Universidade Federal De Mato Grosso
Instituto De Ciências Exatas e Da Terra
Departamento de Matemática

Modelagem matemática no ensino de equações de recorrência

Adriano Mendes Pacheco

Mestrado Profissional em Matemática: PROFMAT/SBM

Orientador: **Prof. Dr. Moiseis dos Santos Cecconello**

Trabalho financiado pela Capes

Cuiabá - MT

Abril de 2013

Modelagem matemática no ensino de equações de recorrência

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação devidamente corrigida e defendida por Adriano Mendes Pacheco e aprovada pela comissão julgadora.

Cuiabá, 15 de abril de 2013.

Prof. Dr. Moiseis dos Santos Cecconello
Orientador

Banca examinadora:

Prof. Dr. Moiseis dos Santos Cecconello (UFMT)
Prof. Dr. Geraldo Lúcio Diniz (UFMT)
Prof. Dr. Roy Wilhelm Probst (UTFPR)

Dissertação apresentada ao curso de Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT da Universidade Federal de Mato Grosso, como requisito parcial para obtenção do título de **Mestre em Matemática**.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, por sua graça e fé a mim concedidas. Pela paciência e por ter me livrado dos acidentes nas diversas viagens à Cuiabá.

Aos meus pais, Jonas e Sandra, pelo amor incondicional. Por terem feito o possível e o impossível para me oferecerem a oportunidade de estudar, acreditando e respeitando minhas decisões e nunca deixando que as dificuldades acabassem com os meus sonhos, sou imensamente grato.

Aos meus irmãos, Alessandro e André Luiz, que são além de irmãos, amigos.

À minha esposa, Izabel Kamilla, por ter sentido comigo todas as angústias e felicidades, acompanhando cada passo de perto. Pelo amor, amizade e apoio depositados, além da companhia por todos esses anos, melhor convívio não poderia encontrar. Agradeço, ainda, pela confiança e por sempre estender os braços nas horas de dificuldade. Minha imensa gratidão e meu amor. Sem você, este sonho nunca se realizaria.

Aos amigos Leila, Aline, Vagner, Paulo e Gláucio pelas ótimas histórias vividas, pela amizade e por ajudarem a tornar a vida e o trabalho mais divertidos.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Moiseis dos Santos Cecconello, por sua orientação, estímulo, credibilidade e paciência, obrigado por tudo.

Ao Prof. Dr. Geraldo Lucio Diniz, pela dedicação, seus conselhos e por sempre exigir o melhor de seus alunos.

Ao Prof. Dr. André Krindges, pelo companheirismo e exemplo de simplicidade.

Aos colegas de turma, pelas agradáveis lembranças que serão eternamente guardadas. Vou sentir saudades.

A todos aqueles que torceram e acreditaram na conclusão deste curso, fico muito grato.

Feliz é aquele que transfere o que sabe e aprende o que ensina.

(Cora Coralina)

RESUMO

O presente trabalho de conclusão de curso procurou apresentar alguns conceitos pertinentes às equações de recorrência, explicitar algumas de suas aplicações e sugerir uma série de atividades a serem trabalhadas com alunos do Ensino Médio. São apresentadas algumas estratégias para a resolução recorrências lineares de primeira e segunda ordem, contendo vários exemplos resolvidos. Procurou-se fazer um estudo elementar do comportamento assintótico de uma sequência numérica definida por tais equações, utilizando para tanto os conceitos de pontos de equilíbrio e estabilidade destes, além dos gráficos de Lamerey. O trabalho também faz uma introdução às recorrências não lineares de primeira ordem. A equação logística é apresentada através de um modelo discreto, contendo um breve estudo de seus pontos de equilíbrio. No decorrer do texto são apresentadas algumas aplicações pertinentes à própria Matemática e ao estudo de fenômenos abrangidos por outras ciências como a Química e a Biologia. Por fim são tecidas algumas recomendações para o ensino e apresentadas sugestões de atividades a serem aplicadas em sala, relacionadas a alguns dos conceitos vistos.

Palavras-Chaves: recorrências, ensino de matemática, modelagem matemática.

ABSTRACT

The present work of course conclusion sought to present some concepts pertinent to the recurrence equations, explain some of its applications and suggest a series of activities to be worked with high school students. It introduces a few strategies for the resolution of linear recurrences of first and second order, containing many solved examples. Sought to make a elementary study of the asymptotic behavior of a numerical sequence defined by such equations, using to much the concepts of equilibrium points and stability of these, beyond Lamerey's graphics. The work also gives an introduction to the non-lineares recurrences of the first order. The logistic equation is presented through a discrete model, containing a brief study of its equilibrium points. Throughout the text are presented some relevant applications to mathematics itself and to the study of phenomena covered by other sciences such as Chemistry and Biology. Finally, are weaved some recommendations for teaching and presented suggestions for the activities to be applied in the classroom, related to some of the concepts seen.

Key Words: recurrences, mathematics teaching, mathematical modeling

Sumário

Lista de Figuras

Introdução

O raciocínio recursivo, também chamado de *recursão***,** permite a resolução de inúmeros problemas estruturados em etapas, onde o procedimento a ser empregado em uma determinada etapa caracteriza-se pela repetição completa do raciocínio utilizado na etapa anterior. Um procedimento caracterizado pela recursão é dito *recursivo*. Consequentemente, qualquer objeto que seja resultado de um procedimento recursivo é um *objeto recursivo*.

Na matemática, o raciocínio recursivo permite obter objetos a partir de objetos previamente definidos, de maneira que todos os objetos formados pertençam a uma mesma classe. Por exemplo, a definição formal dos números naturais diz que 0 (zero) é um número natural, e todo número natural tem um sucessor, que é também um número natural. O raciocínio recursivo também permite definir regras para formular casos complexos em termos de casos mais simples. Como exemplo, temos alguns métodos de prova, como a prova por indução finita.

A recursividade está presente em vários conteúdos matemáticos ensinados principalmente no Ensino Médio. Segue abaixo alguns exemplos de problemas que serão apresentados neste trabalho:

- o cálculo do valor atual de um capital aplicado durante *n* períodos;
- o n-ésimo termo de uma sequência de *n* termos;
- o número de regiões que *n* retas podem dividir um plano;
- o cálculo de raízes aproximadas de radicais irracionais.

Os conceitos de recorrência que serão abordados neste trabalho terão como público alvo os alunos do Ensino Médio. Será demonstrada a importância das recorrências para a resolução de inúmeros problemas, provas indutivas e busca de padrões em variados conteúdos da matemática: progressões, análise combinatória, matemática financeira, geometria, etc; além de sua importância para a construção de modelos matemáticos que visam explicar inúmeros processos dinâmicos estudados por outras ciências, tais como o crescimento de uma população e o decaimento molecular de um isótopo radioativo.

Por fim, será proposta uma sequência de atividades fundamentadas em situações contextualizadas, primando sempre pela interdisciplinaridade. Tais atividades deverão motivar os colegas professores a elaborarem mais situações problemas, cujas resoluções dependerão de modelos matemáticos permeados pelo raciocínio recursivo.

Capítulo 1

INTRODUÇÃO ÀS EQUAÇÕES DE RECORRÊNCIA

1.1 RECORRÊNCIAS – PRIMEIRAS NOTAS

Existem problemas cujas resoluções recaem em uma sequência numérica onde não se conhece de forma explícita a lei de formação (termo geral) que permita escrever, de forma direta, qualquer termo de tal sequência. Porém, a natureza de tal sequência permite relacionar um termo qualquer desta com alguns de seus termos anteriores, ou seja, os termos podem ser obtidos *recursivamente*, ou através de uma equação *de recorrência*.

Exemplo 1.1: Considere a sequência (1, 4, 7, 10, 13,...). Como podemos ver, cada termo, a partir do segundo, é igual ao termo imediatamente anterior somado com 3. Portanto, temos a relação de recorrência $x_{n+1} = x_n + 3$, com $x_1 = 1$. Considere agora a sequência (0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, ...). Neste exemplo, um determinado termo, a partir do terceiro, é igual à soma dos dois termos anteriores. Assim os termos dessa sequência estão relacionados pela equação $x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$, com $x_1 = 0$ e $x_2 = 1$.

De modo geral as equações de recorrência são determinadas por uma fórmula que especifica como cada termo da sequência é obtido a partir de seus termos anteriores. Mais precisamente uma equação de recorrência tem a seguinte forma:

$$\mathbf{x_{n+1} = F(x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_n, n)} \quad (1)$$

Definição 1.1: De acordo com Bassanezzi (2011) “A solução de uma equação de recorrência é qualquer sequência que torna verdadeira a referida equação”.

Em geral estamos interessados em encontrar uma *fórmula fechada* que represente a solução, ou seja, uma fórmula com a qual é possível obter todos os termos da sequência, em função da posição *n* que cada termo ocupa e não dos termos prévios.

Exemplo 1.2: Consideremos as sequências *(2, 6, 10, 14,...)* e $x_n = 4n + 1$, com com $n \in N^*$. Vemos que ambas são soluções da recorrência $x_{n+1} = x_n + 4$.

Veremos agora a comodidade de representarmos a solução de uma recorrência através de uma fórmula. Consideremos a sequência que é solução única da recorrência $x_{n+1} = x_n + 4$, com $x_1 = 2$. Se quisermos encontrar o 15º termo da solução, podemos utilizar a fórmula da recorrência e calcular sucessivamente os termos da sequência até atingirmos o termo procurado, vejamos:

$$x_{n+1} = x_n + 4$$
$$x_2 = x_1 + 4 = 2 + 4 = 6$$
$$. \quad . \quad . \quad .$$
$$x_{15} = x_{14} + 4 = 54 + 4 = 58$$

E se tivéssemos que encontrar o 215º termo da solução? Certamente a tarefa seria penosa. Assim, convém encontrarmos a fórmula fechada que representa tal solução, que no exemplo dado é $x_n = 4n - 2$, no caso de x_1 ser a condição inicial ou $x_n = 4n + 2$, caso representemos o primeiro elemento da solução por x_0. Em ambos as fórmulas, n representa a posição ocupada na sequência pelo termo x_n. O processo para encontrar as duas fórmulas é o mesmo, e a sequência ou solução que ambas as fórmulas representam são iguais. A diferença entre elas decorre apenas da diferença entre os índices utilizados para representar os termos de cada uma das sequências. Note que a fórmula $x_n = 4n - 2$ define a sequência $(x_1, x_2, x_3, ...,) = (2, 6, 10, ...,)$, enquanto que a fórmula $x_n = 4n + 2$ define a sequência $(x_0, x_1, x_2, ...,) = (2, 6, 10, ...,)$.

Considerando $x_1 = 2$ e utilizando a fórmula da solução da recorrência para calcular o 15º e o 215º termos da sequência, então temos:

$$x_n = 4n - 2 \qquad\qquad x_n = 4n - 2$$
$$x_{15} = 4 \times 15 - 2 \qquad\qquad x_{215} = 4 \times 215 - 2$$
$$x_{15} = 60 - 2 = 58 \qquad\qquad x_{215} = 860 - 2 = 858$$

No decorrer do texto mostraremos como a fórmula que representa a solução de uma recorrência pode ser obtida, além de discutirmos outros exemplos.

Uma equação de recorrência costuma ser classificada através dos seguintes critérios independentes entre si:

a) *Ordem*: De acordo com Bassanezi (1988), “A ordem de uma equação de recorrência é a diferença entre o maior e o menor índice que aparece na equação”.

Podemos dizer que a equação que oferece um termo qualquer da sequência, em função de seu termo imediatamente anterior, caracteriza uma recorrência de primeira ordem; aquela que oferece um termo, em função dos dois termos imediatamente anteriores, define uma recorrência de segunda ordem, e assim por diante.

b) *Linearidade*: A recorrência (1) é denominada *linear* quando a função *F* for linear nas variáreis (x_1, x_2, ... x_{n-1}, x_n). Em particular, se existir na equação algum termo anterior com grau diferente de 1 (um), ou termos cruzados, como o produto $x_{n+1}x_n$, a recorrência é denominada *não linear.*

Exemplo 1.3: A equação $x_{n+1} = 2x_n + 5$ é uma recorrência *linear de primeira ordem,* enquanto a recorrência $x_{n+1} = (n-1)(x_n)^2 - 3x_{n-1}$ é uma recorrência *não linear de segunda ordem.*

1.2 RECORRÊNCIAS LINEARES DE PRIMEIRA ORDEM

Uma determinada sequência é definida por uma recorrência linear de primeira ordem, quando a lei que expressa x_{n+1} for da forma $x_{n+1} = a(n)x_n + g(n)$, onde *a* e *g* são funções de $n \in N$.

Quando $g(n) = 0$, a recorrência linear é dita *homogênea*, do contrário é *não homogênea.*

Exemplo 1.4: As recorrências $x_{n+1} = 3x_n$ e $x_{n+1} = (n - 2)x_n + 6$ são recorrências lineares de primeira ordem, respectivamente homogênea e não homogênea.

O método utilizado neste trabalho para solucionar as equações acima é composto das seguintes etapas:

a) Reitera-se a recorrência um número finito de vezes, tomando como ponto de partida o valor inicial x_0 ou x_1;

b) Conjetura-se uma provável solução, a partir dos valores obtidos com as reiterações;

c) Verifica-se se a solução é válida para todo número natural *n***,** através da prova por indução matemática.

A seguir, veremos dois exemplos extraídos de Lima (2006, p.69-71).

Exemplo 1.5: Vamos resolver a recorrência $x_{n+1} = 2x_n$, com condição inicial $x_1 = 3$. Obtendo os quatro primeiros termos da sequência, então temos:

$x_1 = 3$ $\qquad$ $x_3 = 2x_2 = 2 \,.\, 6 = 12$

$x_2 = 2x_1 = 2 \,.\, 3 = 6$ $\qquad$ $x_4 = 2x_3 = 2 \,.12 = 24$

Expressando x_4 em função de x_1, então temos $x_4 = 2x_3 = 2 \,.\, 2x_2 = 2 \,.\, 2 \,.\, 2x_1$. Logo $x_4 = 2^3x_1$.

Já é possível deduzir que $x_n = 2^{n-1}x_1$. Como $x_1 = 3$, então conjeturamos que $x_n = 2^{n-1}(3)$ é a provável fórmula que representa a sequência ou solução da equação.

Observe que a fórmula obtida aparentemente permite escrevermos qualquer termo da sequência em função da posição ocupada pelo mesmo. Todavia, é necessário provar tal hipótese.

Uma das principais ferramentas para verificar a validade de uma *fórmula* que representa *solução* de uma equação de recorrência é o *Princípio da Indução Matemática*

Teorema 1.1: *(Princípio da Indução Matemática).* Seja P(n) uma sentença aberta sobre $n \in N$. Suponha que:

(i) P(1) é verdadeira, e

(ii) qualquer que seja $n \in N$, sempre que P(n) é verdadeira, segue-se que P(n + 1) é verdadeira. Então, P(n) é verdadeira para todo $n \in N$.

Segue abaixo a utilização desse método de prova para mostrar a validade, para todo natural *n*, da solução $x_n = 2^{n-1}(3)$ obtida para a recorrência $x_{n+1} = 2x_n$, com $x_1 = 3$.

Primeiro tomamos a fórmula $x_n = 2^{n-1}(3)$ e verificamos sua validade para $n = 1$:

$$x_1 = 2^{1-1}(3) = 3$$

Observe que P(1) é verdadeira.

Suponhamos agora que, para algum n natural, P(n) seja verdadeira, ou seja:

$$x_n = 2^{n-1}(3).$$

Queremos provar que P(n + 1) é verdadeira, logo devemos ter $x_{n+1} = 2^n(3)$.

Tomando a igualdade $x_n = 2^{n-1}(3)$ (que por hipótese é verdadeira) e multiplicando ambos os termos por 2, então temos:

$$2x_n = 2.2^{n-1}(3) = 2^n(3)$$

Mas pela equação de recorrência, temos que $x_{n+1} = 2x_n$, logo $x_{n+1} = 2^n(3)$.

Isso mostra que P(n + 1) é verdadeira, toda vez que P(n) for verdadeira. Pelo *Princípio da Indução Matemática*, a fórmula é válida para todo número natural *n*.

Exemplo 1.6: Vamos resolver a recorrência $x_{n+1} = nx_n$, onde $x_1 = 1$.

Escrevendo, os quatro primeiros termos da sequência, temos:

$x_1 = 1$ $\qquad$ $x_3 = 2x_2 = 2 .1 = 2$

$x_2 = 1x_1 = 1 . 1 = 1$ $\qquad$ $x_4 = 3x_3 = 3 . 2 = 6$

Expressando x_4 em função de x_1, então temos:

$$x_4 = 3x_3 = 3 . 2x_2 = 3 . 2 . 1. x_1$$

Observamos que 3 . 2 . 1 = 3!. Logo $x_4 = 3!x_1$. Deduzimos que $x_n = (n - 1)!x_1$. Como $x_1 = 1$, conjeturamos que $x_n = (n - 1)!$ é a provável solução da recorrência. Todavia, é necessário provar esta hipótese por indução.

Primeiro tomamos $x_n = (n - 1)!$ E verificamos a fórmula para n = 1:

$x_1 = (1 - 1)! = (0)! =1$. (Por convenção temos que $(0)! = 1$).

Observe que P(1) é verdadeira.

Suponhamos agora que, para algum *n* natural, P(n) seja verdadeira, ou seja, $x_n = (n - 1)!$. Queremos provar que P(n + 1) é verdadeira, ou seja, que $x_{n+1} = n!$.

Tomando a igualdade $x_n = (n - 1)!$ e multiplicando ambos os termos por *n*, então temos $nx_n = n(n - 1)! = n!$

Mas pela equação de recorrência, temos que $x_{n+1} = nx_n$, logo $x_{n+1} = n!$

Isso mostra que P(n + 1) é verdadeira, toda vez que P(n) é verdadeira. Provamos por indução que a fórmula é válida para todo número natural *n*.

1.2.1 Termos Gerais De Uma Progressão Aritmética E Geométrica

Antes de estudarmos a solução das recorrências lineares de primeira ordem não homogêneas com coeficientes constantes, no próximo tópico iremos recordar dois casos particulares de recorrências lineares: as progressões aritméticas e geométricas.

1.2.1.1 Termo geral de uma progressão aritmética

Uma Progressão aritmética (PA) é uma recorrência linear de primeira ordem não homogênea em que cada termo, a partir do segundo, é igual ao termo imediatamente anterior adicionado a uma constante r chamada de razão da progressão. Logo a equação de recorrência que expressa a PA é dada por $a_{n+1} = a_n + r$. Note que quando a razão é zero, a equação de recorrência é homogênea e a sequência formada é constante. Vamos agora solucionar a recorrência $a_{n+1} = a_n + r$.

Escrevendo os quatro primeiros termos da sequência, então temos:

$$a_1 = a_1 \qquad\qquad a_3 = a_2 + r$$

$$a_2 = a_1 + r \qquad\qquad a_4 = a_3 + r$$

Expressando a_4 em função de a_1, então temos:

$$a_4 = a_3 + r = (a_2 + r) + r = [(a_1 + r) + r] + r = a_1 + 3r$$

Portanto, $a_4 = a_1 + 3r$. É fácil constatar que a_4 foi obtido tomando a_1 e somando a este o valor da razão 3 vezes. O raciocínio oferece elementos para conjeturarmos que a expressão que dá o valor de um termo qualquer da PA, em função da posição ocupada por este, é a fórmula $a_n = a_1 + (n - 1)r$. Vamos provar sua validade por indução para todo n natural.

Primeiro verificamos a validade da fórmula para $n = 1$.

$$a_n = a_1 + (n - 1)r = a_1 + (1 - 1)r = a_1$$

Observe que P(1) é verdadeira.

Suponha agora que, para algum n natural, P(n) seja verdadeira, ou seja, $a_n = a_1 + (n - 1)r$. Queremos provar que P(n + 1) é verdadeira, ou seja, que $a_{n+1} = a_1 + nr$. Tomando a igualdade $a_n = a_1 + (n - 1)r$ e somando r em ambos os termos, então temos:

$$a_n + r = a_1 + (n - 1)r + r = a_1 + nr,$$

Mas pela equação de recorrência temos que $a_{n+1} = a_n + r$, logo $a_{n+1} = a_1 + nr$.

Isso mostra que P(n + 1) é verdadeira, toda vez que P(n) é verdadeira. Portanto, a fórmula é válida para todo número natural n.

1.2.1.2 Fórmula para a soma dos termos de uma PA

A expressão para a soma dos *n* termos de uma PA (desde o primeiro até o n-ésimo) aparece na resolução de várias recorrências lineares de primeira ordem não homogêneas. Para obter tal expressão, utilizaremos o *método de Gauss*. Este método fundamenta-se na seguinte propriedade de uma PA: *A soma dos termos equidistantes de uma PA é constante.*

Por exemplo, em uma PA de razão r = 2 e $a_1 = 3$, os primeiros 6 termos são: (3, 5, 7, 9, 11, 13). Note que 3 + 13 = 5 + 11 = 7 + 9. Logo, os seis termos da sequência deram origem a três pares cuja soma é 16. Portanto a soma dos seis primeiros termos é 3 x 16 = 48.

Segue abaixo a generalização do *método de Gauss*:

Considere a soma dos termos de uma PA, de primeiro termo a_1 e razão *r :*

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n.$$

Utilizando o termo geral $a_n = a_1 + (n - 1)r$ para representar cada uma das parcelas da soma, então temos:

$$S_n = a_1 + (a_1 + r) + (a_1 + 2r) + \ldots + [(a_1 + (n - 3)r] + [a_1 + (n - 2)r] + [a_1 + (n - 1)r]$$

Obviamente, invertendo a ordem das parcelas da soma dos termos da PA, o valor de tal soma não se altera (propriedade comutativa).

$$S_n = [a_1 + (n - 1)r] + [a_1 + (n - 2)r] + [a_1 + (n - 3)r] + \ldots + (a_1 + 2r) + (a_1 + r) + a_1.$$

Somando as duas últimas igualdades termo a termo, então temos:

$$2S_n = \{a_1 + [a_1 + (n - 1)r]\} + \{(a_1 + r) + [a_1 + (n - 2)r]\} + \{(a_1 + 2r) + [a_1 + (n - 3)r]\} + \ldots$$
$$\ldots + \{[a_1 + (n - 3)r] + (a_1 + 2r)\} + \{[a_1 + (n - 2)r] + (a_1 + r)\} + \{[a_1 + (n - 1)r] + a_1\}.$$

Notemos que a segunda parcela da soma é $\{(a_1 + r) + [a_1 + (n - 2)r]\} =$
$= \{a_1 + r + [a_1 + nr - 2r]\} = \{a_1 + (a_1 + nr - r)\} = a_1 + [a_1 + (n - 1)r] = a_1 + a_n.$

Da mesma forma, verificamos que as demais parcelas também são iguais a $a_1 + a_n$, Logo:

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \ldots + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n)$$

$$2S_n = n(a_1 + a_n).$$

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$$

Assim o número de pares formados é igual à metade do número de termos da PA. A validade da fórmula pode ser facilmente verificada por indução:

Primeiro verificamos a validade para n =1:

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} = \frac{1(a_1 + a_1)}{2} = \frac{2a_1}{2} = a_1$$

Observamos que P(1) é verdadeira.

Suponhamos agora que, para algum *n* natural, P(n) seja verdadeira. Logo:

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}.$$

Queremos provar que P(n+1) é verdadeira, ou seja, que $S_{n+1} = \frac{(n+1)(a_1 + a_{n+1})}{2}$

Tomando a igualdade $S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$ e somando a_{n+1} em ambos os termos, temos $S_n + a_{n+1} = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} + a_{n+1} = \frac{n(a_1 + a_n) + 2a_{n+1}}{2}$

Como $S_n + a_{n+1} = S_{n+1}$, provamos a validade da fórmula para P(n+1) se mostrarmos que $S_n + a_{n+1} = \frac{(n+1)(a_1 + a_{n+1})}{2}$

Fazendo $S_n + a_{n+1} = \frac{n(a_1 + a_n) + 2a_{n+1}}{2}$ na igualdade $S_n + a_{n+1} = \frac{(n+1)(a_1 + a_{n+1})}{2}$, então temos:

$$\frac{n(a_1 + a_n) + 2a_{n+1}}{2} = \frac{(n+1)(a_1 + a_{n+1})}{2}$$

$$\frac{na_1 + na_n + 2a_{n+1}}{2} = \frac{na_1 + na_{n+1} + a_1 + a_{n+1}}{2},$$

Cancelando os termos semelhantes nos dois membros e fazendo $na_{n+1} = n(a_n + r)$, temos:

$$\frac{na_n + 2a_{n+1}}{2} = \frac{n(a_n + r) + a_1 + a_{n+1}}{2}$$

$$\frac{na_n + 2a_{n+1}}{2} = \frac{(na_n + nr) + a_1 + a_{n+1}}{2}$$

Agrupando convenientemente, temos:

$$\frac{na_n + 2a_{n+1}}{2} = \frac{na_n + (a_1 + nr) + a_{n+1}}{2}$$, mas $a_{n+1} = a_1 + nr$, logo:

$$\frac{na_n + 2a_{n+1}}{2} = \frac{na_n + (a_{n+1}) + (a_{n+1})}{2}$$

$$\frac{na_n + 2a_{n+1}}{2} = \frac{na_n + 2a_{n+1}}{2}$$

Isso mostra que P(n + 1) é verdadeira, toda vez que P(n) é verdadeira, confirmando a validade da fórmula para todo número natural *n*.

A maioria dos livros de história da matemática traz uma suposta passagem da infância de Gauss, quando este tinha 10 anos. Um dia o professor de matemática, teria pedido que seus alunos somassem os números de 1 a 100. Gauss teria apresentado o resultado quase que estantaneamente ao professor, que ao conferir o resultado, ficou espantado ao ver que Gauss havia chegado à resposta correta: 5050. O menino certamente havia calculado a soma da progressão aritmética 1 + 2 + 3 +...+ 99 + 100, muito provavelmente usando a fórmula $n(n + 1)/2$. *(Boyer, 1996 p.343).*

1.2.1.3 Termo geral de uma progressão geométrica

Uma progressão geométrica (PG) é uma recorrência linear homogênea de primeira ordem em que cada termo, a partir do segundo, é obtido multiplicando o termo imediatamente anterior por uma constante q chamada de razão da PG. Tomemos uma progressão geométrica onde a_1 é o seu primeiro termo e q é o valor da razão. De acordo com a definição temos que $a_2 = a_1q$. Logo, deduzimos que a relação de recorrência que expressa uma PG é dada por $a_{n+1} = a_nq$.

Valendo-se do mesmo procedimento utilizado para a determinação do termo geral de uma PA, é possível encontrarmos a expressão geral para o n-ésimo termo de uma PG, o que equivale a resolver a recorrência.

Escrevendo os quatro primeiros termos da sequência, temos:

$$a_1 = a_1 \qquad a_3 = a_2q$$

$$a_2 = a_1q \qquad a_4 = a_3q$$

Escrevendo a_4 em função do termo a_1, temos:

$$a_4 = a_3q = (a_2q)q = (a_1q)q^2 = a_1q^3$$

Portanto $a_4 = a_1q^3$. Generalizando tal comportamento, é possível conjeturar que a expressão do termo geral de uma PG é $a_n = a_1q^{(n-1)}$.

Vamos verificar por indução a validade da solução para todo natural *n:*

Primeiro verificamos a validade da fórmula $a_n = a_1q^{(n-1)}$ para $n = 1$:

$$a_1 = a_1q^{(n-1)} = a_1q^{(1-1)} = a_1$$

Observamos que P(1) é verdadeira.

Suponhamos agora que, para algum n natural, P(n) seja verdadeira, ou seja, que $a_n = a_1q^{(n-1)}$.Queremos provar que P(n+1) é verdadeira, ou seja, que $a_{n+1} = a_1q^n$.

Tomando a igualdade $a_n = a_1q^{(n-1)}$ e multiplicando ambos os membros por q, então temos:

$$qa_n = qa_1q^{(n-1)} = a_1q^n$$

Mas pela relação de recorrência, temos que $a_{n+1} = a_nq$. Logo $a_{n+1} = a_1q^n$.

Isso mostra que P(n + 1) é verdadeira toda vez que P(n) é verdadeira. Portanto, a fórmula é válida para todo número natural n.

1.2.1.4 Fórmula para a soma dos termos de uma PG

Assim como a soma dos termos de uma PA, a expressão para a soma dos termos de uma PG (desde o primeiro até o n-ésimo) também está presente na resolução de inúmeras recorrências lineares não homogêneas de primeira ordem. Para obtermos a fórmula que oferece a soma dos n primeiros termos de uma PG, devemos utilizar a seguinte fatoração, oriunda da teoria dos produtos notáveis:

$$x^n - 1 = (x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + ... + x + 1) \quad \leftrightarrow \quad \frac{x^n - 1}{(x-1)} = (x^{n-1} + x^{n-2} + ... + x + 1)$$

Considere uma PG de primeiro termo a_1 e razão q. Vejamos o raciocínio:

Seja $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{n-1} + a_n$ a soma dos n primeiros termos de uma PG.

Escrevendo cada parcela da soma em função do termo geral $a_{n+1} = a_1q^n$, então temos:

$$S_n = a_1 + a_1q + a_1q^2 + ... + a_1q^{n-2} + a_1q^{n-1}$$

$$S_n = a_1(1 + q + q^2 + ... + q^{n-2} + q^{n-1}).$$

Fazendo $(q^{n-1} + q^{n-2} + ... + q + 1) = \frac{q^n - 1}{(q-1)}$, temos $S_n = a_1\frac{q^n - 1}{(q-1)}$

Vamos verificar a validade da solução por indução:

Primeiro verificamos a validade da fórmula $S_n = a_1 \frac{q^n - 1}{(q-1)}$ para para *n = 1*.

$$S_1 = a_1 \frac{q^1 - 1}{(q-1)} = a_1$$

Vemos que P(1) é verdadeira.

Suponhamos agora que, para algum *n* natural, P(n) seja verdadeira, ou seja, que $S_n = a_1 \frac{q^n - 1}{(q-1)}$.

Queremos provar que P(n + 1) é verdadeira, ou seja, que $S_{n+1} = a_1 \frac{q^{n+1} - 1}{(q-1)}$.

Tomando a igualdade $S_n = a_1 \frac{q^n - 1}{(q-1)}$ e somando a_{n+1} a ambos os membros, então temos:

$$S_n + a_{n+1} = a_1 \frac{q^n - 1}{(q-1)} + a_{n+1}$$

$$S_n + a_{n+1} = \frac{a_1(q^n - 1) + (q-1)a_{n+1}}{(q-1)},$$

Fazendo $a_{n+1} = a_1 q^n$ no segundo membro, temos:

$$S_n + a_{n+1} = \frac{a_1(q^n - 1) + (q-1)a_1 q^n}{(q-1)}$$

Efetuando a distribuição, então temos:

$$S_n + a_{n+1} = \frac{a_1 q^n - a_1 + a_1 q^{n+1} - a_1 q^n}{(q-1)} = \frac{-a_1 + a_1 q^{n+1}}{(q-1)} = \frac{a_1({}_1 q^{n+1} - 1)}{(q-1)}$$

Mas $S_n + a_{n+1} = S_{n+1}$, logo:

$$S_{n+1} = \frac{a_1({}_1 q^{n+1} - 1)}{(q-1)}$$

Isso mostra que P(n +1) é verdadeira, toda vez que P(n) é verdadeira, confirmando a validade da fórmula para todo número natural *n*.

1.2.2 Resolvendo Uma Recorrência Linear De Primeira Ordem Não Homogênea De Coeficientes Constantes.

Dentre as recorrências lineares de primeira ordem não homogêneas, as que são mais facilmente resolvidas são as da forma $x_{n+1} = ax_n + g(n)$, na qual a é uma constante real e g é uma função de n. Segue alguns exemplos com suas respectivas soluções:

Exemplo 1.7: Vamos resolver a relação de recorrência é $x_{n+1} = x_n + n$, com condição inicial $x_0 = 1$. Observe que a relação é uma recorrência não homogênea da forma $x_{n+1} = ax_n + g(n)$, na qual $a = 1$ e $g(n) = n$.

Escrevendo os quatro primeiros termos da sequência, então temos:

$x_0 = 1$ $\qquad\qquad$ $x_2 = 2 + 2 = 4$

$x_1 = 1 + 1 = 2$ $\qquad\qquad$ $x_3 = 4 + 3 = 7$

Escrevendo x_4 em função de x_0 então temos:

$x_4 = 7 + 4 = (4 + 3) + 4 = [(2 + 2) + 3] + 4 = \{[(1 + 1) + 2] + 3\} + 4$

Logo $x_4 = 1 + (1 + 2 + 3 + 4)$. Generalizando tal comportamento, é plausível conjeturarmos que $x_n = 1 + (1 + 2 + ... + n - 1 + n)$.

Note que a sequência $(1 + 2 +...+ n-1 + n)$ é uma PA de razão $r = 1$ e primeiro termo $a_1 = 1$.

Utilizando a expressão para a soma dos primeiros n termos de uma PA, então temos:

$$x_n = 1 + (1 + 2 + ... + n - 1 + n) = 1 + \frac{n(1+n)}{2} = \frac{2 + n(1+n)}{2}$$

Portanto, $x_n = \frac{n^2 + n + 2}{2}$, é a provável solução da recorrência.

Vamos provar a validade da fórmula $x_n = \frac{n^2 + n + 2}{2}$ por indução. Primeiro verificamos sua validade para $n = 0$.

$$x_0 = \frac{0^2 + 0 + 2}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

Observamos que P(0) é verdadeira.

Suponhamos agora que, para algum n natural, P(n) seja verdadeira, logo $x_n = \frac{n^2+n+2}{2}$. Queremos provar que P(n+1) é verdadeira, ou seja, que $x_{n+1} = \frac{(n+1)^2+n+3}{2}$. Tomando a igualdade $x_n = \frac{n^2+n+2}{2}$ e somando $n+1$ a ambos os membros, então temos:

$x_n + n + 1 = \frac{n^2+n+2}{2} + n + 1 = \frac{n^2+n+2+2n+2}{2}$. Agrupando convenientemente, temos $x_n + n + 1 = \frac{(n^2+2n+1)+n+3}{2}$. Mas pela equação de recorrência temos que $x_n + (n+1) = x_{n+1}$. Logo $x_{n+1} = \frac{(n^2+2n+1)+n+3}{2} = \frac{(n+1)^2+n+3}{2}$

Isso mostra que P(n + 1) é verdadeira, toda vez que P(n) é verdadeira, confirmando a validade da fórmula para todo número natural n.

Exemplo 1.8: Vamos resolver a recorrência é $x_n = 2x_{n-1} + 1$ com $x_1 = 1$. Observe que a relação é uma recorrência não homogênea da forma $x_{n+1} = ax_n + g(n)$, com $a = 2$ e $g(n) = 1$. Escrevendo os quatro primeiros termos da solução, então temos:

$x_1 = 1$ $\qquad$ $x_3 = 2 . 3 + 1 = 7$

$x_2 = 2 . 1 + 1 = 3$ $\qquad$ $x_4 = 2 . 7 + 1 = 15$

Fazendo as devidas substituições, podemos escrever x_4 como uma soma de potências de base dois:

$x_4 = 2 . 7 + 1 = 2 . (2 . 3 + 1) + 1 = 2 [2 (2 . 1 + 1) + 1] + 1 = 2 (2^2 + 2 + 1) + 1$

$x_4 = 2^3 + 2^2 + 2 + 1$.

Sabemos que $x_5 = 2x_4 + 1$, então temos:

$x_5 = 2(2^3 + 2^2 + 2 + 1) + 1 = 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2 + 1$. Concluímos que x_5 é a soma dos cinco primeiros termos de uma PG de razão $q = 2$ e $a_1 = 1$.

Generalizando, temos que $x_n = 2^{n-1} + 2^{n-2} + ... + 2^2 + 2 + 1$. Utilizando a fórmula da soma dos termos de uma PG, então temos:

$$S_n = 2^{n-1} + 2^{n-2} + ... + 2^2 + 2 + 1 = a_1 \frac{q^n - 1}{(q-1)} = 1.\frac{2^n - 1}{2-1} = 2^n - 1$$

Logo, $x_n = 2^n - 1$ é a provável solução da recorrência. Vamos agora provar a validade de tal fórmula por indução. Verificando sua validade para $n = 1$, temos:

$$x_1 = 2^1 - 1 = 1.$$

Observamos que P(1) é verdadeira.

Suponhamos agora que, para algum n natural, P(n) seja verdadeira, logo:

$$x_n = 2^n - 1.$$

Queremos provar que P(n + 1) é verdadeira, ou seja, que $x_{n+1} = 2^{n+1} - 1$. Tomando a igualdade $x_n = 2^n - 1$ e multiplicando ambos os membros por 2 e somando 1, então temos:

$$2x_n + 1 = 2(2^n - 1) + 1 = 2 . 2^n - 2 + 1 = 2^{n+1} - 1.$$

Mas pela relação de recorrência temos que $x_{n+1} = 2x_n + 1$, logo $x_{n+1} = 2^{n+1} - 1$.

Isso mostra que P(n + 1) é verdadeira, toda vez que P(n) é verdadeira, confirmando assim a validade da fórmula para todo número natural n.

Exemplo 1.9: Vamos resolver a relação de recorrência $x_{n+1} = 3x_n + 3^n$, com $x_1 = 2$.

Escrevendo os quatro primeiros termos da sequência, então temos:

$$x_1 = 2 \qquad\qquad x_3 = 3 . 9 + 3^2 = 36$$

$$x_2 = 3 . 2 + 3^1 = 9 \qquad\qquad x_4 = 3 . 36 + 3^3 = 135$$

Escrevendo x_4 em função do elemento x_1, então temos:

$$x_4 = 3 . 36 + 3^3 = 3(3 . 9 + 3^2) + 3^3 = 3[3(3 . 2 + 3^1) + 3^2] + 3^3$$

$$x_4 = 3[3^2 . 2 + 3^2 + 3^2] + 3^3 = 3^3 . 2 + 3^3 + 3^3 + 3^3 = 5 . 3^3$$

Utilizando a recorrência para calcular x_5 a partir do valor obtido para x_4 então temos:

$$x_5 = 3x_4 + 3^4 = 3(5 . 3^3) + 3^4 = 5 . 3^4 + 3^4 = 6 . 3^4$$

Os valores obtidos para x_4 e x_5 permite-nos deduzir que $x_n = (n+1)3^{(n-1)}$ é a provável solução da equação de recorrência.

A validade da fórmula para todo natural n pode ser provada por indução matemática. Primeiro verificamos sua validade para $n = 1$.

$$x_1 = (1+1)3^{(1-1)} = 2 \times 3^0 = 2$$

Observamos que P(1) é verdadeira.

Suponhamos agora que, para algum n natural, P(n) seja verdadeira, logo temos $x_n = (n+1)3^{(n-1)}$.

Queremos provar que P(n + 1) é verdadeira, ou seja, que $x_{n+1} = (n+2)3^n$.

Tomando a igualdade $x_n = (n+1)3^{(n-1)}$ e multiplicando ambos os membros por 3 e somando 3^n, temos:

$$3x_n + 3^n = 3[(n+1)3^{(n-1)}] + 3^n = (n+1)3^n + 3^n = (n+2)3^n$$

Mas pela equação de recorrência temos que $x_{n+1} = 3x_n + 3^n$, logo $x_{n+1} = (n+2)3^n$

Isso mostra que P(n+1) é verdadeira, toda vez que P(n) é verdadeira confirmando a validade da fórmula para todo número natural *n*.

1.2.2.2 Expressão geral da solução de uma recorrência linear de primeira ordem com termo independente e coeficientes constantes

Nesta seção iremos apresentar uma fórmula geral para a solução de uma equação de recorrência da forma $x_{n+1} = ax_n + b$, na qual a e b são constantes reais. Observe que a relação de recorrência é homogênea se $b = 0$.

Para deduzirmos a fórmula, generalizaremos o método intuitivo de resolução, apresentado nas seções anteriores.

Obtendo os 4 primeiros termos da recorrência $x_{n+1} = ax_n + b$, então temos:

$$x_0 = x_0$$
$$x_1 = ax_0 + b$$
$$x_2 = a(ax_0 + b) + b$$
$$x_3 = a[a(ax_0 + b) + b] + b = a[a^2x_1 + ab + b] + b$$
$$x_3 = a^3x_0 + a^2b + ab + b$$

O valor obtido para x_3 nos permite deduzir que:

$$x_n = a^nx_0 + a^{(n-1)}b + a^{(n-2)}b + ... + a^2b + ab + b$$
$$x_n = a^nx_0 + [a^{(n-1)}b + a^{(n-2)}b + ... + a^2b + b + b]$$
$$x_n = a^nx_0 + b[a^{(n-1)} + a^{(n-2)} + ... + a^2 + a + 1]$$

Observe que o termo entre colchetes é a soma dos *n* termos de uma PG de razão $q = a$ e primeiro termo igual $a_1 = 1$**.** Utilizando a fórmula $S_n = a_1\dfrac{q^n - 1}{(q-1)}$ para a soma dos termos de uma PG, teremos duas possibilidades:

Se $a \neq 1$, a fórmula da solução será $x_n = a^nx_0 + b\dfrac{a^n - 1}{a-1}$.

Se $a = 1$, a solução será $x_n = x_0 + bn$.

Se deduzirmos a fórmula com a condição inicial igual a x_1, então teremos:

$$x_n = a^{n-1}x_1 + b\frac{a^{n-1} - 1}{a-1} \text{, se } a \neq 1 \text{ e } x_n = x_1 + b(n-1) \text{, se } a = 1.$$

Vamos aplicar a fórmula para solucionar algumas recorrências:

Exemplo 1.10: Vamos utilizar a fórmula da solução geral para resolver a recorrência $x_n = 3x_{n-1}$ com $x_0 = 2$. Comparando a recorrência com a fórmula geral, vemos que $a = 3$ e $b = 0$. Aplicando a fórmula da solução geral, então temos:

$$x_n = a^n x_0 + b\frac{a^n - 1}{a-1} = 3^n 2 + 0\frac{2^n - 1}{2-1} \quad = 3^n 2$$

A fórmula da solução geral garante a validade da solução obtida para todo natural *n,* não sendo necessário provar esta última por indução matemática**.**

Exemplo 1.11: Vamos resolver a recorrência $x_n = 5x_{n-1} + 3$ com $x_1 = 1$. Note que neste exemplo a condição inicial é x_1. Comparando a recorrência com a fórmula geral $x_{n+1} = ax_n + b$, temos $a = 5$ e $b = 3$. Aplicando a fórmula da solução geral, então temos

$$x_n = a^{n-1}x_1 + b\frac{a^{n-1} - 1}{a-1} \quad = 5^{n-1}.1 + 3\frac{5^{n-1} - 1}{5-1} \quad = 5^{n-1}.1 + 3\frac{5^{n-1} - 1}{4}$$

$$x_n = 5^{n-1} + \frac{3.5^{n-1} - 3}{4} \quad = \frac{4.5^{n-1} + 3.5^{n-1} - 3}{4}$$

$$x_n = \frac{7.5^{n-1} - 3}{4}$$

1.2.3 Comportamento De Uma Sequência Definida Por Uma Recorrência Linear De Primeira Ordem Com Termo Independente E Coeficientes Constantes

Outra forma de estudar a solução de uma equação de recorrência é analisar o comportamento da *solução* ou *sequência* após *n* iterações da equação. Para tanto, faremos um estudo, onde fixaremos alguns critérios que permitirão verificar se a sequência converge ou *diverge* em relação a um valor da equação, o qual chamaremos de *ponto fixo* ou *ponto de equilíbrio* desta.

Ater-nos-emos às recorrências lineares de primeira ordem da forma: $x_{n+1} = ax_n + b$, onde *a* e *b* são constantes reais.

Definição 1.2: Se existir um valor de x_n da solução, tal que $x_{n+1} = x_n$, então x_n, que representaremos por x*, é um *ponto fixo* ou *ponto de equilíbrio* da recorrência.

Exemplo 1.12: Vamos encontrar os pontos fixos da recorrência $x_{n+1} = 0,5x_n + 1$.

Pela definição, devemos encontrar um valor x_n, o qual representaremos por x*, tal que $x_{n+1} = x_n = x^*$. Para tanto, basta resolvermos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n. \quad (1) \\ x_{n+1} = 0,5x_n + 1 \quad (2) \end{cases}$$, substituindo (1) em (2), temos:

$$x_n = 0,5x_n + 1 \rightarrow 0,5x_n = 1 \rightarrow x_n = 2$$

Portanto, $x^* = 2$ é o ponto fixo da recorrência. Verificamos isso substituindo $x_n = 2$ na recorrência.

$$x_{n+1} = 0,5x_n +1 = 0,5 \times 2 + 1 = 2$$

Obviamente se fizermos $x_0 = 2$, as sucessivas iterações da recorrência formarão a sequência (2, 2, 2, 2, 2, 2, 2,...)

Faremos agora o seguinte questionamento: *É possível encontrarmos um valor para x_0, diferente de 2, tal que após p iterações cheguemos ao ponto fixo $x^*= 2$?*

Vamos atribuir um valor qualquer para x_0 que seja diferente de *2.* Considerando $x_0 = 4$, um valor maior que o ponto $x^*= 2$, e iterando a recorrência $x_{n+1} = 0,5x_n + 1$ cinco vezes, então temos $x_0 = 4$; $x_1 = 3$; $x_2 = 2,5$; $x_3 = 2,25$; $x_4 = 2,125$; $x_5 = 2,0625$.

Se continuarmos iterando a recorrência, não atingiremos o ponto fixo $x^*= 2$, todavia obteremos valores cada vez mais próximos deste.

Considerando agora $x_0 = 1$, um valor menor que o ponto fixo, e iterando a recorrência cinco vezes, então temos $x_0 = 1$; $x_1 = 1,5$; $x_2 = 1,75$; $x_3 = 1,875$; $x_4 = 1,9375$; $x_5 = 1,9687$.

Se continuarmos iterando a recorrência, novamente não atingiremos o ponto fixo, todavia obteremos valores cada vez mais próximos deste.

Na verdade, independente do valor atribuído para x_0, x_n *converge* para $x^*= 2$. Dizemos então que $x^*= 2$ é um *ponto fixo estável* ou que x*= 2 é um *atrator.*

Mas será que isso sempre ocorre? Ou seja, em qualquer recorrência da forma $x_{n+1} = ax_n + b$, independente do valor de x_0 ou x_1 a sequência de iterações converge para o *ponto fixo?* Antes de respondermos este questionamento, através da análise de mais alguns exemplos, iremos definir uma fórmula que permitirá encontrar diretamente o valor do ponto fixo de uma recorrência da forma $x_{n+1} = ax_n + b$.

Resolvendo o Sistema

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n & (1) \\ x_{n+1} = ax_n + b & (2) \end{cases}$$

Substituindo (1) em (2), temos:

$$x_n = ax_n + b$$

$$x_n(1 - a) = b$$

$$x_n = \frac{b}{(1-a)}, \text{ logo } x^* = \frac{b}{(1-a)}, \text{ com } a \neq 1$$

Vemos que uma recorrência da forma $x_n = ax_n + b$ possui um único ponto fixo.

Exemplo 1.13: Vamos encontrar o ponto fixo da recorrência $x_{n+1} = 2x_n - 6$.

Note que a recorrência é da forma $x_{n+1} = ax_n + b$. Logo temos $a = 2$ e $b = -6$.

Substituindo na fórmula, temos $x^* = \dfrac{b}{(1-a)} = \dfrac{-6}{(1-2)} = 6$

Portanto, $x^*= 6$ é o ponto fixo da recorrência. Obviamente se fizermos $x_1 = 6$, as próximas iterações da relação formarão a sequência (6, 6, 6, 6, 6, ...).

Como no primeiro exemplo, vamos tentar encontrar um valor para x_0, diferente de 6, tal que as sucessivas iterações da recorrência nos leve ao o ponto fixo $x^*= 6$.

Inicialmente atribuímos um valor qualquer para x_0. Considerando $x_0 = 5$ e obtendo os próximos cinco termos da sequência, temos:

$x_0 = 5$; $x_1 = 4$; $x_2 = 2$; $x_3 = -2$; $x_4 = -10$; $x_5 = -26$.

Se continuarmos iterando, os valores divergirão de $x^* = 6$, tendendo ao infinito negativo. Considerando $x_0 = 7$ e calculando os próximos cinco termos da sequência, temos $x_0 = 7$; $x_1 = 8$; $x_2 = 10$; $x_3 = 14$; $x_4 = 22$; $x_5 = 38$.

Se continuarmos iterando, os valores da sequência tenderão ao infinito positivo, divergindo de 5. Na verdade, independente do valor atribuído a x_0 e x_1, a sequência, definida pelas iterações sucessivas da equação de recorrência $x_{n+1} = 2x_n - 6$, *diverge* do ponto fixo $x^* = 6$. Dizemos então que $x^* = 6$ é um *ponto fixo instável ou que* $x^*= 6$ é um *repulsor.*

O exemplo 1.13 evidencia que nem sempre uma sequência de iterações de uma recorrência linear da forma $x_n = ax_n + b$ converge para um ponto fixo. Portanto a resposta ao último questionamente é *não*. Em síntese, reduzimos a análise feita da seguinte forma:

Definição 1.3: Dada a recorrência $x_{n+1} = f(x_n)$, então o seu ponto de equilíbrio é obtido resolvendo a equação $x^* = f(x^*)$. Dizemos então que x^* é *assintoticamente estável* ou *atrator,* se as soluções da equação de recorrência, com condição inicial x_0 ou x_1 suficientemente próxima de x^*, convergem para x^*. Do contrário, se as soluções da equação divergirem x^*, nas mesmas condições acima, dizemos que x^* é *assintoticamente instável* ou *repulsor*.

Antes de vermos outros exemplos e definirmos os critérios de estabilidade para um ponto fixo de uma recorrência da forma $x_{n+1}=ax_n+b$, com *a* e *b* constantes, proporemos uma forma de representarmos graficamente tal ponto. Para isso, mostraremos na próxima seção como construir os *Gráficos de Lamerey* ou *de Teia de Aranha.*

1.2.3.1 Gráficos de Lamerey

Uma maneira simples para determinar os pontos fixos ou de equilíbrio de uma equação de recorrência, seja linear ou não, e observar as primeiras *p* iterações de uma relação de recorrência, é através dos *Gráficos de Lamerey*. Para traçá-los utilizaremos o seguinte procedimento:

a) Consideramos, no sistema cartesiano, os valores de x_n no eixo das abscissas e x_{n+1} no eixo das ordenadas e obtemos o gráfico da função *f***,** que representará todas as soluções da equação de recorrência. Assim teremos $x_{n+1} = f(x_n)$.

b) Traçamos a bissetriz dos quadrantes ímpares, que é o gráfico da função identidade $x_{n+1} = x_n$, ou seja, a reta que passa pela origem e faz 45° com o eixo horizontal. Note que esta etapa é independente da primeira.

c) Os *pontos fixos* ou de *equilíbrio* da recorrência correspondem aos pontos de intersecção do gráfico da função *f* com a bissetriz $x_{n+1} = x_n$. Os gráficos de Lamerey oferecem elementos que permitem estabelecer critérios de *convergência* ou *divergência* para as sequências de iterações da recorrência.

d) A próxima etapa consiste em definir x_0, valor inicial da recorrência, e encontrar a sequência $(x_0; x_1; x_2; \ldots ; x_n; \ldots)$. Em seguida, definiremos a sequência "dobrada" da forma (x_0, x_0, x_1, x_1, x_2, x_2, ..., x_n, x_n, ...). Se agruparmos estes elementos da sequência dois a dois, formaremos a seguinte sequência de pontos no plano: $P_0 = (x_0, x_0)$; $P_1 = (x_0, x_1)$; $P_2 = (x_1, x_1)$; $P_3 = (x_1, x_2)$;...; $P_n = (x_n; x_n)$; $P_{n+1} = (x_n; x_{n+1})$.

e) Localizamos no eixo horizontal o valor correspondente à condição inicial x_0, e subimos uma perpendicular até encontrar o gráfico da função *f*. O valor correspondente no eixo vertical será $x_1 = f(x_0)$. Em seguida, traçamos uma paralela ao eixo horizontal a partir deste ponto até interceptar o gráfico da primeira bissetriz. A abscissa do ponto de interseção é obviamente igual a x_1. A partir deste ponto repetimos o processo: construímos uma perpendicular ao eixo horizontal passando por x_1 até encontrar o gráfico de *f,* obtendo $x_2 = f(x_1)$, traçamos novamente a paralela ao eixo horizontal e assim por diante. O diagrama resultante assemelha-se a uma escada, onde o início de cada degrau indica o valor de cada iteração. O diagrama obtido denomina-se Gráfico de Lamerey (diagrama de escada, ou diagrama teia-de-aranha). Iremos nos referir aos mesmos somente como *Gráficos de Lamerey*, que nos permite uma visualização do tipo de convergência obtida.

É importante enfatizar que a representação gráfica de uma equação de recorrência com condições iniciais definidas é uma sequência de pontos e não uma curva contínua. Neste trabalho ao construirmos os gráficos de Lamerey, representaremos a recorrência pela função *f, tendo consciência de que a* curva que representa graficamente tal função é o *local geométrico* de todas as soluções da recorrência, independente da condição inicial.

Aplicaremos agora o procedimento para construírmos os Gráficos de Lamerey referentes a algumas recorrências. Em um primeiro momento, vamos construir os Gráficos referentes às duas relações recorrência vistas na seção anterior.

Exemplo 1.14: Vamos construir o Gráfico de Lamerey para as três primeiras iterações da recorrência $x_{n+1} = 0,5x_n + 1$, onde $x_0 = 4$.

Vimos na seção anterior que o ponto de equilíbrio da recorrência é $x^*= 2$. Calculando as três primeiras iterações da recorrência, temos: $x_0 = 4$; $x_1 = 3$; $x_2 = 2,5$; $x_3 = 2,125$. Se continuarmos iterando, não chegaremos a $x^*= 2$, todavia os valores se aproximarão cada vez mais do ponto fixo. Se fizermos $x_0 < 2$, o comportamento observado acima se repetirá. Dizemos então que $x^* = 4$ é um *ponto fixo estável* ou *atrator* com *convergência monótona.*

Construindo o gráfico de acordo com as instruções dadas, então temos:

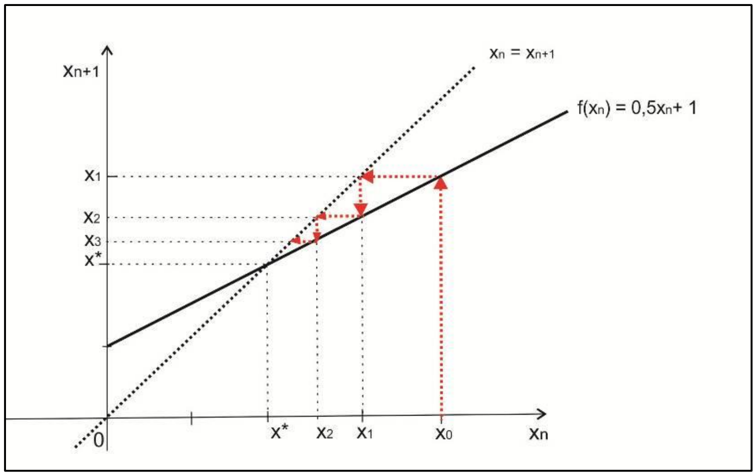


Figura 1.1: Gráfico de Lamerey para $x_{n+1} = 0{,}5x_n + 1$, com $x_0 = 4$.

Exemplo 1.15: Vamos Construir o Gráfico de Lamerey para as três primeiras iterações da recorrência $x_{n+1} = 2x_n – 6$, com $x_0 = 7$.

Vimos que o ponto fixo ou de equilíbrio da recorrência é x*= 6. Calculando as três primeiras iterações da recorrência, temos: $x_0 = 7$, $x_1 = 8$, $x_2 = 10$, $x_3 = 14$. Se continuarmos iterando, os termos da solução se distanciarão cada vez mais do ponto fixo, com valores sucessivamente maiores que este. Se fizermos $x_0 < 6$, o comportamento observado acima se repetirá. Dizemos então que $x^* = 6$ é um *ponto fixo instável* ou *repulsor* com *divergência monótona.*

Construindo o gráfico de acordo com as instruções dadas, temos:

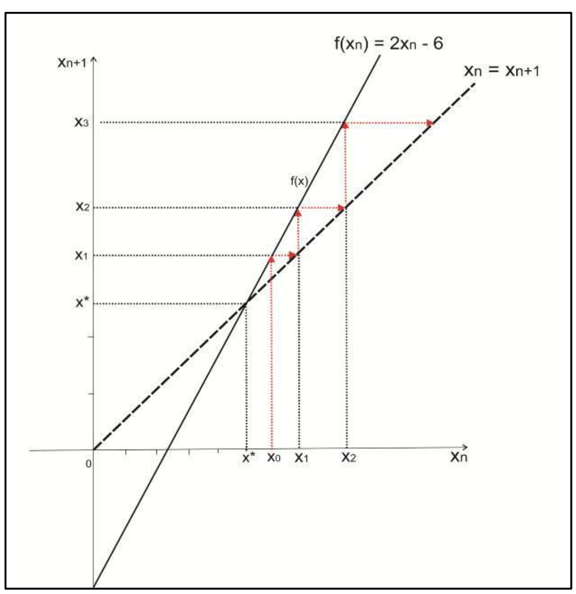


Figura 1.2: Gráfico de Lamerey para $x_{n+1} = 2x_n – 6$, com $x_0 = 7$.

Exemplo 1.16: Vamos Construir o gráfico de Lamerey para a recorrência $x_{n+1} = -0{,}5x_n + 6$, com $x_0 = 6$, a partir das três primeiras iterações da recorrência.

Primeiramente, vamos encontrar o ponto fixo ou de equilíbrio da recorrência. Para isso, vamos usar a fórmula anteriormente definida. Note que a recorrência é da forma $x_{n+1} = ax_n + b$. Logo temos $a = -0{,}5$ e $b = 6$. Substituindo na fórmula, temos:

$$x^* = \frac{b}{(1-a)} = \frac{6}{[1-(-0{,}5)]} = 4$$

Portanto, $x^* = 4$ é o ponto fixo da recorrência. Obtendo as três primeiras iterações da recorrência, então temos $x_0 = 6$; $x_1 = 3$; $x_2 = 4{,}5$; $x_3 = 3{,}75$.

Se continuarmos iterando, não chegaremos a $x^* = 4$, todavia os valores se aproximarão cada vez mais do ponto fixo, alternando entre valores maiores e menores este. Se fizermos $x_0 < 4$, o comportamento observado acima se repetirá. Dizemos então que $x^* = 4$ é um *ponto fixo estável* ou *atrator* com *convergência oscilatória ou não monótona.*

Construindo o gráfico de acordo com as instruções dadas, temos:

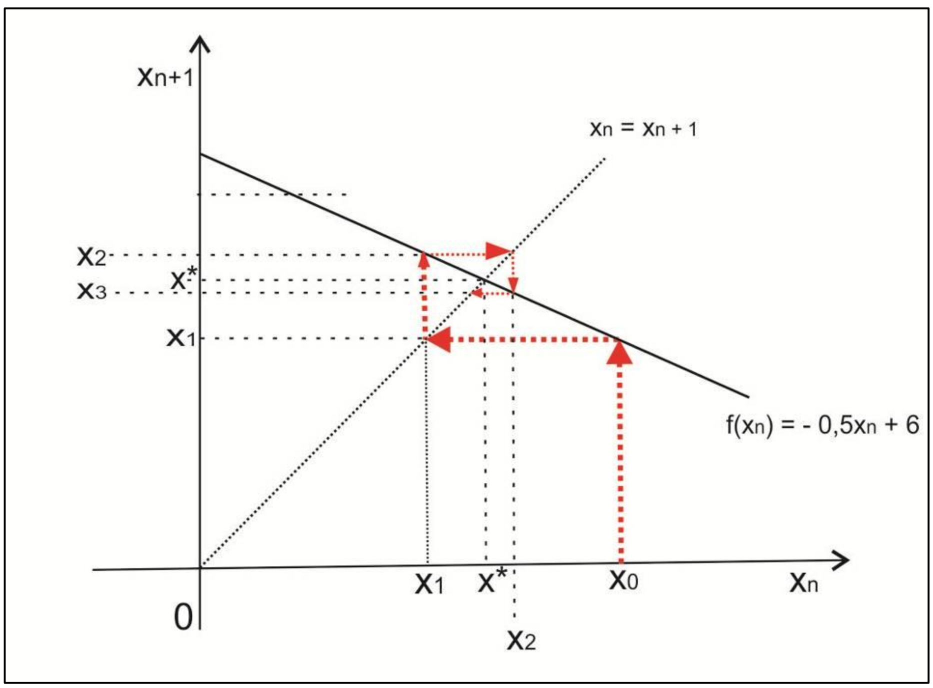


Figura 1.3: Gráfico de Lamerey para $x_{n+1} = -0{,}5x_n + 6$, com $x_0 = 6$.

Exemplo 1.17: Vamos construir o gráfico de Lamerey para a recorrência $x_{n+1} = -x_n + 4$, com $x_0 = 3$, a partir das três primeiras iterações da recorrência. Note que a recorrência é da forma $x_{n+1} = ax_n + b$. Logo, $a = -1$ e $b = 4$. Substituindo na fórmula, temos $x^* = \frac{b}{(1-a)} = \frac{4}{[1-(-1)]} = 2$. Portanto, x*= 2 é o ponto fixo da recorrência. Obtendo as três primeiras iterações da recorrência, então temos $x_0 = 3$; $x_1 = 1$; $x_2 = 3$; $x_3 = 1$. Se continuarmos iterando, os termos da sequência se alternarão entre 1 e 3 formando o chamado *ciclo limite* em torno do ponto fixo x* = 2.

Construindo o gráfico de acordo com as instruções dadas, temos:

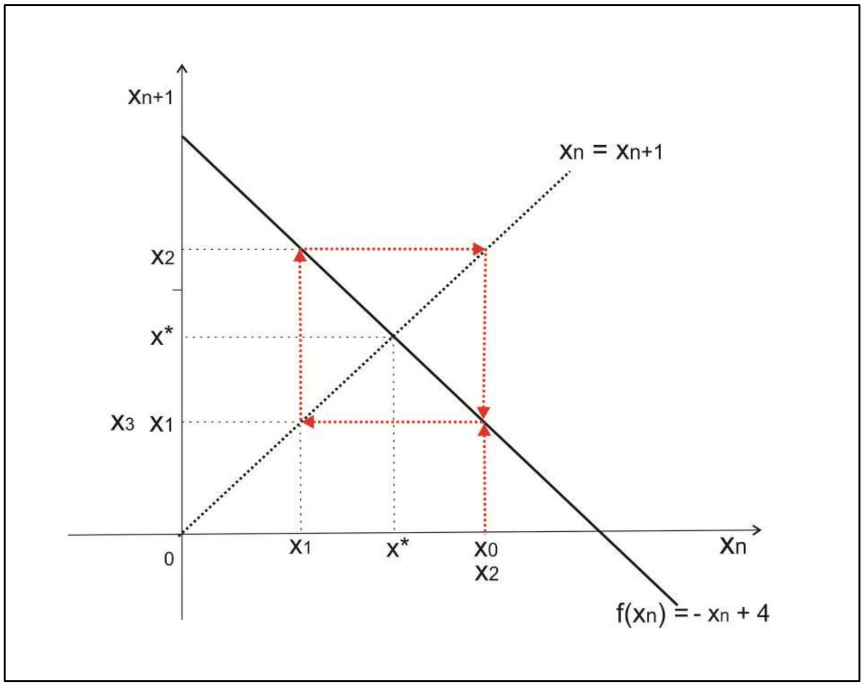


Figura 1.4: Gráfico de Lamerey para $x_{n+1} = - x_n + 4$, com $x_0 = 3$.

Exemplo 1.18: Vamos construir o gráfico de Lamerey para a recorrência $x_{n+1} = x_n + 2$, com $x_0 = 1$, a partir das três primeiras iterações da recorrência.

A recorrência é da forma $x_{n+1} = ax_n + b$. Logo temos $a = 1$ e $b = 2$. Substituindo na fórmula, então temos $x^* = \frac{b}{(1-a)} = \frac{2}{[1-(1)]} = \frac{2}{0} =$ não se define.

Isso ocorre porque o gráfico da recorrência é paralelo ao da bissetriz, logo as retas não se intersectam. Assim qualquer que seja o valor atribuído a x_0, a sequência tenderá ao infinito positivo. Obtendo as três primeiras iterações da recorrência, então temos $x_0 = 1$; $x_1 = 3$; $x_2 = 5$; $x_3 = 7$.

Construindo o gráfico de acordo com as instruções dadas, temos:

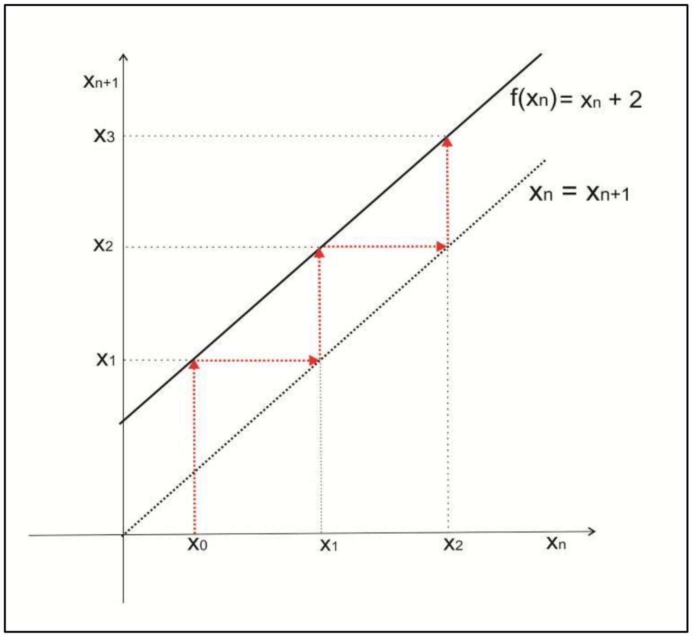


Figura 1.5: Gráfico de Lamerey para $x_{n+1} = x_n + 2$, com $x_0 = 1$.

No caso de *a = 1* e *b = 0*, qualquer valor atribuído a x_0 é um ponto fixo da recorrência, pois os gráficos da recorrência e da bissetriz coincidem. Neste caso dizemos que a recorrência possui infinitos pontos fixos.

1.2.3.2 Critérios de estabilidade de um ponto fixo de uma recorrência linear de primeira ordem com termo independente e coeficientes constantes

Os pontos fixos x* representam soluções estacionárias de uma recorrência, independente do valor atribuído à condição inicial x_0 ou x_1. É importante, porém estudar a sua estabilidade, ou seja, o comportamento das iterações quando se atribui valores a x_0 ou x_1 próximos de x*. Vamos agora analisar com mais detalhes os gráficos de Lamerey construídos na seção anterior.

- No primeiro exemplo, as iterações da recorrência aproximam-se do ponto fixo x* quando $n \to \infty$, o que ocorrerá tanto se x_0 estiver à esquerda como à direita de x*. Qualquer que seja a condição inicial x_0, a sequência de iterações convergirá para x* quando *n* tende a infinito.

- No segundo exemplo, tomando-se uma condição inicial próxima ao ponto fixo, observamos que as iterações subsequentes da relação afastam-se de x*. Se fizermos *n* tender ao infinito, o valor de cada iteração também tenderá ao infinito. Neste caso o ponto fixo é instável, pois qualquer condição inicial em sua vizinhança produz uma sequência que se afasta do ponto fixo.

- No terceiro exemplo o gráfico de *f* possui inclinação negativa, onde $-1 < a < 0$. Neste caso o ponto fixo é estável e, portanto independente do valor atribuído a x_0, o sequência aproxima-se do ponto fixo, todavia não de forma monótona, como exposto no primeiro exemplo, mas alternando entre valores maiores e menores que o do ponto fixo. Dizemos que a convergência é oscilatória.

- No quarto exemplo temos $a = -1$, neste caso a cada duas iterações o valor inicial se repete. O diagrama de escada correspondente é uma figura fechada, que dependerá da condição inicial. As iterações sucessivas da recorrência oscilam indefinidamente em torno do ponto fixo x* sem jamais alcançá-lo, seja qual for a condição inicial. Podemos associar esse tipo de comportamento a um equilíbrio indiferente. No caso de $b = 0$ a mesma situação repetir-se-á, mas o ponto fixo será a origem x* = 0.

- No quinto exemplo temos uma situação onde $a = 1$ e $b \neq 0$. Neste caso, o gráfico de *f* é paralelo à primeira bissetriz, não existindo o ponto fixo. O diagrama de escada mostra que, partindo de uma condição inicial x_0 qualquer, as iterações subsequentes tendem ao infinito. No caso de $a = 1$ e $b = 0$, o gráfico de *f* passará pela origem e coincidirá com a primeira bissetriz. Podemos dizer, então, que a recorrência possui infinitos pontos fixos, que não podem ser classificados nem como estáveis nem como instáveis. Podemos resumir nossa análise no seguinte critério de estabilidade para os pontos fixos de recorrências lineares de primeira ordem da forma $x_{n+1} = ax_n + b$ com *a* e *b* constantes.

a) |a| < 1: x* é *estável* ou *repulsor*. Sendo que a convergência é *monótona*, se $0 < a < 1$; ou *oscilatória* , se $-1 < a < 0$.

b) |a| > 1: x* é *instável* ou *repulsor*. Sendo que a divergência é *monótona*, se $a > 1$; *ou* oscilatória se $a < -1$.

c) a = 1 e b $\neq$ 0: não existe ponto fixo, qualquer que seja a condição inicial, a sequência de iterações tende ao infinito.

d) a = 1 e b = 0: existem infinitos ponto fixos (nem estáveis nem instáveis).

e) a = − 1: a solução, já a partir de x_0, forma um ciclo de período 2 em torno do ponto fixo.

1.3 RECORRÊNCIAS LINEARES DE SEGUNDA ORDEM

As equações de recorrência da forma $x_{n+2} + \lambda_1 x_{n+1} + \lambda_0 x_n = g(n)$, na qual $\lambda_0 \neq 0$; e λ_1 , λ_0 e $g(n)$ são funções de *n,* são denominadas recorrências lineares de segunda ordem.

Exemplo 1.19: A equação $x_{n+2} = 2x_{n+1} - 3x_n$ é uma recorrência linear homogênea de segunda ordem com coeficientes constantes; a equação $x_{n+2} = (n-3)x_{n+1} + 2x_n - n^2$ é uma recorrência linear não homogênea de segunda ordem com coeficientes variáveis; a equação $x_{n+2} = (n+1)^2 x_n$ é uma recorrência linear homogênea de segunda ordem com coeficientes variáveis. Neste último caso, o coeficiente de x_{n+1}=0.

Observe que para a recorrência possuir solução única, é necessário que as condições iniciais x_1 e x_2 ou x_0 e x_1 estejam definidas.

Quando abordamos as recorrências lineares de primeira ordem, foi apresentado um método intuitivo para encontrar a fórmula que representa a solução de tais recorrências. Todavia, tal método se mostra ineficiente quando aplicado a uma recorrência linear de segunda ordem, pois neste caso, a expansão da equação até o n-ésimo termo, na maioria das vezes, não permite deduzir facilmente a fórmula da solução. Na próxima seção, veremos como tais fórmulas podem ser encontradas para um caso particular de recorrência linear de segunda ordem.

1.3.1 Solução De Uma Recorrência Linear Homogênea De Segunda Ordem Com Coeficientes Constantes

As recorrências lineares homogêneas de segunda ordem com coeficientes constantes na forma $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$ a princípio são as mais fáceis de resolver.

Para resolver este tipo de recorrência será apresentada uma técnica que consiste em conjeturar uma solução do tipo $x_n = bq^n$ com $b \neq 0$. Tal técnica permite solucionar uma recorrência linear homogênea de coeficientes constantes de ordem *n*, incluindo, portanto as equações lineares de primeira ordem, estudadas nas seções anteriores. Vamos aplicar o raciocínio para uma recorrência de segunda ordem:

Dada a equação de recorrência linear e homogênea de segunda ordem:

$$x_2 + px_1 + qx_n = 0$$

Substituindo $x_n = bq^n$, com $b \neq 0$ na equação, então temos $bq^2 + pbq^1 + qbq^0 = 0$, fazendo $q^0 = 1$ e colocando *b* em evidência, temos:

$$b(q^2 + pq + 1) = 0$$

Mas pela hipótese $b \neq 0$, logo $q^2 + pq + 1 = 0.$ Note que o primeiro termo desta última igualdade é uma equação quadrática na incógnita ***q*****.** Ao igualarmos tal polinômio a zero, surge uma equação polinomial em *q* denominada *equação característica*. Vejamos um exemplo.

Exemplo 1.20: Vamos encontrar a equação característica referente à recorrência $x_{n+2} = 2x_{n+1} - 3x_n$. Conjeturando que $x_n = bq^n$, *com* $b \neq 0$ é uma solução da equação e substituindo nesta, então temos:

$$bq^2 = 2bq^1 - 3bq^0$$
$$bq^2 - 2bq^1 + 3bq^0 = 0$$
$$bq^2 - 2bq^1 + 3b = 0$$
$$b(q^2 - 2q^1 + 3) = 0$$

Logo concluímos que a equação característica é $q^2 - 2q^1 + 3 = 0$.

Generalizando, podemos concluir que a equação característica, da recorrência linear homogênea $y_n x_n + y_{n-1}x_{n-1} + y_{n-2}x_{n-2} + \ldots + y_2x_2 + y_1x_1 + y_0x_0 = 0$, onde y_k com $(0 \leq k \leq n)$ são constantes reais, é $y_nq^n + y_{n-1}q^{n-1} + ... + y_2q^2 + y_1q^1 + y_0 = 0$

Assim a fórmula que representa a solução geral de uma equação de recorrência linear de ordem n pode ser uma combinação linear de potências n-ésimas de todas as raízes da equação característica.

Logo $x_n = A_n(q_n)^n + A_{n-1}(q_{n-1})^{n-1} + \ldots + A_1(q_1)^1 + A_0(q_0)^0$ é a fórmula da solução da equação de recorrência $y_nx_n + y_{n-1}x_{n-1} + y_{n-2}x_{n-2} + \ldots + y_2x_2 + y_1x_1 + y_0x_0 = 0$ em que q_i é a e-nésima raiz da equação característica

$$y_nq^n + y_{n-1}q^{n-1} + y_{n-2}q^{n-2} + \ldots + y_2q^2 + y_1q^1 + y_0 = 0$$

A_i são os coeficientes a serem determinados a partir das condições iniciais do problema, ou seja, a partir dos primeiros n termos da solução, definidos pela equação de recorrência.

Os próximos cinco teoremas, extraídos de Lima (2006, p.74-78), apresenta a validade da solução proposta acima, para uma recorrência linear homogênea de segunda ordem.

Teorema 1.2 : Dada a recorrência $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0,$ se as raízes de sua equação característica $r^2 + pr + q = 0$ são r_1 e r_2, onde $r_1 \neq r_2$ então $x_n = C_1r_1^n + C_2r_2^n$ é solução da recorrência independente dos valores de C_1 e C_2.

Prova: Substituindo $x_n = C_1r_1^n + C_2r_2^n$ na recorrência $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$ e agrupando convenientemente os termos, então temos:

$x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$

$C_1r_1^{n+2} + C_2r_2^{n+2} + p(C_1r_1^{n+1} + C_2r_2^{n+1}) + q(C_1r_1^n + C_2r_2^n) = 0$

$C_1r_1^n(r_1^2 + pr_1 + q) + C_2r_2^n(r_2^2 + pr_2 + q) = 0$, pela hipótese inicial r_1 e r_2 são raízes do polinômio $r^2 + pr + q$, logo $C_1r_1^n \times 0 + C_2r_2^n \times 0 = 0$

De acordo Lipzchutz (2009, p. 498) "E importante destacar que o teorema acima é verdadeiro mesmo quando as raízes não são reais".

O teorema a seguir mostra que se $r_1 \neq r_2$ todas as soluções da recorrência $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$ tem a forma $x_n = C_1r_1^n + C_2r_2^n$.

Teorema 1.3: Se as raízes de $r^2 + pr + q = 0$ são r_1 e r_2, com $r_1 \neq r_2$ então todas as soluções da recorrência $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$ são da forma $x_n = C_1r_1^n + C_2r_2^n$, com C_1 e C_2 constantes.

Prova: Seja y_n uma solução qualquer de $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$. Determinando as constantes C_1 e C_2 que sejam soluções do sistema de equações:

$$\begin{cases} C_1r_1 + C_2r_2 = y_1 \\ C_1r_1^2 + C_2r_2^2 = y_2, \text{ então temos:} \end{cases}$$

$$C_1 = \frac{r_2^2 y_1 - r_2 y_2}{r_1 r_2 (r_2 - r_1)} \quad \text{e} \quad C_2 = \frac{r_1 y_2 - r_1^2 y_1}{r_1 r_2 (r_2 - r_1)}$$

Isso é possível pois $r_1 \neq r_2$, $r_1 \neq 0$ e $r_2 \neq 0$.

Afirmamos que $y_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n$ para todo n natural, o que provará o teorema.

Seja $z_n = y_n - C_1 r_1^n - C_2 r_2^n$. Mostraremos que $z_n = 0$ para todo n. Temos:

$z_{n+2} + pz_{n+1} + qz_n = 0$

$(y_{n+2} - C_1r_1^{n+2} - C_2r_2^{n+2}) + p(y_{n+1} - C_1r_1^{n+1} - C_2r_2^{n+1}) + q(y_n - C_1r_1^n - C_2r_2^n) = 0$

$y_{n+2} + py_{n+1} + qy_n - C_1r_1^n(r_1^2 + pr_1 + q) - C_2r_2^n(r_2^2 + pr_2 + q) = 0$

O primeiro parênteses é igual a zero, porque y_n é solução de $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$.

Os dois últimos parênteses são iguais a zero, porque r_1 e r_2 são raízes de $r^2 + pr + q = 0$. Então $z_{n+2} + pz_{n+1} + qz_n = 0$.

Além disso, como $C_1r_1^n + C_2r_2^n = y_1$ e $C_1r_1^2 + C_2r_2^2 = y_2$, temos $z_1 = z_2 = 0$. Assim concluímos que $z_n = 0$ para todo o n, como queríamos provar.

O próximo teorema versa sobre a hipótese das raízes da equação característica serem complexas.

Teorema 1.4: Se as raízes r_1 e r_2 da equação característica forem complexas, a solução $x_n = C_1r_1^n + C_2r_2^n$, com C_1 e C_2 constantes arbitrárias, pode ser escrito na forma $x_n = \rho^n \left(C'_1 \cos(n\theta) + C'_2 sen(n\theta)\right)$ onde C'_1 e C'_2 são novas constantes.

Prova: A transformação tem como objetivo evitar cálculos com complexos, para tanto devemos colocar as raízes na forma trigonométrica:

Assim temos $r_1 = \rho(\cos\theta + isen\theta)$ e $r_2 = \rho(\cos\theta - isen\theta)$. Aplicando a fórmula de *De Moivre*, temos:

$r_1^n = \rho^n(\cos n\theta + isen(n)\theta)$, $r_2^n = \rho^n(\cos n\theta - isen(n)\theta)$

Substituindo as raízes na solução $x_n = C_1r_1^n + C_2r_2^n$, temos:

$x_n = C_1\,\rho^n(\cos n\theta + isen(n)\theta) + C_2\,\rho^n(\cos n\theta - isen(n)\theta)$

$x_n = \rho^n\left[(C_1\cos n\theta + C_1 isen(n)\theta) + (C_2\cos n\theta - C_2 isen(n)\theta)\right]$

$x_n = \rho^n\left[(C_1 + C_2)\cos(n)\theta + i(C_1 - C_2)sen(n)\theta\right]$

$C_1 + C_2$ e $i(C_1 - C_2)$ são novas constantes, logo a solução pode ser escrita na forma

$x_n = \rho^n\left(C'_1 \cos n\theta + C'_2 sen(n)\theta\right)$.

Teorema 1.5: Se as raízes de $r^2 + pr + q = 0$ são iguais, $r_1 = r_2 = r$, então $x_n = C_1r_1^n + C_2nr_2^n$ é solução da recorrência $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$, quaisquer que sejam os valores das constantes C_1 e C_2.

Prova: Pelas relações de *Girard*, em uma equação do segundo grau $ar^2 + pr + q = 0$, temos que $r_1 + r_2 = -\frac{p}{a}$, particularmente se $a = 1$ e $r_1 = r_2 = r$, então temos:

$$r + r = -\frac{p}{1}$$

$$2r = -\frac{p}{1}$$

$$r = -\frac{p}{2}$$

Substituindo $x_n = C_1r_1^n + C_2nr_2^n$ na recorrência $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$ e agrupando convenientemente os termos, então temos:

$[C_1r_1^{n+2} + C_2(n+2)r_2^{n+2}] + p[C_1r_1^{n+1} + C_2(n+1)r_2^{n+1}] + q[C_1r_1^n + C_2nr_2^n] = 0$

$[r_1^2C_1r_1^n + (r_2^2C_2nr_2^n + r_2^2C_22r_2^n)] + [pr_1C_1r_1^n + (pr_2C_2nr_2^n + pr_2C_2r_2^n)] + [qC_1r_1^n + qC_2nr_2^n] = 0$

Fazendo $r_1 = r_2 = r$ e agrupando os termos, temos:

$[r^2C_1r^n + (r^2C_2\, nr^n + r^2C_2\, 2r^n)] + [prC_1r^n + (prC_2nr^n + prC_2\, r^n)] + [qC_1r^n + +qC_2nr^n] = 0$

$C_1r^n\,(r^2 + pr + q) + C_2\,nr^n\,(r^2 + pr + q) + C_2r^nr(\,2r + p) = 0$

Como r é a raiz de $r^2 + pr + q = 0$ e $r = -\frac{p}{2}$, então temos:

$$C_1r^n(0) + C_2nr^n(0) + C_2r^nr\left[2\left(-\frac{p}{2}\right) + p\right] = 0$$

$$C_1r^n(0) + C_2nr^n(0) + C_2r^nr(0) = 0$$

Teorema 1.6: Se as raízes de $r^2 + pr + q = 0$ são iguais, $r_1 = r_2$, então todas as soluções da recorrência $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$ são da forma $x_n = C_1r^n + nC_2r^n$, onde C_1 *e* C_2 constantes.

Prova: Seja x_n uma solução qualquer de $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$. Devemos determinar as constantes C_1 e C_2 que sejam soluções do sistema de equações:

$$\begin{cases} C_1r + C_2r = y_1 \\ C_1r^2 + 2C_2r^2 = y_2 \end{cases}$$

Isolando C_1 e C_2 temos: $C_1 = \frac{2y_1}{r} - \frac{y_2}{r^2}$ e $C_2 = \frac{y_2 - ry_1}{r_2}$. Isso é possível, pois $r \neq 0$.

Afirmamos que $x_n = C_1r^n + C_2nr^n$ para todo n natural, o que provará o teorema. Seja $z_n = x_n - C_1r^n - C_2nr^n$. Mostraremos que $z_n = 0$ para todo n. Vejamos:

$z_{n+2} + pz_{n+1} + qz_n = 0$

$(x_{n+2} - C_1r^{n+2} - C_2(n+2)r^{n+2}) + p(x_{n+1} - C_1r^{n+1} - C_2(n+1)r^{n+1}) + q(x_n - C_1r^n - C_2nr^n) = 0$

$(x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n) - C_1r^n(r^2 + pr + q) - C_2nr^n(r^2 + pr + q) - C_2r^nr(2r + p) = 0$

O primeiro parênteses é igual a zero, porque x_n é solução de $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$. O segundo e o terceiro parênteses são iguais a zero, porque r é raiz de $r^2 + pr + q = 0$. O quarto parênteses é igual a zero porque $2r = -p$, já que, $r_1 = r_2 = r \rightarrow r = -\frac{p}{2}$. Então $z_{n+2} + pz_{n+1} + qz_n = 0.$

Além disso, como $C_1r + C_2r = x_1$ e $C_1r^2 + 2C_2r^2 = x_2$, temos $z_1 = z_2 = 0$. Como $z_{n+2} + pz_{n+1} + qz_n = 0$ e $z_1 = z_2 = 0$, então $z_n = 0$ para todo o n, como queríamos provar.

Vejamos alguns exemplos:

Exemplo 1.21: A recorrência $x_{n+2} - 4x_{n+1} + 4qx_n = 0$ tem equação característica $r^2 - 4r + 4 = 0$ cujas raízes são $r_1 = r_2 = 2.$ Portanto a solução da recorrência é $x_n = C_12r^n + C_2n2r^n$.

Exemplo 1.22: Vamos resolver a equação $x_{n+2} - 5x_{n+1} + 6x_n = 0$ com $x_0 = 0$ e $x_1 = 2.$

Substituindo $x_k = bq^k$ na equação $x_{n+2} - 5x_{n+1} + 6x_n = 0$, então temos:

$bq^2 - 5bq^1 + 6bq^0 = 0 \rightarrow bq^2 - 5bq^1 + 6b = 0 \rightarrow b(q^2 - 5q^1 + 6) = 0$

Logo $q^2 - 5q + 6 = 0$ é a equação característica da recorrência, cujas raízes são $q' = 2$ e $q'' = 3$. Logo a solução geral da recorrência é $x_n = A(2)^n + B(3)^n$.

Com as condições iniciais $x_0 = 0$ e $x_1 = 2$, é possível construir o sistema

$$\begin{cases} x_0 = A(2)^0 + B(3)^0 = A + B = 0 \\ x_1 = A(2)^1 + B(3)^1 = 2A + 2B = 0 \end{cases}$$

Cuja solução é B = 2 e A = - 2. Portanto a solução da recorrência é:

$$x_n = A(2)^n + B(3)^n = -2(2)^n + 2(3)^n = 2 \times 3^n - 2 \times 2^n$$

$$x_n = 2 \times 3^n - 2^{n+1}$$

Exemplo 1.23: Vamos resolver a recorrência $x_{n+2} + x_{n+1} + x_n = 0$. Vimos que a recorrência $x_{n+2} + x_{n+1} + x_n = 0$ tem $r^2 + r + 1 = 0$ como equação característica. As raízes da equação característica são $\frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$, complexos de módulo $\rho =$ 1 e argumento principal $\theta = \pm\frac{\pi}{3}$. Substituindo tais valores na solução geral, temos:

$$x_n = \rho^n \left[C_1 \cos(n)\theta + C_2 isen(n)\theta\right] \rightarrow x_n = C_1 \cos\frac{n\pi}{3} + C_2 isen\frac{n\pi}{3}$$

A última igualdade representa a solução da recorrência $x_{n+2} + x_{n+1} + x_n = 0$. Como não foram atribuídos valores para as condições iniciais, C_1 e C_2 permanecem indeterminados.

1.3.2 Solução De Uma Recorrência Linear Não Homogênea De Segunda Ordem Com Coeficientes Constantes.

Para resolvermos as relações de recorrência lineares de segunda ordem não homogêneas de coeficientes constantes devemos utilizar o seguinte teorema:

Teorema 1.7: Se a_n é uma solução particular da recorrência $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = f(n)$ então a substituição $x_n = a_n + y_n$ transforma a recorrência em $y_{n+2} + py_{n+1} + qy_n = 0$

Prova: Substituindo x_n por $a_n + y_n$ na relação $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = f(n)$, obtemos:

$$x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = f(n)$$
$$a_{n+2} + y_{n+2} + p(a_{n+1} + y_{n+1}) + q(a_n + y_n) = f(n)$$
$$(a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n) + (y_{n+2} + py_{n+1} + qy_n) = f(n)$$

Mas $a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n = f(n)$, pois pela hipótese inicial, expressa no enunciado do teorema, a_n é solução da recorrência original. Assim, cancelando os termos equivalentes, a equação se transforma em $y_{n+2} + py_{n+1} + qy_n = 0$.

De forma implícita, o teorema 1.7 mostra que a solução de uma recorrência não homogênea é composta de duas partes: *uma solução qualquer da não homogênea* e a *solução da homogênea*. Para obter a solução da não homogênea, podemos conjeturar o seu provável formato, a partir da observação da estrutura do termo idependente.

Exemplo 1.24: Vamos encontrar a solução da recorrência $x_{n+2} - 6x_{n+1} + 8x_n = n + 3^n$. A solução da equação homogênea $h_{n+2} - 6h_{n+1} + 8h_n = 0$ é obtida a partir do polinômio característico $r^2 - 6r + 8 = 0$, cujas raízes são $r_1 = 2$ e $r_2 = 4$. Logo a solução é $h_n = C_1 2^n + C_2 4^n$.

Para obtermos a solução da equação não homogênea, devemos inicialmente observar que tal solução, quando substituída na expressão $x_{n+2} - 6x_{n+1} + 8x_n$ resulta no binômio $n + 3^n$. Representando tal solução por t_n, conjeturamos que esta é um polinômio do primeiro grau somado a um exponencial de base 3. Logo t_n terá o formato $An + B + C3^n$. Portanto ao substituirmos $An + B + C3^n$ na expressão $x_{n+2} - 6x_{n+1} + 8x_n$ devemos obter $x_{n+2} - 6x_{n+1} + 8x_n = n + 3^n$. Vejamos o raciocínio:

Substituindo $An + B + C3^n$ na recorrência $x_{n+2} - 6x_{n+1} + 8x_n = n + 3^n$, temos:

$$A(n + 2) + B + C3^{n+2} - 6[A(n + 1) + B + C3^{n+1}] + 8(An + B + C3^n) = n + 3^n$$

agrupando temos $3An + 3B - 4A - C3^n = n + 3^n$

Igualando os elementos correspondentes dos dois membros da equação, temos:

$$\begin{cases} 3An = n \\ A = \dfrac{1}{3} \end{cases} \qquad \begin{cases} 3B - 4A = 0 \\ B = \dfrac{4A}{3} = \dfrac{4\left(\frac{1}{3}\right)}{3} = \dfrac{4}{9} \end{cases} \qquad \begin{cases} C3^n = 3^n \\ C = -1 \end{cases}$$

Substituindo os valores em $t_n = An + B + C3^n$, então temos:

$$t_n = \frac{1}{3}n + \frac{4}{9} + (-1)3^n = \frac{1}{3}n + \frac{4}{9} - 3^n$$

A solução geral da recorrência é a soma das duas soluções obtidas ($h_n + t_n$). Logo:

$$x_n = h_n + t_n = C_1 2^n + C_2 4^n + \frac{1}{3}n + \frac{4}{9} - 3^n$$

Os valores de C_1 e C_2 permanecem indeterminados, já que o enunciado não ofereceu as duas condições iniciais da recorrência.

1.3.3 Estabilidade De Uma Sequência Definida Por Uma Recorrência Linear Homogênea De Segunda Ordem Com Coeficientes Constantes

Estudaremos agora o comportamento geral de uma sequência, obtida por uma recorrência linear de segunda ordem homogênea com coeficientes constantes.

De início, mostraremos que o ponto (0,0) é o único ponto fixo desse tipo de recorrência. Para tanto devemos obter o sistema de equações de recorrências lineares equivalente à equação de recorrência de segunda ordem. Os pontos fixos do sistema linear serão os pontos fixos da recorrência linear de segunda ordem.

Definição 1.4: Uma equação linear de 2ª ordem $x_{n+2} + ax_{n+1} + bx_n = 0$ pode ser transformada num sistema linear de ordem dois (duas equações de primeira ordem e duas incógnitas). Considerando a mudança de variáveis $x_{n+1} = z_n$ e substituindo em $x_{n+2} + ax_{n+1} + bx_n = 0$, então temos:

$z_{n+1} + az_n + bx_n = 0$, observe que $z_n = x_{n+1} \rightarrow z_{n+1} = x_{n+2}$. Assim temos o sistema:

$$\begin{cases} x_{n+1} = z_n \\ z_{n+1} = -az_n - bx_n \end{cases}$$

O ponto fixo ou de equilíbrio do sistema acima é o par (x^*, z^*) que leva suas duas equações ao equilíbrio, ou seja, $x_{n+1} = x_n = x^*$ e $z_{n+1} = z_n = z^*$. Substituindo o ponto fixo no sistema, temos:

$$\begin{cases} x_{n+1} = z_n \\ z_{n+1} = -az_n - bx_n \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x^* = x^* \\ z^* = -az^* - bx^* \end{cases}$$

Como $b \neq 0$, condição necessária para que a recorrência que deu origem ao sistema seja de segunda ordem, o sistema só terá solução se $z^* = 0$ e $x^* = 0$

Logo o único ponto fixo de uma recorrência linear homogênea de segunda ordem com coeficientes constantes é o ponto $x^* = 0$. Como queríamos provar.

Sabemos que a solução geral de uma recorrência linear homogênea de segunda ordem pode ser representada pela fórmula $x_n = C_1 r_1^{\,n} + C_2 r_2^{\,n}$ com $r_1 \neq r_2$, na qual r_1 e r_2 são as raízes do polinômio característico da recorrência. No caso particular das raízes serem iguais $r_1 = r_2 = r$, vimos que a solução é presentada pela equação $x_n = C_1 r^n + nC_2 r^n$. Vamos representar momentaneamente as raízes r_1 e r_2 respectivamente por λ_1 e λ_2 e considerar os seguintes teoremas:

Teorema 1.08: Considere a solução $x_n = C_1 \lambda_1^{\,n} + C_2 \lambda_2^{\,n}$, se tivermos $|\lambda_1| > 1$ ou $|\lambda_2| > 1$, a sequência tenderá ao infinito, *divergindo* de seu ponto fixo $x^* = 0$.

Prova: Temos a seguintes possibilidades:

i) *No caso de* $\lambda > 1$ *e* $C_1 > 0$, *temos* $0 < C_1\lambda^0 < C_1\lambda^1 <\ldots< C_1\lambda^n$. Observe que a sequência diverge de zero tendendo ao infinito positivo.

ii) *No caso de* $\lambda > 1$ *e* $C_1 < 0$, *temos* $0 > C_1\lambda^0 > C_1\lambda^1 >\ldots> C_1\lambda^n$. Observe que agora, a sequência diverge de zero tendendo ao infinito negativo.

iii) *No caso de* $\lambda < -1$ *e* $C_1 > 0$, *temos*:

$0 < C_1\lambda^0$, $0 > C_1\lambda^1$, $0 < C_1\lambda^2$, $0 > C_1\lambda^3 \ldots 0 < C_1\lambda^{2k}$, $0 > C_1\lambda^{2k+1}$ com $k \in N$.

Mas $|C_1\lambda^0| < |C_1\lambda^1| < |C_1\lambda^2| < |C_1\lambda^3| <\ldots< |C_1\lambda^{2k}| < |C_1\lambda^{2k+1}|$, assim concluímos que a sequência divergirá se zero de forma oscilatória, alternando entre valores maiores e menores que este, porém afastando-se cada vez mais de zero.

iv) No caso de $\lambda < -1$ e $C_1 < 0$, temos:

$0 > C_1\lambda^0$, $0 < C_1\lambda^1$, $0 > C_1\lambda^2$, $0 < C_1\lambda^3 \ldots 0 > C_1\lambda^{2k}$, $0 < C_1\lambda^{2k+1}$ com $k \in N$.

Mas $|C_1\lambda^0| < |C_1\lambda^1| < |C_1\lambda^2| < |C_1\lambda^3| <\ldots< |C_1\lambda^{2k}| < |C_1\lambda^{2k+1}|$, assim, também concluímos que a sequência divergirá de zero de forma oscilatória, alternando entre valores maiores e menores que este, porém afastando-se cada vez mais de zero.

Visto os casos possíveis, podemos dizer que o ponto de equilíbrio será instável se, e somente se, $|\lambda_1| > 1$ ou $|\lambda_2| > 1$.

Todavia, se $|\lambda_1| > 1$ e $|\lambda_2| > 1$ a forma como se dará a divergência, *monótona ou oscilatória,* dependerá dos sinais e dos módulos de λ_1 e λ_2:

Se ambos forem positivos a divergência será monótona, para o infinito positivo ou negativo, dependendo dos valores de C_1 e C_2.

Se ambos forem negativos a divergência será oscilatória.

Se os sinais de λ_1 e λ_2 forem diferentes, prevalecerá aquele que tiver maior módulo. Sendo $\lambda_1 < -1$, $\lambda_2 > 1$ e $|\lambda_1| < |\lambda_2|$ a divergência será monótona. Sendo $\lambda_1 < -1$, $\lambda_2 > 1$ e $|\lambda_1| \geq |\lambda_2|$ a divergência será oscilatória.

Isto ocorre porque o tipo de divergência não depende apenas de um dos monômios da expressão $x_n = C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_2^n$, mas da combinação entre eles.

Teorema 1.09: Considere a solução $x_n = C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_2^n$. se tivermos $0 < |\lambda_1| < 1$ e $0 < |\lambda_2| < 1$, a sequência *convergirá* para o ponto fixo $x^* = 0$.

Prova: Temos as seguintes possibilidades:

i) No caso de $0 < \lambda < 1$ *e $C_1 > 0$, temos* $C_1\lambda^0 > C_1\lambda^1 > ... > C_1\lambda^n > 0$. Observe que a sequência converge para zero.

ii) No caso de $0 < \lambda < 1$ *e $C_1 < 0$, temos* $C_1\lambda^0 < C_1\lambda^1 < ... < C_1\lambda^n < 0$. Observe que a sequência também converge para zero.

iii) No caso de $-1 < \lambda < 0$ e *$C_1 > 0$, temos*:

$0 < C_1\lambda^0$, $0 > C_1\lambda^1$, $0 < C_1\lambda^2$, $0 > C_1\lambda^3 . . .$ $0 < C_1\lambda^{2k}$, $0 > C_1\lambda^{2k+1}$ com $k \in N$.

Mas $\left|C_1\lambda^0\right| > \left|C_1\lambda^1\right| > \left|C_1\lambda^2\right| > \left|C_1\lambda^3\right| > ... > \left|C_1\lambda^{2k}\right| > \left|C_1\lambda^{2k+1}\right| > 0$, assim concluímos que a sequência tenderá a zero de forma oscilatória, alternando entre valores maiores e menores que este**,** porém tendendo a zero.

iv) No caso de $-1 < \lambda < 0$ e *$C_1 < 0$, a* convergência é análoga à observada acima.

Visto os casos possíveis, podemos dizer que o ponto de equilíbrio será estável se, e somente se, $\left|\lambda_{1,2}\right| < 1$.

Também destacamos que a forma como se dará a convergência, *monótona* ou *oscilatória,* dependerá dos sinais e dos módulos de λ_1 e λ_2:

Se ambos forem positivos a convergência será monótona.

Se ambos forem negativos a divergência será oscilatória.

Se os sinais de λ_1 e λ_2 forem diferentes, prevalecerá aquele que tiver maior módulo. Sendo *$-1 < \lambda_1 < 0$, $0 < \lambda_2 < 1$* e $\left|\lambda_1\right| < \left|\lambda_2\right|$ a convergência será monótona. Sendo *$-1 < \lambda_1 < 0$, $0 < \lambda_2 < 1$* e $\left|\lambda_1\right| \geq \left|\lambda_2\right|$ a convergência será oscilatória.

Teorema 1.10: No caso de $\left|\lambda_1\right| = \left|\lambda_2\right| = 1$, obviamente a sequência será estacionária ou constante qualquer que seja C_1.

Prova: Note que $\lambda = 1 \rightarrow C_1\lambda^1 = C_1\lambda^2 = ... = C_1\lambda^n$

Teorema 1.11: No caso de $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = -1$ ou $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = 1$ a sequência oscilará entre dois valores.

Prova: Considerando $\lambda = -1$ e $C_1 > 0$ (o caso em que $C_1 < 0$ é análogo), temos $C_1\lambda^0 > 0$, $C_1\lambda^1 < 0$, $C_1\lambda^2 < 0$ ... $C_1\lambda^{2k} > 0$, $C_1\lambda^{2k+1}$, com $k \in N$. Mas $\left|C_1\lambda^0\right| = \left|C_1\lambda^1\right| = \left|C_1\lambda^2\right| = \left|C_1\lambda^3\right| = ... = \left|C_1\lambda^{2k}\right| = \left|C_1\lambda^{2k+1}\right| = 0$ assim concluímos que a sequência alternará entre dois valores, sendo um maior e outro menor que zero.

Exemplo 1.25. Vamos verificar o comportamento da solução da recorrência $x_{n+2} - x_{n+1} - 6x_n = 0$, com $x_0 = 1$ e $x_1 = 2$. Primeiramente, encontraremos o polinômio característico da equação que é $P(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 6 = 0$, cujas raízes são $\lambda_1 = 3$ e $\lambda_2 = -2$.

Temos $\lambda_1 > 1$ e $\lambda_2 < -1$ e $|\lambda_1| > |\lambda_2|$ logo a sequência *divergirá* de forma *monótona* do ponto x*= 0.

Obtendo os 5 primeiros termos da recorrência, observamos a divergência monótona em relação ao ponto fixo x*= 0.

$x_0 = 1$; $x_1 = 2$; $x_2 = 8$; $x_3 = 20$; $x_4 = 68$; $x_5 = 168$.

Exemplo 1.26: Vamos verificar o comportamento da solução da recorrência $x_{n+2} + 0,3x_{n+1} - 0,4x_n = 0$, com $x_0 = 1$ e $x_1 = 2$. Primeiramente, devemos encontrar o polinômio característico da equação: Vemos que $P(\lambda) = \lambda^2 + 0,3\lambda - 0,4 = 0$, cujas raízes são $\lambda_1 = \left(\frac{1}{2}\right)$ e $\lambda_2 = \left(-\frac{4}{5}\right)$. Temos $0 < \lambda_1 < 1$ e $-1 < \lambda_2 < 0$ e $|\lambda_1| < |\lambda_2|$ logo a sequência *convergirá* de forma *oscilatória* para o ponto x*= 0.

Obtendo os 5 primeiros termos da recorrência, observamos a convergência oscilatória em relação ao ponto fixo x*= 0.

$x_0 = 1$; $x_1 = 2$; $x_2 = -0,2$; $x_3 = 0,86$; $x_4 = -0,338$; $x_5 = 0,4454$.

Exemplo 1.27: Vamos verificar o comportamento da solução da recorrência $x_{n+2} - x_n = 0$, com $x_0 = 1$ e $x_1 = 3$. Primeiramente, devemos encontrar o polinômio característico da equação: Vemos que $P(\lambda) = \lambda^2 - 1 = 0$, cujas raízes são $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = -1$. Obtendo os 5 primeiros termos da recorrência, observamos que a solução oscila entre dois valores.

$x_0 = 1$; $x_1 = 3$; $x_2 = 1$; $x_3 = 3$; $x_4 = 1$; $x_5 = 3$.

1.4 EQUAÇÕES DE RECORRÊNCIAS NÃO LINEARES

Nesta seção, nos ateremos às recorrências não lineares homogêneas de primeira ordem cujas soluções são representadas pela fórmula $x_{n+1} = f(x_n)$, lembrando que $f(x_n)$ não é um polinômio do primeiro grau.

Exemplo 1.28: Se considerarmos a recorrência não linear homogênea de primeira ordem $x_{n+1} = x_n^2$, com $x_0 = 2$, obtemos a sequência $x_n = (2, 4, 16, 256,...)$.

Obviamente, tal solução pode ser representada por uma fórmula fechada que associa cada termo da sequência com sua respectiva posição. Neste caso, tal fórmula pode ser facilmente deduzida, vejamos:

$x_0 = 2$ $\qquad$ $x_2 = x_1^2 = 4^2 = (2^2)^2 = 16$

$x_1 = x_0^2 = 2^2 = 4$ $\qquad$ $x_3 = x_2^2 = 16^2 = [(2^2)^2]^2 = 256$

Podemos deduzir que $x_n= (2)^{2.2....2.2}$, onde 2.2.....2.2 é um produto de *n* fatores iguais a dois, logo $x_n = 2^{2^n}$. Tal resultado pode ser provado facilmente por *indução matemática.*

No exemplo acima constatamos que a natureza assintótica da sequência depende apenas de x_0. Temos quatro possibilidades:

a) Se $|x_0| < 1$, a sequência converge para 0;

b) Se $|x_0| > 1$, a sequência é divergente, tendendo para o infinito;

c) Se $x_0 = 1$, a sequência será estacionária com valores iguais a 1.

d) Se $x_0 = -1$, a sequência será estacionária com valores iguais 1 partir de x_1.

Embora a fórmula que representa a solução da equação de recorrência $x_{n+1} = x_n^2$ possa ser deduzida facilmente, geralmente, não é possível obtê-la, quando se trata de equações não lineares. O que se procura fazer na maioria dos casos é verificar o comportamento de x_n quando $n \to \infty$, isto é, se x_n se aproxima ou não de um limite, e se for possível, encontrá-lo.

Na prática o que fazemos é atribuir um valor inicial suficientemente próximo do ponto fixo x*, e após um número finito de iterações, analisar o comportamento da solução em relação a x*.

Exemplo 1.29: Seja a função $f(x) = x^3$. Note que os pontos x = -1, x = 1 e x = 0 são os pontos fixos de *f*. É interessante observar que a sequência definida por uma recorrência, onde a condição inicial x_0 é um ponto fixo da relação, tem $(x_n) = (x_0; x_0; x_0;...; x_0; ...)$ como solução geral.

Teorema 1.12: Suponha uma equação recorrente da forma $x_{n+1} = f(x_n)$, onde *f* é uma função real que admite *c* como ponto fixo, ou seja, $f(c) = c$. Então, se $x_0 = c$, a sequência recorrente relativa à condição inicial x_0 será *(c; c;...; c...).*

Prova: Seja $x_0 = c$. Então, $x_1 = f(x_0) = f(c) = c$; $x_2 = f(x_1) = f(c) = c$; $x_n = f(x_{n-1})$; e por recorrência, $x_{n-1} = x_0$; logo, $f(x_{n-1}) = c$. Daí, a sequência relativa a x_0 será $(c; c; ... ; c...)$.

Um valor x é dito ponto fixo de período *n* se $f(x_n) = x$. O menor *n* positivo tal que $f(x_n) = x$ é dito período principal de x. Naturalmente, os pontos fixos de uma função são pontos periódicos de período 1. Se um ponto x_0 *é periódico*, a sequência formada é dita periódica. Se um ponto x_0 não é periódico, mas a sequência formada contém algum ponto que é periódico, então dizemos que x_0 *é eventualmente periódico*.

Exemplo 1.30: Seja $f(x_n) = x_n^2 - 1$. Vamos tomar $x_0 = -1$. Então, temos que $x_1 = 0$, $x_2 = -1$, $x_3 = 0$, etc. Logo, ambos os pontos $x = -1$ e $x = 0$ são pontos periódicos de período 2. Por outro lado, se considerarmos $x_0 = 1$, então $x_1 = 0$, $x_2 = -1$ e repetiremos a primeira sequência. Dessa forma, $x = 1$ é um ponto eventualmente periódico; e ambos os pontos: $x = -1$ e $x = 0$ são pontos periódicos.

1.4.2 Critérios De Estabilidade De Um Ponto Fixo De Uma Recorrência Não Linear De Primeira Ordem

Quando estudamos a estabilidade de um ponto de equilíbrio de uma relação de recorrência da forma $x_{n+1} = a_{xn} + b$, com *a* e *b* constantes, vimos que tais critérios foram fixados em função de *a*, que é o coeficiente angular da reta, explícito na equação que define a recorrência. Portanto, em tais recorrências, não é necessário sabermos o valor do ponto fixo da relação, para determinarmos a sua estabilidade.

A estabilidade de um ponto de equilíbrio x* de uma equação não linear de primeira ordem com coeficientes constantes segue os moldes do exposto no parágrafo anterior. Todavia, o gráfico da função *f,* que representa a solução geral da recorrência não linear, não é uma reta, como no caso das recorrências lineares, mas uma *curva*, logo não existe um valor constante explícito na equação da recorrência que permita definir, sem conhecer o valor do ponto fixo, a estabilidade deste.

A solução para o problema consiste em encontrar primeiramente o valor do ponto fixo e considerar que nos arredores de tal ponto, o gráfico da função *f* é uma reta, ou seja, iremos “linearizar” o gráfico da função nas proximidades de seu ponto de equilíbrio. A reta formada coincidirá com a reta tangente ao gráfico de *f* no ponto x*. O coeficiente angular da reta tangente, representada por *λ,* pode ser determinado analiticamente pelo valor do módulo de $\lambda = [df(x_n)/dx_n]$, onde $x_n = x^*$. Observe também que λ é o valor da derivada da função *f* no ponto fixo x*.

Conforme os valores de λ, temos:

a) Se $0 < |\lambda| < 1$, x* é *assintoticamente estável* (atrator), isto é, se x_n estiver próximo de x*, então x_n tenderá a x*. Temos duas possibilidades: se $0 < \lambda < 1$, a convergência será monótona; se $-1 < \lambda < 0$, a convergência será oscilatória.

b) Se |λ| > 1, x* é *assintóticamente instável (repulsor),* isto é, se x_n estiver próximo de x*, então x_n se afastará de x*. Temos duas possibilidades: se $\lambda > 1$, a divergência será monótona; se $\lambda < -1$, a divergência será oscilatória.

c) Se $\lambda = -1$, x* é *neutramente estável*, ou simplesmente estável. Neste caso, a solução x_n, a partir de algum *n*, oscilará em torno do ponto x* que é denominado centro de um *ciclo limite*.

d) Se $\lambda = 0$, x* é *super estável*. Neste caso, qualquer ponto nas proximidades de x* tende de forma monótona para o ponto fixo.

e) Se $\lambda = 1$, o critério de linearização falha, assim x* não pode ser classificado como estável e tão pouco como instável.

1.4.2.1 Estudando a estabilidade de um ponto fixo através dos gráficos de Lamerey

Uma maneira simples para determinar analiticamente os pontos de equilíbrio de uma equação de recorrência linear ou não linear, e estudar a sua estabilidade, consiste em representar as primeiras *n* iterações da recorrência através dos *gráficos de Lamerey* ou de teia de aranha. A seguir iremos analisar alguns exemplos de recorrências não lineares de primeira ordem. Em cada uma delas, definiremos os pontos de equilíbrio, caso existam; construiremos o gráfico de Lamerey e analisaremos a estabilidade dos pontos fixos de acordo com os critérios fixados na seção anterior.

Exemplo 1.31: Considere a recorrência $x_{n+1} = x_n^3$. Vimos que os pontos $x = -1$, $x = 1$ e $x = 0$ são os seus pontos fixos. Para visualizar tais pontos podemos esboçar em um mesmo plano cartesiano, os gráficos da função *f,* que representa todas as soluções da recorrência, e a bissetriz dos quadrantes ímpares.

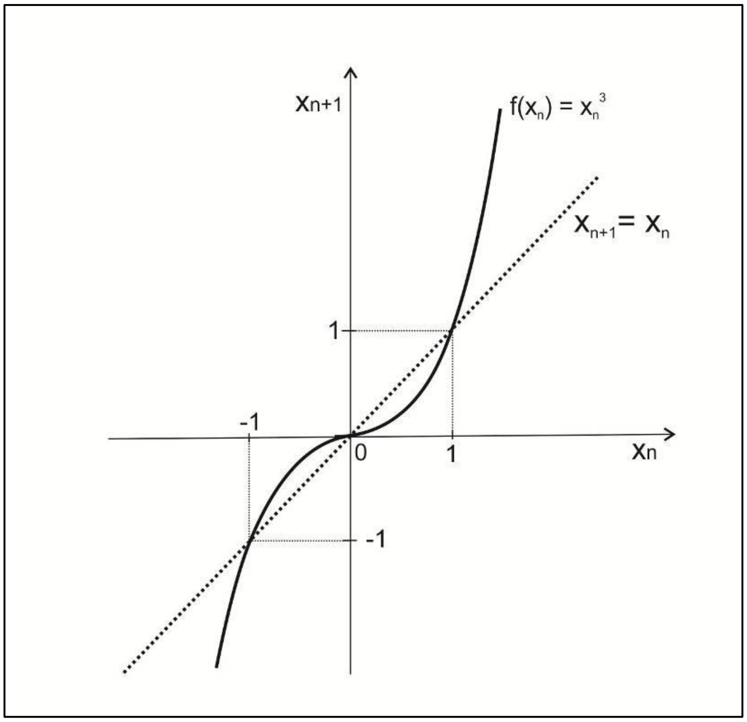


Figura 1.6: Pontos de equilíbrio da recorrência $x_{n+1} = x_n^3$.

Faremos agora, um estudo da estabilidade de cada um dos pontos fixos da recorrência $x_{n+1} = x_n^3$.

i) Analise da estabilidade do ponto fixo $x^*= 1$.

Encontrando o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de *f* no ponto $x^*= 1$, então temos:

$$\lambda = [df(x)/dx] = 3x^2 = 3(1)^2 = 3$$

Observamos que $|\lambda| > 1$. Pelo critério de estabilidade, temos que o ponto de equilíbrio $x^* = 1$ é instável, sendo a divergência monótona.

Vamos agora verificar a divergência em relação ao ponto fixo $x^* = 1$, atribuindo um valor para a condição inicial à direita de $x^* = 1$.

Considerando $x_0 = 1,2$. Se iterarmos a recorrência 2 vezes, obteremos a sequência $x_0 = 1,2$; $x_1 = 1,728$; $x_2 = 5,16$

Construindo o gráfico de Lamerey, temos:

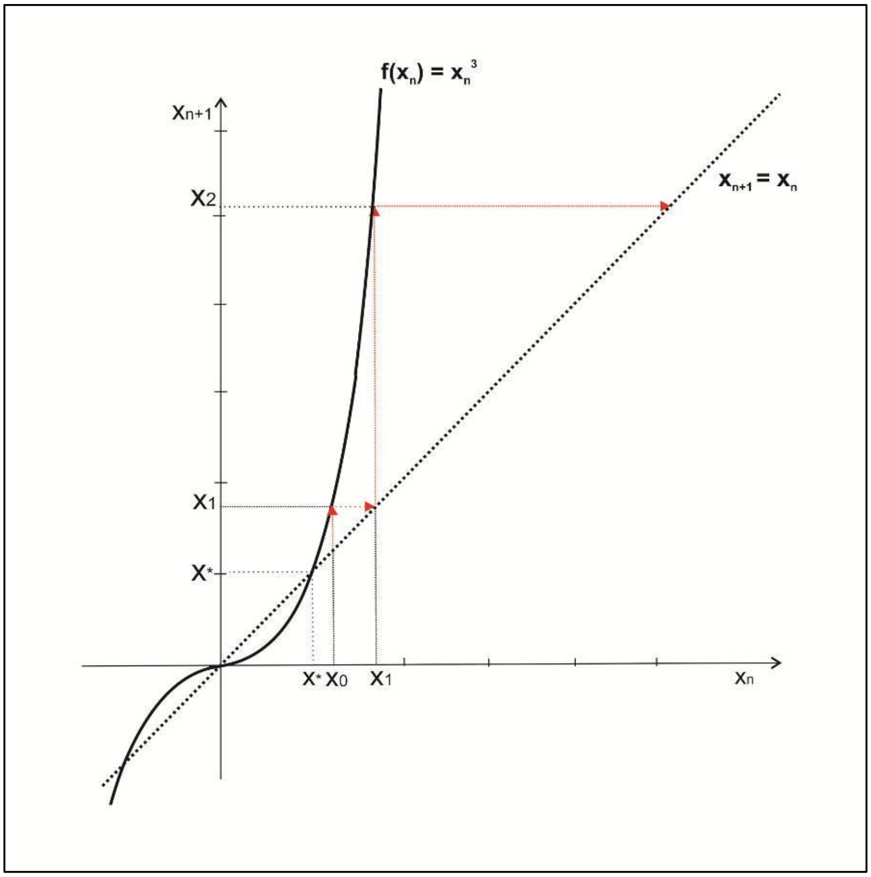


Figura 1.7: Gráfico de Lamerey para $x_{n+1} = x_n^3$, com x_0 = 1,2.

Observe que quando *n* cresce, a sequência diverge de forma monótona do ponto fixo x* = 1. Quanto ao comportamento da sequência, quando x_0 esta localizado imediatamente a esquerda de x* = 1, veremos no estudo do próximo ponto fixo.

ii) Análise da estabilidade do ponto fixo x*= 0.

Encontrando o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de *f* no ponto x*= 0, temos:

$$\lambda = [df(x_n)/dx_n] = 3x^2 = 3(0)^2 = 0$$

Observamos que |λ| = 0. Pelo critério de estabilidade temos que o ponto de equilíbrio x* = 0 é superestável, logo independente do valor atribuído a x_0, nas proximidades de x*= 0, a sequência das *n* iterações da recorrência convergirá de forma monótona para o ponto fixo x* = 0.

Vamos verificar a convergência atribuindo um valor para a condição inicial suficientemente à direita de $x^* = 0$, consideremos $x_0 = 0{,}9$. Se iterarmos a recorrência 3 vezes, teremos a seguinte sequência:

$x_0 = 0{,}9$; $x_1 = 0{,}729$; $x_2 = 0{,}3874$; $x_3 = 0{,}058$

Construindo o gráfico de Lamerey, temos:

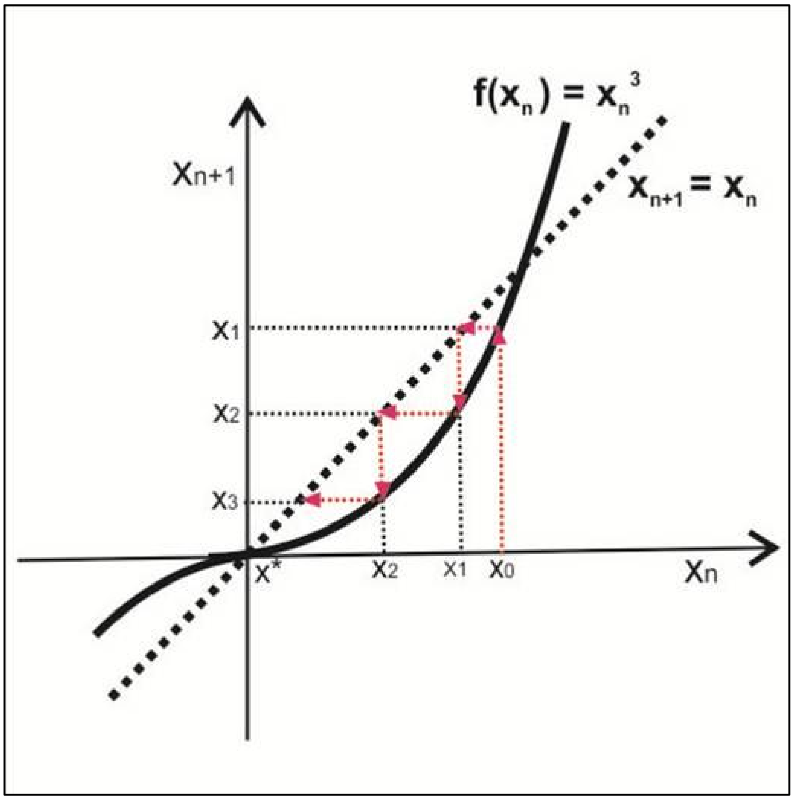


Figura 1.8: Gráfico de Lamerey para $x_{n+1} = x_n^3$, com $x_0 = 0{,}9$.

Observe que quando *n* cresce, a sequência converge de forma monótona para o ponto fixo $x^* = 0$.

Agora, vamos verificar a convergência atribuindo um valor para a condição inicial suficientemente à esquerda de $x^* = 0$, consideremos $x_0 = -0{,}8$. Se iterarmos a recorrência 3 vezes, teremos a seguinte sequência:

$x_0 = -0{,}8$; $x_1 = -0{,}512$; $x_2 = -0{,}1342$; , $x_3 = -0{,}0024$

Construindo o gráfico de Lamerey, temos:

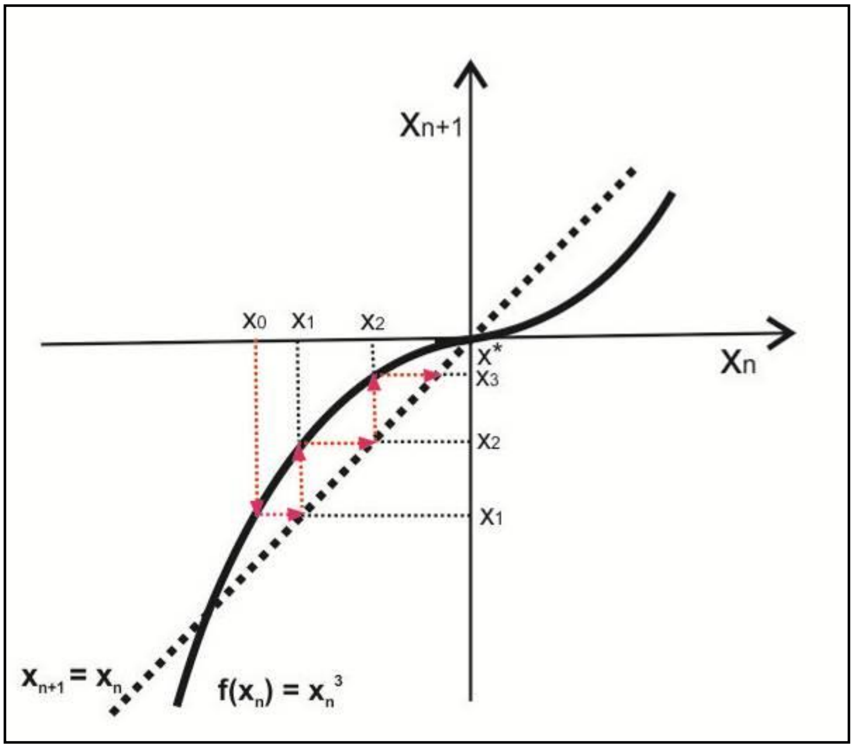


Figura 1.9: Gráfico de Lamerey para $x_{n+1} = x_n^3$, com x_0 = - 0,8.

Observe que quando *n* cresce, a sequência converge de forma monótona para o ponto fixo x*= 0.

iii) Análise da estabilidade do ponto fixo x*= - 1

Representando a recorrência por *f* e obtendo o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de *f* no ponto x*= -1, então temos:

$$\lambda = [df(x_n)/dx_n] = 3x^2 = 3(-1)^2 = 3$$

Observamos que $|\lambda| > 1$. Pelo critério de estabilidade, temos que o ponto de equilíbrio x* = -1 é instável, sendo que a divergência é monótona.

Vamos verificar a divergência em relação ao ponto fixo x* = -1. Atribuiremos um valor para a condição inicial localizada à esquerda de x*= - 1. Quando estudamos a estabilidade de x* = 0, vimos que as sequências que possuem condição inicial imediatamente à direita de x* = -1 divergem deste último, tendendo a x* = 0.

Considerando x_0 = -1,2, se iterarmos a recorrência 2 vezes, obteremos a sequência x_0 = - 1,2; x_1 = - 1,728; x_2 = - 5,16

Construindo o gráfico de Lamerey, temos:

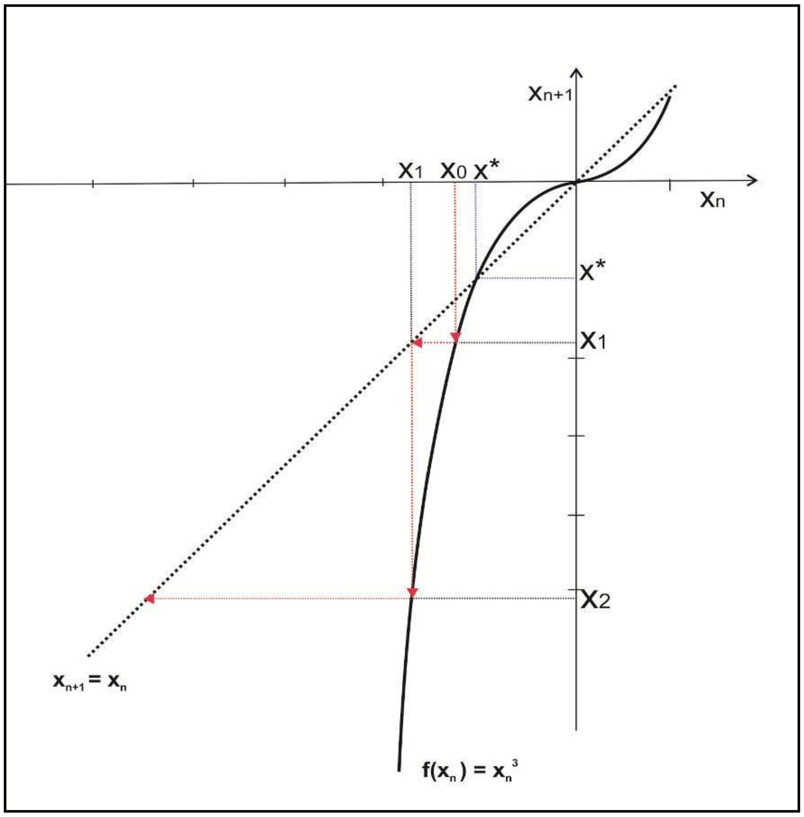


Figura 1.10: Gráfico de Lamerey para $x_{n+1} = x_n^3$, com $x_0 = -1{,}2$.

Observe que quando *n* cresce, a sequência diverge de forma monótona em relação ao ponto fixo x*= -1.

Exemplo 1.32: Considere a recorrência a $x_{n+1} = e^{-x_n}$. Vamos analisar a estabilidade do ponto fixo de tal recorrência. Fazendo $x_n = e^{-x_n}$, então temos:
$e^{-x_n} - x_n = 0$. A raiz aproximada da equação é 0,567. Mais à frente veremos como obtê-la através do Método de Newton. Vamos considerar que o valor aproximado para a raiz corresponda ao ponto fixo $x^* = 0{,}567$ da recorrência e estudar a sua estabilidade.

Calculando o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de *f* no ponto x* = 0,567, temos:

$$\lambda = [df(x_n)/dx_n] = e^{-x_n}(-1) = -e^{-x_n} = e^{-0,567} = -0{,}567.$$

Observamos que $-1 < \lambda < 0$. Pelo critério de estabilidade temos que o ponto de equilíbrio x*= 0,567 é estável, sendo que a convergência é oscilatória.

Vamos verificar a convergência atribuindo um valor para a condição inicial x_0 suficientemente próximo de x*. Considerando $x_0 = 1$, se iterarmos a recorrência 4 vezes, obteremos a sequência $x_0 = 1$; $x_1 = 0{,}367$; $x_2 = 0{,}692$; $x_3 = 0{,}5$; $x_4 = 0{,}605$.

Construindo o gráfico de Lamerey, então temos:

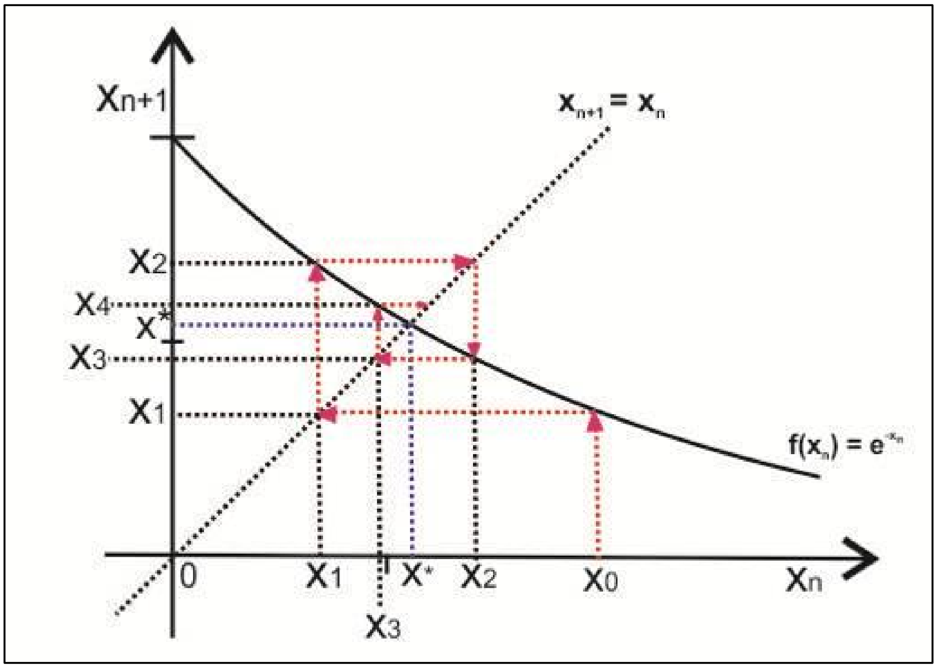


Figura 1.11: Gráfico de Lamerey para $x_{n+1} = e^{-x_n}$, com $x_0 = 1$.

Observe que a sequência converge para o ponto fixo de forma oscilatória, ou seja, a sequência alterna entre valores maiores e menores que o ponto fixo, mas convergindo para este.

Exemplo 1.33: Considere a recorrência a $x_{n+1} = (x_n^2)/4 + 1$. Vamos analisar a estabilidade do ponto fixo de tal recorrência. Fazendo $x_n = (x_n^2)/4 + 1$, temos

$-x_n^2 + 4x_n - 4 = 0$, cuja raiz única é igual a 2. Logo temos $x^* = 2$.

Vamos agora, estudar a estabilidade do ponto fixo da recorrência. Representando a recorrência por f e calculando o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de f no ponto $x^* = 2$, então temos:

$\lambda = [df(x_n)/dx_n] = (2x_n)/4 = (2^2)/4 = 1$

De acordo com os critérios de estabilidade, se $\lambda = 1$, dizemos que critério de linearização falha, e o ponto de equilíbrio não é estável e nem instável.

Vamos atribuir à relação uma condição inicial próxima do ponto fixo $x^*= 2$. No intuito de verificarmos o comportamento da sequência nas proximidades deste.

Primeiro vamos tomar um valor à direita do ponto fixo. Considerando $x_0 = 3$, se iterardo essa função mais 4 vezes, obteremos a seguinte sequência:

$x_0 = 3$; $x_1 = 3{,}25$; $x_2 = 3{,}64$; $x_3 = 4{,}31$; $x_4 = 5{,}65$.

Construindo o gráfico de Lamerey, então temos:

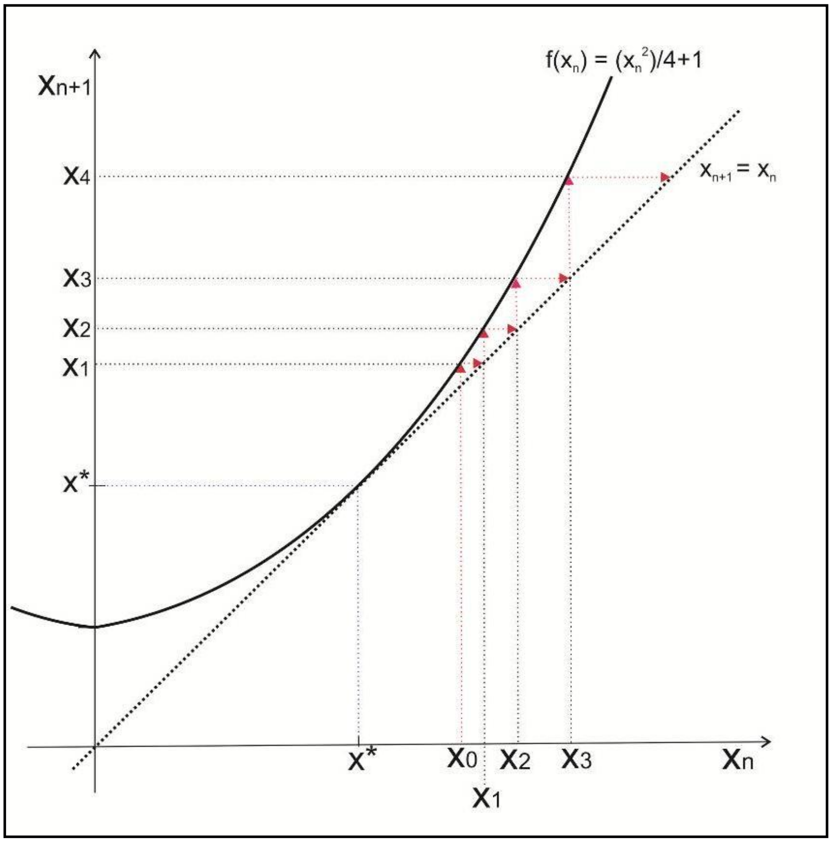


Figura 1.12: Gráfico de Lamerey para $x_{n+1} = (x_n^2)/4 + 1$, com $x_0 = 3$.

Observe que a sequência diverge do ponto fixo de forma monótona.

Atribuiremos agora, um valor a x_0 localizado logo à esquerda do ponto fixo. Considerando $x_0 = 1$. Se iterarmos essa função mais 3 vezes, obteremos a sequência $x_0 = 1$; $x_1 = 1{,}25$; $x_2 = 1{,}39$; $x_3 = 1{,}48$.

Construindo o gráfico de Lamerey, temos**:**

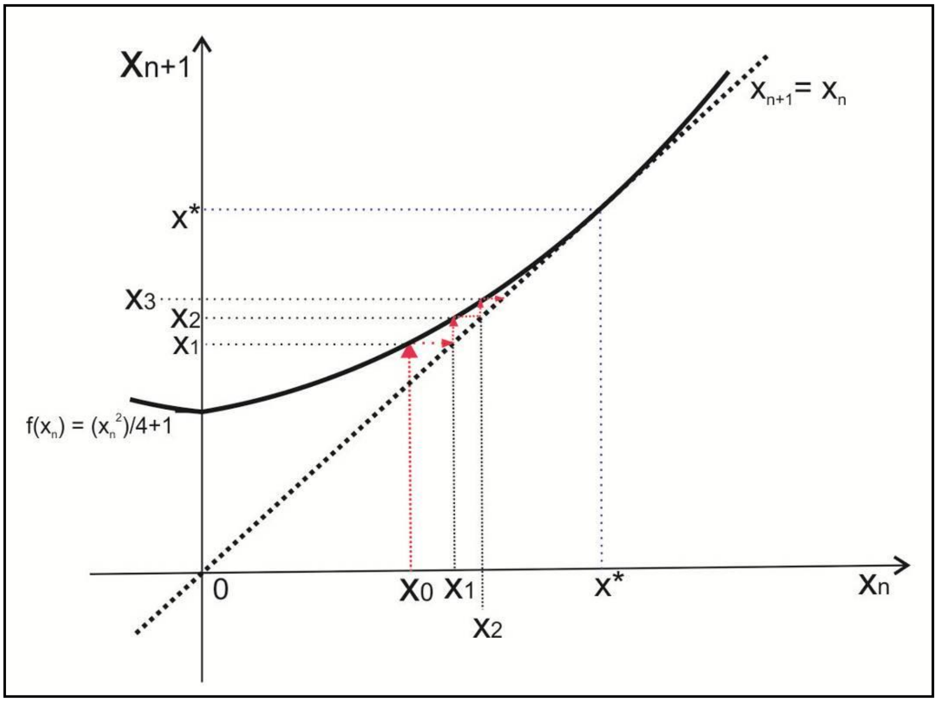


Figura 1.13: Gráfico de Lamerey para $x_{n+1} = (x_n^2)/4 + 1$, com $x_0 = 1$.

Ao contrário da divergência monótona observada quando atribuímos à x_0 um valor à direita de x*, no gráfico acima a solução convergiu para o ponto de forma monótona. Portanto, o ponto fixo x* = 2 não pode ser classificado nem como um atrator, nem como um repulsor.

Exemplo 1.34: Considere a recorrência a $x_{n+1} = \sqrt{-x_n^2 + 1}$, onde $0 < x_n < 1$. Vamos analisar a estabilidade do ponto fixo de tal recorrência. Fazendo $x_n = \sqrt{-x_n^2 + 1}$ e elevando os dois termos ao quadrado, temos:

$$x_n^2 = -x_n^2 + 1 \qquad\qquad 2x_n^2 = 1$$

$$x_n^2 + x_n^2 = 1 \qquad\qquad x_n = \pm\frac{\sqrt{2}}{2},$$

Mas como $0 < x_n < 1$, logo $x_n = \frac{\sqrt{2}}{2}$ é o único ponto fixo da recorrência.

Vamos agora estudar a estabilidade do ponto fixo da recorrência. Obtendo o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de *f* em $x^* = \frac{\sqrt{2}}{2}$, temos:

$$\lambda = [df(x_n)/dx_n] = -\frac{1}{2x^2+2} = -\frac{1}{2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+2} = -1$$

Pelos critérios de estabilidade, vimos que se *λ = -1*, o ponto de equilíbrio é neutramente estável, ou simplesmente estável. Neste caso, a sequência x_n, a partir de algum *n*, oscila em torno do ponto x* que é denominado *centro de um ciclo limite*.

Atribuindo um valor para a condição inicial $x_0 = 0{,}65$, vamos verificar a ocorrência do ciclo limite. Se iterarmos essa função 4 vezes, obteremos a sequência $x_0 = 0{,}65$; $x_1 = 0{,}76$; $x_2 = 0{,}65$; $x_3 = 0{,}76$; $x_4 = 0{,}65$.

Construindo o gráfico de Lamerey, então temos**:**

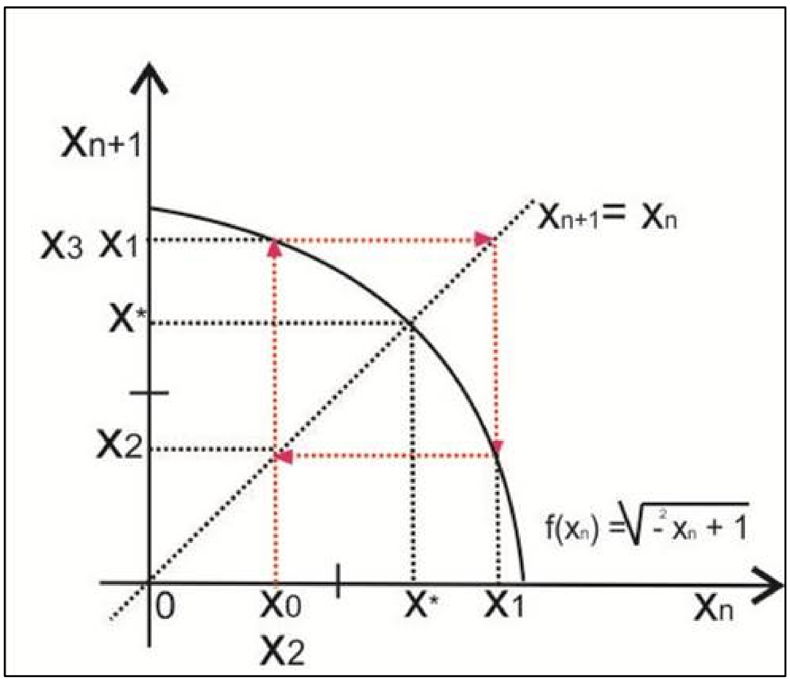


Figura 1.14: Ciclo limite, λ = -1.

Exemplo 1.35: Considere a recorrência Seja $x_{n+1} = x_n^2 + 0{,}5$. Vamos analisar a estabilidade do ponto fixo de tal recorrência. Fazendo $x_n = x_n^2 + 0{,}5$, então temos: $x_n - x_n^2 - 0{,}5 = 0$, cujas raízes são complexas. Portanto a recorrência não possui ponto fixo. Vamos verificar o comportamento da sequência diante desta situação.

Tomando $x_0 = 0{,}1$ e obtendo os próximos 4 termos da sequência, temos: $x_0 = 0{,}1$; $x_1 = 0{,}51$; $x_2 = 0{,}7601$; $x_3 = 1{,}0777$; $x_4 = 1{,}66$.

Tal sequência caracteriza-se pela sua divergência, independente do valor atribuído à condição inicial x_0.

Construindo o gráfico de Lamerey, então temos**:**

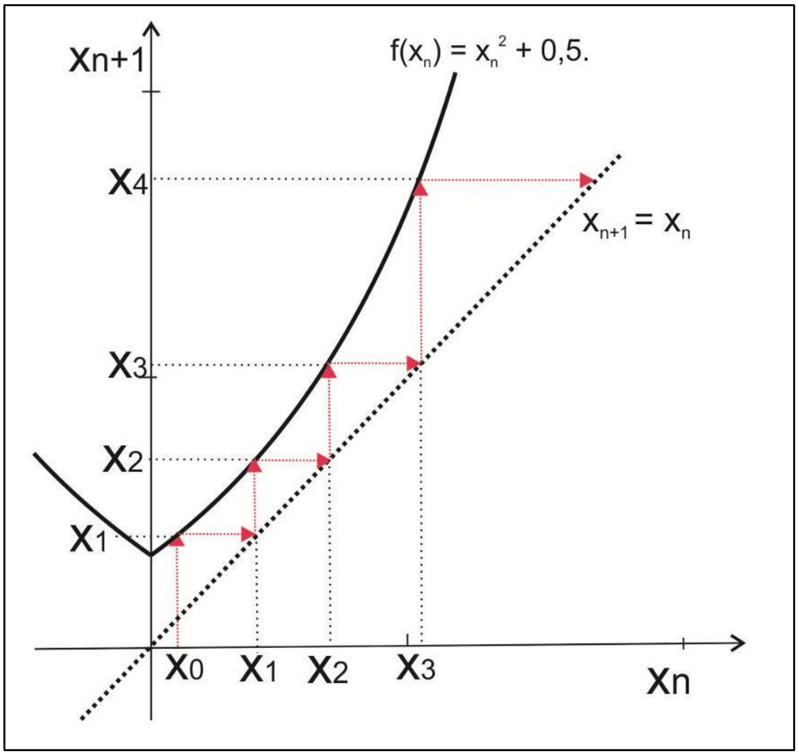


Figura 1.15: Gráfico de Lamerey para $x_{n+1} = x_n^2 + 0,5$, com $x_0 = 0,1$.

Na próxima seção, iremos estudar um caso particular de equação de recorrência não linear de primeira ordem que possui inúmeras aplicações na modelagem de problemas envolvendo a dinâmica de populações.

1.5 A EQUAÇÃO LOGÍSTICA DISCRETA

Embora um modelo contínuo que leva a uma equação diferencial seja razoável e atraente em muitos problemas, há casos em que um modelo discreto pode ser mais natural. Em algumas circunstâncias, o crescimento de algumas populações pode ser descrito com maior exatidão por um modelo discreto e não por um modelo contínuo. É o que ocorre, por exemplo, com as espécies cujas gerações sucessivas não se superpõem e que se propagam em intervalos regulares, e em função da população x_n do ano anterior, isto é, $x_{n+1} = f(n,x_n)$, n = 0,1,2,...

Nessa seção, realizaremos um breve estudo sobre pontos periódicos que surgem em sequências definidas por uma equação recorrente do tipo $x_{n+1} = px_n(1 - x_n)$, onde *p* é um número real positivo. À família de equações desse tipo daremos o nome de *família quadrática* ou *equação logística*.

De acordo com Bassanezi (2011, p.122) "O modelo logístico discreto é um dos mais simples exemplos de equações de diferenças não lineares, e podemos notar a complexidade de seu desenvolvimento quando variamos o parâmetro p".

As equações logísticas foram introduzidas por R. M.*May*, e são utilizadas na modelagem matemática de populações.

Neste estudo elementar, nosso objetivo será verificar que o comportamento de uma sequência gerada por composições sucessivas de uma *equação logística* varia entre *convergência, caos e divergência* quando varia o parâmetro *p*. Portanto, podem surgir comportamentos muito mais variados que os observados nas equações de recorrências até aqui apresentadas.

Para realizar este estudo, primeiramente vamos encontrar os pontos fixos de $x_{n+1} = px_n(1 - x_n)$, *onde* $p > 0$.

Representando a recorrência pela função $f(x) = px(1 - x)$, e fazendo $f(x) = x$, então temos:

$px(1 - x) = x \qquad px - px^2 - x = 0 \qquad x(p - px - 1) = 0$

As raízes da equação são $x' = 0$ e $x'' = \frac{p-1}{p}$.

Obviamente tais raízes correspondem aos pontos fixos da recorrência $x_{n+1} = px_n(1 - x_n)$, *onde* $p > 0$.

Para encontrarmos os *parâmetros* λ dos pontos de equilíbrio da recorrência, devemos obter a derivada de *f*.

$$f(x) = px(1 - x) \rightarrow f(x) = px - px^2 \rightarrow f'(x) = p - 2px$$

Calculando λ para os dois pontos fixos x' e x", temos:

$f'(x') = p - 2px \qquad f'(x'') = p - 2px$

$f'(0) = p - 2p(0) = p \qquad f'\left(\frac{p-1}{p}\right) = p - 2p\left(\frac{p-1}{p}\right) = p - 2p + 2 = 2 - p$

$f'(0) = p \qquad \lambda_2 = 2 - p$

$\lambda_1 = p$

Aplicando os critérios de estabilidade nos dois pontos fixos, temos:

• 0 < $|p|$ < 1 → 0 < p < 1 → 0 < λ_1 < 1 , portanto, a sequência converge para o ponto fixo x' = 0, quanto atribuímos um valor para x_0 suficientemente próximo daquele.

• 0 < $|2-p|$ < 1 → 1 < p < 3 → -1 < λ_2 < 1, logo, a sequência converge para o ponto fixo x" = $\frac{p-1}{p}$ quanto atribuímos um valor para x_0 suficientemente próximo daquele.

• Para p > 3, a convergência e impossível, pois λ_1 > 3 e λ_2 < -1. No entanto, a sequência pode convergir para ciclos.

Exemplo 1.36: Vamos estudar o comportamento da equação logística $x_{n+1} = 0{,}8x_n(1 - x_n)$ onde $0 < x_n < 1$, onde a condição inicial é $x_0 = 0{,}3$.

Obtendo os pontos fixos temos x' = 0 e x" = $\frac{p-1}{p} = \frac{0{,}8-1}{0{,}8} = -0{,}25$

Como $0 < x_n < 1$, concluímos que x' = 0 é o único ponto fixo da função. Obtendo o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de f no ponto x* = 0, temos λ_1 = f'(0) = p = 0,8.

Logo temos 0 < λ_1 < 1. Portanto a sequência convergirá de forma monótona para o ponto fixo x* = 0. Tomando a condição inicial x_0 = 0,3 e iterando a recorrência três vezes, temos x_0 = 0,5; x_1 = 0,2; x_2 = 0,128; x_3 = 0,089.

Vejamos a seguir o gráfico de Lamerey

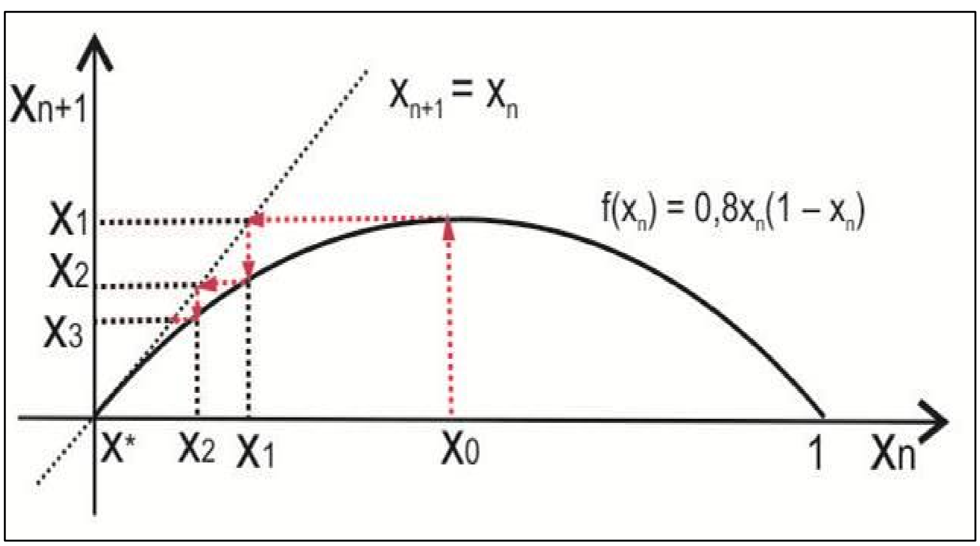


Figura 1.16: Equação logística $x_{n+1} = px_n(1 - x_n)$, com p = 0,8 e x_0 = 0,3.

Exemplo 1.37: Estudemos o comportamento da aquação $x_{n+1} = 1,5x_n(1 - x_n)$, onde $0 < x_n < 1$ e a condição inicial é $x_0 = 0,8$.

Obtendo os pontos fixos x_1 e x_2, então temos $x_1 = 0$ e $x_2 = 1/3$

Como $0 < x_n < 1$, concluímos que a função tem dois pontos fixos. Obtendo o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de *f* nos dois pontos fixos, temos:

$\lambda_1 = f'(0) = p = 1,5$. Logo temos $\lambda_1 > 1$ Portanto a sequência divergirá de forma monótona em relação ao ponto fixo $x^* = 0$

$\lambda_2 = f'\left(\frac{1}{3}\right) = 2 - p = 2 - 1,5 = 0,5$. Logo temos $0 < \lambda_2 < 1$. Portanto a sequência convergirá de forma monótona em relação ao ponto fixo $x^* = 0,33...$ Tomando a condição inicial $x_0 = 0,8$ e iterando a recorrência três vezes, então temos $x_0 = 0,8$; $x_1 = 0,24$; $x_2 = 0,2736$; $x_3 = 0,2981$.

Vejamos a seguir o gráfico de Lamerey

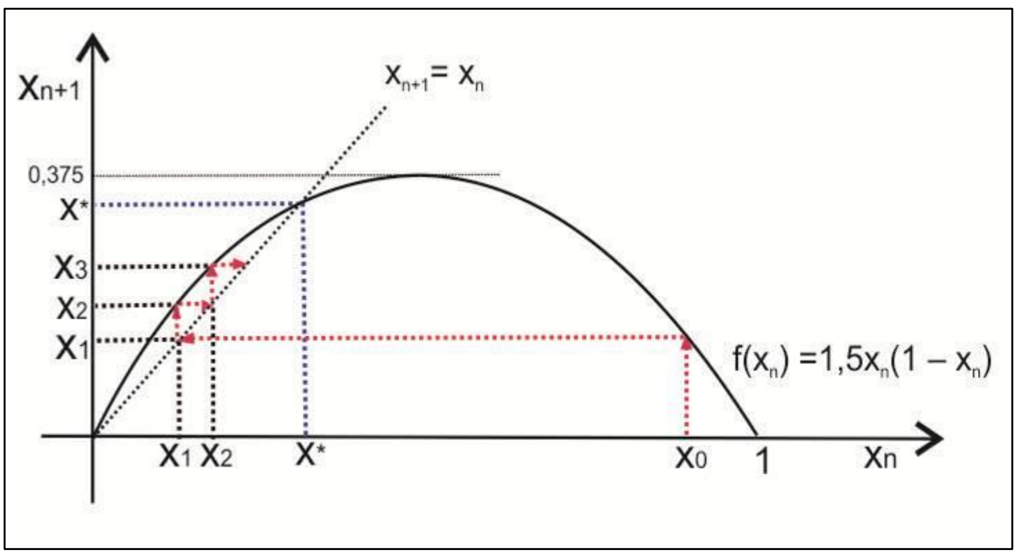


Figura 1.17: Equação logística $x_{n+1} = px_n(1 - x_n)$, com $p = 1,5$ e $x_0 = 0,8$.

Exemplo 1.38: Estude o comportamento da equação logística $x_{n+1} = 3x_n(1 - x_n)$ onde $0 < x_n < 1$ e a condição inicial é $x_0 = 0,7$. Obtendo os pontos fixos, temos:

$x' = 0$ e $x'' = \frac{p-1}{p} = \frac{3-1}{3} = 0,6666...$

Como $0 < x_n < 1$, concluímos que a função tem dois pontos fixos. Obtendo o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de *f* nos dois pontos fixos, temos:

$\lambda_1 = f'(0) = p = 3$. Logo temos $\lambda_1 > 1$. Portanto a sequência divergirá de forma monótona em relação ao ponto fixo x' = 0

$\lambda_2 = f'\left(\frac{p-1}{p}\right) = 2 - p \quad \rightarrow \quad f'(0{,}66...) = 2 - 3 = -1$. Logo temos $\lambda_2 = -1$. Neste caso, a sequência x_n, a partir de algum n, oscila em torno do ponto $x^* = 0{,}66...$ que é denominado *centro de um ciclo limite*.

Tomando a condição inicial $x_0 = 0{,}7$ e iterando a recorrência três vezes temos. $x_0 = 0{,}7$; $x_1 = 0{,}63$; $x_2 = 0{,}699$; $x_3 = 0{,}6308$; $x_4 = 0{,}6986$.

Se continuarmos iterando a equação, a sequência tenderá a um ciclo em torno de dois valores. Vejamos a seguir o gráfico de Lamerey

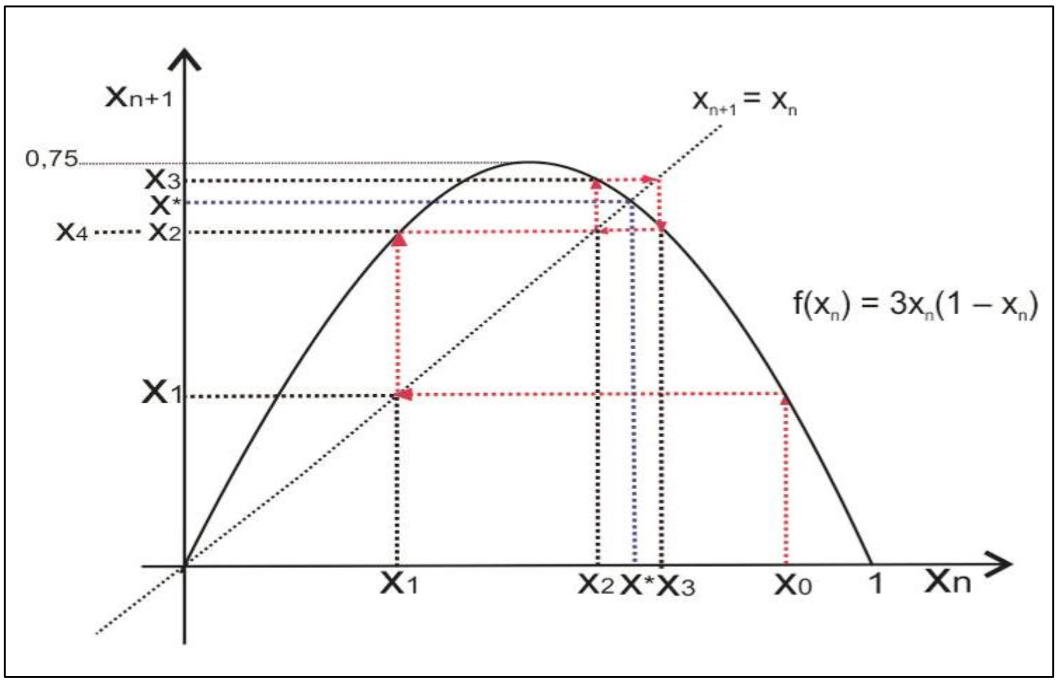


Figura 1.18: equação logística $x_{n+1} = px_n(1 - x_n)$, com p = 3 e x_0 = 0,8.

Exemplo 1.39: Tomando a equação logística *f(x) = px(1 - x)* e utilizando uma planilha eletrônica, construímos uma tabela que relaciona os ciclos para os quais a sequência converge, quando alteramos o valor de *p*. Para que tivéssemos uma boa margem de convergência em cada caso, obtemos os cem primeiros termos de cada sequência. Para realçar os períodos de convergência, colorimos as últimas células de cada coluna. Ao expor os resultados no texto, suprimimos as iterações de nove a setenta.

Equação logística $x_{n+1} = px_n(1 - x_n)$				
	valores do parâmetro p			
	3,4	3,5	3,55	3,57
termos				
x_0	0,5	0,7	0,2	0,8
x_1	0,85	0,7434	0,568	0,5712
x_2	0,4335	0,675278	0,8710848	0,874402
x_3	0,834964	0,776243	0,39865105	0,392068
x_4	0,468516	0,614862	0,85103579	0,850912
x_5	0,84663	0,838296	0,45004726	0,452892
x_6	0,441482	0,479868	0,87864177	0,884578
x_7	0,838357	0,883565	0,37853796	0,364497
x_8	0,460749	0,364187	0,83512675	0,826951

x_{71}	0,842154	0,883376	0,37031629	0,368052
x_{72}	0,451965	0,364702	0,82779658	0,830346
x_{73}	0,842155	0,820198	0,50605037	0,502912
x_{74}	0,451962	0,522055	0,88737005	0,89247
x_{75}	0,842154	0,883278	0,35480279	0,342604
x_{76}	0,451964	0,364967	0,81265808	0,804059
x_{77}	0,842155	0,820452	0,54046947	0,562448
x_{78}	0,451963	0,52148	0,88168589	0,878578
x_{79}	0,842154	0,883367	0,37032139	0,380843
x_{80}	0,451964	0,364726	0,82780127	0,841812
x_{81}	0,842155	0,820221	0,50603946	0,475399
x_{82}	0,451963	0,522002	0,88737051	0,890339
x_{83}	0,842154	0,883286	0,3548015	0,348558
x_{84}	0,451963	0,364944	0,81265676	0,810623
x_{85}	0,842154	0,82043	0,54047242	0,548043
x_{86}	0,451963	0,521529	0,88168504	0,88426
x_{87}	0,842154	0,883359	0,37032368	0,365369
x_{88}	0,451963	0,364746	0,82780339	0,827792
x_{89}	0,842154	0,820241	0,50603454	0,508912
x_{90}	0,451963	0,521958	0,88737072	0,892216
x_{91}	0,842154	0,883293	0,35480092	0,343314
x_{92}	0,451963	0,364926	0,81265616	0,804854
x_{93}	0,842154	0,820413	0,54047375	0,560718
x_{94}	0,451963	0,521569	0,88168466	0,879338
x_{95}	0,842154	0,883353	0,37032472	0,378785
x_{96}	0,451963	0,364763	0,82780434	0,840046
x_{97}	0,842154	0,820257	0,50603232	0,479696
x_{98}	0,451963	0,521922	0,88737082	0,891028
x_{99}	0,842154	0,883299	0,35480066	0,346636
x_{100}	0,451963	0,364911	0,81265589	0,808532

A tabela evidencia, que conforme o parâmetro p cresce em direção a 4, convergências para pontos periódicos de ordem 2, 2^2, 2^3, 2^4 etc, vão surgindo. Percebemos que o surgimento de novos períodos é instável; a mínima variação em p pode determinar o surgimento de períodos de ordem 2, 4 ou 8. Percebemos que, quando p = 3,57 já fica impossível obter pontos de período 16 ou menor. A afirmação de que estamos contemplando um período de ordem 32 ou maior não pode ser feita apenas via esse método. E, conforme o parâmetro p cresce, especificamente para valores de p maiores que 3,83, ciclos de períodos de ordens diferentes de potências de 2 surgem até que, finalmente, temos uma situação de caos, onde qualquer sequência gerada a partir de iterações não obedece nenhum padrão de convergência, convergência para ciclos ou divergência.(Domingues, p.99**).**

O resultado final de todas as considerações feitas até agora será obtido da seguinte maneira: em um gráfico onde o eixo das abcissas corresponde aos valores de p**,** onde $3 < p < 4$; e o eixo das ordenadas, aos valores para os quais a sequência dos x_n converge**.** Obteríamos, assim, uma figura denominada Diagrama de Bifurcação.

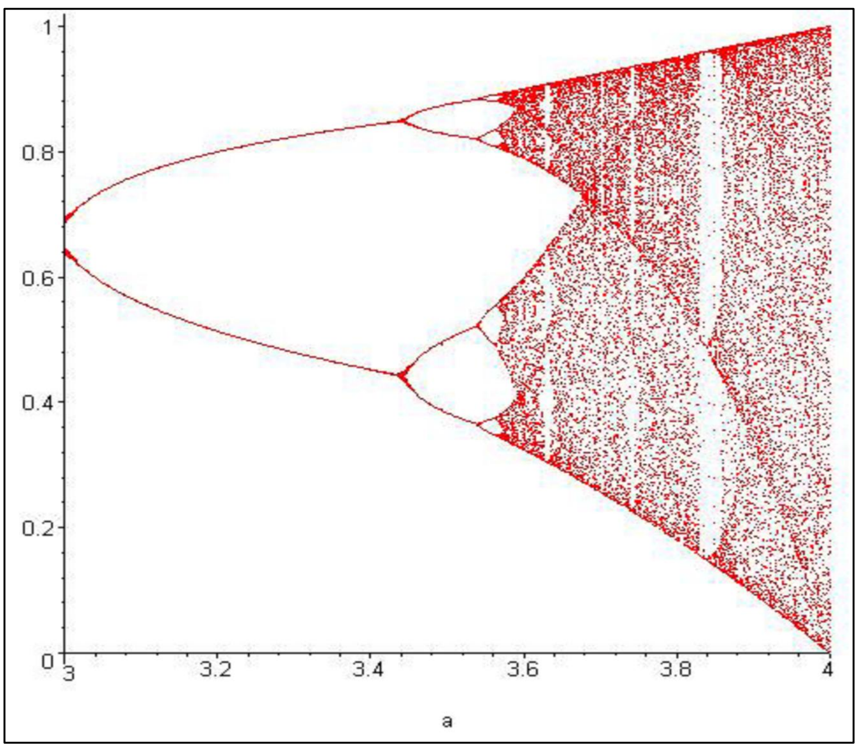


Figura 1.19: Diagrama de bifurcação. (Domingues, p.100).

1.6 SISTEMAS DE EQUAÇÕES DE RECORRÊNCIAS LINEARES

Faremos uma breve introdução sobre o assunto, apresentando apenas o sistema de ordem dois, ou seja, um sistema formado por duas equações de primeira ordem da forma:

$$\begin{cases} x_{n+1} = a_{11}x_n + a_{12}y_n \\ y_{n+1} = a_{21}x_n + a_{22}y_n, \text{ onde } a_{ij} \text{ são constantes reais.} \end{cases}$$

Um sistema linear de ordem dois pode ser convertido em uma equação de recorrência linear de segunda ordem da forma

$$y_{n+2} - (a_{11} + a_{22})y_{n+1} + (a_{22}a_{11} - a_{12}a_{21})y_n = 0.$$

Para entender tais transformações concentremos nossa atenção para o sistema:

$$\begin{cases} x_{n+1} = a_{11}x_n + a_{12}y_n \\ y_{n+1} = a_{21}x_n + a_{22}y_n, \text{ onde } a_{ij} \text{ são constantes reais.} \end{cases}$$

Observemos que o sistema de equações de diferença pode ser escrito na seguinte forma matricial:

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$$

Obtendo o termo seguinte da primeira equação de recorrência do sistema, então temos :

$x_{n+2} = a_{11}x_{n+1} + a_{12}y_{n+1}$

Fazendo Substituindo $y_{n+1} = a_{21}x_n + a_{12}a_{22}y_n$, então temos:

$x_{n+2} = a_{11}x_{n+1} + a_{12}\mathbf{y_{n+1}}$

$x_{n+2} = a_{11}x_{n+1} + a_{12}\ \mathbf{a_{21}x_n + a_{12}a_{22}y_n}$

$x_{n+2} = a_{11}x_{n+1} + a_{12}a_{21}x_n + a_{22}\mathbf{a_{12}y_n}$, fazendo $a_{12}y_n = x_{n+1} - a_{11}x_n$, (primeira equação do sistema), então temos:

$x_{n+2} = a_{11}x_{n+1} + a_{12}a_{21}x_n + a_{22}(\mathbf{x_{n+1} - a_{11}x_n})$

$x_{n+2} = a_{11}x_{n+1} + a_{12}a_{21}x_n + a_{22}x_{n+1} - a_{22}a_{11}x_n$, colocando x_n e x_{n+1} em evidência, temos:

$x_{n+2} = (a_{11} + a_{22})x_{n+1} + (a_{12}a_{21} - a_{22}a_{11})x_n$

$x_{n+2} - (a_{11} + a_{22})x_{n+1} - (a_{12}a_{21} - a_{22}a_{11})x_n = 0$

$x_{n+2} - (a_{11} + a_{22})x_{n+1} + (a_{22}a_{11} - a_{12}a_{21})x_n = 0$

O sistema foi convertido em uma equação de recorrência homogênea de segunda ordem. Para resolvê-la, basta recorrer às técnicas definidas quando apresentamos este modelo de recorrência.

Outra forma de resolver o sistema é através do seguinte teorema:

Teorema 1.13: Se λ for um autovalor de M associado ao autovetor *v* = $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ então

$x_t = v\,\lambda^t = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \lambda_1^{\,t}$ e $y_t = u\,\lambda^t = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \lambda_2^{\,t}$ são soluções do sistema

$\begin{cases} x_{n+1} = a_{11}x_n + a_{12}y_n \\ y_{n+1} = a_{21}x_n + a_{22}y_n, \text{ onde } a_{i\,j} \text{ são constantes reais.} \end{cases}$

Prova: Seja λ um autovalor de M e v = $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ o autovetor associado a λ. Pela definição de autovalor e autovetor, sabemos que se λ é um autovalor da matriz *M* se existir um vetor v não nulo, denominado autovetor de *M* relativo ao autovalor λ, então $Mv = \lambda\, v$.

Considerando *M* uma matriz de ordem 2, então temos:

$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$, multiplicando as matrizes, temos:

$$\begin{cases} a_{11}v_1 + a_{12}v_2 = \lambda\, v_1 \\ a_{21}v_1 + a_{22}v_2 = \lambda\, v_2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a_{11}v_1 - \lambda\, v_1 + a_{12}v_2 = 0 \\ a_{21}v_1 - \lambda\, v_2 + a_{22}v_2 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} (a_{11} - \lambda)v_1 + a_{12}v_2 = 0 \\ a_{21}v_1 + (a_{22} - \lambda)v_2 = 0 \end{cases}$$

O polinômio característico da matriz formada pelos coeficientes do último sistema acima é $p(\lambda) = \det\begin{bmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{bmatrix} = (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) - a_{21}a_{12}$, logo:

$p(\lambda) = \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})$.

Se λ é um autovalor de M, então λ é raiz de $p(\lambda)$. Considerando λ um autovalor de M, então temos que $p(\lambda) = 0$, logo $\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = 0$.

Se compararmos a recorrência $x_{n+2} - (a_{11} + a_{22})x_{n+1} + (a_{22}a_{11} - a_{12}a_{21})x_n = 0$, relativa a um sistema de ordem dois, com a igualdade

$\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + (a_{22}a_{11} - a_{12}a_{21}) = 0$, temos que $x_{n+2} = \lambda$ é uma solução do sistema abaixo:

$$\begin{cases} x_{n+1} = a_{11}x_n + a_{12}y_n \\ y_{n+1} = a_{21}x_n + a_{22}y_n, \text{ onde } a_{i\,j} \text{ são constantes} \end{cases}$$

Logo $x_n = v\,\lambda^n = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \lambda_1^{\,n}$ e $y_n = u\,\lambda^n = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \lambda_2^{\,n}$ também são soluções do sistema.

Assim, qualquer combinação linear de $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \lambda_1^{\,n}$ e $\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \lambda_2^{\,n}$ é uma solução do sistema. Portanto, a solução geral do sistema é:

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \lambda_1^{\,n} + C_2 \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \lambda_2^{\,n}$$

Exemplo 1.40: Vamos resolver o sistema abaixo ulizando o teorema visto no início da seção.

$$\begin{cases} x_{n+1} = -x_n + y_n \\ y_{n+1} = 4x_n + 2y_n \text{ onde } x_0 = 1 \text{ e } y_0 = 1 \end{cases}$$

Primeiramente, encontramos a matriz dos coeficientes do sistema.

$M = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$, cujo polinômio característico é dado pela fórmula:

$P(\lambda) = \det\begin{pmatrix} -1-\lambda & 1 \\ 4 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (-1 - \lambda)(2 - \lambda) - (4)(1)$, logo:

$P(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 6 = 0$, cujas raízes são $\lambda_1 = 3$ e $\lambda_2 = -2$

As raízes do polinômio correspondem aos *autovalores* da matriz *M*. Devemos encontrar os autovetores v e u de *M* relativos aos autovalores obtidos.

Para encontrarmos o vetor v devemos substituir $\lambda_1 = 3$ na igualdade abaixo:

$$\begin{pmatrix} -1-\lambda & 1 \\ 4 & 2-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

Multiplicando as matrizes do primeiro membro, chegamos ao sistema:

$$\begin{cases} -4v_1 + v_2 = 0 \\ 4v_1 - v_2 = 0 \quad \rightarrow \; 4v_1 = v_2 \text{, logo} \end{cases}$$

$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ 4v_1 \end{pmatrix} = v_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$, onde $v_1 \in R$. Portanto $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ é um possível valor para o vetor v.

Para encontrarmos o vetor u devemos substituir λ_2 = -2 na igualdade abaixo:

$\begin{pmatrix} -1-\lambda & 1 \\ 4 & 2-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, multiplicando as matrizes do primeiro membro, chegamos ao sistema:

$$\begin{cases} u_1 + u_2 = 0 \\ 4u_1 + 4u_2 = 0 \quad \rightarrow \quad u_1 = -u_2 \text{, logo} \end{cases}$$

$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -u_2 \\ u_2 \end{pmatrix} = u_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, com $u_2 \in R$ .Portanto $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ é um possível valor para o vetor u.

Substituindo v e u e os valores de λ na solução geral do sistema, obtemos:

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} 3^n + C_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} (-2)^n$$

Substituindo as condições iniciais $x_0 = 1$ e $y_0 = 1$ na solução geral, temos:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} 3^0 + C_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} (-2)^0$$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, logo, temos o sistema:

$$\begin{cases} 1 = C_1 - C_2 \\ 1 = 4C_1 + C_2 \text{, cuja solução é } C_1 = \frac{2}{5} \text{ e } C_2 = -\frac{3}{5}. \end{cases}$$

Portanto, a solução do sistema é:

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \lambda_1^{\,n} + C_2 \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \lambda_2^{\,n}$$

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \frac{2}{5}\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} 3^n - \frac{3}{5}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} (-2)^n = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} \\ \frac{8}{5} \end{pmatrix} 3^n + \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ -\frac{3}{5} \end{pmatrix} (-2)^n$$

Capítulo 2

APLICAÇÕES DAS RECORRÊNCIAS LINEARES DE PRIMEIRA E SEGUNDA ORDEM

Para processos discretos no tempo, ou seja, que ocorrem em intervalos regulares, tais como: uma vez ao dia, ou em ciclos mensais, em que o estágio seguinte depende do estágio anterior, naturalmente podem ser descritos matematicamente por *equações de recorrência*. (Diniz, 2011 p.14). Todavia, por conveniência, ou para facilitar o processo de ensino-aprendizagem, muitos processos dinâmicos contínuos, essencialmente modelados por *equações diferenciais* podem receber um tratamento elementar através das equações de recorrências. Dentre estes processos podemos citar o d*ecaimento radioativo, o resfriamento térmico, a evolução de um capital aplicado a juros capitalizados continuamente e alguns problemas de dinâmica de populacional.*

O tratamento elementar ao qual nos referimos decorre do fato de que muitos processos dinâmicos contínuos podem ser discretizados. Assim a *equações diferenciais* que modelam tais processos podem ser substituída por *equações de recorrência* de mesma ordem que as primeiras. Na prática o que ocorre é uma aproximação de uma *equação diferencia*l por meio de uma *equação de diferença*. A solução gerada pela equação de recorrência pode ficar o mais próximo possível da resposta “exata” modelada pela equação diferencial. Por exemplo, a equação diferencial que modela o valor atual *C(t)* de um valor inicial C_0 aplicado a uma taxa de juros *j,* computados continuamente, é $\frac{dC}{dt} = jC$, cuja solução é:

$$C(t) = C_0 \lim_{m\to\infty}\left[\left(1+\frac{j}{m}\right)^m\right]^t = C_0 e^{jt}$$

Considerando que os juros sejam computados uma quantidade finita *m* a cada período *t*, a situação acima passa a ser representada por um modelo discreto. Logo a equação que dá o montante no final de cada período *t* é a recorrência $C_t = C_{t-1}\left(1+\frac{j}{m}\right)^m$, cuja solução é :

$$C_t = C_0\left[\left(1+\frac{j}{m}\right)^m\right]^t$$

Observamos que quanto maior o valor de m, cada vez mais a sequência definida pela equação de recorrência se aproxima do modelo contínuo.

Segue abaixo agumas aplicações das equações de recorrência na modelagem de situações problemas envolvendo sistemas dinâmicos discretos ou discretizados.

2.1. APLICAÇÕES NA MATEMÁTICA FINANCEIRA

As Progressões Geométricas, um tipo especial de sequência obtida recursivamente, são amplamente aplicadas na matemática financeira, pois modelam as operações de empréstimos. A modalidade mais comum de empréstimo é caracterizada pelo regime de juros compostos. Neste sistema, os juros no final de cada período são calculados em função de uma taxa fixa e do valor do capital existente no início do período de capitalização. Por sua vez, o capital a ser utilizado do início de um período é igual ao capital do início do período anterior adicionado dos juros obtidos neste último período.

Suponha, por exemplo, que uma quantia em dinheiro C_o seja aplicada em um fundo de investimento que paga juros a uma taxa i capitalizada mensalmente. Além da taxa de juros, o montante M_n a ser resgatado depende do capital inicial C_o investido e da quantia de períodos n que o capital ficou aplicado. Considerando como exemplo o regime de capitalização mensal e calculando o montante no final de 3 meses, então temos:

$$M_0 = C_0 \qquad M_2 = M_1(1 + i)$$

$$M_1 = M_0(1 + i) \qquad M_3 = M_2(1 + i)$$

Observe que os montantes obtidos no final de cada período formam uma sequência que caracteriza uma recorrência linear homogênea de primeira ordem onde $x_{n+1} = x_n(1 + i)$ e $x_0 = C_0$. Note que tal sequência é uma progressão aritmética onde C_0 (capital inicial) é o primeiro termo da sequência e $(1 + i)$ é a razão. Logo, utilizando a fórmula do termo geral da PG ($a_n = a_1q^n$), concluímos que a solução da recorrência é *$M(n) = C_0(1+ i)^n$.*

Exemplo 2.1: Consideremos o seguinte enunciado: João investiu R$300,00 a uma taxa de juros de 6% ao mês. Qual seria o montante obtido após 4 meses?

Observe que o capital x_n acumulado no final de cada período é:

$$x_n = x_{n-1}\left(1+\frac{6}{100}\right)$$

$$x_n = x_{n-1}(1{,}06)$$

Vimos que a solução da recorrência tem a fórmula geral $M_n = C_0(1 + i)^n$. Substituindo $C_0 = 300$ e $i = 6\% = 0{,}06$ na equação, então temos:

$$M_4 = 300(1 + 0{,}06)^4$$

$$M_4 = 300(1{,}06)^4$$

$$M_4 = 378{,}74$$

Portanto, o montante obtido após 4 meses é de R$378,74.

2.2 APICAÇÕES NA ANÁLISE COMBINATÓRIA

As relações de recorrência são ferramentas versáteis na resolução de inúmeros problemas combinatórios. Muitos problemas considerados difíceis e insolucionáveis através dos raciocínios elementares da análise combinatória (princípio multiplicativo, arranjos, combinações, etc) podem ser facilmente resolvidos, quando representados por uma equação de recorrência adequada. Segue abaixo um exemplo do uso das equações de recorrência na resolução de um problema de análise combinatória.

Exemplo 2.2: Quantas são as sequências de *n* termos, pertencentes a {0, 1, 2} que não possuem dois termos consecutivos iguais a zero?

Solução: Primeiramente, iremos expandir a sequência que dá o número de agrupamentos que podem ser formados utilizando 1, 2 e 3 termos respectivamente:

-Para um termo temos três possibilidades:

S_1={(0), (1), (2)}

-Para dois termos temos oito possibilidades:

S_2={(1,0), (1,1), (1,2), (2,0), (2,1), (2,2), (0,1), (0,2)}

-Para três termos temos vinte e duas possibilidades:

S_3={(1,1,0), (1,1,1), (1,1,2), (1,2,0), (1,2,1), (1,2,2), (1,0,1), (1,0,2), (2,1,0), (2,1,1), (2,1,2), (2,2,0), (2,2,1), (2,2,2), (2,0,1), (2,0,2), (0,1,0), (0,1,1),(0,1,2), (0,2,0) (0,2,1), (0,2,2),}

Já é possível deduzir a relação de recorrência, observe que:

Para formar S_3 foram desenvolvidas 3 etapas:

1) foram tomados todos os elementos de S_2 e acrescentado o "1" no início da seqüência. (números em verde)

2) foram tomados todos os elementos de S_2 e acrescentado o "2" no início da seqüência. (números em azul)

3) foram tomados os elementos de S_2 não começados com "0" e acrescentado o "0" no início da seqüência. (números em vermelho). Todavia, note que os seis elementos de S_2 não começados por "0" foram formados dos elementos de S_1 acrescidos de 1 ou 2 no início de suas sequências. Portanto estes elementos correspondem a $2S_1$. Logo:

$$S_3 = 2 \times 8 + 6$$

$$S_3 = 2 \times 8 + 2 \times 3$$

As observações acima permitem inferir que S_3 foi obtido tomando duas vezes S_2 2acrescido dos elementos de S_2 não começados por zero, que por sua vez correspondem a duas vezes S_1. Portanto a relação de recorrência formadora da sequência será:

$x_{n+2} = 2x_{n+1} + 2x_n$, onde $x_1 = 3$ e $x_2 = 8$ que equivale a equação $x_{n+2} - 2x_{n+1} - 2x_n = 0,$ com $x_1 = 3$ e $x_2 = 8$. Segue abaixo a solução da equação de recorrência:

Substituindo $x_k = bq^k$ na equação $x_{n+2} - 2x_{n+1} - 2x_n = 0$, temos:

$$bq^2 - 2bq^1 - 2bq^0 = 0 \rightarrow b(q^2 - 2q^1 - 2) = 0$$

Logo $q^2 - 2q - 2 = 0$ é a equação característica da recorrência, cujas raízes são $q' = 1+\sqrt{3}$ e $q'' = 1-\sqrt{3}$. Logo a solução geral da recorrência será:

$$x_n = A(1+\sqrt{3})^n + B(1-\sqrt{3})^n.$$

Como as condições iniciais são $x_1 = 3$ e $x_2 = 8$ é possível construir o sistema:

$$\begin{cases} x_1 = A(1+\sqrt{3})^1 + B(1-\sqrt{3})^1 \\ x_2 = A(1+\sqrt{3})^2 + B(1-\sqrt{3})^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3 = A + \sqrt{3}A + B - \sqrt{3}B \\ 8 = 4A + 2\sqrt{3}A + 4B - 2\sqrt{3}B \end{cases}$$

Dividindo a segunda equação por 2 e multiplicando a primeira equação por (-1), temos:

$$\begin{cases} -A - \sqrt{3}A - B + \sqrt{3}B = -3 \\ 2A + \sqrt{3}A + 2B - \sqrt{3}B = 4 \end{cases}$$ cuja solução é:

$$A = \frac{2+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} \text{ e } B = \frac{-2+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}$$

Portanto a solução da recorrência $x_{n+2} = 2x_{n+1} + 2x_n$, com $x_1 = 3$ e $x_2 = 8$ é:

$$x_n = A(1+\sqrt{3})^n + B(1-\sqrt{3})^n$$

$$x_n = \frac{2+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}(1+\sqrt{3})^n + \frac{-2+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}(1-\sqrt{3})^n.$$

2.3 MÉTODO DE NEWTON PARA A OBTENÇÃO DAS RAÍZES DE UMA FUNÇÃO

O método de Newton é um artifício que permite a obtenção das raízes de uma função derivável em *p(x)=0*. Segundo este método, se x_1 é um valor próximo de uma raiz, a sequência x_1; x_2; ... ; x_n; ... de números reais obtidos pela fórmula iterativa $x_{n+1} = x_n - \frac{p(x_n)}{p'(x_n)}$, onde $p'(x_n)$ representa a derivada da função *p,* tem como limite uma raiz de tal função. Os termos x_n desta sequência se aproximam rapidamente do limite *p(x)=0.*

Exemplo 2.3: Considere a função polinomial contínua $p(x) = x^2 - 2x$. Sabemos que $p(1) = -1$ e que $p(3) = 5$. Logo deve existir um valor de *x* entre 1 e 3 tal que $p(x) = 0$. Vemos que as raízes da função são x' = 0 e x"= 2. Portando o valor de x procurado, entre 1 e 3, é 2.

Vamos produzir uma sequência (x_0, x_1, x_3,...) via Método de Newton que convirja para 2, partindo de $x_0 = 3$ (o caso em que $x_0 = 1$ é análogo).

Primeiro, obtemos a fórmula da sequência recorrente associada à função $p(x) = x^2 - 2x$:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{p(x_n)}{p'(x_n)}$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x^2 - 2x}{2x - 2} \quad \text{, note que } p'(x_n) = 2x - 2$$

Obtendo os três próximos termos da sequência, temos:

$$x_1 = 3 - \frac{3^2 - 2(3)}{2.3 - 2} = 2{,}25$$

$$x_2 = 2{,}25 - \frac{2{,}25^2 - 2(2{,}25)}{2(2{,}25) - 2} = 2{,}025$$

$$x_3 = 2{,}025 - \frac{2{,}025^2 - 2(2{,}025)}{2(2{,}025) - 2} = 2{,}0025$$

Observe que a sequência tende a 2, como queríamos mostrar.

2.4 APLICAÇÕES NA QUÍMICA – DECAIMENTO RADIOATIVO E MOLECULAR

Um conceito importante na Química é o de *meia-vida*. A meia-vida, ou período de semidesintegração de um átomo radioativo, representado por P ou t½, é o tempo necessário para que a metade dos núcleos radioativos de uma amostra se desintegre.

Considere uma amostra inicial n_0 de átomos radioativos. Depois de um espaço de tempo *P*, haverá $\frac{n_0}{2}$ átomos ainda não desintegrados. O número que representa o tempo *P* corresponde ao período de semidesintegração ou meia-vida do elemento radioativo.

Exemplo 2.4: Se após 5 horas uma amostra de 50 gramas de um isótopo radioativo dedai para 25 gramas, dizemos que a meia-vida do isópoto é de 5 horas.

A velocidade de desintegração depende do número de átomos iniciais, pois quanto maior for o número de átomos, maior será a velocidade de desintegração. Assim, o tempo para que ocorra a desintegração da metade dos átomos não depende do número de átomos radioativos iniciais.

Exemplo 2.5: Se após 4 horas uma amostra de *80 gramas* de um isótopo radioativo dedai para *40 gramas*, concluímos que a velocidade média de desintegração foi de *10 gramas/hora*. Se tal substância enquadra-se no conceito de meio-vida, decorridas mais 4 horas, a massa do isópoto deverá ser de *20 gramas*. Isto ocorrerá só ocorrerá se a velocidade média de desintegração for de 5 *gramas/hora.*

Considere uma massa M_0 de um átomo radioativo. As massas M_0, M_1, M_2, M_3,..., M_{n-1}, M_n correspondem aos períodos de desintegração P_0, P_1, P_2, P_3, ... , P_{n-1}, P_n., onde k = (0, 1, 2, 3, .., n-1, n) representa o número de períodos de decaimento. Assim temos

$$M_1 = M_0\frac{1}{2}$$

$$M_2 = M_1\frac{1}{2}$$

$$M_3 = M_2\frac{1}{2}$$

Note que a sequência que representa a massa do átomo em cada período de semidesintegração é definida pela recorrência linear homogênea de primeira ordem $x_{n+1} = \frac{1}{2}x_n$, onde M_0 é a condição inicial.

Podemos deduzir a solução da recorrência, escrevendo M_3 em função de M_0:

$$M_3 = M_2\frac{1}{2}$$

$$M_3 = \left(M_1\frac{1}{2}\right)\frac{1}{2} = M_1\left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$M_3 = \left(M_0\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^2 = M_0\left(\frac{1}{2}\right)^3$$

É fácil ver que a solução da recorrência pode ser facilmente deduzida, sendo $M_n = M_0\left(\frac{1}{2}\right)^n$**.** A solução corresponde ao termo geral de uma progressão Geométrica de razão ½ e $a_1 = M_0$.

A massa da substância também pode ser escrita em função do tempo *t* através da relação $M_t = M_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{P}}$, onde:

M_t = massa no instante t;

M_0 = massa inicial;

t = tempo decorrido após o início do experimento;

P = meia-vida da substância, ou seja, o tempo necessário para que M_t se converta a $\frac{M_t}{2}$.

2.5 APLICAÇÃO NA BIOLOGIA – CRESCIMENTO POPULACIONAL E PROLIFERAÇÃO DE PLANTAS SAZONAIS

A Biomatemática é compreendida como a aplicação de modelos matemáticos para a representação e solução de problemas relacionados a fenômenos biológicos.

Segue abaixo um exemplo da aplicação de equações de recorrência lineares de primeira ordem na modelagem de uma situação relacionada à evolução de uma população de indivíduos.

Exemplo 2.6: População de Insetos**.** Insetos geralmente têm mais que um estágio no seu ciclo de vida. Um ciclo completo pode levar semanas, meses ou mesmo anos. No entanto é costume usar uma única geração como unidade básica de tempo quando tentamos escrever um modelo para o crescimento da população de insetos. Os vários estágios do seu ciclo de vida podem ser representados por várias equações de recorrências (Diniz, 2011 p.18)

Como exemplo, vamos considerar a reprodução de insetos galhadores (cecidógenos) de um afídio que faz a oviposição nas folhas do álamo. De acordo com Whitham (aput Diniz, 2011, p.19), uma espécie possui os seguintes comportamentos:

- As fêmeas afídios adultas põem os ovos na folha do álamo em uma estrutura denominada galha;

- Todos os progênitos de um único afídio estão contidos em uma galha;

- Uma fração dos progênitos emergirão e sobreviverão até a fase adulta;

- Geralmente a capacidade de produzir descendência e a probabilidade de sobreviver para a fase adulta dependem das condições do meio ambiente, da qualidade da alimentação e do tamanho da população.

Vamos ignorar variações dos fatores citados acima e fazer um estudo elementar no qual os parâmetros são constantes.

x_n = número de insetos (fêmeas) adultos na geração *n*.

p_n = número de descendentes em n.

r = fração de fêmeas em relação aos afídios adultos.

m = fração dos descendentes que não sobrevivem.

f = número de prole produzido por cada fêmea.

A equação que se obtém para descrever o número de prole na geração *(n+1),* em função do número de fêmeas da geração anterior (n) é dada por:

$$p_{n+1} = fx_n \qquad (1)$$

Como do total desta prole, somente uma fração (1 - m) sobrevive para a fase adulta, da qual uma fração (r) de fêmeas, chegamos então a equação:

$$x_{n+1} = r(1-m)p_{n+1} \qquad (2)$$

As equações (1) e (2) descrevem a população de afídios na geração *(n+1),* em função do total de fêmeas na geração *n*. Combinando as duas equações, chegamos a relação de recorrência $x_{n+1} = fr(1-m)x_n$ (3)

Daí, teoricamente supondo que os parâmetros bióticos *f, r* e *m* são constantes ao longo das gerações sucessivas e usando a recursividade da equação (3), a partir de uma população inicial x_0 de fêmeas adultas chegamos à solução da equação (3):

$$x_n = [fr(1-m)]^n x_0$$

Exemplo 2.7: Sabe-se que uma fêmea de afídio produz em média 32 ovos e que a razão sexual nesta população é igual *a ½*, ou seja, 50% são machos e 50% são fêmeas. A mortalidade de jovens é em torno de 75%. Se, inicialmente temos 100 fêmeas, descreva a população de fêmeas nas gerações *n = 5, 8* e *10*. O que você pode concluir sobre esta população?

Solução: A equação de recorrência que modela o problema é da forma $x_{n+1} = fr(1\text{-}m)x_n$, cuja solução é $x_n = [fr(1\text{-}m)]^n x_0$. Fazendo *f = 32; r = 0,5; m = 0,75* e $x_1 = 100$ na última equação, então temos:

$$x_n = [fr(1-m)]^n x_0 \qquad\qquad x_n = 4^{n+1} 5^2$$

$$x_n = [32 \text{ x } 0,5(1 - 0,75)]^n 100 \qquad\qquad x_n = 4^n\, 100 = 4^n\, 4 \text{ x } 5^2$$

Vamos usar a fórmula para encontrar o número de fêmeas nas gerações 5, 8 e 10.

$$x_n = 4^{n+1} 5^2 \qquad x_n = 4^{n+1} 5^2 \qquad x_n = 4^{n+1} 5^2$$

$$x_5 = 4^{5+1} 5^2 \qquad x_8 = 4^{8+1} 5^2 \qquad x_{10} = 4^{10+1} 5^2$$

$$x_5 = 102400 \qquad x_8 = 6553600 \qquad x_{10} = 104857600$$

Podemos concluir que a população de fêmeas cresce indefinidamente tendendo ao infinito.

Exemplo 2.8: Em (Diniz, 2011, p.24-27) e (Bassanezi, 2011, p.116-118) encontramos um problema envolvendo a propagação anual de plantas sazonais. Tal problema será modelado através de um sistema de ordem dois, equivalente à recorrência linear de segunda ordem. Sabe-se que determinadas plantas produzem sementes no final do verão, quando então morrem. Parte das sementes sobrevivem no inverno e algumas germinam dando origem a uma nova geração de plantas. A fração que germina depende da idade da semente que sobrevive no máximo dois invernos.

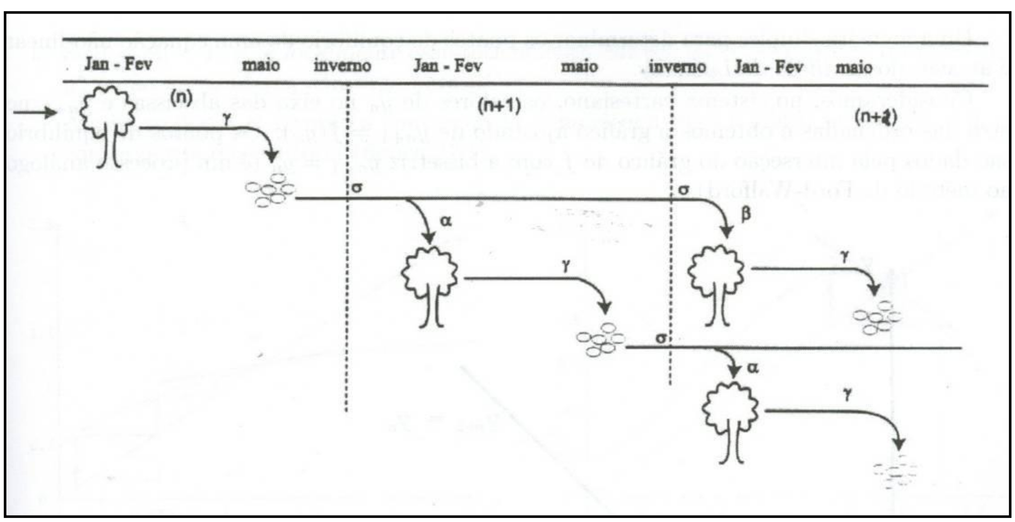


Figura 2.1: Reprodução anual de plantas a cada verão. (Bassanezi, 2011, p. 117)

Definiremos os seguintes parâmetros:

γ = é o número de sementes produzidas por planta.

δ = é a fração de sementes que sobrevivem a cada inverno.

α = é a fração de sementes que germinam no primeiro ano.

β = é a fração de sementes que germinam no segundo ano.

Para simplificar o problema supõe-se que sementes com mais de dois anos não sejam mais viáveis, devendo portanto serem ignoradas.

Com base no diagrama anterior são definidas as seguintes variáveis:

P_n = número de plantas na geração n;

S_n^0 = número de sementes novas produzidas;

S_n^1 = número de sementes de 1 ano antes da germinação;

S_n^2 = número de sementes de 2 anos antes da germinação;

$\bar{S}_n^1$ = número de sementes de 1 ano após a germinação;

$\bar{S}_n^2$ = número de sementes de 2 anos após a germinação.

As equações pertinentes ao problemas são:

$$P_n = \alpha S_n^1 + \beta S_n^2 \qquad \bar{S}_n^1 = (1 - \alpha) S_n^1$$

$$\bar{S}_n^2 = (1 - \beta) S_n^2 \qquad S_n^0 = \gamma P_n$$

$$S_{n+1}^1 = \delta S_n^0 \qquad S_{n+1}^2 = \delta \bar{S}_n^1$$

Fazendo $S_n^0 = \gamma P_n$ em $S_{n+1}^1 = \delta S_n^0$, temos:

$$S_{n+1}^1 = \delta (\gamma Pn)$$

Fazendo $\bar{S}_n^1 = (1 - \alpha) S_n^1$ em $S_{n+1}^2 = \delta \bar{S}_n^1$, temos:

$$S_{n+1}^2 = \delta (1 - \alpha) S_n^1$$

Obtendo a geração seguinte de $P_n = \alpha S_n^1 + \beta S_n^2$ temos:

$$P_n = \alpha S_n^1 + \beta S_n^2 \quad \text{e} \quad P_{n+1} = \alpha S_{n+1}^1 + \beta S_{n+1}^2$$

Agora, levando $S_{n+1}^1 = \delta (\gamma Pn)$ e $S_{n+1}^2 = \delta (1 - \alpha) S_n^1$ em $P_{n+1} = \alpha S_{n+1}^1 + \beta S_{n+1}^2$, junto com a equação $S_{n+1}^1 = \delta S_0n$ obtemos o seguinte sistema de equações de diferenças:

$$P_{n+1} = \alpha\,\delta(\gamma P_n) + \beta\,\delta(1-\alpha)S_n^1 \quad \text{e} \quad S_n^1 = \delta(\gamma P_{n-1})$$

De tal sistema podemos obter a equivalente equação de recorrência linear de segunda ordem, bastando para tanto fazer $S_n^1 = \delta(\gamma P_{n-1})$ em

$P_{n+1} = \alpha\,\delta(\gamma P_n) + \beta\,\delta(1-\alpha)S_n^1$, de onde obtemos:

$$P_{n+1} = \alpha\,\delta(\gamma P_n) + \beta\,\delta(1-\alpha)\delta(\gamma P_{n-1})$$

Assim, o total de plantas na geração *(n+1)* é dada em função do total de plantas nas gerações *n* e *(n−1)*, ou seja, o total de plantas numa geração depende do total de plantas nas duas gerações imediatamente anteriores.

Capítulo 3

RECOMENDAÇÕES PARA AO ENSINO E SUGESTÕES DE ATIVIDADES ENVOLVENDO EQUAÇÕES DE RECORRÊNCIA

Neste capítulo voltaremos nossa atenção ao ensino das equações de recorrência. O capítulo foi dividido em três seções: a primeira seção traz algumas recomendações para os professores que desejam introduzir o ensino das equações de recorrência em seus planejamentos; a segunção seção traz algumas sugestões de atividades a serem desenvolvidas em sala de aula; a última seção traz o relato de duas atividades desenvolvidas em sala.

3.1 CONSIDERAÇÕES AO INTRODUZIR O ENSINO DAS EQUAÇÕES DE RECORRÊNCIAS

É importante enfatizar que o raciocínio recursivo, assim como a divisibilidade, a proporcionalidade, o princípio multiplicativo e outros raciocínios, é uma ferramenta utilizada na resolução de inúmeros problemas contemplados por diferentes tópicos da matemática, trabalhados em sua maioria no decorrer do Ensino Médio. Portanto, não é conveniente que os conceitos de recorrência sejam trabalhados isoladamente, fechados em si mesmo e em um único tópico. Além disso, tal raciocínio é utilizado para modelar inúmeras situações estudadas por outras ciências. Como exemplo, citamos as aplicações na Química e na Biologia. Portanto, o ensino de recorrências sugere um tratamento interdisciplinar. Na semana de planejamento, que geralmente antecede o início das aulas, é importante que o professor de matemática interaja com os colegas das demais disciplinas da área de exatas. Os professores deverão planejar as atividades relacionadas ao tema e definir quando tais conceitos deverão ser introduzidos.

No contexto das aulas de Matemática, é conveniente introduzir o conceito de recorrência apresentando algumas situações elementares, cujo modelo matemático é constituído por uma sequência numérica obtida recursivamente. Nesta óptica, é inevitável que não pensemos nas progressões. Vimos no capítulo 1 que a solução de algumas recorrências lineares de primeira ordem com coeficientes constantes recaem nas fórmulas da soma dos termos de uma progressão aritmética ou geométrica. Portanto, antes de introduzirmos tais recorrências, é conveniente que o professor trabalhe ou revise o conteúdo de progressão. Logo, a introdução do ensino das recorrências lineares de primeira ordem pode figurar como um tópico complementar, após o ensino das progressões. Todavia, conceitos de recorrências podem ser introduzidos durante o ensino de outros assuntos, como a combinatória, a matemática financeira e a geometria dos fractais, etc.

Ao introduzirmos as noções básicas de recorrência, os conceitos formais devem ser trabalhados preferencialmente de forma implícita, evitando definições e generalizações precoces. A formalização dos conceitos que envolvem a conteúdo de recorrências, bem como a sua notação, não deve preceder a assimilação de idéias e procedimentos intuitivos relacionados à recursão. Considere por exemplo, o seguinte exercício: *Resolva a recorrência* $x_{n+1} = 2x_n$ *com* $x = 3$.

Exercícios dessa natureza, embora sirvam para exercitar um conceito assimilado, de longe não são os mais adequados, se o objetivo é introduzir o estudo de recorrências. Tal exercício não possui nenhum significado prático para o discente, fortalecendo ainda mais a idéia errônea de que a Matemática tem pouca utilidade prática. O professor deve se esforçar para elaborar problemas contextualizados, cuja solução exigiria o uso do raciocínio recursivo. O exercício anterior poderia, por exemplo, ser substituído pelo seguinte enunciado:

Exemplo 3.1: Um casal possui **n** filhos de idades diferentes. Um dia, os pais resolveram dar uma quantia em dinheiro para os seus **n** filhos de forma que um determinado filho recebesse a metade do valor recebido por seu irmão imediatamente mais velho. Considerando que o filho mais jovem recebeu R$3,00 e ordem cronológica inversa com que os nascimentos ocorreram, escreva a relação que oferece o valor recebido por cada filho em função do valor recebido por seu irmão imediatamente mais jovem. Por fim, dê a fórmula que associa o valor recebido por cada filho em função da posição ocupada dentro da ordem com que os nascimentos ocorreram.

Observe que enunciado instiga o aluno a buscar um modelo matemático para o problema, ou seja, a matemática surge como uma ferramenta prática, deixando de ser o foco das atenções. Além do mais, o enunciado por si só, é uma atividade de compreensão e interpretação de texto, motivando o raciocínio e a curiosidade.

A solução de tal exercício encontra-se no capítulo 1, seção1.2.

Depois de resolvida a recorrência, é interessante que os alunos criem convicções sobre a utilidade da solução obtida. Neste momento o professor tem a oportunidade de explicitar o caráter funcional de tal solução. É conveniente retornar ao problema inicial e propor atividades de verificação, utilizando a solução encontrada para a recorrência. Uma das atividades seria propor a representação gráfica da solução no plano cartesiano.

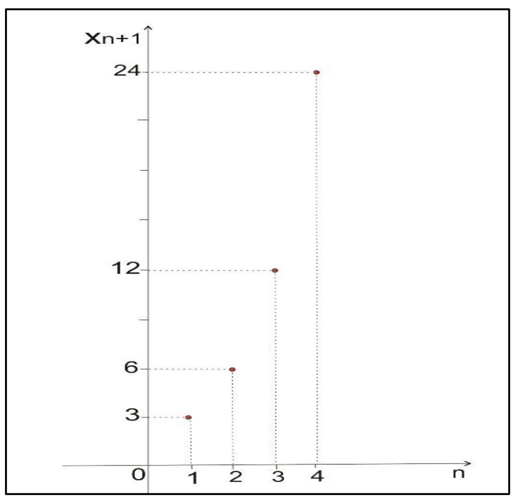


Figura 3.1: Solução $x_{n+1} = 3(2)^n$ para $x_{n+1} = 2x_n$.

Existem alguns problemas notáveis dentro do conteúdo de recorrências. Seria interessante que o professor os incluísse dentro de sua relação de atividades, já que muitos desses problemas evidenciam a faceta lúdica da matemática, geralmente apreciado pelos alunos. A seguir, citamos três exemplos:

Exemplo 3.2: *(A Torre de Hanói).* Considere três estacas e *n* discos de diâmetros diferentes. Inicialmente os discos estão enfiados na primeira estaca, em ordem crescente de diâmetros, de cima para baixo. O objetivo do problema é transferir os discos para qualquer uma das outra duas estacas, usando uma delas como estaca auxiliar. É permitido mover apenas um disco por vez e jamais um disco pode ser colocado sobre um disco de diâmetro menor. Qual a quantidade mínima de movimentos necessários para transferir os *n* discos para a outra estaca?

Este jogo foi inventado em 1882 pelo matemático francês Édouard Lucas O professor também pode introduzir a atividade através da seguinte anedota:

> "Diz uma antiga lenda que na origem dos tempos, em um templo de Hanói, foram colocados 64 discos perfurados de ouro puro e de diâmetros diferentes ao redor de três hastes de diamantes. Muitos sacerdotes moviam os discos, respeitando as seguintes regras: eles começam empilhados em ordem crescente de acordo com o seu tamanho. Os discos podem ser deslocados de uma coluna para qualquer outra, sendo que nunca pode ser colocado um disco maior em cima de um menor e a cada segundo os sacerdotes movem um disco. Quando os sacerdotes transportassem todos os discos de uma coluna para outra, o mundo se acabaria. Suponha que eles começaram esse processo no ano 2000 e que a lenda é verdadeira, quanto tempo ainda resta para a Terra?" (Oliveira, 2010, p.223).

O bom desenvolvimento dessa atividade exige o manuseio real dos discos. É interessante que o professor tenha em mãos alguns exemplares do jogo, para que possam ser manipulados pela turma. Tal atividade foi aplicada pelo autor em sala de aula. O relato encontra-se no final deste capítulo.

Para resolver o problema, inicialmente os alunos devem encontrar a relação de recorrência que associa o número de movimentos para *n* discos com o número de movimentos para os *(n-1)* discos. É interessante sugerir a construção de uma tabela, colocando na primeira coluna o número de discos e na segunda coluna o número mínimo de movimentos necessários para transferir aqueles para outra estaca.

discos	movimentos
1	1
2	3
3	7
4	15

Vamos transferir os discos para a terceira estaca. Note que:

a) Tendo 1 disco, este pode ser transferido de imediato para a terceira estaca, sendo necessário, portanto um único movimento;

b) Tendo dois discos, o disco superior (menor) deve ser colocado da estaca intermediária (um movimento); em seguida, o disco maior deve ser transferido de imediato para a terceira estaca (um movimento); por fim, o disco que foi colocado na estaca intermediária deve ser transferido para a terceira estaca (um movimento). Portanto, temos três movimentos (1 + 1 + 1);

c) tendo três discos, os dois discos superiores devem ser colocados da estaca intermediária (três movimentos), em seguida o disco maior deve ser transferido de imediato para a terceira estaca (um movimento). Por fim, os dois discos que foram colocados na estaca intermediária devem ser transferidos para a terceira estaca (três movimentos). Portanto, temos sete movimentos (3 + 1 + 3);

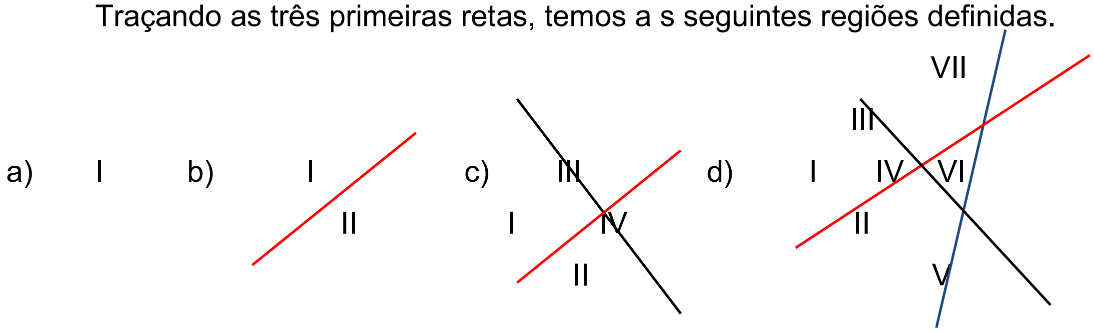
Os alunos devem ser instigados a perceberem que o número de movimentos para *n* discos é igual a 1 mais 2 vezes o número de movimentos para *(n – 1)* discos. Logo a recorrência procurada é $x_n = 2x_{n-1} + 1$, com $x_1 = 1$.

A solução de tal recorrência encontra-se na página no capítulo 1, seção 1.2.2.

Exemplo 3.3: *(Divisão do plano por retas).* Um problema clássico em combinatória é a contagem das regiões criadas no plano por um conjunto de *n* retas. Considere uma variante do problema, onde as retas são duas a duas concorrentes e a interseção de qualquer subconjunto de três retas é vazia.

Primeiramente, os alunos devem ser orientados a construir uma tabela que relaciona o número de retas com o número de regiões definidas por aquelas. O objetivo de tal tabela é oferecer informações para que a relação de recorrência que oferece o número de regiões definidas por *(n+1)* retas possa ser escrita em função do número de regiões definidas por *n* retas.

Traçando as três primeiras retas, temos a s seguintes regiões definidas.



Os alunos devem perceber que cada reta introduzida intersecta todas as retas existentes, além de observar que a primeira reta deu origem a uma nova região, a segunda reta deu origem a duas novas regiões e a terceira reta deu origem a mais três novas regiões. Assim construímos a seguinte tabela.

retas	regiões
0	1
1	2
2	4
3	7

Se os alunos ainda não perceberam o que ocorre com o número de regiões definidas por *p* retas, quando a próxima reta é inserida, o professor pode pedir que seja introduzida uma quarta reta no esquema da página anterior, verificando em seguida a quantidade de novas regiões criadas. A partir da tabela, os alunos possuem elementos para deduzirem que o número de regiões definidas por *n* retas é a soma do número de regiões definidas por $(n - 1)$ retas mais *n*. Logo recorrência que define a sequência é $x_n = x_{n-1} + n$, com condição inicial $x_0 = 1$. Observe que a relação é uma recorrência não homogênea da forma $x_{n+1} = x_n + g(n)$, onde $g(n) = n$.

A solução de tal recorrência encontra-se no capítulo 1, seção 1.2.2.

Outra questão a ser debatida nos dois exemplos anterior refere-se à validade da fórmula que representa a solução das equações para todo número natural *n*. Os alunos devem ser questionados a respeito desta questão. Neste momento o professor tem a oportunidade de comentar sobre a diferença entre a *indução empírica*, utilizada pela maioria das ciências naturais, e a *indução matemática*. Sempre que possível, o professor deve introduzir as noções de prova matemática através do *Princípio da Indução Matemática*.

Exemplo 3.4*: (Cálculo do tamanho de uma população de coelhos).* Uma recorrência homogênea de segunda ordem famosa é a que dá origem à *sequência de Fibonacci*. (1, 1, 3, 5, 8, 13, ...) Para ilustrar os termos de sua sequência, Fibonacci criou um problema referente a uma população de coelhos, publicado em seu livro *Liber Abacci.* O professor pode parafrasear o enunciado original proposto por Fibonacci. Segue abaixo um exemplo:

Suponha que um casal de coelhos recém-nascidos é colocado em uma gaiola, e que eles não produzem descendentes até completarem dois meses de idade. Uma vez atingida esta idade, cada casal de coelhos produz exatamente um outro casal de coelhos por mês. O professor pode sugerir as seguintes atividades relacionadas ao enunciado:

a) Qual seria o número de casais de coelhos na ilha após cinco meses, supondo que nenhum dos coelhos tenha morrido e não haja migração deste período?
b) A sequência pode ser obtida recursivamente? Se a resposta for sim, encontre a equação de recorrência e resolva-a.

Para visualizar o progresso da população de coelhos, os alunos devem ser orientados a classificar os casais de coelhos em três categorias:

1) Filhotes: casais recém nascidos.
2) Jovens: casais com um mês de vida.
3) Adultos: casais com dois meses de vida.

Construindo uma tabela para os 5 primeiros meses onde cada casal de coelhos é representado sempre pela mesma letra, então temos:

meses	filhotes	jovens	adultos	total
0	a			1
1		a		1
2	b		a	2
3	c	b	a	3
4	d, e	c	a, b	5
5	f, g, h	d, e	a, b, c	8

Portanto, após cinco meses teremos oito casais de coelhos.

Cabe ao professor estimular os alunos a perceberem que cada termo da sequência acima, a partir do terceiro, é igual à soma dos dois termos anteriores. Portanto temos uma recorrência linear homogênea de segunda ordem onde $x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$, com $x_0 = 1$ e $x_1 = 1$. Segue a solução da equação:

$$x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$$

$$x_{n+2} - x_{n+1} - x_n = 0$$

Substituindo $x_k = bq^k$ na equação $x_{n+2} - x_{n+1} - x_n = 0$, temos:

$$bq^2 - bq^1 - bq^0 = 0$$

$$bq^2 - bq^1 - b = 0$$

$$b(q^2 - q^1 - 1) = 0$$

Logo $q^2 - q - 1 = 0$ é a equação característica da recorrência cujas as raízes são $q = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$, Logo a solução geral da recorrência é:

$$x_n = C_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + C_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

Com as condições iniciais $x_0 = x_1 = 1$, é possível construir o sistema

$$\begin{cases} 1 = C_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^0 + C_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^0 \\ 1 = C_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1 + C_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 = C_1 + C_2 \\ 1 = C_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + C_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \end{cases}$$

Resolvendo o sistema obtemos:

$$C_1 = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\right) \text{ e } C_2 = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}\right)$$

Substituindo os valores de C_1 e C_2 na fórmula da solução geral, então temos:

$$x_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

$$x_n = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} + \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}$$

O capítulo 1 deixa explícito que a assimilação do método utilizado para solucionar a recorrências de segunda ordem exige dos alunos familiaridade com a manipulação de equações algébricas, resolução de sistemas lineares e noções de números complexos. Portanto, é conveniente que o professor, antes de introduzir tal assunto, certifique-se que seus alunos já assimilaram os conhecimentos prévios necessários para o bom desenvolvimento das atividades propostas.

3.2 SUGESTÕES DE ATIVIDADES

Nesta seção será apresentada uma sequência de atividades a serem desenvolvidadas em sala de aula, relacionadas a alguns dos conceitos de recorrência vistos nas seções anteriores. Ao desenvolver as atividades, o autor procurou explorar situações contextualizadas relacionadas à própria Matemática e a outras disciplinas. Os exemplos têm como principal objetivo motivar os colegas professores a elaborarem mais atividades, cujas resoluções dependerão de modelos matemáticos permeados pelo raciocínio recursivo.

3.2.1 Decaimento Radioativo E Molecular

No capítulo anterior, vimos que um conceito importante na Química é o de *meia-vida. A meia-vida, ou período de semidesintegração de um átomo radioativo, representado por P ou t½, é o tempo necessário para que a metade dos núcleos radioativos se desintegre, ou seja, para que a massa de uma amostra radioativa se reduza à metade.*

Obviamente, devido a uma série de restrições técnicas, é praticamente impossível desenvolver com os alunos do ensino médio, atividades práticas envolvendo isótopos radioativos. Todavia, o decaimento molecular de algumas substâncias voláteis apresenta um comportamento semelhante ao dos átomos radioativos. A massa dessas substâncias se desintegra gerando outros compostos que se volatizam, desvinculando-se do agregado inicial. Tal fenômeno recebe o nome de decaimento molecular. O conceito de meia-vida pode ser aplicado para estimar a massa dessas substâncias após *P* períodos de decaimento.

Uma substância volátil facilmente adquirida no comércio é o *naftaleno ou naftalina*. O naftaleno é um importante hidrocarboneto aromático, encontrado a temperatura ambiente na forma de cristais brancos, usado industrialmente como intermediário na fabricação de anidrido fitálico, naftaleno sulfonado, repelentes de insetos e outros produtos. O composto é encontrado naturalmente em combustíveis fósseis, como carvão e óleo. Também é produzido por queima de madeira e cigarro. Na atmosfera, está sujeito a vários processos de degradação, como a reação com radicais hidroxila (OH^-). O composto tem meia-vida curta em água e solo devido à tendência para volatizar e biodegradar.

Atividade 1: A atividade que desenvolveremos consiste em monitorar o decaimento molecular de uma amostra de naftaleno. Com o intuito de promover o debate e as discussões, é conveniente que a turma seja dividida em duplas ou grupos de no máximo quatro alunos. Para o desenvolvimento da atividade serão necessários os seguintes materiais: 3 unidades de naftalina, uma balança digital, calculadora, papel, lápis e borracha.

Procedimentos a serem desenvolvidos:

Tome as 3 unidades de naftalina. Meça a massa de cada unidade obtendo a média aritmética de cada medição. Repita o procedimento a cada dia, construindo a seguinte tabela:

Amostras	**A_1**	**A_2**	**A_3**	
data	**massa**			**massa média**

Para verificar a viabilidade da atividade proposta, o autor construiu uma tabela de acordo com o procedimento acima, realizando as medições entre 23 de novembro de 2012 e 05 de janeiro de 2013. Os resultados dos dados obtidos encontram-se na tabela abaixo. Tal tabela traz apenas as medições onde, aproximadamente, ocorreram as semidesintegrações das amostras de naftalina.

Amostras	**A_1**	**A_2**	**A_2**	
data	**massa**			**massa média**

23/11/2012	**2,23**	**2,18**	**1,98**	**2,13**
06/12/2012	**1,16**	**1,12**	**1,01**	**1,09**
18/12/2012	**0,61**	**0,57**	**0,52**	**0,56**
30/12/2012	**0,33**	**0,29**	**0,27**	**0,29**

Depois de construída a tabela, o professor pode propor as seguintes questões:

a) Após quantos dias a massa média das amostras de naftalina será respectivamente a metade, um quarto e um oitavo da massa média inicial?

Solução: Aproximadamente 13 dias, 25 dias e 37 dias.

b) A partir dos valores obtidos na questão *a*, é possível afirmar que o decaimento da massa da naftalina enquadra-se no conceito de meia vida? Se a resposta for sim, obtenha a função que modela o decaimento da massa da naftalina em função do tempo *t*.

Solução: Aparentemente a resposta é sim, todavia, o professor deve suscitar a discussão quanto ao valor a ser atribuído à meia vida, de forma que tal valor modele, da melhor maneira possível, a situação observada. Um valor plausível para a meia vida seria P = 12 dias. Considerando tal valor, temos a relação:

$$M_t = M_0\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{p}}$$

$$M_t = 2{,}13\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{12}}$$

c) Construa no plano cartesiano, a partir dos dados da tabela anterior, o gráfico da variação da massa média (gramas) da naftalina em função do tempo (dias).

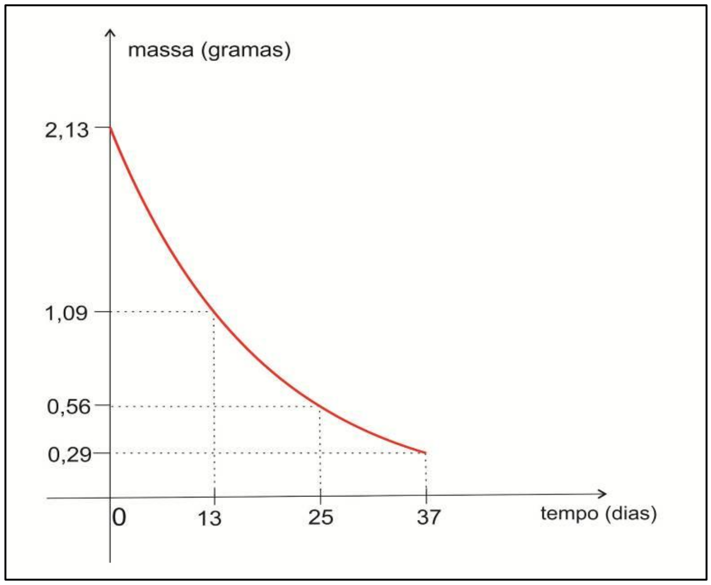


Figura 3.2: Gráfico da função exponencial $M_t = 2{,}13\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{12}}$.

3.2.2 Explorando A Meia-Vida De Um Fármaco

O tempo de meia-vida de um medicamento é o tempo necessário para que a sua concentração plasmática se reduza à metade. Semelhante ao decaimento radioativo ou molecular, o tempo de meia vida não depende da quantidade inicial do medicamento. A seguir, apresentamos algumas atividades relacionadas ao tema que podem ser desenvolvidas em sala de aula.

Atividade 2: Considere o seguinte problema: Após a administração intravenosa da *dipirona sódica*, a *meia-vida* plasmática do medicamento é de aproximadamente 15 minutos (dados reais). Construa uma tabela que dá a concentração plasmática da *dipirona sódica* nas primeiras duas horas após ser administrada, considerando que o indivíduo administrou uma única dose de 400 mg. Ao definir os valores para a variável *tempo*, faça com que a diferença entre dois valores consecutivos coincida com a meia-vida do medicamento. Por último, escreva relação que associa a concentração plasmática do medicamento com o tempo em minutos.

Solução: Construindo a tabela, então temos:

Tempo em minutos	0	15	30	45	60	75	90	105	120
Massa em miligramas	**400**	**200**	**100**	**50**	**25**	**12,5**	**6,25**	**3,125**	**1,5625**

A função que associa a concentração plasmática $\mathbf{M_t}$ em gramas do medicamento com o tempo **t** em minutos é $M_t = 400\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{15}}$.

Atividade 3: A meia vida de um medicamento pode ser facilmente obtida consultando as bulas contidas nas embalagens ou em artigos disponíveis na internet. Embora os laboratórios possam oferecer valores diferentes para a meia-vida de um mesmo medicamento. É possível estimar um valor médio a partir das informações contidas nas bulas. Uma atividade interessante, a ser desenvolvida em sala de aula, consiste em orientar os alunos a pesquisarem pelo valor da meia vida de um medicamento, cabendo ao professor propor algumas questões relacionadas ao tema. Por exemplo, após os alunos pesquisarem sobre o valor da meia-vida da amoxicilina, administrada via parietal (cerca de 1,5 horas), o professor pode propor as seguintes questões:

a) Qual a concentração plasmática do medicamento após 6 horas, sabendo que o indivíduo administrou uma única dose do medicamento contendo 400 mg?

Solução: Observe que 6 horas correspondem a 4 meias-vidas, pois $p = 6 \div 1,5 = 4.$ Iterando 4 vezes a recorrência $M_{p+1} = M_p \; x \; \frac{1}{2}$, chegamos à concentração plasmática do medicamento, decorridas as 6 horas de sua administração. Note que M_p representa a concentração plasmática após p semidesistegrações ou meia-vidas. Iterando a recorrência, então temos:

$M_0 = 400$ $\qquad$ $M_1 = 400 \; x \; \frac{1}{2} = 200$

$M_2 = 200 \; x \; \frac{1}{2} = 100$ $\qquad$ $M_3 = 100 \; x \; \frac{1}{2} = 50$

$M_4 = 50 \; x \; \frac{1}{2} = 25$

Logo, a concentração plasmática do medicamento será de 25 gramas.

Também podemos resolver o problema utilizando a fórmula da solução da recorrência, veja: $M_p = M_0(1/2)^p = 400(1/2)^4 = 400(1/16) = 400/16_n = 25$ mg

b) Qual a concentração plasmática máxima que o medicamento pode alcançar sabendo que o indivíduo administra doses de 100 mg em intervalos que coincidem com a meia vida do medicamento ?

Solução: Construindo uma tabela para as 7 primeiras doses administradas, temos:

dose	Número de meias vidas transcorridos da primeira dose						
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	**100**	**50**	**25**	**12,5**	**6,25**	**3,125**	**1,5625**
2		**100**	**50**	**25**	**12,5**	**6,25**	**3,125**
3			**100**	**50**	**25**	**12,5**	**6,25**
4				**100**	**50**	**25**	**12,5**
5					**100**	**50**	**25**
6						**100**	**50**
7							**100**
Conc. total	**100**	**150**	**175**	**187,5**	**193,75**	**196,875**	**198,4375**

A soma da última coluna representa a concentração após a administração de 7 doses do medicamento ou após decorridos seis meias-vidas da primeira administração.

É fácil constatar que, se o tratamento de prolongar indefinidamente, a concentração após *n* administrações corresponde a uma PG infinita de razão $q = ½$ e a_1 = massa de cada uma das doses administradas.

Usando a fórmula para a soma dos termos de uma PG infinita, temos:

$$S_n = \frac{a_1}{1-q} = \frac{100}{1-\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{100}{\frac{1}{2}} = 200$$

Logo, a concentração plasmática máxima do medicamento tende a 200 mg.

c) Para que um tratamento não perca seu efeito terapêutico, após o seu início, as concentrações plasmáticas da amoxicilina não podem ser inferiores a 100 mg. Qual o intervalo de tempo máximo entre a primeira e a segunda administração de duas doses contendo 800 mg do medicamento?

Solução: Primeiro devemos identificar os valores oferecidos pelo enunciado da questão. Note que $M_0 = 800\ mg$, $M_t = 100\ mg$ e $P = 1,5$. Substituindo na fórmula, que determina a concentração plasmática do medicamento em função do tempo *t* decorrido, temos:

$$M_t = M_0\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{1,5}}$$

$$100 = 800\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{1,5}}$$

$$\left(\frac{100}{800}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{1,5}}$$

$$\left(\frac{1}{8}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{1,5}}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{3} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{1,5}}$$

$$3 = \frac{t}{1,5} \rightarrow t = 4,5$$

Portanto, o tempo máximo decorrido entre a primeira e a segunda dose não pode ser superior a 4,5 horas.

d) Considerando ainda a hipótese de que a concentração plasmática do medicamento não pode ser inferior a 100 mg, e que a segunda dose foi administrada 4,5 horas após a primeira administração, podemos concluir que o intervalo máximo de tempo entre a segunda e a terceira dose é igual ao intervalo máximo obtido no item anterior? Justifique sua resposta.

Solução: Primeiro definimos a concentração do medicamento após a administração da segunda dose.

Pela hipótese inicial, a segunda dose foi administrada 4,5 horas após a primeira. Como a meia-vida do medicamento é de 1,5 horas, temos que a primeira dose do medicamento sofreu 3 semidesintegrações ($4,5 \div 1,5$).

A tabela a seguir mostra a evolução da concentração plasmática do medicamento considerando apenas a primeira dose administrada.

Tempo em horas	0	1,5	3,0	4,5
Massa em miligramas	800	400	200	100

Concluímos que após 4,5 horas, antes da administração da segunda dose, a concentração do medicamento era de 100 mg. Portanto, ao administrar a segunda dose (800 mg), a concentração plasmática passou a ser de 900mg.

Agora, temos os seguintes valores a serem inseridos na fórmula: M_0 = 900 mg, M_t = 100 mg e P = 1,5. Substituindo na fórmula, que determina a massa em função do tempo decorrido, temos:

$$M_t = M_0\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{1,5}} \qquad \left(\frac{100}{900}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{1,5}}$$

$$100 = 900\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{1,5}} \qquad \left(\frac{1}{9}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{1,5}}$$

$$\left(\frac{1}{9}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{1,5}}$$

Aplicando os logaritmos, então temos:

$$\log\left(\frac{1}{9}\right) = \log\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{1,5}} \qquad -0,954242 \cong \frac{t}{1,5}(-0,30103)$$

$$\log\left(\frac{1}{9}\right) = \frac{t}{1,5}\log\left(\frac{1}{2}\right) \qquad t \cong \frac{-0,954242.1,5}{-0,30103} \cong 4,75$$

Portanto, diferentemente da resposta da questão *c*, o tempo máximo decorrido entre a segunda e a terceira dose não pode ser superior a aproximadamente 4,75 horas, para que a concentração não seja inferior a 100 mg.

e) Qual a concentração plasmática máxima que o medicamento pode alcançar sabendo que o indivíduo administrou doses de 100 mg em intervalos de 3 horas?

Solução: Construindo a tabela para as 6 primeiras doses administradas, temos:

dose	Número de meias vidas transcorridos da primeira dose										
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
1	**100**	50	25	12,5	6,25	3,12	1,56	0,78	0,39	0,19	0,09
2			**100**	50	25	12,5	6,25	3,125	1,56	0,78	0,39
3					**100**	50	25	12,5	6,25	3,125	1,56
4							**100**	**50**	25	12,5	6,25
5									**100**	50	25
6											**100**
Total	100	50	125	62,5	131,2	65,6	132,81	**66,40**	**133,2**	**66,59**	**13,29**

A soma da última coluna representa a concentração após a administração de 6 doses do medicamento ou 10 meias-vidas.

É fácil constatar que se o tratamento de prolongar indefinidamente a concentração após *n* administrações corresponde a uma PG infinita de razão 1/4 e a_1 = massa de cada uma das doses administrada.

Usando a fórmula para a soma dos termos de uma PG infinita, temos:

$$S_n = \frac{100}{1-\left(\frac{1}{4}\right)} = \frac{100}{\frac{3}{4}} = \frac{400}{3}$$

Logo, a concentração plasmática máxima do medicamento tende a 400/3 mg.

3.2.3 Obtendo Raízes De Um Número Real Positivo

No capítulo 2 apresentamos o método de Newton para obter raízes de uma função *p*. Veremos agora que este raciocínio pode ser aplicado para encontrarmos raízes de um número real positivo qualquer. Veja os exemplos a seguir:

Atividade 04: Obtenha um valor aproximado para $\sqrt{8}$ com exatidão de 4 algarismos nas casas decimais.

Solução: Encontrar o valor de $\sqrt{8}$ equivale a resolver a equação $x^2 - 8 = 0.$ Vamos obter via Método de Newton a recorrência associada à equação $x^2 - 8 = 0$. Usando a fórmula geral, temos:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{p(x_n)}{p'(x_n)}$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x^2 - 8}{2x}$$

Sabemos que $\sqrt{8} < \sqrt{9} = 3$, logo $\sqrt{8} < 3$. De acordo com o Método de Newton, se considerarmos $x_0 = 3$, a sequência produzida pela recorrência (1) tenderá a raiz da equação $x^2 - 8 = 0$, ou seja, ao valor de $\sqrt{8}$. É importante destacar que o valor atribuído a x_0 poderia ser qualquer número Real, nas proximidades de $\sqrt{8}$. Todavia, ao atribuirmos a x_0 um valor inteiro imediatamente maior ou menor que a raiz do radical, reduzimos significativamente o número de iterações necessárias para alcançarmos a aproximação exigida pelo enunciado do problema, polpando trabalho.

Vamos agora encontrar alguns elementos da sequência.

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x^2 - 8}{2x} \quad \text{onde } x_0 = 3$$

$$x_1 = 3 - \frac{3^2 - 8}{2.3} \cong 2{,}833333$$

$$x_2 = 2{,}833333 - \frac{(2{,}833333)^2 - 8}{2(2{,}833333)} \cong 2{,}828431$$

$$x_3 = 2{,}828431 - \frac{(2{,}828431)^2 - 8}{2(2{,}828431)} \cong 2{,}828427$$

Assim, após a terceira iteração, podemos deduzir que a sequência estabiliza-se em 2,8284..., alcançando assim a aproximação exigida pelo enunciado.

Atividade 05: Obtenha um valor aproximado para $\sqrt[3]{10}$ com exatidão de 4 algarismos nas casa decimais.

Solução: Encontrar o valor de $\sqrt[3]{10}$ equivale a resolver a equação $x^3 - 10 = 0$. Vamos obter via Método de Newton a recorrência associada a tal equação.

Usado a fórmula geral, temos:

$$x_{n+1} = x_n \frac{p(x_n)}{p'(x_n)}$$

$$x_{n+1} = x_n \frac{x^3 - 10}{3x^2} \quad (1)$$

Sabemos que 2 = $\sqrt[3]{8}$ < $\sqrt[3]{10}$, logo 2 < $\sqrt[3]{10}$. De acordo com o Método de Newton, se considerarmos x_0 = 2, a sequência produzida pela recorrência (1) tenderá a raiz da equação $x^3 - 10 = 0$, ou seja, ao valor de $\sqrt[3]{10}$. Vamos agora encontrar alguns elementos da sequência.

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x^3 - 10}{3x^2} \quad \text{onde } x_0 = 2$$

$$x_1 = 2 - \frac{2^3 - 10}{3(2)^2} \cong 2 - (-0{,}166666) = 2{,}166666$$

$$x_2 = 2{,}166666 - \frac{(2{,}166666)^3 - 10}{3(2{,}166666)^2} \cong 2{,}1545036$$

$$x_3 = 2{,}1545036 - \frac{(2{,}1545036)^3 - 10}{3(2{,}1545036)^2} \cong 2{,}1544346$$

$$x_4 = 2{,}1544346 - \frac{(2{,}1544346)^3 - 10}{3(2{,}1544346)^2} \cong 2{,}1544346$$

Portanto, após a quarta iteração, podemos deduzir que a sequência estabiliza-se em 2,1544..., alcançando assim a aproximação exigida pelo enunciado.

3.2.4 Situações Problema Envolvendo Dinâmica Populacional

Atividade 6: Considere a seguinte situação: Em uma determinada região do Brasil há duas cidades visinhas A e B. Atualmente a cidade A possui 60 mil habitantes e a cidade B possui 30 mil habitantes. Sabe-se que a cada ano, 20% da população de A migra para B, e 10% da população de B migra para A. Queremos fazer um estudo ingênuo das populações de A e B no decorrer dos anos. Para simplificar o problema, desconsideramos outras variáveis, tais como as taxas de mortalidade e natalidade das populações de ambas as cidades.

Resova as seguintes questões:

a) Represente a situação problema através de um sistema de equações de recorrência.

Solução: Representaremos as populações de A e B no período *n* respectivamente por x_n e y_n.

Assim x_0 e y_0 representam respectivamente as populações atuais de A e B, x_1 e y_1 representam as populações de A e B decorrido um ano, e assim sucessivamente.

Considerando as taxas de migração expostas no enunciado do problema, podemos escrever x_1 e y_1 respectivamente em função de x_0 e y_0. Assim temos:

$x_1 = (x_0 – 0{,}2x_0) + 0{,}1y_0$ $\qquad$ $y_1 = (y_0 – 0{,}1y_0) + 0{,}2x_0$

$x_1 = 0{,}8x_0 + 0{,}1y_0$ $\qquad$ $y_1 = 0{,}2x_0 + 0{,}9y_0$

De onde deduzimos que:

$$x_n = 0{,}8x_{n-1} + 0{,}1y_{n-1} \quad \text{e} \quad y_n = 0{,}2x_{n-1} + 0{,}9y_{n-1}$$

Logo, temos um sistema de equações de recorrência lineares de ordem 2 x 2 dado por:

$$\begin{cases} x_n = 0{,}8x_{n-1} + 0{,}1y_{n-1} \\ y_n = 0{,}2x_{n-1} + 0{,}9y_{n-1} \text{ onde } x_0 = 60.000 \text{ e } y_0 = 30.000 \end{cases}$$

b) Resolva o sistema de equações de recorrência definido na questão *a,* utilizando os conceitos de autovalor e autovetor de uma matriz quadrada.

Solução: Tomando o sistema:

$$\begin{cases} x_n = 0{,}8x_{n-1} + 0{,}1y_{n-1} \\ y_n = 0{,}2x_{n-1} + 0{,}9y_{n-1} \text{ onde } x_0 = 60.000 \text{ e } y_0 = 30.000 \end{cases}$$

Vemos que a matriz definida pelos coeficientes das duas equações é:

$M = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}9 \end{pmatrix}$, cujo polinômio característico é dado pela fórmula:

$$P(\lambda) = \det\begin{pmatrix} 0{,}8-\lambda & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}9-\lambda \end{pmatrix} = (0{,}8 - \lambda)(0{,}9 - \lambda) - (0{,}2)(0{,}1), \text{ logo:}$$

$P(\lambda) = \lambda^2 - 1{,}7\lambda + 0{,}7 = 0$, cujas as raízes são $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 0{,}7$.

As raízes do polinômio correspondem aos *autovalores* da matriz *M*. Devemos agora encontrar os *autovetores* $\vec{v}$ e $\vec{u}$ de M relativos aos autovalores obtidos.

Para encontrarmos o vetor $\vec{v}$, devemos substituir $\lambda_1 = 1$ na igualdade abaixo:

$$\begin{pmatrix} 0{,}8-\lambda & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}9-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0{,}8-1 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}9-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -0{,}2 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & -0{,}1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Multiplicando as matrizes do primeiro membro da última igualdade, chegamos ao sistema:

$$\begin{cases} -0{,}2v_1 + 0{,}1v_2 = 0 \\ 0{,}2v_1 - 0{,}1v_2 = 0 \end{cases} \rightarrow 2v_1 = v_2$$

Logo:

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ 2v_1 \end{pmatrix} = v_1\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \text{ com } v_1 \in R.$$

Portanto $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ é um possível valor para o vetor *v*.

Para encontrarmos o vetor *u* devemos substituir $\lambda_2 = 0{,}7$ na igualdade abaixo:

$$\begin{pmatrix} 0{,}8-\lambda & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}9-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0{,}8-0{,}7 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}9-0{,}7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Multiplicando as matrizes do primeiro membro da igualdade, chegamos ao sistema:

$$\begin{cases} 0{,}1u_1 + 0{,}1u_2 = 0 \\ 0{,}2u_1 + 0{,}2u_2 = 0 \end{cases} \rightarrow u_1 = -u_2$$

Logo

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -u_2 \\ u_2 \end{pmatrix} = u_2\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ com } u_1 \in R.$$

Portanto $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ é um possível valor para o vetor *u*.

Substituindo *v* e *u* e os valores de λ na solução geral do sistema, obtemos:

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = C_1\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}1^n + C_2\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}(0{,}7)^n$$

Substituindo as condições iniciais $x_0 = 60.000$ e $y_0 = 30.000$ na solução geral, temos:

$$\begin{pmatrix} 60.000 \\ 30.000 \end{pmatrix} = C_1\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}1^0 + C_2\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}(0{,}7)^0$$

$$\begin{pmatrix} 60.000 \\ 30.000 \end{pmatrix} = C_1\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Logo, temos o sistema:

$$\begin{cases} 60.000 = C_1 - C_2 \\ 30.000 = 2C_1 + C_2 \end{cases}$$

Somando as duas equações termo a termo, então temos:

$$90.000 = 3\,C_1 \quad \rightarrow \quad C_1 = 30.000$$

Substituindo $C_1 = 30.000$ na primeira equação do sistema acima, temos:

$$60.000 = 30.000 - C_2$$

$$C_2 = -\,30.000$$

Portanto, a solução do sistema é:

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = 30.000\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} 1^n - 30.000\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}(0,7)^n$$

Podemos decompor a solução obtida, oferecendo separadamente as equações que modelam a evolução das populações das cidades A e B.

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = 30.000\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} 1^n - 30.000\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}(0,7)^n$$

$x_n = 30.000(1)1^n - 30.000(-1)(0,7)^n$

$x_n = 30.000 + 30.000(0,7)^n$ equação que modela a população de A.

$y_n = 30.000(2)1^n - 30.000(1)(0,7)^n$

$y_n = 60.000 - 30.000(0,7)^n$ equação que modela a população de B.

c) Decorridos 5 anos, quais serão as populações de A e B ?

Solução: Basta calcularmos x_5 e y_5 usando as equações que modelam respectivamente a evolução das populações de A e B:

População de A decorridos 5 anos:

$$x_n = 30.000 + 30.000(0,7)^n$$

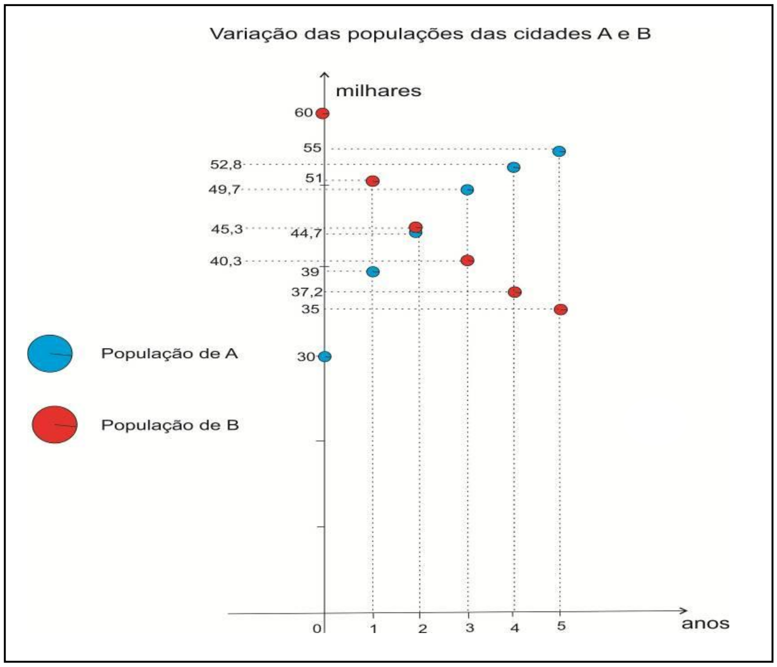
$$x_5 = 30.000 + 30.000(0,7)^5 \cong 35.042 \text{ pessoas.}$$

População de B decorridos 5 anos:

$$y_n = 60.000 - 30.000(0,7)^n$$

$$y_5 = 60.000 - 30.000(0,7)^5 \cong 54.958 \text{ pessoas.}$$

d) Esboce o gráfico das duas equações em um mesmo plano cartesiano, decorridos 5 anos.



3.3: Evolução das populações das cidades A e B.

e) Utilizando a planilha de cálculo do Excel, tome as soluções das duas equações de recorrências e obtenham os trinta primeiros elementos das sequências que dão a evolução das populações das cidades A e B. Verifique se as sequências são convergentes ou divergentes. No caso de serem convergentes, é possível determinar um limite?

Solução: Construindo a tabela para os primeiros trinta meses, então temos:

População de A em milhares		População de B em milhares	
ano	população		população
0	60	0	30
1	51	1	39
2	44,7	2	45,3
3	40,29	3	49,71
4	37,203	4	52,797
5	35,0421	5	54,9579
6	33,52947	6	56,47053
7	32,47063	7	57,52937
8	31,72944	8	58,27056
9	31,21061	9	58,78939
10	30,84743	10	59,15257
11	30,5932	11	59,4068
12	30,41524	12	59,58476
13	30,29067	13	59,70933
14	30,20347	14	59,79653
15	30,14243	15	59,85757

População de A em milhares		População de B em milhares	
ano	população		população
16	30,0997	16	59,9003
17	30,06979	17	59,93021
18	30,04885	18	59,95115
19	30,0342	19	59,9658
20	30,02394	20	59,97606
21	30,01676	21	59,98324
22	30,01173	22	59,98827
23	30,00821	23	59,99179
24	30,00575	24	59,99425
25	30,00402	25	59,99598
26	30,00282	26	59,99718
27	30,00197	27	59,99803
28	30,00138	28	59,99862
29	30,00097	29	59,99903
30	30,00068	30	59,99932

Concluímos que as sequências são convergentes, sendo que a sequência que modela a evolução da população de A converge para 30.000 habitantes, enquanto que a sequência que modela a evolução da população de B converge para 60.000 habitantes.

Atividade 7: Considere a seguinte situação: Em um vilarejo moram 500 habitantes. 4 moradores, após participarem de uma excursão, adquiram uma doença contagiosa e incurável, porém não sintomática nos primeiros meses após a aquisição do agente patológico. Considere o número de habitantes constante (sem mortes, nascimentos ou migrações); que a cada mês, todas as pessoas infectadas entram em contato com os demais habitantes sadios; que o vírus é transmitido pelo ar e que nenhum morador é imune à doença. Considere também que a taxa de transmissão da doença é de 0,3% ao mês, ou seja, do total de contatos possíveis entre os infectados e as pessoas sadias, apenas em 0,3% deles ocorre a transmissão da doença.

Utilizando os conceitos de recorrência, faça um estudo discreto da situação problema, resolvendo as seguintes questões:

a) Represente a situação através de um sistema de equações de diferenças:

Solução: Representaremos as populações de pessoas sadias e infectadas no período *n* respectivamente por x_n e y_n. Assim x_0 e y_0 representam as populações atuais de pessoas sadias e infectadas, x_1 e y_1 representam as respectivas populações decorrido um mês, x_2 e y_2 representam as respectivas populações decorridos dois meses e assim sucessivamente.

Considerando a taxa de transmissão da doença exposta no enunciado do problema, podemos escrever x_1 e y_1 respectivamente em função de x_0 e y_0. Assim temos $x_1 = x_0 - 0{,}003(x_0y_0)$ e $x_1 = y_0 + 0{,}003(x_0y_0)$. Note que o produto x_0y_0 representa o número de contatos possíveis entre infectados e não infectados.

Assim temos um sistema não linear de ordem dois dado por:

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n - 0{,}003(x_ny_n) \\ y_{n+1} = y_n + 0{,}003(x_ny_n), \quad \text{onde } x_0 = 496 \text{ e } y_0 = 4 \end{cases}$$

Um sistema é dito não linear se pelo menos uma de suas equações for não linear. Observe que as duas equações do sistema são não lineares, pois possuem o termo cruzado x_0y_0, que representa o total de contatos possíveis entre infectados e não infectados (princípio multiplicativo).

b) Construa uma tabela, utilizando uma planilha eletrônica de cálculo, apresentando a evolução da população de pessoas sadias e infectados nos 7 primeiros meses. Que conclusões podemos chegar em relação à evolução das duas populações?

Solução: Construindo a tabela, então temos:

Evolução das Populações		
período	x_n	y_n
x_0	496	4
x_1	490,048	9,952
x_2	475,4171	24,58287
x_3	440,3558	59,64423
x_4	361,5617	138,4383
x_5	211,3998	288,6002
x_6	28,36972	471,6303
x_7	-11,7703	511,7703

A tabela permite inferir que entre o sexto e o sétimo mês toda a população estará infectada pelo agente patológico. Os valores negativos e os valores superiores a 500, expressos no sétimo mês são incompatíveis com o enunciado do problema, não possuindo significado prático.

c) Considere agora que a doença seja curável e que a cada mês, 70% dos infectados do mês anterior são curados. Modele novamente o problema, partindo do sistema inicial e incluindo a condição citada acima. Construa novamente uma tabela, utilizando uma planilha eletrônica, e analise a evolução de cada uma das populações no decorrer de dois anos.

Solução: Partindo do sistema inicial e incluindo a nova condição temos:

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n - 0{,}003(x_n y_n), \\ y_{n+1} = y_n + 0{,}003(x_n y_n)\text{ , onde } x_0 = 496 \text{ e } y_0 = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n - 0{,}003(x_n y_n) + 0{,}7y_n \\ y_{n+1} = y_n + 0{,}003(x_n y_n) - 0{,}7y_n\text{ , onde } x_0 = 496 \text{ e } y_0 = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n - 0{,}003(x_n y_n) + 0{,}7y_n \\ y_{n+1} = 0{,}3y_n + 0{,}003(x_n y_n), \text{ onde } x_0 = 496 \ \text{ e } \ y_0 = 4 \end{cases}$$

Construindo a tabela, então temos:

Evolução das Populações			Evolução das Populações		
período	x_n	y_n	Peíodo	x_n	y_n
x_0	496	4	x_{13}	267,2942	232,7058
x_1	493,248	6,752	x_{14}	266,8561	233,1439
x_2	488,6584	11,34163	x_{15}	266,7236	233,2764
x_3	481,1051	18,89488	x_{16}	266,6838	233,3162
x_4	468,9498	31,05024	x_{17}	266,6718	233,3282
x_5	450,1069	49,89306	x_{18}	266,6682	233,3318
x_6	422,6498	77,35024	x_{19}	266,6671	233,3329
x_7	386,4538	113,5462	x_{20}	266,6668	233,3332
x_8	345,6496	154,3504	x_{21}	266,6667	233,3333
x_9	309,0765	190,9235	x_{22}	266,6667	233,3333
x_{10}	284,7854	215,2146	x_{23}	266,6667	233,3333
x_{11}	273,0871	226,9129	x_{24}	266,6667	233,3333
x_{12}	268,7165	231,2835			

Podemos concluir que a partir do 14º mês as populações de pessoas sadias e infectadas se estabilizam aproximadamente entre 267 e 233 indivíduos respectivamente.

Atividade 8: As chinchilas são animais mamíferos cujas unidades familiares são formadas por seis fêmeas e um macho. A vida reprodutiva das chinchilas inicia-se aos oito meses de idade e pode durar até dez anos. As chinchilas têm em média, duas ninhadas de dois filhotes por ano, porém elas podem ter de um a quatro filhotes por ninhada. A gestação é de cento e onze dias. A fêmea entra regularmente no cio de vinte e oito dias em vinte oito dias no inverno, tendo uma variação no verão, cujo intervalo torna-se maior por causa do calor.

O animal se torna adulto quando alcança os oito meses de idade, estando pronto para o abate. A pele possui de oitenta a cento e vinte pelos por folículo piloso, sendo que cada fibra chega a ser vinte vezes mais fina que um fio de cabelo humano. A pele é bastante densa e leve, por isso é cara e apreciada pelo mercado internacional. Resolva a seguinte questão relacionada ao tema: Qual é a previsão do crescimento da população de chinchilas, com o passar do tempo, se a cada parto nascem sempre uma fêmea e um macho?

Solução: Consideremos que um criador de chinchilas adquiriu um casal adulto de chinchilas. Vamos representar em uma tabela, a evolução da população após 20 meses. Na tabela representaremos cada casal por uma mesma letra minúscula. Partimos inicialmente de um casal adulto, o qual foi representado pela letra a:

meses	Filhotes (casais)	Jovens (casais)	Adultos (casais)	Total de indivíduos
P_0 = 0 meses			a	2
P_1 = 4 meses	b		a	4
P_2 = 8 meses	c	b	a	6
P_3 = 12 meses	d, e	c	a, b	10
P_4 = 16 meses	f, g, h	d, e	a, b, c	16
P_5 = 20 meses	f, g, h, i, j	f, g, h	a, b, c, d,e	26

De um modo geral temos o seguinte modelo matemático para o número de pares de chinchilas:

$$P_n = P_{n-1} + P_{n-2} \text{ ou } P_{n+2} = P_{n+1} + P_n$$

Temos uma equação de recorrência linear de 2ª ordem, onde *n* é o tempo medido de quatro em quatro meses. Observe que tal recorrência gera a *sequência de Fibonacci dobrado*.

3.2.5 Poluição Em Sistemas Hídricos

Atividade 09: Diariamente, às sete horas da manhã, uma indústria lança em um lago A, de uma única vez, 2000 mil litros de água contento 10 Kg de um determinado poluente. No decorrer do dia aproximadamente 1800 litros de água escoam do lago A para um segundo lago, o qual chamaremos de lago B, conduzindo para tal lago 30% da concentração do referido poluente existente no lago A, até então. Concomitantemente, uma quantidade de 1700 litros de água do lago B escoa para uma ribeirão, contendo nesta, uma concentração de poluente equivalente à 20% da concentração que havia em B no dia anterior. A diferença do volume de água escoado de A para B, e de B para o ribeirão, é decorrência do processo de evaporação e será desconsiderada na modelagem do problema.

Com base no enunciado resolva as seguintes questões:

a) Represente a situação problema através de um sistema de equações de recorrências e resolva-o.

Solução: Representaremos as concentrações do poluente existente nos lagos A e B no período *n*, respectivamente por x_n e y_n. Assim x_0 e y_0 representam respectivamente a concentração do poluente nos lagos A e B imediatamente após o primeiro lançamento, x_1 e y_1 representam a concentração de poluente nos lagos A e B imediatamente após o segundo lançamento, e assim por diante. Logo temos:

$x_0 = 10$ $\qquad$ $y_0 = 0$

$x_1 = 0,7x_0 + 10$ $\qquad$ $y_1 = 0,3x_0 - 0,2y_0$

$x_2 = 0,7x_1 + 10$ $\qquad$ $y_2 = 0,3x_1 - 0,2y_1$

Assim, temos um sistema de equações de diferenças lineares de ordem 2 x 2 dado por:

$$\begin{cases} x_{n+1} = 0,7x_n + 10 \\ y_{n+1} = 0,3x_n - 0,2y_n \end{cases}$$

Para resolver o sistema, notemos que a sua primeira equação não depende de y_n, mas apenas de x_n. Logo, a equação é uma recorrência linear de primeira ordem com termo independente e coeficientes constantes da forma $x_{n+1} = ax_n + b$.

Logo, podemos resolvê-la utilizando a fórmula

$$x_n = a^n x_0 + b\frac{a^n - 1}{a - 1}$$

Comparando a recorrência com a fórmula geral $x_{n+1} = ax_n + b$, vemos que $a = 0,7$ e $b = 10$. Aplicando a fórmula da solução geral, então temos:

$$x_n = a^n x_0 + b\frac{a^n - 1}{a - 1}$$

$$x_n = 0,7^n(10) + 10\frac{0,7^n - 1}{0,7 - 1}$$

$$x_n = 0,7^n(10) + \frac{10(0,7^n) - 10}{-0,3}$$

$$x_n = 0{,}7^n(10) - \left(\frac{100}{3}\right)(0{,}7)^n + \frac{100}{3}$$

$$x_n = -\left(\frac{70}{3}\right)(0{,}7)^n + \frac{100}{3}$$

Substituindo o resultado na segunda equação, então temos:

$$y_{n+1} = 0{,}3\left[-\left(\frac{70}{3}\right)(0{,}7)^n + \frac{100}{3}\right] - 0{,}2\, y_n, \text{ com } y_1 = 0$$

$$y_1 = 0{,}3\left[-\left(\frac{70}{3}\right)(0{,}7)^0 + \frac{100}{3}\right] - 0{,}2(0) = 0{,}3\left[-\left(\frac{70}{3}\right)(0{,}7)^0 + \frac{100}{3}\right]$$

$$y_2 = 0{,}3\left[-\left(\frac{70}{3}\right)(0{,}7)^1 + \frac{100}{3}\right] - 0{,}2(0{,}3)\left[-\left(\frac{70}{3}\right)(0{,}7)^0 + \frac{100}{3}\right]$$

$$y_3 = 0{,}3\left[-\left(\frac{70}{3}\right)(0{,}7)^2 + \frac{100}{3}\right] - 0{,}2\left\{0{,}3\left[-\left(\frac{70}{3}\right)(0{,}7)^1 + \frac{100}{3}\right] - 0{,}2(0{,}3)\left[-\left(\frac{70}{3}\right)(0{,}7)^0 + \frac{100}{3}\right]\right\}$$

$$y_3 = 0{,}3\left[-\left(\frac{70}{3}\right)(0{,}7)^2 + \frac{100}{3}\right] - 0{,}2(0{,}3)\left[-\left(\frac{70}{3}\right)(0{,}7)^1 + \frac{100}{3}\right] + 0{,}2^2(0{,}3)\left[-\left(\frac{70}{3}\right)(0{,}7)^0 + \frac{100}{3}\right]$$

De onde concluímos que:

$$y_{n+1} = \sum_{i=1}^{n+1}(-0{,}2)^{i-1}(0{,}3)\left[-\left(\frac{70}{3}\right)0{,}7^{n+1-i} + \frac{100}{3}\right]$$

b) Utilizando uma planilha de cálculo, tome as soluções das duas equações de recorrências e obtenha os dezoito primeiros elementos das sequências que dão a evolução das concentrações do poluente nos lagos A e B. Verifique se as sequências são convergentes ou divergentes. No caso de serem convergentes, é possível determinar um limite?

Solução: Construindo a tabela para os primeiros dezoito meses, então temos:

Concentração de A		Concentração de B	
dia	Conc. em Kg	dia	Conc. em Kg
1	10	1	0
2	17	2	3
3	21,9	3	4,5
4	25,33	4	5,67
5	27,731	5	6,465
6	29,4117	6	7,0263
7	30,58819	7	7,41825
8	31,411733	8	7,692807
9	31,9882131	9	7,8849585

10	32,39174917	10	8,01947223
11	32,67422442	11	8,113630305
12	32,87195709	12	8,179541265
13	33,01036997	13	8,225678875
14	33,10725898	14	8,257975215
15	33,17508128	15	8,28058265
16	33,2225569	16	8,296407855
17	33,25578983	17	8,307485498
18	33,27905288	18	8,315239849

Concluímos que as sequências são convergentes, sendo que a sequência que modela a concentração do poluente do lago A converge para 100/3 Kg e a sequência que modela a evolução da concentração de poluente do lago B converge para 25/3 Kg.

3.2.6 Atividades Envolvendo Fractais Recorrentes

Atividade 10: Georg Cantor 1845-1918), em 1883 publicou um trabalho no qual é construído um conjunto, chamado hoje "Conjunto de Cantor", às vezes "Polvo de Cantor". (Madsen, 2005, p.24).

A construção é feita da seguinte forma:

i) Considerar um segmento de reta;

ii) Dividir o segmento em três partes iguais e eliminar a central;

iii) Repetir a construção 2 em cada segmento e assim sucessivamente e indefinidamente;

Veja a construção abaixo:

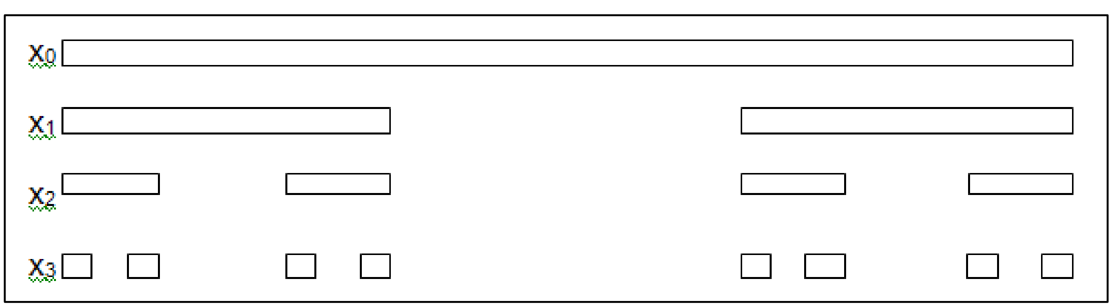


Figura 3.4: Conjunto de Cantor

Considerando o comprimento do segmento inicial x_0 igual a 8 cm, resolva as seguintes questões:

a) Obtenha o comprimento de cada um dos segmentos da 3ª iteração (x_3).

Solução: Observe que o comprimento de cada um dos segmentos de uma fila é igual a um terço do comprimento dos segmentos da fila anterior. Logo a sequência que dá o comprimento de cada um dos segmentos das *n* filas pode ser obtido através da recorrência $x_{n+1} = \frac{x_n}{3}$ onde $x_0 = 8$. Iterando a recorrência 3 vezes, então temos:

$$x_0 = 8 \qquad x_2 = \frac{\frac{8}{3}}{3} = \frac{8}{9}$$

$$x_1 = \frac{8}{3} \qquad x_3 = \frac{\frac{8}{9}}{3} = \frac{8}{27}$$

Logo, o comprimento de cada segmento da 3ª iteração é de $\frac{8}{27}$ centímetros.

b) Escreva a equação de recorrência que oferece o número de segmentos de uma dada iteração e resolva-a.

Solução: Note que cada segmento dá origem a outros dois novos, portanto a equação de recorrência que dá o número de segmentos em cada iterada é $x_{n+1} = 2x_n$, onde a condição inicial é $x_0 = 1$, pois temos um único segmento inicial.

Para solucionar a recorrência, iremos expandir sua equação, deduzindo assim a provável solução:

$$x_1 = 2x_0$$
$$x_2 = 2x_1 = 2(2x_0) = 2^2 x_0$$
$$x_3 = 2x_2 = 2(2^2 x_0) = 2^3 x_0$$

Já podemos deduzir que $x_n = 2^n x_0$. Como a condição inicial é $x_0 = 1$, concluímos que a solução da recorrência é $x_n = 2^n$.

Utilizaremos agora o *Princípio da Indução Matemática* para provar a validade da solução para todo natural *n.*

Prova: Primeiro tomamos a fórmula $x_n = 2^n$ e verificamos sua validade para $x = 0$.

$$x_0 = 2^0 = 1$$

Observe que P(0) é verdadeira.

Suponhamos agora que, para algum *n* natural, P(n) seja verdadeira, ou seja, $x_n = 2^n$.

Queremos provar que P(n + 1) é verdadeira, logo devemos ter $x_{n+1} = 2^{n+1}$

Tomando a igualdade $x_n = 2^n$ (que por hipótese é verdadeira) e multiplicando ambos os termos por 2, então temos:

$$x_n = 2^{n-1}$$

$$2x_n = 2 \times 2^n$$

$$2x_n = 2^{n+1}$$

Mas pela recorrência, temos que $x_{n+1} = 2x_n$ logo:

$$x_{n+1} = 2^{n+1}$$

Isso mostra que P(n + 1) é verdadeira, toda vez que P(n) é verdadeira. Pelo *Princípio da Indução Matemática*, a fórmula é válida para todo número natural *n*.

c) Qual a relação que oferece, em função do número *n* de iterações, o número total de segmentos formados até a n-ésima iteração?

Solução: De início temos 1 segmento.

A primeira iterada dá origem a mais dois segmentos, logo temos um total de 1 + 2 = 3 segmentos.

- A segunda iterada dá origem a mais quatro segmentos, logo temos um total de 1 + 2 + 4 = 7 segmentos

- A terceira iterada dá origem a mais oito segmentos, logo temos um total de 1 + 2 + 4 + 8 = 15 segmentos.

Podemos deduzir que o total de segmentos após *n* iteradas é igual a soma dos *n+1* elementos de uma PG de razão $q = 2$ e $x_0 = 1$.

Utilizando a fórmula da soma temos de uma PG temos:

$S_n = x_1 \dfrac{q^n - 1}{(q-1)}$, mas como na n-ésima iteração temos *n+1* elementos, visto que a sequência começa em x_0 e não em x_1, então devemos ter:

$S_n = x_0 \dfrac{q^{n+1} - 1}{(q-1)}$, fazendo $x_0 = 1$ e $q = 2$, temos:

$$S_n = 1\frac{2^{n+1} - 1}{(2-1)} \quad \rightarrow \quad S_n = 2^{n+1} - 1$$

A solução pode ser facilmente provada por *Indução Matemática.*

d) Escreva a equação de recorrência que oferece o valor da soma dos comprimentos dos segmentos de uma dada iteração e resolva-a.

Solução: Note que segmento de comprimento *c* dá origem a outros dois segmentos cuja soma dos comprimentos é $2\frac{c}{3} = \frac{2}{3}c$. Portanto a equação de recorrência que dá a soma dos comprimentos dos segmentos de uma dada iteração é:

$x_{n+1} = \frac{2}{3}x_n$, onde a condição inicial é $x_0 = 8$, pois em x_0 temos um único segmento cujo comprimento é 8.

Para solucionar a recorrência, iremos expandir sua equação, deduzindo assim a provável solução:

$$x_1 = \frac{2}{3}x_0$$

$$x_2 = \frac{2}{3}x_1 = \frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}x_0\right) = \left(\frac{2}{3}\right)^2 x_0, \text{ pois } x_1 = \frac{2}{3}x_0$$

$$x_3 = \frac{2}{3}x_2 = \frac{2}{3}\left[\left(\frac{2}{3}\right)^2 x_0\right] = \left(\frac{2}{3}\right)^2 x_0, \text{ pois } x_2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 x_0$$

Já podemos deduzir que $x_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n x_0$. Como a condição inicial é $x_0 = 8$, concluímos que a solução da recorrência é $x_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n 8$.

Utilizaremos agora o *Princípio da Indução Matemática* para provar a validade da solução para todo natural ***n*.**

Prova: Primeiro verificamos a validade da fórmula $x_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n 8$ para *n = 0.*

$$x_0 = \left(\frac{2}{3}\right)^0 8 = 8$$

Observe que P(0) é verdadeira.

Suponhamos agora que, para algum *n* natural, P(n) seja verdadeira, ou seja, $x_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n 8$. Queremos provar que P(n + 1) é verdadeira, logo devemos ter

$x_{n+1} = \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} 8$. Tomando a igualdade $x_n = \left(\frac{2}{3}\right)^{n} 8$ (que por hipótese é verdadeira) e multiplicando ambos os termos por $\frac{2}{3}$ temos:

$$\frac{2}{3}\, x_n = \frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n} 8$$

$$\frac{2}{3}\, x_n = \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} 8$$

Mas pela recorrência, temos que $x_{n+1} = \frac{2}{3} x_n$, logo:

$$x_{n+1} = \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} 8$$

Isso mostra que P(n + 1) é verdadeira, toda vez que P(n) é verdadeira. Pelo Princípio de Indução Matemática, a fórmula é válida para todo número natural *n*.

e) Qual a relação que oferece em função de *n*, a soma dos comprimentos dos segmentos após *n* iteradas.

Solução: De início temos 1 segmento de 8 cm de comprimento.

- A primeira iterada dá origem a mais dois segmentos com $\frac{8}{3}$ centímetros de comprimento. Logo, temos um comprimento total de 8 + 2 $\frac{8}{3}$ centímetros.

- A segunda iterada dá origem a mais quadro segmentos com $\frac{8}{9}$ centímetros de comprimento. Logo, temos um comprimento total de 8 + 2 $\frac{8}{3}$ + 4 $\frac{8}{9}$ centímetros.

- A terceira iterada dá origem a oito segmentos com $\frac{8}{27}$ centímetros de comprimento. Logo, temos um comprimento total de 8 + 2 $\frac{8}{3}$ + 4 $\frac{8}{9}$ + 8 $\frac{8}{27}$ centímetros.

Representando por C_3 a soma do comprimento dos segmentos após 3 iterada, então temos:

$$C_3 = 8 + 2\,\frac{8}{3} + 4\,\frac{8}{9} + 8\,\frac{8}{27}$$

$$C_3 = 2^0\left(\frac{1}{3}\right)^0 8 + 2^1\left(\frac{1}{3}\right)^1 8 + 2^2\left(\frac{1}{3}\right)^2 8 + 2^3\left(\frac{1}{3}\right)^3 8$$

$$C_3 = \left(\frac{2}{3}\right)^0 8 + \left(\frac{2}{3}\right)^1 8 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 8 + \left(\frac{2}{3}\right)^3 8$$

$$C_3 = 8\left[\left(\frac{2}{3}\right)^0 + \left(\frac{2}{3}\right)^1 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^3\right]$$

Podemos deduzir que a soma dos comprimentos dos segmentos após *n* iterações é igual ao produto de 8 pela soma dos termos de uma PG de *n+1* termos onde $x_0 = 1$ e a razão $q = \frac{2}{3}$. Logo temos

$$C_n = 8\left[\left(\frac{2}{3}\right)^0 + \left(\frac{2}{3}\right)^1 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{2}{3}\right)^n\right]$$

Usando a fórmula da soma dos termos de uma PG temos:

$$C_n = 8\,x_0\,\frac{1-q^{n+1}}{1-q} \rightarrow C_n = (8)1\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{2}{3}}$$

$$C_n = 8\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{\frac{1}{3}} \rightarrow C_n = 24\left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right]$$

Atividade 11: Pouco é conhecido da vida de Helge Von Koch, matemático polonês, que em 1904 e 1906 introduziu uma curva que hoje recebe o seu nome. A curva é construída da seguinte forma: (Madsen, 2005, p.39).

i) Considerar um segmento de reta;

ii) Dividir o segmento em três segmentos iguais, substituindo-os por 4 congruentes, onde o segmento intermediário será substitído por um triângulo equilátero sem a sua base;

iii) Substituir cada um dos segmentos conforme a regra 2, e assim sucessivamente e iterativamente.

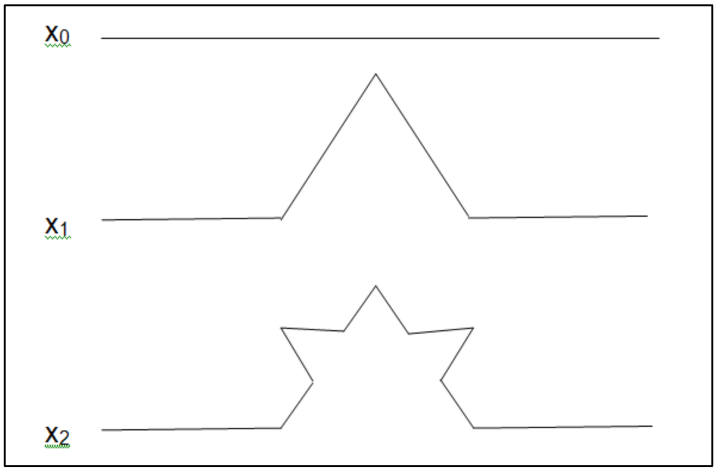


Figura 3.5: Curva de Von Koch.

Considerando o comprimento do segmento inicial x_0 igual a 12 cm, resolva as questões:

a) Obtenha o comprimento de cada um dos segmentos da 5ª iteração (x_5).

Solução: Observe que a sequência, que dá o comprimento de cada um dos segmentos em uma dada iterada, pode ser construída através da equação de recorrência $x_{n+1} = \frac{x_n}{3}$ onde $x_0 = 12$. Usando a recorrência, então temos:

$$x_0 = 12 \qquad x_3 = \frac{\frac{4}{3}}{3} = \frac{4}{9}$$

$$x_1 = \frac{12}{3} = 4 \qquad x_4 = \frac{4}{27}$$

$$x_2 = \frac{4}{3} \qquad x_5 = \frac{4}{81}$$

Logo o comprimento de cada segmento da 5º iterada mede $\frac{4}{81} \cong 0{,}049$ cm.

b) Escreva a equação de recorrência que oferece o número de segmentos após *n* iterações e resolva-a.

Solução: Note que cada segmento dá origem a outros quatro novos segmentos, portanto a equação de recorrência que dá o número de segmentos em cada iteração é $x_{n+1} = 4x_n$, onde a condição inicial é $x_0 = 1$, pois temos um único segmento inicial.

Para solucionar a recorrência, iremos expandir sua equação, deduzindo assim a provável solução:

$$x_1 = 4x_0$$
$$x_2 = 4x_1 = 4(4x_0) = 4^2x_0$$
$$x_3 = 4x_2 = 4(4^2x_0) = 4^3x_0$$

Já podemos deduzir que $x_n = 4^n x_0 = 2^{2n} x_0$. Como a condição inicial é $x_0 = 1$, concluímos que a solução da recorrência é $x_n = 2^{2n}$.

A fórmula pode ser facilmente provada através do *Princípio da Indução Matemática.*

c) Escreva a equação de recorrência que oferece o perímetro da curva após *n* iterações e resolva-a.

Solução: Note que segmento de comprimento *c* dá origem a outros quatro segmentos cuja soma dos comprimentos é $4\frac{c}{3} = \frac{4}{3}c$, portanto a equação de recorrência que dá soma dos comprimentos dos segmentos de uma dada iteração é: $x_{n+1} = \frac{4}{3}x_n$, onde a condição inicial é $x_0 = 12$, pois em x_0 temos um único segmento cujo comprimento é 12 cm.

Para solucionar a recorrência, iremos expandir sua equação, deduzindo assim a provável solução:

$$x_1 = \frac{4}{3}x_0$$
$$x_2 = \frac{4}{3}x_1 = \frac{4}{3}\left(\frac{4}{3}x_0\right) = \left(\frac{4}{3}\right)^2 x_0$$
$$x_3 = \frac{4}{3}x_2 = \frac{4}{3}\left[\left(\frac{4}{3}\right)^2 x_0\right] = \left(\frac{4}{3}\right)^2 x_0$$

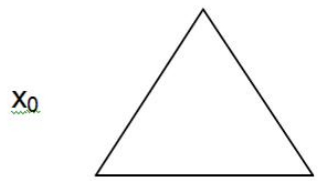
Já podemos deduzir que $x_n = \left(\frac{4}{3}\right)^n x_0$. Como a condição inicial é $x_0 = 12$, concluímos que a solução da recorrência é

$$x_n = \left(\frac{4}{3}\right)^n 12 .$$

Atividade 12: Iniciando com um polígono regular e construindo sobre cada lado a sua curva de Koch, teremos o que se chama de “Ilha de Kock” ou “Floco de Neve”. (Madsen, 2005, p.39).

Em relação a “Ilha de Kock” podemos elaborar as seguintes questões, cuja solução deixamos a cargo do leitor:

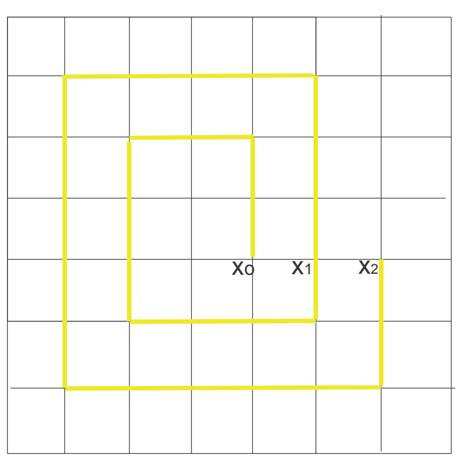
a) Construa a Ilha de Kock a partir do triângulo equilátero abaixo até a 3º iteração.



b) Considerando a medida do lado do triângulo equilátero inicial igual a 9 centímetros, obtenha:

- O comprimento dos segmentos que formam a figura após a 4ª iteração.
- A equação de recorrência que oferece o número de segmentos que forma a figura após *n* iterações, bem como sua solução.
- A equação de recorrência que oferece o perímetro da figura após *n* iterações, bem como sua solução.
- A equação de recorrência que oferece a área da figura após *n* iterações, bem como sua solução.

Atividade 13: Considerando que o lado de cada um dos quadrados da malha a seguir mede 1 (um) centímetro. Obtenha a expressão que dá o perímetro da curva abaixo em função do número *n* de iterações:



Solução: Obtendo o número de lados de quadrados percorridos nas primeiras três iterações, então temos: $x_0 = 0$, $x_1 = 11$, $x_2 = 19$ e $x_3 = 27$. De onde deduzimos, que a partir de x_2, o número x_n de lados de quadrados percorridos na n-ésima iteração é $x_n = x_{n-1} + 8$.

Observamos que a recorrência dá origem a uma Progressão Aritmética onde $x_1 = 11$ e a razão $r = 8$. Logo a solução da recorrência que dá o número de lados de quadrados percorridos em cada iteração, a partir de x_1 é:

$$x_n = x_1 + (n - 1)r$$

$$x_n = 11 + (n - 1)8$$

$$x_n = 3 + 8n$$

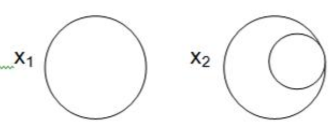
Concluímos que a soma dos lados dos quadrados percorridos após a n-ésima iteração corresponde à soma dos *n* elementos dessa PA.

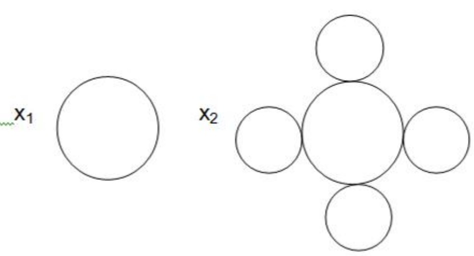
Usando a fórmula da soma dos termos de uma PA temos:

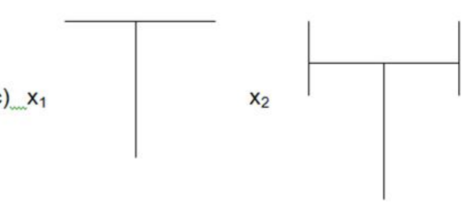
$$S_n = n\frac{a_1 + a_n}{2} = n\frac{11 + (3 + 8n)}{2} = n\frac{14 + 8n}{2} = 4n^2 + 7n$$

Como o comprimento do lado de cada quadrado é igual a 1 (um), concluímos que o perímetro P_n da curva, após *n* iterações è $P_n = \left(4n^2 + 7n\right)$ centímetros

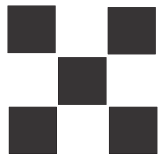
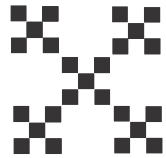
Atividade 14: Em cada esquema abaixo, esboce o próximo passo iterativo:

a)


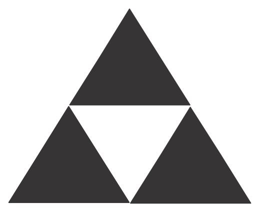
b)


c)


Atividade 15: O fractal seguinte é obtido pela remoção de quatro quadrados de um quadrado maior.

x_0  x_1  x_2 

a) Utilizando o mesmo procedimento, esboce a próxima iterada do triângulo de Waclaw Sierpinski esboçado abaixo:

x_0  x_1 

b) Sabendo que o lado do triângulo inicial (x_0) mede 6 centímetros, encontre a equação de recorrência que dá a área de cada um dos triângulos escuros de uma dada iteração e resolva-a.

c) Encontre a relação que dá o somatório das áreas dos triângulos escuros em função de *n*, sendo *n* a n-ésima iteração. As resoluções ficam a cargo do leitor.

3.3 ATIVIDADES DESENVOLVIDAS EM SALA DE AULA

Foram desenvolvidas algumas atividades para serem aplicadas em sala de aula. As atividades foram desenvolvidas na Escola Estadual Major Otávio Pitaluga – Ensino Médio, localizada na Avenida Amazonas nº 146, Centro de Rondonópolis/MT. A escola funciona nos três períodos, possui um total de 43 turmas, sendo que até a data de 20 de março desde ano, 1253 alunos haviam se matriculado para o ano letivo 2013. A escola recebe alunos provenientes de vários bairros da cidade, portanto as turmas são bastante heterogêneas.

As atividades foram aplicadas na tarde de 20 e 21 de março de 2013. Foram utilizadas duas turmas do período vespertino, 2º B e 2°C. Tais turmas possuíam, até a data das atividades, respectivamente 29 e 25 alunos que frequentavam regularmente as aulas.

3.3.1 A Torre De Hanói

A atividade foi desenvolvida com os alunos do 2º B vespertino, na tarde de 20 de março de 2013, entre 13h10min e 16h45min. Optou-se por uma turma do segundo ano, porque o desenvolvimento satisfatório das atividades exigiria conhecimentos prévios sobre sequências, assunto que na referida escola, costuma ser trabalhado no quarto bimestre do 1° ano.

Participaram da atividade 26 alunos, sendo 15 meninas e 11 meninos, com idade variando entre 15 e 16 anos completos. Os alunos foram divididos em 6 grupos contendo entre quatro e cinco indivíduos. A fim de tornar a atividade mais produtiva, foi pedido a um marceneiro, residente em Rondonópolis/MT, que confeccionasse em madeira e metal um exemplar do jogo.

3.3.1.1 Desenvolvimento da atividade

a) Em um primeiro momento, foi apresentado aos alunos o objetivo da atividade:

A Atividade consiste em transferir os discos para a terceira estaca, usando a segunda como estaca auxiliar. É permitido mover apenas um disco por vez e jamais um disco pode ser colocado sobre um disco de diâmetro menor. Qual a quantidade mínima de movimentos necessários para transferir os n discos para a terceira estaca?

b) Em seguida, foi repassada aos alunos a seguinte questão:

1) Resolva o problema para 1, 2, 3 e 4 discos e construa uma tabela que relacione o número de discos com o número mínimo de movimentos para transferir tais discos para a terceira estaca?

O jogo foi colocado sobre uma mesa, próximo ao quadro negro. Em seguida foi perguntado se algum aluno desejava dar início à atividade, realizando-a para 1 (um) disco. De início, ainda intimidados, apenas um aluno prontificou-se a realizar a tarefa. Para 2 (dois) discos, mais alunos se prontificaram, os quais tiveram a oportunidade de realizar a atividade com relativa facilidade.

A partir de três discos os alunos começaram a ter dificuldades para colocá-los na terceira coluna, gradativamente mais alunos se prontificavam a tentar cumprir a tarefa.

O professor interveio, sugerindo que os alunos realizassem a atividade com 1 e 2 disco novamente, observando a relação entre os dois procedimentos. Três alunos perceberam rapidamente a relação.

Rapidamente a maioria se convenceu de que o procedimento para três discos coinsistiria em repetir o procedimento para dois discos (colocando, entretanto os discos na coluna do meio), transferir o disco maior para a terceira coluna, e repetir o procedimento para dois discos.

Após realizar a tarefa para 3 discos, os alunos realizaram-na para 4 discos sem muitas dificuldades. Depois da tabela construída, os alunos ficaram surpresos com a quantidade mínima de 127 movimentos para transferir 7 discos para a terceira coluna, entretanto todos ficaram convencidos de tal valor.

Antes de proseguir com as atividades, alguns alunos pediram a oportunidade de resolver o problema para 5 discos. Concedida a oportunidade, nenhum dos alunos conseguiu concluir a tarefa utilizando a quantidade mínima de movimentos.

Em seguida foi proposta a seguinte atividade:

2) Represente através de uma lei a relação existente entre a quantidade mínima de movimentos para n e n-1 discos?

Percebendo que os alunos estavam tendo dificuldades para representar a relação, embora a tenham compreendido, foi apresentada algumas sequências obtidas recursivamente, bem como a equação de recorrência referente a cada uma daquelas.

***1, 3, 5, 7, 9*................................** $x_{n+1} = x_n + 2$

***1, 2, 4, 8, 16*..............................** $x_{n+1} = 2x_n$

***1, 2, 5, 14, 41*............................** $x_{n+1} = 3x_n - 1$

Após os comentários acima 13 alunos perceberam de imediato que a relação de recorrência que regia a sequência definida pela quantidade mínima de movimentos era $x_{n+1} = 2x_n + 1$. Após a ajuda dos colegas, os demais alunos também se convenceram da resposta.

Por fim foi proposta a seguinte atividade:

3) Encontre uma fórmula que permita encontrar, em função do número de discos, o número mínimo de movimentos necessários para a transferência daqueles até a terceira coluna.

Foi sugerido que os alunos expandissem a recorrência, iniciando com 1 disco até o número de 5 discos.

$$x_1 = 1$$
$$x_2 = 1 + (1) + 1 = 1 + 2$$
$$x_3 = 1 + 2 + (1) + 1 + 2) = 1 + 2 + 4$$

Após a sugestão, 15 alunos obtiveram os valores para x_4 e x_5, reiterando o procedimento acima.

$$x_4 = 1 + 2 + 4 + (1) + 1 + 2 + 4 = 1 + 2 + 4 + 8$$
$$x_5 = 1 + 2 + 4 + 8 + (1) + 1 + 2 + 4 + 8 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16$$

Seis alunos perceberam de imediato que o número mínimo de movimentos para *n* discos era igual à soma dos *n* primeiros termos de uma PG de razão $q = 2$ e $a_1 = 1$.

No final, todos os grupos chegaram à fórmula $x_n = 2^n - 1$, solução da equação de recorrência $x_{n+1} = 2x_n + 1$.

3.3.2 Trabalhando Com Sequências Obtidas Recursivamente

Participaram da atividade alunos do 2º C vespertino. Assim como na primeira atividade apresentada, optou-se por uma turma do segundo ano, pois o bom desenvolvimento das atividades exigiria conhecimentos prévios sobre sequências, termos gerais e fórmula da soma dos termos. Também foi feita uma revisão sobre o Teorema de Pitágoras e a fórmula para o comprimento de um arco de circunferência.

A atividade foi desenvolvida no dia 21 de março de 2013, entre 13h00min e 16h35min. Participaram da atividade 23 alunos, sendo 13 meninas e 10 meninos com idade variando entre 15 e 16 anos completos.

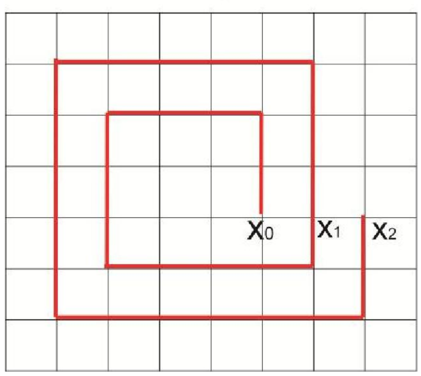
3.3.2.1 Desenvolvimento da atividade

Os alunos foram divididos em 5 grupos de 4 e 5 indivíduos. Foram distribuídos 5 cartões diferentes para cada grupo, numerados de 1 a 5. Cada cartão continha uma curva contínua formada por segmentos ou arcos. Foi proposta a seguinte questão:

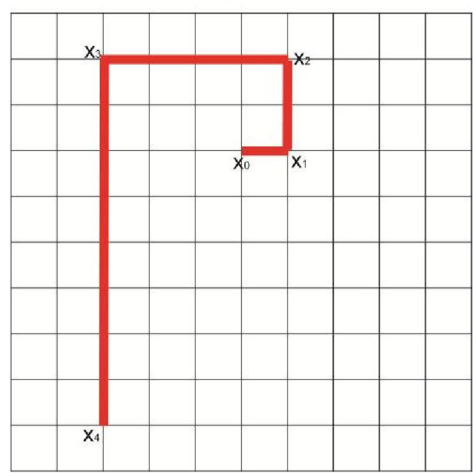
1) *Considerando o lado de cada um dos quadrados igual a 1 (um) centímetro. Obtenha a expressão que dá o perímetro da curva abaixo em função do número n de iterações:*

Segue as fichas que foram utilizadas. A ficha de número 0 (zero) foi resolvida na lousa como exemplo.

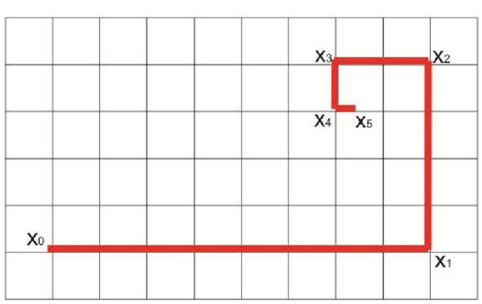
Ficha 0



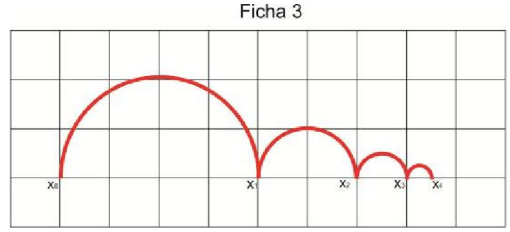
Ficha 1



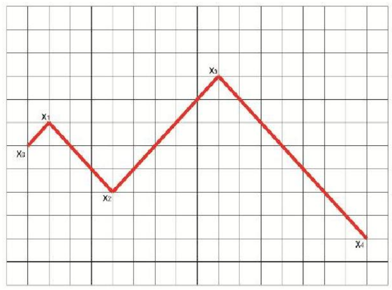
Ficha 2



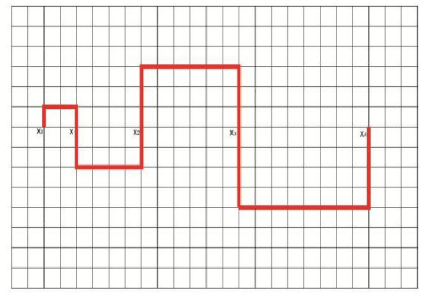
Ficha 3



Ficha 4



Ficha 5



3.3.3 Avaliação das Experiências

A atividade evidenciou a importância de o professor buscar, além da melhor metodologia, a criteriosa seleção dos recursos didáticos a serem utilizados durante a aplicação do conteúdo o qual popõe ensinar. No caso da primeira atividade em análise, a apresentação da réplica manuseável do jogo foi essencial para motivar os alunos. Ficou evidenciado um entusiasmo por parte de toda a sala, frente ao desafio de solucionar o problema proposto. No caso da segunda atividade, ao representar a sequência por uma curva, além de melhorar a visualização da relação existente entre os termos daquela, permitiu a exploração de alguns conceitos básicos de geometria plana.

Com relação aos desafios a serem superados, constatou-se no desenvolvimento de ambas as atividades que a maioria dos alunos apresentou dificuldades com relação à notação a ser utilizada para apresentar os raciocínios e os resultados. O professor também deve se preocupar constantemente em direcionar as etapas da atividade de forma que a mesma não perca o seu foco, diante de entusiasmo dos alunos, no momento em que manusearem os objetos.

Por fim, concluiu-se que o bom desenvolvimento das duas atividades exigiria maior conhecimento dos alunos sobre o conteúdo de sequência, ficando um questionamento a respeito de qual seria o momento mais adequado para aplicar tais atividades: se na fase de assimilação dos conceitos básicos sobre sequências ou como atividades complementares, após os alunos terem assimilado os conhecimentos prévios pertinentes, listados no planejamento.

CONCLUSÃO

Ao longo das últimas décadas, a formação de professores tem merecido um lugar de destaque tanto na esfera nacional quanto na internacional. Os novos desafios que se colocam à educação no século XXI exigem uma atenção redobrada e um contínuo investimento na formação de professores e na investigação nesta área.

No tocante à formação dos professores de matemática, vários são os aspetos a considerar, tendo em conta a exigência do papel do professor nos diferentes contextos profissionais. Sua formação envolve, na verdade, fatores diversificados como, por exemplo:

- O conhecimento matemático do professor;
- O conhecimento do papel do professor e do aluno no processo de ensino/aprendizagem;
- O conhecimento das orientações curriculares;
- A capacidade para planificar e construir recursos para o processo de ensino/aprendizagem;
- Conhecimento dos processos de aprendizagem;
- O desenvolvimento da capacidade para a resolução de problemas, construção de projetos, desenvolvimento dos projetos;
- A capacidade de refletir sobre a sua prática;

Para muitos autores, caberia à própria universidade, em parceria com os órgãos estatais, gerenciar a formação continuada dos professores, garantindo a constante discussão e aprimoramento dos fatores citados acima. Todavia, por vários motivos, entre os quais financeiros e geográficos, a grande maioria dos professores de brasileiros perde o vínculo com a instituição de ensino onde se graduaram. Somado aos programas de capacitação insuficientes, ou mesmo inexistentes, da maioria das secretarias de educação, surge um quadro de isolamento e estagnação dos professores espalhados pelos rincões do Brasil. As consequências desastrosas desse processo são evidenciadas nos exames nacionais e internacionais, aplicados em todos os níveis de ensino.

É esta conjetura que justifica a importância e necessidade de programas de capacitação como o *Profmat.* Sendo um curso semipresencial, o programa pode atender os professores de matemática de diversas localidades de uma região aprimorando a formação sem prejuízo para suas atividades docente. Para a grande maioria dos matriculados, as condições oferecidas pelo programa representaram talvez uma oportunidade única de concluir um curso de mestrado. O programa literalmente “resgatou” os professores da inércia na qual se encontravam, despertando-os para a necessidade de estarem se qualificando continuamente.

Com relação ao trabalho de conclusão de curso, seu desenvolvimente por si só, representou uma excelente oportunidade de aprendizagem para o autor, cuja última produção de um texto acadêmico datava-se de mais de doze anos, no término do curso de especialização.

A redação final do trabalho certamente alcançou um dos seus principais objetivos, definido no projeto do qual se originou: produzir um material introdutório que apresentasse os conceitos básicos sobre recorrências de forma inteligível e detalhada, contendo inúmeros exemplos resolvidos, seções dedicadas às aplicações e sugestões de atividades a serem trabalhadas em sala de aula. Em nenhum momento, procurou-se exaurir um determinado assunto, mas apresentar os conceitos fundamentais de cada tema, respeitando o nível de conhecimento prévio e a capacidade de assimilação do público alvo ao qual se destinou. Espera-se que o material produzido possa ser uma opção de leitura ao colega professor que desejar introduzir o ensino das equações de recorrência em seu planejamento.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BASSANEZI, Rodney C. **Ensino aprendizagem com modelagem matemática**. 3ª ed. São Paulo: São Paulo, 2011.

___________________. **Equações Diferenciais com Aplicações Temas & Modelos**. 1ª ed. Campinas: Gráfica Central da Unicamp, 2012.

____________________; FERRREIRA Jr, W. C. **Equações Diferenciais com Aplicações.** São Paulo: Harbra LTDA, 1988.

BOYER, Carl B. **História da Matemática.** 2ªed. São Paulo: Edgard Blücher, 1996.

DAJOZ, Roger. **Princípios de Ecologia**. trad. Fátima Murad. 7ª ed. Porto Alegre: Artmed, 2005.

Diniz Geraldo L, et al: Equações de diferenças e aplicações. **UFMT – ICET**, Cuiabá, p 2-4.

DINIZ, Geraldo L. **Equações de Diferenças e Sistemas com Aplicações Biológicas.** São Carlos-SP: SPMAC, 2011.

DOMINGUES, Gustavo F, M: Caos em sistemas dinâmicos - um exemplo: **Universidade Federal de Uberlândia - Faculdade de Matemática**;

GERSTING, Judith L. **Fundamentos Matemáticos para a Ciência da Computação.** Rio de Janeiro: LTC, 2004.

LIMA, Elon Lajes; et al. **A Matemática do Ensino Médio : Volume 2**. 6ª ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

OLIVEIRA, Krerley I M; FERNÁNDEZ, Adán J C. **Iniciação à Matemática: um curso com problemas e soluções.** Rio de Janeiro: SBM, 2010.

LIPSCHUTZ S; LIPSON M. **Matemática Discreta.** trad. Heloisa Bauzer Medeiros, 2ª ed. Porto Alegre: Bookman, 2004.

.

MADSEN, Rui B. **Descobrindo a Geomeria Fractal para a Sala de Aula,** 2ª ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2005.

SANTOS, J. Plínio, et al. **Introdução à Análise Combinatória.** Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2008.

SCHEINERMAN, Edward R. **Matemática Discreta: Uma Introdução**. São Paulo: Cengage Learning, 2011.

VIANA, R. L. **Introdução à Dinâmica Não-Linear e Caos.** Departamento de Física, Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2011.