acadêmico**. Disponível em: <http://sbrecci.com/matematica/aula-284/> Acesso em 04 de jun. de 2018

MENEZES, P. V. S. **Métodos de contagem: uma abordagem investigativa**. 2016. Dissertação (PROFMAT) — Programa de Pós-Graduação em Matemática, Universidade Federal de Sergipe, Itabaiana.

OBMEP 2013. **Banco de Questões**. Disponível em: <http://www.obmep.org.br/banco.htm> Acesso em: 04 de jun. de 2018.


PONTE, J. P., BROCARD, J. e OLIVEIRA, H. **Investigações Matemáticas na Sala de Aula**. 2ª edição. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2009.

SANTOS, G. P; SANTOS, I. B. **O movimento da matemática moderna: entendimento(s) de professores que atuavam nas décadas de 60 e 70 em Sergipe**. In: I Colóquio de Matemática da Região Nordeste, 2011, São Cristóvão. *Anais São Cristóvão*, 2011.

## APÊNDICES

|   |   |
|---|---|
| Apêndice 1: <b>Atividade investigativa 1 (Reflexão e simetria de figuras planas)</b> .....                    | 1 |
| Apêndice 2: <b>Atividade investigativa 2 (Planificação de sólidos geométricos e projeção ortogonal)</b> ..... | 3 |
| Apêndice 3: <b>Atividade investigativa 3 (Planificação de sólidos)</b> .....                                  | 5 |
| Apêndice 4: <b>Atividade investigativa 4 (Sólidos de revolução/ volume e área de superfície)</b> .....        | 7 |
| Apêndice 5: <b>Seleção de questões do Enem</b> .....  | 8 |

## APÊNDICE 1

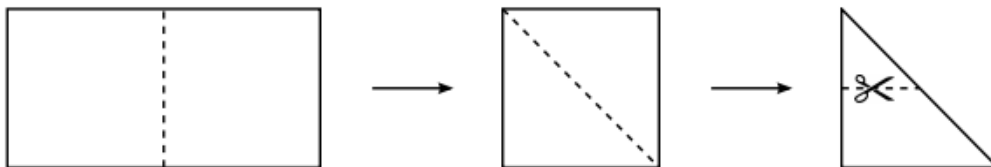
|   |                     |                     |
|---|---------------------|---------------------|
|  <p>INSTITUTO FEDERAL DE<br/>EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA<br/>DE ALAGOAS<br/>CAMPUS PIRANHAS</p> |                     |                     |
| <b>Alunos:</b> _____<br>_____<br>_____  |                     |                     |
| <b>Data:</b> ___/___/___  |                     |                     |
| <b>Disciplina:</b> Matemática   | <b>Turma:</b> _____ | <b>Turno:</b> _____ |
| <b>Professora:</b> Gilberlania Pereira Santos Silva.  |                     |                     |



Atividade investigativa!

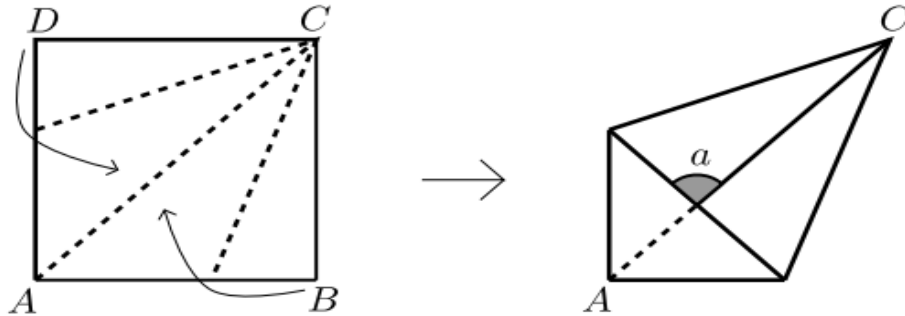
1- (reflexão e simetria de figuras planas)

**Situação 1-** (OBMEP 2013) -Uma folha de papel é retangular, com base igual a 20 cm e altura 10 cm. Esta folha é dobrada nas linhas pontilhadas conforme a figura abaixo, e no final recortada por uma tesoura na linha indicada, a qual é paralela à base e está na metade da altura do triângulo.

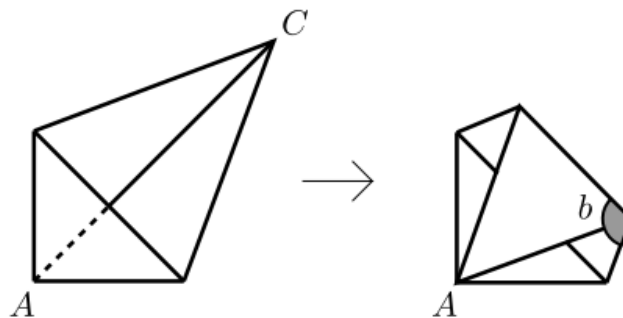


- Depois de cortar no local indicado, em quantas partes a folha ficou dividida?
- Qual a área da maior parte?

**Situação 2-** (OBMEP 2013) Júlio Daniel tem um quadrado de papel com vértices A, B, C e D. Ele primeiro dobra este quadrado de papel ABCD levando os vértices B e D até a diagonal, como mostra a figura a seguir:




E em seguida, Júlio Daniel leva o vértice C até o vértice A, obtendo assim um pentágono, como é mostrado a seguir:



- Mostre que o ângulo  $\alpha$  mede  $90^\circ$ .
- Determine a medida do ângulo  $\beta$ .

## APÊNDICE 2

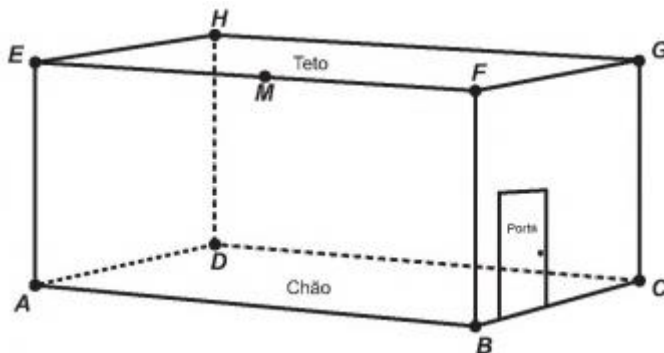
|   |   |
|---|---|
|  <p>INSTITUTO FEDERAL DE<br/>EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA<br/>DE ALAGOAS<br/>CAMPUS PIRANHAS</p> |   |
| <b>Alunos:</b> _____<br>_____<br>_____  |   |
| <b>Data:</b> ___/___/___  |   |
| <b>Disciplina:</b> Matemática   | <b>Turma:</b> _____ <b>Turno:</b> _____ |
| <b>Professora:</b> Gilberlania Pereira Santos Silva.  |   |



Atividade investigativa!

2-(Planificação de sólidos e projeção ortogonal)

**Situação 1.** (Enem 2017-adaptada) Uma lagartixa está no interior de um quarto e começa a se deslocar. Esse quarto, apresentando o formato de um paralelepípedo retangular, é representado pela figura.



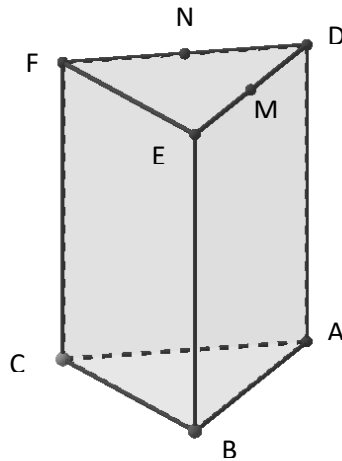
A lagartixa parte do ponto **B** e vai até o ponto **A**. A seguir, de **A** ela se desloca, pela parede, até o ponto **M**, que é o ponto médio do segmento **EF**. Finalmente, pelo teto, ela vai do ponto **M** até o ponto **H**. Considere que todos esses deslocamentos foram feitos pelo caminho de menor distância entre os respectivos pontos envolvidos.

- Represente a projeção ortogonal desses deslocamentos no plano que contém o chão do quarto.



- b) Considerando uma planificação do quarto sobre o plano que contém o chão, represente o deslocamento feito pela lagartixa.


**Situação 2-** Uma formiga está no interior de uma caixa e começa a se deslocar. Essa caixa, possui o formato de um prisma, conforme a figura:



A formiga parte do ponto **B** e vai até o ponto **A**. A seguir, de **A** ela se desloca, pela parede, até o ponto **M**, que é o ponto médio do segmento **DE**. Finalmente, pelo face superior, ela vai do ponto **M** até o ponto **N** que é ponto médio do segmento **DF**. Considere que todos esses deslocamentos foram feitos pelo caminho de menor distância entre os respectivos pontos envolvidos.

- Represente a projeção ortogonal desses deslocamentos no plano que contém a base **ABC**
- Considerando uma planificação da caixa sobre o plano que contém o retângulo **ABDE** represente o deslocamento da formiga.

### APÊNDICE 3

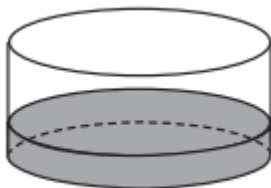
|   |   |
|---|---|
|  <p>INSTITUTO FEDERAL DE<br/>EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA<br/>DE ALAGOAS<br/>CAMPUS PIRANHAS</p> |   |
| <b>Alunos:</b> _____<br>_____<br>_____ <b>Data:</b> ___/___/___   |   |
| <b>Disciplina:</b> Matemática   | <b>Turma:</b> _____ <b>Turno:</b> _____ |
| <b>Professora:</b> Gilberlania Pereira Santos Silva.  |   |



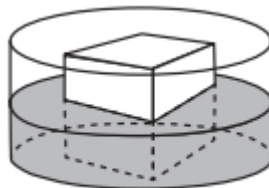
Atividade investigativa!

3- (Planificação de sólidos)

**Situação 1.** (Enem 2015-adaptada) Uma empresa necessita colorir parte de suas embalagens, com formato de caixas cúbicas, para que possa colocar produtos diferentes em caixas distintas pela cor, utilizando para isso um recipiente com tinta, conforme Figura 1. Nesse recipiente, mergulhou-se um cubo branco, tal como se ilustra na Figura 2. Desta forma, a parte do cubo ficou submersa adquiriu a cor da tinta.



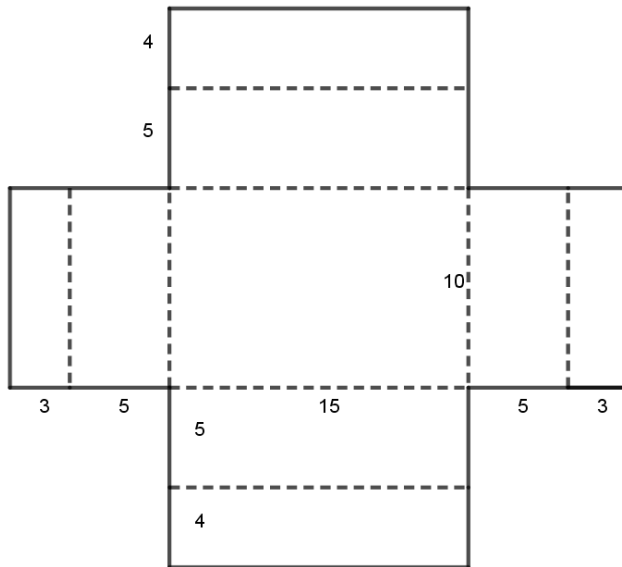
**Figura 1**



**Figura 2**

Qual é a planificação desse cubo após submerso?

**Situação 2.** (Enem 2001-adaptada) Um fabricante de brinquedos recebeu o projeto de uma caixa que deverá conter cinco pequenos sólidos, colocados na caixa por uma abertura em sua tampa. A figura representa a planificação da caixa, com as medidas dadas em centímetros.




Os sólidos são fabricados nas formas de:

- I. Um cone reto de altura 1 cm e raio da base 1,5 cm.
- II. Um cubo de aresta 2 cm.
- III. Uma esfera de raio 1,5 cm.
- IV. Um paralelepípedo retangular reto, de dimensões 2 cm, 3 cm e 4 cm.
- V. Um cilindro reto de altura 3 cm e raio da base 1 cm.

O fabricante não aceitou o projeto, pois percebeu que, pela abertura dessa caixa, só poderia colocar alguns sólidos. Quais foram eles? Por quê?

## APÊNDICE 4

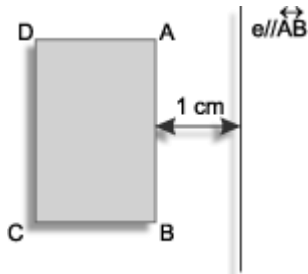
|   |                     |
|---|---------------------|
|  <p>INSTITUTO FEDERAL DE<br/>EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA<br/>DE ALAGOAS<br/>CAMPUS PIRANHAS</p> |                     |
| <b>Alunos:</b> _____<br>_____<br>_____  |                     |
| <b>Data:</b> ___/___/___  |                     |
| <b>Disciplina:</b> Matemática   | <b>Turma:</b> _____ |
| <b>Professora:</b> Gilberlania Pereira Santos Silva.  |                     |




Atividade investigativa!

4- (Sólidos de Revolução / volume e área da superfície)

(Modelo Enem-adaptada). No retângulo ABCD, temos  $AB = 5\text{cm}$  e  $BC = 2\text{cm}$ . Calcular a área total e o volume do sólido gerado pela revolução de  $360^\circ$  da região do retângulo ABCD em torno do eixo e paralelo ao lado AB e distante 1cm de AB como mostra a figura.



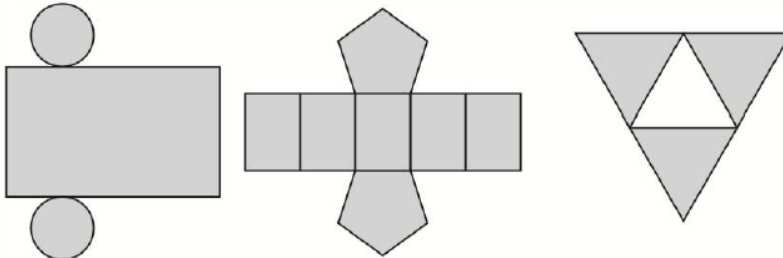
## APÊNDICE 5

|   |   |
|---|---|
|  <p>INSTITUTO FEDERAL DE<br/>EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA<br/>DE ALAGOAS<br/>CAMPUS PIRANHAS</p> |   |
| <b>Alunos:</b> _____<br>_____<br>_____ <b>Data:</b> ___/___/___   |   |
| <b>Disciplina:</b> Matemática   | <b>Turma:</b> _____ <b>Turno:</b> _____ |
| <b>Professora:</b> Gilberlania Pereira Santos Silva.  |   |

### Seleção de questões do ENEM (Geometria plana e espacial)

#### 1) ENEM 2012 - Questão 141 – Prova Amarela.

Maria quer inovar sua loja de embalagens e decidiu vender caixas com diferentes formatos. Nas imagens apresentadas estão as planificações dessas caixas.

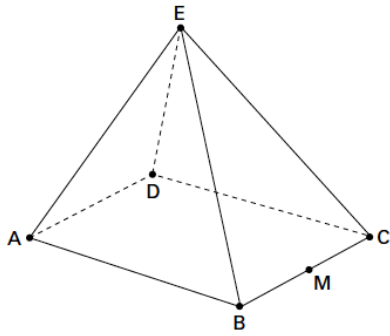


Quais serão os sólidos geométricos que Maria obterá a partir dessas planificações?

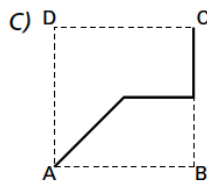
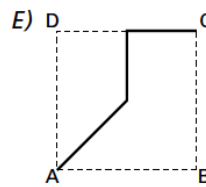
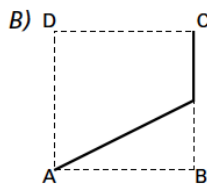
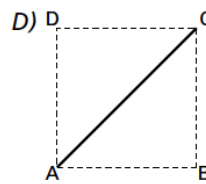
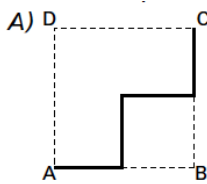
- a) Cilindro, prisma de base pentagonal e pirâmide
- b) Cone, prisma de base pentagonal e pirâmide
- c) Cone, tronco de pirâmide e prisma
- d) Cilindro, tronco de pirâmide e prisma
- e) Cilindro, prisma e tronco de cone

#### 2) ENEM 2012 - Questão 154 – Prova Amarela.

João propôs um desafio a Bruno, seu colega de classe: ele iria descrever um deslocamento pela pirâmide a seguir e Bruno deveria desenhar a projeção desse deslocamento no plano da base da pirâmide.

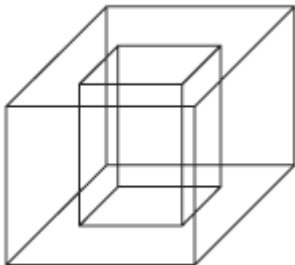


O deslocamento descrito por João foi: mova-se pela pirâmide, sempre em linha reta, do ponto A ao ponto E, a seguir do ponto E ao ponto M, e depois de M a C. O desenho que Bruno deve fazer é



**3) ENEM 2010 - Questão 178 – Prova Rosa.**

Um porta-lápis de madeira foi construído no formato cúbico, seguindo o modelo ilustrado a seguir. O cubo de dentro é vazio. A aresta do cubo maior mede 12 cm e a do cubo menor, que é interno, mede 8 cm.

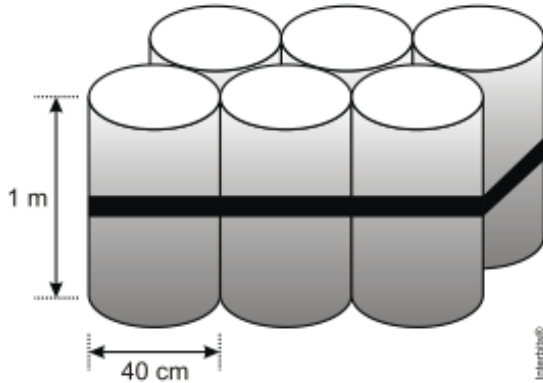


O volume de madeira utilizado na confecção desse objeto foi de

- A)  $12 \text{ cm}^3$ . B)  $64 \text{ cm}^3$ . C)  $96 \text{ cm}^3$ . D)  $1\,216 \text{ cm}^3$ . E)  $1\,728 \text{ cm}^3$ .

**4) ENEM 2010 - Questão 155 – 2ª aplicação.**

O administrador de uma cidade, implantando uma política de reutilização de materiais descartados, aproveitou milhares de tambores cilíndricos dispensados por empresas da região e montou *kits* com seis tambores para o abastecimento de água em casas de famílias de baixa renda, conforme a figura seguinte. Além disso, cada família envolvida com o programa irá pagar somente R\$ 2,50 por metro cúbico utilizado.

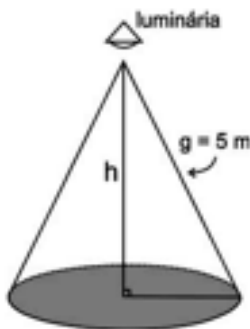


Uma família que utilizar 12 vezes a capacidade total do *kit* em um mês pagará a quantia de (considere  $\pi=3$ )

- |               |              |
|---------------|--------------|
| a) R\$ 86,40. | d) R\$ 7,20. |
| b) R\$ 21,60. | e) R\$ 1,80. |
| c) R\$ 8,64.  |              |

**5) ENEM 2010 - Questão 155 – 2ª aplicação.**

Um arquiteto está fazendo um projeto de iluminação de ambiente e necessita saber a altura que deverá instalar a luminária ilustrada na figura.



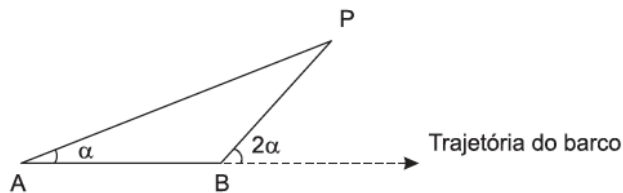
Sabendo-se que a luminária deverá iluminar uma área circular de  $28,26 \text{ m}^2$ , considerando  $\pi=3,14$ , a altura  $h$  será igual a

- a) 3 m.  
b) 4 m.  
c) 5 m.  
d) 9 m.

e) 16 m.

**6) ENEM 2011 - Questão 155 – Prova Azul.**

Para determinar a distância de um barco até a praia, um navegante utilizou o seguinte procedimento: a partir de um ponto A, mediu o ângulo visual a fazendo mira em um ponto fixo P da praia. Mantendo o barco no mesmo sentido, ele seguiu até um ponto B de modo que fosse possível ver o mesmo ponto P da praia, no entanto sob um ângulo visual  $2\alpha$ . A figura ilustra essa situação:

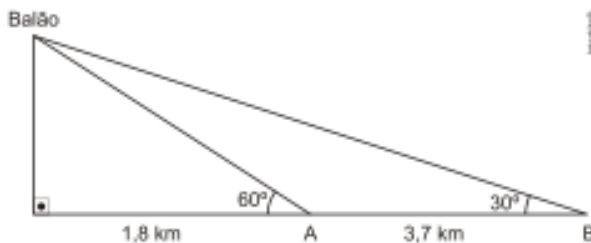


Suponha que o navegante tenha medido o ângulo  $\alpha=30^\circ$  e, ao chegar ao ponto B, verificou que o barco havia percorrido a distância  $AB=2000\text{m}$ . Com base nesses dados e mantendo a mesma trajetória, a menor distância do barco até o ponto fixo P será

- a) 1000 m.
- b)  $1000\sqrt{3}$  m.
- c)  $2000\frac{\sqrt{3}}{3}$  m.
- d) 2000 m.
- e)  $2000\sqrt{3}$  m.

**7) ENEM 2010 - Questão 160 – Prova Rosa.**

Um balão atmosférico, lançado em Bauru (343 quilômetros a Noroeste de São Paulo), na noite do último domingo, caiu nesta segunda-feira em Cuiabá Paulista, na região de Presidente Prudente, assustando agricultores da região. O artefato faz parte do programa Projeto Hibiscus, desenvolvido por Brasil, França, Argentina, Inglaterra e Itália, para a medição do comportamento da camada de ozônio, e sua descida se deu após o cumprimento do tempo previsto de medição. Disponível em: <http://www.correiodobrasil.com.br>. Acesso em: 02 maio 2010.



Na data do acontecido, duas pessoas avistaram o balão. Uma estava a 1,8 km da posição vertical do balão e o avistou sob um ângulo de  $60^\circ$ ; a outra estava a 5,5 km da posição vertical do balão, alinhada com a primeira, e no mesmo sentido, conforme se vê na figura, e o avistou sob um ângulo de  $30^\circ$ .

Qual a altura aproximada em que se encontrava o balão?

- a) 1,8 km
- b) 1,9 km



c) 3,1 km

e) 5,5 km

d) 3,7 km

**8) ENEM 2010 - Questão 139 – Prova Rosa.**

Uma fábrica produz barras de chocolates no formato de paralelepípedos e de cubos, com o mesmo volume. As arestas da barra de chocolate no formato de paralelepípedo medem 3 cm de largura, 18 cm de comprimento e 4 cm de espessura. Analisando as características das figuras geométricas descritas, a medida das arestas dos chocolates que têm o formato de cubo é igual a

A) 5 cm.

D) 24 cm.

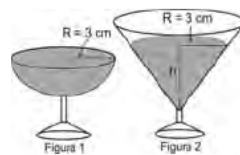
B) 6 cm.

E) 25 cm.

C) 12 cm.

**9) ENEM 2010 - Questão 167 – Prova**

Em um casamento, os donos da festa serviam champanhe aos seus convidados em taças com formato de um hemisfério (Figura 1), porém um acidente na cozinha culminou na quebra de grande parte desses recipientes. Para substituir as taças quebradas, utilizou-se um outro tipo com formato de cone (Figura 2). No entanto, os noivos solicitaram que o volume de champanhe nos dois tipos de taças fosse igual.



Considere:

$$V_{esfera} = \frac{4}{3} \pi R^3 \quad e \quad V_{cone} = \frac{1}{3} \pi R^2 h$$

Sabendo que a taça com o formato de hemisfério é servida completamente cheia, a altura do volume de champanhe que deve ser colocado na outra taça, em centímetros, é de

A) 1,33.

D) 56,52.

B) 6,00.

E) 113,04

C) 12,00.