UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO

INSTITUTO DE MATEMÁTICA - IM/UFRJ
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

Cleuber Eduardo do Nascimento Silva

Funções Geradoras e Aplicações

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT, do Insituto de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ, como parte dos requisitos ao título de Mestre, no Mestrado Nacional em Rede Nacional em Matemática

Orientador: Nei Carlos dos Santos Rocha

Rio de Janeiro
18 de março de 2019

Cleuber Eduardo do Nascimento Silva

Funções Geradoras e Aplicações

Dissertação Submetida ao corpo docente do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal do Rio de Janeiro como parte dos requisitos necessários para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Aprovada por:

Nei Carlos Rocha

Prof. Dr. Nei Carlos dos Santos Rocha
Instituto de Matemática - UFRJ
Orientador/Presidente da Banca Examinadora

Walcy Santos

Prof. Dra. Walcy Santos
Instituto de Matemática - UFRJ

Letícia Rangel

Prof. Dra. Letícia Guimarães Rangel
CAP - UFRJ

Alex Pereira Bezerra

Prof. Ms. Alex Pereira Bezerra
IFCG - PB

CIP - Catalogação na Publicação

S581f

Silva, Cleuber Eduardo do Nascimento
Funções Geradoras e Aplicações / Cleuber Eduardo do Nascimento Silva. -- Rio de Janeiro, 2019.
64 f.

Orientador: Nei Rocha.
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal do Rio de Janeiro, Instituto de Matemática, Programa de Pós-Graduação em Matemática, 2019.

1. Combinatória . 2. Séries de Potência . 3. Problemas de Olimpiada. I. Rocha, Nei , orient. II. Título.

Elaborado pelo Sistema de Geração Automática da UFRJ com os dados fornecidos pelo(a) autor(a), sob a responsabilidade de Miguel Romeu Amorim Neto - CRB-7/6283.

Resumo

Esse texto busca contribuir com a proposta de resolução de problemas com viés nas Olimpíadas Científicas de Matemática. Para isto, apresenta-se no Capítulo 2, as Séries de Potência cujo principal objetivo, é dar base para a formação das Funções Geradoras desenvolvidas no Capítulo 3 e a consequente resolução dos problemas de Recorrência, Combinatória e Partição desenvolvidos respectivamente nos Capítulos 4, 5 e 6. Por fim, no Capítulo 7, apresenta-se algumas aplicações relacionadas aos problemas de Olimpíadas de Matemática.

Palavras-Chave: Olimpíadas de Matemática, Resolução de Problemas.

Abstract

This text seeks to contribute to the proposed resolution of problems with bias in the Scientific Olympics of Mathematics. For this purpose, Chapter 2 presents the Power Series whose main objective is to provide a basis for the formation of the Generating Functions developed in Chapter 3 and the consequent resolution of the Recorrences, Combinatorics and Partition problems developed respectively in Chapters 4, 5 and 6. Finally, in Chapter 7, we present some applications related to the Mathematical Olympiad problems.

Key Words: Mathematical Olympiads, Problem Solving.

Sumário

Agradecimentos

Quero agradecer primeiramente a Deus por me proporcionar mais uma benção. Sinto-me realmente agraciado por estar passando por esse momento, que durante um ano e meio foi de muita luta e suor. Tenho absoluta certeza que Ele é o autor de todas as coisas e iluminou o meu caminho para que eu fosse conduzido até aqui corretamente.

A minha amada esposa Viviane, que foi fundamental, sendo a base da nossa família, pois, enquanto eu estava fora trabalhando ou escrevendo esse texto, ela cuidava das inúmeras tarefas de se ter uma filha pequena, dando total respaldo para que eu desenvolvesse o meu lado profissional em virtude de um futuro melhor para nós.

Aos meus pais, que me proporcionaram estudar fortemente e fizeram de tudo para que eu tivesse condições de encarar o mundo de frente. Eles me permitiram ,de fato, uma base educacional e familiar que me fizeram ter totais condições de realizar os meus sonhos.

A todos aqueles que apoiaram e me inseriram dentro e fora da matemática, em especial, professor Alex Bezerra, professor Onofre Campos, Professor Luciano Castro e muitos outros me permitiram conhecer a Matemática como uma ciência de ideias belíssimas.

Ao meu colega de profissão Rafael Borges que tanto me apoia e incentiva a cada dia fazer o melhor na profissão e a minha turma do PROFMAT- UFRJ- turma de 2017, que sem soberba e sem ganância, me permitiu estabelecer laços de amizade sincera fazendo com que as jornadas intensas de aulas e trabalhos se tornassem menos dura.

Por fim agradeço a todos os nossos professores do Profmat, em especial, ao meu orientador Nei Rocha, que me proporcionou agilizar os processos para que eu escrevesse e defendesse esse texto com qualidade e sustentabilidade.

Capítulo 1

Introdução

Esse trabalho visa a focar em um dos instrumentos mais importantes da Matemática Discreta e da Análise Combinatória, voltado para alunos com desejo de se aprofundar na Matemática. Para tanto, apresentaremos diversos problemas os quais, a maior parte, sob o viés de Olimpíadas de Matemática(Médio e Superior) com o intuito de auxiliar, facilitar e potencializar o estudo desses alunos. Por isso, serão apresentados problemas das competições de matemática consideradas, para esse segmento, as mais difíceis do mundo, a exemplo da IMO(Olimpíada Internacional de Matemática), PUTNAM entre outras.

Também busca dar ao professor uma visão mais apurada sobre os problemas que norteiam a Análise Combinatória e Matemática Discreta, fornecendo resultados importantes que buscam melhorar sua formação como um todo. De Fato, as Funções Geradoras, em geral, não se encontram na matrizes curriculares dos cursos de matemática no Brasil. Então, para o professor é oferecido aqui, a oportunidade de experienciar uma ferramenta na resolução problemas.

Não é de hoje que sabemos que o Ensino da Matemática, principalmente no Ensino Médio, está passando por um processo de reestruturação que busca reforma profunda, para que, de acordo com o PCNM Parte III, "a matemática volte a se comunicar com a necessidade de desenvolvimento e promoção dos alunos".

Também, de acordo com PCNM Parte III, a Matemática contribui para o desenvolvimento de pensamentos lógicos e estruturados, tornando professor e aluno cada mais capazes de compreender a realidade que os norteia. Por isso, é inegável que esse trabalho converge com a dinâmica do novo Ensino Médio no sentido de atender um público alvo com mais avidez em aprender Matemática.

Uma visão pessoal sobre o assunto cabe aqui. Em 2010 quando comecei a trabalhar com turmas de olimpíadas científicas de Matemática, senti a necessidade de cada vez adentrar nesse mundo. O estudo de matemática que nós fazíamos lá, tinha uma dinâmica que buscava ideias cada vez mais originais. O aluno tinha uma liberdade completa de buscar solução dos problemas que melhor correspondesse com ideias intrínsecas a ele.

Cabia a nós, professores, fornecer recursos capazes de melhorá-las, dando embasamento teórico, para que as soluções saíssem cada vez mais completas. No aluno, em particular, nós víamos o crescimento exponencial dentro da matemática. É claro que, estávamos lidando com alunos que gostam de fazer Matemática. No entanto, era abissal a diferença de potencial entre aqueles que frequentavam essas turmas em relação às turmas regulares.

Por isso, enquanto eles se desenvolviam, nós tínhamos que suprir a necessidade desse desenvolvimento. Foi aí que tive o primeiro contato com as funções geradoras, como ideias maravilhosas do Método do Snake Oil. Mais tarde, tive a oportunidade de estudar mais sobre o assunto e as características estruturais do tema.

Essa dissertação visa a buscar, entre outros aspectos, um conceito daquilo que considero basicamente mais importante diante de um estudo das funções geradoras, para pessoas que desejam adquirir uma ferramenta fortíssima de resoluções problemas. Por isso, o saber matemática, segundo o PCNM, "promove que o aluno perceba que as definições, demonstrações e encadeamentos conceituais e lógicos têm a função de construir novos conceitos e estruturas a partir de outros".

A presente dissertação apresenta-se da seguinte forma:

No **Capítulo 2**, trataremos um pouco das séries de potência e sua convergência. Esse capítulo é importante, no sentido de que irá nos fornecer uma ferramenta teórica bastante forte, pois, nos que se seguem, em alguns casos precisaremos garantir a convergência da série para que apareçam os resultados importantes. É claro que nem sempre abordaremos a questão da convergência em si, no entanto sem ela nada do que teríamos feito faria sentido no infinito, por exemplo.

No **Capítulo 3**, abordaremos as funções geradoras propriamente ditas, suas ferramentas secundárias como o operador derivada e raízes da unidade bem como suas propriedades. A concentração nesse capítulo se dará em torno das funções geradoras polinomiais e exponenciais, que são as mais importantes. Por fim, listaremos algumas séries que possuem um grau de importância maior nesse texto. É claro que selecionamos algumas, em virtude das infindáveis aplicações.

No **Capítulo 4**, partiremos então para a prática dos problemas de sequências, para basicamente encontrar o termo geral de recorrências primeira e segunda ordem usando as funções geradoras. Abordaremos problemas de permutação caótica, relação de Stifel, em um problema recorrente de Análise Combinatória. Trataremos também do produto de Hadamard e as função geradoras racionais. Por fim, falaremos do número de Catalan e da solução do número de Catalan recorrente por funções geradoras.

O **Capítulo 5**, será consagrado um belo e valioso método de solução para somatórios, o assim chamado "Snake Oil". Estabeleceremos como é o método e escolheremos alguns exemplos nos quais o método nos permitirá resolver somatórios particularmente difíceis, especialmente os binomiais.

No **Capítulo 6**, abordaremos uma pequena parte da Teoria das Partições. Essa dinâmica possui uma abordagem bastante simples a priori, pois a ideia central do problema das partições é inteligível a qualquer aluno do Ensino Básico. No entanto, as soluções de um problema de partição não simples. Veremos como matemáticos importantes como Euler, Hardy, Ramanujan, entre outros, forneceram resultados de grande relevância teórica. Na prática veremos também alguns exemplo dessa temática.

Por fim,no **Capítulo 7**, abordaremos um problema do vestibular do IME e outros de Olimpíadas ao redor do mundo, que nos permitirão ver na prática como esses problemas poderão ser abordados no ensino da Matemática tanto no Ensino Médio quanto no Ensino Superior. As olimpíadas de matemática são importantes laboratórios para alunos e professores que querem se desenvolver dentro da área. Por isso, o enfoque será em torno destes problemas desafiantes. Também, no Capítulo 7, alguns enfoques de competições para estudantes universitários e de Ensino Fundamental serão expostos.

Capítulo 2

Séries de Potência

Aqui teremos um importante apoio ao nosso texto. As séries de potências são de fundamental importância, pois podemos escrever qualquer função de classe C^{∞} em algum intervalo, como uma expansão polinomial.

Escrever uma função como expansão polinomial define uma possível estratégia de modelagem de alguns sistemas. As séries das funções exponenciais, por exemplo, podem ser usadas para resolver problemas de permutação ou problemas de combinatória em que a ordem é relevante.

Tanto a série de Taylor (Brook Taylor 1685-1731) como a série de Maclaurin (Colin Maclaurin 1698-1746),caso particular de Taylor , possuem inserções importantes não só dentro da Matemática, mas também dentro da programação de softwares e calculadoras.

De fato, estamos aqui expondo uma ferramenta bastante eficaz na solução de alguns problemas de Matemática. No entanto, ela não é oferecida no Ensino Médio em geral. Algumas escolas oferecem o cálculo diferencial e integral, mas na grande maioria delas isso não ocorre. Alguns autores como [16] defendem a ideia que fossem utilizadas noções de cálculo básico e suas aplicações no Ensino Médio. Também existem trabalhos como [15], que propõem o uso de ferramentas computacionais como o GeoGebra para uma abordagem de cálculo no Ensino Médio.

Não adentraremos muito nesse assunto, pois o enfoque nesse capítulo é realmente fornecer uma base para que o leitor conheça o método das funções geradoras. Por isso,[8] como base de texto. A leitura impõe um certo desafio e é preciso que o leitor já tenha uma boa base de Cálculo para entender o exposto.

Definição 1 *Um série de potência é definida como:*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n = a_0 + a_1(x - x_0) + ... + a_n(x - x_0)^n + ... \tag{2.1}$$

De fato, em particular, para simplificação da notação podemos assumir que $x_0 = 0$ e assim podemos escrever a série mais simplificadamente como:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... \tag{2.2}$$

Exemplo 1 *Seja $f(x) = e^x$. Como $f(x)$ é classe C^{∞}, podemos escrever*

$$e^x = \sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + ...$$

Assim, trata-se de uma série de potência, cujo o coeficiente $a_n = \frac{1}{n!}$.

Exemplo 2 *Seja* $f(x) = \frac{1}{1-x}$. *Assim, podemos escrever*

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n \geq 0} x^n = 1 + x + x^2 + ...$$

que é uma série de potência convergente para $-1 < x < 1$. *Em particular, trata-se de uma progressão geométrica com coeficiente* $a_n = 1$.

Para que possamos trabalhar com uma série de potência, precisamos analisar a convergência da mesma. Nos exemplos dados, usamos o fato das séries convergissem. Por isso, seguem abaixo alguns dos teoremas mais importantes em relação a convergência:

Teorema 1 *Uma série de potências* $\sum a_n x^n$, *ou converge para* $x = 0$, *ou existe* r, *com* $0 < r \leq +\infty$, *tal que a série converge absolutamente num aberto* $(-r, r)$ *e diverge fora do intervalo fechado* $[-r, r]$. *Nos extremos* $-r$ *e* r, *a série pode convergir ou divergir, conforme o caso. Tem-se que* $r = \frac{1}{limsup \sqrt[n]{|a_n|}}$

Convém citar que $r = \frac{1}{limsup \sqrt[n]{|a_n|}}$ é chamado de **Raio de convergência da série**.

Demonstração.

A prova desse Teorema pode ser consultada em [8]

■

Teorema 2 *Uma série de potência* $\sum a_n x^n$ *converge uniformemente em todo intervalo de* $[-\rho, \rho]$, *onde* $0 < \rho < r$.

Para que possamos provar o Teorema 2, necessitaremos do lema a seguir, chamado **Teste de Weierstrass**, o qual a seguir.

Lema 1 *Dada uma sequência de funções* $f_n : X \to \mathbb{R}$ *e seja* $\sum a_n$ *uma série convergente de números reais tais que* $a_n \geq 0$ *e ainda* $|f_n(x)| \leq a_n$ *para todo* n *natural e* $x \in X$. *Nessas condições as séries* $\sum |f_n|$ *e* $\sum f_n$ *são uniformemente convergentes.*

Demonstração.

Como $|f_n| \leq a_n$, podemos aplicar a soma ambos os lados. Com isso, temos

$$\sum |f_n| \leq \sum a_n.$$

Assim podemos dizer que $\sum |f_n|$ é convergente. No entanto, como $\sum a_n$ converge, segue-se que $\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$, tal que para $n > n_0$, tem-se que

$$\sum a_n < \epsilon$$

.

Segue-se que $|\sum f_n| \leq \sum |f_n|$(desigualdade triangular)$\leq \sum a_n < \epsilon$. Assim, $\sum |f_n|$ e $\sum f_n$ são consequentemente uniformemente convergentes.

■

Provaremos agora o teorema 2.

Demonstração.

Tome $x \in [-\rho, \rho]$. Assim, podemos escrever que $|x| \leq \rho$. Logo $\forall\ n \in \mathbb{N}$ temos que

$$\sum |a_n x^n| \leq \sum |a_n| \rho^n$$

.

Segue, portanto, pelo Lema 1, que $\sum a_n x^n$ converge uniformemente.

■

Exemplo 3 *Consideremos a série geométrica dada por* $1 - x + x^2 - .... = \sum_{n \geq 0} (-1)^n x^n = \frac{1}{1+x}$ *convergente para todo* $x \in (-1, 1)$ *e consequentemente divergente para* $|x| \geq 1$.

Exemplo 4 *Consideremos a série*

$$ln(x+1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - ...,$$

convergente uniformemente no intervalo $(-1, 1]$ *pois, pela definição de logaritmo, devemos ter necessariamente* $x > -1$ *e a função converge para* $x = 1$, *garantida pelo fato de seu raio de convergência ser igual a 1.*

Exemplo 5 *Defina as p-séries como*

$$1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + ... + \frac{1}{n^p} + ...$$

Estas séries são convergentes uniformemente se $p > 1$ *e divergentes caso contrário.*

Vamos expor abaixo três teoremas importantes das séries de potência. O primeiro diz respeito à derivação termo a termo da série. O segundo deles diz respeito à integração termo a termo e o último diz respeito à unicidade. As demonstrações dos teoremas a seguir têm como referencia [8], página 166.

Vamos exibir algumas provas deles, dentro de um certo raio de convergência.

Teorema 3 *Seja* r *o raio de convergência da série* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. *Seja a função* $f : (-r, r) \to \mathbb{R}$, *definida por* $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. *Então* $f(x)$ *é derivável, sua derivada é dada por* $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ *e o raio de convergência também é* r.

Demonstração.

Seja ρ o raio de convergência de $\sum n a_n x^{n-1}$. Mostraremos que $r = \rho$.

Tome $0 < k < r$ e seja β tal que $0 < k < \beta < r$. Segue-se que $|a_n|^{\frac{1}{n}} < \frac{1}{\beta}$. No entanto, $\exists\ n_0 \in \mathbb{N}$, tal que $n > n_0$. Assim temos que $n^{\frac{1}{n}} < \frac{\beta}{k}$. Portanto, multiplicando as desigualdades, temos que $(n a_n)^{\frac{1}{n}} < \frac{1}{k}$. Segue-se que ambas as séries têm o mesmo raio de convergência $r = \rho$. Já que $f'(x)$ converge em $(-r, r)$, podemos obtê-la derivando $f(x)$ termo a termo. Por isso teremos $f'(x) = \sum_{n \geq 1} n a_n x^{n-1}$.

■

Em relação ao operador derivada, iremos também usar a notação $f'(x) = Df$.

Corolário 1 *Seja r o raio de convergência da série de potência $f(x) = \sum a_n x^n$. Então podemos escrever:*

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

Demonstração.

Seja $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ...$ É fácil ver que $f(0) = a_0$, vamos definir recursivamente $f(0) = f^{(0)}(0) = a_0$.

Derivando expressão temos: $f'(x) = a_1 + 2a_2 x + ...$, fazendo $x = 0$, temos: $f'(0) = a_1 = f^{(1)}(0)$. Derivando novamente temos $f''(x) = 2a_2 + 3.2a_3 x + ...$, fazendo novamente $x = 0$ vem $f''(0) = f^{(2)}(0) = 2a_2$.

Por isso segue-se pela regularidade da formação que

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

.

■

Exemplo 6 *Tome novamente a função $f(x) = e^x$, de classe C^∞, pois é contínua e suas derivadas também são contínuas, já que $f^{(n)}(x) = e^x$. De fato, usando o Corolário, temos*

$$a_n = \frac{1}{n!}.$$

Teorema 4 *Seja r o raio de convergência da série de potência $\sum a_n x^n$. Seja $[a, b] \subset (-r, r)$ então:*

$$\int_a^b (\sum a_n x^n) dx = \sum \frac{a_n}{n+1}(b^{n+1} - a^{n+1})$$

Demonstração.

De fato se $\sum a_n x^n$ converge uniformemente num intervalo fechado $[a, b]$, podemos escrever

$$\int_a^b (\sum a_n x^n) dx = \sum \int_a^b a_n x^n dx = \sum a_n \int_a^b x^n dx = \sum \frac{a_n}{n+1}(b^{n+1} - a^{n+1}).$$

■

Exemplo 7 *À guisa de exemplo do Teorema 4 Calculemos o valor da integral $\int_a^b e^x dx$.*

Solução.

De fato essa solução é bem simples, pois precisamos tomar a seguinte série:

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

Assim, temos que

$$\int_a^b \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \int_a^b x^k dx,$$

equivalente a

$$\int_a^b \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k+1}}{(k+1)!} = (e^x - 1)|_a^b = e^b - e^a.$$

■

Capítulo 3

Funções Geradoras

Chegamos enfim ao foco desse trabalho. A função geradora nos permite dizer que existe uma função de variável x gerada por uma sequência de números, que chamaremos de a_n. Então na prática pensaremos numa função gerada por essa sequência.

Obter dados da função gerada, nos permite analisá-la como um todo, pois temos em mãos sua lei de formação. Por isso, nos concentraremos nas técnicas necessárias para se ter a sequência de volta em função de um certo n. Isso nem sempre é fácil, pois muitas vezes a sequência que queremos está "disfarçada"e nesse caso precisaríamos, por exemplo, usar o método de "quebra"em frações parciais; ou muitas vezes o que se deseja é tão somente o termo independente de uma função geradora, como é o caso do Problema 6 do Capítulo 7.

Outras vezes, temos que calcular um somatório ou produtório de alguma sequência e então precisaremos usar esta soma ou este produto, como coeficiente de algum polinômio gerador (*Snake Oil*), escolhendo convenientemente as variáveis do processo. Por isso, espera-se que esse capítulo possa motivar leitores interessados a aprofundar o tema.

Essencialmente, usaremos alguns textos como base de referência. São eles: [1], [4], [10],[13], [14]. Todos esses textos influenciaram diretamente na elaboração dessa dissertação.

3.1 Função Geradora Ordinária

Para $f(x) = \sum\limits_{n\geq 0} a_n x^n$, empregaremos o símbolo $f \overset{ogf}{\longleftrightarrow} (a_n)_0^\infty$ para significar que f é **Função Geratriz Ordinária** (**OGF**) da sequência $(a_n)_0^\infty$.

Exemplo 8 *Seja* $\frac{1}{1-x} = 1+x+x^2+x^3+...$ *convergente em* $(-1,1)$. *Podemos representar, de acordo com a definição, acima*

$$\left(\frac{1}{1-x}\right) \overset{ogf}{\longleftrightarrow} (1)_0^\infty.$$

Exemplo 9 *Seja* $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ *assim,poderá ser escrita, segundo a definição acima, como*

$$e^x \overset{ogf}{\longleftrightarrow} \left(\frac{1}{n!}\right)_0^\infty.$$

Exemplo 10 *Seja* $senx = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + ... = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$. *Podemos então escrever, de acordo novamente com a definição, acima que*

$$senx \overset{ogf}{\longleftrightarrow} \left(\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\right)_0^{\infty}.$$

É importante utilizar essa notação, pois ela poderá auxiliar na obtenção explícita do coeficiente da função geradora. De fato, se tomarmos $f \overset{ogf}{\longleftrightarrow} (a_n)_0^{\infty}$, qual deverá ser a função geradora de $(a_{n+1})_0^{\infty}$?

Tomemos então $f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ...$ Podemos escrever então

$$\frac{f(x) - a_0}{x} = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + ...,$$

que é equivalente a

$$\frac{f(x) - a_0}{x} \overset{ogf}{\longleftrightarrow} (a_{n+1})_0^{\infty}.$$

Façamos o mesmo processo com as demais sequências. Por exemplo, se quisermos achar uma função geratriz para $(a_{n+2})_0^{\infty}$, podemos escrever:

$$\frac{f(x) - a_0 - a_1 x}{x^2} \overset{ogf}{\longleftrightarrow} (a_{n+2})_0^{\infty}.$$

Em geral, temos a seguinte resultado

Se $f \overset{ogf}{\longleftrightarrow} (a_n)_0^{\infty}$, então para $k > 0$, podemos escrever:

$$\frac{f - a_0 - a_1 x - ... - a_{k-1}x^{k-1}}{x^k} \overset{ogf}{\longleftrightarrow} (a_{n+k})_0^{\infty}. \tag{3.1}$$

Exemplo 11 *Seja f uma função definida para todo $n \geq 1$, satisfazendo as seguintes relações:*

i. $f(1) = 1$

ii. $f(2n) = f(n)$

iii. $f(2n+1) = f(n) + f(n+1)$

Seja

$$F(x) = \sum_{n\geq 1} f(n)x^{n-1}.$$

Vamos provar que

a. $F(x) = (1 + x + x^2)F(x^2)$

b. $F(x) = \prod_{j=0}^{\infty}(1 + x^{2^j} + x^{2^{j+1}})$

Solução.

Podemos escrever $F(x) = \sum_{n\geq 1} f(2n)x^{2n-1} + \sum_{n\geq 1} f(2n-1)x^{2n-2}$.

No entanto, pela propriedades *iii.* e *ii.*, temos, respectivamente, $f(2n-1) = f(n-1) + f(n)$ e $f(2n) = f(n)$.

Assim temos:

$$F(x) = \underbrace{\sum_{n\geq 1} f(n)x^{2n-1}}_{xF(x^2)} + \underbrace{\sum_{n\geq 1} f(n)x^{2n-2}}_{F(x^2)} + \underbrace{\sum_{n\geq 2} f(n-1)x^{2n-2}}_{x^2F(x^2)}$$

Ou seja,

$$xF(x^2) \overset{ogf}{\longleftrightarrow} f(n)$$

para expoente ímpar de x;

$$F(x^2) \overset{ogf}{\longleftrightarrow} f(n)$$

para expoente par de x; e

$$x^2F(x^2) \overset{ogf}{\longleftrightarrow} f(n-1)$$

para expoente par de x.

Note também que

$$F(x^2) = \sum_{n\geq 1} f(n-1)(x^2)^{n-2} = \sum_{n\geq 1} f(n-1)x^{2n-4}.$$

Segue-se que

$$F(x) = (1 + x + x^2)F(x^2)$$

e

$$F(x^2) = (1 + x^2 + x^4)F(x^4).$$

Conclui-se pela estrutura de recursividade que

$$F(x) = \prod_{j=0}^{\infty}(1 + x^{2^j} + x^{2^{j+1}}).$$

■

3.2 Operador Derivada

Seja $Df = f'$ o operador derivada da função f. Temos assim as seguintes propriedades:

Propriedades

1. $D(f+g) = D(f) + D(g)$
2. $D(fg) = D(f)g + D(g)f$
3. $D\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{D(f)g - fD(g)}{g^2}$; para $g \neq 0$
4. Seja $c \in \mathbb{R}$. Podemos escrever $D(cf) = cD(f)$

O uso do operador derivada irá nos permitir também avançar posteriormente em problemas de equação de recorrência. A ideia do operador é, a partir de somas conhecidas, "perturbá-las" e obter a soma desejada.

No entanto, podemos nos perguntar: O que podemos dizer da série $\sum_{n\geq 1} na_n x^n$?

Tomemos $f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$. Portanto, derivando a expressão, temos:

$$f'(x) = \sum_{n\geq 1} a_n x^{n-1},$$

que nos conduz a:

$$xD(f) = \sum_{n\geq 1} na_n x^n.$$

Portanto, podemos escrever

$$xD(f) \overset{ogf}{\longleftrightarrow} (na_n)_0^\infty. \tag{3.2}$$

Derivando a equação $D(xD(f)) = \sum n^2 a_n x^{n-1}$, o que nos leva a

$$xD(xD(f)) = \sum_{n\geq 2} n^2 a_n x^n.$$

Utilizaremos a notação mais concisa dada por:

$$(xD)^2 f = xD(xD(f)) = \sum_{n\geq 2} n^2 a_n x^n,$$

ou equivalentemente usando a notação

$$(xD)^2 f \overset{ogf}{\longleftrightarrow} (n^2 a_n)_0^\infty.$$

Assim, pela estrutura de regularidade do procedimento temos o seguinte resultado:

$$(xD)^k f \overset{ogf}{\longleftrightarrow} (n^k a_n)_0^\infty. \tag{3.3}$$

Exemplo 12 *Vamos utilizar o operador derivada para provar a fórmula:*

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Solução.

Tome $\sum_{n\geq 0} x^n = \dfrac{1}{1-x}$. Derivando ambos os lados temos:

$$\sum_{n\geq 0} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

Derivando ambos os lados novamente tem-se

$$\sum_{n\geq 0} n^2x^n = \frac{x(1-x^2)}{(1-x)^4}.$$

Temos que

$$\frac{x(1+x)}{(1-x)^4} \overset{ogf}{\mapsto} \left(\sum_{n=0}^{N} n^2\right)_0^\infty.$$

Observando o coeficiente de x^N em $\frac{1}{(1-x)^4}$, tem-se que é igual a $\binom{N+3}{3}$.
Assim o coeficiente de x^N em $\frac{x(1+x)}{(1-x)^4}$ é igual a

$$\binom{N+2}{3} + \binom{N+1}{3} = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6}$$

■

Exemplo 13 *Consideremos*

$$senx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Usando o operador derivada $D(senx) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$
Como $D(senx) = cosx$*, temos que*

$$cosx = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

Vamos escrever algumas propriedades para séries potência que também irão nos ajudar a compreender melhor a ferramenta que temos em mãos.

Definição 2 *Sejam as funções geradoras:*

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... \tag{3.4}$$

e

$$g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + ... \tag{3.5}$$

definimos a soma e o produto respectivamente das duas funções geratrizes como

i.
$$(f+g)(x) = (a_0+b_0) + (a_1+b_1)x + (a_2+b_2)x^2 + ... \tag{3.6}$$

ii.
$$f(x)g(x) = (a_0b_0) + (a_0b_1 + a_1b_0)x + ... \tag{3.7}$$

Diante do exposto acima, tomemos, à guisa de exemplo a série geométrica e a série 3.4. Assim podemos escrever

$$\frac{f(x)}{1-x} = (a_0+a_1x+a_2x^2+...)(1+x+x^2+...) = a_0+(a_0+a_1)x+(a_0+a_1+a_2)x^2+... \tag{3.8}$$

Concluímos a partir do resultado 3.8 que, se $f \overset{ogf}{\longleftrightarrow} (a_n)_0^\infty$ então

$$\left(\frac{f}{1-x}\right) \overset{ogf}{\longleftrightarrow} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right), n \geq 0. \tag{3.9}$$

De posse disso, tendo em mente a série geométrica, podemos escrever que $(1-x)(1+x+x^2+...) = 1$. Dizemos então que $1-x$ e $1+x+x^2+...$ são *Recíprocos*. Daí, temos a seguinte proposição:

Proposição 1 *Seja a série* $f = \sum_{k\geq 0} a_k x^k$, *com* $a_0 \neq 0$. *Então existe uma série de potência* $g = \sum_{k\geq 0} b_k x^k$ *tal que:*

$$fg = 1.$$

Nesse caso, f *e* g *são ditas recíprocas.*

Demonstração.
Nós temos,

$$f = \sum_{k\geq 0} a_k x^k$$

e

$$g = \sum_{k\geq 0} b_k x^k.$$

Caso exista uma g que satisfaça

$$fg = 1 \tag{3.10}$$

deveremos ter, pelo coeficiente de x^0, a seguinte relação

$$b_0 = \frac{1}{a_0}. \tag{3.11}$$

Segue-se , pelo coeficiente de x, a seguinte expressão,

$$a_0 b_1 + a_1 b_0 = 0.$$

Por 3.11 temos,

$$b_1 = \frac{-a_1}{a_0^2}.$$

Seguindo essa regularidade, que dado um b_k podemos determinar o b_{k+1}. Então, temos todos os b_i, com $i = 1, 2, 3....$ Em particular,expressando o coeficiente de x^n, dado por $a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + ... + a_n b_0 = 0$, de variável b_n, possui solução única.

■

Concluímos assim a parte designada a formar bases de funções geradoras, que são séries de Taylor com coeficiente a_n. A próxima definição está associada a um outro tipo de função geradora, a saber, a função exponencial. Trata-se naturalmente de uma série de Taylor cujos coeficientes são diferentes como veremos a seguir.

3.3 Função Geradora Exponencial

Definição 3 *Dizemos que $f(x)$ é uma **função geradora exponencial** da sequência $(a_n)_{n\geq 0}$ quando podemos escrevê-la da seguinte forma*

$$f(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{a_n}{n!} x^n.$$

Portanto, a notação usada será:

$$f \overset{egf}{\mapsto} \left(\frac{a_n}{n!}\right)_{n\geq 0}.$$

Teorema 5 *Sejam f e g duas funções geradoras exponenciais, tais que $f \overset{egf}{\mapsto} (a_n)_{n\geq 0}$ e $g \overset{egf}{\mapsto} (b_n)_{n\geq 0}$.*
Então a função geradora de fg gera sequência

$$\left(\sum_{k\geq 0} \binom{n}{k} a_k b_{n-k}\right)_{n\geq 0}.$$

Demonstração.
Observe que

$$fg = \left(\sum_{n\geq 0} \frac{a_i x^i}{i!}\right)\left(\sum_{k\geq 0} \frac{b_k x^k}{k!}\right) = \sum_{n\geq 0} x^n \sum_{i+k=n} \frac{a_i b_k}{i!k!} = \sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!} \sum_{i+k=n} \frac{n! a_i b_k}{i!k!}.$$

Portanto, temos que

$$fg = \sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!} \sum_{j\geq 0} \binom{n}{j} a_j b_{n-j},$$

■

3.3.1 Propriedades

1. $\sum_{n\geq 0} \frac{a_n x^n}{n!} + \sum_{n\geq 0} \frac{b_n x^n}{n!} = \sum_{n\geq 0} \frac{(a_n+b_n)x^n}{n!}$.
2. $\left(\sum_{n\geq 0} \frac{a_n x^n}{n!}\right)\left(\sum_{n\geq 0} \frac{b_n x^n}{n!}\right) = \sum_{j+k=n} \frac{d_n}{n!} x^n$.
   Cujo $d_n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a_i b_{n-i}$

3.4 Raízes da Unidade

Um outro argumento muito válido é a utilização das raízes da unidade de um complexo para funções geradoras. Usar a raiz da unidade é importante quando temos problemas que consideram uma parte da série, geralmente múltiplos de um certo número. Por isso vamos construir uma pequena teoria que irá nos ajudar a resolver alguns problemas do capítulo 7.

Usaremos nessa seção a seguinte notação

$$cis(\theta) = cos(\theta) + isen(\theta) = e^{i\theta}. \tag{3.12}$$

Definição 4 *Define-se raiz da unidade, como todos complexos $w = x + iy$ que satisfazem à seguinte relação:*

$$w^n = 1 \tag{3.13}$$

As n soluções da equação 3.13 são dadas por w_k para $k = 0, 1, 2, ..., n-1$ onde

$$w_k = cis\left(\frac{2k\pi}{n}\right) = cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + isen\left(\frac{2k\pi}{n}\right).$$

Consideremos agora

$$w^2 = 1$$

Isso implica $w_0 = 1$ e $w_1 = -1$.
Tomando

$$f(x) = \sum_{j\geq 0} a_j x^j,$$

Temos

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ...$$

e

$$f(-x) = a_0 - a_1 x + a_2 x^2 + ...$$

Somando-se as duas equações acima podemos perceber:

$$\frac{f(x) + f(-x)}{2} = \sum_{j\geq 0} a_{2j} x^{2j} \tag{3.14}$$

Vamos considerar agora

$$w^3 = 1,$$

onde $w_k = cis\left(\frac{2k\pi}{3}\right)$ ou ainda $w_k = e^{i\frac{2k\pi}{3}}$.

De fato não é difícil perceber que

$$\frac{f(x) + f(w_1 x) + f(w_2 x)}{3} = \sum_{j\geq 0} a_{3j} x^{3j} \tag{3.15}$$

Podemos perceber, a partir da estrutura de regularidade, que para a equação 3.13 temos

$$\frac{f(x) + f(w_1 x) + ... + f(w_{n-1} x)}{n} = \sum_{j\geq 0} a_{jn} x^{jn}. \tag{3.16}$$

Exemplo 14 *Encontremos a função determinada pela soma*

$$h(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{x^{3n}}{(3n)!}.$$

Solução. Usando o argumento anterior, temos que

$$\frac{f(x)+f(w_1x)+f(w_2x)}{3}=\sum_{n\geq 0}\frac{x^{3n}}{(3n)!},$$

onde $f(x)=e^x=\sum_{n\geq 0}\frac{x^n}{n!}$.

Note que,

$$\frac{f(x)+f(w_1x)+f(w_2x)}{3}=\frac{e^x+e^{w_1x}+e^{w_2x}}{3}=\frac{e^x+e^{\frac{-x+i\sqrt{3}}{2}}+e^{\frac{-x-i\sqrt{3}}{2}}}{3}$$

Assim temos,

$$h(x)=\frac{e^x+2e^{\frac{-x}{2}}cos\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right)}{3}.$$

■

3.5 Séries Importantes

Vamos listar aqui algumas séries essenciais que usaremos em problemas nos capítulos posteriores. É claro que, em virtude da quantidade bastante grande de aplicações(algumas mencionadas no Capítulo 7), escolhemos apenas algumas delas para serem usadas. As demonstrações de algumas delas podem ser encontradas em [8] ou em [1]. O objetivo principal é usá-las como ferramentas para as soluções dos problemas que contemplaremos no Capítulo 7.

$$\sum_{n\geq 0}x^n=\frac{1}{1-x} \tag{3.17}$$

$$e^x=\sum_{n\geq 0}\frac{x^n}{n!} \tag{3.18}$$

$$\sum_{n\geq 1}\frac{x^n}{n}=ln\left(\frac{1}{1-x}\right) \tag{3.19}$$

$$(1+x)^n=\sum_k\binom{n}{k}x^k \tag{3.20}$$

$$senx=\sum_{n\geq 0}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \tag{3.21}$$

$$cosx=\sum_{n\geq 0}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} \tag{3.22}$$

$$\frac{1}{(1-x)^{k+1}}=\sum_n\binom{n+k}{n}x^n \tag{3.23}$$

$$tgx = \sum_{n\geq 1} \frac{(2^{2n+1} - 2^{2n})B_{2n}}{(2n)!}(-1)^{n-1}x^{2n-1} \tag{3.24}$$

$$arcsenx = \sum_{n\geq 0} \frac{(2n-1)!!x^{2n+1}}{(2n)!!(2n+1)} \tag{3.25}$$

$$arctgx = \sum_{n\geq 0}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \tag{3.26}$$

$$\sum_{r\geq 0} \binom{r}{k} x^r = \frac{x^k}{(1-x)^{k+1}} \tag{3.27}$$

$$\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} x^n = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x} \tag{3.28}$$

Capítulo 4

Recorrências e Funções Geradoras

As equações de recorrência nos permitem modelar a solução de muitos problemas de Matemática. Convém lembrar que uma equação de recorrência é aquela em que a função $f(n)$ é dada por

$$f(n) = \phi(n, f(0), f(1), ..., f(n-1)).$$

Se $f(n) = \phi(f(0), f(1), ..., f(n-1))$ dizemos que equação de recorrência é *Homogênea.* Caso contrário, a equação é dita *Não Homogênea.*

Finalmente se $f(n) = \phi(n, f(n-k), f(n-k+1), ..., f(n-1))$ a equação de recorrência é de k-ésima ordem. Dependendo da estrutura da função ϕ a equação de recorrência poderá ser linear ou não linear.

Existe uma infinidade de equações recorrentes, lineares ou não. O objetivo deste capítulo é aplicar o método das funções geradoras para encontrar o termo geral de uma equação de recorrência linear.

O problema da *Torre de Hanói* é o exemplo clássico de uso de aplicação de equação de recorrência de primeira ordem, não homogênea.

Outro exemplo clássico é aquele modelado pela sequência de Fibonacci cujo termo geral nos interessa encontrar. Cabe ressaltar que o objetivo aqui é dar destaque as soluções alternativas para problemas já conhecidos de Combinatória como a Relação de Stifel e a Permutação Caótica, embora nem sempre o uso de funções geradoras forneça soluções mais imediatas.

4.1 Resolução da Equações de Recorrências

O método de resolução de equações de recorrência por funções geradoras consiste, em geral, nos seguintes passos:

- Encontrar a equação de recorrência que modela o problema.

- Definir a função geradora.

$$f \overset{ogf}{\longleftrightarrow} (a_n)_0^\infty.$$

- Isolar a f em função de x.

- Escrever a f em série de potência para a obtenção dos seus coeficientes.

Notação: Usaremos $[x^n]p(x)$ para indicar coeficiente de x^n da série $p(x)$.

Exemplo 15 *O jogo é formado por $n+1$ discos de diâmetros distintos com um furo no seu centro e uma base onde estão fincadas três hastes. Numa das hastes, estão enfiados os discos, de modo que nenhum disco esteja sobre um outro de diâmetro menor (veja figura a seguir)*

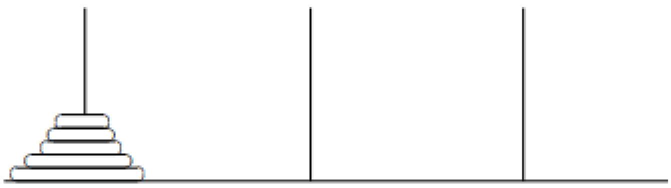

Figura 4.1: Torre de Hanoi

A ideia consiste em transferir a pilha de discos para uma outra haste, deslocando um disco de cada vez, de modo que, a cada passo, a discos maiores não fiquem superiores aos menores. Qual deverá ser o número de mínimo de movimentos, para que condição acima seja satisfeita?

Solução.
Seja a_n o número mínimo de movimentos com n discos. O deslocamento das $n+1$ argolas para um dos pinos poderá ser feito da seguinte maneira:

i. Toma-se n argolas e as inseri em um dos pinos. Isso poderá ser feito de a_n movimentos. Como são dois pinos, então a contribuição será de $2a_n$.

ii. A argola maior que sobrou, definido o item i, só possui 1 movimento possível .

   Logo,
$$a_{n+1} = 2a_n + 1$$

Como equação de recorrência dada por $a_{n+1} = 2a_n+1$, onde $a_0 = 0$ modela o problema.
Considere $f \overset{ogf}{\longleftrightarrow} (a_n)_0^\infty$. Multiplicando a equação de recorrência por x^n e aplicando a soma, temos

$$\sum_{n\geq 0} a_{n+1}x^n = 2\sum_{n\geq 0} a_n x^n + \sum_{n\geq 0} x^n.$$

Por 3.1 podemos escrever

$$\frac{f - a_0}{x} = 2f + \frac{1}{1-x}.$$

Como $a_0 = 0$, temos

$$\frac{f}{x} = 2f + \frac{1}{1-x}.$$

Isolando f temos

$$f = \frac{x}{(1-x)(1-2x)}.$$

Vamos usar agora o método das frações parciais, ou seja, podemos escrever

$$f = \frac{x}{(1-x)(1-2x)} = \frac{1}{1-2x} - \frac{1}{1-x} = \sum_{n\geq 0}(2x)^n - \sum_{n\geq 0} x^n = \sum_{n\geq 0}(2^n-1)x^n.$$

Como $f \overset{ogf}{\longleftrightarrow} (2^n-1)_0^\infty$, temos que

$$a_n = 2^n - 1$$

.

■

Exemplo 16 *Encontremos o termo geral da sequência* $a_{n+3} = 6a_{n+2} - 11a_{n+1} + 6a_n$ *com as condições iniciais dadas* $a_0 = 2$*,* $a_1 = 0$*,* $a_2 = -2$*.*

Solução.
Definindo novamente $f \overset{ogf}{\longleftrightarrow} (a_n)_{n\geq 0}$, temos que

$$\sum_{n\geq 0} a_{n+3}x^n = 6\sum_{n\geq 0} a_{n+2}x^n - 11\sum_{n\geq 0} a_{n+1}x^n + 6\sum_{n\geq 0} a_n x^n.$$

Assim por 3.1 com $k = 1, 2, ...$ temos

$$\frac{f - a_0 - a_1x - a_2x^2}{x^3} = 6\frac{f - a_0 - a_1x}{x^2} - 11\frac{f - a_0}{x} + 6f.$$

Substituindo pelos valores iniciais $a_0 = 2$, $a_1 = 0$, $a_2 = -2$, temos

$$\frac{f - 2 + 2x^2}{x^3} = 6\frac{f-2}{x^2} - 11\frac{f-2}{x} + 6f.$$

Isolando f temos chegamos a

$$f = \frac{20x^2 - 12x + 2}{1 - 6x + 11x^2 - 6x^3} = \frac{20x^2 - 12x + 2}{(1-x)(1-2x)(1-3x)}.$$

Finalmente usando o método das frações parciais, temos que

$$f = \frac{5}{1-x} - \frac{4}{1-2x} + \frac{1}{1-3x} = \sum_{n\geq 0}(5 - 4.2^n + 3^n)x^n.$$

Como

$$f \overset{ogf}{\longleftrightarrow} (5 - 4.2^n + 3^n)_0^\infty$$

Temos que

$$a_n = 5 - 2^{n+2} + 3^n,$$

solução da equação de recorrência homogênea de terceira ordem dada.

■

Exemplo 17 *(Fibonacci) Um casal de coelhos recém-nascidos foi posto num lugar cercado. Determinemos quantos casais de coelhos ter-se-ão após* $n+2$ *meses, supondo que, a cada mês, um casal de coelhos produz outro casal e que um casal começa a procriar dois meses após o seu nascimento.*

Solução.

Como cada casal nascido só se reproduzirá a cada dois meses, então cada um contribuirá com algum filho a cada dois meses. Então no mês n teremos,digamos, F_n casais. E consequentemente, no mês $n+1$ tem-se F_{n+1} casais. Assim, no mês $n+2$ têm-se a contribuição dos que nasceram no mês n e o total de casais do mês $n+1$. Portanto, a equação que modela o problema é dada por:

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \tag{4.1}$$

onde $F_0 = 0$ e $F_1 = 1$

Tomando $f \overset{ogf}{\longleftrightarrow} (F_n)_{n\geq 0}^{\infty}$, multiplicando por x^n e aplicando a soma ambos os lados temos que

$$\sum_{n\geq 0} F_{n+2}x^n = \sum_{n\geq 0} F_{n+1}x^n + \sum_{n\geq 0} F_n x^n,$$

usando 3.1 temos

$$\frac{f - F_0 - F_1 x}{x^2} = \frac{f - F_1 x}{x} + f.$$

Novamente isolando a f temos

$$f = \frac{x}{1 - x - x^2}.$$

Usando novamente o método das frações parciais temos

$$f = \frac{x}{1 - x - x^2} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1}{1 - \frac{1+\sqrt{5}}{2}x} - \frac{1}{1 - \frac{1-\sqrt{5}}{2}x} \right)$$

Logo, podemos expressar f como a série de potência:

$$f = \frac{1}{\sqrt{5}} \sum_{n\geq 0} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right) x^n$$

Podemos escrever

$$f \overset{ogf}{\longleftrightarrow} \left(\frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right)_0^{\infty} \tag{4.2}$$

Portanto temos:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n$$

■

Exemplo 18 *Encontremos o número de subconjuntos com k elementos de um conjunto com n elementos.*

Solução. Considere um conjunto com n elementos dado por $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$. Um elementos a_k pode estar ou não em um subconjunto B de A cuja quantidade é k elementos. Nesse caso, se a_k estiver em B teremos que escolher $k-1$ elementos dentre os $n-1$ restantes. Caso contrário, se a_k não estiver em B, precisamos escolher k elementos dentre os $n-1$. Segue-se então a relação de Stifel dada por:

$$c_{n,k} = c_{n-1,k-1} + c_{n-1,k}, \tag{4.3}$$

onde inicialmente temos $c_{n,0} = 1$.

Fixamos n, podemos definir

$$f_n = \sum_{k\geq 0} c_{n,k}x^k. \tag{4.4}$$

Multiplicando a equação de recorrência 4.3 por x^k e aplicando a soma em ambos lados temos

$$\sum_{k\geq 0} c_{n,k}x^k = \sum_{k\geq 0} c_{n-1,k-1}x^k + \sum_{k\geq 0} c_{n-1,k}x^k.$$

Logo,

$$f_n = f_{n-1} + xf_{n-1},$$

que é equivalente a

$$f_n = (1+x)f_{n-1},$$

com $f_0 = 1$. Assim, temos um recursão bem definida e não é difícil de perceber que:

$$f_n = (1+x)^n.$$

Seja $[x^k](1+x)^n$ o coeficiente de x^k na expansão de $(1+x)^n$ então,

$$[x^k](1+x)^n = \binom{n}{k}.$$

■

Exemplo 19 *Encontre o número de permutações sem pontos fixos do conjunto* $\{1, 2, 3, 4, ..., n\}$. *Ou seja, permutações tais que nenhum número ocupa a sua posição original.*

Solução 1 *Considere* D_n *o número de permutações desejado. Seja* $g \overset{egf}{\longleftrightarrow} D_n$, *tal que* g *é a função geratriz exponencial.*

Considere k *elementos fixos. Nesse caso, existirão* D_{n-k} *permutações de elementos não fixos. Portanto, podemos escolher* k *elemento fixos e, consequentemente, permuta-se os não fixos. Assim podemos escrever,*

$$\sum_{k\geq 0} \binom{n}{k} D_{n-k} = n!$$

.

Assim pode-se escrever

$$g(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{D_n x^n}{n!}$$

e

$$e^x = \sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!}$$

Portanto, pelo Teorema 5 do Capítulo 3, tem-se:

$$e^x g(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!} \sum_{k\geq 0} \binom{n}{k} D_k = \sum_{n\geq 0} x^n = \frac{1}{1-x}$$

Ou seja:

$$g(x) = \left(\sum_{k\geq 0} x^j\right)\left(\sum_{i\geq 0} \frac{(-1)^i x^i}{i!}\right) = \sum\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n x^n}{n!}$$

Logo temos que:

$$D_n = n!\left[\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{n!}\right]$$

Exemplo 20 *De quantas maneiras podemos formar palavras com n letras utilizando o alfabeto $\{a,b,c,d\}$ se as letras a e b não devem aparecer juntas?*

Solução.

Podemos resolver esse problema recorrência e após construí-la encontrarmos o seu termo geral por funções geradoras.

De fato, seja a_n o número de palavras com n letras formadas com as letras dadas no problema onde a e b não aparecem juntas.

Claramente podemos ter: $a_1 = 4$ e $a_2 = 14$.

Para encontrarmos a equação de recorrência vamos escrever os seguintes casos:

i. Seja b_n o número de palavras, que satisfazem o enunciado, com n letras que começam a ou b

ii. Seja c_n o número de palavras, que satisfazem o enunciado, com n letras que começam c ou d.

A separação nesses casos nos permite dizer que

$$a_n = b_n + c_n. \tag{4.5}$$

Nas palavras que começam com a, satisfazendo o enunciado, poderemos usar somente as letras $\{a, c, d\}$(analogamente palavras que começam por b usam-se somente as letras$\{b, c, d\}$). Logo, temos que $b_n = 3a_{n-1}$, já que restam $n-1$ espaços a serem preenchidos. Da mesma forma se a palavra começar com c ou d teremos que usar somente as letras $\{c, d, a\}$ ou $\{c, d, b\}$. Nesse Caso, por exemplo, se a palavra começar com a letra c, podemos supor que a próxima letra será b ou a. De maneira análoga quando a palavra começar com a letra d. Como irão restar $n-2$ espaços a serem preenchidos, teremos $c_n = 2a_{n-2}$.

Assim, temos a modelagem do problema. Nesse caso se quer usar 3.1, por isso usaremos a seguinte equação de recorrência(obtida trocando-se n por $n+2$).

$$a_{n+2} = 3a_{n+1} + 2a_n. \tag{4.6}$$

Portanto, definindo $P(x) \overset{ogf}{\longleftrightarrow} (a_n)_0^{\infty}$, multiplicando a equação de recorrência 4.6 por x^n , aplicando a soma em ambos lados temos

$$\sum_{n\geq 0} a_{n+2} = 3\sum_{n\geq 0} a_{n+1} + 2\sum_{n\geq 0} a_n. \tag{4.7}$$

Usando novamente 3.1 temos

$$\frac{P(x) - a_0 - a_1 x}{x^2} = 3\frac{P(x) - a_0}{x} + 2P(x),$$

cuja a solução $P(x)$ é dada por

$$P(x) = \frac{x+1}{-2x^2 - 3x + 1}.$$

Usando novamente o método das frações parciais, como fizemos em exemplos anteriores, temos a solução geral

$$a_n = \left(\frac{17 + 5\sqrt{17}}{4}\right)\left(\frac{3+\sqrt{17}}{2}\right)^n + \left(\frac{17 - 5\sqrt{17}}{4}\right)\left(\frac{3-\sqrt{17}}{2}\right)^n$$

■

Para término dessa seção, exibiremos um teorema que diz respeito a uma sequência linearmente recorrente a_{n+k}, tal que se tomarmos $P(x) \overset{ogf}{\longleftrightarrow} (a_n)_{n\geq 0}^{\infty}$, poderemos escrevê-la como uma divisão de dois polinômios de graus bem definidos. O objetivo é formalizar a ideia das funções racionais que comentamos no capítulo anterior.

Teorema 6 *Suponha a sequência a_n, dada por uma recorrência linear de ordem k com coeficientes constantes isto é, $c_1, c_2, .., c_k$*

$$a_{n+k} = c_1 a_{n+k-1} + c_2 a_{n+k-2} + ... + c_k a_n$$

e com os elementos $a_0, a_1, ..., a_{k-1}$, conhecidos. Então a função geradora $P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ...$ é racional, ou seja, $P(x) = \frac{S(x)}{Q(x)}$ onde $Q(x)$ é um polinômio de grau k, e $S(x)$ é um polinômio de grau no máximo $k-1$.

Demonstração.
A prova dessa teorema poderá ser consultada em [13].

■

4.2 Produto de Hadamard de Funções Geradoras

Jacques Hadamard (1865-1963) foi um importante matemático francês do século 20 que teve bastante notoriedade, principalmente na teoria de números primos. Ele produziu um total de 29 artigos em vários ramos da matemática e incursões na física.

Ocupou a cadeira na Academia de Ciência, no lugar de Henri Poincaré. Sua história é relatada no livro [17]. Aqui vamos nos concentrar numa pequena aplicação de funções geradoras. A referência que usamos aqui foi basicamente [13] e servirá como um certo tipo de aplicação de funções geradoras racionais.

Definição 5 *O* ***produto de Hadamard*** *de duas funções geradoras dadas por:*

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ...$$

e

$$Q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + ...$$

é dado pela seguinte notação:

$$P \circ Q(x) = a_0b_0 + a_1b_1x + ...$$

Note que o produto de Hadamard nos dá uma sequência cujos elementos são produtos de elementos correspondentes de sequências, ou seja, para um termo de ordem n de uma sequência a_n e b_n, temos que sequência de Hadamard é dada por a_nb_n.

Teorema 7 *O produto de Hadamard de duas funções geradoras é racional.*

Para provarmos esse teorema precisamos do lema a seguir:

Lema 2 *A funcão geradora de uma sequência $(a_k)_{k\geq 0}$ é racional se somente se existem números $b_1, b_2, ..., b_j \in \mathbb{R}$ os polinômios $p_1(n), ..., p_j(n)$ tais que para algum n temos que*

$$a_n = \sum_{i=1}^{j} p_i(n)b_i^n.$$

Demonstração.
Seja,

$$P(x) = \sum_{n\geq 0} a_nx^n.$$

Como $P(x)$ é racional, podemos escrever

$$P(x) = \frac{c_0 + c_1x + c_2x^2 + ... + c_{k-1}x^{k-1}}{c_0^* + c_1^*x + c_2^*x^2 + ... + c_k^*x^k},$$

que equivalente a

$$P(x) = \left(\sum_{i=0}^{k-1} c_ix^i\right)\left(\sum_{i=0}^{k} c_k^*x^k\right)^{-1}.$$

Usando Binoômio de Newton, temos

$$P(x) = (c_0^*)^{-1}\left(\sum_{i=0}^{k-1} c_i x^i\right)\left(\sum_{i\geq 0}\binom{-1}{i}\left[\frac{c_1^*}{c_0^*}x + \frac{c_2^*}{c_0^*}x^2 + ... + \frac{c_k^*}{c_0^*}x^k\right]^i\right),$$

ou seja,

$$P(x) = (c_0^*)^{-1}\left(\sum_{i=0}^{k-1} c_i x^i\right)\left(\sum_{i\geq 0}\binom{-1}{i}x^i\left[\frac{c_1^*}{c_0^*} + \frac{c_2^*}{c_0^*}x + ... + \frac{c_k^*}{c_0^*}x^{k-1}\right]^i\right). \quad (4.8)$$

O fator $\left[\frac{c_1^*}{c_0^*} + \frac{c_2^*}{c_0^*}x + ... + \frac{c_k^*}{c_0^*}x^{k-1}\right]^i$ é um polinômio de grau $i(k-1)$.
Então vamos escrever genericamente 4.8 da seguinte forma

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + ... = (c_0^*)^{-1}\left(\sum_{i=0}^{k-1} c_i x^i\right)\left(\sum_{i\geq 0}\binom{-1}{i}x^i p_{i(k-1)}(x)\right). \quad (4.9)$$

Agora é so tomar o coeficiente de x^n da expressão 4.9

■

Agora somos capazes de demonstrar o Teorema 7

Demonstração.

A prova desse teorema segue direto do lema, pois:
Se f é uma função geradora racional, podemos escrever cada a_n como:

$$a_n = \sum_{i=1}^{j} p_i(n)b_i^n$$

Da mesma forma, sendo g uma função racional, podemos escrever cada c_n

$$c_n = \sum_{i=1}^{j} p_i^*(n)t_i^n$$

Segue que se

$$f \circ g = a_0c_0 + a_1c_1x + a_2c_2x^2$$

Então a expressão

$$a_nb_n = \left(\sum_{i=1}^{j} p_i(n)b_i^n\right)\left(\sum_{i=1}^{j} p_i^*(n)t_i^n\right),$$

dará que $f \circ g$ racional.

■

4.3 Número de Catalan

O *Número de Catalan* c_n é frequentemente associado a muitas estruturas em Combinatória, principalmente aquelas cujos objetos estão envolvidos em uma recursividade.

Podemos encontrar na literatura uma série de definições desse número. Diante dessa variedade, vamos escolher definir Catalan através de uma estrutura algébrica de parênteses.

Por isso, considere a seguinte operação algébrica:

$$(a-b)(a-(c-d))$$

Se experimentalmente apagarmos a letras dos respectivos parênteses teremos a seguinte estrutura

$$()(()).$$

Portanto, podemos organizar essas estruturas com 1, 2, 3, ... pares de parênteses cuja estrutura é a seguinte figura:

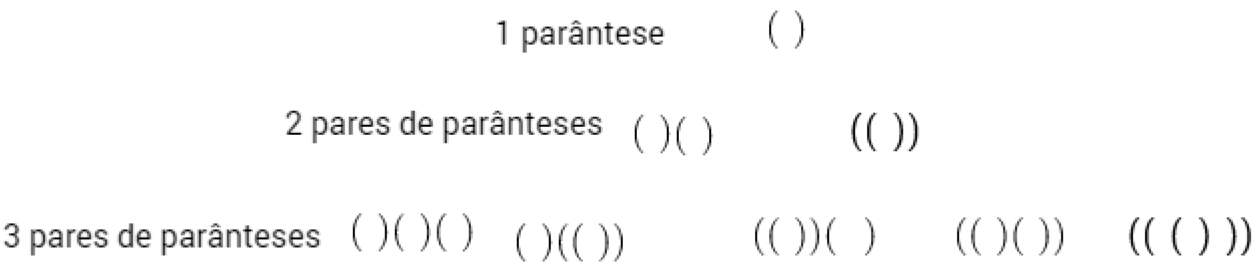

Figura 4.2: Estrutura de Parênteses

Segue-se portanto,

Definição 6 *O Número de Catalan* c_n *representa a quantidade de expressões contendo* n *pares de parênteses*

Representemos então a sequência de Catalan,

$$c_n = \{1, 1, 2, 5, 14, 42, 132...\}$$

Desejamos, agora, desenvolver uma função geradora que represente a sequência de Catalan. É importante perceber que nas estruturas escritas, simplificadamente, na figura 4.2 temos pares de parênteses internos ou externos a outros. Então, considerando uma estrutura com $n+1$ pares de parênteses, se tivermos i pares internos consequentemente obteremos $n-i$ pares externos. Assim, todas as concatenações com $n+1$ pares são dadas por

$$c_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} c_i c_{n-i}. \tag{4.10}$$

Exemplo 21 *Considerando* $c_0 = 0$*, caculemos* c_6 *usando 4.10*

Segue-se portanto,

$$c_6 = \sum_{i=0}^{5} c_i c_{n-i} = c_0c_5 + c_1c_4 + c_2c_3 + c_1c_4 + c_5c_0 = 2(42 + 14 + 10) = 132.$$

Vamos definir agora a parte mais importante que é fórmula geral para o número de catalan.

Considere

$$c_t(x) \overset{ogf}{\longleftrightarrow} (c_n)_{n\geq 0},$$

ou seja,

$$c_t(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + ... = 1 + x + 2x^2 + 5x^3 + ..., \tag{4.11}$$

elevando 4.11 ambos os lados ao quadrado e multiplicando por x temos

$$xc_t^2(x) = c_0^2x + (c_0c_1 + c_1c_0)x^2 + ... = x + 2x^2 + 5x^3 + ... = c_t(x) - 1.$$

Reorganizando a equação temos

$$xc_t^2(x) - c_t(x) + 1 = 0.$$

Cuja solução não é difícil perceber que

$$c_t(x) = \frac{1 - \sqrt{1-4x}}{2x}$$

- **OBS:** Não usamos o sinal de + na solução pois se tivéssemos,

$$c_t(x) = \frac{1 + \sqrt{1-4x}}{2x}$$

Que é equivalente a

$$\frac{2}{1 - \sqrt{1-4x}}$$

Teríamos,

$$lim_{x\to 0^+} c_t(x) = \infty$$

Que não é verdade.

Portanto,

$$\frac{1 - \sqrt{1-4x}}{2x} \overset{ogf}{\longleftrightarrow} (c_n)_{n\geq 0}.$$

Desejamos, agora, mostrar que:

$$\frac{1 - \sqrt{1-4x}}{2x} = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} x^n.$$

De fato usando a expansão binomial,

$$\sqrt{1-4x} = (1-4x)^{\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{n} (-4x)^n = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^{n-1} 1.3.5...(2n-5).(2n-3)(-4x)^n}{2^n n!}. \tag{4.12}$$

Da equação 4.12 temos que o somatório do lado direito se torna

$$-\sum_{n\geq 0} \frac{1.3.5...(2n-3)(2x)^n}{n!}. \tag{4.13}$$

No entanto, multiplicando numerador e denominador da equação 4.13 por $(n-1)!$ temos que

$$-\sum_{n\geq 0} \frac{1.3.5...(2n-3)(n-1)!(2x)^n}{n!(n-1)!} = 1-2\sum_{n\geq 1} \frac{(2n-2)!x^n}{n(n-1)!(n-1)!} = 1-2\sum_{n\geq 1} \binom{2n-2}{n-1} \frac{x^n}{n}.$$

Segue que,

$$\sqrt{1-4x} = 1 - 2\sum_{n\geq 1} \binom{2n-2}{n-1} \frac{x^n}{n}.$$

Portanto,

$$ct(x) = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x} = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} x^n,$$

Logo:

$$c_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$$

E ainda recursivamente podemos escrever:

$$c_{n+1} = \frac{4n+2}{n+2} c_n$$

.

Capítulo 5

Método Snake Oil

Um dos métodos mais utilizados para provar identidades de Combinatória é o *Método "Snake Oil"*, principalmente problemas envolvendo números binomiais bem complicados.

De fato, esse método consiste em uma das aplicações de funções geradoras amplamente difundidas em grafos, algoritmos, etc. Alguns problemas de soma combinatória são realmente difíceis e em muitos casos nós valemos da convergência da série e da troca das somas.

Como comentado no início desse trabalho, esse foi primeiro método ao qual tive contato. Neste Capítulo, nos concentraremos em 5 exemplos com o intuito de somas binomiais particularmente difíceis.

Simplificadamente, o método Snake Oil consiste em:

1. Identificar a variável livre da soma. Se ela for um certo n, dá-se um nome para essa soma, digamos $f(n)$.
2. Define-se uma função geradora $F(x)$ que terá como coeficiente $f(n)$.
3. A função $F(x)$ então será escrita em somatório duplo.
4. Interação entre as duas somas, buscando uma fórmula fechada mais simples.
5. Busca-se a identidade de coeficientes da função geradora em questão.

Esse capítulo se encontra todo referenciado em [1] e em [14].

Exemplo 22 *Determinemos o valor da soma*

$$\sum_{k\geq 0}\binom{k}{n-k}$$

para $n = 0, 1, 2, ..$

Solução.

Define-se a variável livre n e assim, pode-se escrever

$$f(n) = \sum_{k\geq 0}\binom{k}{n-k}.$$

Define-se agora a função geradora dada por

$$F(x) = \sum_{n\geq 0} f(n)x^n = \sum_{n\geq 0}\sum_{k\geq 0}\binom{k}{n-k}x^n = \sum_{k\geq 0} x^k \sum_{n\geq 0}\binom{k}{n-k}x^{n-k}.$$

Que é equivalente a,

$$\sum_{k\geq 0}(x^2+x)^k = \frac{1}{1-x-x^2}. \tag{5.1}$$

Vamos provar que 5.1 é igual a :

$$\sum_{n\geq 0} F_{n+1}x^n$$

.

De fato, dada a sequência de Fibonacci podemos escrever

$$S(x) \overset{ogf}{\longleftrightarrow} (F_{n+1})_{n\geq 0}.$$

Assim,

$$S(x) = 1 + x + x^2 + 3x^3 + 5x^4 + ... \tag{5.2}$$

Multiplicando a equação 5.2 por x e por x^2 chegamos a

$$-x^2S(x) - xS(x) + S(x) = 1,$$

que implica em

$$S(x) = \frac{1}{1-x-x^2}$$

Portanto,

$$\frac{1}{1-x-x^2} = \sum_{n\geq 0} F_{n+1}x^n$$

Portanto, chegamos à seguinte conclusão:

$$\sum_{k\geq 0}\binom{k}{n-k} = F_{n+1}.$$

■

Podemos escrever ainda alternativamente que

$$\binom{k}{n-k} = \binom{k}{2k-n}.$$

Então, a soma poderá ser escrita da seguinte forma:

$$\sum_{k\geq 0}\binom{k}{n-k} = \sum_{k\geq 0}\binom{k}{2k-n} = F_{n+1},$$

onde $n = 0, 1, 2, 3, 4, ...$

Exemplo 23 *Encontremos o valor da soma*

$$\sum_{k=m}^{n} \binom{n}{k}\binom{k}{m}$$

Solução.
Seja $f(m) = \sum_{k=m}^{n} \binom{n}{k}\binom{k}{m}$, pois nesse caso temos m como variável livre.
Ainda podemos definir a função geradora de $f(m)$ como

$$F(x) = \sum_{m\geq 0} f(m)x^m.$$

Portanto, podemos escrever

$$F(x) = \sum_{m=0}^{k} x^m \sum_{k=m}^{n} \binom{n}{k}\binom{k}{m}.$$

Fazendo a alternância dos somatórios, podemos chegar ao seguinte formato:

$$F(x) = \sum_{k\leq n} \binom{n}{k} \sum_{m\leq k} \binom{k}{m} x^m = \sum_{m\leq k} \binom{n}{k} (1+x)^k$$

Donde se conclui que

$$F(x) = (2+x)^n = \sum_{m} \binom{n}{m} 2^{n-m} x^m$$

Logo,

$$f(m) = \binom{n}{m} 2^{n-m}.$$

■

Exemplo 24 *Encontremos o valor da soma*

$$\sum_{k\geq 0} \binom{n+k}{m+2k}\binom{2k}{k}\frac{(-1)^k}{k+1}.$$

Solução.
Novamente definimos a variável livre n e também podemos escrever que $f(n) = \sum_{k\geq 0} \binom{n+k}{m+2k}\binom{2k}{k}\frac{(-1)^k}{k+1}$ e a função geradora

$$F(x) = \sum_{n\geq 0} f(n)x^n$$

Assim, usando novamente o método Snake Oil, temos:

$$F(x) = \sum_{n\geq 0} x^n \sum_{k\geq 0} \binom{n+k}{m+2k}\binom{2k}{k}\frac{(-1)^k}{k+1}.$$

Trocando a ordem dos somatórios, temos

$$F(x) = \sum_{k\geq 0} \binom{2k}{k} \frac{(-1)^k}{k+1} x^{-k} \sum_{n\geq 0} \binom{n+k}{m+2k} x^{n+k}.$$

Usando a série 3.27 do capítulo 3, temos

$$F(x) = \sum_{k\geq 0} \binom{2k}{k} \frac{(-1)^k}{k+1} x^{-k} \frac{x^{m+2k}}{(1-x)^{m+2k+1}},$$

que é equivalente a

$$F(x) = \frac{x^m}{(1-x)^{m+1}} \sum_{k\geq 0} \binom{2k}{k} \frac{1}{k+1} \left(\frac{-x}{(1-x)^2}\right)^k.$$

Usando a fórmula de Catalan, temos

$$F(x) = \frac{-x^{m-1}}{2(1-x)^{m-1}} \left(1 - \sqrt{1 + \frac{4x}{(1-x)^2}}\right).$$

Que é equivalente a

$$F(x) = \frac{-x^{m-1}}{2(1-x)^{m-1}} \left(1 - \sqrt{1 + \frac{4x}{(1-x)^2}}\right) = \frac{-x^{m-1}}{2(1-x)^{m-1}} \left(1 - \sqrt{\frac{x^2+2x+1}{(x-1)^2}}\right).$$

Segue-se,

$$F(x) = \frac{-x^{m-1}}{2(1-x)^{m-1}} \left(1 - \frac{x+1}{x-1}\right).$$

Portanto,

$$F(x) = \frac{x^m}{(1-x)^m}.$$

Usando novamente a série 3.27 do capítulo 3, obtemos

$$F(x) = \sum_{n\geq 1} \binom{n-1}{m-1} x^n$$

$$f(n) = \sum_{k\geq 0} \binom{n+k}{m+2k} \binom{2k}{k} \frac{(-1)^k}{k+1} = \binom{n-1}{m-1}.$$

■

Exemplo 25 *Provemos a identidade*

$$\sum_{k\geq 0} \binom{2n+1}{k} \binom{m+k}{2n} = \binom{2m+1}{2n}. \tag{5.3}$$

Solução.
É suficiente mostrar que a função geradora do lado direito é igual a do lado esquerdo. Defina

$$f(m) = \sum_{k\geq 0} \binom{2n+1}{k}\binom{m+k}{2n}.$$

Sua função geradora é dada por

$$F(x) = \sum_{m\geq 0} f(m)x^m.$$

De fato podemos escrever $F(x)$ da seguinte forma:

$$F(x) = \sum_{m\geq 0} x^m \sum_{k\geq 0} \binom{2n+1}{k}\binom{m+k}{2n}$$

Fazendo a troca clássica já feita nos exemplos anteriores, temos

$$F(x) = \sum_{k\geq 0} \binom{2n+1}{2k} \sum_{m\geq 0} \binom{m+k}{2n} x^m.$$

Somando k e subtraindo k na potência do x, vemos

$$F(x) = \sum_{k\geq 0} \binom{2n+1}{2k} x^{-k} \sum_{m\geq 0} \binom{m+k}{2n} x^{m+k}.$$

Novamente usando a série 3.1, temos

$$F(x) = \sum_{k\geq 0} \binom{2n+1}{2k} x^{-k} \frac{x^{2n}}{(1-x)^{2n+1}}.$$

No entanto,

$$\sum_{k\geq 0} \binom{2n+1}{2k} (x^{\frac{-1}{2}})^{2k} = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{2n+1} + \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{2n+1}.$$

Segue-se que

$$F(x) = \frac{(\sqrt{x})^{2n+1}}{2}\left(\frac{1}{(1-\sqrt{x})^{2n+1}} - \frac{1}{(1+\sqrt{x})^{2n+1}}\right).$$

Tomemos agora a função geradora do lado direito da igualdade 5.3

$$g(x) = \sum_{m\geq 0} \binom{2m+1}{2n} x^m = \sum_{m\geq 0} x^{\frac{-1}{2}} \binom{2m+1}{2n} (x^{\frac{1}{2}})^{2m+1}$$

Portanto

$$g(x) = \frac{(\sqrt{x})^{2n+1}}{2}\left(\frac{1}{(1-\sqrt{x})^{2n+1}} - \frac{1}{(1+\sqrt{x})^{2n+1}}\right).$$

■

Exemplo 26 *Determinemos o valor da soma*

$$\sum_{k\geq 0}\binom{n+k}{2k}2^{n-k}.$$

Solução.
Novamente vamos usar o Método Snake Oil. Por isso, podemos escrever

$$f(n)=\sum_{k\geq 0}\binom{n+k}{2k}2^{n-k}$$

e por consequência definir

$$P(x)\overset{ogf}{\longleftrightarrow}f(n)_0^\infty.$$

Ou seja,

$$P(x)=\sum_{n\geq 0}f(n)x^n=\sum_{n\geq 0}\sum_{k\geq 0}\binom{n+k}{2k}2^{n-k}x^n,$$

que equivalente a

$$P(x)=\sum_{k\geq 0}2^{-k}\sum_{n\geq 0}\binom{n+k}{2k}2^n x^n.$$

Somando k e subtraindo k na potência do x^n podemos escrever:

$$P(x)=\sum_{k\geq 0}2^{-k}(2x)^{-k}\sum_{n\geq 0}\binom{n+k}{2k}(2x)^{n+k}$$

Usando novamente a série 3.1 do capítulo 3 temos

$$P(x)=\frac{1}{1-2x}\sum_{k\geq 0}\left(\frac{x}{(1-2x)^2}\right)^k=\frac{1-2x}{(1-4x)(1-x)}$$

Logo, usando frações parciais, temos

$$P(x)=\frac{1}{3}\left(\frac{2}{1-4x}+\frac{1}{1-x}\right).$$

Portanto,

$$\sum_{k\geq 0}\binom{n+k}{2k}2^{n-k}=\frac{1+2^{2n+1}}{3}.$$

■

Capítulo 6

Partição

Um dos problemas fundamentais em Matemática é a partição de um número inteiro. Importantes matemáticos como Euler, Hardy, Littlewood, Ramanujan, entre outros fizeram generosas inserções nessa área.

Na verdade encontrar uma fórmula geral para a partição de um número foi um dos maiores desafios para os matemáticos durante 300 anos.

Euler no século XVIII, por exemplo, como veremos mais adiante, desenvolveu uma fórmula de recursão usando uma função geradora. Por muito tempo os matemáticos determinaram as partições desse número usando essa fórmula e com isso conseguiu-se encontrar, por exemplo, partição de 200 a qual escreveremos como $p(200)$.

No entanto Hardy e Ramanujan conseguiram analisar o comportamento da função partição. Mas em meados dos anos 30, o matemático Rademacher conseguiu, enfim, encontrar uma fórmula exata para uma partição de n que denotaremos por $p(n)$.

Há também uma fórmula usando Fractais, desenvolvida por Jan Braunier e Ken Ono.

Nesse capítulo, essencialmente, vamos nos concentrar nos aspectos mais próximos às funções geradoras, ou seja, utilizaremos o Teorema de Euler para chegar à fórmula de recursão desenvolvida por ele. Também podemos citar dentro desse contexto a teoria de números pentagonais.

As referências desse capítulo são [11], [12] e [17].

Definição 7 *Uma partição de um número inteiro n, denotado por $p(n)$ é uma forma de decomposição de n como soma de inteiros positivos.*

Exemplo 27 *Seja a partição do número inteiro 3. Assim temos*

$$3 = 2 + 1 = 1 + 1 + 1.$$

Logo, $p(3) = 3$.

Exemplo 28 *Seja a partição do inteiro 4. Assim,temos:*

$$4 = 3 + 1 = 2 + 2 = 2 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1 + 1.$$

Logo, $p(4) = 5$

Mais tarde, no Problema 10 do Capítulo 7, iremos exibir uma aplicação do problema da partição, que é justamente uma prova do teorema de Euler.

6.1 Representação Geométrica das Partições

Tome como exemplo uma partição dada por $4+3+1+1$. Podemos representá-la esquematicamente da seguinte forma:

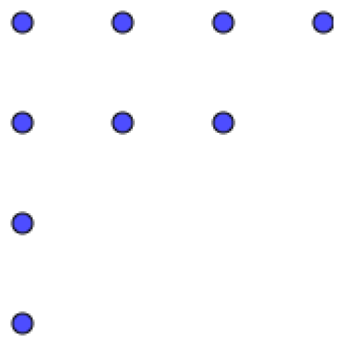

Figura 6.1: Partição do 9

Se, na representação geométrica de uma partição, trocarmos as linhas pelas colunas e obtivermos uma outra partição do mesmo número, então essa é dita **conjugada**.

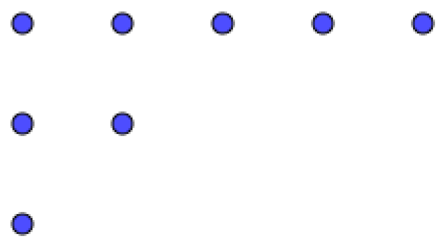

Figura 6.2: Partição do 8

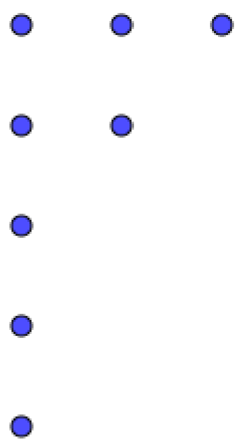

Figura 6.3: Partição conjugada do 8

O teorema a seguir é uma importante aplicação do que acabamos definir como partição conjugada.

Teorema 8 *O número de partições de n em m partes é igual ao número de partições de n tendo m como maior parte.*

Demonstração.
Para demonstração desse Teorema, consultar [17].
■

6.2 Função geradora para partição

Aqui discutiremos detalhes relacionados a uma partição usando o conceito das funções geradoras. Iniciaremos então, com um teorema(Euler) importante cuja demonstração, como comentamos antes, se encontra no próximo capítulo dentre os problemas selecionados. Para posteriormente, discutirmos a respeito da recursividade de $p(n)$ a qual é necessária para obter a partição de números maiores.

Teorema 9 *(Euler)*
Seja $p(n)$ uma partição de n e $|x| < 1$, temos

$$\prod_{m=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^m} = \sum_{n \geq 0} p(n)x^n.$$

Podemos encontrar outros tipos de funções geradoras. Depende apenas de como se quer particionar o número.

Por exemplo, as $p(4)$ partições de 4, são, como já vistas antes $4 = 3+1 = 2+2 = 2+1+1 = 1+1+1+1$. No entanto se quiséssemos distribuir 4 objetos em 2 gavetas idênticas de modo que nenhuma gaveta estivesse vazia, teríamos apenas os casos: $3+1$ e $2+2$. Por isso, teríamos que considerar uma função geradora que tomasse quantidade par de gavetas, ou seja, se tomarmos o coeficiente de x^2 do produto

$$\prod_{k=0}^{\infty}(1+x^{2k}),$$

teríamos a quantidade desejada.

De fato, as funções geradoras das partições variam de acordo com o que se quer. Por isso vamos resumir na tabela a seguir:

Função Geradora	**Sequência das Partições de n em partes que são:**
$\prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^{2k-1}}$	Ímpares
$\prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^{2k}}$	Pares
$\prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^{k^2}}$	Quadrados
$\prod_{p} \frac{1}{1-x^{p}}$	Primos
$\prod_{k=1}^{\infty}(1+x^k)$	Distintos
$\prod_{k=1}^{\infty}(1+x^{2k-1})$	Ímpares Distintos
$\prod_{k=1}^{\infty}(1+x^{2k})$	Pares Distintos
$\prod_{k=1}^{\infty}(1+x^{k^2})$	Quadrados Distintos
$\prod_{p}(1+x^{p})$	Primos Distintos

Exemplo 29 *Provar que todo inteiro positivo pode ser expresso de maneira única como soma de potências distintas de 2.*

Solução.

Seja n um número inteiro o qual precisamos particionar em potências de base 2. Assim, a função geradora

$$\prod_{k=0}^{\infty}(1+x^{2^k})$$

é a que particiona n em potências de 2. Basta agora obter o coeficiente de x^n. No entanto, é facil ver que

$$\sum_{i\geq 0} x^i = 1 + x + x^2 + ... = \prod_{k=0}^{\infty}(1+x^{2^k}).$$

Temos então que o coeficiente de x^n é 1.

■

Na próxima seção abordaremos os números pentagonais, os quais serão importantes para cálculo da fórmula da recursão de Euler.

6.3 Números Pentagonais

Os números pentagonais são descritos de acordo com a figura a seguir:

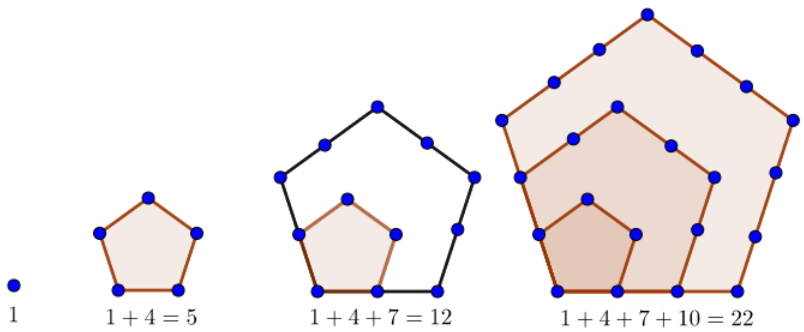

Figura 6.4: Números Pentagonais

Por isso os números pentagonais são: $1, 5, 12, ...$ Ou seja, o n-ésimo termo da sequência de números pentagonais é dado por

$$a(n) = \frac{3n^2 - n}{2}.$$

Demonstração.

Pela definição de números pentagonais tem-se que cada termo é resultado de uma soma de uma PA cuja razão é 3.

De uma maneira geral

$$\alpha(n) = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2},$$

onde $a_n = 3n - 2$

Logo

$$\alpha(n) = \frac{(1+3n-2)n}{2} = \frac{3n^2-n}{2}$$

■

Podemos também dizer que os números $a(-n) = \frac{3n^2+n}{2}$ são também pentagonais.

Teorema 10 *Se* $|x| < 1$ *temos*

$$\prod_{k=1}^{\infty}(1-x^k) = 1 - x - x^2 + x^5 + x^7 + ... = 1 + \sum_{k\geq 0}(-1)^k(x^{a(n)} + x^{a(-n)}) = \sum_{-\infty}^{+\infty}(-1)^n x^{a(n)}$$

Demonstração.
Para demonstração desse Teorema consultar [12].

■

6.3.1 Recursividade para p(n)

Teorema 11 *Seja* $p(0) = 1$. *Então, para* $n \geq 1$, *temos*

$$p(n) - p(n-1) - P(n-2) + p(n-5) + p(n-7)... = 0$$

Demonstração.
Pelos teoremas 9 e 10 podemos escrever

$$1 = \left(\sum_{k\geq 0}(-1)^k(x^{a(n)} + x^{a(-n)})\right)\left(\sum_{k\geq 0}p(k)x^k\right).$$

Agora reconhecer o coeficiente de x^n que
De fato, expandindo as somas temos:

$$\left(\sum_{-\infty}^{\infty}(-1)^n x^{\frac{3n^2-n}{2}}\right)\left(\sum_{m\geq 0}p(m)x^m\right) = 1.$$

É equivalente a,

$$\left(... + (-1)x^{-1} + (-1)^0 x^{\frac{3}{2}} + (-1)^1 x + (-1)^2 x^5 + ...\right)\left(p(0)x^0 + p(1)x^1 + p(2)x^2 + ...\right).$$

Portanto observando o coeficiente de x^n e igualando a expressão a 0, teremos

$$p(n) - p(n-1) - P(n-2) + p(n-5) + p(n-7)... = 0$$

■

Usando a fórmula de recursão de Euler, matemáticos como Percy Alexander MacMahon(1854-1929) conseguiram listar algumas partições. São elas:

$$p(1) = 1$$

$$p(5) = 7$$

$$p(10) = 42$$
$$p(15) = 176$$
$$p(20) = 627$$
$$p(25) = 1958$$
$$p(30) = 5604$$
$$p(40) = 37338$$
$$p(50) = 204226$$
$$p(100) = 190560292$$
$$p(200) = 3.972.999.029.388$$

No entanto, em 1915 Hardy e Ramanujan publicaram um dos trabalhos mais importantes para séries assintóticas para $p(n)$, nos quais deduziam o resultado

$$p(n) \sim \frac{1}{4n\sqrt{3}} e^{\pi\sqrt{\frac{2n}{3}}}$$

Na verdade Ramanujan fez incursões a respeito da divisibilidade da partição $p(n)$ de alguns números, ou seja, ele provou que

- $p(5m + 4) \equiv 0 mod 5$
- $p(7m + 5) \equiv 0 mod 7$
- $p(11m + 6) \equiv 0 mod 11$

Em 1937, o matemático Hans Rademacher(1892-1969) encontrou uma fórmula para a partição de certo número, solucionando um problema que já durava 300 anos. Não vamos exibi-la, pois foge do escopo dessa dissertação. No entanto, o leitor poderá encontrá-la em [11].

Hoje, a Teoria das Partições tem diversas aplicações, tanto dentro da Matemática (Teoria dos Números, Grafos, Combinatória, etc) quanto fora dela, como, por exemplo, na Música. Ou seja, essa teoria já tem aplicação prática no cotidiano, fornecendo, assim, uma motivação maior de aplicá-la em diversos estudos.

Capítulo 7

Aplicação de Funções Geradoras em Problemas

Chegamos ao último capítulo dessa dissertação, que será voltado para aplicações em problemas de Olimpíadas ao redor do mundo e vestibulares. As referências desse capítulo são [2], [3], [4], [5],[7] e [9].

A estrutura dessa capítulo se dar-se-a da seguinte forma: Primeiro estabeleceremos o enunciando dos problemas; em seguida iremos propor uma solução por meio de funções geradoras; e finalmente teceremos comentários pertinentes acerca deles.

Problema 1 *(IME - 2005)*

Sejam S_0 e S_1 somas definidas por:

$$S_0 = \binom{n}{0} + \binom{n}{3} + ... + \binom{n}{3\lfloor \frac{n}{3} \rfloor}.$$

$$S_1 = \binom{n}{1} + \binom{n}{4} + ... + \binom{n}{3\lfloor \frac{n-1}{3} \rfloor + 1}.$$

Calcule os valores de S_0 e S_1 em função de n.

Sugestão: utilize o desenvolvimento em binômio de Newton de $\left(1 + cis\frac{2\pi}{3}\right)^n$

Solução.

Primeiramente, note que o problema tem duas vertentes. Quando observamos S_0, vemos uma soma binomial cujas escolhas são múltiplos de 3. Ao mesmo tempo, quando observamos S_1, vemos também uma soma binomial cujas as escolhas tem um formato $3\lfloor \frac{k-1}{3} \rfloor + 1$, para $k \geq 1$. Portanto, para que possamos escrever S_0 em função de n, só precisamos das raízes cúbicas da unidade. Mas para possamos escrever S_1 em função de n, será necessário, uma ideia além das raízes cúbicas da unidade no sentido de expandir algumas somas para se obter o desejado.

Considere as raízes terceiras da unidade ou seja,

$$w_k = cis\left(\frac{2k\pi}{3}\right)$$

e também defina

$$f(x) = \sum_{m=0}^{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor} \binom{n}{3m} x^{3m}$$

$$F(x) = (1+x)^n$$

Por 3.16 , temos

$$\frac{F(x) + F(w_1 x) + F(w_2 x)}{3} = f(x).$$

Portanto, fazendo, $x = 1$, podemos escrever

$$f(1) = S_0 = \frac{2^n + (1 + cis\frac{2\pi}{3})^n + (1 + cis\frac{4\pi}{3})^n}{3}.$$

Assim,

$$S_0 = \frac{2^n + (1 + cis\frac{2\pi}{3})^n + (1 + cis\frac{4\pi}{3})^n}{3}$$

No entanto, usando sugestão do problema, podemos escrever

$$\left(1 + cis\frac{2\pi}{3}\right)^n = 2^n cos^n\left(\frac{4\pi}{3}\right) cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right) + i2^n cos^n\left(\frac{4\pi}{3}\right) sen\left(\frac{2\pi n}{3}\right). \tag{7.1}$$

Usando o Binômio de Newton, temos

$$\left(1 + cis\frac{2\pi}{3}\right)^n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} cis\left(\frac{2p\pi}{3}\right),$$

que é equivalente a

$$\left(1 + cis\frac{2\pi}{3}\right)^n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} cos\left(\frac{2\pi p}{3}\right) + i\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} sen\left(\frac{2\pi p}{3}\right). \tag{7.2}$$

Portanto observando as partes reais e imaginárias das equações 7.1 e 7.2 temos,

$$\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} cos\left(\frac{2\pi p}{3}\right) = 2^n cos^n\left(\frac{4\pi}{3}\right) cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right). \tag{7.3}$$

e

$$\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} sen\left(\frac{2\pi p}{3}\right) = 2^n cos^n\left(\frac{4\pi}{3}\right) sen\left(\frac{2\pi n}{3}\right). \tag{7.4}$$

Expandindo as equações 7.3 e 7.4 temos

$$S_0 - \frac{1}{2}\left(\binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \binom{n}{5} + ...\right) = 2^n cos^n\left(\frac{4\pi}{3}\right) cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right)$$

e

$$S_1 - \frac{2^{n+1}\sqrt{3}}{3} cos^n\left(\frac{4\pi}{3}\right) sen\left(\frac{2\pi n}{3}\right) = \binom{n}{2} + \binom{n}{5} + ...$$

Observando-se a parcela dentro parêntese da equação 7.3, temos contida na soma

$$\underbrace{\binom{n}{1}+\binom{n}{4}+\binom{n}{7}...}_{S_1}+\underbrace{\binom{n}{2}+\binom{n}{5}...}_{7.4}.$$

Portanto, podemos escrever 7.3 da seguinte forma,

$$S_0-\frac{1}{2}\left(2S_1-\frac{2^{n+1}\sqrt{3}}{3}cos^n\left(\frac{4\pi}{3}\right)sen\left(\frac{2\pi n}{3}\right)\right)=2^n cos^n\left(\frac{4\pi}{3}\right)cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right).$$

Ou ainda podemos escrever,

$$S_0-S_1+\frac{2^{n+1}\sqrt{3}}{6}cos^n\left(\frac{4\pi}{3}\right)sen\left(\frac{2\pi n}{3}\right)=2^n cos^n\left(\frac{4\pi}{3}\right)cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right).$$

Que é equivalente a,

$$S_1=S_0+\frac{2^{n+1}\sqrt{3}}{6}cos^n\left(\frac{4\pi}{3}\right)sen\left(\frac{2\pi n}{3}\right)-2^n cos^n\left(\frac{4\pi}{3}\right)cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right).$$

Onde,

$$S_0=\frac{2^n+(1+cis\frac{2\pi}{3})^n+(1+cis\frac{4\pi}{3})^n}{3}.$$

■

Comentário.

O problema 1 do Insituto Militar de Engenharia (IME) foi na época um dos problemas mais difíceis da prova. Sobretudo, para os alunos e professores que não possuem muito contato com a junção dos complexos com números binomiais faz esse problema ser tornar mais dificultoso. Oferecemos aqui, uma proposta de solução alternativa que buscou honrar a teoria desenvolvida neste texto, especialmente no que se refere à seção 3.14 , que trata das raízes da unidade e equação 3.16.

Problema 2 *(IMO - 1995)*

Seja p um número primo ímpar. Quantos subconjuntos de p elementos do conjunto $\{1, 2, ..., 2p\}$ tais que a soma dos elementos seja divisível por p?

Solução.

Primeiramente observemos as condições do problema:

Condição 1. Selecionar subconjuntos de $\{1, 2, ..., 2p\}$ com p elementos

Condição 2. Soma dos elementos desse subconjunto deve ser divisível por p.

Portanto, precisamos de uma função geradora que regule essas duas condições. Tomemos, por exemplo, a função $\prod_{i=1}^{2p}(1+x^i)$. Nesse caso, o coeficiente de x^n nos dará a quantidade de subconjuntos cuja a soma é n.

Portanto, podemos usar as condições 1 e 2 precisamos da seguinte função geradora:

$$f(r,x)=\prod_{i=1}^{2p}(r+x^i)=(r+x)(r+x^2)...(r+x^{2p})=\sum_{i,t}a_{i,t}r^ix^t. \tag{7.5}$$

Façamos a seguinte pergunta: o que representa $a_{i,t}$?

Na prática $a_{i,t}$ representa o número de subconjuntos de S com i elementos cuja a soma desses elementos é t.

O que queremos na verdade é determinar:

$$T=\sum_{p|t}a_{p,t}. \tag{7.6}$$

Consideremos agora $w=cis\left(\frac{2\pi}{p}\right)$, cujas raízes estão no seguinte conjunto:

$$A=\{1,w,w^2,...,w^{p-1}\}.$$

Portanto, podemos calcular:

$$\sum_{x\in A}f(r,x)=f(r,1)+\sum_{1\leq k\leq p-1}f(r,w^k)$$

Observe, por 7.5 temos que

- $f(r,1)=(r+1)^{2p}$
- $f(r,w^k)=\left((r+w)(r+w^2)...(r+w^p)\right)^2$

De fato se tomarmos $x=1$ em 7.5 teremos

$$f(r,1)=\underbrace{(1+r)(1+r)...(1+r)}_{2p}=(1+r)^{2p}$$

Por outro lado temos:

$$f(r,w^k)=(r+w^k)(1+w^{2k})...(1+w^{kp})...(1+w^{2kp}).$$

Que equivalente a:

$$f(r,w^k)=\left[(r+w)(r+w^2)...(r+w^p)\right]^2,$$

pois para $1\leq k\leq p-1$ temos

$$(r+w^k)(r+w^{2k})(r+w^{3k})...(r+w^{kp})=\left[(r+w)(r+w^2)...(r+w^p)\right].$$

No entanto não é difícil perceber que

$$(r+w)(r+w^2)...(r+w^p)=r^p+1,$$

portanto, podemos dizer que

$$\sum_{x\in A}f(r,x)=(r+1)^{2p}+(p-1)(r^p+1)^2. \tag{7.7}$$

Voltemo-nos agora para uma outra soma onde $r \in A$:

$$\sum_{r\in A}\sum_{x\in A} f(r,x) = \sum_{r\in A}\left[(r+1)^{2p} + (p-1)(r^p+1)^2\right].$$

Note que,

$$\sum_{r\in A}(p-1)(r^{2p}+2r^p+1) = (p-1)\sum_{r\in A}(r^{2p}+r^p+1) = (p-1)4p. \tag{7.8}$$

Portanto,

$$\sum_{r\in A}\sum_{k=0,p,2p}\binom{2p}{k}r^k + \sum_{r\in A}\sum_{k\neq p}\binom{2p}{k}r^k + 4p(p-1). \tag{7.9}$$

Como $\sum_{r\in A}\sum_{k\neq p}\binom{2p}{k}r^k = \sum_{k\neq p}\binom{2p}{k}\sum_{r\in A} r^k = 0$,temos que 7.9 torna-se

$$\sum_{r\in A}\sum_{x\in A} f(r,x) = p\left[\binom{2p}{p} + 4p - 2\right].$$

Finalmente, para que possamos terminar o problema, precisamos usar a definição 7.5, para calcular

$$\sum_{r\in A}\sum_{x\in A} f(r,x) = \sum_{r\in A}\sum_{x\in A}\sum_{i,t} a_{i,t}r^i x^t = \sum_{r\in A}\sum_{i,t} a_{i,t}r^i\sum_{x\in A} x^t = p\sum_{r\in A}\left(\sum_{i,t,p|i,p|t} a_{i,t}r^i\right) = p^2(T+2).$$

Segue-se, portanto que

$$T = \frac{\binom{2p}{p}-2}{p} + 2.$$

■

Comentário.

O problema 2 que apresentamos faz parte de uma competição de matemática para estudantes de ensino médio do mundo todo. Essa competição teve seu início em 1959 e ,hoje, tem o formato em que cada país escolhe 6 estudantes como representantes. Atualmente participam estudantes de mais de 100 países entre os 5 continentes.

Nesse sentido, a escolha dessa problema mostrou-se necessária diante boa aplicação na questão, novamente, das raízes da unidade. Tivemos uma necessidade extra de que o subconjunto contivesse p elementos. Por isso, adotamos uma função de duas variáveis visando controle da quantidade de elementos e da sua soma.

Problema 3 *(PUTNAM - 1957)*

Seja $\alpha(n)$ os números de representações de um inteiro n como soma de 1's e 2's, tendo a ordem considerada. Por exemplo:

$$4 = 1+1+2 = 1+2+1 = 2+1+1 = 2+2 = 1+1+1+1$$

então se tem $\alpha(4) = 5$. Seja $\beta(n)$ o número de representações de n como de número inteiros maiores 1, onde a ordem é relevante. Por exemplo:

$$6 = 4+2 = 2+4 = 3+3 = 2+2+2$$

.

Mostre que

$$\alpha(n) = \beta(n+2)$$

Solução.

Esse é um problema de partição cuja abordagem refere-se a dois tipos: $\alpha(n)$ representa uma partição do n em que poderão ser usados apenas 1 e 2. Enquanto $\beta(n)$ representa uma partição em que poderão ser usados os números maiores que 1. Então, vamos pensar de maneira semelhante ao problema 2. Precisamos de uma função geradora que modele a partição $\alpha(n)$ e outra que modele $\beta(n)$.

Por isso, considere que uma partição de n em geral pode ser dada por

$$x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_j = n.$$

Como só podemos usar os números 1 e 2 cuja ordem é relevante, é natural pensar que cada x_j gerará um $[x^n](x+x^2)^j$, que representa uma partição de n em j partes. Por exemplo:

- o número de partições de n em que somente o 1 é usado, é igual a 1, ou seja $[x^1](x+x^2) = 1$.

Por isso para que possamos obter $\alpha(n)$ é necessário analisar

$$[x^n]\sum_{m\geq 0}(x+x^2)^m = [x^n]\frac{1}{1-x-x^2}.$$

De forma semelhante com $\beta(n)$, temos que

$$[x^n]\sum_{m\geq 0}\left(\sum_{j\geq 2}x^j\right)^m = [x^n]\left(1 + (x^2+x^3+...) + (x^2+x^3+x^4+...)^2 + ...\right).$$

Que é equivalente a

$$[x^n]\left(\frac{1}{1-(x^2+x^3+x^4+..)}\right) = [x^n]\left(\frac{1}{1-x^2(1+x+x^2+..)}\right) = [x^n]\left(\frac{1}{1-x^2(\frac{1}{1-x})}\right).$$

Logo,

$$\sum_{n\geq 2}\beta(n)x^n = \frac{x^2}{1-x-x^2}.$$

Portanto temos a expressão,

$$\sum_{n\geq 2}\beta(n)x^n = \frac{x^2}{1-x-x^2} = \sum_{n\geq 0}\alpha(n)x^{n+2}.$$

Conclui-se que

$$\alpha(n) = \beta(n+2).$$

■

Comentário.

A competição William Lowell Putnam foi criada em 1927 por Elizabeth Lowell Putnam, em homenagem ao seu marido. Desde 1938 essa competição é administrada pela American Mathematical Society (AMS) e tem o intuito de promover a Matemática para estudantes universitários.O torneio é considerado bastante difícil e tem uma premiação interessante para os vencedores.

O problema 3 consiste em dois tipos de partições: Na primeira usa-se somente os números 1 e 2. Na segunda, usam-se números maiores que 2. No caso, o mais interessante são as duas partições(em relação a quantidade) são similares descontando 2 unidades.

Por isso, a estratégia foi escrever, para cada uma, as suas respectivas funções geradoras e explicitar os coeficientes de x^n.

Problema 4 *(Shortlist IMO - 1998)*

Seja $a_0, a_1, a_2, ..$ uma sequência crescente de números inteiros não negativos tais que todos os inteiros não negativos podem ser expressos unicamente na forma $a_i + 2a_j + 4a_k$, onde i, j e k não são necessariamente distintos. Determine a_{1998}.

Solução.

Pelos dados do problema, seja $n \in \mathbb{Z}_+$ temos que

$$n = a_i + 2a_j + 4a_k. \tag{7.10}$$

Precisamos de uma função geradora que nos dê um termo da sequência a_k, para $k \geq 0$. Como todo inteiro n pode ser descrito segundo 7.10, considere a função geradora:

$$f(x) = \sum_{i,j,k} x^{a_i+2a_j+4a_k}.$$

A ideia desse problema é semelhante aos anteriores, ou seja, tomar uma função geradora cujo o expoente é o desejado.

Observe que,

$$f(x) = \sum_{i,j,k} x^{a_i+2a_j+4a_k} = 1 + x + x^2 + x^3 + ...$$

Portanto,

$$f(x) = \frac{1}{1-x}$$

Supondo $h(x) = \sum_{i\geq 0} x^{\alpha_i}$, temos a seguinte soma:

$$\frac{1}{1-x} = h(x)h(x^2)h(x^4) = \sum_{i,j,k} x^{a_i} x^{2a_j} x^{4a_k}.$$

Note ainda, se $\frac{1}{1-x} = h(x)h(x^2)h(x^4)$ então $\frac{1}{1-x^2} = h(x^2)h(x^4)h(x^8)$. Portanto podemos escrever,

$$h(x) = (1+x)h(x^8).$$

Usando o mesmo raciocínio temos,

$$h(x) = (1+x)(1+x^8)h(x^{8^2}).$$

Portanto, segue recorrentemente

$$\sum_{k\geq 0} x^{a_k} = (1+x)(1+x^8)(1+x^{8^2})...$$

Assim,

$$a_{1998} = 8^{10} + 8^9 + ... + 8^6 + 8^3 + 8^2 + 8.$$

■

Comentário.

Shortilist IMO é um banco de questões da International Mathematical Olympiad (IMO) do qual serão retirados os problemas que estarão presentes na competição. Esse problema aqui selecionado, em particular, não foi inserido na prova e, por isso, a comissão organizadora o manteve em um banco de questões.

Aqui tomamos, assim como no problema 7, uma função geradora no qual os expoentes são termos de uma sequência.

Problema 5 *Encontre uma fórmula geral para a sequência $(y_n)_{n\geq 0}$ com $y_0 = 1$ e $y_n = ay_{n-1} + b^n$, para $n \geq 1$, onde a e b são dois números reais fixos.*

Obs: Esse problema poderá ser encontrado em [5], pg 300

Solução.

Considere

$$f(x) \overset{ogf}{\longleftrightarrow} (y_n)_0^\infty. \tag{7.11}$$

E também

$$y_n = ay_{n-1} + b^n. \tag{7.12}$$

Multiplicando a equação 7.12 por x^n nos leva a seguinte equação:

$$\sum_{n\geq 0} y_n x^n = a\sum_{n\geq 1} y_{n-1}x^n + \sum_{n\geq 0} b^n x^n.$$

Usando 7.11 e isolando $f(x)$ temos

$$f(x) = \frac{1}{(1-ax)(1-bx)} = \frac{a}{(a-b)(1-ax)} - \frac{b}{(a-b)(1-bx)},$$

que é equivalente a

$$f(x) = \frac{a}{a-b}\sum_{n\geq 0} a^n x^n - \frac{b}{a-b}\sum_{n\geq 0} b^n x^n = \sum_{n\geq 0}\left(\frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a-b}\right)x^n$$

Logo,

$$f(x) \overset{ogf}{\longleftrightarrow} \left(\frac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b}\right)_0^\infty .$$

Portanto,

$$y_n = \left(\frac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b}\right).$$

■

Comentário.

O problema 5 representa uma generalização do capítulo de recorrência e a ideia aqui é buscar uma fixação do que fizemos antes.

Problema 6 *Para um inteiro positivo n, denote por $S(n)$ o número de escolhas de sinais de "+"ou -"tal que $\pm 1 \pm 2 \pm 3 \pm ... \pm n = 0$. Prove que*

$$S(n) = \frac{2^{n-1}}{\pi}\int_o^{2\pi} cos(t) \times cos(2t) \times ...cos(nt)dt$$

Obs: Esse problema poderá ser encontrado em [5], pg 301

Solução.

Vamos escrever, primeiramente, alguns casos para que possamos descobrir uma dinâmica para o problema.

- Se $n = 2$ não temos nenhum caso a considerar portanto,

$$S(2) = 0.$$

- Se $n = 3$ temos os seguintes casos:

$$+1+2-3$$
$$-1-2+3.$$

Logo,

$$S(3) = 2.$$

Precisamos, aqui, de uma função geradora que regule as escolha dos sinais para que $\pm 1 \pm 2 \pm 3 \pm ... \pm n = 0$. Usando a teoria das partições desenvolvida no capítulo anterior, considere

$$P(x) = \prod_{k=1}^{n}\left(x^k + x^{-k}\right),$$

cujo $S(n)$ é o termo independente dessa expressão.

De fato, expandindo esse produto, podemos escrever

$$P(n) = S(n) + \sum_{k\neq 0}\left(x^k + x^{-k}\right). \tag{7.13}$$

Tomando $x = e^{it} = cos(t) + isen(t)$, podemos escrever

$$x^k + x^{-k} = e^{kit} + e^{-kit} = 2cos(kt),$$

por isso, a expressão 7.13 se tornará:

$$\prod_{k=1}^{n} 2cos(kt) = S(n) + 2\sum_{k\geq 0} cos(kt). \tag{7.14}$$

Para provar o desejado, podemos integrar no intervalo $[0, 2\pi]$ a expressão 7.14 e usando que $\int_0^{2\pi} 2\sum_{k\geq 0} cos(kt)dt = 0$, temos

$$\int_0^{2\pi} 2^n \prod_{k=1}^{n} cos(kt)dt = 2\pi S(n).$$

Portanto o resultado está provado.
■

Comentário.

Esse problema 6 nos oferece uma proposta diferente em relação ao que foi tratado em problemas anteriores. Nele, a dinâmica de solução busca uma função geradora, a partir da qual se encontre a quantidade de combinações de sinais + ou - que torne $\pm 1 \pm 2 \pm 3 \pm ... \pm n = 0$ o qual depende da teoria das partições.

Portanto, para o cálculo do $S(n)$, precisamos analisar o termo independente da função geradora $\prod_{k=1}^{n} \left(x^k + x^{-k}\right)$.

Problema 7 *Sejam os inteiros positivos distintos $a_1, a_2, ..., a_n, b_1, b_2, ..., b_n$, com $n \geq 2$, com a propriedade que $\binom{n}{2}$ somas $a_i + a_j$ são as mesmas que $\binom{n}{2}$ somas $b_i + b_j$. Prove que n é uma potência de 2.*

Obs: Esse problema poderá ser encontra em [5], pg 302

Solução.

Esse segue a mesma ideia do problema 4, com a ressalva do polinômio gerador ser finito. Por isso, considere abaixo as duas funções geradoras.

$$f(x) = x^{a_1} + x^{a_2} + ... + x^{a_n}. \tag{7.15}$$

$$g(x) = x^{b_1} + x^{b_2} + ... + x^{b_n}. \tag{7.16}$$

Pelo enunciado do problema, para quaisquer dois índices $i, j \in \{1, 2, 3, ..., n\}$ com $i \neq j$ temos

$$a_i + a_j = b_i + b_j.$$

Então elevando as equações 7.15 e 7.16 temos

$$f^2(x) = x^{2a_1} + x^{2a_2} + ... + x^{2a_n} + 2\sum_{i,j} x^{a_i + a_j}$$

e

$$g^2(x) = x^{2b_1} + x^{2b_2} + ... + x^{2b_n} + 2\sum_{i,j} x^{b_i + b_j}.$$

Assim usando a informação do problema temos,

$$f^2(x) - g^2(x) = f(x^2) - g(x^2).$$

No entanto, como $x = 1$ é raiz de $f(x) - g(x)$ podemos escrever que

$$f(x) - g(x) = (x-1)^j t(x),$$

onde $t(x)$ é um polinômio

Portanto,

$$f(x) + g(x) = \frac{f^2(x) - g^2(x)}{f(x) - g(x)} = \frac{(x^2-1)^j t(x^2)}{(x-1)^j t(x)}$$

Sabendo que $f(1) = g(1) = n$, temos que

$$f(1) + g(1) = 2n = 2^j.$$

Segue-se,assim que

$$n = 2^{j-1}$$

.

■

Comentário.

Temos um problema sequencial o qual consideram-se duas sequências a_i e b_i cuja soma de quaisquer dois termos de a_i deverá ser igual a soma de quaisquer dois termos de b_i.

Por isso, tomamos duas respectivas funções geradoras cujos expoentes fossem os termos das sequências. Provar que n é uma potência de 2 ,passa então, por um algebrismo entre as duas funções cuja a diferença é polinomial.

Problema 8 *Prove que*

$$\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} 2^{n-j} \binom{j}{\lfloor \frac{j}{2} \rfloor} = \binom{2n+1}{n}$$

Obs: Esse problema poderá ser encontrado em [5], pg 300.

Solução.

Tomemos a seguinte função e usando Binômio de Newton:

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^j (1+x) = \sum_{k=0}^{n} \left(\binom{j}{p} \left[x^{j-2p} + x^{j-2p+1}\right] \right)$$

Portanto, o termo independente da expressão é $\binom{j}{\lfloor \frac{j}{2} \rfloor}$.

Agora, seja

$$\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} 2^{n-j} (1+x) \left(x + \frac{1}{x}\right)^j = (1+x) \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} 2^{n-j} (x^{-1} + x)^j = (1+x)(2 + x + x^{-1})^n.$$

Reorganizamos a expressão

$$(1+x)(2+x+x^{-1})^n = \frac{(x+1)^{2n+1}}{x^n}.$$

No entanto, novamente pelo Binômio de Newton:

$$\frac{(x+1)^{2n+1}}{x^n} = \sum_{p=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{p} x^{p-n}.$$

Cujo termo independente é dado por

$$\binom{2n+1}{n}.$$

O que prova o resultado

■

Comentário.

O problema 8 consiste em uma aplicação do método Snake Oil e Binômio de Newton. Não representa um problema mais difícil em relação aos que foram apresentados anteriormente. A ideia mais interessante do problema é notar o fator $\binom{j}{\lfloor \frac{j}{2} \rfloor}$ é termo independente da soma $\left(x+\frac{1}{x}\right)^j(1+x) = \sum_{k=0}^{n}\left(\binom{j}{p}\left[x^{j-2p}+x^{j-2p+1}\right]\right)$.

Problema 9 *Prove que o número de maneiras de escrever n como uma soma de inteiros positivos é igual ao número de maneiras de escrever n como uma soma de inteiros positivos ímpares.*

Obs: Esse problema poderá ser encontrado em [5], pg 301.

,

Solução.

O número de maneiras de se escrever n como soma de inteiros distintos é dada por:

$$[x^n]\prod_{k=1}^{\infty}(1+x^k)$$

Da maneira equivalente, usando a tabela de partições do Capítulo 6, temos que o número de maneiras de escrever n como soma de inteiros ímpares é dada por

$$[x^n]\prod_{k=2p-1}^{\infty}\frac{1}{1-x^k}$$

No entanto,

$$\prod_{k=1}^{\infty}(1+x^k) = \frac{\prod_{k=2p}^{\infty}(1-x^k)}{\prod_{k=1}^{\infty}(1-x^k)} = \prod_{k=2p-1}^{\infty}\frac{1}{1-x^k},$$

O que prova resultado.

■

Comentário.

O problema 9 é uma aplicação do Teorema de Euler, que será demonstrado no Problema 10.

Problema 10 *Denote por $P(n)$ o número de partições do inteiro positivo n. Prove que, para $n \geq 1$, tem-se $P(n)$ dado por*

$$\sum_{n=0}^{\infty} P(n)x^n = \prod_{k=0}^{\infty} \frac{1}{1-x^k}. \tag{7.17}$$

Solução.
Observemos primeiro o lado esquerdo da equação 7.17 ou seja,

$$\prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^k} = (1+x+x^2+...)(1+x^2+x^4+...)...$$

Se multiplicarmos todos fatores do lado esquerdo da equação obtemos a seguinte expressão:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha(n)x^n$$

Agora basta provar que $\alpha(n) = P(n)$.
Tomemos então a primeira série, cada termo irá contribuir com x^{β_1}.Olhando para a segunda série de potência vemos que cada termo irá contribuir com $x^{2\beta_2}$ e assim sucessivamente. Portanto um termo x^{β} poderá ser representado pelo seguinte produto:

$$x^{\beta_1}x^{2\beta_2}...x^{p\beta_p} = x^{\beta}$$

Portanto, não é difícil perceber que:

$$\beta = \beta_1 + 2\beta_2 + ... + p\beta_p.$$

Logo, podemos afirmar que

$$\beta = \overbrace{(1+1+1..+1)}^{\beta_1} + \overbrace{(2+2+2+...+2)}^{\beta_2} + ... + \overbrace{(p+p+...+p)}^{\beta_p}$$

E assim conclui-se que temos uma partição de β.
Portanto, podemos concluir que

$$\alpha(n) = P(n)$$

Comentário.
O problema 10, é na verdade o Teorema de Euler (Teorema 9 - Capítulo 6). Leonhard Paul Euler (1707-1783) fez descobertas incríveis dentro da Matemática, Física no século XVIII. É considerado até hoje, um dos maiores matemáticos de todos os tempos.

Dentre os muitos problemas que Euler abordou, estão o problema da partição de um inteiro. Por isso, a sua abordagem sob os viés das funções geradoras, representa uma das grandes aplicações dessa dissertação. Então a estratégia para resolvê-lo girará em torno da análise da equação do lado direito e do esquerdo.

■

Capítulo 8

Considerações Finais

As funções geradoras, como vimos, realmente são ferramentas poderosas dentro e fora da Matemática. As suas inúmeras aplicações nos permitem dar uma base de solução de problemas em um formato fortemente embasado, principalmente, para aqueles alunos com real desejo em se aprofundar na matemática. Especificamente no Ensino Médio, ela não parece ser tão conhecida de professores e alunos ao passo que não está inserida da BNCC atual. Espera-se, no entanto, que esse trabalho possa fomentar a análise crítica da solução de problemas, através de um viés fundamentado nas olimpíadas científicas de matemática(Médio e Universitário).

Espera-se, igualmente, que esse trabalho possa dar também, base e aprofundamento na formação de professores de matemática e, principalmente, aqueles que se concentram em ministrar aulas de preparação para olimpíadas de matemática. As linguagens desenvolvidas aqui nesse texto têm um caráter bastante formativo, para que essa ferramenta seja inserida numa sala de aula, fornecendo, assim, ao aluno, uma oportunidade de se desenvolver intelectualmente neste campo.

De acordo com os referenciais adotados nessa texto, acreditamos que a construção desse conhecimento em sala de aula deverá proporcionar ao professor e ao aluno uma dinâmica de ideias interessantíssimas e de embasamento teórico forte. Destaque-se que é evidente a existência de alguns temas que fogem um pouco do escopo geral dessa empreitada. No entanto, as conclusões dessa texto mostram ser importante dar a oportunidade para o uso dessa metodologia na solução de problemas para, de fato, transformar o saber e promover a interação de campos diversos dentro e fora da matemática.

Por fim, ressaltamos para aqueles que desejarem realmente se desenvolver dentro desse ramo, ser importante buscar as referências que fundamentam esse texto e de certeza, darão base ao leitor que busca se aprofundar nesse área.

Apêndice A

Referências Bibliográficas

1. WILF, H. S. *Generatingfunctionology*:Second Edition. Philadelphia - Pennsylvania: Academic Press, 1994.

2. ANDREESCU, T.; FENG, Z.: *A Path to Combinatorics for Undergraduates, Counting Strategies*. Boston, Besel, Berlim: Birkhauser, 2004.

3. DJUKIC, D.et al.*The Imo Compendium*, 2004

4. BARBOSA - José Armando - *Funções Geratrizes*,2016 - https://www.obm.org.br/semana/19a-semana-olimpica/- acesso em: 08/10/2018

5. ANDRESCU,T.; GELCA, R.:*Putnam and Beyond*. USA: Springer, 2007.

6. PCNEM, Parte III -http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf

7. Art of Problem Solving, IMO 1995, -www.artofproblemsolving.com/community/c3946- acesso em: 08/10/2018.

8. LIMA, E. L. Análise Real, Volume 1,*Funções de uma Variável Real*:12 ed. Rio de Janeiro: IMPA,2014.

9. Eureka 21, Página 10 - https://www.obm.org.br/content/uploads/2017/01/eureka21.pdf- acesso em: 10/10/2018.

10. MORORÓ, D. *Funções Geratrizes: Conceitos Básicos e Exemplos*.2016. 48 Páginas. Dissertação de Mestrado - IMPA, Rio de Janeiro,2016.

11. ANDREWS, G. E.*The Theory Of Partitions*. Cambridge University Press, 2010.

12. APOSTOL, T. M. *Introduction to Analytic Number Theory*. Verlag, New York, Heidelberg, Berlim, Springer 1976.

13. LANDO, S. K.*Lecture on Generating Fuctions*. AMS, 2003.

14. Imo Math -https://www.imomath.com/index.php?options=355-acesso em: 10/10/2018.

15. MOLON, J. *Cálculo no Ensino Médio: Uma abordagem possível e necessária com auxílio do software*.2013. 198 páginas. Dissertação de Mestrado - UFSM, Santa Maria, RS.

16. ÁVILA, G.*O ensino de Matemática*: Revista do Professor de Matemática, número 23. Rio de Janeiro:Sociedade Brasileira de Matemática(SBM), 1993.

17. MELLO, Margarida P.; MURARI,Idani T. C.;SANTOS, J.P. O. *Introdução à Análise Combinatória*.4.ed. Rio de Janeiro: Editora Moderna, 2007.