Universidade Federal de Viçosa
Dissertação de Mestrado

Kleber de Almeida Vailante

A desigualdade das médias como ferramenta de resolução de problemas

Florestal
Minas Gerais – Brasil
2019

Kleber de Almeida Vailante

A DESIGUALDADE DAS MÉDIAS COMO FERRAMENTA DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, para obter o título *Magister Scientiae*.

Florestal
Minas Gerais – Brasil
2019

Ficha Catalográfica

Crie o arquivo `ficha_catalografica.pdf`
e ele será automaticamente incluído nessa página.

KLEBER DE ALMEIDA VAILANTE

A DESIGUALDADE DAS MÉDIAS COMO FERRAMENTA DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, para obter o título *Magister Scientiae*.

APROVADA: 08 de fevereiro de 2019.

Fernanda Aparecida Ferreira

Luis Alberto D'Afonseca

Monique Muller Lopes Rocha

Luiz Gustavo Perona Araújo
(Coorientador)

Mehran Sabeti
(Orientador)

Agradecimentos

Primeiramente agradeço a Deus, que me proporcionou vida, saúde e força na produção deste trabalho. Sem Ele na direção, nada seria possível.

Agradeço a minha esposa Júnia, por toda força e incentivo, além da paciência demonstrada, sempre me apoiando e sendo fundamental para a construção desse trabalho.

Agradeço à minha família por todo o apoio, principalmente frente aos grandes problemas enfrentados neste período, me ajudando de forma notória nesta caminhada.

Sou grato ao meu orientador, Professor Mehran Sabeti e ao meu coorientador, Professor Luiz Gustavo Perona por todo apoio e orientação.Também não posso deixar de citar o professor Luis Alberto D'Afonseca, que foi fundamental para a construção dessa dissertação.

À direção da Escola Municipal Valério Ferreira Palhares, representada por Wilson, Sandra, Edivania e Lilian, o meu muito obrigado pelo apoio e compreensão nesse período.

E por fim, meu muito obrigado a todos os amigos da turma do PROFMAT. Todos foram muito importantes em minha trajetória.

Lista de Símbolos

Símbolos e notações utilizadas neste trabalho:

α letra grega Alfa

β letra grega Beta

γ letra grega Gama

δ letra grega Delta

ϵ letra grega Épsilon

θ letra grega Teta

π letra grega Pi

$\geq$ maior que ou igual

$\leq$ menor que ou igual

$=$ igual

$<$ menor que

$>$ maior que

$\Rightarrow$ implica que

$\in$ pertence

$\neq$ diferente

$\forall$ para todo

$\approx$ aproximadamente

$/$ tal que

$\exists$ existe

δ delta

$\sum$ somatório

$\cup$ união

$\lim$ limite

$\cong$ congruente

$\subset$ contido

$\mathbb{N}$ conjunto dos números naturais

$\mathbb{N}^*$ conjunto dos números naturais sem o zero

$\mathbb{R}$ conjunto dos números reais

$\mathbb{Z}$ conjunto dos números inteiros

Lista de Figuras

Resumo

VAILANTE, Kleber de Almeida, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, fevereiro de 2019. **A desigualdade das médias como ferramenta de resolução de problemas**. Orientador: Mehran Sabeti. Coorientador: Luiz Gustavo Perona.

O objetivo deste trabalho é apresentar as médias aritmética, geométrica, harmônica e quadrática, as desigualdades das médias e como elas podem ser aplicadas na resolução de problemas. Uma outra relação que será apresentada é a denominada Média aritmética-geométrica. Durante o curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional-PROFMAT, foi possível perceber como as médias e as desigualdades entre as médias podem auxiliar na resolução de problemas presentes no Ensino Médio e Superior. No que tange ao ensino, apresentamos diversas demonstrações que podem ser aplicadas nos diversos níveis de ensino conforme os documentos oficiais vigentes no Brasil. Apresentaremos diversos problemas e suas respectivas soluções utilizando as desigualdades das médias. Por fim, mostraremos os resultados de uma atividade realizada no Ensino Médio com intuito de verificar a possibilidade de se trabalhar as médias e as desigualdades como um projeto paralelo. Também apresentaremos uma atividade que pode ser aplicada no Ensino Médio com o objetivo de desenvolver conceitos relacionados a sequências de números reais e a Média aritmética-geométrica.

Abstract

VAILANTE, Kleber de Almeida, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, February, 2019. **The inequality of averages as a tool for problem solving**. Adviser: Mehran Sabeti. Co-adviser: Luiz Gustavo Perona.

The goal of this work is to present arithmetic, geometric, harmonic and quadratic averages, as well as the inequalities of the means and how they can be applied in solving problems. During the course of the Professional Master's Degree in Mathematics in National Network-PROFMAT, it was possible to understand how the means and the inequalities among the means can help in the resolution of problems present in High School and Colege. With regard to teaching, we present several demonstrations that can be applied at different levels of education according to the official documents in force in Brazil. We will present several problems and their respective solutions using the inequalities of the means. Another relationship between arithmetic and geometric means is called arithmetic-geometric mean, which will be presented briefly in Chapter 5. Finally, we will show the results of a workshop held in High School in order to verify the possibility of working averages and inequalities as a side project. We will also present a workshop that can be applied in High School with the objective of developing concepts related to sequences of real numbers and arithmetic-geometric mean.

Sumário

1

Introdução

Durante o primeiro ano do curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, na disciplina de Matemática Discreta (MA 12), deparei com a desigualdade das médias e na preparação para o Exame Nacional de Qualificação (ENQ) percebi como ela pôde auxiliar na resolução de muitos problemas, presentes no Ensino Médio e no Ensino Superior. A principal referência bibliográfica adotada na disciplina MA 12 e que foi utilizada como base para a construção do capítulo 2 foi o livro “Matemática Discreta”de Paulo Cezar Pinto Carvalho e Augusto Cezar de Oliveira Morgado [4]. É importante ressaltar que quando falamos de “Resolução de problemas” nesse trabalho, estamos nos referindo à soluções de exercícios/problemas aplicados em diversos contextos e não à metodologia de ensino.

Em MA 12, percebe-se que as médias e as desigualdades permitem resolver problemas de otimização, tanto em funções quanto na geometria. Pesquisando sobre o tema vimos que alguns exercícios envolvendo o “O princípio das Gavetas” e até mesmo problemas que asseguram que uma sequência é monótona poderiam ser resolvidos aplicando as médias e as desigualdades entre tais médias.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) de matemática [15] reforçam a importância de selecionar e utilizar instrumentos de cálculo e medição. O documento explicita a importância do desenvolvimento da seguinte competência: Identificar diferentes formas de quantificar dados numéricos para decidir se a resolução de um problema requer cálculo exato, aproximado, probabilístico ou análise de médias. No Currículo Básico Comum (CBC) de matemática do estado de Minas Gerais [3] também se encontram habilidades relacionadas ao cálculo e análises de médias. Apesar de não indicar em que momento do Ensino Fundamental deve-se desenvolver o ensino das médias, o CBC traz a habilidade: “Resolver problemas que envolvam a média aritmética”. Já no Ensino Médio, as habilidades: “Resolver problemas que envolvam a média aritmética ou ponderada” e “Resolver problemas que envolvam a média geométrica” são sugeridas para serem desenvolvidas ao longo do 1º ano. Contudo, em ambos os documentos não são encontradas habilidades ou inferências no sentido de relacionar e/ou comparar as médias aritmética e geométrica. Os CBC e o PCN também não citam as médias harmônicas e quadráticas diretamente. O documento oficial mais recente que norteia a educação no Brasil no âmbito do Ensino

Fundamental é a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) [6]. A BNCC é um documento que estabelece de forma transparente as sequências de aprendizagens inerentes a que todos os estudantes têm direito. Através dessa Base, as redes particulares e públicas de ensino passam a ter obrigatoriedade de obedecê-la para elaborar ou readequar suas propostas pedagógicas e consequentemente seus currículos. Na BNCC, o ensino de Médias é citado no 7º e 8º anos, entretanto, não há inferência sobre que tipos de Médias devem ser exploradas em cada ano escolar.

O Capítulo 2 da pesquisa contém as definições das médias aritmética, geométrica, quadrática e harmônica, além de exemplos de problemas envolvendo essas médias.

No Capítulo 3, serão expostas as desigualdades entre as médias citadas no Capítulo 2. Nesse capítulo, demonstraremos os Teoremas que relacionam as médias aritmética, geométrica, quadrática e harmônica. Utilizaremos demonstrações com viés geométrico/algébrico e puramente algébrico. Além disso, serão apresentadas algumas importantes desigualdades na resolução de problemas, como a desigualdade Bernoulli, a desigualdade de Cauchy-Schwarz e o Lema de Titu.

No Capítulo 4, serão apresentados problemas algébricos e geométricos que podem ser resolvidos aplicando os teoremas desenvolvidos no Capítulo 3.

O Capítulo 5 apresenta a média aritmética-geométrica, que traz uma outra relação entre essas médias, sua relaçao com sequências monótonas e convergentes. O objetivo é apresentar duas sequências específicas que envolvem as médias aritmética e geométrica. Tais sequências são convergentes e o limite de ambas é conhecido como média aritmética-geométrica.

No Capítulo 6, o último desse trabalho, será exposto uma atividade voltada para o desenvolvimento dos teoremas apresentados no capítulo 3 e para a resolução de problemas iguais e semelhantes aos trabalhados no capítulo 4. Também será apresentada uma segunda atividade que tem como objetivo desenvolver os conceitos e aplicações explicitados no Capítulo 5.

Uma das propostas desse trabalho é mostrar que é possível trabalhar com outras médias (harmônica e quadrática) e com a desigualdade das médias ainda no Ensino Básico de forma paralela e permitir a capacitação dos alunos com objetivo de resolver problemas, tanto do Ensino Médio, quanto de olimpíadas e outras competições. Esperamos que essa dissertação possa contribuir para que novos estudantes do PROFMAT, durante o curso do mestrado, tenham base e ideias para resolver os exercícios propostos nas disciplinas e para alunos do Ensino Médio entenderem como resolver alguns problemas geométricos e algébricos como, por exemplo, encontrar máximos e mínimos de algumas funções apresentadas durante a última fase do Ensino Básico.

2

Médias

Neste capítulo, definiremos as médias aritmética, geométrica, harmônica e geométrica. Além disso, apresentaremos alguns exemplos e um teorema envolvendo a média aritmética simples. As bases para a construção desse capítulo foram a dissertação de Pereira [18] e o livro de Carvalho e Morgardo [4].

Antes de mostrarmos algumas demonstrações e relações entres certas médias e suas aplicações na resolução de problemas, apresentaremos ao leitor as definições das médias que serão utilizadas no decorrer desse trabalho.

Certo valor que substitui todos os elementos de uma lista de números sem que a natureza dessa lista seja alterada é denominado de média.

2.1 Média Aritmética Simples

Definição 2.1: A média aritmética simples, denotada por MA, da coleção de n números $x_1, \ldots, x_n$, com $n > 1$, é definida por:

$$\mathrm{MA} = \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}$$

Exemplo 2.1.1: Certo atleta percorreu 6 km, 8 km, 7,5 km e 6,5 km em quatro dias de treino. Em média, esse atleta percorreu

$$\frac{6 + 8 + 7{,}5 + 6{,}5}{4} = 7$$

quilômetros por dia em seu treinamento.

Exemplo 2.1.2: Sejam $x_1, ..., x_n$, com $n > 1$, números reais não negativos cuja média aritmética é dada por A. Retira-se o elemento x_k dos n números, com $1 < k < n$ tal que $x_k < A$. Se a média aritmética dos $n - 1$ números restantes é dada por L, mostraremos que $L > A$.

Demonstração. A média aritmética dos n números é dada por

$$A = \frac{x_1 + \cdots + x_k + \cdots + x_n}{n}$$

portanto

$$x_1 + \cdots + x_k + \cdots + x_n = nA \tag{2.1}$$

Ao retirar o termo x_k, a média aritmética dos $n-1$ números restantes é dada por

$$L = \frac{x_1 + \cdots + x_{k-1} + x_{k+1} + \cdots + x_n}{n-1},$$

portanto

$$x_1 + \cdots + x_n = (n-1)L \tag{2.2}$$

Efetuando a subtração entre as equações (2.1) e (2.2) temos

$$x_k = nA - nL + L$$

Porém, $x_k < A$, logo:

$$nA - nL + L < A$$

$$-nL + L < A - nA$$

$$L(1-n) < A(1-n)$$

Dividindo ambos os membros da desigualdade por $1-n$, pois $n \neq 1$, e observando que $1-n<0$, temos que o sinal da desigualdade será alterado, resultando em

$$L > A$$

□

Teorema 2.1: Se a média aritmética dos números $x_1, ..., x_n$, é igual a A, pelo menos um dos números $x_1, ..., x_n$, é maior que ou igual a A.

Demonstração. Suponha, por contradição, que todos os termos $x_1, ..., x_n$ sejam menores que A.

$$x_1 < A$$

$$x_2 < A$$

$$x_3 < A$$

$$\vdots$$

$$x_n < A$$

$$x_1 + \cdots + x_n < nA$$

Dividindo ambos os membros por n, sendo $n > 0$, tem-se:

$$\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} < A$$

porém,

$$\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} = A$$

implicando que

$$A < A$$

que é um absurdo.

Logo, se a média aritmética dos números $x_1, \ldots, x_n$, é igual a A, pelo menos um dos números $x_1, \ldots, x_n$, é maior que ou igual a A. □

2.2 Média Geométrica Simples

Quando o interesse na natureza dos elementos da coleção de números tem relação com o produto desses números, então estamos trabalhando com a média geométrica simples.

Definição 2.2: Sejam $x_1, \ldots, x_n$, números reais positivos. Definimos a média geométrica simples, denotada por MG, desses n números, com $n > 1$, por:

$$\mathrm{MG} = \sqrt[n]{x_1 \cdots x_n}$$

É importante observarmos que apesar de existir a raiz quadrada de $(-125).(-5)$, não existe a média geométrica entre -5 e -125. Dessa forma, para evitar que a média geométrica não exista, ela é definida apenas para números positivos.

Exemplo 2.2.1: Certa loja aumentou o valor de certo produto nos meses de maio, junho, julho e agosto de 2018. Os índices de aumento foram de $5\%, 4\%, 20\%$ e 25%, respectivamente. O índice médio de aumento mensal é calculado através da média geométrica entre os valores supracitados.

$$MG = \sqrt[4]{1{,}05 \cdot 1{,}04 \cdot 1{,}20 \cdot 1,25} = \sqrt[4]{1{,}638} \approx 1{,}131302 \approx 113{,}1302\%$$

O que corresponde a uma taxa mensal de aproximadamente 13,1302% de aumento. Mostraremos porque usamos a média geométrica no cálculo de média em aumentos sucessivos. Seja x o valor do produto antes do primeiro aumento, $i_1 = 5\%, i_2 = 4\%, i_3 = 20\%, i_4 = 25\%$, e i_m o índice médio de aumento. Temos que:

$$x(1 + i_1)(1 + i_2)(1 + i_3)(1 + i_4) = x(1 + i_m)(1 + i_m)(1 + i_m)(1 + i_m),$$

$$x(1{,}05)(1{,}04)(1{,}2)(1{,}25) = x(1 + i_m)^4$$

Dividindo ambos membros da equação por $x \neq 0$, obtemos:

$$(1 + i_m) = \sqrt[4]{(1{,}05)(1{,}04)(1{,}2)(1{,}25)}$$

ou seja, a taxa média de aumento é exatamente a raiz quarta do produtos das taxas de aumento. Em geral, se um produto, com custo inicial igual a y, sofreu n aumentos sucessivos, $i_1, i_2, \cdots, i_n$, e i_m é o índice médio de aumento. Temos que:

$$y(1 + i_1).(1 + i_2) \cdots (1 + i_n) = y.\underbrace{(1 + i_m)(1 + i_m) \cdots (1 + i_m)}_{n}.$$

Dividindo ambos membros da equação por $y \neq 0$, obtemos:

$$(1 + i_m)^n = (1 + i_1).(1 + i_2) \cdots (1 + i_n),$$

extraindo a raiz enésima em ambos os membros, temos:

$$(1 + i_m) = \sqrt[n]{(1 + i_1).(1 + i_2) \cdots (1 + i_n)},$$

ou seja, o índice médio de aumento é equivalente a média geométrica dos índices de aumentos sucessivos. Por isso que em aplicações como essa, devemos utilizar a média geométrica.

2.3 Média Harmônica

Quando o objetivo é trabalhar com a soma dos inversos dos elementos da coleção de números, então estamos trabalhando com a média harmônica.

Definição 2.3: A média harmônica, denotada por MH , da coleção de n números positivos $x_1, \ldots, x_n$, com $n > 1$, é definida por:

$$\mathrm{MH} = \frac{n}{\dfrac{1}{x_1} + \cdots + \dfrac{1}{x_n}}.$$

Observamos que a média harmônica é o inverso da média aritmética dos inversos dos números $x_1, \ldots, x_n$.

Assim como na média geométrica, a média harmônica é definida apenas para números positivos. Uma boa justificativa é que não seria possível calcular a média harmônica entre os números 1 e -1.

Exemplo 2.3.1: (FUVEST-2016/ Adaptada) Um veículo viaja entre dois povoados da Serra da Mantiqueira, percorrendo a primeira terça parte do trajeto à velocidade média de 60 km/h, a terça parte seguinte a 40 km/h e o restante do percurso a 20 km/h. Qual o valor que melhor se aproxima a velocidade média do veículo nessa viagem, em km/h?

A velocidade média desse veículo pode ser calculada por meio da média harmônica.

$$MH = \frac{3}{\dfrac{1}{60} + \dfrac{1}{40} + \dfrac{1}{20}}$$

$$MH \approx 32{,}7\,\text{km/h}$$

Mostraremos agora porque usamos a Média Harmônica nesse exemplo. O veículo percorreu três trajetos de comprimentos iguais em velocidades diferentes, portanto o tempo gasto no deslocamento do veículo em cada trecho não foi o mesmo. Sejam t_T o tempo total gasto no percurso, t_1, t_2 e t_3 os tempos gastos nos 3 trechos, respectivamente, $3d$ a distância percorrida e v a velocidade média, dessa forma,

$$t_T = t_1 + t_2 + t_3$$

Porém, sabemos que o tempo gasto para percorrer certa distância pode ser calculado por meio da razão entre a distância e a velocidade. Assim,

$$\frac{3d}{v} = \frac{d}{60} + \frac{d}{40} + \frac{d}{20} \qquad \Rightarrow \qquad v = \frac{3}{\dfrac{1}{60} + \dfrac{1}{40} + \dfrac{1}{20}}$$

Concluímos que a velocidade média, nesse caso, é equivalente à Média Harmônica de 60 km/h, 40 km/h e 20 km/h.

2.4 Média Quadrática

Outra média que é muito importante na resolução de problemas é a média quadrática.

Definição 2.4: A média quadrática, denotada por MQ , da coleção de n números $x_1, \ldots, x_n$, com $n > 1$, é definida por:

$$\text{MQ} = \sqrt{\frac{x_1^2 + \cdots + x_n^2}{n}}$$

De acordo com a definição, é possível observarmos que a média quadrática é equivalente à raiz quadrada da média aritmética dos quadrados dos números $x_1, \ldots, x_n$.

Exemplo 2.4.1: A média quadrática dos números 2, 3 e 5 é dada por:

$$\text{MQ} = \sqrt{\frac{2^2 + 3^2 + 5^2}{3}},$$

ou seja,

$$\text{MQ} = \sqrt{\frac{38}{3}} \approx 3{,}56.$$

Esse tipo de medida estatística é utilizada para expressar o valor efetivo da tensão elétrica alternada, onde é usado o chamado valor quadrático médio ou valor-rms (*root mean square*).

3

Desigualdades

Neste capítulo, serão apresentadas algumas desigualdades e posteriormente será possível verificar como utilizá-las para resolver alguns problemas.

3.1 Desigualdade das Médias Aritmética (MA) e Geométrica (MG)

Nessa seção, serão abordadas algumas demonstrações da desigualdade entre a média aritmética e a média geométrica. Essa desigualdade é bem famosa em problemas propostos em competições, como olimpíadas matemáticas, e no próprio curso do PROFMAT.

Essa desigualdade é uma poderosa ferramenta na resolução de problemas de otimização, sendo acessível aos alunos do Ensino Médio, uma vez que o estudo das derivadas praticamente não existe mais nesse nível de ensino. Diferente das derivadas, o ensino das desigualdades das médias se torna viável a partir de um pequeno projeto paralelo nas escolas de Ensino Básico, o que possibilita a resolução de vários problemas que serão apresentados aos estudantes talvez só no Ensino Superior.

As principais contribuições para as demonstrações do Teorema 3.1 presentes nesse capítulo podem ser encontradas no livro "Meu professor de matemática" do professor Elon Lages Lima [9], no livro de Korovkin [8] e na dissertação de Rigodanzo [19].

Teorema 3.1: A média aritmética de n números positivos é maior que ou igual a sua média geométrica, ou seja

$$\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \ldots x_n}.$$

Além disso, vale a igualdade se, e somente se, $x_1 = \cdots = x_n$.

Nas subseções a seguir, apresentaremos algumas demonstrações para o Teorema 3.1. Utilizaremos duas demonstrações utilizando o Princípio da Indução Finita como base, duas provas serão realizadas a partir de contextos geométricos e, para as últimas duas demonstrações, serão utilizadas técnicas algébricas do Ensino Básico de acordo com a BNCC [6]. São demonstrações que podem ser trabalhadas em diversos momentos do ensino, em contextos diferentes e que talvez consigam atingir públicos distintos.

3.1.1 Demonstração I

Entendemos que essa demonstração é mais apropriada para se trabalhar no Ensino Superior, já que ela utiliza o Princípio da Indução Finita (PIF). Consultando os PCN de matemática [15], e o CBC [3] é possível verificar que não há nenhuma orientação sobre o uso do PIF. Alunos do Programa de Iniciação Científica (PIC) inclusive estudam o PIF durante o Ensino Básico, mas não é uma prática comum para alunos do Ensino Fundamental e Médio. A primeira demonstração que será apresentada para esse caso é uma adaptação do que foi feito pelo matemático francês Louis Cauchy. Usa-se o princípio da indução para mostrar que MA $\geq$ MG, apenas para $n \in \mathbb{N}$ da forma $n = 2^k$, com $k \in \mathbb{N}$ e $k \geq 1$.

Demonstração. **Passo 1**: mostrar que a desigualdade vale para $k = 1$, ou seja, para $n = 2$.

$$\begin{gathered}
\mathrm{MA} \geq \mathrm{MG} \\
\frac{x_1 + x_2}{2} \geq \sqrt{x_1.x_2} \\
x_1 + x_2 \geq 2\sqrt{x_1.x_2} \\
x_1 - 2\sqrt{x_1.x_2} + x_2 \geq 0 \\
(\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2})^2 \geq 0.
\end{gathered}$$

Como o quadrado da diferença de dois termos é sempre não negativo e a expressão final é oriunda de MA $\geq$ MG , mostra-se que a desigualdade é válida para $n = 2$. Além disso,

$$(\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2})^2 = 0$$

se, e somente se, $\sqrt{x_1} = \sqrt{x_2}$, o que implica em $x_1 = x_2$, já que ambos são números positivos.

Passo 2: Suponhamos que a desigualdade seja válida para $n = 2^k$, ou seja:

$$\begin{gathered}
\mathrm{MA} \geq \mathrm{MG} \\
\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \cdots x_n}.
\end{gathered}$$

Passo 3: devemos mostrar que a propriedade é válida para $2n = 2^{k+1}$. Temos que

$$\mathrm{MA} = \frac{x_1 + \cdots + x_n + x_{n+1} + \cdots + x_{2n}}{2n}$$

Convenientemente, a média aritmética supracitada (MA) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\mathrm{MA} = \frac{\dfrac{x_1 + \cdots + x_n}{n} + \dfrac{x_{n+1} + \cdots + x_{2n}}{n}}{2}. \tag{3.1}$$

Ambos os termos do numerador de (3.1) possuem n termos. Dessa forma, pela hipótese de indução, pode-se dizer que MA $\geq$ MG, assim:

$$\begin{aligned} \mathrm{MA} &= \frac{\dfrac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} + \dfrac{x_{n+1} + x_{n+2} + \cdots + x_{2n}}{n}}{2} \\ &\geq \frac{\sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} + \sqrt[n]{x_{n+1} \cdots x_{2n}}}{2}. \end{aligned} \tag{3.2}$$

No numerador de (3.2) há dois termos, assim pode-se aplicar o primeiro passo de indução utilizado nessa demonstração, o que implica em:

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt[n]{x_1 . \cdots . x_n} + \sqrt[n]{x_{n+1} . \cdots . x_{2n}}}{2} &\geq \sqrt{\sqrt[n]{x_1 . \cdots . x_n} \cdot \sqrt[n]{x_{n+1} . \cdots . x_{2n}}} \\ &= \sqrt[2n]{x_1 . \cdots . x_n . x_{n+1} . \cdots . x_{2n}} = \mathrm{MG}\,. \end{aligned}$$

Ainda tem-se que a igualdade só é válida quando em (3.1) $x_1 = \cdots = x_n$ e $x_{n+1} = \cdots = x_{2n}$. Em (3.2) também deve ocorrer $x_1 \cdots x_n = x_{n+1} \cdots x_{2n}$. Ou seja, deve-se ter:

$$x_1 = \cdots = x_n = x_{n+1} = \cdots = x_{2n}$$

Dessa forma, a propriedade também é válida para $2n = 2^{k+1}$. Portanto, pelo Principio da Indução Finita, MA $\geq$ MG, para $n = 2^k$. □

3.1.2 Demonstração II

A demonstração feita nessa seção se torna mais apropriada para ser trabalhada no Ensino Superior. A justificativa é análoga a da seção anterior. A base para mostrar que MA $\geq$ MG foi o Teorema 3.2, o qual utilizamos o Princípio da Indução Finita para realizar a prova. Para demonstrarmos o Teorema 3.1 de outra forma, utilizaremos como estrutura outro teorema, que será enunciado e demonstrado a seguir. Como fonte para entendimento e desenvolvimento desse teorema, utilizamos o livro de Korovkin [8].

Teorema 3.2: Se o produto de n números positivos $x_1, x_2, \cdots, x_n$ é igual a 1, então a soma de $x_1, x_2, \cdots, x_n$ não é menor que n. Ou seja,

$$x_1 x_2 \cdots x_n = 1 \qquad \Rightarrow \qquad x_1 + x_2 + \cdots + x_n \geq n.$$

Demonstração. Utilizaremos o Princípio da Indução Finita. Inicialmente, mostraremos que o Teorema é válido para $n = 2$, ou seja,

$$x_1x_2 = 1 \qquad \Rightarrow \qquad x_1 + x_2 \geq 2.$$

Para isso, analisaremos dois casos.

(i) $x_1 = x_2 = 1$

Assim, $x_1x_2 = 1 \Rightarrow x_1 + x_2 \geq 2$ e o teorema está demonstrado.

(ii) $0 < x_1 < x_2$

Neste caso, temos $x_1 < 1$ e $x_2 > 1$, uma vez que o produto entre x_1 e x_2 é igual a 1. Tomemos a seguinte igualdade:

$$(1 - x_1)(x_2 - 1) = x_1 + x_2 - x_1x_2 - 1$$

temos que

$$x_1 + x_2 = (1 - x_1)(x_2 - 1) + x_1x_2 + 1$$

Sabendo-se que $x_1x_2 = 1$, obtemos:

$$x_1 + x_2 = (1 - x_1)(x_2 - 1) + 2$$

Como $x_1 < 1 < x_2$, temos que $(1 - x_1)(x_2 - 1) > 0$, por isso $x_1 + x_2 \geq 2$. Dessa forma, o teorema está demonstrado para $n = 2$. A igualdade $x_1 + x_2 = 2$ ocorre se, e somente se, $x_1 = x_2$. Por outro lado, se $x_1 \neq x_2$, então $x_1 + x_2 > 2$.

Suponha que o Teorema seja válido para $n = k$. Assim, considerando que $x_1x_2 \cdots x_k = 1$, temos que:

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_k \geq k$$

Por fim, devemos mostrar que o Teorema é válido para $n = k + 1$, ou seja, provaremos que:

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_k + x_{k+1} \geq k + 1$$

Dado que $x_1x_2 \cdots x_kx_{k+1} = 1$, onde $x_1 > 0$, $x_2 > 0$, $\cdots$, $x_k > 0$, $x_{k+1} > 0$. Temos por hipótese que:

$$x_1x_2 \cdots x_kx_{k+1} = 1$$

Devemos analisar dois casos:

1. Todos os termos x_1, x_2, $\cdots$, x_k, x_{k+1} são iguais, ou seja:

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_k = x_{k+1}$$

Nesse caso, todos os termos devem ser iguais a 1, considerando que o produto entre eles é igual a 1. Assim:

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_k + x_{k+1} = k + 1$$

2. Os termos não são todos iguais. Nessa situação, existem termos de x_1, x_2, $\cdots$, x_k, x_{k+1} que são maiores e menores que 1. Se todos os termos fossem menores que 1, o produto seria também menor que 1. Se os termos são todos maiores que 1, então o resultado da multiplicação também é maior que 1. Suponha, sem perda de generalidade, que $x_1 < 1$ e $x_{k+1} > 1$. Temos que:

$$(x_1 x_{k+1}) x_2 \cdots x_k = 1$$

Seja $y_1 = x_1 x_{k+1}$, assim:

$$y_1 x_2 \cdots x_k = 1$$

Se o produto de k números positivos é igual a 1, temos, por hipótese de indução, que a soma desses k números não é menor que k, ou seja,

$$y_1 + x_2 + \cdots + x_k \geq k$$

Porém,

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + \cdots + x_k + x_{k+1} &= (y_1 + x_2 + \cdots + x_k) + x_{k+1} - y_1 + x_1 \\ &\geq k + x_{k+1} - y_1 + x_1 \\ &= (k+1) + x_{k+1} - y_1 + x_1 - 1. \end{aligned}$$

Utilizando o fato de que $y_1 = x_1 x_{k+1}$, temos:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + \cdots + x_k + x_{k+1} &\geq (k+1) + x_{k+1} - y_1 + x_1 - 1 \\ &\geq (k+1) + x_{k+1} - x_1 x_{k+1} + x_1 - 1 \\ &\geq (k+1) + (x_{k+1} - 1)(1 - x_1). \end{aligned}$$

Usando o fato de que $x_1 < 1$ e $x_{k+1} > 1$, temos que $(x_{k+1} - 1)(1 - x_1) > 0$, e , por consequência:

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_k + x_{k+1} \geq (k+1) + (x_{k+1} - 1)(1 - x_1) > k + 1$$

Logo, $x_1 + x_2 + \cdots + x_k + x_{k+1} \geq k + 1$. Dessa forma, a propriedade também é válida para $n = k + 1$. Portanto, pelo Principio da Indução Finita, se o produto de n números positivos $x_1, x_2, \cdots, x_n$ é igual a 1, então a soma de $x_1, x_2, \cdots, x_n$ não é menor que n. □

Agora mostraremos que a Média Aritmética é maior que ou igual a Média Geométrica baseado no Teorema 3.2.

Demonstração. A média geométrica de x_1,$x_2 \cdots, x_n$ é dada por

$$\mathrm{MG} = \sqrt[n]{x_1 \cdots x_n}.$$

Podemos reescrevê-la da seguinte forma:

$$x_1 \cdots x_n = \mathrm{MG}^n$$

$$\frac{x_1}{\mathrm{MG}} \cdots \frac{x_n}{\mathrm{MG}} = 1.$$

Temos que o produto de n termos é igual a 1. O Teorema 3.2 nos garante que:

$$\frac{x_1}{\mathrm{MG}} + \cdots + \frac{x_n}{\mathrm{MG}} \geq n.$$

Assim

$$x_1 + \cdots + x_n \geq n\,\mathrm{MG} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \geq \mathrm{MG}\,,$$

ou seja,

$$\mathrm{MA} \geq MG$$

Além disso, vale a igualdade se, e somente se, $x_1 = \cdots = x_n$. □

3.1.3 Demonstração III

Essa demonstração pode ser desenvolvida a partir do 9º do Ensino Fundamental. Baseado nos conteúdos necessários para realizar a prova, seriam essenciais conhecimentos em polígonos inscritos em uma circunferência, triângulos retângulos e semelhança de triângulos. De acordo com a Base Nacional Comum Curricular [6], esses conteúdos devem ser desenvolvidos até o 9º ano do Ensino Fundamental.

Nessa demonstração, será verificado que a média aritmética é maior que ou igual a média geométrica utilizando dois termos. Porém, a prova será dada através de uma justificativa geométrica, diferentemente do que foi feito nas seções anteriores, quando foram utilizadas técnicas algébricas.

Demonstração. Na Figura 3.1, temos um triângulo retângulo PQR inscrito numa circunferência de centro O. A medida do diâmetro da circunferência é equivalente a medida da hipotenusa do triângulo, cujo tamanho é $(a + b)$.

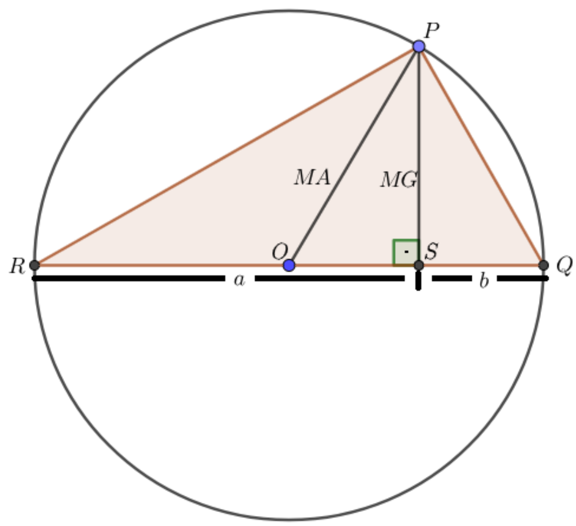


Figura 3.1: Triângulo inscrito na circunferência

Logo, o raio da circunferência tem medida igual a

$$\frac{a+b}{2},$$

o que corresponde a média aritmética de a e b. Por semelhança de triângulos, é possível determinar a medida da altura do triângulo retângulo PQR que é dado por

$$\sqrt{ab},$$

o que corresponde a média geométrica de a e b. Dessa forma, conclui-se que MA $\geq$ MG. Além disso, MA será igual a MG se, e somente se, $a = b$, ou seja, se a medida do raio da circunferência for igual a $a = b$.

□

3.1.4 Demonstração IV

Nessa demonstração, utilizamos também um viés geométrico para provar que a média aritmética é maior que ou igual a média geométrica para dois termos.

Demonstração. Tome um quadrado com quatro triângulos retângulos congruentes, ABH, BDG, CDF e ACE, cujas hipotenusas são dadas pelos lados do quadrado ABCD e catetos medindo $\sqrt{x_1}$ e $\sqrt{x_2}$, em seu interior, conforme a Figura 3.2.

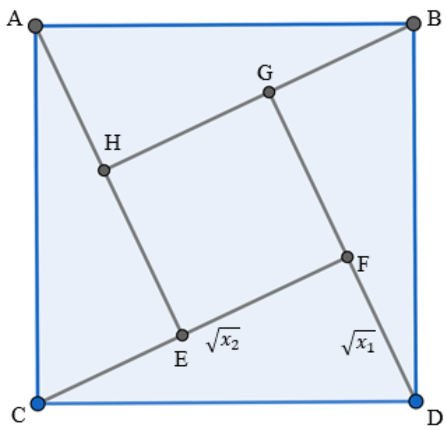


Figura 3.2: Quadrado com quatro triângulos retângulos

Como o lado do quadrado corresponde à hipotenusa do triângulo, é possível inferir, através do Teorema de Pitágoras, que o quadrado tem lado equivalente à $\sqrt{x_1 + x_2}$. A área do quadrado ABCD, dada por $x_1 + x_2$, é maior que ou igual à soma das áreas dos quatro triângulos, que é dada por:

$$4.\frac{\sqrt{x_1}\sqrt{x_2}}{2} = 2\sqrt{x_1 x_2}.$$

Logo,

$$x_1 + x_2 \geq 2\sqrt{x_1 x_2},$$

ou seja,

$$\frac{x_1 + x_2}{2} \geq \sqrt{x_1 x_2}.$$

Dessa forma, conclui-se que, MA $\geq$ MG. A igualdade ocorre quando o quadrado, cujo lado mede $\sqrt{x_2} - \sqrt{x_1}$, no interior do quadrado ABCD deixa de existir. Assim:

$$\sqrt{x_2} - \sqrt{x_1} = 0,$$

ou seja,

$$\sqrt{x_2} = \sqrt{x_1}.$$

Como x_2 e x_1 são positivos,

$$x_2 = x_1.$$

Como consequência, teríamos MA = MG. □

Essa demonstração pode ser trabalhada após ou durante o 9º do Ensino Fundamental. Pensando nos conteúdos necessários para realizar a prova supracitada, seriam necessários conhecimentos em cálculo de área de quadrados e triângulos e aplicação do Teorema de Pitágoras. De acordo com os PCNs de matemática [15] e o CBC [3], esses conteúdos devem ser desenvolvidos até o 9º ano do Ensino Fundamental e aprofundados ao longo do Ensino Médio.

3.1.5 Demonstração V

A demonstração desta subseção e da Subseção 3.1.6 podem ser trabalhadas a partir do 9º do Ensino Fundamental. Os conteúdos exigidos nas provas são cálculos envolvendo Polinômios e Equações Polinomiais do 2º grau. Segundo a BNCC [6], os conteúdos inerentes às demonstrações devem ser desenvolvidos até o 9º ano do Ensino Fundamental. Nesta subseção, faremos uma demonstração algébrica, apenas para dois termos.

Demonstração. Sejam x e y números reais positivos tais que:

$$x + y = 2k \Rightarrow \frac{x + y}{2} = k. \tag{3.3}$$

Dessa forma, os valores de x e y podem ser expressos da seguinte maneira: $x = k - z$ e $y = k + z$. Assim,

$$\begin{aligned} xy &= (k - z)(k + z) \\ &= k^2 - z^2. \end{aligned}$$

Logo, $k^2 = xy + z^2$ o que implica em:

$$k^2 \geq xy. \tag{3.4}$$

Por (3.3) e (3.4), tem-se:

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 \geq xy \qquad \Rightarrow \qquad \frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}.$$

Dessa forma, concluímos que MA $\geq$ MG. A igualdade só vale quando $z = 0$. Dessa forma teríamos $x = y$. $\square$

3.1.6 Demonstração VI

A demonstração que será feita a seguir possui certa semelhança à apresentada na Subseção 3.1.5. Trata-se de uma demonstração algébrica, apenas para dois termos.

Demonstração. Sejam x e y números reais positivos tais que:

$$x + y = 2k \qquad \Rightarrow \qquad \frac{x+y}{2} = k \tag{3.5}$$

Dessa forma, x e y são raízes da equação polinomial de 2º grau de incógnita a dada por:

$$a^2 - 2ak + xy = 0$$

Já que x e y são números reais, então temos que o discriminante satisfaz $\Delta \geq 0$, ou seja,

$$4k^2 - 4xy \geq 0 \qquad \Rightarrow \qquad k^2 \geq xy. \tag{3.6}$$

Por (3.5) e (3.6), tem-se:

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 \geq xy,$$

ou seja,

$$\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}.$$

Dessa forma, concluímos que MA $\geq$ MG. As raízes serão iguais se, e somente se, o valor do Δ for igual a zero. Dessa forma, $xy = k^2$. $\square$

3.2 Desigualdade das Médias Geométrica (MG) e Harmônica (MH)

Nessa seção, mostraremos a relação existente entre a Média Geométrica e a Média Harmônica utilizando o Teorema a seguir.

Teorema 3.3: A média geométrica de n números positivos é maior que ou igual a sua média harmônica, ou seja:

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \geq \frac{n}{\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} + \cdots + \dfrac{1}{x_n}}.$$

Além disso, a igualdade ocorre se, e somente se, $x_1 = \cdots = x_n$.

Nas subseções a seguir, apresentaremos duas demonstrações para o Teorema 3.3. Na primeira demonstração, utilizamos como base o Teorema 3.1, já na segunda, usamos uma ideia semelhante à aplicada na demonstração 3.1.3. Os trabalhos que embasam as demonstrações dessa seção são o livro do professor Elon Lages Lima [9] e a dissertação de Bonelli [2].

3.2.1 Demonstração I

O pré-requisito para o entendimento dessa demonstração é o Teorema 3.1. Assim, a partir do 9º ano é possível desenvolver e explorar a desigualdade das Médias Geométrica e Harmônica.

Demonstração. Sejam os n números positivos $\dfrac{1}{x_1}, \dfrac{1}{x_2}, \cdots, \dfrac{1}{x_n}$. Pelo Teorema 3.1, temos

$$\frac{\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} + \cdots + \dfrac{1}{x_n}}{n} \geq \sqrt[n]{\frac{1}{x_1}\frac{1}{x_2}\cdots\frac{1}{x_n}},$$

$$\frac{\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} + \cdots + \dfrac{1}{x_n}}{n} \geq \frac{1}{\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}}.$$

Multiplicando ambos os membros da desigualdade por n, obtemos:

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n} \geq \frac{n}{\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}}.$$

Agora, multiplicamos a desigualdade pela expressão

$$\frac{\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}}{\left(\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} + \cdots + \dfrac{1}{x_n}\right)},$$

obtemos

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \geq \frac{n}{\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} + \cdots + \dfrac{1}{x_n}},$$

ou seja,

$$\mathrm{MG} \geq \mathrm{MH}.$$

Além disso, a igualdade ocorre se, e somente se, os termos envolvidos inicialmente nas desigualdades forem iguais, isto é,

$$\frac{1}{x_1} = \frac{1}{x_2} = \cdots = \frac{1}{x_n}.$$

O que é equivalente a dizer que

$$x_1 = \cdots = x_n.$$

□

3.2.2 Demonstração II

Nessa demonstração utilizaremos uma ideia semelhante a aplicada na Subseção 3.1.3 para mostrar que a Média Geométrica é maior que ou igual a Média Harmônica. A demonstração dessa subseção pode ser desenvolvida a partir do 9º do Ensino Fundamental. Baseado nos conteúdos necessários para realizar a prova, seriam essenciais conhecimentos em polígonos inscritos em uma circunferência, triângulos retângulos e semelhança de triângulos. De acordo com a Base Nacional Comum Curricular [6], esses conteúdos devem ser desenvolvidos até o 9º ano do Ensino Fundamental.

Demonstração. Na Figura 3.3, tem-se o triângulo OPS retângulo em S. Sabemos que o segmento $\overline{OP}$, hipotenusa do triângulo OPS, representa a média arimética de a e b, ou seja, $\dfrac{a+b}{2}$ e $\overline{SP}$, cateto do triângulo, equivalente a $\sqrt{ab}$.

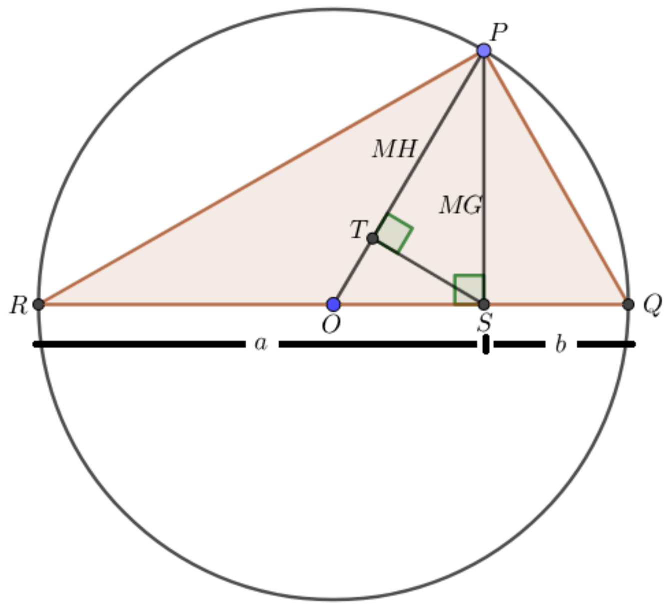


Figura 3.3: MG $\geq$ MH

Aplicando semelhança nos triângulos POS e PST, temos

$$(\overline{OP})(\overline{PT}) = (\overline{PS})^2.$$

O que é equivalente a

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)(\overline{PT}) = (\sqrt{ab})^2,$$

Logo,

$$\overline{PT} = \frac{2ab}{a+b}.$$

A expressão que representa a medida de $\overline{PT}$ é igual a média harmônica de a e b. Dessa forma,

$$\overline{PT} = \text{MH}\,.$$

Portanto, conclui-se que MG $\geq$ MH. Além disso, MG será igual a MH se, e somente se, $a = b$, ou seja, se a medida do raio da circunferência for igual a $a = b$. □

3.3 Desigualdade das Médias Aritmética (MA) e Quadrática (MQ)

O objetivo dessa seção é mostrar a relação existente entre a Média Aritmética e a Média Quadrática utilizando o Teorema a seguir.

Teorema 3.4: A média quadrática de n números positivos é maior que ou igual a sua média aritmética, ou seja,

$$\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \leq \sqrt{\frac{x_1^2 + \cdots + x_n^2}{n}}$$

Além disso, a igualdade ocorre se, e somente se, $x_1 = \cdots = x_n$.

Na Subseção a seguir, apresentaremos uma demonstração que foi construída baseada no trabalho de Rigodanzo [19] para o Teorema 3.4.

Entendemos que o momento mais apropriado para desenvolver essa demonstração é no Ensino Superior, já que ela utiliza a notação sigma e algumas propriedades envolvendo somatórios. Consultando os PCN de matemática [15],e o CBC [3] é possível verificar que não há nenhuma inferência sobre as técnicas algébricas utilizadas. Alguns livros do Ensino Médio até trazem algo sobre a notação sigma, mas, de fato, não é comum se trabalhar com essas técnicas no Ensino Básico.

Demonstração. Para iniciar a demonstração utilizaremos a seguinte igualdade:

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j)^2 = (n-1)\sum_{i=1}^{n}(x_i)^2 - 2\sum_{1 \leq i < j \leq n}(x_i)(x_j)$$

Como o primeiro membro da igualdade supracitada é equivalente ao somatório de quadrados, temos que esse resultado é maior que ou igual a zero. Portanto

$$(n-1)\sum_{i=1}^{n}(x_i)^2 - 2\sum_{1 \leq i < j \leq n}(x_i)(x_j) \geq 0.$$

que pode ser reescrito como

$$2\sum_{1 \leq i < j \leq n}(x_i)(x_j) \leq (n-1)\sum_{i=1}^{n}(x_i)^2. \tag{3.7}$$

Observemos que

$$
\begin{aligned}
\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i)\right)^2 &= (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^2 \\
&= (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) \\
&= x_1^2 + x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots + x_1x_n \\
&+ x_2x_1 + x_2^2 + x_2x_3 + \cdots + x_2x_n \\
&+ x_3x_1 + x_3x_2 + x_3^2 + \cdots + x_3x_n \\
&\qquad\qquad \vdots \\
&+ x_nx_1 + x_nx_2 + x_nx_3 + \cdots + x_n^2 \\
&= (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \cdots + x_n^2) + 2(x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots + x_1x_n + x_2x_3 + \cdots) \\
&= \sum_{i=1}^{n}(x_i)^2 + 2\sum_{1\le i<j\le n}(x_i)(x_j).
\end{aligned}
$$

Assim, ao somarmos $\sum_{i=1}^{n}(x_i)^2$ em (3.7), obteremos:

$$
\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i)\right)^2 \le n\sum_{i=1}^{n}(x_i)^2. \tag{3.8}
$$

Ao multiplicar ambos os membros de (3.8) por $\dfrac{1}{n^2}$ e calculando a raiz quadrada, obtemos

$$
\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i \le \sqrt{\frac{1}{n}}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i)^2},
$$

que implica em

$$
\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \le \sqrt{\frac{x_1^2 + \cdots + x_n^2}{n}}.
$$

Logo,

$$
\text{MA} \le \text{MQ}
$$

Além disso, a igualdade ocorre em (3.7) se, e somente se

$$
\sum_{1\le i<j\le n}(x_i - x_j)^2 = 0.
$$

Isso será verdade se, e somente se $x_1 = \cdots = x_n$ $\square$

3.4 Desigualdade das Médias Aritmética, Geométrica, Harmônica e Quadrática

Nessa seção, relacionaremos as quatro médias tratadas até aqui através do seguinte Teorema.

Teorema 3.5: Dados $x_1, \ldots, x_n$, números reais positivos, é possível verificar as seguintes desigualdades:

$$\text{MQ} \geq \text{MA} \geq \text{MG} \geq MH$$

Além disso, a igualdade ocorre, em cada expressão, se, e somente se, $x_1 = \cdots = x_n$.

O Teorema 3.5 é conhecido como Desigualdades das Médias.

Demonstração. A prova deste Teorema será feita reunindo os teoremas apresentados nas Seções 3.1, 3.2 e 3.3.

O Teorema 3.1 traz que MA $\geq$ MG. O Teorema 3.2 diz que MG $\geq$ MH. Dessa forma, temos

$$\text{MA} \geq \text{MG} \geq \text{MH}\,.$$

Por fim, pelo Teorema 3.3, temos que MQ $\geq$ MA. Dessa forma, concluímos que:

$$\text{MQ} \geq \text{MA} \geq \text{MG} \geq MH$$

A igualdade ocorre, em cada caso, se, e somente se, $x_1 = \cdots = x_n$. $\square$

3.5 Desigualdade de Bernoulli

A seguir será apresentada e demonstrada a Desigualdade de Bernoulli. O trabalho de Bonelli [2] auxiliou o entendimento e desenvolvimento da demonstração. Essa desigualdade pode ser muito útil na resolução de problemas de olimpíadas, competições e até mesmo durante o curso do PROFMAT.

Teorema 3.6: Sejam $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$ e $x > -1$. Então:

$$(1+x)^n \geq 1 + nx$$

Demonstração. Utilizaremos o Princípio da Indução Finita em n. Inicialmente, mostraremos que o Teorema é válido para $n = 1$.

$$(1+x)^1 \geq 1 + 1x$$

Dessa forma, o Teorema está demonstrado para $n = 1$. Agora, iremos supor que ele seja válido para $n = k$, ou seja:

$$(1+x)^k \geq 1 + kx \tag{3.9}$$

Por fim, devemos provar que o Teorema é válido para $n = k + 1$. Para isso multiplicaremos a desigualdade (3.9) por $(1 + x)$. Assim, obtemos:

$$(1+x)^k(1+x) \geq (1+kx)(1+x),$$

ou seja,

$$(1+x)^{k+1} \geq 1+x+kx+kx^2. \tag{3.10}$$

Porém, como $kx^2 \geq 0$, temos que:

$$1+x+kx+kx^2 \geq 1+x+kx. \tag{3.11}$$

Dessa forma, por (3.10) e (3.12) concluímos que:

$$\begin{aligned}(1+x)^{k+1} &\geq 1+x+kx \\ &= 1+x(k+1).\end{aligned}$$

Assim, o Teorema é válido para $n = k+1$. Portanto, pelo Princípio da Indução Finita, se $n \in \mathbb{N}$ e $x > -1$, então

$$(1+x)^n \geq 1+nx. \qquad \square$$

3.6 Desigualdade de Cauchy-Schwarz

Outra importante desigualdade para resolver problemas é a chamada Desigualdade de Cauchy-Schwarz. De acordo com Carvalho [5], "Em 1821, Augustin-Louis Cauchy, matemático francês que viveu entre 1789 e 1857, publicou uma desigualdade para somas que foi redescoberta por Karl Hermann Amandus Schwarz, em 1888, matemático alemão que viveu entre 1843 e 1921". A seguir apresentaremos a Desigualdade de Cauchy-Schwarz como um Teorema e sua demonstração.

Teorema 3.7: Sejam $x_1, x_2, \ldots, x_n$ e $y_1, y_2, \ldots, y_n$ números reais não todos nulos, então a seguinte desigualdade ocorre:

$$(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)(y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2) \geq (x_1y_{1+}x_2y_2+\cdots+x_ny_n)^2.$$

Demonstração. Para efetuar a prova do Teorema 3.7 iremos utilizar a seguinte função:

$$f(\alpha) = (x_1\alpha - y_1)^2 + \cdots + (x_n\alpha - y_n)^2 \tag{3.12}$$

Desenvolvendo os quadrados de (3.12) temos:

$$f(\alpha) = (x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)\alpha^2 - 2(x_1y_{1+}x_2y_2+\cdots+x_ny_n)\alpha + (y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2).$$

Como a função (3.12) é uma soma de quadrados, sabemos que $f(\alpha) \geq 0$, e isso ocorre se, e somente se, o discriminante da equação $f(\alpha) = 0$ for menor que ou igual a zero, assim temos,

$$(-2(x_1y_{1+}x_2y_2+\cdots+x_ny_n))^2 - 4(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)(y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2) \leq 0,$$

ou seja,

$$4(x_1y_{1+}x_2y_2+\cdots+x_ny_n)^2-4(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)(y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2)\leq 0. \quad (3.13)$$

Dividindo por 4 e somando $(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)(y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2)$ em ambos os membros de (3.13), obtemos

$$(x_1y_{1+}x_2y_2+\cdots+x_ny_n)^2\leq(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)(y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2). \qquad \square$$

3.6.1 Lema de Titu

A Desigualdade de Cauchy-Schwarz nos ajuda a entender e provar o lema a seguir, conhecido como Lema de Titu.

Lema 3.1: Sejam $x_1, x_2, \ldots, x_n$ e $y_1, y_2, \ldots, y_n$ números reais positivos, então a seguinte desigualdade ocorre:

$$\frac{x_1^2}{y_1}+\frac{x_2^2}{y_2}+\cdots+\frac{x_n^2}{y_n}\geq\frac{(x_1+x_2+\cdots+x_n)^2}{y_1+y_2+\cdots+y_n}.$$

Demonstração. Aplicaremos a Desigualdade de Cauchy-Schwarz na expressão a seguir para provar o Lema de Titu.

$$\left[\left(\frac{x_1}{\sqrt{y_1}}\right)^2+\left(\frac{x_2}{\sqrt{y_2}}\right)^2+\cdots+\left(\frac{x_n}{\sqrt{y_n}}\right)^2\right]\left[(\sqrt{y_1})^2+(\sqrt{y_2})^2+\cdots+(\sqrt{y_n})^2\right]\geq (x_1+x_2+\cdots+x_n)^2.$$

Dividindo a desigualdade supracitada por $y_1+y_2+\cdots+y_n$, obtemos:

$$\frac{x_1^2}{y_1}+\frac{x_2^2}{y_2}+\cdots+\frac{x_n^2}{y_n}\geq\frac{(x_1+x_2+\cdots+x_n)^2}{y_1+y_2+\cdots+y_n}$$

Assim, está demonstrado o lema de Titu. $\square$

3.6.2 Média Quadrática e Média Aritmética

A Desigualdade de Cauchy-Schwarz também pode ser utilizada como ferramenta para demonstrar o Teorema 3.3 no qual MQ $\geq$ MA.

Demonstração. Sejam $x_1, x_2, \cdots, x_n$ números reais. Aplicaremos a Desigualdade de Cauchy-Schwarz na expressão a seguir para provar que a Média Quadrática é maior que ou igual a Média Aritmética.

$$(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)\underbrace{(1+1+\cdots+1)}_{n}\geq(x_1+x_2+\cdots+x_n)^2,$$

ou seja,

$$(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)n\geq(x_1+x_2+\cdots+x_n)^2.$$

Dividindo ambos os membros da desigualdade por n^2, obtemos

$$\frac{x_1^2+\cdots+x_n^2}{n} \geq \frac{(x_1+x_2+\cdots+x_n)^2}{n^2}.$$

Extraindo a raiz quadrada em ambos os membros da desigualdade temos

$$\sqrt{\frac{x_1^2+\cdots+x_n^2}{n}} \geq \left|\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right|,$$

ou seja,

$$\mathrm{MQ} \geq |\,\mathrm{MA}\,|,$$

porém,

$$|\,\mathrm{MA}\,| \geq \mathrm{MA}\,,$$

portanto,

$$\mathrm{MQ} \geq \mathrm{MA}\,. \qquad \square$$

4 Aplicações

Neste capítulo, serão apresentados problemas que podem ser resolvidos com os Teoremas demonstrados no Capítulo 3. Espera-se que as técnicas utilizadas nos exercícios/problemas que serão desenvolvidos possam ser trabalhadas já no Ensino Médio. A ideia é que esse capítulo sirva como material de apoio dos alunos e professores em alguns tópicos, como, por exemplo, em funções e geometria. Outro objetivo é a possibilidade de contribuir para que novos estudantes do PROFMAT, durante o curso do mestrado, tenham base e ideias para resolver os exercícios propostos nas disciplinas de Matemática Discreta, Aritmética, Números e Funções Reais, Geometria e Fundamentos do Cálculo.

4.1 Problemas Algébricos

Nessa seção, apresentaremos alguns problemas com vieses algébricos. Os dois primeiros problemas a seguir foram extraídos do livro do Professor Elon Lima [9]. Sendo que o 2º problema também está no livro de Matemática Discreta do PROFMAT [4].

Problema 4.1: Qual o valor mínimo de $y = x^2 + \dfrac{1}{x}$, no intervalo $(0,\infty)$?

Solução: Podemos escrever $y = x^2 + \dfrac{1}{x}$ da seguinte forma

$$y = x^2 + \frac{1}{2x} + \frac{1}{2x}.$$

Assim, podemos aplicar que MA $\geq$ MG da seguinte maneira

$$\frac{x^2 + \dfrac{1}{2x} + \dfrac{1}{2x}}{3} \geq \sqrt[3]{x^2 \frac{1}{2x} \frac{1}{2x}},$$

$$\frac{y}{3} \geq \frac{1}{\sqrt[3]{4}},$$

$$y \geq \frac{3}{\sqrt[3]{4}}.$$

Portanto, o valor mínimo da função é dado por $y = \dfrac{3}{\sqrt[3]{4}}$. A igualdade ocorre quando $x^2 = \dfrac{1}{2x}$, ou seja, $x = \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$.

Problema 4.2: Provar que a sequência de termo geral $a_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ é estritamente crescente, para todo $n \geq 1$.

Solução: Tomemos n parcelas iguais a $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$ e o número 1. Aplicando MA $\geq$ MG, temos:

$$\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)+\cdots+\left(1+\frac{1}{n}\right)+1}{n+1} \geq \sqrt[n+1]{\left(1+\frac{1}{n}\right).\cdots.\left(1+\frac{1}{n}\right).1},$$

$$\frac{n\left(1+\frac{1}{n}\right)+1}{n+1} \geq \sqrt[n+1]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.1},$$

que é equivalente a:

$$\frac{n+2}{n+1} \geq \sqrt[n+1]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}, \tag{4.1}$$

reescrevendo o primeiro membro e extraindo a raiz em ambos os membros da desigualdade (4.1), obtemos

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \geq \left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Porém, podemos afirmar que a igualdade não irá existir, uma vez que,

$$1+\frac{1}{n} \neq 1,\ \forall\, n \geq 1$$

. Dessa forma

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} > \left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Ou seja, $a_{n+1} > a_n$. Portanto, está demonstrado que a sequência é estritamente crescente, para todo $n \geq 1$.

O terceiro problema desse capítulo foi selecionado do 3º Exame Nacional de Qualificação de 2012 [12].

Problema 4.3: Qual o menor valor da expressão $\sqrt{\dfrac{16x}{y}} + \sqrt{\dfrac{y}{81x}}$ quando x e y são números positivos quaisquer?

Solução: Utilizando os termos $\sqrt{\dfrac{16x}{y}}$ e $\sqrt{\dfrac{y}{81x}}$ e aplicando o Teorema 3.1, temos

$$\frac{\sqrt{\frac{16x}{y}}+\sqrt{\frac{y}{81x}}}{2} \geq \sqrt{\sqrt{\frac{16x}{y}}\sqrt{\frac{y}{81x}}},$$

assim obtemos

$$\frac{\sqrt{\frac{16x}{y}}+\sqrt{\frac{y}{81x}}}{2} \geq \frac{2}{3} \qquad \Rightarrow \qquad \sqrt{\frac{16x}{y}}+\sqrt{\frac{y}{81x}} \geq \frac{4}{3}.$$

Portanto, é possível concluirmos que o menor valor da expressão é $\frac{4}{3}$.

Os dois prolemas a seguir foram utilizados na prova de seleção do Colégio Naval em 2017 [17] e 2010 [16], respectivamente. A prova é destinada a alunos que estão terminando o 9º ano do Ensino Fundamental e pretendem cursar o Ensino Médio nesse colégio.

Problema 4.4: Sejam x e y números reais tais que $xy = 2\sqrt{3}$. Sendo assim, o valor mínimo de $x^8 + y^8$ é:

(a) múltiplo de 18.

(b) um número primo.

(c) divisível por 5.

(d) divisível por 13.

(e) par maior que 300.

Solução: Aplicando o Teorema 3.1 utilizando x^8 e y^8 temos

$$\frac{x^8+y^8}{2} \geq \sqrt{x^8y^8} \qquad \Rightarrow \qquad x^8+y^8 \geq 2\sqrt{x^8y^8},$$

extraindo a raiz quadrada do segundo membro da desigualdade,

$$x^8+y^8 \geq 2x^4y^4 \qquad \Rightarrow \qquad x^8+y^8 \geq 2(xy)^4,$$

como $xy = 2\sqrt{3}$, segue que

$$x^8+y^8 \geq 2(2\sqrt{3})^4 \qquad \Rightarrow \qquad x^8+y^8 \geq 288.$$

Dessa forma, o valor mínimo de $x^8 + y^8$ é 288, ou seja, um múltiplo de 18, resposta (a).

Problema 4.5: Sejam p e q números positivos tais que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{\sqrt{2010}}$. Qual o valor mínimo do produto pq?

(a) 8040.

(b) 4020.

(c) 2010.

(d) 1005.

(e) 105.

Solução: Aplicando o Teorema 3.1 utilizando $\frac{1}{p}$ e $\frac{1}{q}$ temos

$$\frac{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}}{2} \geq \sqrt{\frac{1}{p}\frac{1}{q}} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{1}{p}+\frac{1}{q} \geq \frac{2}{\sqrt{pq}}. \tag{4.2}$$

Como $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = \frac{1}{\sqrt{2010}}$ segue que

$$\frac{1}{\sqrt{2010}} \geq \frac{2}{\sqrt{pq}}, \tag{4.3}$$

elevando ambos os membros de (4.3) ao quadrado obtemos

$$\frac{1}{2010} \geq \frac{4}{pq} \qquad \Rightarrow \qquad pq \geq 8040. \tag{4.4}$$

Portanto, o valor mínimo do produto pq é 8040, resposta (a).

O problema a seguir traz uma aplicação das Médias Aritmética e Harmônica. O exemplo é uma releitura de uma proposição presente na dissertação de Bonelli [2].

Problema 4.6: Sejam x, y e z números reais positivos. Prove que:

$$\frac{xy}{x+y+2z}+\frac{yz}{y+z+2x}+\frac{xz}{z+x+2y} \leq \frac{x+y+z}{4}.$$

Demonstração. Aplicando a Desigualdade das Médias Aritmética e Harmônica, MA $\geq$ MH, nos termos x e y temos

$$\frac{x+y}{2} \geq \frac{2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{x+y}{xy} \geq \frac{4}{x+y}, \tag{4.5}$$

multiplicando a desigualdade (4.5) por xy obtemos

$$x+y \geq \frac{4xy}{x+y} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{1}{x+y} \leq \frac{1}{4}\frac{x+y}{xy}.$$

Segue que

$$\begin{aligned}
\frac{xy}{x+y+2z} &= \frac{xy}{(x+z)+(y+z)} \\
&= \frac{xy}{1} \cdot \frac{1}{(x+z)+(y+z)} \\
&\leq \frac{xy}{4} \cdot \frac{(x+z)+(y+z)}{(x+z)(y+z)} \\
&= \frac{xy}{4} \cdot \left[\frac{1}{x+z} + \frac{1}{y+z}\right].
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{xy}{x+y+2z} \leq \frac{xy}{4} \cdot \left[\frac{1}{x+z} + \frac{1}{y+z}\right]. \tag{4.6}$$

De forma análoga,

$$\frac{yz}{y+z+2x} \leq \frac{yz}{4} \cdot \left[\frac{1}{x+y} + \frac{1}{x+z}\right], \tag{4.7}$$

$$\frac{xz}{z+x+2y} \leq \frac{xz}{4} \cdot \left[\frac{1}{y+z} + \frac{1}{x+y}\right]. \tag{4.8}$$

Somando membro a membro nas desigualdades (4.6), (4.7) e (4.8) obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{xy}{x+y+2z} + \frac{yz}{y+z+2x} + \frac{yz}{y+z+2x} &\leq \frac{xy}{4} \cdot \left[\frac{1}{x+z} + \frac{1}{y+z}\right] + \frac{yz}{4} \cdot \left[\frac{1}{x+y}\right. \\
&\left. + \frac{1}{x+z}\right] + \frac{xz}{4} \cdot \left[\frac{1}{y+z} + \frac{1}{x+y}\right] \\
&= \frac{1}{4} \cdot \left[\frac{xy}{x+z} + \frac{xy}{y+z} + \frac{yz}{x+y} + \frac{yz}{x+z}\right. \\
&\left. + \frac{xz}{y+z} + \frac{xz}{x+y}\right] \\
&= \frac{1}{4} \cdot \left[\frac{xy+yz}{x+z} + \frac{xy+xz}{y+z} + \frac{yz+xz}{x+y}\right] \\
&= \frac{1}{4} \cdot \left[\frac{y(x+z)}{x+z} + \frac{x(y+z)}{y+z} + \frac{z(x+y)}{x+y}\right] \\
&= \frac{x+y+z}{4}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{xy}{x+y+2z} + \frac{yz}{y+z+2x} + \frac{xz}{z+x+2y} \leq \frac{x+y+z}{4}.$$

A igualdade ocorre se, e somente se, $x+z = y+z$, $x+y = x+z$ e $y+z = x+y$, ou seja, $x = y = z$. $\square$

O problema a seguir traz uma aplicação das Médias Quadrática e Geométrica. O exemplo é uma adaptação de um problema presente na dissertação de Bonelli [2].

Problema 4.7: Sejam x e y números reais positivos. Mostre que:

$$\left(\frac{x}{y}+2+\frac{y}{x}\right)^4 \geq 250.$$

Solução: Para resolver esse exemplo utilizaremos a Desigualdade entre as médias Quadrática e Geométrica entre os números x e y, ou seja, MQ $\geq$ MG. Dessa forma, temos:

$$\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} \geq \sqrt{xy}.$$

Como x e y são números reais positivos, segue que

$$x^2+y^2 \geq 2xy. \tag{4.9}$$

Dividindo ambos os membros de (4.9) por $xy \neq 0$ obtemos

$$\frac{x^2+y^2}{xy} \geq 2 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{x}{y}+\frac{y}{x} \geq 2. \tag{4.10}$$

Somando 2 e elevando ambos os membros de (4.10) a quarta potência temos

$$\left(\frac{x}{y}+2+\frac{y}{x}\right)^4 \geq 4^4 = 256.$$

Assim, se $\left(\frac{x}{y}+2+\frac{y}{x}\right)^4 \geq 256$, então

$$\left(\frac{x}{y}+2+\frac{y}{x}\right)^4 \geq 250.$$

Para Bonelli [2], o problema a seguir pode ser provado por indução, mas o uso das Desigualdades das Médias facilita sua aplicação no Ensino Médio.

Problema 4.8: Seja $n \in \mathbb{N}$, com $n > 1$. Prove que

$$n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n.$$

Solução: Para resolver esse problema utilizaremos o Teorema 3.1, ou seja,

$$\frac{x_1+\cdots+x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1.\cdots.x_n}.$$

Nesse problema, utilizaremos $x_1 = 1, x_2 = 2, \cdots, x_n = n$, sendo $n > 1$. Dessa forma, temos

$$\frac{1+2+\cdots+n}{n} > \sqrt[n]{1\cdot 2\cdot \cdots \cdot n}. \tag{4.11}$$

A igualdade não existe em (4.11), uma vez que, $x_1 \neq x_2 \neq \cdots \neq x_n$. O numerador da fração do primeiro membro da desigualdade (4.11) é equivalente a uma soma de termos de uma Progressão Aritmética de razão igual a 1, logo,

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2},$$

segue que

$$\frac{n(n+1)}{2n} > \sqrt[n]{1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot n} = \sqrt[n]{n!} \quad \Rightarrow \quad \frac{(n+1)}{2} > \sqrt[n]{n!}. \tag{4.12}$$

Elevando a n ambos os membros de (4.12) temos

$$\left(\frac{n+1}{2}\right)^n > n!.$$

Como queríamos demonstrar.

Problema 4.9: Determine o valor máximo da função $f(x) = x^3(1-x)$.

Solução: Aplicaremos o Teorema 3.1, ou seja, MA $\geq$ MG. Utilizando os termos $\frac{x}{3}, \frac{x}{3}, \frac{x}{3}$ e $1 - x$ obtemos

$$\frac{\frac{x}{3} + \frac{x}{3} + \frac{x}{3} + (1-x)}{4} \geq \sqrt[4]{\frac{x}{3}\frac{x}{3}\frac{x}{3}(1-x)},$$

que é equivalente a

$$\frac{1}{4} \geq \sqrt[4]{\frac{f(x)}{27}}, \tag{4.13}$$

elevando a 4 ambos os membros de (4.13) e multiplicando a desigualdade por 27 segue que

$$\frac{27}{256} \geq f(x),$$

Portanto, o valor máximo da função $f(x)$ é $\frac{27}{256}$. Isso ocorre se, e somente se, $1 - x = \frac{x}{3}$, ou seja, se $x = \frac{3}{4}$.

O problema a seguir foi aplicado na avaliação nacional do PROFMAT [14].

Problema 4.10: Sejam x, y e z números reais positivos.

(a) Prove que $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + xz$

(b) Prove que $\frac{x+y+z}{3} \geq \sqrt{\frac{xy+yz+xz}{3}} \geq \sqrt[3]{xyz}$

(c) Use o item (b) para mostrar que se a equação $t^3 - at^2 + bt - c = 0$, em que a, b e c são números positivos, possui três raízes reais, então $a^6 \geq 27b^3 \geq 729c^2$.

Solução: a) Iremos aplicar a desigualdade entre as Médias Aritmética e Geométrica, MA $\geq$ MG, conforme as desigualdades a seguir.

$$\frac{x^2+y^2}{2} \geq \sqrt{x^2y^2} = xy, \tag{4.14}$$

$$\frac{y^2+z^2}{2} \geq \sqrt{y^2z^2} = yz, \tag{4.15}$$

$$\frac{x^2+z^2}{2} \geq \sqrt{x^2z^2} = xz. \tag{4.16}$$

Somando membro a membro das desigualdades (4.14), (4.15) e (4.16), obtemos

$$x^2+y^2+z^2 \geq xy+yz+xz, \tag{4.17}$$

conforme queríamos demonstrar.

b) Inicialmente mostraremos que $\dfrac{x+y+z}{3} \geq \sqrt{\dfrac{xy+yz+xz}{3}}$. Usando 4.16

$$x^2+y^2+z^2 \geq xy+yz+xz.$$

Somando $2xy+2yz+2xz$ em ambos os membros da desigualdade, temos

$$x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2xz \geq 3xy+3yz+3xz,$$

segue que

$$(x+y+z)^2 \geq 3xy+3yz+3xz. \tag{4.18}$$

Dividindo a desigualdade (4.18) por 9 e em seguida extraindo a raiz quadrada concluímos que

$$\frac{x+y+z}{3} \geq \sqrt{\frac{xy+yz+xz}{3}}.$$

Por fim, mostraremos que $\sqrt{\dfrac{xy+yz+xz}{3}} \geq \sqrt[3]{xyz}$. Aplicando MA $\geq$ MG nos termos xy, yz e xz obtemos

$$\frac{xy+yz+xz}{3} \geq \sqrt[3]{xyyzxz} = \sqrt[3]{x^2\cdot y^2\cdot z^2}. \tag{4.19}$$

Extraindo a raiz quadrada de (4.19) concluímos que

$$\sqrt{\frac{xy+yz+xz}{3}} \geq \sqrt[3]{xyz}.$$

Portanto, está provado que $\dfrac{x+y+z}{3} \geq \sqrt{\dfrac{xy+yz+xz}{3}} \geq \sqrt[3]{xyz}$.

c) Antes de mais nada, consideremos a equação polinomial de terceiro grau:

$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, sendo x_1, x_2 e x_3 suas raízes. Temos que

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3).$$

Dividindo toda equação por a, temos

$$x^3 + \frac{bx^2}{a} + \frac{cx}{a} + \frac{d}{a} = x^3 - (x_1 + x_2 + x_3)x^2 + (x_1x_2 + x_1x_3 + x_3x_2)x - (x_1x_2x_3).$$

Aplicando igualdade entre polinômios, encontramos as seguintes relações:

$$x_1 + x_2 + x_3 = \frac{-b}{a},$$

$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_3x_2 = \frac{c}{a}$$

e

$$x_1x_2x_3 = \frac{-d}{a}.$$

Essas são as relações de Girard [21] para uma equação do terceiro grau.

Sejam x, y e z as raízes da equação $t^3 - at^2 + bt - c = 0$. Utilizando as Relações de Girard temos que

$$\frac{-(-a)}{1} = a = x + y + z,$$

$$\frac{b}{1} = b = xy + yz + xz,$$

$$\frac{-(-c)}{1} = c = xyz.$$

Pelo item b) temos

$$\frac{x+y+z}{3} \geq \sqrt{\frac{xy + yz + xz}{3}} \geq \sqrt[3]{xyz},$$

segue que

$$\frac{a}{3} \geq \sqrt{\frac{b}{3}} \geq \sqrt[3]{c}, \tag{4.20}$$

ao elevar (4.20) à sexta potência e logo em seguida multiplicar por 729 concluímos que

$$a^6 \geq 27b^3 \geq 729c^2.$$

4.2 Problemas Geométricos

Os problemas que serão apresentados nessa seção possuem natureza geométrica, apesar das ferramentas algébricas utilizadas nas resoluções.

O exemplo a seguir foi aplicado no Exame Nacional de Acesso para o curso de Mestrado do PROFMAT em 2019 [11].

Problema 4.11: Um triângulo retângulo ABC, possui hipotenusa BC de medida

6 cm. A maior área possível, em cm^2, para ABC é

(a) 9.

(b) $\sqrt{83}$.

(c) $\sqrt{87}$.

(d) 10.

(e) 12.

Solução: Antes de mais nada, observemos que, pelo Teorema de Pitágoras, $b^2 + c^2 = 6^2$, sendo b e c os catetos do triângulo ABC. Para resolver esse problema aplicaremos a desigualdade entre as médias Quadrática e Geométrica, ou seja, $\text{MQ} \geq \text{MG}$ utilizando os termos b e c.

$$\sqrt{\frac{b^2 + c^2}{2}} \geq \sqrt{bc},$$

segue que

$$\frac{b^2 + c^2}{2} \geq bc \qquad \Rightarrow \qquad \frac{6^2}{2} \geq bc \qquad \Rightarrow \qquad 18 \geq bc. \tag{4.21}$$

Dividindo ambos os membros de (4.21) por 2, obtemos

$$9 \geq \frac{bc}{2}.$$

Porém, a área S do triângulo retângulo ABC é dada por $S = \dfrac{bc}{2}$. Dessa forma temos

$$9 \geq \ S.$$

Portanto, concluímos que a maior área possível, em cm^2, para ABC é 9.

As ideias presentes nos dois problemas a seguir foram retiradas do trabalho de Rigodanzo [19].

Antes de apresentar o próximo exemplo, iremos demonstrar uma propriedade que envolve medianas. Essa propriedade será necessária para resolução do Problema 4.12.

No triângulo ABC da Figura 4.1 , os segmentos $\overline{AE}$, $\overline{BD}$ e $\overline{CF}$ são medianas. Os triângulos ADG e CDG possuem a mesma área, denotada por x. A justificativa para isso é que os triângulos possuem bases congruentes, $\overline{AD} \cong \overline{CD}$, e a distância de G a essas bases é a mesma, ou seja, possuem a mesma altura, logo suas áreas são iguais. Utilizando a mesma ideia é possível concluirmos que as áreas dos triângulos CEG e BEG são iguais a y. Por fim, os triângulos BFG e AFG possuem áreas iguais a z, conforme Figura 4.1. De forma análoga, os triângulos BCD e ABD possuem bases congruentes, $\overline{AD} \cong \overline{CD}$, e mesma altura, que é equivalente à distância do vértice B

à base AC. Dessa forma, os triângulos BCD e ABD possuem áreas iguais, ou seja

$$x + 2y = x + 2z \qquad \Rightarrow \qquad y = z.$$

Aplicando a mesma ideia aos triângulos ACE e ABE temos

$$y + 2x = y + 2z \qquad \Rightarrow \qquad x = z,$$

como consequência,

$$x = y.$$

Portanto, os triângulos ACG, BCG e ABG possuem áreas iguais entre si, que corresponde, cada uma, a um terço da área do triângulo ABC.

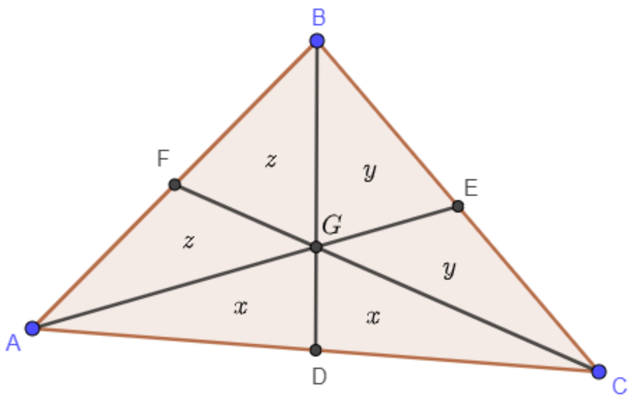


Figura 4.1: Medianas de um triângulo

Problema 4.12: Sejam G o baricentro do triângulo ABC, t, u e v as distâncias do baricentro aos lados a, b e c, respectivamente, conforme figura 4.2. Mostre que se r é o raio da circunferência inscrita nesse triângulo, então $\dfrac{t+u+v}{r} \geq 3$.

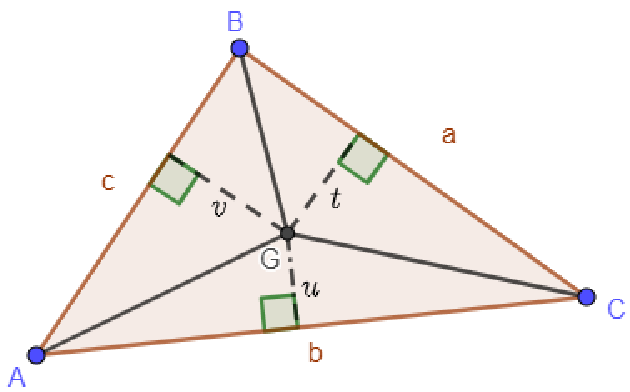


Figura 4.2: G é o baricentro do triângulo ABC

Solução: Utilizando a propriedade supracitada das medianas, os triângulos BCG, ABG e ACG possuem a mesma área. Se a área do triângulo ABC é igual a k, então

$$\frac{at}{2} = \frac{bu}{2} = \frac{cv}{2} = \frac{k}{3},$$

segue que

$$at = bu = cv = \frac{2k}{3}. \tag{4.22}$$

Por outro lado, seja I o incentro do triângulo ABC, então a área desse triângulo pode ser calculada somando as áreas dos triângulos AIC, AIB e BIC, sendo que esses triângulos possuem a altura com a mesma medida r, raio da circunferência inscrita e bases a, b e c, respectivamente. Dessa forma, temos

$$k = \frac{ar}{2} + \frac{br}{2} + \frac{cr}{2} = \frac{(a+b+c)r}{2}. \tag{4.23}$$

De (4.22) e (4.23) segue que

$$at = bu = cv = \frac{2\dfrac{(a+b+c)r}{2}}{3} = \frac{(a+b+c)r}{3}.$$

Portanto,

$$t = \frac{(a+b+c)r}{3a}, u = \frac{(a+b+c)r}{3b} e v = \frac{(a+b+c)r}{3c}.$$

Aplicando a Desigualdade das Médias Aritmética e Harmônica, ou seja, MA $\geq$ MH, em t, u e v, temos que

$$\begin{aligned} \frac{u+v+t}{3} &\geq \frac{3}{\dfrac{1}{u} + \dfrac{1}{v} + \dfrac{1}{t}} \\ &\geq \frac{3}{\dfrac{3a}{(a+b+c)r} + \dfrac{3b}{(a+b+c)r} + \dfrac{3c}{(a+b+c)r}} \\ &\geq \frac{3}{\dfrac{3(a+b+c)}{(a+b+c)r}}, \end{aligned}$$

logo,

$$\frac{u+v+t}{3} \geq \frac{3}{\dfrac{3}{r}} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{t+u+v}{r} \geq 3,$$

como desejávamos mostrar.

Problema 4.13: Determine a área máxima de um retângulo, com comprimento igual a $2x$ e largura $2y$, com seus lados paralelos aos eixos ordenados, que esteja inscrito numa elipse de equação $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$.

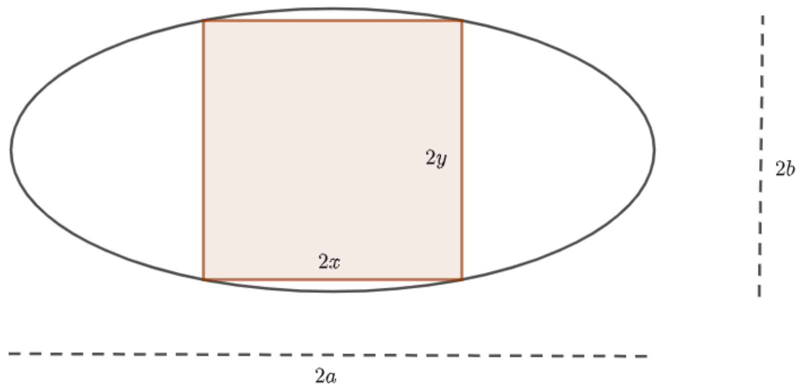


Figura 4.3: Retângulo inscrito em uma elipse

Solução: Aplicaremos a Desigualdade das Médias Quadrática e Geométrica, MQ $\geq$ MG, nos termos $\dfrac{x}{a}$ e $\dfrac{y}{b}$. Assim, obtemos

$$\sqrt{\frac{\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2}{2}} \geq \sqrt{\frac{x}{a}\frac{y}{b}}. \tag{4.24}$$

Utilizando que $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ da equação da elipse e substituindo em (4.24), obtemos

$$\sqrt{\frac{1}{2}} \geq \sqrt{\frac{x}{a}\frac{y}{b}}.$$

Elevando ambos os membros ao quadrado, segue que

$$\frac{1}{2} \geq \frac{x}{a}\frac{y}{b}.$$

A área do retângulo inscrito na elipse é dada por $k=2x.2y=4xy$. Assim, temos

$$\frac{1}{2} \geq \frac{4xy}{4ab}=\frac{k}{4ab},$$

ou seja,

$$\frac{1}{2} \geq \frac{k}{4ab} \qquad \Rightarrow \qquad k \leq 2ab.$$

Portanto, a área máxima do retângulo inscrito na elipse é igual a 2ab. Isso ocorre se, e somente se,

$$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Logo, as medidas do retângulo de área máxima são $2x=a\sqrt{2}$ e $2y=b\sqrt{2}$.

Problema 4.14: Qual deve ser a área mínima K de um cilindro circular reto de volume V e raio r ? Qual deve ser a altura h desse cilindro em função de r?

Solução: O volume do cilindro pode ser calculado pelo produto entre a área da base (círculo de raio r) e a altura.

$$V = \pi r^2.h.$$

Isolando h, segue que,

$$h = \frac{V}{\pi r^2}. \tag{4.25}$$

A área total do cilindro pode ser calculada da seguinte forma:

$$K = 2\pi r^2 + 2\pi r h, \tag{4.26}$$

que é equivalente à soma das áreas de duas bases com a área lateral. Das equações (4.25) e (4.26), obtemos:

$$K = \frac{2V}{r} + 2\pi r^2 = \frac{V}{r} + \frac{V}{r} + 2\pi r^2. \tag{4.27}$$

Aplicando a Desigualdade das Médias Aritmética e Geométrica, MA $\geq$ MG, em $\frac{V}{r}$, $\frac{V}{r}$ e $2\pi r^2$, obtemos

$$\frac{\frac{V}{r} + \frac{V}{r} + 2\pi r^2}{3} \geq \sqrt[3]{\frac{V}{r} \cdot \frac{V}{r} \cdot 2\pi r^2},$$

segue que

$$\frac{K}{3} \geq \sqrt[3]{V^2 \cdot 2\pi}.$$

Dessa forma, a área mínima é $K = 3\sqrt[3]{V^2 \cdot 2\pi}$. A igualdade supracitada ocorre se, e somente se,

$$\frac{V}{r} = 2\pi r^2 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\pi r^2 \cdot h}{r} = 2\pi r^2 \tag{4.28}$$

De (4.28) concluímos que $h = 2r$.

O próximo problema foi retirado de uma prova nacional do PROFMAT aplicada em 2011 [13].

Problema 4.15: Uma caixa com formato de um paralelepípedo reto sem tampa tem arestas medindo x, y e z. Mostre que, se o volume (V) da caixa é igual a 32, então sua área (S) é maior que ou igual a 48.

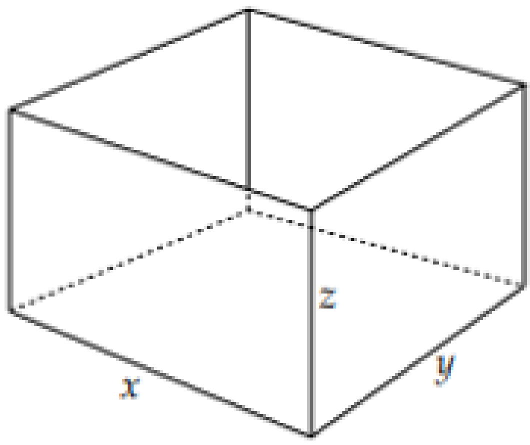


Figura 4.4: Paralelepípedo

Solução: A área da caixa é dada por:

$$S = 2yz + xy + 2zx$$

Assim podemos aplicar que MA $\geq$ MG da seguinte forma:

$$\frac{S}{3} = \underbrace{\frac{2yz + xy + 2zx}{3}}_{\text{MA}} \geq \underbrace{\sqrt[3]{2yz.xy.2zx}}_{\text{MQ}} = \sqrt[3]{4.V.V},$$

dessa forma,

$$\frac{S}{3} \geq \sqrt[3]{4.32.32},$$
$$\frac{S}{3} \geq \sqrt[3]{2^{12}},$$
$$\frac{S}{3} \geq \ 16,$$
$$S \geq 48.$$

Portanto, está mostrado que, se o volume (V) da caixa é igual a 32, então sua área (S) é maior que ou igual a 48. A igualdade ocorre quando $2yz = xy = 2zx$, ou seja, quando $x = y = 2z$. Como $xyz = 32$, então conclui-se que $x = y = 4$ e $z = 2$.

O problema a seguir foi extraído de uma lista de problemas do tópico "Desigualdades"do Portal da Matemática [7].

Problema 4.16: Para todo ângulo agudo α, mostre que $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{cotg}\alpha \geq 2$.

Solução: Sabendo que $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$, temos que $\operatorname{sen}\alpha, \cos\alpha > 0$. Portanto, podemos aplicar a Desigualdade das Médias Aritmética e Geométrica, MA $\geq$ MG, nos termos $\operatorname{tg}\alpha$ e $\operatorname{cotg}\alpha$. Segue que

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{cotg}\alpha}{2} \geq \sqrt{\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{cotg}\alpha},$$

ou seja,

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{cotg}\alpha}{2} \geq \sqrt{\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} \cdot \frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}} = 1,$$

logo,

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{cotg}\alpha \geq 2$$

A igualdade ocorre quando $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{cotg}\alpha$, ou seja, quando $\operatorname{sen}\alpha = \cos\alpha$. Como $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$, temos que $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

Problema 4.17: Determine o maior valor possível para $f(x) = \operatorname{sen} x + \cos x$, com $x \in \left(2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right), k \in \mathbb{Z}$.

Solução: Para resolver esse problema utilizaremos o Teorema 3.3, ou seja,

$$\mathrm{MQ} \geq \mathrm{MA}\,.$$

Assim, utilizando os termos $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$ temos

$$\sqrt{\frac{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x}{2}} \geq \frac{\operatorname{sen} x + \cos x}{2}$$

Porém, $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$, logo

$$\sqrt{\frac{1}{2}} \geq \frac{\operatorname{sen} x + \cos x}{2} \Rightarrow f(x) \leq \sqrt{2}.$$

Portanto, o maior valor possível para $f(x)$ é $\sqrt{2}$. Isso ocorre se, e somente se, $\operatorname{sen} x = \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, isso ocorre quando $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$.

5

A Média Aritmética-Geométrica

Neste capítulo, apresentaremos a média aritmética-geométrica, sua relação com Gauss e com sequências convergentes. Para nortear a construção das seções a seguir, utilizaremos como referência o livro de Gert Almkvist e Bruce Berndt [1] e a dissertação de Ilda Marisa de Sá Reis [20]. De acordo com Gert Almkvist e Bruce Berndt [1] , Gauss não publicou nada sobre a média aritmética-geométrica, mas contou ao seu amigo, H.C. Shumacher que havia descoberto a média em 1791, aos 14 anos. Por volta de 22 anos, Gauss fez um longo artigo sobre descobertas feitas com a média aritmética-geométrica, mas como dito anteriormente, nada foi publicado até o ano que faleceu. Mais tarde, foram encontradas algumas citações em seu diário. O que havia sido escrito e descoberto não era tão claro, de forma que ainda não é possível saber tudo que Gauss deixou sobre a média aritmética-geométrica. O objetivo desse capítulo é mostrar mais uma relação que existe entre as médias aritmética e geométrica. Mais informações e aplicações acerca dessa média podem ser encontradas nos trabalhos de Reis [20] e Almkvist e Berndt [1]. Antes de mais nada, apresentaremos algumas definições e teoremas envolvendo sequências de números reais.

5.1 Supremo e Ínfimo

As ideias, definições e teoremas que serão apresentadas nessa e na próxima seção são norteadas pelo livro de Análise Real do professor Elon Lages Lima [10].

Definição 5.1: Um conjunto não vazio $X \subset \mathbb{R}$ é limitado superiormente se existe $b \in \mathbb{R}$ tal que $x \leq b$, para todo $x \in X$. Neste caso, dizemos que b é uma cota superior de X.

Um conjunto não vazio $X \subset \mathbb{R}$ é limitado inferiormente se existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $a \leq x$, para todo $x \in X$. Neste caso, dizemos que a é uma cota inferior de X.

Exemplo 5.1.1: $X = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \cdots\right\}$ é limitado. Os números $0, -1, -2, \cdots$ são todos cotas inferiores de X. Enquanto, 1,2,3, $\cdots$ são todos cotas superiores de X.

Definição 5.2: Seja $X \subset \mathbb{R}$ não vazio e limitado superiormente. Dizemos que $b \in \mathbb{R}$

é o supremo de X quando b é a menor das cotas superiores, ou seja,

- $\forall\, x \in X$ tem-se $x \leq b$;
- Se $c \in \mathbb{R}$ tal que $x \leq c$ para todo $x \in X$, então $b \leq c$;
- Se $c < b$, então existe $x \in X$ tal que $c < x \leq b$.

Escrevemos $b = \sup X$.

Definição 5.3: Seja $X \subset \mathbb{R}$ não vazio e limitado inferiormente. Dizemos que $a \in \mathbb{R}$ é o ínfimo de X quando a é a maior das cotas inferiores, ou seja,

- $\forall\, x \in X$ tem-se $x \geq a$;
- Se $c \in \mathbb{R}$ tal que $x \geq c$ para todo $x \in X$, então $a \geq c$;
- Se $c > a$, então existe $x \in X$ tal que $a \leq x < c$.

Escrevemos $a = \inf X$.

Exemplo 5.1.2: Seja $X = \left\{ \dfrac{1}{n}; n \in \mathbb{N}^* \right\}$

- $x = 1$ é o supremo de X;
- $x = 0$ é o ínfimo de X.

5.2 Sequências de Números Reais

Definiremos o que é uma sequência.

Definição 5.4: Uma sequência de números reais é uma função $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, que relaciona a cada número natural n um número real x_n, denominado de n-ésimo termo da sequência. Nesse trabalho, utilizaremos (x_n) para indicar a sequência cujo n-ésimo termo é x_n.

Exemplo 5.2.1:

$$(x_n) = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots\right)$$

(x_n) é uma sequência na qual $x_n = \dfrac{1}{n}$.

Exemplo 5.2.2:

$$(x_n) = (1{,}2, \cdots, n, \cdots)$$

(x_n) é uma sequência na qual $x_n = n$.

Definição 5.5: Uma sequência (x_n) diz-se limitada superiormente e limitada inferiormente quando existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $x_n \leq c$ e $x_n \geq c$, respectivamente, para todo $n \in \mathbb{N}$. Uma sequência (x_n) é limitada quando ela é limitada superiormente e inferiormente, o que é o mesmo que: existe $k > 0$ tal que $|x_n| \leq k$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Exemplo 5.2.3: A sequência $(a_n) = \left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \cdots, \frac{n}{n+1}, \cdots\right)$ é limitada.

Exemplo 5.2.4: A sequência $(a_n) = (1,4,9,\cdots,n^2,\cdots)$ não é limitada.

Definição 5.6: Seja a_n uma sequência de números reais. Dizemos que uma sequência (a_n) *converge* para $l \in \mathbb{R}$, se para todo $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|a_n - l| < \varepsilon$, para todo $n > n_0$. Escrevemos $\lim a_n = l$. Uma sequência que não converge para nenhum número é chamada *divergente.*

Exemplo 5.2.5: A sequência $(a_n) = \left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \cdots, \frac{n}{n+1}, \cdots\right)$ é convergente.

Observemos que, dado qualquer $\varepsilon > 0$,

$$|a_n - 1| = \left|\frac{n}{n+1} - 1\right| = \frac{1}{n+1} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon} - 1.$$

Assim, dado qualquer $\varepsilon > 0$, existe $n_0 > \frac{1}{\varepsilon} - 1$ tal que

$$n > n_0 \qquad \Rightarrow \qquad \left|\frac{n}{n+1} - 1\right| < \varepsilon.$$

Portanto, de acordo com a definição 5.6, a sequência converge para o número 1.

Exemplo 5.2.6: A sequência $(a_n) = (-1,1,-1,1,\cdots,(-1)^n,\cdots)$ é divergente.

Teorema 5.1: (Unicidade do limite) Uma sequência não pode convergir para dois limites distintos.

Demonstração. Suponha que existam $l_1 \neq l_2 \in \mathbb{R}$ tal que $\lim a_n = l_1$ e $\lim a_n = l_2$.

$$\lim a_n = l_1 \Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists\, n_1 \in \mathbb{N}; |a_n - l_1| < \varepsilon, \forall\, n > n_1,$$

$$\lim a_n = l_2 \Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists\, n_2 \in \mathbb{N}; |a_n - l_2| < \varepsilon, \forall\, n > n_2,$$

Sejam $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ e $\varepsilon = \frac{|l_1 - l_2|}{2}$, temos que

$$\begin{aligned}|l_1 - l_2| = |l_1 - a_n + a_n - l_2| &\leq |a_n - l_1| + |a_n - l_2| \\ &< \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon = |l_1 - l_2|, \forall\, n > n_0.\end{aligned}$$

Segue que $|l_1 - l_2| < |l_1 - l_2|$. Que é um absurdo.

Portanto, uma sequência não pode convergir para dois limites distintos. $\square$

Definição 5.7: Uma sequência (x_n) é denominada monótona quando ocorre $x_n \leq x_{n+1}$ (monótona não-decrescente) para todo $n \in \mathbb{N}$ ou $x_{n+1} \leq x_n$ (monótona não-crescente) para todo n. Se tivermos $x_n < x_{n+1}$, para todo $n \in \mathbb{N}$, dizemos que a sequência é crescente e se $x_{n+1} < x_n$, para todo n, a sequência é dita decrescente.

Exemplo 5.2.7: A sequência $(x_n) = (1,2,\ldots,n,\ldots)$ é monótona crescente e ilimitada.

Exemplo 5.2.8: A sequência $(x_n) = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\right)$ é monótona decrescente e limitada. Observemos que a sequência $(x_n) = \frac{1}{n}$ converge para o número 0. Para todo $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - 0| < \varepsilon, \forall\, n > n_0$. Seja $|x_n - 0| = |x_n| = |\frac{1}{n}| < \varepsilon$. Se $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$, então

$$|x_n - 0| = |x_n| = |\frac{1}{n}| < |\frac{1}{n_0}| < \varepsilon, \forall\, n > n_0.$$

Portanto, de acordo com a Definição 5.6, a sequência converge para o número 0.

Teorema 5.2: Toda sequência monótona limitada é convergente.

Demonstração. Seja (a_n) uma sequência monótona não decrescente e limitada, ou seja,

$$a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n \leq \cdots \leq M.$$

Considere $A = \{a_1, a_2, a_3, \cdots\}$. A é limitado superiormente e, portanto, possui supremo. Digamos $\sup A = l$. Afirmação: $\lim a_n = l$. De fato, dado $\varepsilon > 0$, temos que $l - \varepsilon$ não é cota superior de A. Assim, existe a_{n_0} tal que $l - \varepsilon < a_{n_0} \leq l + \varepsilon$. Então para todo $n > n_0$

$$l - \varepsilon < a_{n_0} \leq a_n \leq l < l + \varepsilon,$$

logo,

$$l - \varepsilon < a_n < l + \varepsilon,$$

portanto,

$$|a_n - l| < \varepsilon,$$

ou seja, $\lim a_n = l$. □

Teorema 5.3: Seja $\lim x_n = x$, $\lim y_n = y$ e $a \in \mathbb{R}$ então:

1. $$\lim(x_n + y_n) = x + y$$

2. $$\lim(x_n - y_n) = x - y.$$

3. $$\lim a(x_n) = ax$$

Demonstração. Sendo $\lim x_n = x$ e $\lim y_n = y$, temos, respectivamente que, existem n_1 e n_2 em $\mathbb{N}$ tais que

$$n > n_1 \Rightarrow |x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2}$$

e

$$n > n_2 \Rightarrow |y_n - y| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Seja $n_0 = \max\{n_1,n_2\}$, logo

$$|(x_n+y_n)-(x+y)| = |(x_n-x)+y_n-y| \leq |x_n-x|+|y_n-y| < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon, \forall\, n > n_0.$$

Assim, está provado que $\lim(x_n + y_n) = x + y$. De maneira análoga se prova a diferença. □

Agora, realizaremos a demonstração do item 3.

Demonstração. Como $\lim x_n = x$, dado $\varepsilon > 0$, $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$, tal que

$$|x_n - x| < \frac{\varepsilon}{|a|}, \forall\, n > n_0.$$

Desejamos provar que $\lim a(x_n) = ax$. Assim,

$$|a||x_n - x| = |ax_n - ax|$$

Portanto, dado $\varepsilon > 0$, e escolhendo o mesmo $n_0 \in \mathbb{N}$, temos que

$$|ax_n - ax| < |a|\frac{\varepsilon}{|a|} = \varepsilon, \forall\, n > n_0.$$

Logo, $\lim a(x_n) = ax$. □

5.3 A Média Aritmética-Geométrica

Sejam a e b números positivos com $a > b$, onde $a = a_0$ e $b = b_0$. Construiremos uma sequência de médias aritméticas e uma sequência de médias geométricas, como segue:

$$a_1 = \frac{a+b}{2} \qquad b_1 = \sqrt{ab}$$

$$a_2 = \frac{a_1+b_1}{2} \qquad b_2 = \sqrt{a_1 b_1}$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$a_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2} \qquad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$$

Observemos o seguinte exemplo numérico:

Exemplo 5.3.1: Sejam $a = 1$ e $b = 0{,}8$, então temos que:

$$a_1 = 0{,}90 \qquad b_1 = 0{,}894427190999915,$$

$$a_2 = 0{,}897213595499957, \qquad b_2 = 0{,}897209268732734,$$

$$a_3 = 0{,}897211432116346, \qquad b_3 = 0{,}897211432113738,$$

$$a_4 = 0{,}897211432115042, \qquad b_4 = 0{,}897211432115042,$$

Esse exemplo nos traz ideia de que a_n e b_n são convergentes. Mais ainda, convergem para o mesmo limite. Vamos mostrar com o Teorema 5.4 que esse é um fato geral.

Teorema 5.4: As sequências a_n e b_n definidas em 5.3 são convergentes. Mais ainda, convergem para o mesmo limite que é denotado por $M_{(a,b)}$.

Demonstração. Se $a = b$ as sequências a_n e b_n são constantes. Suponhamos, sem perda de generalidade, que $a > b$. Devemos provar as seguintes desigualdades:

i) $b_n < a_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$

Mostraremos que essa desigualdade é verdadeira pelo Princípio da Indução Finita. Por hipótese, a desigualdade é válida para $n = 0$. Suponhamos que ela seja válida para $n = k$. Devemos mostrar que a desigualdade é válida para $n = k + 1$.

$$(a_k - b_k)^2 > 0,$$

somando $4a_kb_k$ em ambos os membros da desigualdade, obtemos

$$(a_k + b_k)^2 > 4a_kb_k,$$

extraindo a raiz quadrada, segue que

$$\frac{a_k + b_k}{2} > \sqrt{a_kb_k} \qquad \Rightarrow \qquad a_{k+1} > b_{k+1}.$$

Assim, pelo Princípio da Indução Finita, $b_n < a_n$, com $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

ii) $b_n < b_{n+1}$

Pelo item i) temos

$$b_n < a_n$$

multiplicando a desigualdade por b_n e em seguida extraindo a raiz quadrada, obtemos

$$b_n < \sqrt{a_nb_n}.$$

Porém, $\sqrt{a_nb_n} = b_{n+1}$, logo $b_n < b_{n+1}$.

iii) $a_{n+1} < a_n$

Pelo item i) temos

$$b_n < a_n,$$

somando a_n em ambos os membros obtemos

$$a_n + b_n < 2a_n \qquad \Rightarrow \qquad \frac{a_n + b_n}{2} < a_n.$$

Entretanto, $\dfrac{a_n + b_n}{2} = a_{n+1}$, logo $a_{n+1} < a_n$.

As três desigualdades supracitadas mostram que a sequência b_n é crescente e limitada superiormente por a e que a sequência a_n é decrescente e limitada inferiormente por b. Dessa forma, temos

$$b < b_1 < b_2 < \cdots < b_n < a_n < \cdots < a_2 < a_1 < a.$$

Logo, as duas sequências são convergentes. Agora devemos mostrar que essas sequências convergem para o mesmo limite. Supondo que $\lim a_n = l$ e que $\lim b_n = m$. Seja

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2},$$

tomando os limites em ambos os membros

$$\lim a_{n+1} = \lim \frac{a_n + b_n}{2}.$$

Utilizando as propriedades de limite de uma sequência, o Teorema 5.3 e considerando que os limites existem, temos

$$\lim a_{n+1} = \frac{\lim a_n + \lim b_n}{2}.$$

Portanto,

$$l = \frac{l + m}{2} \qquad \Rightarrow \qquad l = m.$$

Logo, as sequências convergem para o mesmo limite. □

Definição 5.8: O limite comum das sequências a_n e b_n, denotado por $M_{(a,b)}$, é denominado *Média aritmética-geométrica.*

6

Atividades

Neste capítulo, apresentaremos 2 atividades. A primeira sobre as médias e as desigualdades entre as médias, que foi desenvolvida e aplicada em uma turma do 3º ano do Ensino Médio. A segunda atividade tem como objetivo trabalhar as ideias de sequências e a média aritmética-geométrica.

6.1 Atividade 1 - Desigualdade Entre as Médias

Nesta seção, apresentaremos uma atividade que foi realizada em uma turma do 3º ano do Ensino Médio de um colégio da região metropolitana de Belo Horizonte. A atividade foi desenvolvida em 5 encontros de 50 minutos, sendo que 18 alunos participaram de todas as aulas.

6.1.1 As Aulas

Nas duas primeiras aulas revisamos as definições de médias aritmética e geométrica. A maioria dos alunos não apresentou dificuldades e conseguiram dar um bom retorno sobre o entendimento e os problemas em que podemos aplicar a média aritmética e a média geométrica. A maior parte das aulas foi destinada ao trabalho com as médias harmônica e geométrica. Só dois alunos disseram conhecer a média harmônica, enquanto a média quadrática era desconhecida por todos até então. Porém, após apresentar a definição de média quadrática, um aluno disse que ela tinha uma ideia próxima da fórmula de desvio padrão. Apesar de não conhecer a definição formal, ele já possuía uma concepção de onde era possível encontrar média quadrática. Com a média harmônica não foi diferente. Apresentei aos alunos a Definição 2.3 e logo em seguida coloquei o Exemplo 2.3.1 no quadro. Alguns alunos, inclusive já haviam resolvido o problema, como treinamento para o Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), mas, mais uma vez, não sabiam que se tratava da média harmônica. Outros exercícios que foram tratados nessas aulas foram os Exemplos 2.1.1, 2.1.2 e 2.2.1 presentes no Capítulo 2 deste trabalho. No fim da segunda aula falei que o objetivo das duas próximas aulas seria trabalhar com as desigualdades entre as médias.

No início da terceira aula, apresentei o Teorema 3.1, no qual mostra que a média aritmética é maior que ou igual a média geométrica. Esse, talvez, foi a desigualdade na qual eles mais gostaram, pelo fato de termos resolvidos muitos problemas utilizando essa ferramenta. Para demonstrar o Teorema 3.1 utilizamos as demonstrações das Subseções 3.1.5 e 3.1.4. Ambas as demonstrações são válidas apenas para dois termos, mas uma tem viés algébrico, enquanto a outra utiliza-se da geometria. Todos os alunos deram um retorno positivo sobre as demonstrações e alguns ficaram bem engajados e participaram das provas realizadas. Em seguida, falamos sobre o Teorema 3.2, no qual a média geométrica é maior que ou igual a média harmônica. Para mostrar a validade do Teorema utilizamos a demonstração da Subseção 3.2.1, como essa demonstração foi baseada no Teorema 3.1, ninguém apresentou dificuldades na discussão realizada sobre a prova. Em função de ter gasto praticamente um horário nas desigualdades supracitadas, o Teorema 3.3, na qual a média aritmética é menor que ou igual a média quadrática, foi apenas apresentado e em seguida trabalhamos a resolução de problemas baseado nos Teoremas utilizados. A parte prática foi a que os alunos mais participaram e mostraram interesse. Para ilustrar os Teoremas, resolvemos alguns exemplos presentes no Capítulo 4. Os problemas discutidos foram os exemplos: 4.1, 4.3, 4.4, 4.7, 4.11, 4.14, 4.15 e 4.17. As resoluções e discussões dos problemas foram muito ricas e os resultados das 4 aulas iniciais poderão ser observados no teste que foi aplicado na última aula.

6.1.2 Teste aplicado

O teste aplicado buscou verificar se a teoria sobre as desigualdades entre as médias foi bem assimilada pelos alunos. O teste, conforme Apêndice A.1, possui 4 problemas relacionados às desigualdades e uma pergunta, a última, relacionada a opinião crítica da atividade, da teoria vista, das possibilidades que elas podem trazer para a resolução de problemas. Para resolver as duas primeiras questões, envolvendo geometria sólida, desejava-se que os alunos aplicassem a desigualdade entre as médias aritmética e geométrica, ou seja MA $\geq$ MG, a diferença entre as questões foi o sólido apresentado em cada uma delas e os cálculos da Questão 2 foram mais complexos do que a do primeiro problema. No terceiro problema,também esperava-se que os alunos aplicassem MA $\geq$ MG, porém o contexto era relacionado ao cálculo de valor máximo de uma função. Por fim, no Problema 4, desejava-se que os alunos aplicassem que a Média quadrática é maior que ou igual a média geométrica, ou seja, MQ $\geq$ MG. A aplicação foi semelhante a um trabalho avaliativo. Como os alunos não possuíam aporte teórico para resolver as questões, porém foi necessário realizar pequenas intervenções. Em função de terem ocorrido poucas aulas e material bibliográfico, registrei no quadro da sala as definições de médias e as desigualdades trabalhadas nas 4 aulas teóricas. O tempo destinado à resolução do teste foi de aproximadamente 60 minutos. Os 18 alunos que participaram das aulas responderam ao teste proposto. Na próxima seção, apresentaremos os resultados alcançados após a aplicação do teste.

6.1.3 Resultados alcançados

Nessa seção, mostraremos o que os alunos conseguiram absorver da atividade através das respostas dadas ao teste proposto, conforme Apêndice A.1.

O primeiro problema proposto foi respondido por todos os alunos, porém 15 conseguiram chegar à conclusão que o maior volume possível da caixa era $4000\,\text{cm}^3$. Entretanto, o problema também pedia para que as dimensões da caixa fossem encontradas, o que nenhum aluno conseguiu concluir. Isso talvez evidencie que a aplicação da desigualdade das médias aritmética e geométrica, MA $\geq$ MG, para solucionar o problema ficou clara, mas a ideia de que para a igualdade ocorra, os termos que estão envolvidos nas médias sejam iguais não foi lembrado ou entendido por nenhum aluno nesse momento.

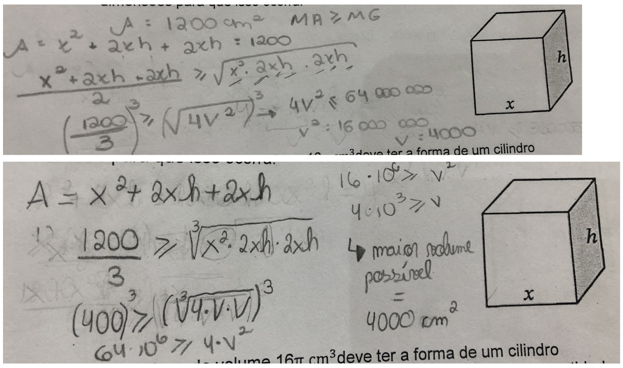


Figura 6.1: Duas resoluções da questão 01

No segundo problema, a proposta era semelhante a da questão anterior, porém os cálculos eram mais complexos. 15 alunos responderam a questão, porém só 2 conseguiram encontrar que a menor área do cilindro era $24\pi\,\text{cm}^2$. Mais uma vez, nenhum aluno conseguiu encontrar as dimensões do cilindro, utilizando a igualdade entre os termos envolvidos nas médias, o que ratifica a análise dos resultados da Questão 01. A maioria dos alunos conseguiram aplicar MA $\geq$ MG, porém se perderam nos cálculos e não foi possível concluir o que foi pedido.

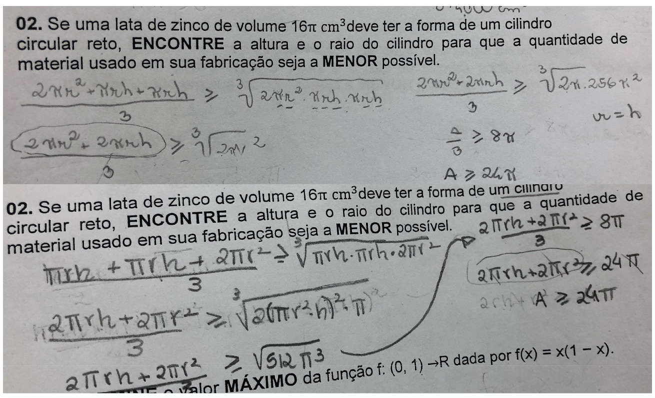


Figura 6.2: Duas resoluções da questão 02

No Problema 03, a ideia era descobrir que o valor máximo de uma função quadrática era $y = \dfrac{1}{4}$. Esperávamos que todos utilizassem que MA $\geq$ MG, mas 1 aluno utilizou o que é conhecido no Ensino Médio como y_v (y do vértice). Entre os 17 alunos restantes, 16 conseguiram chegar ao resultado correto e 1 não obteve

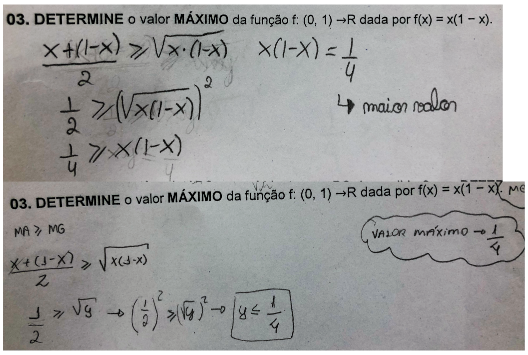


Figura 6.3: Duas resoluções da questão 03

sucesso na resolução, uma vez que ele não conseguiu compreender em quais termos deveria aplicar a desigualdade entre as médias.

No quarto e último problema do teste, a solução da questão era que a maior área possível do triângulo era $16\,\mathrm{cm}^2$. Todos conseguiram resolver e chegar ao resultado correto. Nesse item, a desigualdade das médias quadrática e geométrica, $\mathrm{MQ} \geq \mathrm{MG}$, seria a ferramenta que contribuiria para a solução do problema.

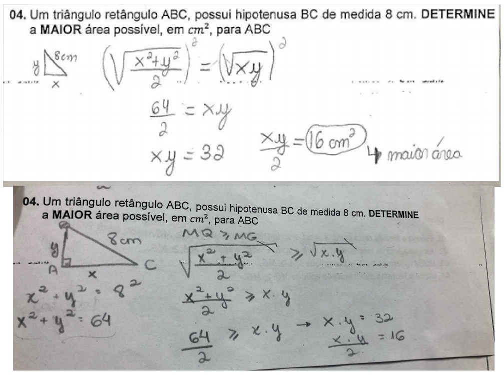


Figura 6.4: Duas resoluções da questão 04

O gráfico a seguir mostra o desempenho dos alunos no teste aplicado.

Figura 6.5: Desempenho dos alunos no teste da Atividade 1

A atividade foi muito valiosa e trouxe boas reflexões. Acredito que o tempo destinado à resolução do teste foi insuficiente, uma vez que o contato que os alunos tiveram com as desigualdades foi bem rápido (apenas 4 aulas). Como foi o primeiro contato, acredito que um tempo maior para a aplicação talvez trouxesse melhores resultados. Para a igualdade ocorrer em MA $\geq$ MG, os termos que estão envolvidos nas médias devem ser iguais. Ficou evidenciado através das Questões 01 e 02 que isso não ficou claro para os alunos. Mas, pelo pouco tempo em que a atividade foi desenvolvida, os resultados foram satisfatórios. A maioria dos estudantes gostaram e pensam que trabalhar as médias e as desigualdades no Ensino Médio é viável, por mais que seja um trabalho extra ou paralelo. Dois alunos disseram que encontraram dificuldades e consideraram complexo o assunto abordado. A seguir, apresentaremos três depoimentos de alunos após a realização da atividade 6.1. Utilizaremos A_1, A_2 e A_3 como identificações desses estudantes.

Depoimento de A_1: "Após a atividade apresentada pelo professor Kleber, concluo que as desigualdades entre as médias é um método de rápido desenvolvimento de exercícios. Dessa forma, os alunos do Ensino Médio, após algumas aulas de prática, têm total capacidade de aplicar esses ensinamentos e solucionar problemas que talvez não sejam solucionados usando-se outros métodos do E.M.".

Depoimento de A_2: "As desigualdades entre as médias é uma matéria interessante e prática, visto que por meio dela é possível resolver problemas com resoluções clássicas extensas e complicadas de forma mais rápida e simples. Além disso, acredito que é sim possível trabalhar com essa matéria no Ensino Médio, já que médias já é uma matéria trabalhada".

Depoimento de A_3: "Eu achei muito interessante, pois justifica muitos assuntos da matemática, adorei como foi exposta a matéria apesar de ser muito complexa. E acho que deva ser ensinada no Ensino Médio como uma matéria extra.

Em geral, os alunos gostaram da atividade. A maioria entende que é possível trabalhar com as desigualdades entre as médias no Ensino Médio, nem que seja como um projeto paralelo. Como dito anteriormente, dois estudantes alegaram que o tema é complexo. Acredito que a dificuldade possa estar atrelada ao pouco tempo para a realização da atividade. Talvez com mais aulas, tais dificuldades possam ser sanadas.

6.2 Atividade 2 - A Média Aritmética-Geométrica

Nesta seção, apresentaremos uma proposta de atividade para ser desenvolvida com alunos do Ensino Médio com objetivo de se trabalhar com sequências monótonas e não monótonas, as ideias intuitivas de limite, convergência, divergência e por fim, entender o conceito de média aritmética-geométrica. Para que os cálculos não se tornem obstáculo para o entendimento e desenvolvimento da atividade, pensamos que a calculadora deva ser utilizada como ferramenta para otimizar o tempo e contribuir na visualização do comportamento de algumas sequências. Também é possível utilizar planilhas eletrônicas como ferramenta nessa atividade. A seguir, apresentaremos os exercícios que compõem a atividade.

Exercício 6.2.1: Observe a seguinte sequência: $(a_n) = (1{,}4{,}9, \dots)$.

(a) Determine os quatro próximos termos dessa sequência;

(b) Determine o termo geral a_n da sequência;

(c) Essa sequência é monótona ou não monótona?

(d) Na medida que o "próximo" termo da sequência é encontrado, é possível verificar se esses termos estão se aproximando de um mesmo número? Em caso afirmativo, qual o número?

Exercício 6.2.2: Observe a sequência a seguir, conhecida como Sequência de Fibonacci: $(b_n) = (1{,}1{,}2{,}3{,}5{,}8{,}13, \dots)$.

(a) Determine os quatro próximos termos dessa sequência;

(b) Determine o termo geral b_n da sequência, para $n \geq 3$;

(c) Essa sequência é monótona ou não monótona?

(d) Na medida que o "próximo" termo da sequência é encontrado, é possível verificar se esses termos estão se aproximando de um mesmo número? Em caso afirmativo, qual o número?

Exercício 6.2.3: Observe a sequência a seguir: $(c_n) = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\right)$.

(a) Determine os quatro próximos termos dessa sequência;

(b) Determine o termo geral c_n da sequência;

(c) Essa sequência é monótona ou não monótona?

(d) Na medida que o "próximo" termo da sequência é encontrado, é possível verificar se esses termos estão se aproximando de um mesmo número? Em caso afirmativo, qual o número?

Exercício 6.2.4: Observe a sequência a seguir: $(d_n) = \left(\frac{1}{4}, \frac{2}{7}, \frac{3}{10}, \frac{4}{13}, \dots\right)$.

(a) Determine os quatro próximos termos dessa sequência;

(b) Determine o termo geral d_n da sequência;

(c) Essa sequência é monótona ou não monótona?

(d) Na medida que o "próximo" termo da sequência é encontrado, é possível verificar se esses termos estão se aproximando de um mesmo número? Em caso afirmativo, qual o número?

Exercício 6.2.5: Observe a seguinte sequência: $(e_n) = (-2{,}4, -8{,}16, \dots)$.

(a) Determine os quatro próximos termos dessa sequência;

(b) Determine o termo geral e_n da sequência;

(c) Essa sequência é monótona ou não monótona?

(d) Na medida que o "próximo" termo da sequência é encontrado, é possível verificar se esses termos estão se aproximando de um mesmo número? Em caso afirmativo, qual o número?

Nos itens (a) e (b) dos Exercícios 6.2.1, 6.2.2, 6.2.3, 6.2.4 e 6.2.5, esperamos que os alunos percebam os padrões das sequências e consigam determinar os quatro termos seguintes e sejam capazes de generalizar encontrando o termo geral de cada sequência. Já no item (c), pretendemos trabalhar com o conceito de sequências monótonas e não monótonas. O termo "monótono" não é muito difundido no Ensino Médio, os termos mais usuais são "crescente" e "decrescente". Dessa forma, pode ser que o professor necessite relacionar esses conceitos antes ou durante a realização da atividade. Já no item (d), mesmo sem formalizar o que é limite, convergência e divergência, esperamos que, intuitivamente e com intervenções do professor responsável pela atividade, os alunos consigam entender o que é uma sequência convergente e divergente e tenham a ideia do que é o limite de uma sequência.

Exercício 6.2.6: Sejam $a = 2$ e $b = 1$. (a_n) e (b_n) são sequências de médias aritmética e geométrica, respectivamente, que deverão ser construídas segundo as seguintes leis:

$$a_1 = \frac{a+b}{2} \qquad\qquad b_1 = \sqrt{ab}$$

$$a_2 = \frac{a_1+b_1}{2} \qquad\qquad b_2 = \sqrt{a_1 b_1}$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$a_n = \frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2} \qquad\qquad b_n = \sqrt{(a_{n-1}) \cdot (b_{n-1})}$$

(a) Determine os quatro primeiros termos da sequência a_n;

(b) Determine os quatro primeiros termos da sequência b_n;

(c) Baseado nos termos encontrados nos itens anteriores, estabeleça relações entre os termos das sequências de médias aritmética e geométrica.

Esperamos que com o Exercício 6.2.6 os alunos entendam o que é a média aritmética-geométrica. O professor deverá induzir os estudantes a perceberem que as sequências (a_n) e (b_n) se aproximam de um mesmo número. Nesse exercício, a_4 e b_4 são iguais até a décima casa decimal, 1,4567910310, ou seja, com apenas 4 termos de cada sequência, já será possível observar, intuitivamente, que as sequências convergem para o mesmo número. O professor deverá mostrar aos alunos que esse número é denominado *média aritmética-geométrica*. Talvez seja interessante fazer outros exemplos numéricos para verificar a ocorrência da convergência mais vezes. O trabalho de forma generalizada no Ensino Médio demandaria outros pré-requisitos que não são desenvolvidos ao longo do Ensino Básico. O Exercício 6.2.7, o último da atividade, será aplicado para verificar se o que foi discutido no Exercício 6.2.6 foi suficiente para a compreensão da média. A ideia é que os alunos tentem resolvê-lo sem maiores intervenções.

Exercício 6.2.7: Sejam $a = 1$ e $b = 0{,}9$. (a_n) e (b_n) são sequências de médias aritmética e geométrica, respectivamente, que deverão ser construídas segundo as seguintes leis:

$$a_1 = \frac{a+b}{2} \qquad\qquad b_1 = \sqrt{ab}$$

$$a_2 = \frac{a_1+b_1}{2} \qquad\qquad b_2 = \sqrt{a_1 b_1}$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$a_n = \frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2} \qquad\qquad b_n = \sqrt{(a_{n-1}) \cdot (b_{n-1})}$$

(a) Determine os quatro primeiros termos da sequência a_n;

(b) Determine os quatro primeiros termos da sequência b_n;

(c) Baseado nos termos encontrados nos itens anteriores, determine o número, com aproximação de 8 casas decimais, para o qual ambas as sequências se aproximam?

A construção dessa atividade foi finalizada em meados de dezembro, num momento em que o período de aulas já havia terminado. Esse foi o motivo pelo qual não foi possível aplicar as atividades da atividade em sala de aula, uma vez que os alunos já estavam de férias.

7

Considerações finais

As desigualdades das médias podem ser utilizadas como forte artifício na resolução de muitos problemas presentes no Ensino Médio e no Ensino Superior. Essa percepção veio no período em que cursei o primeiro ano do curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, na disciplina de matemática discreta, quando estudei as desigualdades das médias. Na preparação para o Exame Nacional de Qualificação (ENQ), percebi como ela pôde auxiliar na resolução de vários problemas. Espero que esse trabalho sirva como alicerce para que professores e alunos discutam possibilidades e problemas presentes nos diversos níveis de ensino, inclusive para novos estudantes do PROFMAT.

Apresentamos as definições das médias aritmética, geométrica, harmônica e geométrica e as desigualdades entre elas. A partir dos documentos oficiais como: PCN, CBC e BNCC, verificamos os anos escolares nos quais podemos trabalhar com as médias e algumas demonstrações que as envolvem. Apresentamos algumas opções de demonstrações para as desigualdades entre as médias, como: algébrica e/ou geométrica, com apenas 2 termos ou com n termos.

Para ilustrar as aplicabilidades das desigualdades entre as médias, mostramos no Capítulo 4 uma gama de problemas e suas respectivas soluções. Apresentamos problemas algébricos e geométricos e foi possível perceber que muitos deles envolvem ideias de máximos e mínimos. Entendemos que os Capítulos 3 e 4 podem ser utilizados como referências também por alunos que cursam o PROFMAT, uma vez que vários problemas discutidos fazem parte do curso de mestrado profissional.

Mostramos uma importante relação entre as médias aritmética e geométrica que é denominada *Média arimética-geométrica*. Na verdade, verificamos que a Média arimética-geométrica é um número real para a qual duas sequências de médias arimética e geométrica convergem.

A partir dos Capítulos 2, 3 e 4 desenvolvemos e aplicamos a Atividade 6.1 em uma turma de 18 alunos do Ensino Médio de um colégio da região metropolitana de Belo Horizonte. Verificamos que é possível trabalhar com todas as médias e resolver problemas utilizando as desigualdades entre as médias. Com apenas 5 aulas, os alunos entenderam bem a proposta da atividade e, mesmo com algumas dificuldades, os resultados alcançados foram satisfatórios.

Por fim, deixamos a Atividade 6.2 como proposta de sequência didática para se trabalhar com alunos do Ensino Médio os conceitos intuitivos de limite, convergência, divergência, sequências monótonas e também o entendimento de Média aritmética-geométrica. Em suma, essa atividade tem como objetivo aplicar as ideias apresentadas no Capítulo 5.

A

Teste-Desigualdade das Médias

O teste a seguir foi aplicado na 5ª aula da atividade 6.1 realizada.

A.1 Teste

UNIVERSIDADE FEDERAL DE VIÇOSA

Aluno: Kleber de Almeida Vailante – kvailante@gmail.com

Orientador: Mehran Sabeti - mehran.sabeti@gmail.com

Coorientador: Luiz Gustavo Perona - lgexatas@gmail.com

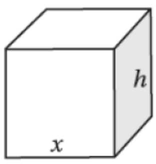
Dissertação de Mestrado

Universidade Federal de Viçosa –Campus Florestal MG

PROFMAT

A desigualdade das médias como ferramenta de resolução de problemas

(**01**) Se $1200\,\text{cm}^2$ de material estiverem disponíveis para fazer uma caixa com uma base quadrada e sem tampa, ENCONTRE O MAIOR volume possível da caixa e as dimensões para que isso ocorra.



(**02**) Se uma lata de zinco de volume $16\pi\,\text{cm}^3$ deve ter a forma de um cilindro circular reto, ENCONTRE a altura e o raio do cilindro para que a quantidade de material usado em sua fabricação seja a MENOR possível.

(**03**) DETERMINE o valor MÁXIMO da função $f : (0, 1) \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x(1 - x)$.

(**04**) Um triângulo retângulo ABC, possui hipotenusa BC de medida $8\,\text{cm}$. DETERMINE a MAIOR área possível, em cm^2, para ABC.

(05) Após a atividade, o que você pode dizer sobre as desigualdades entre as médias? Acha que ela pode ser trabalhada no Ensino Médio? Elas podem contribuir para a resolução de problemas que hoje talvez não seja possível resolvê-los? Deixe um comentário aqui sobre a atividade, sua opinião, percepção, críticas e sugestões.

Bibliografia

[1] Bailey, D. e Borwein, J. *Pi: The Next Generation: A Sourcebook on the Recent History of Pi and Its Computation*. Springer International Publishing, 2016. URL: https://books.google.com.br/books?id=K26zDAAAQBAJ.

[2] Bonelli, R. C. "Desigualdades Matemáticas e Aplicações". Diss. de mestr. Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", 2017.

[3] Carneiro, M. J. D., Spira, M. e Sabatucci., J. *Currículo Básico Comum (CBC) de Matemática*. 2003.

[4] Carvalho, P. C. P. e Oliveira Morgado, A. C. de. *Matemática Discreta*. 2ª Ed. Coleção Profmat. SBM, 2015, p. 192.

[5] Costa Carvalho, L. M. A. da. "Problemas com desigualdades para o Ensino Secundário". Diss. de mestr. Universidade de Lisboa, 2012.

[6] Educação, M. da. *BASE NACIONAL COMUM CURRICULAR*. 2017. URL: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/wp-content/uploads/2018/02/bncc-20dez-site.pdf.

[7] Ensino, A. C. de. *Desigualdades-Portal da Matemática-OBMEP*. URL: http://matematica.obmep.org.br/.

[8] Korovkin, P. e Vega, C. *Desigualdades*. Lecciones populares de matemáticas. Mir, 1988. URL: https://books.google.com.br/books?id=LDMQPQAACAAJ.

[9] Lima, E. *Meu Professor de matematica: e outras historias*. Colecao do professor de matematica. Sociedade Brasileira de Matematica, 1991. URL: https://books.google.com.br/books?id=e-mxswEACAAJ.

[10] Lima, E. L. *Análise Real - Volume 1 - Funções de Uma Variável*. 2008.

[11] Matemática, S. B. de. *Exame Nacional de Acesso - ENA*. 2018. URL: http://www.profmat-sbm.org.br/wp-content/uploads/sites/23/2018/10/Gabarito-ENA-2019-com-solu%C3%A7%C3%B5es.pdf.

[12] Matemática, S. B. de. *Exame Nacional de Qualificação*. 2012. URL: http://www.profmat-sbm.org.br/wp-content/uploads/sites/23/2016/08/Gabarito_qualif_2012_3.pdf.

[13] Matemática, S. B. de. *Prova Nacional*. 2011. URL: http://www.profmat-sbm.org.br/wp-content/uploads/sites/23/2016/08/Gabarito_AV2_MA12_2011.pdf.

[14] Matemática, S. B. de. *Prova Nacional*. 2015. URL: http://www.profmat-sbm.org.br/wp-content/uploads/sites/23/2016/08/MA12_AV2_2015_Gabarito.pdf.

[15] Menezes, C. L. C. de. *Parâmetros Curriculares Nacionais*. 1999.

[16] Naval, C. *Marinha do Brasil - Concurso Público de Admissão ao Colégio Naval*. 2009. URL: https://www.marinha.mil.br/.

[17] Naval, C. *Marinha do Brasil - Concurso Público de Admissão ao Colégio Naval*. 2016. URL: https://www.marinha.mil.br/ensino/?q=colegionaval/a-cn-provag.

[18] Pereira, J. D. C. "Médias: Aritmética, Geométrica e Harmônica". Diss. de mestr. Universidade Estadual de Campinas, 2014.

[19] Rigodanzo, M. "Desigualdade das médias e a resolução de problemas geométricos". Diss. de mestr. Universidade Federal de Santa Maria, 2016.

[20] Sá Reis, I. M. de. "Divisão da lemniscata em partes iguais". Diss. de mestr. FACULDADE DE CIÊNCIAS DA UNIVERSIDADE DO PORTO, 2005.

[21] Silva, E. V. da. "Resolubilidade de polinômios: da teoria ao ensino-aprendizagem". Diss. de mestr. USP, 2018.