

Universidade Federal de Santa Catarina
Departamento de Matemática

Uma introdução ao estudo de Equações
Diferenciais e suas propriedades clássicas.
Equação da Onda e Equação do Calor

Josimara Edelisa Pereira

Orientador: Prof. Dr. Ruy Coimbra Charão

Florianópolis
Março de 2019

**Universidade Federal de Santa Catarina
Departamento de Matemática**

**Uma introdução ao estudo de Equações
Diferenciais e suas propriedades clássicas.
Equação da Onda e Equação do Calor**

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) da Universidade Federal de Santa Catarina como requisito parcial para obtenção do Grau de Mestre em Matemática.

**Josimara Edelisa Pereira
Florianópolis
Março de 2019**

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Pereira, Josimara Edelisa

Uma introdução ao estudo de Equações Diferenciais e suas propriedades clássicas. Equação da Onda e Equação do Calor / Josimara Edelisa Pereira ; orientador, Ruy Coimbra Charão, 2019.
129 p.

Dissertação (mestrado profissional) -
Universidade Federal de Santa Catarina, Centro de Ciências Físicas e Matemáticas, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Florianópolis, 2019.

Inclui referências.

1. Matemática. 2. Equação da onda. 3. Equação do calor. 4. Velocidade finita de propagação. 5. Efeito regularizante. I. Charão, Ruy Coimbra. II. Universidade Federal de Santa Catarina. Programa de Pós-Graduação em Matemática. III. Título.

Uma introdução ao estudo de Equações Diferenciais e suas propriedades clássicas. Equação da Onda e Equação do Calor

por
Josimara Edelisa Pereira

Esta Dissertação foi julgada aprovada para a obtenção do Título de "Mestre em Matemática", e aprovada em sua forma final pelo Programa de Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT da Universidade Federal de Santa Catarina.

Prof.a. Dra. Maria Inez Cardoso Gonçalves
Coordenadora do Curso

Comissão Examinadora

Prof. Dr. Ruy Coimbra Charão
(Orientador - UFSC)

Prof. Dr. Fábio Junior Margotti
(UFSC)

Prof. Dr. Leandro Batista Morgado
(UFSC)

Prof. Dr. Mario Rodolfo Roldan Daquilema
(UFSC)

Florianópolis, Março de 2019.

À Deus.
À minha família.

Agradecimentos

Ao meu orientador, Professor Dr. Ruy Coimbra Charão, pelos seus ensinamentos, paciência e direcionamento para a realização deste trabalho.

Aos professores da UFSC, em especial aos professores do Profmat por contribuírem com a compreensão dos conceitos matemáticos.

Ao meu marido, por seu apoio nos momentos de dificuldade enfrentados e auxílio acadêmico que foi necessário para o entendimento dos assuntos estudados.

À Capes pelo apoio financeiro recebido.

Aos colegas da turma pelos momentos vivenciados.

E a todos que de alguma forma contribuíram com a realização do curso.

Resumo

Neste trabalho, estudamos problemas envolvendo as equações da onda e do calor, unidimensionais, em domínios do tipo $[0, L]$ e toda a reta \mathbb{R} . Para a equação do calor, sob a lei de Fourier, vimos que a solução possui propriedade infinita de propagação no tempo e propriedade regularizante em relação ao dado inicial. Estudamos as propriedades de velocidade finita de propagação e efeito não regularizante para a equação da onda. Além disso, considerando o problema em domínio limitado $[0, L]$ sob condições de contorno de Newmann mostramos que a equação da onda apresenta efeito ressonante.

Palavras-chave: Equação Diferencial Parcial, Equação da Onda e Equação do calor.

Abstract

In this work we study problems involving the one-dimensional wave and heat equations on a interval $[0, L]$ and the whole line \mathbb{R} . For the heat equation, under the Fourier law, we have seen that the solutions have the infinite property of propagation in time and the regularizing property on the initial data. We also study the properties of finite speed of propagation and the non-regularizing effect on the initial data for the wave equation. Moreover, considering the problem on the bounded domain $[0, L]$ under Neumann boundary conditions we show that the wave equation has a resonant effect.

Key words: Partial Differential Equations; Wave Equation; Heat Equation, speed of propagation; regularizing effect.

Sumário

Introdução	14
1 Pré-requisitos	17
1.1 Cálculo Diferencial de Funções de Várias Variáveis .	17
1.1.1 Funções de várias variáveis	17
1.1.2 Limite e continuidade	19
1.1.3 Derivadas parciais	24
1.1.4 Funções diferenciáveis	28
1.1.5 Regra da cadeia	30
1.1.6 Derivadas superiores (ou de altas ordens) . .	32
1.2 Séries	33
1.2.1 Séries numéricas	33
1.3 Séries de funções	47
2 Equações Diferenciais Ordinárias	51
2.1 Modelos matemáticos	54
2.2 Equações diferenciais ordinárias de primeira ordem .	55
2.3 Equações lineares de segunda ordem	57
3 Equações Diferenciais Parciais (EDPs)	63
3.1 Séries de Fourier	64
3.1.1 Séries de Fourier de funções pares e ímpares .	68

3.1.2	Aproximação de funções usando Séries de Fourier	72
3.1.3	Resultados de convergência de Séries de Fourier	73
3.2	Definições iniciais	74
3.3	Solução de uma Equação Diferencial Parcial	76
3.3.1	Solução geral de uma equação diferencial parcial	77
3.4	Princípio da Superposição	81
3.4.1	Princípio da superposição generalizado	82
3.5	Condições de Contorno e Condições Iniciais	84
3.5.1	Tipo de condições de contorno	84
3.6	Método de Separação de Variáveis	85
4	Equação da Onda Unidimensional	89
4.1	Equação da Onda: Velocidade Finita de Propagação	93
4.2	Regularidade da Solução	96
4.3	Equação da Onda em Domínios Limitados	97
4.3.1	Problemas físicos	97
4.3.2	Método de Fourier e expansão em autofunções	101
5	Equação do Calor	113
5.1	Equação do Calor em Domínios Limitados	114
5.2	Propriedades da Equação do Calor na Reta	119

Introdução

As equações diferenciais são ferramentas matemáticas importantes para o estudo de problemas em diversas áreas do conhecimento, tais como: física, química, biologia, economia, engenharias, além de promoverem o desenvolvimento da própria matemática.

O estudo das equações diferenciais teve seu início juntamente com o surgimento do Cálculo, desenvolvido por Newton e Leibniz, no final do século XVII. Com o avanço do Cálculo diversos problemas foram modelados matematicamente na forma de equações diferenciais. Vários desses problemas foram resolvidos por grandes matemáticos, tais como Bernoulli e Euler, encontrando explicitamente a solução do problema. Com o passar do tempo e o aumento significativo na complexidade dos problemas percebeu-se que seria importante obter propriedades qualitativas das soluções dos modelos, sendo que tais soluções poderiam ser conhecidas explicitamente ou não.

No século XVIII, Cauchy demonstrou a existência de soluções de equações diferenciais que aparecem em muitos modelos. No final do século XIX surge a teoria qualitativa geométrica, com Henri Poincaré e Lyapunov. Até os dias atuais, importantes matemáticos continuam estudando problemas relevantes e atrativos associados a propriedades qualitativas das equações diferenciais.

Neste trabalho estamos interessados no estudo de equações diferenciais parciais, mais especificamente, mostramos alguns resultados para a equação da onda e equação do calor unidimensionais em do-

mínios limitados e não limitados (toda a reta). Usando o método de separação de variáveis e expansão em séries de Fourier encontramos soluções para modelos em domínios limitados. No entanto, o objetivo principal deste trabalho é estudar algumas propriedades dessas equações, tais como, velocidade finita (ou infinita) de propagação, a propriedade de possuir (ou não) efeito regularizante e o problema de Neumann para a equação da onda que apresenta ressonância.

Este trabalho está organizado em cinco capítulos, nos quais são apresentados definições, resultados, observações e exemplos que facilitam a compreensão do conteúdo. Como o estudo das equações diferenciais parciais requer um bom entendimento de cálculo, revisamos alguns tópicos importantes, tais como derivadas parciais, séries numéricas e de funções, equações diferenciais ordinárias. O resultado desses estudos está relatado nos dois primeiros capítulos. Na sequência descrevemos brevemente os demais capítulos.

No Capítulo 3 fizemos uma breve revisão sobre equações diferenciais parciais. Estudamos a solução geral de certas equações, o princípio da superposição, condições iniciais e de contorno e o método de separação de variáveis. Esses assuntos são importantes para o desenvolvimento dos próximos capítulos.

No Capítulo 4 estudamos a equação da onda unidimensional. Usando a fórmula de D'Alembert provamos que a solução de uma equação da onda em \mathbb{R} possui a propriedade de velocidade finita de propagação. Por fim, encontramos a solução da equação da onda em um intervalo $[0, L]$ com condições de fronteira de Dirichlet e Neumann usando o método de Fourier de separação de variáveis e expansão em autofunções.

No Capítulo 5 provamos a propriedade de velocidade infinita de propagação e o efeito regularizante da solução da equação do calor unidimensional definida em toda a reta \mathbb{R} . Para ver essas propriedades foi preciso calcular a solução explícita do problema de Cauchy associado.

Capítulo 1

Pré-requisitos

Neste capítulo, apresentamos uma série de resultados sobre cálculo diferencial, séries e séries de funções que são necessários para o desenvolvimento deste trabalho, cujo principal objetivo é estudar propriedades básicas de equações diferenciais parciais, em especial as equações da onda e do calor.

Os resultados deste capítulo podem ser vistos nos livros de Marsden [4], Stewart [6], Marivaldo [5] e Figueiredo [1].

1.1 Cálculo Diferencial de Funções de Várias Variáveis

1.1.1 Funções de várias variáveis

Vamos inicialmente estudar funções de mais de uma variável independente. Tais funções ocorrem frequentemente em situações práticas. Por exemplo, a temperatura na superfície da Terra num ponto com longitude x e latitude y é dada por $T(x, y)$, ou seja, é uma função das duas variáveis x e y .

Definição 1.1 Uma função real f de n variáveis associa a cada n -upla $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in D \subset \mathbb{R}^n$ um único número real $w = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$. O subconjunto D de \mathbb{R}^n é chamado domínio da função f . Podemos denotar a função f por

$$f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto w = f(x_1, \dots, x_n)$$

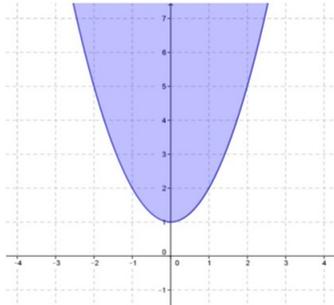
O conjunto

$$\text{Im } f = \{ f(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R} \mid (x_1, \dots, x_n) \in D \}$$

é a imagem de f .

Por simplicidade, deixaremos, muitas vezes, de especificar o domínio, ficando implícito, então, que se trata do "maior" subconjunto do \mathbb{R}^n para o qual faz sentido a regra que define a função f .

Exemplo 1.2 A função $z = f(x, y) = \sqrt{y - 1 - x^2}$ é uma função de duas variáveis cujo domínio são todos os pontos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tais que $y - 1 - x^2 \geq 0$. A região do plano xy que corresponde ao domínio da função f , está indicada na figura abaixo:

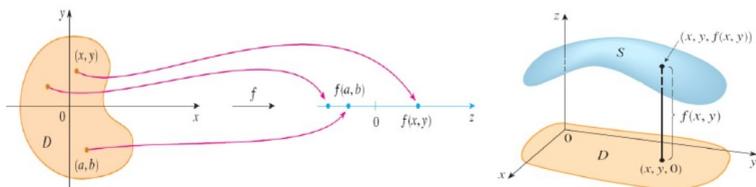


Definição 1.3 Seja $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de n variáveis. Definimos o gráfico de f , denotado por G_f , como o subconjunto de

\mathbb{R}^{n+1} formado por todos os pontos da forma $(x_1, \dots, x_n, f(x_1, \dots, x_n)) \in \mathbb{R}^{n+1}$, onde $(x_1, \dots, x_n) \in D$, ou seja,

$$G_f = \{(x_1, \dots, x_n, w) \in \mathbb{R}^{n+1} / w = f(x_1, \dots, x_n) \text{ com } (x_1, \dots, x_n) \in D\}.$$

No caso $n = 2$, o gráfico de f é uma superfície de \mathbb{R}^3 . Quando $n = 3$, não é possível visualizar o gráfico da f , visto que este é um subconjunto de \mathbb{R}^4 .



Uma função polinomial de duas variáveis x e y é uma função f tal que $f(x, y)$ é a soma de termos da forma $cx^n y^m$, onde c é um número real e n e m são inteiros não negativos. O grau da função polinomial é dado pelo maior valor obtido da soma dos expoentes de x e y . Assim, a função f definida por

$$f(x, y) = 2x^2 y^3 + xy^2 - 5xy - 2y + 8$$

é uma função polinomial de grau 5.

Uma função racional de duas variáveis é uma função h tal que $h(x, y) = f(x, y)/g(x, y)$, onde f e g são duas funções polinomiais. Por exemplo, a função h definida por

$$h(x, y) = \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2}$$

é uma função racional.

1.1.2 Limite e continuidade

Um ponto variável x no eixo coordenado pode se aproximar de um ponto fixo a de dois modos: à direita de a ou à esquerda de a .

Um ponto variável (x_1, x_2, \dots, x_n) em \mathbb{R}^n pode se aproximar de um ponto fixo (a_1, a_2, \dots, a_n) por um número infinito de caminhos.

Diremos que (x_1, x_2, \dots, x_n) se aproxima de (a_1, a_2, \dots, a_n) se a distância entre eles tende a zero, independentemente do percurso feito por (x_1, x_2, \dots, x_n) , onde a distância entre $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ e $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ é dada por

$$\begin{aligned} \|x - a\| &= \|(x_1, x_2, \dots, x_n) - (a_1, a_2, \dots, a_n)\| \\ &= \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + \dots + (x_n - a_n)^2}. \end{aligned}$$

Para definir o limite de uma função $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ de n variáveis reais, quando (x_1, x_2, \dots, x_n) tende a um ponto fixo (a_1, a_2, \dots, a_n) , não é necessário que $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ esteja definida em (a_1, a_2, \dots, a_n) . Exigimos apenas que (a_1, a_2, \dots, a_n) seja um ponto de acumulação do domínio D de f , isto é, que cada bola aberta de centro em (a_1, a_2, \dots, a_n) e raio $r > 0$, denotada por $B_r(a_1, a_2, \dots, a_n)$, contenha pelo menos um ponto de D distinto de (a_1, a_2, \dots, a_n) , onde

$$\begin{aligned} &B_r(a_1, a_2, \dots, a_n) \\ &= \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n; \|(x_1, x_2, \dots, x_n) - (a_1, a_2, \dots, a_n)\| < r\}. \end{aligned}$$

Usamos a notação

$$\lim_{(x_1, \dots, x_n) \rightarrow (a_1, \dots, a_n)} f(x_1, x_2, \dots, x_n) = L$$

para indicar que os valores de $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ficam arbitrariamente próximos do número L desde que (x_1, x_2, \dots, x_n) esteja suficientemente próximo do ponto (a_1, a_2, \dots, a_n) ao longo de qualquer caminho contido no domínio da função f . Em outras palavras, podemos tomar os valores de $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ tão próximos de L quanto o desejado escolhendo pontos (x_1, x_2, \dots, x_n) suficientemente próximos do ponto (a_1, a_2, \dots, a_n) , mas não iguais a (a_1, a_2, \dots, a_n) .

Definição 1.4 *Sejam $w = f(x)$ uma função real definida em $D \subset \mathbb{R}^n$ e $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ um ponto de acumulação de D . Dizemos*

que o limite de $f(x)$ quando (x) tende a (a) é o número L , e escrevemos: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$, se para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ ($\delta = \delta(a, \varepsilon)$) tal que

$$|f(x) - L| < \varepsilon$$

sempre que $0 < \|x - a\| < \delta$, $x \in D(f)$.

Lema 1.5 *O limite quando existe é único.*

Exemplo 1.6 *Provar que $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2x^2y}{x^2 + 2y^2} = 0$.*

Resolução:

Dado $\varepsilon > 0$ escolhemos $\delta = \varepsilon/2$. Assim,

$$\begin{aligned} |f(x, y) - 0| &= \left| \frac{2x^2y}{x^2 + 2y^2} \right| = 2|y| \frac{x^2}{x^2 + 2y^2} \\ &\leq 2|y| \leq 2\sqrt{x^2 + y^2} < 2\delta = \varepsilon, \end{aligned}$$

para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tal que $\|(x, y) - (0, 0)\| < \delta = \frac{\varepsilon}{2}$.

Logo, dado $\varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ que satisfaz a definição de limite.

Propriedades dos limites

Considerando $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ e $g(x_1, x_2, \dots, x_n)$ funções de n variáveis, tais que

$$\lim_{(x_1, \dots, x_n) \rightarrow (a_1, \dots, a_n)} f(x_1, x_2, \dots, x_n) = L \quad \text{e}$$

$$\lim_{(x_1, \dots, x_n) \rightarrow (a_1, \dots, a_n)} g(x_1, x_2, \dots, x_n) = M.$$

Então, se K é uma constante tem-se:

- $\lim_{(x_1, \dots, x_n) \rightarrow (a_1, \dots, a_n)} K = K$

- $\lim_{(x_1, \dots, x_n) \rightarrow (a_1, \dots, a_n)} K f(x_1, x_2, \dots, x_n) = K L$

3. $\lim_{(x_1, \dots, x_n) \rightarrow (a_1, \dots, a_n)} [f(x_1, \dots, x_n) \pm g(x_1, \dots, x_n)] = L \pm M$
4. $\lim_{(x_1, \dots, x_n) \rightarrow (a_1, \dots, a_n)} [f(x_1, \dots, x_n) \cdot g(x_1, \dots, x_n)] = L \cdot M$
5. $\lim_{(x_1, \dots, x_n) \rightarrow (a_1, \dots, a_n)} \frac{f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{g(x_1, x_2, \dots, x_n)} = \frac{L}{M}$, desde que $M \neq 0$
6. $\lim_{(x_1, \dots, x_n) \rightarrow (a_1, \dots, a_n)} \sqrt{f(x_1, x_2, \dots, x_n)} = \sqrt{L}$, desde que $L \geq 0$.

Exemplo 1.7 Seja f a função definida por $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$.

a) Calcular o limite de $f(x, y)$ quando (x, y) tende a $(0, 0)$ ao longo de cada um dos seguintes caminhos:

- i) eixo dos x ;
- ii) eixo dos y ;
- iii) da reta $y = x$.

b) Existe $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y)$? Em caso afirmativo qual o seu valor?

Resolução:

a) i) Sobre o eixo x , $y = 0$ e $f(x, y) = f(x, 0) = \frac{x^2 - 0}{x^2 + 0} = 1$, para $x \neq 0$. Portanto, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x, 0) = 1$.

ii) Sobre o eixo y , $x = 0$ e $f(x, y) = f(0, y) = \frac{0 - y^2}{0 + y^2} = -1$, para $y \neq 0$. Portanto, $\lim_{y \rightarrow 0} f(0, y) = -1$.

iii) Sobre a reta $y = x$, $f(x, y) = f(x, x) = \frac{x^2 - x^2}{x^2 + x^2} = 0$, para $x \neq 0$. Portanto, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x, x) = 0$.

b) Visto que os limites i), ii) e iii) não coincidem, $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y)$ não existe. Pela unicidade do limite.

O exemplo anterior sugere que uma maneira eficiente de se mostrar que $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y)$ não existe é mostrar que $f(x,y)$ tende a limites diferentes quando (x,y) tende a (a,b) por dois caminhos diferentes.

Definição 1.8 Uma função $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é dita limitada se existir um número real $M > 0$ tal que $|f(x_1, x_2, \dots, x_n)| \leq M$ para todo $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in D$.

Proposição 1.9 Se $\lim_{(x_1, \dots, x_n) \rightarrow (a_1, \dots, a_n)} f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$ e $|g(x_1, x_2, \dots, x_n)| \leq M$ para todo $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in V$, V uma vizinhança de (a_1, \dots, a_n) , então

$$\lim_{(x_1, \dots, x_n) \rightarrow (a_1, \dots, a_n)} f(x_1, x_2, \dots, x_n) \cdot g(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0.$$

Definição 1.10 Sejam f uma função real de n variáveis e (a_1, \dots, a_n) um ponto do domínio de f . Dizemos que f é contínua em (a_1, \dots, a_n) se

$$\lim_{(x_1, \dots, x_n) \rightarrow (a_1, \dots, a_n)} f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(a_1, \dots, a_n).$$

Dizemos que f é contínua em D se f é contínua em todos os pontos de D .

Observação 1.11 Toda função racional é contínua em seu domínio. A soma, diferença, produto e quociente de funções contínuas de várias variáveis são funções contínuas (desde que não ocorra uma divisão por zero).

Exemplo 1.12 Seja f a função definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 + y^2 & \text{se } x^2 + y^2 \leq 1 \\ 0 & \text{se } x^2 + y^2 > 1. \end{cases}$$

Mostrar que:

- f é contínua nos pontos $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tais que $a^2 + b^2 \neq 1$.
- f é descontínua nos pontos $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tais que $a^2 + b^2 = 1$.

Resolução:

a) Considere um ponto (a, b) tal que $a^2 + b^2 \neq 1$.

$$\text{Se } a^2 + b^2 < 1, \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = a^2 + b^2 = f(a, b).$$

$$\text{Se } a^2 + b^2 > 1, \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = 0 = f(a, b).$$

Logo, f é contínua nos pontos (a, b) tais que $a^2 + b^2 \neq 1$.

b) Considere, agora, um ponto (a, b) tal que $a^2 + b^2 = 1$. Então: se $x^2 + y^2 < 1$ temos que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} (x^2 + y^2) = a^2 + b^2 = 1 \quad (1.1)$$

e se $x^2 + y^2 > 1$ temos que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} 0 = 0. \quad (1.2)$$

Como os limites obtidos em (1.1) e (1.2) são diferentes, concluímos que $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y)$ não existe e, portanto, f não é contínua em (a, b) .

1.1.3 Derivadas parciais

Se $y = f(x)$ é uma função real de uma variável real, sua derivada é definida por

$$\frac{dy}{dx}(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

e pode ser interpretada como a taxa de variação de y em relação a x . No caso de uma função $w = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ de n variáveis independentes, necessitamos de uma definição semelhante que determine a taxa com que w muda quando x_i varia. O procedimento é fazer com que apenas uma variável varie de cada vez, enquanto

as outras são mantidas constantes. Especificamente, para funções de várias variáveis, derivamos em relação a apenas uma variável por vez, considerando todas as outras como constantes.

Definição 1.13 *Sejam $w = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ uma função de n variáveis reais e (a_1, a_2, \dots, a_n) um ponto do domínio de f . A derivada parcial de f em relação a x_i , para $i = 1, 2, \dots, n$, no ponto (a_1, a_2, \dots, a_n) é definida por*

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a_1, a_2, \dots, a_n) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a_1, \dots, a_i + h, \dots, a_n) - f(a_1, \dots, a_i, \dots, a_n)}{h}$$

se este limite existir.

As notações mais usadas para representar esta derivada parcial são: $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, $\frac{\partial w}{\partial x_i}$, f_{x_i} , z_{x_i} .

Observação 1.14 *Para calcular a derivada parcial de $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ em relação a uma das variáveis x_i , consideramos as outras variáveis como constantes e usamos as regras de derivação do cálculo de uma variável.*

Exemplo 1.15 *Dada $f(x, y) = x^3y - 2xy^2 + 4x + 2$ encontrar $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(1, -1)$.*

Resolução:

Tratando f como uma função de x e mantendo y constante, temos

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3x^2y - 2y^2 + 4.$$

Considerando f como uma função de y e mantendo x constante, temos

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x^3 - 4xy.$$

Assim,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(1, -1) = 1 + 4 = 5.$$

Como $\lim_{\Delta y \rightarrow 0} -\frac{1}{\Delta y}$ não existe, concluímos que $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$ não existe. Segue que

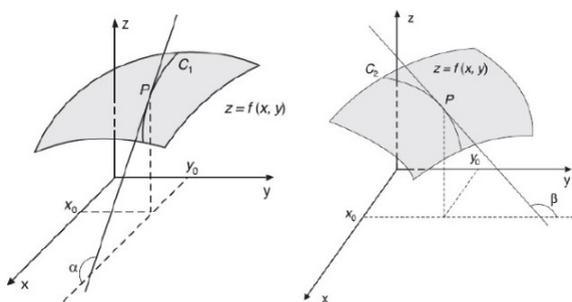
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{-2x^2y(1+x)}{(x^2+y^2)^2} \quad \text{se } (x, y) \neq (0, 0).$$

Interpretação das derivadas parciais

Para dar uma interpretação geométrica para as derivadas parciais, lembremo-nos de que a equação $z = f(x, y)$ representa a superfície S (o gráfico de f). Se $f(x_0, y_0) = z_0$, então o ponto $P = (x_0, y_0, z_0)$ pertence a S . Fixando $y = y_0$, restringimos nossa atenção à curva C_1 na qual o plano vertical $y = y_0$ intercepta S . (Ou seja, C_1 é o traço de S no plano $y = y_0$.) Da mesma forma, o plano vertical $x = x_0$ intercepta S na curva C_2 . As curvas C_1 e C_2 passam pelo ponto P (veja a figura abaixo).

Note que a curva C_1 é o gráfico da função $g(x) = f(x, y_0)$, de modo que a inclinação da tangente T_1 em P é $g'(x_0) = f_x(x_0, y_0)$. A curva C_2 é o gráfico da função $G(y) = f(x_0, y)$, de modo que a inclinação da tangente T_2 em P é $G'(y_0) = f_y(x_0, y_0)$.

Então, as derivadas parciais $f_x(x_0, y_0)$ e $f_y(x_0, y_0)$ podem ser interpretadas geometricamente como as inclinações das retas tangentes em $P = (x_0, y_0, z_0)$ aos traços C_1 e C_2 de S nos planos $y = y_0$ e $x = x_0$.



1.1.4 Funções diferenciáveis

De maneira intuitiva, podemos dizer que uma função $y = f(x)$ é diferenciável em x_0 se existe uma reta não vertical passando pelo ponto $(x_0, f(x_0))$ que se confunde com o gráfico de f nas "proximidades" do ponto $(x_0, f(x_0))$.

Novamente, de modo intuitivo, podemos dizer que uma função de duas variáveis x e y é diferenciável em (x_0, y_0) se existe um plano não vertical contendo $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ de equação $z = T(x, y) = f(x_0, y_0) + a(x - x_0) + b(y - y_0)$ que se confunde com o gráfico de f "nas proximidades" de $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.

Definição 1.17 *Sejam $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, D aberto de \mathbb{R}^2 , e $(x_0, y_0) \in D$. Dizemos que f é diferenciável em (x_0, y_0) se e somente se existirem números reais a e b tais que*

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) - ah - bk}{\|(h, k)\|} = 0.$$

O próximo teorema nos diz que diferenciabilidade implica continuidade.

Teorema 1.18 *Se f for diferenciável em (x_0, y_0) , então f será contínua em (x_0, y_0) .*

Teorema 1.19 *Seja $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, D aberto de \mathbb{R}^2 e $(x_0, y_0) \in D$. Se f for diferenciável em (x_0, y_0) , então f admitirá derivadas parciais neste ponto.*

Observação 1.20 *Se f for diferenciável*

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) - ah - bk}{\|(h, k)\|} = 0$$

então teremos necessariamente $a = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ e $b = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$. Além disso, se f for diferenciável em (x_0, y_0) , então $a = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ e $b = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ serão os únicos números reais para os quais o limite acima é zero.

Observação 1.21

1. Para provar que uma função f é diferenciável em (x_0, y_0) é suficiente provar que f admite derivadas parciais em (x_0, y_0) e que

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) - f_x(x_0, y_0)h - f_y(x_0, y_0)k}{\|(h, k)\|} = 0.$$

2. Se uma das derivadas parciais não existir em (x_0, y_0) , então f não será diferenciável neste ponto.

3. Se ambas as derivadas parciais existirem em (x_0, y_0) , mas se o limite acima não for zero, então f não será diferenciável em (x_0, y_0) .

4. Se f não for contínua em (x_0, y_0) , então f não será diferenciável em (x_0, y_0) .

Dizemos que f é diferenciável em $B \subset \text{Dom}(f)$ se f for diferenciável em todo $(x, y) \in B$. Diremos, simplesmente, que f é uma função diferenciável se f for diferenciável em todo ponto de seu domínio.

Teorema 1.22 *Se $z = f(x, y)$ é diferenciável em (x_0, y_0) , então $z = f(x, y)$ possui derivadas parciais em (x_0, y_0) . Por outro lado, se $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ existem e são contínuas próximo do ponto (x_0, y_0) então f é diferenciável em (x_0, y_0) .*

Definição 1.23 *Se $z = f(x, y)$ é uma função tal que $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ são contínuas próximo do ponto (x_0, y_0) . O plano de equação*

$$z = T(x, y) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$$

é chamado plano tangente ao gráfico da função f no ponto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.

Exemplo 1.24 *Determinar a equação do plano tangente ao gráfico de $f(x, y) = 3 + \sqrt{x^2 + y^2}$ no ponto $P_0 = (3, 4, 8)$.*

Resolução:

Se $(x, y) \neq (0, 0)$, temos:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

que são contínuas próximo do ponto $(x_0, y_0) = (3, 4)$.

A equação do plano tangente é dada por

$$\begin{aligned} z &= 8 + \frac{\partial f}{\partial x}(3, 4)(x - 3) + \frac{\partial f}{\partial y}(3, 4)(y - 4) \\ z &= 8 + \frac{3}{5}(x - 3) + \frac{4}{5}(y - 4). \end{aligned}$$

1.1.5 Regra da cadeia

Lembremo-nos de que a Regra da Cadeia para uma função de uma única variável nos dava uma regra para diferenciar uma função composta: se $y = f(x)$ e $x = g(t)$, onde f e g são funções diferenciáveis, então y é indiretamente uma função diferenciável de t e

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \frac{dx}{dt}.$$

Para as funções de mais de uma variável, a Regra da Cadeia tem muitas versões, cada uma delas fornecendo uma regra de diferenciação de uma função composta. A primeira versão diz respeito ao caso onde $z = f(x, y)$ e cada uma das variáveis x e y é, por sua vez, função de uma variável t . Isso significa que z é indiretamente uma função de t , $z = f(g(t), h(t))$, e a Regra da Cadeia dá uma fórmula para diferenciar z em função de t . Estamos admitindo que f seja diferenciável.

Regra da Cadeia 1 *Suponha que $z = f(x, y)$ seja uma função diferenciável de x e y , onde $x = g(t)$ e $y = h(t)$ são funções diferenciáveis de t . Então z é uma função diferenciável de t e*

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt}.$$

Exemplo 1.25 Sejam $z = f(x, y) = x^3 \cos(y)$, $x(t) = t^3$ e $y(t) = e^{2t}$. Calcular $\frac{dz}{dt}(t)$.

Resolução:

Pela Regra da Cadeia

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt}.$$

Como $\frac{\partial z}{\partial x}(x, y) = 3x^2 \cos(y)$; $\frac{\partial z}{\partial y}(x, y) = -x^3 \sin(y)$, $\frac{dx}{dt}(t) = 3t^2$ e $\frac{dy}{dt}(t) = 2e^{2t}$, temos

$$\frac{dz}{dt}(t) = 9t^8 \cos(e^{2t}) - 2(e^{2t})t^9 \sin(e^{2t}).$$

Vamos considerar agora a situação onde $z = f(x, y)$, mas x e y são funções de outras duas variáveis s e t : $x = g(s, t)$, $y = h(s, t)$. Então z é uma função indireta de s e t e desejamos determinar $\partial z/\partial s$ e $\partial z/\partial t$.

Regra da Cadeia 2 Suponha que $z = f(x, y)$ seja uma função diferenciável de x e y , onde $x = g(s, t)$ e $y = h(s, t)$ são funções diferenciáveis de s e de t . Então

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial s} &= \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} \\ \frac{\partial z}{\partial t} &= \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t}.\end{aligned}$$

Regra da Cadeia (Versão Geral) 1 Suponha que u seja uma função diferenciável de n variáveis x_1, x_2, \dots, x_n onde cada x_j é uma função diferenciável de m variáveis t_1, t_2, \dots, t_m . Então u é uma função de t_1, t_2, \dots, t_m e

$$\frac{\partial u}{\partial t_i} = \frac{\partial u}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial t_i} + \frac{\partial u}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial t_i} + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_n} \frac{\partial x_n}{\partial t_i}$$

para cada $i = 1, 2, \dots, m$.

1.1.6 Derivadas superiores (ou de altas ordens)

Se $u = u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ possui derivada $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ para algum $i = 1, 2, \dots, n$, podemos perguntar se $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ pode ser derivada em relação a x_j , algum $j = 1, 2, \dots, n$. Se isso ocorrer escrevemos que

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i}.$$

Observação 1.26 Se $i = j$ se denota $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial x_i} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$.

Análogo, podemos calcular

$$\frac{\partial^m u}{\partial x_1^m}, \frac{\partial^m u}{\partial x_i^{m-2} \partial x_j^2}.$$

Caso $n = 2$, se escreve $u = u(x, y)$ e nesse caso

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \frac{\partial^3 u}{\partial y^3}.$$

Notação simplificada:

$$u_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u_{yx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \quad u_{xxx} = \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}, \quad u_{yxx} = \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y}.$$

Definição 1.27 Uma função $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é dita de classe C^m se todas as derivadas até a ordem m existem e são contínuas.

Exemplo 1.28 A função $u(x, t) = F(x - ct)$ com $c > 0$ constante e F uma função de classe $C^2(\mathbb{R})$ é solução da equação $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$, para todo $x, t \in \mathbb{R}$.

De fato, tem-se que $u_x = F'(x - ct)$, $u_{xx} = F''(x - ct)$, $u_t = -cF'(x - ct)$ e $u_{tt} = c^2 F''(x - ct)$.

Logo $u_{tt} - c^2 u_{xx} = c^2 F''(x - ct) - c^2 F''(x - ct) = 0$, para todo $x, t \in \mathbb{R}$.

Observação 1.29 A equação $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$ é conhecida como a equação unidimensional da onda.

1.2 Séries

1.2.1 Séries numéricas

Como obter a soma de infinitas parcelas? No que se segue, vamos estender o conceito de adição para uma infinidade de números e definir o que significa tal soma. Chamaremos estas "somadas infinitas" de séries.

Exemplos de somadas infinitas surgem muito cedo, ainda no Ensino Fundamental, com o estudo das dízimas periódicas. Por exemplo, a soma

$$0,1 + 0,01 + 0,001 + \dots = 0,111\dots$$

pode ser interpretada como a soma de uma progressão geométrica (com infinitos termos)

$$\frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \dots = \frac{1}{9}.$$

Uma série é uma expressão que pode ser escrita na forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$$

onde os números a_1, a_2, a_3, \dots são chamados de termos da série e a_n de termo geral da série.

Voltemos à nossa dízima

$$0,111\dots = 0,1 + 0,01 + 0,001 + \dots = \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \dots$$

Vamos considerar o valor da soma tomando um termo, dois termos, três termos, etc. Cada uma dessas soma é chamada de soma parcial e é termo de uma sequência

$$s_1 = 0,1 = \frac{1}{10}$$

$$s_2 = 0,1 + 0,01 = \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2}$$

$$s_3 = 0,1 + 0,01 + 0,001 = \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3}$$

$$s_4 = 0,1 + 0,01 + 0,001 + 0,0001 = \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \frac{1}{10^4}.$$

A sequência dos números $s_1, s_2, s_3, s_4, \dots$ pode ser interpretada como uma sequência de aproximações do valor de $1/9$.

À medida que tomamos mais termos da série infinita a aproximação fica melhor o que nos sugere que a soma desejada deve ser o limite dessa sequência de aproximações. Para comprovar este fato vamos calcular o limite dessa sequência, quando o número n de termos tomados tende a um número cada vez maior, isto é, $n \rightarrow \infty$.

Temos que

$$s_n = \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \frac{1}{10^4} + \dots + \frac{1}{10^n}. \quad (1.3)$$

Vamos dar uma outra expressão para s_n de modo a facilitar o cálculo do limite.

Multiplicando s_n por $1/10$ obtemos

$$\frac{1}{10} s_n = \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \frac{1}{10^4} + \frac{1}{10^5} + \dots + \frac{1}{10^{n+1}}. \quad (1.4)$$

Subtraindo (1.3)-(1.4), temos

$$s_n - \frac{1}{10} s_n = \frac{1}{10} - \frac{1}{10^{n+1}} = \frac{1}{10} \left(1 - \frac{1}{10^n}\right)$$

Logo,

$$\frac{9}{10} s_n = \frac{1}{10} \left(1 - \frac{1}{10^n}\right)$$

Ou seja,

$$s_n = \frac{1}{9} \left(1 - \frac{1}{10^n}\right).$$

Calculando o limite, temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{9} \left(1 - \frac{1}{10^n}\right) = \frac{1}{9}$$

que é o valor já esperado para a soma.

No processo que fizemos no exemplo anterior, construímos uma sequência de somas finitas, chamadas de somas parciais da série, o limite dessa sequência correspondeu ao valor da soma, uma vez que $0,111\dots = \frac{1}{9}$.

O exemplo acima motiva a definição mais geral do conceito de "soma" de uma série infinita.

Consideremos a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots$ e vamos formar uma sequência $\{s_n\}$ de somas parciais da seguinte maneira:

$$s_1 = a_1$$

$$s_2 = a_1 + a_2$$

$$s_3 = a_1 + a_2 + a_3$$

\vdots

$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = s_{n-1} + a_n = \sum_{k=1}^n a_k.$$

A sequência $\{s_n\}$ é chamada de sequência das somas parciais da série e s_n é chamado de n -ésima soma parcial.

Quando n cresce, as somas parciais incluem mais e mais termos da série. Logo, se quando $n \rightarrow \infty$ a soma s_n tender a um valor finito, podemos tomar este limite como sendo a soma de TODOS os termos da série, ou seja, a soma da série.

Definição 1.30 *Seja $\sum a_n$ uma série de números reais dada e $\{s_n\}$ a sua sequência de somas parciais. Se $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = S$; $|S| < \infty$ (isto é, existe e é finito) dizemos que a série $\sum a_n$ é convergente a S e que S é a sua soma. Indicamos $\sum a_n = S$. Caso contrário, dizemos que a série diverge e portanto não tem soma.*

Exemplos:

1) A série harmônica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ tem termo geral $a_n = \frac{1}{n}$ e a sequência das somas parciais é

$$\begin{aligned}
s_1 &= 1 \\
s_2 &= 1 + \frac{1}{2} \\
s_3 &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \\
&\vdots \\
s_n &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}.
\end{aligned}$$

A série harmônica é divergente. De fato, observe que

$$\begin{aligned}
s_{2^n} &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \dots + \\
&\quad \left(\frac{1}{2^{n-1} + 1} + \dots + \frac{1}{2^{n-1} + 2^{n-1}}\right) \\
&> 1 + \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{4}{8} + \dots + \frac{2^{n-1}}{2^n} = 1 + n \cdot \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Dessa forma, $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = +\infty$ e portanto a série diverge.

$$2) \sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

Consideremos as somas parciais

$$\begin{aligned}
s_1 &= 1 \\
s_2 &= 1 - 1 = 0 \\
s_3 &= 1 - 1 + 1 = 1 \\
s_4 &= 1 - 1 + 1 - 1 = 0.
\end{aligned}$$

A sequência das somas parciais é $1, 0, 1, 0, 1, 0, \dots$ portanto, o limite dela não existe e a série diverge.

$$3) \text{ Dada a série } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}, \text{ determinar:}$$

- a) Os quatro primeiros termos da série.
 b) A sequência das somas parciais.
 c) Se a série é convergente.

Resolução:

a)
$$\sum_{n=1}^4 \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{4.5}.$$

b)
$$s_1 = \frac{1}{2}$$

$$s_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$$

$$s_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} = \frac{3}{4}$$

$$s_4 = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} = \frac{4}{5}$$

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\ &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}. \end{aligned}$$

- c) Para analisarmos a convergência calculamos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1.$$

Logo, s_n converge para 1 e a soma da série é $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$.

Observação 1.31 O número e pode ser definido como

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = e = 2,718281828\dots$$

Podemos também mostrar que a série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots + \frac{1}{n!} + \dots = e.$$

A Série Geométrica

No nosso primeiro exemplo de série infinita $0, 1+0, 01+0, 001+\dots$, dado no início desta seção, é um caso particular de uma série especial, chamada série geométrica.

Definição 1.32 *Uma série do tipo*

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots + ar^{n-1} + \dots \text{ onde } a \neq 0$$

é chamada de série geométrica e o número r é chamado de razão da série.

Observação 1.33 *A série geométrica também pode ser dada na forma*

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots$$

ou mais geralmente,

$$\sum_{n=k}^{\infty} ar^{n-k} = a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots$$

Exemplos:

$$1) 0, 1 + 0, 01 + 0, 001 + 0, 0001 + \dots = \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \frac{1}{10^4} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^n} \text{ é uma série geométrica de razão } r = 1/10 \text{ e } a = 1.$$

2) $3 - 3 \cdot 2 + 3 \cdot 2^2 - 3 \cdot 2^3 + 3 \cdot 2^4 - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} 3(-2)^n$ é uma série geométrica de razão $r = -2$ e $a = 3$.

O resultado seguinte nos diz quando a série geométrica é convergente e quando é divergente.

Proposição 1.34 A série geométrica $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$, $a \neq 0$ e $r \in \mathbb{R}$.

- *Converge para $S = \frac{a}{1-r}$ se $|r| < 1$;*
- *Diverge, se $|r| \geq 1$.*

A prova segue diretamente da igualdade abaixo:

$$\sum_{k=1}^n ar^{k-1} = a + ar + ar^2 + \dots + ar^{n-1} = a \frac{1-r^n}{1-r}, \text{ se } r \neq 1.$$

Alguns resultados importantes

Teste da divergência

- *Se $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$ então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é divergente.*
- *Se $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ pode convergir ou divergir.*

Prova:

Se $\sum a_n = s$ então $s_n \rightarrow s$. Mas $a_n = s_n - s_{n-1} \rightarrow s - s = 0$. Logo se a série converge, então $a_n \rightarrow 0$.

Observações:

1. O resultado acima é também chamado de *Critério do Termo Geral (CTG)* para a convergência de série, ou *condição necessária* para a convergência de uma série.

2. Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge então $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

3. Através do resultado do limite do termo geral, podemos garantir a divergência de certas séries. Exemplo: $\sum_{n=1}^{\infty} n$ diverge, pois $\lim_{n \rightarrow \infty} n = +\infty$.

4. Como dito acima, se $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ nada podemos afirmar sobre a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Por exemplo, temos $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$, mas a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge.

5. A convergência ou divergência de uma série não é afetada pela retirada ou o acréscimo de um número finito de termos.

6. Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ são duas séries convergindo a S e R respectivamente, então:

i) A série $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n)$ converge a $S \pm R$.

ii) A série $\sum_{n=1}^{\infty} k a_n$ converge a kS , $k \in \mathbb{R}$.

iii) Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ é divergente, então $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ é divergente.

iv) Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é divergente e $k \neq 0$, então $\sum_{n=1}^{\infty} k a_n$ é divergente.

Observação 1.35 Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ são duas séries divergentes

nada se pode afirmar sobre $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$. Exemplo: As séries

$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} -2^n$ divergem e $\sum_{n=1}^{\infty} (2^n - 2^n)$ converge a 0.

Critérios de Convergência

Em geral é difícil decidir através do estudo das sequências das somas parciais se uma série é convergente ou divergente, principalmente porque nem sempre é possível estabelecer uma expressão geral para s_n .

Vamos estudar alguns testes ou critérios que nos permitem decidir sobre a convergência de uma série, mesmo que no caso da série ser convergente não possamos dizer o valor da sua soma. Neste caso, podemos aproximar a soma por uma soma parcial com termos suficientes para atingir o grau de precisão desejado.

Vamos assumir sem demonstração o seguinte resultado:

Teste para a p-série: A p-série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, $p \in \mathbb{R}$,

- converge se $p > 1$;
- diverge se $p \leq 1$.

Observações:

1) A p-série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ é também chamada de série hiper-harmônica.

2) A série harmônica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ é um caso particular de uma p -série ($p = 1$) e como já tínhamos colocado, diverge.

Exemplos:

1) A série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge ($p = 2$).

2) A série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge ($p = 1/2$).

Teste da comparação: Dadas as séries $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, com $0 \leq a_n \leq b_n$, para todo $n \geq 1$, temos que

- Se $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.
- Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge então $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge.

O teste também se aplica se temos $0 \leq a_n \leq b_n$, $\forall n \geq n_0$, algum n_0 fixo.

Exemplos: Analisar o comportamento das seguintes séries usando o teste da comparação.

1) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}-1}$

Resolução:

Tem-se que $\sqrt{n} > \sqrt{n} - 1 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{n}} < \frac{1}{\sqrt{n}-1}$.

Uma vez que $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge temos que $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}-1}$ também diverge.

$$2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\operatorname{sen} n|}{n^2}$$

Resolução:

$$\text{Tem-se que } |\operatorname{sen} n| \leq 1 \Rightarrow \frac{|\operatorname{sen} n|}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}.$$

Uma vez que a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge temos que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\operatorname{sen} n|}{n^2}$ também converge.

Séries Alternadas

Uma série alternada é uma série que se apresenta numa das formas:

- $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots$ (com $a_n > 0$)
- $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n = -a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - \dots$ (com $a_n > 0$).

Exemplos:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

$$2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \dots$$

Teste de Leibniz: *Se a série alternada*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - \dots$$

(com $a_n > 0$) é tal que

- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$
- $a_{n+1} < a_n, \forall n$ (a sequência a_n é decrescente).

Então a série dada é convergente.

Além disso se S é a soma da série temos a estimativa de erro

$$|S - s_n| < a_{n+1}.$$

O Teste da Razão

Para enunciar o Teste da Razão vamos introduzir o conceito de séries absolutamente convergentes.

Analisando exemplos vistos anteriormente podemos observar que:

- A série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ é convergente e a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1}}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ é divergente.}$$

- A série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$ é convergente e a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ também é convergente.}$$

Definição 1.36 Dada a série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ temos que:

1) Se a série $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ converge dizemos que a série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ é absolutamente convergente.

2) Se a série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ converge e $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ diverge dizemos que $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ é condicionalmente convergente.

Exemplos:

1) A série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ é condicionalmente convergente.

2) A série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$ é absolutamente convergente.

3) A série $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \operatorname{sen} \frac{\pi}{n}$ é condicionalmente convergente.

4) A série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} n}{n^2}$ é absolutamente convergente.

Proposição 1.37 Toda série absolutamente convergente é convergente, ou seja: se $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ converge então $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ também converge.

Exemplo 1.38 Pelo resultado anterior podemos concluir que a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} n}{n^2}$ que não é de termos positivos nem alternada é convergente.

Observações:

As seguintes observações são válidas.

1) Se $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ converge então $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ converge.

Isso diz que se uma série converge absolutamente, então ela também converge. A recíproca não é verdadeira.

De fato, se $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ convergir não implica que $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ também converge. Exemplo: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$.

2) Se $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ diverge nada podemos afirmar sobre $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$. Pode convergir ou divergir.

3) Se $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ diverge podemos garantir que $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ diverge pois, caso contrário, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ seria convergente.

Teste da razão: Seja $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ uma série e considere o limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = k.$$

- Se $k < 1$ a série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ é absolutamente convergente, logo convergente.
- Se $k > 1$ (ou ∞) a série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ diverge.
- Se $k = 1$ nada podemos concluir por este critério.

Observações:

1) O teste da razão é geral podendo ser aplicado em qualquer série. Garantindo a convergência absoluta ($k < 1$) ou a divergência da

série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ ($k > 1$).

2) Com o teste da razão podemos concluir a divergência se o limite for $+\infty$.

Exemplo 1.39 Usar o teste da razão para analisar a convergência

da seguinte série: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$.

Resolução:

Em geral quando a expressão do termo geral da série envolve fatorial o critério mais indicado é o da razão

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{2^n}{n!} \\ \Rightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \frac{n!}{2^n} = \frac{2n!}{(n+1)n!} = \frac{2}{n+1} \\ \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n+1} = 0. \end{aligned}$$

Concluimos então que a série é convergente.

1.3 Séries de funções

Dadas funções $f_n : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, considere a série de funções

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x), \quad x \in I.$$

Analogamente às séries numéricas, podemos definir convergência deste tipo de série.

Definição 1.40 (*Convergência Pontual*) Dizemos que $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge pontualmente em I , se a série numérica

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

convergir para cada $x \in I$.

Às vezes a série pode convergir pontualmente somente em $J \subset I$, J algum subconjunto de I .

Definição 1.41 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge pontualmente para f , se dado $\varepsilon > 0$, $\exists N_0 = N_0(\varepsilon, x)$ tal que $S_n(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x)$ satisfaz

$$|S_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

sempre que

$$n \geq N_0 = N_0(\varepsilon, x).$$

Definição 1.42 (*Convergência Absoluta*) Dizemos que $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge absolutamente em I , se a série numérica

$$\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$$

convergir pontualmente para cada $x \in I$.

Definição 1.43 (*Convergência Uniforme*) Uma série de funções $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge uniformemente em I , se dado $\varepsilon > 0$, $\exists N_0 = N_0(\varepsilon)$ tal que

$$|S_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \quad \forall x \in I$$

sempre que

$$n \geq N_0(\varepsilon).$$

Observações:

1. Na convergência uniforme N_0 só depende de ε , não depende de x .
2. Às vezes é possível convergência uniforme, apenas em parte de I .

Teste M de Weirstrass: Seja $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ uma série de funções, com $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$ definida em um conjunto I de \mathbb{R} . Suponha que existam constantes $M_n \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$, tais que

$$|f_n(x)| \leq M_n, \quad \forall x \in I,$$

e que a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ convirja. Então, a série de funções $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge uniforme e absolutamente em I .

Exemplo 1.44 Sejam $f_n(x) = \frac{\text{sen}(n^3x)}{n^2}$, $n \geq 1$, $x \in \mathbb{R}$. Tem-se que $|f_n(x)| = \left| \frac{\text{sen}(n^3x)}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Como $M_n = \frac{1}{n^2}$ é tal que $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ converge, então $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen}(n^3x)}{n^2}$ converge uniformemente em \mathbb{R} .

Exemplo 1.45 Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ a função tal que $f_n(x) = x^n$, para todo $x \in [0, 1]$. Note que:

$$\begin{cases} f_n(x) \rightarrow 0, & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ f_n(1) \rightarrow 1, & \text{se } x = 1. \end{cases}$$

Esse é um exemplo de convergência de sequência de funções. Neste exemplo, $f_n \rightarrow f$ pontual em $[0, 1]$ mas não converge uniforme.

Proposição 1.46 $\sum f_n \rightarrow f$ uniformemente em $I \subset \mathbb{R}$ e f_n contínua em I , cada n , então f é contínua.

Proposição 1.47 $\sum f_n \rightarrow f$ uniformemente em I e f_n integrável em I , cada n . Então f é integrável em I e

$$\int_I f = \sum_{n=1}^{\infty} \int_I f_n.$$

Proposição 1.48 Se $\sum f_n$ e $\sum f'_n$ convergem uniformemente em I então

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} f'_n \text{ em } I.$$

Capítulo 2

Equações Diferenciais Ordinárias

Muitos problemas importantes e significativos da engenharia, das ciências físicas e das ciências sociais, formulados em termos matemáticos, exigem a determinação de uma função que obedece a uma equação que contém uma ou mais derivadas da função desconhecida. Estas equações são chamadas equações diferenciais.

Uma equação diferencial ordinária (EDO) envolve uma função de uma variável e suas derivadas até uma certa ordem m .

A equação que governa a concentração $c(t)$ de determinada substância no sangue, dada por

$$\frac{d}{dt}c(t) = -kc(t), \quad k \text{ constante positiva,}$$

é um exemplo de equação diferencial ordinária, para a função $y = c(t)$.

A ordem de uma equação diferencial é a ordem da derivada de maior ordem que aparece na equação. Assim, a equação anterior é

uma equação de primeira ordem. Já a equação

$$y'' + x^3y' - y = 0$$

é uma equação diferencial de segunda ordem.

Uma classificação importante das equações diferenciais é a que divide em lineares e não lineares. Uma equação diferencial ordinária é linear, se for possível expressá-la da forma:

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_n(x)y = g(x). \quad (2.1)$$

Uma equação que não possa ser colocada na forma (2.1) é uma equação não-linear.

Se o termo independente (ou seja, o termo que não contém y e suas derivadas) é nulo, a equação diferencial é dita homogênea, caso contrário, é dita não homogênea.

Exemplo 2.1 $\frac{dy}{dx} = 2x$ é uma equação diferencial ordinária, linear, não homogênea e de primeira ordem. A função $y = x^2 + C$, C uma constante, é a solução geral dessa EDO.

Exemplo 2.2 $\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + x^2y = 0$ é uma equação diferencial ordinária, não linear, homogênea, de segunda ordem, com coeficientes variáveis. Essa EDO também é escrita como $y'' + (y')^3 + x^2y = 0$.

Definição 2.3 Uma função $y = f(x)$ é solução de uma EDO em um intervalo I , se y satisfaz a EDO para todo x em I . A solução geral de uma EDO é a coleção de todas as soluções da EDO.

Por exemplo, podemos ver que a solução geral da equação diferencial

$$y' = x^3$$

é dada por

$$y = \frac{x^4}{4} + C, \text{ onde } C \text{ é uma constante arbitrária.}$$

A solução geral de uma equação diferencial é uma solução contendo uma ou mais constantes arbitrárias, dependendo da ordem da equação.

Quando aplicamos as equações diferenciais geralmente não estamos interessados em encontrar uma família de soluções (a solução geral) e sim em encontrar uma solução que satisfaça algumas condições adicionais. Em muitos problemas físicos, envolvendo tempo, precisamos encontrar uma solução particular que satisfaça uma condição do tipo $y(t_0) = y_0$. Esta é chamada de condição inicial, e o problema de achar uma solução da equação diferencial que satisfaça a condição inicial é chamado de problema de valor inicial.

Exemplo 2.4 *Verificar que $y = C_1e^{kx} + C_2e^{-kx}$ é uma solução geral da equação $\frac{d^2y}{dx^2} - k^2y = 0$. Encontrar uma solução que satisfaça $y(0) = 1$ e $y'(0) = 3k$.*

Resolução:

Se $y = C_1e^{kx} + C_2e^{-kx}$ então

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= C_1ke^{kx} + C_2e^{-kx}(-k) \\ \frac{d^2y}{dx^2} &= C_1k^2e^{kx} + C_2k^2e^{-kx}\end{aligned}$$

e, portanto,

$$\frac{d^2y}{dx^2} - k^2y = C_1k^2e^{kx} + C_2k^2e^{-kx} - k^2C_1e^{kx} - k^2C_2e^{-kx} = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Pelas condições iniciais $y(0) = 1$ e $y'(0) = 3k$ temos

$$\begin{aligned}1 &= y(0) = C_1e^0 + C_2e^0 = C_1 + C_2 \\ 3k &= C_1k - kC_2 \Rightarrow C_1 - C_2 = 3.\end{aligned}$$

Resolvendo o sistema, tem-se $C_1 = 2$ e $C_2 = -1$. Logo a solução procurada é $y = 2e^{kx} - e^{-kx}$.

2.1 Modelos matemáticos

Um modelo matemático é uma descrição matemática (frequentemente por meio de uma ou mais equações envolvendo uma função e suas derivadas) de um fenômeno do mundo real, como o tamanho de uma população, a demanda por um produto, a velocidade de um objeto caindo, a concentração de um produto em uma reação química, a expectativa de vida de uma pessoa ao nascer ou o custo da redução de poluentes. O propósito do modelo é entender o fenômeno e talvez fazer previsões sobre um comportamento futuro.

Modelo de crescimento populacional

Um modelo para o crescimento de uma população baseia-se na premissa de que uma população cresce a uma taxa proporcional ao tamanho da população. É razoável presumir isso para uma população de bactérias ou animais em condições ideais (meio ambiente ilimitado, nutrição adequada, ausência de predadores, imunidade ou doenças).

Vamos verificar e denominar as variáveis nesse modelo

t = tempo (a variável independente)

P = número de indivíduos da população (a variável dependente).

A taxa de crescimento da população é a derivada $\frac{dP}{dt}$. Assim, nossa premissa é escrita como a equação

$$\frac{dP}{dt} = kP$$

onde k é a constante de proporcionalidade.

Modelo de Variação de Temperatura de um corpo

Um corpo que não possui internamente nenhuma fonte de calor, quando deixado em um meio ambiente na temperatura T tende à temperatura do meio que o cerca T_a . Assim, se a temperatura $T < T_a$, este corpo se aquecerá e, caso contrário, se resfriará.

A lei de variação de temperatura de Newton estabelece que a taxa de variação de temperatura de um corpo é proporcional à diferença de temperatura entre o corpo e o meio ambiente. A lei de Newton é formulada matematicamente pela seguinte equação diferencial:

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_a), \quad k > 0$$

ou

$$T' + kT = kT_a.$$

2.2 Equações diferenciais ordinárias de primeira ordem

Vimos anteriormente dois modelos matemáticos que resultam em equações diferenciais ordinárias de primeira ordem: modelo de crescimento populacional e modelo de variação de temperatura de um corpo. Nessa seção vamos estudar alguns métodos de resolução para esse tipo de problema.

Proposição 2.5 *A solução do problema de valor inicial*

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = ky \\ y(0) = y_0 \end{cases} \quad (2.2)$$

é $y(t) = y_0 e^{kt}$.

Prova:

Uma vez que a equação (2.2) pode ser escrita como $\frac{dy}{y} = k dt$,

podemos encontrar a solução calculando as seguintes integrais:

$$\begin{aligned}\int \frac{dy}{y} &= k \int dt \\ \Rightarrow \ln |y| &= kt + C \\ \Rightarrow |y| &= e^{kt+C} = e^c e^{kt} \\ \Rightarrow y &= \pm e^c e^{kt} \\ \Rightarrow y &= Ae^{kt}\end{aligned}$$

com $A = \pm e^c$, uma constante.

Temos ainda que

$$y(0) = Ae^{k \cdot 0} = A.$$

Portanto a solução da equação (2.2) é $y(t) = y_0 e^{kt}$.

Exemplo 2.6 *Encontrar a solução para o problema de valor inicial*

$$x^2 y' + xy = 1, \quad x > 0, \quad y(1) = 2.$$

Resolução:

Dividindo ambos os lados da equação por x , temos:

$$\begin{aligned}y'x + y &= \frac{1}{x} \\ \Rightarrow \frac{d}{dx}(xy) &= \frac{1}{x}.\end{aligned}$$

Integrando em ambos os lados:

$$\begin{aligned}xy &= \int \frac{1}{x} dx = \ln x + c \\ \Rightarrow y &= \frac{\ln x + c}{x}.\end{aligned}$$

Como $y(1) = 2$, temos:

$$2 = \frac{\ln 1 + c}{1} = c.$$

Logo, a solução para o problema de valor inicial é:

$$y = \frac{\ln x + 2}{x}.$$

2.3 Equações lineares de segunda ordem

Uma equação diferencial linear de segunda ordem tem a forma:

$$P(x)\frac{d^2y}{dx^2} + Q(x)\frac{dy}{dx} + R(x)y = G(x) \quad (2.3)$$

em que P , Q , R e G são funções contínuas.

Uma equação diferencial linear de segunda ordem é homogênea se o termo $G(x)$ da equação (2.3) for nulo para todo x . Não sendo assim, a equação é não homogênea.

Duas funções y_1 e y_2 são ditas linearmente independentes se nem y_1 nem y_2 é um múltiplo constante do outro. Por exemplo: as funções $f(x) = x^2$ e $g(x) = 5x^2$ são linearmente dependentes, mas $f(x) = e^x$ e $g(x) = xe^x$ são linearmente independentes.

Teorema 2.7 *Se y_1 e y_2 forem soluções linearmente independentes de uma equação diferencial linear homogênea de segunda ordem então a solução geral é dada por:*

$$y(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$$

em que C_1 e C_2 são constantes arbitrárias.

Equação homogênea com coeficientes constantes

Vamos estudar a equação homogênea de segunda ordem, linear e com coeficientes constantes:

$$ay'' + by' + cy = 0 \quad (2.4)$$

com a , b e c , constantes.

Se $y = e^{rx}$, onde r é um parâmetro a determinar, tem-se que

$$ay'' + by' + cy = (ar^2 + br + c)e^{rx}.$$

Assim, $y = e^{rx}$ é uma solução do problema (2.4) se r for solução de

$$ar^2 + br + c = 0. \quad (2.5)$$

A equação (2.5) é denominada equação auxiliar (ou equação característica) da equação diferencial $ay'' + by' + cy = 0$. Note que ela é uma equação algébrica que foi obtida da equação diferencial substituindo y'' por r^2 , y' por r e y por 1.

1° caso: Se a equação (2.5) tem duas raízes reais e distintas r_1 e r_2 , a solução geral para a equação (2.4) é:

$$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}. \quad (2.6)$$

2° caso: Se a equação (2.5) tem somente uma raiz real r , a solução geral para a equação (2.4) é:

$$y = C_1 e^{rx} + C_2 x e^{rx}. \quad (2.7)$$

3° caso: Se as raízes da equação (2.5) forem os números complexos $r_1 = \alpha + i\beta$ e $r_2 = \alpha - i\beta$, a solução geral para a equação (2.4) é:

$$y = e^{\alpha x} (C_1 \cos(\beta x) + C_2 \sin(\beta x)). \quad (2.8)$$

Observação 2.8 Observe que no 1° caso, $y_1 = e^{r_1 x}$ e $y_2 = e^{r_2 x}$ são soluções linearmente independentes da equação diferencial (2.4), então pelo teorema anterior $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$, com C_1 e C_2 constantes arbitrárias, é a solução geral da equação (2.4). Os casos 2 e 3 ocorrem de forma análoga.

Exemplo 2.9 Resolver a equação $y'' + 2y' + y = 0$.

Resolução:

A equação característica é:

$$\begin{aligned}r^2 + 2r + 1 &= 0 \\ \Rightarrow r &= -1.\end{aligned}$$

A equação tem uma raiz repetida.

Por (2.6) a solução geral é:

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x}.$$

Exemplo 2.10 Resolver a equação $8y'' + 4y' + y = 0$.

Resolução:

A equação característica é:

$$\begin{aligned}8r^2 + 4r + 1 &= 0 \\ \Rightarrow r &= -\frac{1}{4} \pm \frac{1}{4}i.\end{aligned}$$

Por (2.8) a solução geral é:

$$y = e^{-\frac{1}{4}x} \left(C_1 \cos \frac{x}{4} + C_2 \operatorname{sen} \frac{x}{4} \right).$$

Exemplo 2.11 Resolver o seguinte problema de valor inicial

$$y'' + 3y' - 4y = 0, \quad y(0) = 1 \text{ e } y'(0) = -1.$$

Resolução:

A equação característica é:

$$\begin{aligned}r^2 + 3r - 4 &= 0 \\ \Rightarrow r_1 &= 1 \text{ e } r_2 = -4.\end{aligned}$$

Por (2.6) a solução geral é:

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-4x}.$$

Como $y(0) = 1$ temos

$$1 = y(0) = C_1 + C_2.$$

Derivando a solução obtemos:

$$y' = C_1 e^x - 4C_2 e^{-4x}.$$

Sendo $y'(0) = -1$ temos

$$-1 = y'(0) = C_1 - 4C_2.$$

Dessa forma temos o sistema

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 1 \\ C_1 - 4C_2 = -1 \end{cases}$$

cuja solução é $C_1 = \frac{3}{5}$ e $C_2 = \frac{2}{5}$.

Logo, a solução do problema de valor inicial é:

$$y = \frac{3}{5}e^x + \frac{2}{5}e^{-4x}.$$

Observação 2.12 (i) *Considere a seguinte EDO*

$$y'' + \lambda y = 0, \quad y = y(x).$$

Se $\lambda > 0$ a solução geral é

$$y(x) = A \cos(\sqrt{\lambda}x) + B \operatorname{sen}(\sqrt{\lambda}x).$$

Se $\lambda < 0$ a solução geral é

$$y(x) = Ae^{\sqrt{|\lambda|x}} + Be^{-\sqrt{|\lambda|x}}.$$

Se $\lambda = 0$ a solução geral é

$$y(x) = Ax + B.$$

Em todos os casos A e B são constantes arbitrárias.

(ii) A solução geral de

$$y' + ky = 0, \quad y = y(t)$$

é

$$y = Ce^{-kt}, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Capítulo 3

Equações Diferenciais Parciais (EDPs)

Neste capítulo, apresentamos alguns resultados de equações diferenciais parciais. Os resultados deste capítulo podem ser vistos nos livros de Iório [3], Marivaldo [5] e Zachmanoglou [7]. O livro de Berg-McGregor [2] apresenta um completo estudo sobre EDPs com diversos problemas físicos envolvendo EDPs resolvidos e inclusive estudo de séries e do método de Fourier.

As equações diferenciais são ferramentas matemáticas importantes para o estudo de problemas em diversas áreas do conhecimento, tais como: física, química, biologia, economia, engenharias, além de promoverem o desenvolvimento da própria matemática.

Para o estudo de problemas de valor inicial e de fronteira associados com EDPs, por exemplo, equação da onda e equação do calor, em certos tipos de domínios, é necessário um conhecimento de Séries de Fourier.

Na próxima seção faremos um breve estudo desse tipo de série e sua utilidade na representação de certas funções.

3.1 Séries de Fourier

Nesta seção vamos estudar funções $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que podem ser expressas na forma de série trigonométrica do tipo

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \right) \quad (3.1)$$

chamadas de séries de Fourier.

Funções periódicas

Uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é periódica de período $T > 0$ se $f(x + T) = f(x)$ para todo x .

Segue da definição que, se T é um período de f , então $2T$ também é, assim como qualquer múltiplo inteiro de T . O menor valor de T para o qual a equação acima é válida é chamado período fundamental de f .

Exemplo 3.1 *As funções seno e cosseno são periódicas de período 2π . Todas as funções $\operatorname{sen} \left(\frac{2n\pi x}{L} \right)$ e $\cos \left(\frac{2n\pi x}{L} \right)$, $n \in \mathbb{N}$, tem período fundamental $2L$.*

Lema 3.2 *(Ortogonalidade)*

$$(i) \int_{-L}^L \cos \frac{m\pi x}{2} \cos \frac{n\pi x}{2} dx = \begin{cases} 0, & m \neq n, m, n \geq 1 \\ 1, & m = n \geq 1 \end{cases}$$

$$(ii) \int_{-L}^L \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{2} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{2} dx = \begin{cases} 0, & m \neq n, m, n \geq 1 \\ 1, & m = n \geq 1 \end{cases}$$

$$(iii) \int_{-L}^L \cos \frac{m\pi x}{2} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{2} dx = 0, \quad \forall m, n \in \mathbb{N}.$$

Coefficientes de Fourier

Se uma função $f(x)$ for expressa como

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \right),$$

é de se esperar que os coeficientes a_n e b_n estejam intimamente ligados à função f . Para descobri-los, vamos supor que a igualdade (3.1) se verifique e que a série (3.1) convirja uniformemente. Então a função f é contínua e periódica de período $2L$, pois o período de $\cos \frac{\pi x}{L}$ é $2L$ que é também o período para as demais funções seno e cosseno que aparecem na série.

Sendo, por hipótese, a série uniformemente convergente e f contínua podemos integrar ambos os lados de (3.1) para obter:

$$\int_{-L}^L f(x) dx = \frac{1}{2} a_0 \int_{-L}^L dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \int_{-L}^L \cos \frac{n\pi x}{L} dx + b_n \int_{-L}^L \sen \frac{n\pi x}{L} dx \right)$$

e daí,

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) dx, \quad (3.2)$$

pois,

$$\int_{-L}^L \cos \frac{n\pi x}{L} dx = \int_{-L}^L \sen \frac{n\pi x}{L} dx = 0, \quad \forall n \geq 1.$$

Agora, multiplicando (3.1) por $\cos \frac{m\pi x}{L}$, para $m \geq 1$ fixado, e integrando, obtemos do lema de ortogonalidade que

$$\int_{-L}^L f(x) \cos \frac{m\pi x}{L} dx = a_m L. \quad (3.3)$$

De modo semelhante, obtemos

$$\int_{-L}^L f(x) \sen \frac{m\pi x}{L} dx = b_m L. \quad (3.4)$$

Finalmente, de (3.2), (3.3) e (3.4), obtemos

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n \geq 0 \quad (3.5)$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sen \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n \geq 1. \quad (3.6)$$

Cálculo de algumas Séries de Fourier

Dada uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ periódica de período $2L$, integrável e absolutamente integrável, podemos calcular seus coeficientes de Fourier pelas expressões (3.5) e (3.6). Nesse caso

$$f(x) \sim \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \right),$$

significa que a expressão do lado direito é a série de Fourier de f . Para que no lugar do símbolo \sim tenhamos o sinal de igual é necessário impor condições sobre a função $f(x)$. Existe exemplo de função contínua periódica em que a igualdade não vale em x algum da reta.

Uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ será seccionalmente contínua se ela tiver apenas um número finito de descontinuidades, todas de primeira espécie, em qualquer intervalo limitado, ou seja, dados $a < b$, existem

$$a \leq a_1 < a_2 < \dots < a_n \leq b,$$

tais que f é contínua em cada intervalo aberto (a_j, a_{j+1}) , $j = 1, \dots, n-1$, e existem os limites laterais

$$\lim_{x \rightarrow a_j^+} f(x) \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow a_j^-} f(x)$$

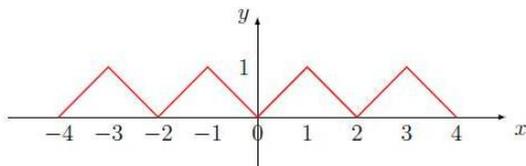
e são finitos. É claro que toda função contínua é seccionalmente contínua.

A importância de f ser seccionalmente contínua é que ela pode ser integrada em intervalos finitos.

Exemplo 3.3 *Calcular a série de Fourier da função*

$$f(x) = \begin{cases} -x, & \text{se } -1 \leq x < 0 \\ x, & \text{se } 0 \leq x < 1 \end{cases}$$

com f periódica de período 2.



Resolução:

Essa função é seccionalmente contínua, logo podemos calcular seus coeficientes de Fourier.

Cálculo dos coeficientes de Fourier. Neste caso $L = 1$ e

$$a_0 = \int_{-1}^1 f(x) dx = \int_{-1}^0 -x dx + \int_0^1 x dx = 1,$$

e se $n \neq 0$

$$\begin{aligned} a_n &= \int_{-1}^1 f(x) \cos(n\pi x) dx \\ &= - \int_{-1}^0 x \cos(n\pi x) dx + \int_0^1 x \cos(n\pi x) dx \\ &= - \frac{x}{n\pi} \operatorname{sen}(n\pi x) \Big|_{-1}^0 + \int_{-1}^0 \frac{1}{n\pi} \operatorname{sen}(n\pi x) dx \\ &\quad + \frac{x}{n\pi} \operatorname{sen}(n\pi x) \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{n\pi} \operatorname{sen}(n\pi x) dx \\ &= - \frac{1}{n^2\pi^2} \cos(n\pi x) \Big|_{-1}^0 + \frac{1}{n^2\pi^2} \cos(n\pi x) \Big|_0^1 \\ &= - \frac{1}{n^2\pi^2} + \frac{1}{n^2\pi^2} \cos(-n\pi) + \frac{1}{n^2\pi^2} \cos(n\pi) - \frac{1}{n^2\pi^2} \\ &= 2 \frac{(-1)^n - 1}{n^2\pi^2}. \end{aligned}$$

Além disso,

$$b_n = \int_{-1}^1 f(x) \operatorname{sen}(n\pi x) dx = - \int_{-1}^0 x \operatorname{sen}(n\pi x) dx + \int_0^1 x \operatorname{sen}(n\pi x) dx = 0,$$

pois $x \operatorname{sen}(n\pi x)$ é uma função par, logo

$$\int_{-1}^0 x \operatorname{sen}(n\pi x) dx = \int_0^1 x \operatorname{sen}(n\pi x) dx.$$

Logo, a série de Fourier da função f é:

$$f(x) \sim \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} 2 \frac{(-1)^n - 1}{n^2 \pi^2} \cos(n\pi x) = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos((2k-1)\pi x)}{(2k-1)^2},$$

uma série somente em cossenos.

3.1.1 Séries de Fourier de funções pares e ímpares

Definição 3.4 A função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é par se $f(x) = f(-x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

Exemplo 3.5 $f(x) = \cos \frac{n\pi x}{L}$, $g(x) = x^{2n}$, $n = 1, 2, 3, \dots$ são funções pares.

Definição 3.6 A função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é ímpar se $f(-x) = -f(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

Exemplo 3.7 $f(x) = \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}$, $g(x) = x^{2n-1}$, $n = 1, 2, 3, \dots$ são funções ímpares.

É fácil verificar que:

- i) O produto de duas funções pares é par;
- ii) O produto de duas funções ímpares é par;
- iii) O produto de uma função par por uma função ímpar é ímpar.

Aplicação:

Se $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é periódica de período $2L$, integrável e absolutamente integrável, então os coeficientes de Fourier de f , no intervalo $[-L, L]$ são dados por:

- i) Se f é par então $f(x) \cos \frac{n\pi x}{L}$ é par e $f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}$ é ímpar, logo

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx, \quad \forall n \geq 0 \quad \text{e} \quad b_n = 0, \quad \forall n \geq 1.$$

ii) Se f é ímpar então $f(x) \cos \frac{n\pi x}{L}$ é ímpar e $f(x) \sen \frac{n\pi x}{L}$ é par, logo

$$a_n = 0, \quad \forall n \geq 0 \quad \text{e} \quad b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sen \frac{n\pi x}{L} dx, \quad \forall n \geq 1.$$

Observação 3.8 Usando acima que se f é par então

$$\int_{-L}^L f(x) dx = 2 \int_0^L f(x) dx.$$

Se g é ímpar então

$$\int_{-L}^L g(x) dx = 0.$$

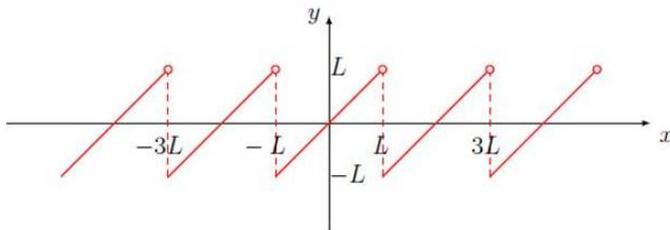
Conclusão: Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ periódica de período $2L$, integrável e absolutamente integrável. Então:

- i) Se f é par a série de Fourier de f é uma série de cossenos;
- ii) Se f é ímpar a série de Fourier de f é uma série de senos.

Exemplo 3.9 Calcular a série de Fourier da função

$$f(x) = x, \quad -L \leq x < L$$

com f periódica de período $2L$.



Resolução:

Como f é ímpar então sua série de Fourier é uma série em senos. Temos que $a_n = 0, \forall n \geq 0$ e

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{L} \int_0^L x \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx = \frac{2}{L} \left(-x \frac{L}{n\pi} \cos \frac{n\pi x}{L} \Big|_0^L + \int_0^L \frac{L}{n\pi} \cos \frac{n\pi x}{L} dx \right) \\ &= \frac{2}{L} \left(\frac{-L^2}{n\pi} \cos(n\pi) \right) = \frac{2L}{n\pi} (-1)^{n+1}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

Logo, a série de Fourier da função f é:

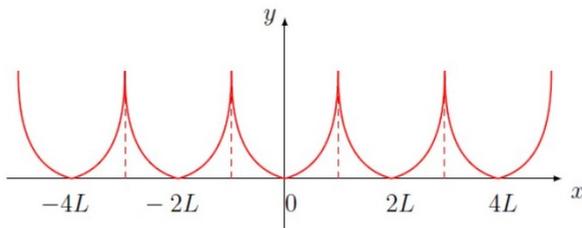
$$f(x) \sim \frac{2L}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}.$$

Exemplo 3.10 Calcular a série de Fourier da função

$$f(x) = x^2, \quad -L \leq x \leq L$$

com f periódica de período $2L$.

Resolução:



Como f é par, sua série de Fourier é uma série em cossenos, cujos coeficientes são:

$$a_0 = \frac{2}{L} \int_0^L x^2 dx = \frac{2}{L} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^L = \frac{2L^2}{3}$$

e para $n \neq 0$,

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{2}{L} \int_0^L x^2 \cos \frac{n\pi x}{L} dx \\
 &= \frac{2}{L} \left(x^2 \frac{L}{n\pi} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \Big|_0^L - \int_0^L \frac{2xL}{n\pi} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx \right) \\
 &= -\frac{2}{L} \cdot \frac{2L}{n\pi} \left(-\frac{Lx}{n\pi} \cos \frac{n\pi x}{L} \Big|_0^L + \frac{L}{n\pi} \int_0^L \cos \frac{n\pi x}{L} dx \right) \\
 &= \frac{4L^2}{n^2\pi^2} \cos(n\pi) + \frac{L^2}{n^2\pi^2} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \Big|_0^L \\
 &= \frac{4L^2}{n^2\pi^2} (-1)^n.
 \end{aligned}$$

Portanto, a série de Fourier da função f é:

$$f(x) \sim \frac{L^2}{3} + \frac{4L^2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos \frac{n\pi x}{L}.$$

Observação 3.11 *Escrevemos o sinal “ \sim ” no lugar de “ $=$ ” pois ainda não sabemos se vale a igualdade.*

Se uma função for dada apenas em um intervalo $[0, L]$, então ela pode ser representada por mais de uma série de Fourier. De fato,

- *estendendo f ao intervalo $[-L, L]$ como função ímpar e depois estendendo periodicamente (período $2L$), tem-se que f será representada por uma série em senos;*

- *estendendo f de modo par ao intervalo $[-L, L]$ e depois periódica de período $2L$, teremos uma série em cossenos para f ;*

- *estendendo f ao intervalo $[-L, L]$ de modo que f não seja par nem ímpar, tem-se que f deverá ser representada por uma série em senos e cossenos.*

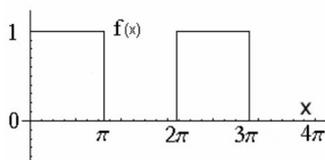
- *pode-se estender f de modo que ela seja periódica com período maior que $2L$.*

Esta liberdade de escolha será utilizada em problemas de aplicações para atingir os objetivos relacionados.

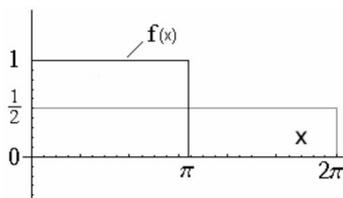
3.1.2 Aproximação de funções usando Séries de Fourier

Podemos aproximar uma função periódica usando a série de Fourier correspondente. Para ilustrar esse resultado vamos fazer o desenvolvimento em série de Fourier de uma função periódica simples: a chamada onda quadrada, ou função degrau, cujo gráfico é mostrado na figura abaixo:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } 0 \leq x \leq \pi \\ 0, & \text{se } \pi < x \leq 2\pi. \end{cases}$$



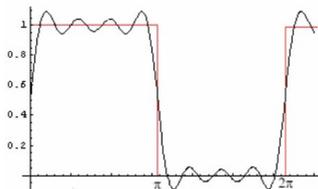
O primeiro coeficiente, a_0 , é simplesmente a média de $f(x)$ no período. É muito fácil ver, pela figura abaixo, que esse valor médio é $1/2$. Assim, $a_0 = 1/2$.



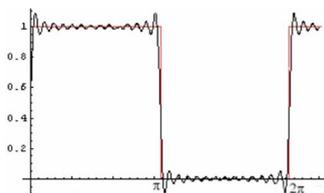
Calculando os outros coeficientes concluímos que $b_n = 0$, $a_n = 0$ para n par e $a_n = 2/(n\pi)$ para n ímpar. Portanto, a série de Fourier para a onda quadrada é:

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \operatorname{sen}(x) + \frac{2}{3\pi} \operatorname{sen}(3x) + \frac{2}{5\pi} \operatorname{sen}(5x) + \frac{2}{7\pi} \operatorname{sen}(7x) + \dots$$

A figura abaixo mostra um gráfico da onda quadrada juntamente com o gráfico da expansão com os primeiros 5 termos da série de Fourier, isto é, com os termos explicitados na equação acima.



A outra figura mostra a onda quadrada e sua expansão com os 15 primeiros termos da série de Fourier. Como era de se esperar, quanto maior o número de termos na expansão, melhor a aproximação com a forma da função original.



3.1.3 Resultados de convergência de Séries de Fourier

Agora enunciaremos dois resultados que fornecem condições suficientes para a convergência da série de Fourier de uma função f .

Definição 3.12 *Uma função f é dita seccionalmente diferenciável em um intervalo $[a, b]$ se f e sua derivada f' são seccionalmente contínuas em $[a, b]$.*

Teorema 3.13 (Fourier) *Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função seccionalmente diferenciável e de período $2L$. Então a série de Fourier da*

função f converge, em cada ponto x , para a média

$$\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2},$$

isto é,

$$\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right),$$

com $f(x+0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} f(x+h)$ e $f(x-0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} f(x-h)$.

Teorema 3.14 *Seja f periódica de período $2L$, contínua com f' contínua. Então a série de Fourier de f converge uniformemente para f .*

3.2 Definições iniciais

Definição 3.15 *Equações diferenciais parciais (EDP's) são equações envolvendo uma função $u = u(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $n \geq 2$, e suas derivadas parciais, isto é,*

$$F \left(x_1, x_2, \dots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}, \dots, \frac{\partial^m u}{\partial x_n^m} \right) = 0,$$

sendo $F = F(x_1, x_2, \dots, x_n, z_1, z_2, \dots, z_k)$ uma função real.

F é dita uma EDP de ordem m em n variáveis independentes x_1, x_2, \dots, x_n se F é uma função não constante em alguma das derivadas de ordem m .

Se F é linear nas variáveis z_i então a EDP é dita linear.

Se F é linear apenas nas variáveis z_i em que aparecem as derivadas de ordem m então a EDP é dita semilinear, caso contrário é dita uma EDP não linear.

Exemplo 3.16 $3u_{xx} + u_{yy} + 2u = 0$, $u = u(x, y)$.

Aqui as variáveis independentes são $x_1 = x$ e $y_1 = y$ e

$$F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}) = 0$$

é dada por

$$F(x, y, z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6) = 3z_4 + z_6 + 2z_1.$$

Essa EDP é conhecida como um tipo de Equação de Laplace bi-dimensional.

Exemplo 3.17 A EDP: $u_t - ku_{xx} + 3u = 0$, $k > 0$ é uma equação unidimensional do calor.

Aqui $u_t - ku_{xx} + 3u = F(x, t, u, u_x, u_t, u_{xx}, u_{xt}, u_{tt}) = 0$ com $F(x, t, z_1, z_2, \dots, z_6) = z_3 - kz_4 + 3z_1$.

Exemplo 3.18 Equação unidimensional da onda:

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} + au + bu_t = 0$$

Aqui $F(x, t, u, u_x, u_t, u_{xx}, u_{xt}, u_{tt}) = F(x, t, z_1, z_2, \dots, z_6) = z_6 - c^2 z_4 + az_1 + bz_3$.

Todos os exemplos acima são de EDPs lineares de ordem 2 em duas variáveis independentes.

Outros tipos de EDPs:

1. $u_x + u_y = \sin x$ (EDP não homogênea).

A EDP é homogênea se

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n, 0, 0, \dots, 0) = 0,$$

isto é, a EDP é homogênea se $u \equiv 0$ satisfaz a equação.

2. $u_t + u_{xxx} + u \cdot u_x = 0$ é uma EDP semilinear chamada de Korteweg-de Vries.

3. Equação de Poisson em \mathbb{R}^3 :
$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = f(x, y, z), \\ u = u(x, y, z). \end{cases}$$

4. EDP linear em duas variáveis independentes de ordem um com coeficientes variáveis:

$$a_1 u_x + a_2 u_y + bu + c = 0, \quad u = u(x, y)$$

com a_1, a_2, b e c funções de x e y .

Observação 3.19 *Se $c \neq 0$ então a EDP é não homogênea.*

EDP linear em duas variáveis mais geral possível para $u = u(x, y)$ de (ordem dois) segunda ordem:

$$au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} + du_x + eu_y + ku + f(x, y) = 0$$

com a, b, c, d, e, k podendo serem funções não constantes em x e y .

Observação 3.20

Se $b^2 - 4ac > 0$: EDP é dita ser hiperbólica;

Se $b^2 - 4ac = 0$: EDP é dita ser parabólica;

Se $b^2 - 4ac < 0$: EDP é dita ser elíptica.

Dentro dessas classificações as EDPs apresentam características específicas. Por isso dentro de cada um desses grupos elas tem métodos diferentes para se estudar suas propriedades, ao menos no caso em que se acrescente nas equações alguma não linearidade.

3.3 Solução de uma Equação Diferencial Parcial

Cada EDP é estudada sobre algum domínio Ω (um conjunto aberto conexo) do \mathbb{R}^n .

Uma função $u = u(x_1, \dots, x_n)$ é dita ser solução de uma EDP de ordem m se $u \in C^m(\Omega)$ e u satisfaz a EDP na região Ω .

Exemplo 3.21 $u(x, y) = e^{x-y}$ é solução de $u_x + u_y = 0$ em $\Omega = \mathbb{R}^2$, pois $u_x = e^{x-y}$ e $u_y = -e^{x-y}$, $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Exemplo 3.22 A função $u = \ln(x^2 + y^2)$ é solução de $u_{xx} + u_{yy} = 0$ em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

De fato,

$$u_x = \frac{2x}{x^2 + y^2}, \quad u_{xx} = \frac{(x^2 + y^2) \cdot 2 - 2x \cdot 2x}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{-2x^2 + 2y^2}{(x^2 + y^2)^2},$$

$$u_y = \frac{2y}{x^2 + y^2}, \quad u_{yy} = \frac{(x^2 + y^2) \cdot 2 - 2y \cdot 2y}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{2x^2 - 2y^2}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Logo,

$$u_{xx} + u_{yy} = \frac{-2x^2 + 2y^2}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{2x^2 - 2y^2}{(x^2 + y^2)^2} = 0, \quad \forall (x, y) \neq (0, 0).$$

Exemplo 3.23 $u(x, y) = \ln(x + y + 1)$ é solução de $u_x - u_y = 0$ em $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y + 1 > 0\}$.

De fato, $u_x = \frac{1}{x+y+1}$ e $u_y = \frac{1}{x+y+1}$ para todo $(x, y) \in \Omega$.

3.3.1 Solução geral de uma equação diferencial parcial

A solução geral de uma EDP é a coleção de todas as soluções da EDP.

Exemplo 3.24 A solução geral de $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$ é dada por $u(x, y) = f(x - ct) + g(x + ct)$ com f e g funções arbitrárias de classe $C^2(\mathbb{R})$.

Note que são soluções particulares:

- $u(x, y) = Ae^{x-ct} + B \operatorname{sen}(x + ct)$ são soluções com A e B constantes.
- $u(x, y) = \ln(x + ct)$, $u(x, y) = 3 \cos(x - ct)$, também são soluções.

Exemplo 3.25 A solução geral de $u_{xx} + a^2u = 0$ com $u = u(x, y)$ e $a = \text{constante} > 0$ é:

$$u(x, y) = f(y) \cos(ax) + g(y) \sin(ax)$$

válida em $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, sendo f e g funções arbitrárias.

A equação $u_{xx} + a^2u = 0$ pode ser vista como uma EDO cuja solução geral é:

$$u = u(x) = A \cos(ax) + B \sin(ax).$$

Como queremos $u = u(x, y)$ então a dependência em y fica em A e B , isto é, A e B devem ser funções da variável y , isto é, $A = f(y)$ e $B = g(y)$.

Nota: Notar que a solução geral de

$$u_{xx} + a^2u = 0$$

com $u = u(x, y, z)$ é

$$u(x, y, z) = f(y, z) \cos(ax) + g(y, z) \sin(ax)$$

com f e g arbitrárias.

Exemplo 3.26 Resolver a EDP de primeira ordem para $u = u(x, y)$ dada por:

$$u_x = y \sin x.$$

Resolução:

Fixando y e integrando em x se obtém $u(x, y) = -y \cos x + c$, com c uma constante em x . Aqui usamos que $\frac{\partial}{\partial x}(-\cos x) = \sin x$.

Mas é claro que c pode depender de y , isto é, $c = f(y)$.

Logo, a solução geral da EDP é:

$$u(x, y) = -y \cos x + f(y)$$

com f função arbitrária.

Exemplo 3.27 Resolver a EDP: $u_{xx} = 1$ para $u = u(x, y)$.

Resolução:

Integrando em x , resulta $u_x = x + f(y)$. Integrando novamente: $u = u(x, y) = \frac{x^2}{2} + f(y)x + g(y)$, com f e g funções arbitrárias.

Exemplo 3.28 Achar a solução geral de

$$uu_{xy} - u_x u_y = 0, \quad (3.7)$$

com $u = u(x, y)$ que é uma EDP de segunda ordem em duas variáveis independentes, não linear.

Resolução:

Primeiro reescrevemos a equação da forma:

$$\frac{(u_y)_x}{u_y} = \frac{u_x}{u}.$$

Fixando y e integrando em relação a x temos:

$$\ln u_y = \ln u + C, \quad C = f(y).$$

Logo

$$u_y = ue^C = ue^{f(y)} = u g(y).$$

Daí, temos

$$\frac{u_y}{u} = g(y).$$

Integrando em y , segue que

$$\ln u = \int g(y) dy = G(y) + k$$

com k constante em y , isto é, $k = f(x)$. Então resulta que

$$\ln u = G(y) + f(x)$$

ou

$$u = e^{G(y)+f(x)} = e^{G(y)}e^{f(x)}.$$

Logo, $u = u(x, y) = \tilde{G}(y)F(x)$, que é a solução geral, com \tilde{G} e F arbitrárias.

Observação 3.29 *EDPs de ordem maior ou igual a dois, em duas ou mais variáveis independentes são difíceis de se obter uma expressão para a solução geral, ou na maioria das vezes impossível, mesmo para EDPs lineares.*

A EDP (3.7) e a equação da onda

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$$

estão entre essas poucas em que é possível obter a solução geral.

Por exemplo, a EDP de Laplace

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad u = u(x, y) \tag{3.8}$$

não tem a solução geral conhecida.

Exemplo 3.30 *Encontrar a solução geral da EDP*

$$u_{xxx} + u_x = 0, \quad u = u(x, y).$$

Resolução:

Como $u_{xxx} + u_x = 0$, $u = u(x, y)$. Fazendo $v = u_x$ temos

$$v_{xx} + v = 0$$

cuja solução (olhando como uma EDO) é dada por

$$v = A \cos x + B \sin x$$

com A e B constantes em x . Logo, $A = f(y)$ e $B = g(y)$.

Assim,

$$u_x = v = u(x, y) = f(y) \cos x + g(y) \sin x.$$

Integrando em x , resulta

$$u(x, y) = f(y) \operatorname{sen} x - g(y) \operatorname{cos} x + C,$$

com C constante em x . Logo, $C = h(y)$.

Portanto,

$$u(x, y) = f(y) \operatorname{sen} x - g(y) \operatorname{cos} x + h(y),$$

com f , g e h funções arbitrárias.

Nota importante: Nos exemplos anteriores, podemos observar que a solução geral de uma EDP de ordem m (das EDPs em que se conseguir encontrar a solução geral) depende de m funções arbitrárias de $n - 1$ variáveis independentes, sendo a EDP em n variáveis independentes.

Isso na verdade é uma conjectura que na prática se verifica correta mas, é praticamente impossível ser provada.

3.4 Princípio da Superposição

Para uma EDP linear, se u e v são soluções, então $w = Au + Bv$ também é solução se A e B são constantes.

Entretanto, o conjunto de soluções linearmente independente de uma EDP é muito grande. Por isso muitas vezes há uma infinidade de soluções de uma EDP e podemos pensar em uma superposição (ou combinação linear) infinita de soluções.

Exemplo 3.31 *Notar que $u_n(x, y) = (x - y)^n$, para cada $n = 0, 1, 2, 3, \dots$, é solução de:*

$$\begin{cases} u_x + u_y = 0, \\ (x, y) \in \mathbb{R}^2, \end{cases} \quad (3.9)$$

Então podemos perguntar se

$$u(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n u_n(x, y)$$

é também solução, com A_n constantes? A solução depende dos A_n .

Por exemplo, se tomar $A_n = \frac{1}{n!}$ então

$$u(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (x - y)^n. \quad (3.10)$$

Mas, sabemos que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!} = e^y, \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$

Logo (3.10) fica:

$$u(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x - y)^n}{n!} = e^{x-y}, \quad (x, y) \in \mathbb{R}.$$

Ora, é imediato que $u(x, y) = e^{x-y}$ é também solução de (3.9).

Assim, superposição infinita, enumerável, de soluções também é solução, se os A_n forem adequados.

É bem fácil provar que u_n , $n \geq 0$, são linearmente independentes. Logo, o espaço de soluções de (3.9), uma EDP bem simples, tem dimensão infinita.

Isso é um fato geral para EDPs, ao contrário de EDOs de ordem "n" que tem o espaço de soluções com dimensão n.

3.4.1 Princípio da superposição generalizado

Se u_λ , $\lambda \in I \subseteq \mathbb{R}$, I intervalo, é uma família de soluções de uma EDP linear homogênea e se $C(\lambda)$ é uma função tal que

$$u(x) = \int_I C(\lambda) u_\lambda(x) d\lambda$$

é convergente, então sobre adequadas condições essa integral é também solução da EDP.

Exemplo 3.32 Considerar a EDP: $3u_x + u_y = 0$.

Um método que dá soluções particulares de EDPs lineares é considerar:

$$u(x, y) = e^{\lambda x + \delta y}. \quad (3.11)$$

Para a EDP $3u_x + u_y = 0$ vamos procurar esse tipo de solução. Substituindo na EDP, obtém-se

$$3\lambda e^{\lambda x + \delta y} + \delta e^{\lambda x + \delta y} = (3\lambda + \delta)e^{\lambda x + \delta y} = 0.$$

Como $e^{\lambda x + \delta y} > 0$ tem-se que $3\lambda + \delta = 0$ para que (3.11) seja solução. Isto é, $\delta = -3\lambda$.

Assim,

$$u = u_\lambda(x, y) = e^{\lambda x - 3\lambda y} = e^{\lambda(x - 3y)}$$

é solução para todo x, y .

Vamos tomar para $\lambda \in \mathbb{R}$

$$C(\lambda) = \begin{cases} e^{-\lambda}, & -1 \leq \lambda \leq 1 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Aqui $I = \mathbb{R}$.

Então, será que $u = \int_{-\infty}^{\infty} C(\lambda)u_\lambda(x, y)d\lambda$ é solução?

Ora,

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \int_{-\infty}^{\infty} C(\lambda)u_\lambda(x, y)d\lambda = \int_{-1}^1 e^{-\lambda} e^{\lambda(x-3y)} d\lambda \\ &= \int_{-1}^1 e^{-\lambda(1-x+3y)} d\lambda = \left. \frac{e^{-\lambda(1-x+3y)}}{-(1-x+3y)} \right|_{-1}^1 \\ &= \frac{e^{-(1-x+3y)} - e^{(1-x+3y)}}{(-3y+x-1)} = \frac{2 \operatorname{senh}(x-3y-1)}{x-3y-1}, \end{aligned}$$

para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ com $x - 3y - 1 \neq 0$. É fácil verificar que u é solução de (3.11).

Neste exemplo, temos uma combinação linear infinita, não enumerável de soluções que resulta em solução. As soluções u_λ são LIs. Logo, o espaço de soluções de (3.11) tem dimensão infinita do tipo não enumerável.

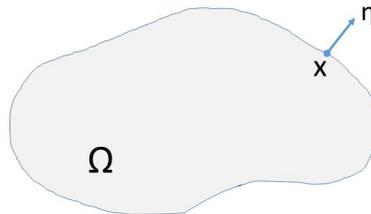
Observação 3.33 *A solução geral dessa EDP é $u(x, y) = F(x-3y)$.*

3.5 Condições de Contorno e Condições Iniciais

Em problemas de aplicações envolvendo EDPs aparece a necessidade de impor outras condições na solução da EDP. As soluções em geral são definidas em um domínio Ω do \mathbb{R}^n e é natural exigir que a solução satisfaça certas condições na fronteira (ou contorno) do domínio.

3.5.1 Tipo de condições de contorno

1. De Dirichlet: $u = f(x)$, $x \in \partial\Omega$, com f dada. Aqui $\partial\Omega$ é a fronteira da região Ω .
Se $f \equiv 0$ se diz que a condição de fronteira de Dirichlet é homogênea.
2. De Neumann: $\frac{\partial u}{\partial \eta} = \nabla u \cdot \eta = g(x)$, $x \in \partial\Omega$, com $\eta =$ normal exterior unitária no ponto $x \in \partial\Omega$.



Se $g(x) \equiv 0$ se diz que a condição de Neumann é homogênea.

3. Condição de fronteira tipo Robin:

$$u + h \frac{\partial u}{\partial \eta} = f(x), \quad x \in \partial\Omega.$$

4. Condição mista: $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$

$$\begin{cases} u|_{\Gamma_1} = f \\ \frac{\partial u}{\partial \eta}|_{\Gamma_2} = g. \end{cases}$$

Para EDPs de evolução, que envolvem além de variáveis espaciais, uma variável temporal, é necessário saber como é a solução em um tempo inicial t_0 . Denominada condição inicial. Por exemplos:

$$u(x, t = t_0) = f(x) \quad \text{e} \quad u_t(x, t = t_0) = g(x).$$

3.6 Método de Separação de Variáveis

O método também é conhecido como método de Fourier e é o mais clássico dos métodos para determinar soluções particulares de EDPs lineares e homogêneas. Basicamente o método permite reduzir o problema da procura de soluções de certos tipos de EDPs a problema de resolução de EDOs.

Dada uma EDP linear e homogênea, a ideia é buscar soluções da forma:

$$u(x_1, \dots, x_n) = X_1(x_1) \dots X_n(x_n).$$

Exemplo 3.34 *Encontrar soluções particulares para a equação*

$$x^2 u_{xx} + x u_x - u_y = 0,$$

que é uma equação com coeficientes variáveis.

Resolução:

Vamos procurar soluções da forma $u(x, y) = \varphi(x)\psi(y)$. Substituindo na equação temos:

$$x^2\varphi''(x)\psi(y) + x\varphi'(x)\psi(y) - \varphi(x)\psi'(y) = 0.$$

Dividindo ambos os lados por $\varphi(x)\psi(y)$, supondo φ e ψ são ambas não nulas, obtemos:

$$\frac{x^2\varphi''(x) + x\varphi'(x)}{\varphi(x)} = \frac{\psi'(y)}{\psi(y)}.$$

A igualdade acima implica que

$$\frac{x^2\varphi''(x) + x\varphi'(x)}{\varphi(x)} = \frac{\psi'(y)}{\psi(y)} = \lambda$$

com λ constante, pois função de x igual a função de y implica que são ambas constantes. Logo,

$$x^2\varphi''(x) + x\varphi'(x) - \lambda\varphi(x) = 0 \quad (3.12)$$

$$\psi'(y) - \lambda\psi(y) = 0. \quad (3.13)$$

Para $\lambda > 0$, sabemos que a solução geral de (3.13) é

$$\psi(y) = C_1 e^{\lambda y}.$$

Para determinarmos a solução geral de (3.12) devemos procurar soluções na forma $\varphi(x) = x^r$. Isso implica que

$$r^2 - \lambda = 0 \quad \text{ou seja,} \quad r = \pm\sqrt{\lambda}.$$

Assim, a solução geral da equação (3.12) é:

$$\varphi(x) = C_3 x^{\sqrt{\lambda}} + C_4 x^{-\sqrt{\lambda}}$$

e, portanto uma solução da EDP é:

$$u(x, y) = \left(C_3 x^{\sqrt{\lambda}} + C_4 x^{-\sqrt{\lambda}} \right) \left(C_1 e^{\sqrt{\lambda} y} \right),$$

para cada $\lambda > 0$.

Exemplo 3.35 *Encontrar soluções para a equação*

$$u_x - u_y + 2u_z = 0.$$

Resolução:

Substituindo $u(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z)$ na equação temos:

$$X'(x)Y(y)Z(z) - X(x)Y'(y)Z(z) + 2X(x)Y(y)Z'(z) = 0.$$

Dividindo por $X(x)Y(y)Z(z)$ concluímos que

$$\frac{X'(x)}{X(x)} = \frac{Y'(y)}{Y(y)} - \frac{2Z'(z)}{Z(z)} = \lambda \quad (\lambda \text{ constante}). \quad (3.14)$$

Para λ qualquer, temos pela equação acima que

$$X'(x) - \lambda X(x) = 0$$

cuja solução é:

$$X(x) = C_1 e^{\lambda x}.$$

Pela equação (3.14) temos:

$$\frac{Y'(y)}{Y(y)} = \lambda + \frac{2Z'(z)}{Z(z)}.$$

Da igualdade acima, concluímos que existe $\mu \in \mathbb{R}$ tal que

$$\frac{Y'(y)}{Y(y)} = \lambda + \frac{2Z'(z)}{Z(z)} = \mu. \quad (3.15)$$

Assim, $Y'(y) = \mu Y(y)$ cuja solução geral é $Y(y) = C_2 e^{\mu y}$.

Por fim, da equação (3.15) temos que

$$2Z'(z) = (\mu - \lambda)Z(z) \quad \Rightarrow \quad Z'(z) = \frac{\mu - \lambda}{2} Z(z)$$

cuja solução é:

$$Z(z) = C_3 e^{\frac{\mu - \lambda}{2} z}.$$

Dessa forma,

$$u(x, y, z) = C e^{\lambda x} e^{\mu y} e^{\frac{\mu - \lambda}{2} z}$$

é uma solução da EDP para cada $\lambda \in \mathbb{R}$, $\mu \in \mathbb{R}$.

Capítulo 4

Equação da Onda Unidimensional

A equação da onda é uma equação diferencial muito importante que modela diversos fenômenos físicos, como por exemplo, vibrações de uma corda tensionada, propagação de ondas sonoras e eletromagnéticas. A dedução dessa equação pode ser vista em qualquer bom livro de EDPs, como por exemplo, Berg-McGregor [2] que também apresenta diversas aplicações e métodos de soluções para EDPs, incluindo a transformada de Fourier e aplicações.

A equação da onda em um domínio do \mathbb{R}^n tem a seguinte forma

$$u_{tt} - c^2 \Delta u = F(x, t, u, u_{x_1}, u_{x_2}, \dots, u_{x_n}, u_t)$$

com $\Delta = \Delta_n$ o operador de Laplace e F alguma função que pode ou não depender de todas as variáveis indicadas na equação acima. Por exemplo $F = F(u) = -mu - u^3$. Neste caso a equação é conhecida como a equação de Klein-Gordon da mecânica relativística, onde m é a massa da partícula. Claro que nesse caso a equação da onda é do tipo semilinear que é difícil de tratar.

Entretanto, neste trabalho vamos tratar somente do caso unidimensional ($n = 1$) e $F \equiv 0$. Neste caso, a equação da onda fica

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$$

em que a constante $c > 0$ tem dimensão de velocidade (de propagação da onda), como será visto neste capítulo.

Exemplo 4.1 *Calcular a solução geral da equação da onda unidimensional no espaço todo, isto é,*

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (4.1)$$

Considerar a mudança de variável

$$\begin{cases} \xi = x + ct \\ \eta = x - ct \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\xi + \eta}{2} \\ t = \frac{\xi - \eta}{2c}. \end{cases}$$

Essa mudança de variáveis transforma a EDP da onda na EDP

$$w_{\xi\eta} = 0 \quad \text{com} \quad w(\xi, \eta) = u(x, t) = u\left(\frac{\xi + \eta}{2}, \frac{\xi - \eta}{2c}\right).$$

Integrando w , temos que

$$w(\xi, \eta) = F(\eta) + G(\xi)$$

é a solução geral, com $F, G \in C^2(\mathbb{R})$ arbitrárias.

Retornando com a substituição segue que

$$u(x, t) = w(\xi, \eta) = F(\eta) + G(\xi)$$

de onde se obtém que

$$u(x, t) = F(x - ct) + G(x + ct)$$

é a solução geral de (4.1) com $F, G \in C^2(\mathbb{R})$ funções arbitrárias.

Exemplo 4.2 Usando a solução geral de $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$ calcular a solução do problema de valor inicial:

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x, 0) = f(x), & (\text{condição inicial em } t_0 = 0) \\ u_t(x, 0) = g(x), & (\text{condição inicial em } t_0 = 0) \\ u = u(x, t) \end{cases} \quad (4.2)$$

com f e g funções regulares dadas, por exemplo, $f \in C^2(\mathbb{R})$ e $g \in C^1(\mathbb{R})$.

Resolução:

A solução geral de $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$, como vimos no exemplo anterior é dada por

$$u(x, t) = F(x - ct) + G(x + ct).$$

Impondo a condição inicial $u(x, 0) = f(x)$, temos

$$f(x) = u(x, 0) = F(x) + G(x).$$

Sendo

$$u_t(x, t) = -cF'(x - ct) + cG'(x + ct),$$

aplicando a segunda condição, resulta em

$$g(x) = u_t(x, 0) = -cF'(x) + cG'(x).$$

Temos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} F(x) + G(x) = f(x) \\ -F'(x) + G'(x) = \frac{1}{c}g(x). \end{cases} \quad (4.3)$$

Integrando a segunda equação de (4.3), temos

$$-F(x) + F(0) + G(x) - G(0) = \frac{1}{c} \int_0^x g(s) ds. \quad (4.4)$$

Somando (4.4) com a primeira equação de (4.3), resulta

$$G(x) + F(0) + G(x) - G(0) = \frac{1}{c} \int_0^x g(s) ds + f(x),$$

ou

$$G(x) = \frac{G(0) - F(0)}{2} + \frac{1}{2c} \int_0^x g(s) ds + \frac{f(x)}{2}. \quad (4.5)$$

Substituindo (4.5) na primeira equação de (4.3), obtemos

$$F(x) = f(x) - \frac{G(0) - F(0)}{2} - \frac{1}{2c} \int_0^x g(s) ds - \frac{f(x)}{2}.$$

Logo,

$$F(x) = \frac{f(x)}{2} - \frac{1}{2c} \int_0^x g(s) ds - \frac{G(0) - F(0)}{2}$$

e

$$G(x) = \frac{G(0) - F(0)}{2} + \frac{1}{2c} \int_0^x g(s) ds + \frac{f(x)}{2}.$$

Portanto, temos

$$u(x, t) = F(x - ct) + G(x + ct) = \frac{f(x - ct)}{2} - \frac{1}{2c} \int_0^{x-ct} g(s) ds - \frac{G(0) - F(0)}{2} + \frac{G(0) - F(0)}{2} + \frac{1}{2c} \int_0^{x+ct} g(s) ds + \frac{f(x + ct)}{2},$$

ou,

$$u(x, t) = \frac{f(x - ct) + f(x + ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(s) ds$$

que é a solução do problema, conhecida como Fórmula de D'Alembert.

A equação da onda unidimensional é dada pela EDP

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = f(x, t, u, u_x, u_t).$$

Ela tem aplicação em problemas de vibrações, de propagação de ondas acústicas, eletromagnéticas e muitas outras. Se $f \equiv 0$, a equação é chamada a equação da onda livre. Essa equação também tem importantes propriedades e é uma equação do tipo hiperbólica.

4.1 Equação da Onda: Velocidade Finita de Propagação

Considere $x \in \mathbb{R}$ a variável espacial e t a variável temporal, então se $x = R + Ct$, R uma constante, resulta que $\frac{dx}{dt} = C$. Logo, C possui dimensão de velocidade. É a velocidade da onda descrita pela equação. Para ondas sonoras C é a velocidade do som. Para ondas eletromagnéticas, C é a velocidade da luz.

Agora, supondo que os dados iniciais do problema (4.2) são suportados no intervalo $[-R, R]$, algum $R > 0$. Isto é,

$$f(x) = g(x) = 0$$

para todo $x \notin [-R, R]$ ou equivalentemente

$$f(x) = g(x) = 0 \quad \text{se } |x| > R.$$

Então

$$f(x \pm Ct) = g(x \pm Ct) = 0 \quad \text{se } |x \pm Ct| \geq R.$$

Agora, se $|x| - Ct \geq R$, $t \geq 0$, então da desigualdade triangular reversa, temos

$$|x \pm Ct| \geq |x| - Ct,$$

de onde resulta que

$$f(x \pm Ct) = g(x \pm Ct) = 0 \quad \text{se } |x| - Ct \geq R.$$

Mas, se $|x| - Ct \geq R$ então $|x| \geq R + Ct$. Assim,

$$\begin{cases} x \geq R + Ct, & x \geq 0 \\ -x \geq R + Ct, & x < 0 \end{cases}$$

ou, ainda

$$\begin{cases} x - Ct \geq R, & x \geq 0 \\ x + Ct \leq -R, & x < 0. \end{cases}$$

Então para $s \in [x - Ct, x + Ct]$, resulta que

$$\begin{cases} s \leq x + Ct \leq -R, & x < 0 \\ s \geq x - Ct \geq R, & x \geq 0 \end{cases}$$

Logo, $g(s) = 0$ se $x < 0$ e também $g(s) = 0$ se $x \geq 0$.

Portanto

$$\int_{x-Ct}^{x+Ct} g(s)ds = 0$$

se $|x| - Ct \geq R, \quad t > 0$.

Podemos concluir da fórmula de D'Alembert que

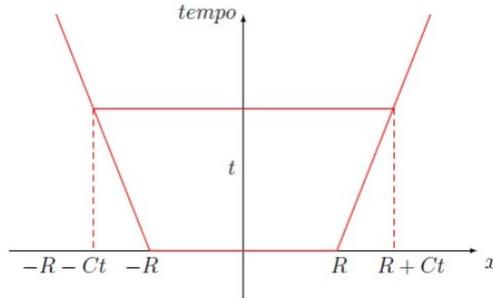
$$u(x, t) = 0 \quad \text{se} \quad |x| - Ct \geq R$$

se

$$\text{supp}(f), \text{supp}(g) \subset [-R, R],$$

sendo $\text{supp}(z) = \text{fecho do conjunto } \{x \in \mathbb{R} \mid z(x) \neq 0\}$.

Essa propriedade de que $u(x, t)$ anula para $|x| \geq Ct + R$ se o suporte dos dados iniciais está na bola $|x| \leq R$ é chamada de Velocidade Finita de Propagação.

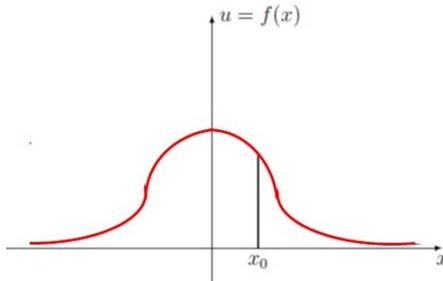


Interpretação física/geométrica

Considere o seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x, 0) = f(x) \\ u_t(x, 0) = g(x) \equiv 0. \end{cases}$$

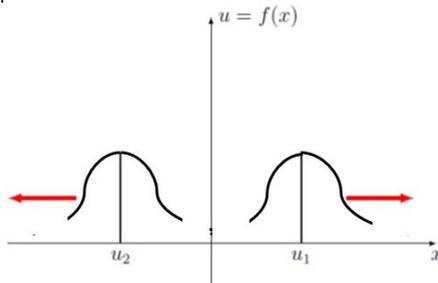
Propagação da onda em \mathbb{R} com posição inicial f e velocidade inicial $g \equiv 0$.



A solução desse problema é dada por:

$$u(x, t) = \frac{f(x - ct) + f(x + ct)}{2} = \frac{f(x - ct)}{2} + \frac{f(x + ct)}{2} = u_1 + u_2.$$

Para esse problema, o perfil da onda para $t > 0$ é descrito na figura a seguir:



$u_1 = f(x - ct)/2$ é chamada a onda do futuro ou onda progressiva.

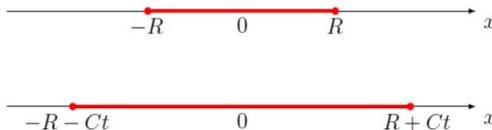
$u_2 = f(x + ct)/2$ é a onda do passado ou onda regressiva.

Ambas viajam com velocidade $c > 0$.

Teorema 4.3 (*Velocidade Finita de Propagação*)

Se $\text{supp}(f), \text{supp}(g)$ estão contidos no intervalo de raio $R > 0 : [-R, R]$ então o $\text{supp}(u(\cdot, t))$, está contido no intervalo de raio $R + ct : [-R - ct, R + ct]$.

Assim, o Teorema diz que se os dados iniciais estão suportados no intervalo $|x| \leq R$ então a solução no tempo t está suportada no intervalo $|x| \leq R + ct$.



Assim, a onda inicial propagou no espaço ct unidades, no tempo t . Mas a derivada do "deslocamento ct " em relação ao tempo t é velocidade, isto é:

$$\frac{d}{dt}(ct) = c.$$

Logo c tem realmente dimensão de velocidade, é a velocidade em que a onda propaga.

4.2 Regularidade da Solução

A solução da equação unidimensional da onda com dados iniciais

$$u(x, 0) = f(x) \quad \text{e} \quad u_t(x, 0) = g(x)$$

é dada, como vimos, pela Fórmula de D'Alembert

$$u(x, t) = \frac{f(x - ct) + f(x + ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(s) ds.$$

Para que $u(x, t)$ seja solução da equação da onda $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$ é necessário que $u(x, t)$ seja de classe C^2 . Para isso precisa que $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$ e $g \in C^1(\mathbb{R}^2)$. Note que a fórmula para $u(x, t)$ vale para $x \in \mathbb{R}$ e $t \in \mathbb{R}$. Ou seja, a equação da onda é reversível no tempo, podemos calcular para tempos negativos.

Portanto, a solução da equação da onda mantém a regularidade dos dados iniciais. Logo, a equação da onda não tem propriedade de efeito regularizante.

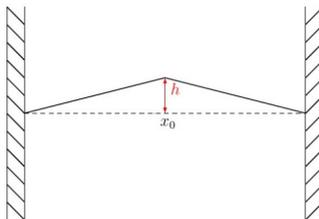
4.3 Equação da Onda em Domínios Limitados

4.3.1 Problemas físicos

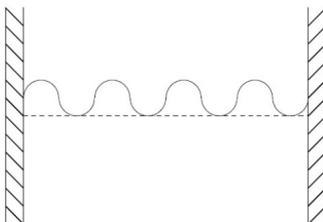
a) Vibrações de uma corda de material metálico (ou não) tensionada de comprimento $L > 0$.



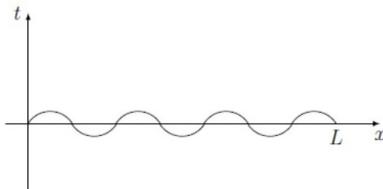
Supor que a corda é "puxada" tipo corda de violão e depois solta:



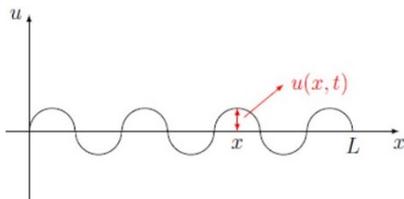
A corda vibrará e qual será o perfil da corda em um tempo $t > 0$?



O perfil da onda em um tempo $t > 0$ é dado por uma função $u = u(x, t)$.



Para a dedução do modelo da corda "puxada" colocamos a corda sobre o intervalo $[0, L]$ do eixo x . O eixo y mede os deslocamentos verticais da corda dada por $u(x, t)$.



O problema a resolver é:

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, & 0 < x < L, t > 0 \\ u(0, t) = 0 = u(L, t) \\ u(x, 0) = f(x) \\ u_t(x, 0) = g(x) \equiv 0 \\ u = u(x, t). \end{cases} \quad (4.6)$$

onde $f(x)$ é a posição inicial da corda no tempo $t = 0$ e $g(x)$ é a velocidade inicial em cada ponto x . Aqui $g(x) \equiv 0$ para a corda puxada e f é dada por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{h}{x_0}x, & 0 \leq x \leq x_0 \\ \frac{L-x}{L-x_0}h, & x_0 \leq x \leq L. \end{cases}$$

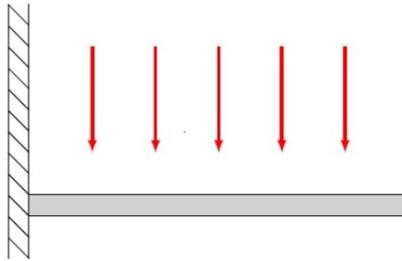
Se resolver o problema mais geral

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, & 0 < x < L, t > 0 \\ u(0, t) = 0 = u(L, t) \\ u(x, 0) = f(x) \\ u_t(x, 0) = g(x) \end{cases} \quad (4.7)$$

se obtém a solução do problema (4.6).

O problema (4.7) modela as vibrações transversais de uma corda tensionada com perfil inicial $f(x)$ e velocidade inicial das vibrações transversais de um ponto x da corda dada por $g(x)$.

b) Problema de uma viga engatada de comprimento L .

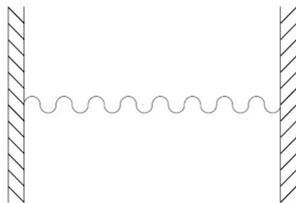


Essa viga pode sofrer uma carga e começar a vibrar. Se no tempo $t = 0$ seu perfil inicial é dado por uma função f e se as vibrações iniciais do ponto x estão sujeitas a uma velocidade inicial g , devemos resolver o problema:

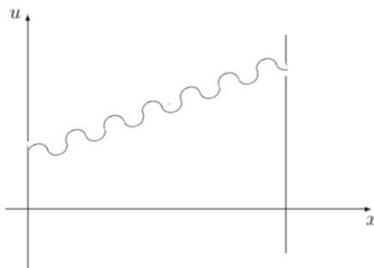
$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, & 0 < x < L, t > 0 \\ u(0, t) = 0 = u_x(L, t). \\ u(x, 0) = f(x) \\ u_t(x, 0) = g(x) \\ u = u(x, t). \end{cases} \quad (4.8)$$

Observação 4.4 *Notar que o ponto $x = L$ pode vibrar.*

c) Corda tensionada com extremidades correndo sobre um trilho.



Perfil da corda em um tempo $t > 0$



A inclinação é nula em $x = 0$ e $x = L$. Condição de Neumann
 $u_x(0, t) = u_x(L, t) = 0$

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, & 0 < x < L, t > 0 \\ u_x(0, t) = 0 = u_x(L, t) \\ u(x, 0) = f(x) \\ u_t(x, 0) = g(x) \\ u = u(x, t). \end{cases} \quad (4.9)$$

Observação 4.5 Para os problemas anteriores, usar a solução geral da equação da onda

$$u(x, t) = F(x - ct) + G(x + ct)$$

não nos traz a solução.

Para problemas em domínios limitados tipo $[0, L]$ se usa o método de Fourier de separação de variáveis e expansão em autofunções.

4.3.2 Método de Fourier e expansão em autofunções

No capítulo 1, estudamos o seguinte teorema.

Teorema 4.6 (*Fourier*)

a) Se $f : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função de classe $C^1(\mathbb{R})$ então se pode escrever f em uma Série de Fourier em cossenos da forma:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{L}$$

com

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(s) \cos \frac{n\pi s}{L} ds$$

com a série convergindo uniformemente, sob adequadas condições de regularidade em f .

b) Se $f : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$, é de classe $C^1(\mathbb{R})$ e $f(0) = f(L)$ então se pode representar f na forma de uma Série de Fourier em senos:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}$$

com

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(s) \operatorname{sen} \frac{n\pi s}{L} ds.$$

O Teorema de Fourier é útil para resolver problemas envolvendo a equação da onda em intervalos do tipo $[0, L]$ combinado com o método de Fourier de separação de variáveis e expansão em autofunções.

Problema modelo 1: Resolver pelo Método de Fourier de separação de variáveis e expansão em autofunções o seguinte problema.

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, & 0 < x < L, t > 0 \\ u(0, t) = 0 = u(L, t) \\ u(x, 0) = f(x), u_t(x, 0) = g(x) \\ u = u(x, t). \end{cases} \quad (4.10)$$

com f e g dados satisfazendo condições de compatibilidade: $f(0) = f(L) = 0$.

Agora, vamos aplicar o método de separação de variáveis para resolver problemas de valor inicial e de contorno para a equação da onda.

Exemplo 4.7 *Encontrar uma solução para o problema de valor inicial e de contorno associado com a equação da onda, como segue*

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = 0, & 0 < x < L, \quad t > 0 \\ u(x, 0) = \phi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \psi(x), & 0 < x < L \\ u(0, t) = u(L, t) = 0, & t > 0. \end{cases} \quad (4.11)$$

Resolução:

Vamos resolver usando o método de Fourier de separação de variáveis e expansão em autofunções. Seguindo esse método procuramos soluções de EDP na forma

$$U(x, t) = X(x)T(t).$$

Substituindo na equação obtemos:

$$X(x)T''(t) = a^2 X''(x)T(t).$$

Queremos soluções não trivial, então devemos supor que X e T não são idênticamente nulos. Dividindo ambos os lados por $a^2 X(x)T(t)$ obtemos:

$$\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}.$$

Mas a igualdade de funções em variáveis diferentes implica que são constantes. Logo

$$\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = \text{constante} = -\lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R}. \quad (4.12)$$

O sinal de menos é por conveniência.

Então obtemos:

$$\begin{cases} T''(t) + \lambda a^2 T(t) = 0, & t > 0 \\ X''(x) + \lambda X(x) = 0, & 0 < x < L. \end{cases}$$

Devemos achar soluções dessas EDO's. Porém é melhor antes impor sobre a solução $U(x, t)$ as condições de contorno. Isso vai ajudar no cálculo de X .

Então temos

$$U(0, t) = X(0)T(t) = 0.$$

Como queremos $T(t) \neq 0$ deve-se ter que $X(0) = 0$. Da condição

$$U(L, t) = X(L)T(t) = 0$$

devemos ter $X(L) = 0$.

Assim, $X = X(x)$ deve ser solução do problema

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0, & 0 < x < L \\ X(0) = X(L) = 0. \end{cases}$$

Esse problema é chamado de problema de autovalores (PA). Devemos achar λ e $X = X_\lambda$ solução com $X_\lambda \neq 0$. A constante λ é chamada de autovalor e X_λ de autofunção.

Como o problema da onda é um problema real, $X(x)$ deve ser função real. Assim λ deve ser também real.

Vamos estudar as possibilidades:

Caso $\lambda < 0$: Neste caso a solução geral de $X''(x) + \lambda X(x) = 0$ é

$$X_\lambda(x) = C_1 e^{\sqrt{|\lambda|x}} + C_2 e^{-\sqrt{|\lambda|x}}.$$

Impondo que $X(0) = 0$ e $X(L) = 0$ temos

$$\begin{aligned} 0 &= X(0) = C_1 + C_2 \\ 0 &= X(L) = C_1 e^{\sqrt{|\lambda|}L} + C_2 e^{-\sqrt{|\lambda|}L}. \end{aligned}$$

Isso diz que

$$C_1 e^{\sqrt{|\lambda|}L} = C_1 e^{-\sqrt{|\lambda|}L}$$

com $|\lambda| > 0$.

Se $C_1 \neq 0$ resulta $e^{2\sqrt{|\lambda|}L} = 0$ que é um absurdo.

Logo, $C_1 = 0$ e portanto $C_2 = 0$.

Concluimos que se $\lambda < 0$ então $X_\lambda \equiv 0$.

Então para $\lambda < 0$ não tem solução não trivial. Então $\lambda < 0$ não é autovalor.

Caso $\lambda = 0$: Nesse caso o problema fica

$$\begin{cases} X''(x) = 0, & 0 < x < L \\ X(0) = X(L) = 0. \end{cases}$$

A solução de $X''(x) = 0$ é $X(x) = C_1x + C_2$.

Impondo que $X(0) = X(L) = 0$ resulta

$$0 = X(0) = (C_1x + C_2)_{x=0} = C_2.$$

Logo, $C_2 = 0$, resulta $X(x) = C_1x$.

Mas

$$0 = X(L) = C_1x|_{x=L} = C_1L.$$

Portanto, $C_1 = 0$.

Assim, $X \equiv 0$. portanto $\lambda = 0$ não é autovalor.

Caso $\lambda > 0$: Neste caso a solução geral de $X''(x) + \lambda X(x) = 0$ é

$$X(x) = C_1 \cos(\sqrt{\lambda}x) + C_2 \sin(\sqrt{\lambda}x).$$

Impondo as condições de contorno:

$$0 = X(0) = C_1$$

$$0 = X(L) = C_1 \cos(\sqrt{\lambda}L) + C_2 \sin(\sqrt{\lambda}L) = C_2 \sin(\sqrt{\lambda}L).$$

Assim, devemos ter $C_2 \sin(\sqrt{\lambda}L) = 0$.

Para obter alguma possibilidade de solução não trivial, devemos impor que $C_2 \neq 0$. Então precisamos que

$$\text{sen}(\sqrt{\lambda}L) = 0,$$

ou que $\sqrt{\lambda}L = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, $k \neq 0$. Isso diz que

$$\lambda = \frac{k^2\pi^2}{L^2}, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad k \neq 0.$$

Mas, k e $-k$ produzem o mesmo λ ou mesmo $X(x)$. Logo,

$$\lambda = \lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{L^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Para λ_n a autofunção associada é

$$X(x) = X_n(x) = C_2 \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad C_2 \neq 0.$$

Vamos considerar $C_2 = 1$. Assim, a solução do (PA) é:

$$\begin{cases} X_n(x) = \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right), & x \in \mathbb{R} \\ \lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{L^2}, & n = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

Agora para $\lambda = \lambda_n$ devemos resolver a equação

$$T''(t) + \lambda a^2 T(t) = 0, \quad t > 0.$$

Essa equação tem solução geral para qualquer $\lambda \in \mathbb{R}$, mas para $\lambda \neq \lambda_n$ não interessa. A solução de

$$T''(t) + \lambda_n a^2 T(t) = 0, \quad t > 0$$

é dada por

$$T(t) = T_n(t) = A_n \cos(a\sqrt{\lambda_n}t) + B_n \text{sen}(a\sqrt{\lambda_n}t)$$

ou

$$T_n(t) = A_n \cos\left(\frac{n\pi c}{L} t\right) + B_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi c}{L} t\right).$$

Portanto, são soluções da EDP no problema modelo e das condições de contorno

$$\begin{aligned} U(x, t) &= U_n(x, t) \\ &= \left(A_n \cos\left(\frac{n\pi c}{L} t\right) + B_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi c}{L} t\right) \right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \end{aligned}$$

para $n = 1, 2, 3, \dots$

Resta impor as condições iniciais. Notamos que

$$\phi(x) = U(x, 0) = A_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right).$$

A igualdade somente será verdadeira se ϕ for do tipo seno.

Para atender as condições iniciais, vamos considerar a superposição de soluções:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} U_n(x, t) & (4.13) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n \cos\left(\frac{an\pi}{L} t\right) + B_n \operatorname{sen}\left(\frac{an\pi}{L} t\right) \right] \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right). \end{aligned}$$

Agora impondo a condição inicial

$$\phi(x) = u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad 0 \leq x \leq L.$$

Neste caso, da teoria de Séries de Fourier segue que

$$A_n = \frac{2}{L} \int_0^L \phi(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx. \quad (4.14)$$

Agora impondo a outra condição inicial tem-se que

$$\begin{aligned}\psi(x) &= u_t(x, 0) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[-A_n \frac{an\pi}{L} \operatorname{sen}\left(\frac{an\pi}{L}t\right) + B_n \frac{an\pi}{L} \cos\left(\frac{an\pi}{L}t\right) \right]_{t=0} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{an\pi}{L} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right).\end{aligned}$$

Novamente, pela teoria de Séries de Fourier devemos ter

$$B_n \frac{an\pi}{L} = \frac{2}{L} \int_0^L \psi(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

ou

$$B_n = \frac{2}{an\pi} \int_0^L \psi(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx. \quad (4.15)$$

Logo, a solução do problema modelo é dada pela série (4.13) com A_n e B_n dados por (4.14) e (4.15).

Problema modelo 2: Encontrar uma solução para o problema de valor inicial e de contorno do tipo Neumann associado à equação da onda:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = 0, \quad 0 < x < L, \quad t > 0 \\ u(x, 0) = \phi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \psi(x), \quad 0 < x < L \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = 0, \quad t > 0. \end{array} \right. \quad (4.16)$$

Resolução:

Pelo método de separação de variáveis vamos procurar uma solução U da forma:

$$U(x, t) = X(x)T(t).$$

Derivando a função U tem-se que:

$$\begin{aligned}U_{tt}(x, t) &= X(x)T''(t) \\ U_{xx}(x, t) &= X''(x)T(t).\end{aligned}$$

Substituindo na equação:

$$X(x)T''(t) = a^2X''(x)T(t).$$

Dividindo ambos os lados por $a^2X(x)T(t)$ obtemos:

$$\frac{T''(t)}{a^2T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}.$$

Da igualdade acima conclui-se que:

$$\frac{T''(t)}{a^2T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R}. \quad (4.17)$$

Pelas condições de contorno:

$$\begin{aligned}U_x(0, t) &= X'(0)T(t) = 0 \\ U_x(L, t) &= X'(L)T(t) = 0,\end{aligned}$$

assim $X'(0) = X'(L) = 0$ pois se $T(t) = 0$ teríamos $U(x, t) = 0$, o que seria verdadeiro somente se $\phi(x) = \psi(x) = 0$. Sendo assim, vamos procurar soluções não nulas.

Dessa forma, considerando (4.17) temos as seguintes EDOs:

$$T''(t) = \lambda a^2 T(t) \quad (4.18)$$

e

$$\begin{cases} X''(x) = \lambda X(x) \\ X'(0) = X'(L) = 0. \end{cases} \quad (4.19)$$

Vamos resolver primeiramente a equação (4.19). A equação característica é:

$$r^2 = \lambda.$$

Caso $\lambda > 0$: Se $\lambda > 0$ a solução geral da equação (4.19) é:

$$X(x) = C_1 e^{\sqrt{\lambda}x} + C_2 e^{-\sqrt{\lambda}x}$$

Logo,

$$X'(x) = C_1 \sqrt{\lambda} e^{\sqrt{\lambda}x} - C_2 \sqrt{\lambda} e^{-\sqrt{\lambda}x}.$$

Usando as condições de contorno: $X'(0) = C_1 \sqrt{\lambda} - C_2 \sqrt{\lambda} = 0$.
Substituindo $C_1 = C_2$ e $x = L$ temos

$$X'(L) = C_1 \sqrt{\lambda} e^{\sqrt{\lambda}L} - C_1 \sqrt{\lambda} e^{-\sqrt{\lambda}L}$$

Assim,

$$C_1 e^{\sqrt{\lambda}L} = C_1 e^{-\sqrt{\lambda}L}.$$

Como a exponencial é uma função injetiva da igualdade acima concluímos que $C_1 = 0$. Logo, $C_2 = 0$ e a solução da equação (4.19) com $\lambda > 0$ é a solução nula.

Caso $\lambda = 0$: Se $\lambda = 0$ a solução geral da equação (4.19) é:

$$X(x) = C_1 + C_2 x \quad \Rightarrow \quad X'(x) = C_2.$$

Pelas condições de contorno:

$$X'(0) = C_2 = X'(L) = 0.$$

Assim, se $C_1 \neq 0$ concluímos que $X(x) = C_1$ é uma solução não nula da equação (4.19). Vamos tomar $C_0 = C_1 = 1/2$ por conveniência com a série de Fourier em cossenos.

Caso $\lambda < 0$: Se $\lambda < 0$ a solução geral da equação (4.19) é:

$$X(x) = C_1 \cos(\sqrt{-\lambda}x) + C_2 \sin(\sqrt{-\lambda}x)$$

Logo,

$$X'(x) = -C_1 \sqrt{-\lambda} \sin(\sqrt{-\lambda}x) + C_2 \sqrt{-\lambda} \cos(\sqrt{-\lambda}x).$$

Pelas condições de contorno:

$$\begin{aligned}X'(0) &= C_2\sqrt{-\lambda} = 0 \quad \text{ou seja,} \quad C_2 = 0 \\X'(L) &= -C_1\sqrt{-\lambda} \operatorname{sen}(\sqrt{-\lambda}L) = 0.\end{aligned}$$

Nesse caso, para obtermos soluções não nulas devemos ter:

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(\sqrt{-\lambda}L) &= 0 \\ \Rightarrow \sqrt{-\lambda}L &= n\pi, \quad n \in \{1, 2, 3, \dots\} \\ \Rightarrow \lambda &= -\frac{n^2\pi^2}{L^2}, \quad n \in \{1, 2, 3, \dots\}.\end{aligned}$$

Assim, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $\lambda_n = -\frac{n^2\pi^2}{L^2}$ tal que o problema de autovalores (4.19) tem uma solução não nula, a saber

$$X_n(x) = \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

onde escolhemos $C_n = 1$ para $n = 1, 2, 3, \dots$ e a função constante

$$X_0(x) = 1/2$$

correspondente ao autovalor $\lambda_0 = \lambda = 0$.

Então, para cada $n = 1, 2, 3, \dots$ a equação (4.18) com $\lambda = \lambda_n$ tem uma solução geral da forma

$$T_n(t) = A_n \cos(a\sqrt{-\lambda_n}t) + B_n \operatorname{sen}(a\sqrt{-\lambda_n}t)$$

e

$$T_0(t) = A_0 + B_0 t$$

correspondente ao autovalor $\lambda_0 = 0$.

Portanto, para cada $n = 1, 2, 3, \dots$:

$$\begin{aligned}U_n(x, t) &= X_n(x)T_n(t) && (4.20) \\ &= \left(A_n \cos(a\sqrt{-\lambda_n}t) + B_n \operatorname{sen}(a\sqrt{-\lambda_n}t)\right) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\end{aligned}$$

é uma solução da onda e satisfaz as condições de contorno, onde $\sqrt{-\lambda_n} = \frac{n\pi}{L}$, $n \in \mathbb{N}$. Também a solução

$$U_0(x, t) = 1/2(A_0 + B_0 t)$$

satisfaz a EDP e as condições de contorno.

O passo seguinte é a determinação das constantes A_n e B_n , de modo que, $U(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} U_n(x, t)$ seja solução do problema de valor inicial e de contorno.

Usando o princípio da superposição, mostra-se que a série

$$U(x, t) = \frac{1}{2}A_0 + \frac{1}{2}B_0 t \tag{4.21}$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n \cos\left(\frac{an\pi}{L}t\right) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + B_n \operatorname{sen}\left(\frac{an\pi}{L}t\right) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right]$$

é solução da equação e satisfaz a condição de contorno, desde que os dados iniciais ϕ e ψ sejam suficientemente regulares.

Para que U satisfaça a condição inicial $U(x, 0) = \phi(x)$ devemos ter:

$$\phi(x) = U(x, 0) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right),$$

e portanto,

$$A_n = \frac{2}{L} \int_0^L \phi(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

ou seja, ϕ deve ter uma expansão em série de Fourier em cossenos.

Logo para o problema ficar resolvido, resta calcular os coeficientes B_n .

Para que U satisfaça a condição inicial $U_t(x, 0) = \psi(x)$ devemos determinar as constantes B_n . Derivando (4.21) termo a termo:

$$U_t(x, t) = \frac{B_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[-\frac{an\pi}{L} A_n \operatorname{sen}\left(\frac{an\pi}{L}t\right) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + \frac{an\pi}{L} B_n \cos\left(\frac{an\pi}{L}t\right) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right].$$

Agora aplicamos a segunda condição inicial,

$$\psi(x) = U_t(x, 0) = \frac{B_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{an\pi}{L} B_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

e portanto da teoria de séries de Fourier, temos que

$$B_n = \frac{2}{n\pi a} \int_0^L \psi(x) \cos \frac{n\pi x}{2} dx, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

ou seja, ψ deve ter uma expansão em série de Fourier em cossenos.

Isso conclui a obtenção da solução do segundo problema modelo o qual envolve condições de fronteira do tipo Neumann.

Observação 4.8 Problema de Neumann é Ressonante

Notamos que a solução do último problema envolvendo a equação da onda com condição de fronteira de Neumann é ressonante, isto é,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} u(x, t) = +\infty$$

para cada x real fixado, desde que $B_0 \neq 0$ (ou que ψ não tenha média zero no intervalo $[0, L]$).

Isso pode ser visto facilmente tomando limite na solução dada em (4.21).

Capítulo 5

Equação do Calor

A equação do calor é importante para resolver problemas de distribuição de temperaturas em um sólido do \mathbb{R}^n feito de material difusor de calor, isto é, com difusibilidade térmica $k > 0$ (k depende do tipo de material, por exemplos, Prata $k = 1,71$, Cobre $k = 1,14$, Alumínio $k = 0,86$, Ferro Fundido $k = 0,12$, Granito $k = 0,011$). Nosso interesse, neste trabalho, é em problemas unidimensionais. Neste caso, a equação do calor (ver o livro de Berg-McGregor [2]) é dada por

$$\frac{\partial u}{\partial t} - k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = q(x, t, u)$$

onde q é uma função que introduz ou retira calor da barra unidimensional (q fonte ou sumidouro).

Notamos que ' q ' pode ou não depender de u . Por exemplo, $q = q(x, t)$ ou $q(x, t, u) = u^3$.

Nosso interesse é somente no caso $q \equiv 0$, pois sabendo resolver com $q \equiv 0$ podemos resolver com $q \neq 0$ pelo método de variações de parâmetros.

Os resultados deste capítulo também podem ser vistos no livro de Figueiredo [1] ou no de Berg-McGregor [2].

5.1 Equação do Calor em Domínios Limitados

Vamos aplicar o método de separação de variáveis para resolver o problema de valor inicial e de contorno para a equação do calor no intervalo $[0, L]$.

Exemplo 5.1 *Encontrar a distribuição de calor numa barra fina de comprimento L , com superfície lateral isolada, cujos extremos são mantidos a temperatura zero e que no instante inicial de tempo $t = 0$ tenha temperatura dada pela função $\phi(x)$, ou seja, resolver:*

$$\begin{cases} u_t - ku_{xx} = 0, & 0 < x < L, t > 0 \\ u(0, t) = 0 = u(L, t) \\ u(x, 0) = \phi(x). \end{cases} \quad (5.1)$$

Resolução:

Para esse problema, vamos aplicar o método de Fourier. Como vimos para a equação da onda o método de separação de variáveis consiste em procurar uma solução U da forma:

$$U(x, t) = X(x)T(t).$$

Derivando a função U tem-se que:

$$\begin{aligned} U_t(x, t) &= X(x)T'(t) \\ U_{xx}(x, t) &= X''(x)T(t). \end{aligned}$$

Substituindo na equação:

$$X(x)T'(t) - kX''(x)T(t) = 0.$$

Separando as variáveis e dividindo ambos os lados por $X(x)T(t)$ obtemos

$$\frac{T'(t)}{kT(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}.$$

Da igualdade acima conclui-se que:

$$\frac{T'(t)}{kT(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R}. \quad (5.2)$$

Pelas condições de contorno:

$$\begin{aligned} U(0, t) &= X(0)T(t) = 0 \\ U(L, t) &= X(L)T(t) = 0, \end{aligned}$$

devemos ter $X(0) = X(L) = 0$ pois se $T(t) = 0$ teríamos $U(x, t) = 0$, o que seria verdadeiro somente se $\phi(x) = 0$. Sendo assim, vamos procurar soluções não nulas.

Dessa forma, considerando (5.2) temos as seguintes EDOs:

$$T'(t) + \lambda kT(t) = 0 \quad (5.3)$$

e

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ X(0) = X(L) = 0. \end{cases} \quad (5.4)$$

Vamos resolver primeiramente o problema de autovalor (5.4).

Esse problema já foi resolvido para o problema modelo 1 para a Equação da Onda.

Foi visto que o problema (5.4) somente tem solução para autovalores $\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{L^2}$ associados às autofunções

$$X_n(x) = \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Além disso, para cada λ_n a equação (5.3) para $T(x)$ tem uma solução na forma:

$$T_n(t) = e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}kt}, \quad t > 0$$

(estamos considerando a constante igual a 1).

Portanto, para cada $n = 1, 2, 3, \dots$

$$U_n(x, t) = X_n(x)T_n(t) = e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}kt} \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad (5.5)$$

é solução da equação do calor e satisfaz as condições de contorno.

Falta encontrar uma solução que satisfaça a condição inicial. Usando o princípio da superposição, mostra-se que a série

$$U(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\frac{n^2 \pi^2}{L^2} kt} \operatorname{sen} \left(\frac{n \pi x}{L} \right)$$

é solução da equação e satisfaz a condição de contorno, sob adequadas condições em $\phi(x)$.

Para que U satisfaça a condição inicial devemos ter

$$\phi(x) = U(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \operatorname{sen} \left(\frac{n \pi x}{L} \right),$$

ou seja, ϕ deve ter uma expansão em série de Fourier em senos.

Portanto, sabemos de Séries de Fourier que

$$C_n = \frac{2}{L} \int_0^L \phi(x) \operatorname{sen} \left(\frac{n \pi x}{L} \right) dx.$$

Exemplo 5.2 *Encontrar a solução do seguinte problema:*

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = K \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t), & 0 < x < L, \quad t > 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = 0, & t > 0 \\ u(x, 0) = \phi(x), & 0 < x < L \end{cases}$$

onde $L > 0$, $K > 0$ e ϕ é uma função conhecida que satisfaz hipóteses apropriadas.

Resolução:

Pelo método de separação de variáveis, vamos procurar uma solução U como o produto de duas funções: uma dependendo somente de x e a outra somente de t :

$$U(x, t) = F(x) G(t).$$

Derivando e substituindo na equação concluímos que

$$\frac{G'(t)}{K G(t)} = \frac{F''(x)}{F(x)}. \quad (5.6)$$

Como o lado esquerdo depende somente de t e o lado direito somente de x , ambos devem ser constantes, ou seja,

$$\frac{G'(t)}{K G(t)} = \frac{F''(x)}{F(x)} = -\mu \quad (5.7)$$

com $\mu \in \mathbb{R}$ constante.

Da igualdade (5.7) tem-se:

$$G'(t) + K\mu G(t) = 0 \quad (5.8)$$

$$F''(x) + \mu F(x) = 0. \quad (5.9)$$

Pelas condições de contorno:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = F'(0).G(t) = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = F'(L).G(t) = 0$$

temos que $F'(0) = F'(L) = 0$.

1°. **Etapa:** Resolver o problema:

$$\begin{cases} F''(x) + \mu F(x) = 0 \\ F'(0) = F'(L) = 0. \end{cases}$$

Esse problema foi resolvido no problema modelo 2 para a Equação da Onda. A solução desse problema de autovalor é:

$$\begin{cases} \lambda_n = \frac{n^2 \pi^2}{L^2}, & n = 0, 1, 2, 3, \dots \\ F(n) = \cos \frac{n\pi x}{L}, & n = 1, 2, 3, \dots \\ F_0(x) = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

2°. **Etapa:** Resolver o problema:

$$G'(t) + K\mu G(t) = 0, \quad t > 0.$$

Para $\mu = \mu_n$ com $n \geq 0$ encontrado na etapa anterior, uma solução da equação é dada por:

$$G_n(t) = e^{-\mu_n kt} = e^{-\frac{\mu^2 \pi^2}{L^2} kt}, \quad t \geq 0.$$

Pelas etapas 1 e 2 a solução da equação diferencial é:

$$U(x, t) = \frac{B_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{-Kn^2 \pi^2 t/L^2} \cos\left(\frac{n\pi}{L} x\right).$$

Para concluirmos, falta encontrar os valores das constantes B_n que permitam satisfazer a condição inicial, ou seja,

$$\phi(x) = U(x, 0) = \frac{B_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos\left(\frac{n\pi}{L} x\right).$$

Assim, devemos ter que os B_n devem ser tais que

$$\phi(x) = \frac{B_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos\left(\frac{n\pi}{L} x\right),$$

isto é, a representação da série de Fourier de ϕ . onde:

$$B_n = \frac{2}{L} \int_0^L \phi(\xi) \cos\left(\frac{n\pi}{L} \xi\right) d\xi$$

com $n \geq 0$. Escolhendo $B_n = \phi_n$ temos que $U(x, 0) = \phi(x)$.

Portanto, a solução é dada por

$$u(x, t) = \frac{B_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{-Kn^2 \pi^2 t/L^2} \cos\left(\frac{n\pi}{L} x\right),$$

com B_n , $n \geq 0$, dados acima.

5.2 Propriedades da Equação do Calor na Reta

Quando se estuda problemas de calor em uma barra longa com material transmissor de calor com interesse em conhecer a evolução da temperatura, apenas na parte mais central da barra, pode-se estudar o problema de Cauchy

$$\begin{cases} u_t - ku_{xx} = 0, & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x, 0) = f(x) \end{cases} \quad (5.10)$$

com $k > 0$ a constante de difusibilidade térmica e $f(x)$ uma função limitada que indica a temperatura inicial da barra.

Esse problema tem a solução melhor do que se estudasse o problema no intervalo $[0, L]$ que precisaria de condições de contorno e a solução seria dada por uma série que fica mais difícil de estudar.

Para resolver esse problema vamos tentar o método de separação de variáveis.

Supor então que $u(x, t) = \varphi(x)\psi(t)$ com φ e ψ não identicamente nulas. Substituindo na Equação Diferencial Parcial em (5.10) resulta que

$$\varphi\psi' - k\varphi''\psi = 0, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0$$

ou seja,

$$\frac{\psi'}{\psi} - k\frac{\varphi''}{\varphi} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0$$

ou ainda,

$$\frac{\psi'}{k\psi} = \frac{\varphi''}{\varphi}, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0$$

Isso significa que

$$\frac{\psi'}{k\psi} = -\lambda = \frac{\varphi''}{\varphi}, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0$$

com o sinal $'-'$ por conveniência e λ uma constante a determinar.

Resulta que φ e ψ devem ser soluções de

$$\begin{cases} \psi' + \lambda k\psi = 0, & t > 0 \\ \varphi'' + \lambda\varphi = 0, & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

A solução geral da EDO em ψ é

$$\psi(t) = Ce^{-\lambda kt}, \quad t > 0$$

com C uma constante, a qual vamos tomar $C = 1$.

Como resolver a equação em φ ?

Não temos condições de contorno para impor. A solução depende do sinal de λ .

A equação característica é

$$r^2 + \lambda = 0 \quad \text{ou seja,} \quad r = \pm\sqrt{-\lambda}.$$

Se $\lambda < 0$ resulta que

$$\varphi(x) = Ae^{\sqrt{|\lambda|x}} + Be^{-\sqrt{|\lambda|x}}, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (5.11)$$

De acordo com a condição inicial, f é limitada, então a solução $u(x, t)$ deve ser limitada. Mas, φ dada por (5.11) não é limitada em x . Logo, $A = B = 0$ para que tenha limitação. Essa solução não interessa.

Portanto, vamos considerar $\lambda \geq 0$ que pode ser escrito como

$$\lambda = \xi^2, \quad \xi \in \mathbb{R}^+.$$

Assim, queremos $\varphi(x)$ solução de

$$\varphi'' + \xi^2\varphi = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \xi \geq 0 \text{ fixo.}$$

O polinômio característico para essa EDO é

$$r^2 + \xi^2 = 0$$

com raízes $r = \pm\sqrt{-\xi^2} = \pm i\xi$, $\xi \geq 0$.

Logo a solução geral $\varphi(x)$ da equação

$$\varphi'' + \xi^2 \varphi = 0$$

é

$$\varphi(x) = \varphi_\xi(x) = Ae^{i\xi x} + Be^{-i\xi x}.$$

Notar que A e B podem depender de ξ . Assim,

$$\varphi_\xi(x) = A(\xi)e^{i\xi x} + B(\xi)e^{-i\xi x}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \xi \geq 0 \text{ fixo.}$$

Portanto são soluções da EDP

$$u(x, t) = u_\xi(x, t) = (A(\xi)e^{i\xi x} + B(\xi)e^{-i\xi x})e^{-\xi^2 kt}, \quad \text{com } \xi \geq 0.$$

Notar que essa solução não atende a condição inicial $u(x, 0) = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Para atender a condição inicial, fazemos a superposição infinita generalizada

$$u(x, t) = \int_0^\infty u_\xi(x, t) d\xi.$$

Assim,

$$u(x, t) = \int_0^\infty [A(\xi)e^{i\xi x} + B(\xi)e^{-i\xi x}] e^{-\xi^2 kt} d\xi.$$

Fazendo a troca de variável $\xi \leftrightarrow -\xi$ na integral em $B(\xi)$ obtemos

$$u(x, t) = \int_0^\infty A(\xi)e^{i\xi x} e^{-\xi^2 kt} d\xi + \int_{-\infty}^0 B(-\xi)e^{i\xi x} e^{-\xi^2 kt} d\xi$$

ou

$$u(x, t) = \int_{\mathbb{R}} g(\xi)e^{i\xi x} e^{-\xi^2 kt} d\xi, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \quad (5.12)$$

com

$$g(\xi) = \begin{cases} A(\xi), & \xi \geq 0 \\ B(-\xi), & \xi < 0. \end{cases}$$

Impondo a condição inicial, temos

$$f(x) = u(x, 0) = \int_{\mathbb{R}} g(\xi) e^{i\xi x} d\xi, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (5.13)$$

Quem deve ser $g(\xi)$?

Sendo $f(x)$ dada por (5.13), que é uma expansão generalizada de $f(x)$ nas autofunções $\varphi_{\xi} = e^{i\xi x}$ do problema $\varphi'' + \xi^2 \varphi = 0$, φ limitada, com coeficientes $g(\xi)$, então $g(\xi)$ deve ser a projeção de f sobre o autoespaço de $\varphi_{\xi}(x)$.

Aqui, o produto interno é o de funções complexas dado pela integral, isto é,

$$(f(x), \varphi_{\xi}(x)) = \int_{\mathbb{R}} f(x) \overline{\varphi_{\xi}(x)} dx = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ix\xi} dx.$$

Mas, queremos $f(x) = \int_{\mathbb{R}} g(\eta) e^{ix\eta} d\eta$. Logo, calculamos

$$\begin{aligned} \lim_{a \rightarrow \infty} \int_{-a}^a f(x) e^{-ix\xi} dx &= \lim_{a \rightarrow \infty} \int_{-a}^a \left(\int_{\mathbb{R}} g(\eta) e^{ix\eta} d\eta \right) e^{-ix\xi} dx \\ &= \lim_{a \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} g(\eta) \left(\int_{-a}^a e^{ix(\eta-\xi)} dx \right) d\eta \\ &= \lim_{a \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} g(\eta) \frac{e^{ia(\eta-\xi)} - e^{-ia(\eta-\xi)}}{i(\eta-\xi)} d\eta \\ &= \lim_{a \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} g(\eta) 2a \frac{\text{sen}(\eta-\xi)a}{a(\eta-\xi)} d\eta. \end{aligned}$$

Fazendo a mudança de variável $r = a(\eta - \xi)$, temos

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} g\left(\xi + \frac{r}{a}\right) 2 \frac{\text{sen } r}{r} dr = \int_{\mathbb{R}} 2g(\xi) \frac{\text{sen } r}{r} dr.$$

Logo,

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ix\xi} dx = (f, \varphi_{\xi}) = 2 \int_{\mathbb{R}} g(\xi) \frac{\text{sen } r}{r} dr = 2g(\xi) \int_{\mathbb{R}} \frac{\text{sen } r}{r} dr.$$

Mas, sabemos do Cálculo que

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\operatorname{sen} r}{r} dr = \pi.$$

Logo,

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-ix\xi} dx = 2\pi g(\xi).$$

Portanto, trocando a variável de integração na expressão acima para não confundir com a variável x da solução $u(x, t)$, temos

$$g(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} f(y)e^{-iy\xi} dy. \quad (5.14)$$

A função $g(\xi)$ é chamada a transformada de Fourier de f . Note que g pode ser calculada se f for uma função boa, por exemplo, uma função integrável e absolutamente integrável.

Assim, temos calculado uma fórmula para a solução do problema (5.10).

Portanto, substituindo (5.14) em (5.12) obtemos uma candidata à solução de (5.10), ou seja,

$$u(x, t) = \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} f(y)e^{-iy\xi} dy \right) e^{i\xi x} e^{-\xi^2 kt} d\xi, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0.$$

Ou ainda,

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} f(y) \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-\xi^2 kt} e^{i\xi(x-y)} d\xi \right) dy.$$

A integral em ξ pode ser calculada explicitamente.

Definindo $\varphi(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\xi^2 kt} e^{i\xi x} d\xi$, sabemos do Cálculo 2 que

$$\varphi(0) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\xi^2 kt} d\xi = \sqrt{\frac{\pi}{kt}} \quad t > 0. \quad (5.15)$$

Calculando a derivada de φ , obtém-se uma EDO para φ de primeira ordem com condição $\varphi(0)$ dada por (5.15). Logo fica fácil ver que

$$\varphi(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\xi^2 kt} e^{i\xi x} d\xi = \sqrt{\frac{\pi}{kt}} e^{-\frac{x^2}{4kt}}, \quad t > 0.$$

Portanto,

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-\xi^2 kt} e^{i\xi(x-y)} d\xi = \sqrt{\frac{\pi}{kt}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4kt}}$$

e a solução é dada por

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} f(y) \sqrt{\frac{\pi}{kt}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4kt}} dy$$

ou ainda,

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4k\pi t}} \int_{\mathbb{R}} f(y) e^{-\frac{(x-y)^2}{4kt}} dy, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0.$$

Notar que essa $u(x, t)$ não pode ser calculada em $t = 0$, mas é fácil ver que (fazendo a mudança de variável $z = \frac{x-y}{\sqrt{4kt}}$)

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} u(x, t) = f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (5.16)$$

Assim, vamos definir $u(x, 0) = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

Também é fácil derivar $u(x, t)$ e ver que é solução da EDP do Calor. Notamos ainda que $u(x, t)$ pode ser derivável em qualquer ordem em x e $t > 0$. Assim, $u(x, t) \in C^\infty(\mathbb{R} \times (0, \infty))$.

Mas, por (5.16), sendo f contínua, segue que u é contínua em $t = 0$. Assim,

$$u \in C^\infty(\mathbb{R} \times (0, \infty)) \cap C(\mathbb{R} \times [0, \infty)). \quad (5.17)$$

Observar então que

$$u(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{4k\pi t}} \int_{\mathbb{R}} f(y) e^{-\frac{(x-y)^2}{4kt}} dy, & x \in \mathbb{R}, \quad t > 0 \\ f(x), & x \in \mathbb{R}, \quad t = 0 \end{cases} \quad (5.18)$$

é a solução de (5.10).

Notar que se $f = f(y)$, $y \in \mathbb{R}$, tem suporte compacto, isto é, a temperatura inicial é nula fora de um intervalo $[-R, R]$ e se $f(y) \geq 0$ é não nula, então $u(x, t) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, em cada tempo $t > 0$.

Assim, a perturbação da temperatura não nula no intervalo $[-R, R]$ se espalha imediatamente em toda a barra infinita em qualquer tempo $t > 0$.

Dizemos que a EDP do calor tem velocidade infinita de propagação.

A propriedade (5.17) é chamada de efeito regularizante da EDP do calor.

Observação 5.3 *Vamos provar que $\lim_{t \rightarrow 0^+} u(x, t) = f(x) \forall x \in \mathbb{R}$.*

Para provar, calculamos

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}} \int_{\mathbb{R}} f(y) e^{-\frac{(x-y)^2}{4kt}} dy.$$

Fazendo a mudança de variável $z = \frac{x-y}{\sqrt{4kt}}$ temos $dz = -\frac{dy}{\sqrt{4kt}}$,
 $y = -\infty \rightarrow z = +\infty$, $y = +\infty \rightarrow z = -\infty$, $y = -\sqrt{4kt}z + x$.

Logo,

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}} \int_{\infty}^{-\infty} f(x - \sqrt{4kt}z) e^{-z^2} (-\sqrt{4kt} dz) \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x - \sqrt{4kt}z) e^{-z^2} dz. \end{aligned}$$

Então, temos que

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0^+} u(x, t) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-z^2} dz \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} f(x) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2} dz \\ &= f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

o que prova a continuidade de $u(x, t)$ dada por (5.18).

Observação 5.4 A função $G(x, t) = \frac{e^{-\frac{x^2}{4kt}}}{\sqrt{4k\pi t}}$ é chamada o Núcleo do Calor ou a Função de Greem para a equação do calor.

Observamos finalmente que

$$u(x, t) = [f * G(\cdot, t)](x), \quad x \in \mathbb{R}, t > 0$$

onde $*$ indica a convolução em x de $f(x)$ com $G(x, t)$.

Observamos ainda que a convolução de f e g , funções definidas em \mathbb{R} , é dada por

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y)g(x - y) dy.$$

Conclusões

Nosso interesse principal foi estudar as propriedades das equações da onda e do calor. Para isso, foi necessário fazer uma revisão de alguns assuntos de Cálculo Diferencial envolvendo funções de várias variáveis, assim como séries numéricas e de funções. Estudamos problemas envolvendo EDPs em domínios limitados da reta e a série de Fourier. Fizemos um breve estudo de EDOs lineares e suas propriedades como superposição infinita de soluções.

Vimos que a Equação da Onda em \mathbb{R} tem velocidade finita de propagação e que a solução da Equação da Onda tanto em \mathbb{R} como em um intervalo $[0, L]$ tem no máximo a mesma regularidade dos dados iniciais $f(x)$ e $g(x)$. Dizemos que a Equação da Onda não tem propriedade regularizante.

O contrário acontece com a Equação do Calor que é do tipo parabólica. Apresenta propriedade de velocidade infinita de propagação e tem efeito regularizante. Também é fácil ver que a solução de problemas de calor em um intervalo $[0, L]$ apresenta efeito regularizante.

Essas propriedades são muito importantes no estudo de problemas envolvendo essas equações.

Referências Bibliográficas

- [1] Figueiredo, D. G., *Análise de Fourier e equações diferenciais parciais*, IMPA, Rio de Janeiro, 1977.
- [2] Berg, P. W. e McGregor, J. L., *Elementary Partial Differential Equations*, Holden Day, 1st edition, 1966.
- [3] Iório, V., *EDP: Um Curso de Graduação*, IMPA, Rio de Janeiro, 2 ed. 2001.
- [4] Marsden, J. e Weinstein, A., *Calculus*, Menlo Park California, USA, The Benjamin Publishing, 1980.
- [5] Matos, M. P., *Séries e Equações Diferenciais*, Prentice Hall, São Paulo, 2001.
- [6] Stewart, J., *Cálculo*, volume 2, Thomson Learning, São Paulo, 2007.
- [7] Zachmanoglou, E. T., *Introduction to Partial Differential Equations With Applications*. (Equações de 1a e 2a ordem).