Universidade Federal do Rio de Janeiro

Instituto de Matemática – IM/UFRJ

Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT

# A Matemática como motivação no ensino de Física.

Pedro de Oliveira Serpa

Orientadora: Drª Walcy Santos

12 de setembro de 2018

# A Matemática como motivação no ensino de Física.

Pedro de Oliveira Serpa

Orientadora: Drª. Walcy Santos

Dissertação de Mestrado apresentada

Programa DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

PROFMAT, do Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro UFRJ, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre, no Mestrado Profissional em Rede Nacional em Matemática.

Rio de Janeiro, 12 de setembro de 2018.

Agradecimentos

Existem pessoas que marcam a nossas vidas, que despertam algo especial em nós, que abrem nossos olhos de modo irreversível e transformam à nossa maneira de ver o mundo. Agradeço a todos os meus professores que tive ao longo da minha vida acadêmica. Os seus ensinamentos foram muito além dos conteúdos do currículo.

Tivemos aprendizados importantes para a vida. Souberam despertar a nossa admiração de um modo único, e se tornaram uma inspiração para nós. Muito obrigado pelas suas dedicações, paciência e carinho.

Quero agradecer de forma a todos os professores do PROFMAT UFRJ e dizer que foi uma honra estudar nesta instituição e de forma bem especial as Professoras: Walcy Santos, pela orientação e a Marisa Beatriz Bezerra Leal e Jeanne Denise Bezerra de Barros pelas sugestões.

E finalizando agradeço a minha esposa e filhas que me ajudaram a superar as dificuldades em relação ao tempo.

**Resumo**

Este trabalho apresenta inicialmente uma ideia de movimento de partículas, corpos, onde será evidenciada a importância dos conceitos matemáticos de conjuntos numéricos. A descrição do movimento se dará a partir da simples definição de velocidade, sendo consideradas suas posições, e evoluindo para uma, partindo do conhecimento de sua velocidade. E cada vez que se parte para uma exploração do comportamento mais próximo do real surge uma maior necessidade de conceitos matemáticos. Para melhor compreensão dos conceitos de forma intuitiva, o estudo traz uma apresentação gráfica que auxiliará nas deduções matemáticas, trata ainda, sobre a exploração de modelos físicos de grande importância. Entretanto, a sua validade é demonstrada com ferramentas de cálculo. E o uso de figuras, encontradas em meio eletrônico, visa mostrar a riqueza de recurso disponível nas webs. Finalizando com uma justificativa de cunho pedagógico a respeito do uso das novas tecnologias como um importante e fundamental recurso para auxiliar o processo educativo. Como recurso metodológico optou-se por pesquisa bibliográfica cujo levantamento teórico ocorreu com base em livros e artigos científicos disponíveis na *internet* e tem o intuito de auferir informações relevantes e colaborativas que influenciam novas reflexões e discussões sobre o uso de ferramentas de softwares adequadas às aplicações matemáticas.

Palavras-chave: movimento de partículas; intuitiva; recurso disponíveis nas webs

Abstract
This work presents initially an idea of the movement of particles, bodies, where the importance of the mathematical concepts of numerical sets will be evidenced. The description of the movement will take place from the simple definition of velocity, being considered its positions, and evolving to one, starting from the knowledge of its speed. And every time one starts to explore the behavior closest to the real, there arises a greater need for mathematical concepts. For a better understanding of the concepts in an intuitive way, the study presents a graphic presentation that will aid in the mathematical deductions, it also deals with the exploration of physical models of great importance. However, its validity is demonstrated with calculation tools. And the use of figures, found in electronic means, aims to show the wealth of resources available on the webs. Finishing with a pedagogical justification regarding the use of new technologies as an important and fundamental resource to aid the educational process. As a methodological resource, we opted for a bibliographic research whose theoretical survey was based on books and scientific articles available on the Internet and aims to obtain relevant and collaborative information that influence new reflections and discussions about the use of software tools suitable for mathematical applications.

Lista de ilustrações:

Sumário:

## Introdução

Neste trabalho apresentamos uma descrição do movimento de um corpo, um ponto material, ao longo de uma reta, de uma curva. Tem como valorização principal uma abordagem matemática, focada em conceitos e definições, onde o rigor, essencialmente ressalta a importância das demonstrações matemáticas para a caracterização e definição dos conceitos físicos; trazendo sempre, a possibilidade de encontrar e mostrar os conceitos usando ferramentas do curso de cálculo e bem como uma exploração da imagem com o uso de software. Para melhorar a exposição e tornarmos mais clara, utilizamos aplicativos gráficos que irão permitem várias alterações em poucos segundos. Nessa perspectiva, torna-se possível fazer adequações no modelo ao contexto do momento, seja uma aula, ou apresentação em geral, e ao mesmo tempo oferecer a possibilidade de variarmos o grau de dificuldade que se pretende propor, no caso específico ou exposição em geral.  É comum planejarmos algo que não atende ao público. Contrário a essa ideia, nossa intenção é resgatar uma proposta motivadora e dinâmica que possibilite alterar a trajetória conservadora e manter a atenção do público.

Inicialmente fazemos um breve relato sobre a importância das variáveis e da sua influência nos movimentos de corpos. Destacando a relevância da Matemática em seu tratamento e definição de sua trajetória, curva. Para tal abordamos alguns conceitos matemáticos como pré-requisito, tais como:

variáveis; conjuntos; definições e suas propriedades, surgindo a necessidade de mencionar as funções de variáveis contínuas e suas aplicações na Física, embora todos os exemplos que usamos nas exposições tradicionais sejam de variáveis racionais, permitindo, assim, melhor exploração e explicação de conceito Físicos. Algumas demonstrações surgem ao longo do trabalho para mostrar sua magnitude e valorização.

No caso das funções que representam a trajetória, iniciaremos simples, retas, e evoluiremos para parábola, circunferência e elipse, sempre as deduzindo e partindo das definições. Explorando suas propriedades e o seu gráfico. O domínio dos conceitos será alicerçado nas demonstrações e experimentação da validade das equações obtidas, sempre privilegiando o modo intuitivo de concluirmos nosso raciocínio.

Uma grande questão surge quando passamos a refletir sobre a Matemática enquanto motivação para o ensino de outros componentes curriculares e nos deparamos com uma ideia, fala, até mesmo de outros profissionais dentro das escolas onde essa disciplina é considerada com maior grau de dificuldade e pouco significado para a vida da maioria dos alunos, e assim, seu aprendizado é comprometido. Há ainda, os que citam não compreenderem a matemática. Tais afirmações causam estranheza diante dos argumentos apresentados anteriormente sobre aspectos de importância da aplicação da matemática. Isto não significa que estamos desprezando o seu caráter abstrato e formal, haja vista a sua grande importância na formação do raciocínio e da formação de uma consciência científica. Entretanto, na realidade existe uma concepção que impera no meio educacional que dissemina a ideia que a matemática é destinada às mentes brilhantes e que só alguns alunos conseguem alcançar o sucesso nessa disciplina, enquanto a grande maioria se mantém na mediocridade do conhecimento matemático.

E finalizamos com um justificava pedagógica para mostrar de forma contundente a importância do uso das tecnologias computacionais no Ensino de Matemática; tornando o uso da tecnologia como uma ferramenta auxiliar.

# CAPITULO 1

## Descrição de Movimentos.

Para fazer uma descrição de um movimento de um móvel são realizadas algumas simplificações. Várias dessas podem ser consideradas quase insignificantes, tais como as mudanças ocorridas na cor céu e as posições do sol, até as ondas luminosas, toda essa beleza é desconsiderada, e inclusive mesmo os ventos que podem influenciar, dependendo da forma do corpo, o movimento. Será considerado, muitas vezes, um corpo de forma ideal, isto é, é desconsiderada até as dimensões dele, e considera-se apenas um ponto, que será chamado de partícula, ponto material. Um automóvel embora possua um tamanho considerável, “grande”, muitas vezes é tratado com apenas um ponto que se desloca no espaço, por exemplo, em um deslocamento grande que comparativamente torna o seu tamanho pequeno. Sendo para que se possa analisar valorizar outras grandezas, por exemplo, a altura. Porém, em manobra de garagem, um pequeno deslocamento, ao fazer muita simplificação perderá toda precisão dos detalhes do fato.  As grandezas que influenciam de forma direta o movimento e podem ser influenciadas pela precisão das medidas, isto é, precisão dos instrumentos de medidas. Se não fizermos simplificações teremos uma função de muitas variáveis. Quanto maior o número considerado mais difícil será tratar o problema e mais precisa será a descrição, o julgamento da importância das variáveis dependerá da finalidade que se pretende, ou fim, objetivo, da descrição. Nos casos tratados nos livros didáticos, que tem uma finalidade pedagogia, são feitas muitas restrições e implicações para chegar a uma situação ideal, hipotética, onde se desconsideram várias variáveis que para torná-lo acessível aos alunos com uma matemática de menor rigor e complexidade.

A forma de se tratar os corpos onde sua dimensão não é desconsiderada, e este é considerado como um sistema de partículas, isto é, um sistema de pontos materiais. Em que são feitas considerações sobre os movimentos relativos das partículas, isto poderá ser feito observando o movimento do centro de massa do sistema. Outra forma será considerar como se fosse apenas um corpo rígido, onde a distância entre a partículas é constante, delimitando como se fosse um só corpo, dependendo do caso. Se houver necessidade de considerar o movimento de rotação do corpo será necessária uma abordagem mais elaborada.

Dependendo do sistema de eixos, referencial de observação do movimento, onde são feitas medidas em função do tempo. Portanto, o observador fixo no referencial inercial. Esta localização, referencial inercial, é considerada livres da ação de forças não têm o seu estado de movimento alterado, ou seja, corpos que não sofrem acelerações quando não existem forças resultantes atuando sobre eles, primeira lei de Newton ou lei da inercia. Os corpos estão parados, ou em movimento retilíneo uniforme, com velocidade constante, uns em relação aos outros. O estudo do movimento em um sistema de coordenadas, referencial, e a passagem para outro se dá por um tema da Física, chamado de Transformação de Galileu, que por ser descrito matematicamente por uma sequência simples de translações e reflexões em torno dos eixos coordenados. Para Galileu e também Newton, os sistemas gozam de propriedades que são expostas no princípio: dois observadores que se encontrem em sistemas inerciais, devem descrever as leis da Mecânica exatamente da mesma forma.

No que descrevemos, no tratamento, utilizam-se da Matemática como ferramenta para sua exploração e para alguns movimentos é exigido um maior domínio, “bagagem matemática”. Por exemplo, para uma pequena exploração da descrição dos movimentos dos planetas em torno do sol se faz necessário o conhecimento das equações da: circunferência, elipse e de suas propriedades. Portanto, faremos uma demonstração de suas equações partindo de suas definições e propriedades. Para mostrar a importância no contexto de Física faremos a demonstração da segunda lei que Kepler, uma usando produto vetorial e derivada, e outra usando apenas área e momento angular. A validade do modelo Físico, bem como a variedade de modelos, não faz parte do objetivo. Ele está na exploração dos conceitos matemáticos envolvidos, nas possiblidades de aplicações, na importância de se chegarmos aos resultados.

Embora seja usada uma Matemática acima do nível de conhecimento do público alvo, a apresentação gráfica permitirá um melhor entendimento, uma vez que as imagens facilitam a percepção e intuição. Portanto, o objetivo de despertar a curiosidade e interesse do aluno será atingido. E sempre após as aplicações, fazem-se as demonstrações e/ou definições dos conceitos envolvidos, para que se perceba a sua importância.

## 1.1 – O DISTANCIAMENTO DO ENSINO DE FÍSICA DA REALIDADE DO ALUNO.

Existe uma dificuldade muito grande em fazer uma aplicação dos conceitos matemáticos na física, pois a cultura do ensino de Física atrás de fórmulas que são apresentadas se nenhuma demonstração, "jogadas", e não deduzidas das definições. Portanto, a demonstração dar sentido as equações usadas na Física.

> O ensino de Física tem-se realizado frequentemente mediante a apresentação de conceitos, leis e fórmulas, de forma desarticulada, distanciados do mundo vivido pelos alunos e professores e não só, mas também por isso, vazios de significado. Privilegia a teoria e a abstração, desde o primeiro momento, em detrimento de um desenvolvimento gradual da abstração que, pelo menos, parta da prática e de exemplos concretos. Enfatiza a utilização de fórmulas, em situações artificiais, desvinculando a linguagem matemática que essas fórmulas representam de seu significado físico efetivo. Insiste na solução de exercícios repetitivos, pretendendo que o aprendizado ocorra pela automatização ou memorização e não pela construção do conhecimento através das competências adquiridas (Brasil, 2000, p.22).

Como exposto no texto acima, a desvinculação do ensino da realidade o torna pouco motivador ao aluno, menos prazeroso, perdendo sentido. Entretanto, a riqueza de detalhes necessários para uma descrição de um fenômeno física torna praticamente incompreensível para um aluno com uma pequena "bagagem matemática". Portanto, seria necessário fortalecermos o ensino de Matemática para ensinarmos Física de forma mais próxima do real.

### 1.1.1 – VARIÁVEIS USADAS NA FÍSICA.

O domínio das funções com as quais descrevemos os movimentos é o conjunto dos números reais. Entretanto, quando trabalhamos com exemplos físicos, no Ensino Médio, muitas vezes não nos preocupamos em salientar a importância das funções de variáveis discretas. Funções esta que em na maior das vezes são usadas para trabalhar como se fossem contínuas. Podemos destacar o tempo, como exemplo 14:15 e 14:16, que embora seja contínuo, quando usamos um relógio digital observamos que não existe um valor entre eles. Portanto estamos tratando como uma variável discreta.  Entretanto, entre 14:15 e 14:16 estamos falando de" tempo" estamos falando de uma variável continua. A importância de definirmos as variáveis que iremos trabalhar se deve a fato de que o surgiu do fato que as leis de formação de modelos físicos provem de experimentos e temos que trata-los. Segundo

> [...] todas as leis, pois, provêm da experiência, mas para enunciá-la é preciso uma linguagem especial; a linguagem corrente é demasiado pobre, e aliás muito vaga para exprimir relações tão delicadas, tão ricas e tão preciosas. Eis, portanto uma primeira razão pela qual o físico não pode prescindir da matemática; ela lhe fornece a única linguagem que ele pode falar (POINCARÉ, 1995, p. 91).

Com os estudos de movimento de partículas em uma trajetória retilínea, o conceito de proporcionalidade, continuidade será necessário. Entretanto, quando vamos ao quadro ficamos, em geral em aula expositiva, com valores discretos. Portanto, existe uma necessidade de salientar a importância do conceito e desta forma empregamos vários conceitos matemáticas de muita sutiliza.

### 1.1.2 – CONJUNTO DOS NÚMEROS REAIS.

O Conjunto dos números racionais que é denso nos reais traz um melhor entendimento no estudo, tratamento, de fenômenos físicos e desta forma tornando o conceito extremamente importante. Portanto, a necessidade de conhecermos suas definições e propriedades nos reais, e os reais.

Densidade no conjunto em $R$.

Definição: (bola aberta) Dados o ponto a $\in R^n$ e o número real positivo $\delta$, a bola aberta de centro a e raio $\delta$ é o conjunto dos pontos x $\in R^n$ cuja distância ao ponto a é estritamente menor que $\delta$ , denotamos por

$$Ɓ(a, \delta) = \{x \in R^n : \quad |x - a| < \delta\}.$$

Definição: (Densidade de um conjunto) Um conjunto $X \subset R$ é denso em $R$ se para todo ponto $a \in X$ e para qualquer número real positivo $\delta$ , tivermos:

$$\emptyset \neq Ɓ(a, \delta) \cap X \neq \{a\}.$$

Da definição acima, podemos dizer que X $\subset$ R é denso em R, quando quaisquer dois elementos do conjunto, a e b, sempre existe um terceiro elemento. Isto é, sendo a $<$ b então existe um c $\in$ X tal que $a < c < b$.

(Lacuna de um conjunto em R) - Dados o ponto a $\in$ X $\subset$ R e um número real $\delta$, se existe k $\in$ Ɓ(a, $\delta$) tal que k $\notin$ Ɓ(a, $\delta$) $\cap$ X, dizemos que o número real k é uma lacuna de X em R.

(Pontos isolados) – Seja $X \subset R^n$. Se existe $\delta \in R$, com $\delta > 0$, tal que, Ɓ($a$, $\delta$) $\cap$ X = $\{a\}$ , dizemos que a é um ponto isolado de X.

(Conjunto Discreto) – Se todos os elementos de X $\subset R^n$ são pontos isolados de X, dizemos que X é um conjunto discreto.

Vamos usar para cálculos o conjunto Q, racionais, que é denso em R, o conjunto de números reais.

### 1.1.3 - TEOREMA FUNDAMENTAL DA PROPORCIONALIDADE

Teorema: *Seja* $f: R^+ \to R^+$ *uma função crescente tal que* $f(k.x) = k.f(x)$ *para todo* $k \in N$ *e todo* $x \in R$*, então* $f(x) = a.x$ *para todo* $a$ *e* $x \in R$.

Demonstração:

Vamos dividir em duas partes:

Tomando $k = \frac{m}{n}$ , com $m \in N$ e $n \in N$ -$\{0\}$. Tem-se que $n.f(k.x) = f(n.k.x) = f(m.x) = m.f(x)$ .

Podemos concluir

$$f(k.x) = \frac{m}{n}.f(x) = k.f(x)$$

portanto $f(k.x) = k.f(x)$ é verdade para todo $k$ racional.

Agora devemos provar que é verdade para um número irracional *k*. Supondo, por absurdo, que existe um número *k* irracional maior que zero, tal que

$$f(kx) \neq k.f(x) \text{ para } x \in \ R^{+}.$$

Então, existem, duas possibilidades: $f(k.x) < k.f(x)\ ou\ f(k.x) > k.f(x)$.

Analisando a primeira possibilidade:

$$f(kx) < k.f(x) \rightarrow \frac{f(kx)}{f(x)} < \text{k}.$$

Como o conjunto dos números racionais é denso em R, podemos tomar um $w$ racional, tal que $\frac{f\ (kx)}{f(x)} < w\ < k$. Logo, $f(kx) < w.f(x) < k.f(x)$. Mas, como w é racional, podemos escrever

$$f(kx) < f(wx) < k.f(x).$$

Portanto,

$$f(kx) < f(wx).$$

Como por hipótese, f é uma função crescente, a desigualdade acima implica que

$$kx < wx.$$

E, portanto, $k < w$, já que x > 0. Uma contradição.

Considerando a segunda hipótese, $f(k.x) > k.f(x)$, isto é,

$$\frac{f(kx)}{f(x)} > k.$$

Tomando um número racional *w*, tal que

$$\frac{f(kx)}{f(x)} > w > k,$$

Visto que f(x) > 0*,* temos que

$$f(kx) > w.f(x) > k.f(x).$$

Como w é racional, podemos escrever:

$$f(kx) > f(w.x) > k.f(x).$$

Ou seja,

$$f(k.x) > f(w.x).$$

O fato que *f* é uma função crescente e *x* > 0, implica que $k > w$. Uma contradição.

Portanto, as duas possibilidades não podem acontecer então temos que $f(k.x) = k.f(x)$, para todo número irracional $k$.

1.1.4 - TEOREMA DA CARACTERIZAÇÃO DE UMA FUNÇÃO AFIM

Teorema: *Seja $f: R \to R$ uma função monótona crescente ou monótona decrescente. Se o crescimento $f(x+h) - f(x) = \varphi(h)$ depende apenas de h mas não de x, então f é uma função afim.*

Demonstração:

Sem perda de generalidade vamos supor que *f* seja crescente. Seja *f* uma função e $\varphi(h)$ uma função que satisfaz a condição $f(x+h) - f(x) = \varphi(h)$, ou seja, a variação de $f$ em relação a $x$ depende apenas de $h$.

Observe que:

- Fazendo h = 0, temos que

$$\varphi(0) = f(x+0) - f(x) = 0.$$

- Tomando $h_1 > h_2$, então

$$\varphi(h1) = f(x+h1) - f(x) < f(x+h2) - f(x) = \varphi(h2).$$

Portanto, $\varphi$ é uma função crescente e $\varphi(0) = 0$.

Calculemos $\varphi(v + h)$, para $v$ e $h$ números reais quaisquer

$$\varphi(v+h) = f\big(x + (h+v)\big) - f(x) = f\big((x+v) + h\big) - f(x).$$

Após um pequeno cálculo, obtemos

$$\varphi(v+h) = f\big((x+v)+h\big) - f(x+v) + f(x+v) - f(x)=$$

$$\big[f\big((x+v)+h\big) - f(x+v)\big] + [f(x+v) - f(x)] = \varphi(h) + \varphi(v).$$

Concluímos que a função $\varphi$ satisfaz as condições do Teorema Fundamental da Proporcionalidade, e, portanto, é uma função afim.

Iremos fazer uso da função afim que pode ser descrita como $f(x) = a.x + b$, com $a, b \in R, \forall x \in R$.

## 1.2 – COMPARAÇÃO COM MODELO FÍSICO.

Para encontrar uma função que descreva a posição do corpo, partícula, em cada instante, isto é, uma $f: R^{+} \to R,$ que pode também escrever da seguinte forma, $f: [t_0, t_n] \subset R^{+} \to R$ . São necessários que se conheçam: sua posição inicial, que chamamos de $x_0$, isto é, sua posição em um instante inicial, $t_0$; e pelo menos em um instante de cada intervalo i, $t_\xi \in [t_i, t_{i+1}]$, seja conhecida a sua velocidade; e seja possível fazer a quantidade de intervalo tanto maior quanto se queira. Satisfeitas as condições, poderemos encontrar uma função.

Agora, supondo que seja possível fazer o número de subintervalos tão grande quanto queira, isto é, cada intervalo pode se tornar tão pequeno e supondo que em cada subintervalo de tempo, seja conhecida a sua velocidade, ou seja, podemos calcular o deslocamento.

Vamos chamar, $v_i = \frac{\Delta x_i}{\Delta t_i}$ , onde $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$ e $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.

Estamos supondo que $v_i$ é constante em [ $t_i$ , $t_{i+1}$ ]. Portanto,

$$x_i = x_{i-1} + v_i.\Delta t_i.$$

Assim, variando *i em {1, ..., n},* temos:

$$x_1 = x_0 + v_1.\Delta t_1$$

$$x_2 = x_1 + v_2.\Delta t_2$$

$$x_3 = x_2 + v_3.\Delta t_3$$

$$\begin{array}{ccc} . & . & . \\ . & . & . \\ . & . & . \end{array}$$

$$x_n = x_{n-1} + v_n.\Delta t_n.$$

Substituindo as expressões acima, temos:

$$x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n = x_0 + v_1.\Delta t_1 + x_1 + v_2.\Delta t_2 + ... + x_{n-1} + v_n.\Delta t_n$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n = x_0 + x_1 + \cdots + x_n + v_1.\Delta t_1 + v_2.\Delta t_2 + ... + v_n.\Delta t_n$$

$$x_n = x_0 + v_1.\Delta t_1 + v_2.\Delta t_2 + ... + v_n.\Delta t_n.$$

Vamos supor que cada $\Delta t_i$ constante, isto é, uma partição em *n* intervalos de mesmo comprimento, $\Delta t_i = \Delta t_k$, segue que

$$x_n = x_0 + (v_1 + v_2 + ... + v_n).\Delta t_k,$$

Particularizamos para o caso em que para a razão $\frac{x_i - x_{i-1}}{t_i - t_{i-1}}$ é *constante,* que vamos chamar de $v\left(t'_\xi\right) = v_\xi$

$$x_n = x_0 + (\, v_1 + v_2 + ... + v_n\,)\,.\Delta t_k.$$

Particularizando para o caso, onde as velocidades são: $v_1 = v_2 = ... = v_n = v_\xi$, logo, $v_1 + v_2 + ... + v_n$ = n. $v_\xi$ e que $\Delta t_k = \frac{t - t_0}{n}$.

Portanto,

$$x_n = x_0 + n.v_\xi.\frac{t - t_0}{n}.$$

O que implica que:

$$x_n = x_0 + v_\xi.(t - t_0).$$

Podemos simplificar definindo t como sendo o intervalo de tempo de duração do evento, isto é, $t_0 = 0$ e $(t - t_0) = t$.

$$x_n = x_0 + v_\xi.t \quad ,$$

ou seja,

$$x(t) = x_0 + v_\xi . t.$$

Fazendo um paralelo com a função afim, teríamos, $b \equiv x_0 \; e \; a \equiv v_\xi$. Observamos que fizemos várias simplificações e consideração para chegarmos a uma função afim, cujo gráfico representa uma reta.

A forma direta seria partindo da definição de reta e com a suposição de que a trajetória assim esteja bem definida. Portanto, poderíamos afirmar que o espaço percorrido será igual ao comprimento do segmento de reta. E trabalharíamos no cálculo do seu comprimento, seja ele no plano ou espaço, de forma simples. O conceito de distância entre pontos será necessário, a apresentação para o aluno de uma fórmula seria uma "*decoreba*", uma aceitação de modelos prontos e sem sentido, apenas uso de fórmulas. Para um melhor entendimento a parametrização será uma ferramenta facilitadora. Permitindo explorarmos melhor e de forma mais simples as componentes do movimento devemos lançar mãos de outras formas de escrever as equações das curvas, seja ela no plano ou no espaço, facilitarão novos cálculos e analise de suas componentes. Portanto, vamos fazer uso de novos conhecimentos matemáticos para ilustrarmos de forma a nos permitir fazermos estudos comparativos.

A parametrização de Curvas facilita de forma significa a compreensão e a visualização do comportamento das curvas. A forma de fazer, consiste em escrever uma função que depende de várias variáveis em uma função de funções. Isto é, cada função passa a depender de um único parâmetro.

Vamos considerar uma função vetorial de forma geral $F: I \rightarrow R^n, onde \; I \subset$ R

$$F\,(\,t\,) \;=\; (\,f_1\,(\,t\,)\,,\; f_2\,(\,t\,)\,, \ldots,\, f_n\,(\,t\,)\,),$$

onde $t \in I$, que por sua vez é um subconjunto de R, isto é, $I \subset R$.

Particularizamos para o plano, $R^2$, e no espaço $R^3$. Seja $C$ uma função real, onde denotamos $C$ uma curva em $R^3$, definida pela função $C : I = [a, b] \subset R \to R^3$

$$t \to c(t) = (x(t), y(t), z(t)).$$

A parametrização facilita a analise matemática da descrição de curvas. Permitindo com que possamos encontrar de forma simples uma descrição ponto a ponto de todos os valores e comportamento de seus componentes.

Agora vamos expor alguns casos particulares:

1.3- Retas no Plano.

Sejam, A e B, os pontos extremos do segmento conhecidos. Podemos afirmar que qualquer ponto pertencente, ao segmento, pode ser escrito em função destes pontos e um parâmetro.

Vamos denotar, $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ e seja um ponto $P$ pertencente a este segmento. Portanto, podemos escrever $\overrightarrow{AP} = \lambda.\overrightarrow{AB}$, $0 \leq \lambda \leq 1$.

Como queremos representar o segmento $\overline{AB}$, isto é, o conjunto de pontos que $\{A, P_1, P_2, \dots, P_n, B\}$. Portanto, devemos variar o parâmetro $\lambda$ no intervalo $0 \leq \lambda \leq 1$.

Analisemos as possibilidades:

Se $\lambda = 0 \Rightarrow$ P = A , se $\lambda = 1 \Rightarrow P = B$.

De forma semelhante faremos a parametrização de uma reta, mudando apenas o intervalo em que o parâmetro $\lambda$ varia no conjunto dos números reais, isto é, $\lambda \in$ R.

Sejam os pontos $A$ e $B$, $A = (x_a, y_a)$ $e$ $B = (x_b, y_b)$ e seja $P = (x, y)$ um ponto qualquer sobre a reta.

Como $\overrightarrow{AP} = \lambda.\overrightarrow{AB},$ temos que $(x - x_a, y - y_a) = \lambda.(x_b - x_a, y_b - y_a)$, isto é,

$$\begin{cases} x - x_a = \lambda.(x_b - x_a) \\ y - y_a = \lambda.(y_b - y_a). \end{cases}$$

Denotaremos por $\vec{v} = ( a , b ) = ( x_b - x_a , y_b - y_a )$.

Portanto, podemos escrever: $\begin{cases} x = x_a + a.\lambda \\ y = y_a + b.\lambda \end{cases}$ , onde $\lambda \in R$.

## 1.4 - RETAS NO ESPAÇO.

Uma forma de determinar as equações de uma reta no espaço é conhecer um ponto por exemplo A = $(x_0, y_0, z_0)$ , por onde a reta passa, e um vetor diretor $\vec{u} = (a, b, c)$.

Tomando, um ponto qualquer pertencente a reta, P = (x, y, z), logo, $\overrightarrow{AP}$ = t. $\vec{u}$, isto é, $(x - x_0, y - y_0, z - z_0) = (a.t, b.t, c.t)$, ou seja,

$$\begin{cases} x = x_0 + a.t\,, (1) \\ y = y_0 + b.t, (2) \\ z = z_0 + c.t, (3) \end{cases}$$

As equações 1,2 e 3 acima são chamadas de equações paramétricas da reta no espaço.

### 1.4.1 – COMPRIMENTO.

Para calcularmos as distâncias entre pontos, isto é, o espaço percorrido em um movimento retilíneo em três dimensões, $R^3$.

Vamos tomar dois pontos quaisquer B e C da reta. Como os pontos pertencem à reta, isto é , existem dois valores distintos de $t'$ e $t''$ tais que B = $( x_0 + a.t', y_0 + b.t', z_0 + c.t')$ e B = $( x_0 + a.t'', y_0 + b.t'', z_0 + c.t'')$.

$\overrightarrow{BC}$= $\big( a.(t'' - t'), b.(t'' - t'), c.(t'' - t')\big) = (t'' - t').( a, b, c )$, e chamaremos de

| $\overrightarrow{BC}$| o valor absoluto do vetor BC.

|$\overrightarrow{BC}$| = | $(t'' - t')$ | $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

### 1.4.2 – Distância entre pontos.

Será usado de forma geral a definição de distância entre pontos. Em um conjunto qualquer, $M$, podemos definir uma função $d: M \times M \to R$, isto é, que associa cada par de elementos de $M$ um número real. Podemos escrever $x, y \in M$ um número real $d(x, y)$ que chamaremos de distância de $x\ a\ y$ . A função $d: M \times M \to R$ deve satisfazer:

1) $d(x, x) = 0$
2) Se $x \neq y$ então $d\,(\,x\,,\ y\,) > 0$
3) $d\,(\,x\,, y\,) = d\,(\,y\,, x\,)$
4) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ – Desigualdade triangular,

para quaisquer $x, y, z\ \in M$.

Sejam os pontos $x\ e\ y\ \in R$, a função dada por $d(x, y) = |\ x - y\ |$ é uma função distância em $R \times R$.

Para o espaço Euclidiano, podemos definir a distância das seguintes formas:

Dados os pontos $x = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ e $y = (\,y_1\,,\ y_2\,,\ y_3\,, \dots, y_n\,)$. Vamos dar alguns exemplos de função distância em $R^n$.

Podemos definir:

1) $d_1(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_{1)}{}^2 + (x_2 - y_2\,)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2} = [\,\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2]^{\frac{1}{2}}$
2) $d_2(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| + \cdots + |x_n - y_n| = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$
3) $d_3(\,x\,, y\,) = max\,\{\,|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|, \dots, |x_n - y_n|\,\} = \underset{1\leq i\leq n}{max} |x_i - y_i|$

Para fazermos uma comparação entre as distancias deveremos elevar ao quadrado cada uma delas. Portanto, obteremos:

$$d^2_{1(x,y)} = (x_1 - y_{1)}{}^2 + (x_2 - y_2\,)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2 = \left[\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2\right]$$

$$d^2_{2(x,y)} = [|x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| + \cdots + |x_n - y_n|]^2$$
$$= (x_1 - y_{1)}{}^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2$$
$$+ 2\sum_{i \neq j}^{n} |x_i - y_i|\,|x_j - y_j|$$

Logo $d^2_{2(x,y)} > d^2_{1(x,y)} \rightarrow d_2(x,y) > d_1(x,y)$

Podemos concluir que $d_2(x,y) > d_1(x,y) > d_3(x,y)$

1.4.3 – Produto interno – para calcular distância entre pontos.

Um produto interno num espaço vetorial $E$ é uma aplicação $E \times E \rightarrow R$ bilinear simétrica e positiva, isto é, para os vetores $u_1, u_2, u, v_1, v_2, v \in E$ e qualquer $\alpha \in R$, temos:

Bi linearidade:

$i) < \alpha u, v > = \alpha < u, v >$;

$ii) < u, v_1 + v_2 > = < u, v_1 > + < u, v_2 >$;

$iii) < u, \alpha v > = \alpha < u, v >$;

$iv) < \alpha.u_1 + u_2, v > = < \alpha.u_1, v > + < u_2, v > = \alpha < u_1, v > + < u_2, v >$.

Comutatividade - Simetria

$< u, v > = < v, u >$.

Positividade

$< u, u > > 0 \ se \ u \neq 0$.

Como $< 0, v > = < 0 + 0, v > = < 0, v > + < 0, v > \rightarrow < 0, v > = 0$ $\therefore \forall v \in E$.

Vamos introduzir a definição de uma norma em $E$, induzida pelo produto interno.

A norma de um vetor $u$ é dada por

$$| u | = \sqrt{< u , u >}$$

Um vetor $u$ é dito vetor unitário se sua norma é igual a 1, isto é, $|u| = 1$. Dois vetores $u$ e $v$ são ditos ortogonais se $< u, v > = 0$. Neste caso denotaremos por $u \perp v$. Observe que se $u \perp v$,

$$|u + v|^2 = |u|^2 + |v|^2.$$

Distancia entre dois pontos no plano

Considerando os pontos $P = (x_1, y_1 )$ e $Q = (x_2, y_2)$ . A distância entre P e Q é o comprimento do segmento $\overline{PQ}$, $|\overline{PQ}| = d_{PQ}$. Para aplicarmos o Teorema de Pitágoras vamos considerar um ponto H= (x, y) que satisfaça a seguinte condição:

$$< (x - x_1, y - y_1), (x - x_2, y - y_2) > = 0$$

$$x^2 - x.(x_1 + x_2) + x_1.x_2 + y^2 - y.(y_1 + y_2) + y_1.y_2 = 0 \qquad (4)$$

Existem infinitos pontos, H, que satisfazem a equação (4).

Por comodidade vamos dividir em casos:

1) $x = x_1 \; e \; y = y_1$, isto é, o ponto P, isto é, um vetor ser nulo.
2) $x = x_2 \; e \; y = y_2$, isto é, o ponto Q, isto é, um vetor ser nulo.
3) $x = x_1 \; e \; y = y_2$, isto é, o ponto H.
4) $x = x_2 \; e \; y = y_1$, isto é, o ponto H'.

$$d_{PQ} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

# Capitulo 2

## COMPRIMENTO DE CURVAS

Segmento de retas, no caso sobre R.

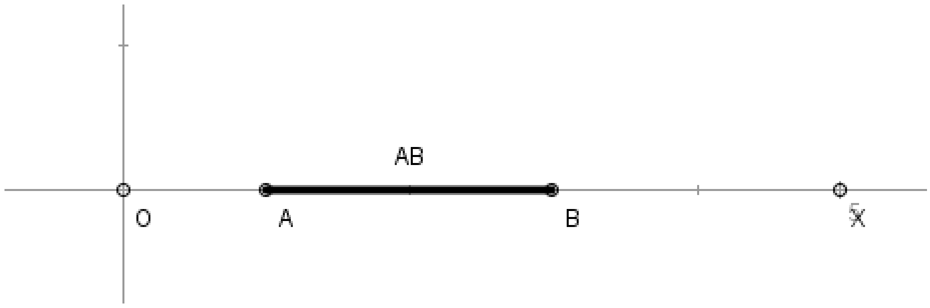



Fig. 2.1

Vamos considerar o sistema acima, OX, horizontal ∴ $d_{AB} = |x_2 - x_1|$

Para o plano, isto é um movimento em duas dimensões. Também chamada de $R^2$

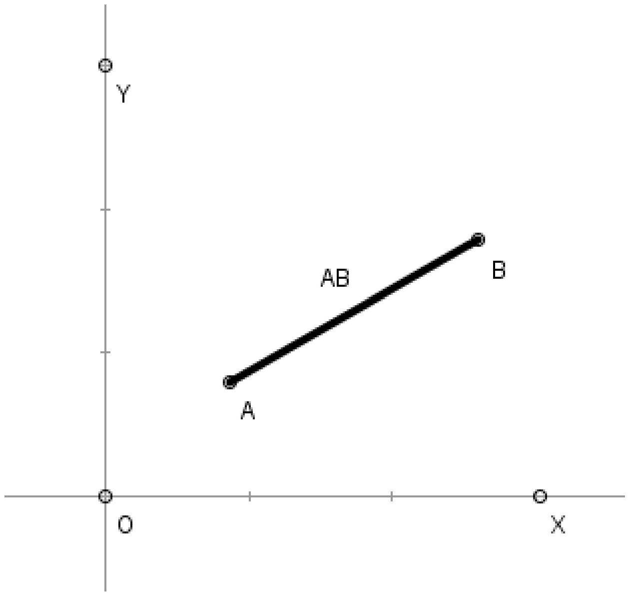



Fig. 2.2

consideramos um sistema de coordenados tridimensional, OX e OY perpendiculares entre si e com a origem em O (0,0).

De forma semelhante para três dimensões.

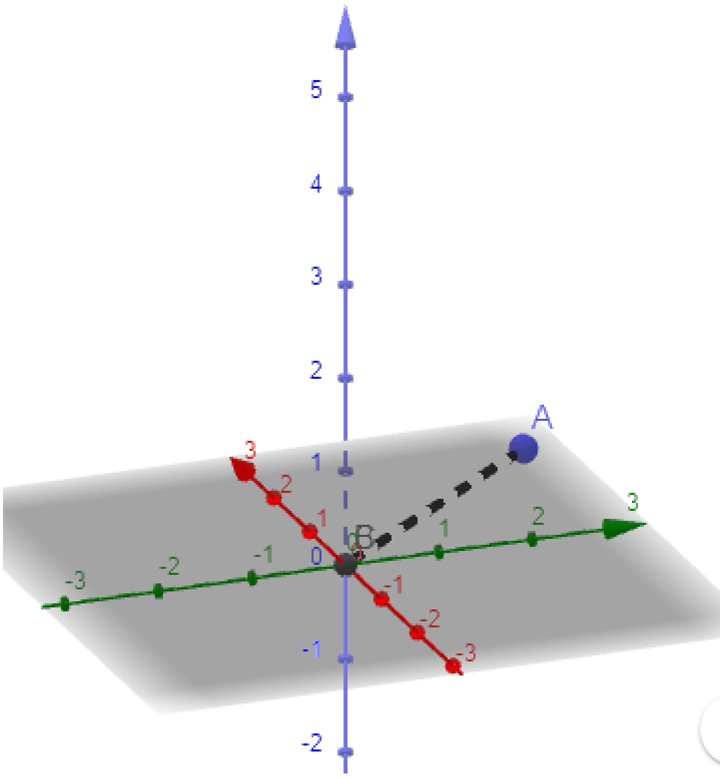



Fig. 2.3

A cada ponto G do espaço associamos um sistema S, uma trinca que é única, e definimos as grandezas vetoriais em relação aos seus eixos.  Em relação à origem e podemos construir um novo sistema tomando a trinca um novo valor em relação a este sistema S' = (x' , y' , z' ).

Vamos supor que estamos fazendo a descrição de um movimento que se inicia no instante $t_i$ e termina em $t_f$. Portanto, estamos interessados em um intervalo de tempo.

Vamos fazer a dedução para um sistema em duas dimensões.

Vamos considerar o subintervalo I de R, $I \subset$ R. $I =[ t_0, t_n]$.

Podemos encontrar uma função $s$: $[ t_0, t_n] \rightarrow [s_0, s_n]$

Para cada partição de I, existe, um subintervalo de $[s_k, s_{k+1}] \subset [s_0, s_n]$. Portanto, o movimento como um todo será a união dos segmento de reta considerado separadamente, uma poligonal.

## 2.1-Função Quadrática

Um tópico relevante é Transformações – Translação Vertical e Horizontal de funções. Toda função polinomial do 2º grau poderá ser escrita na forma, $f(x) = a.x^2$, que podemos a concavidade da parábola dependerá do sinal de a. Para o sinal positivo concavidade voltada para cima e negativo para baixo.

### 2.1.1 – Variação do coeficiente a da função polinomial do 2º grau.

Uma apresentação gráfica da variação dos parâmetros a e b_da função polinomial do 2º grau.

Para: a > 0

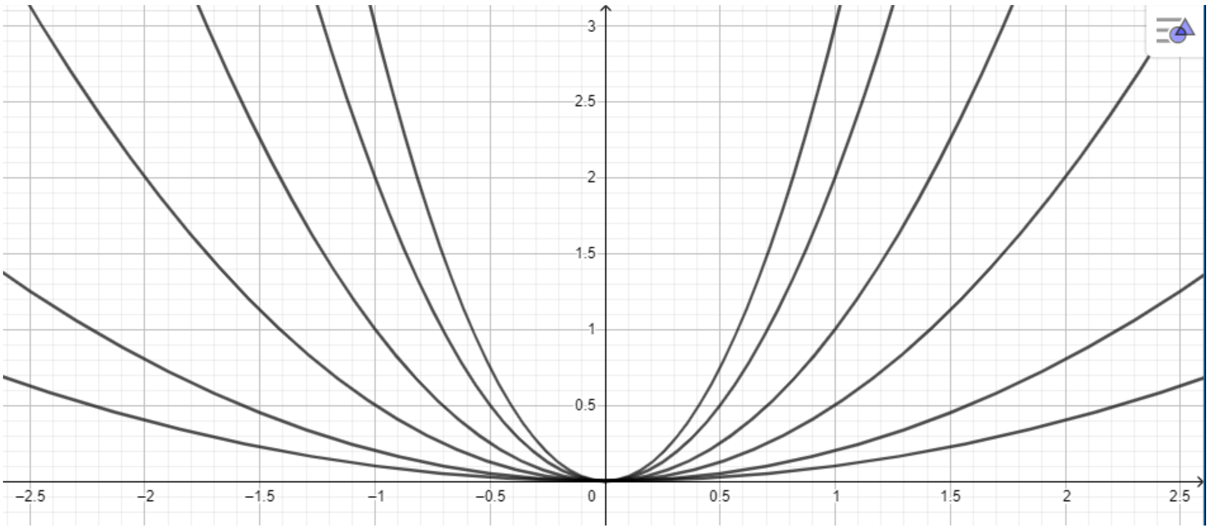



Fig.2.4

Para: a < 0

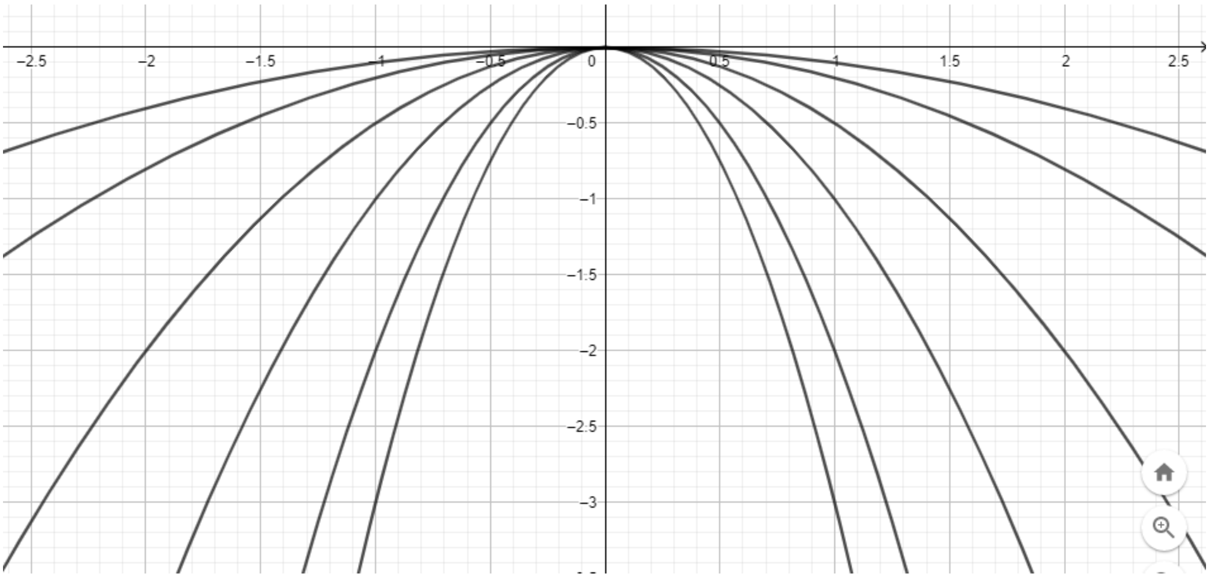


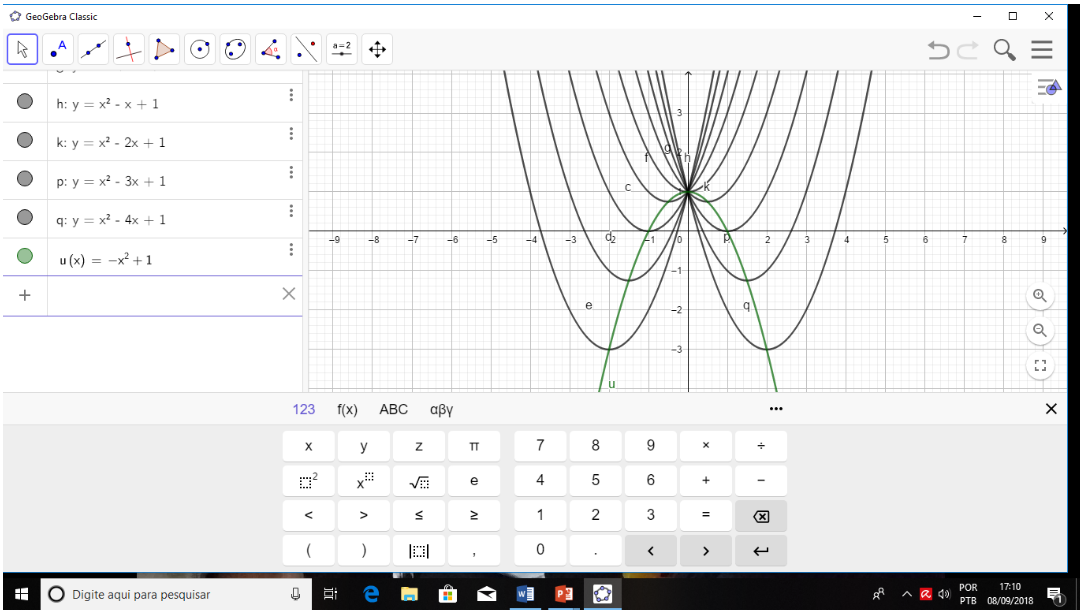

Fig. 2.5

Portanto, a concavidade estar voltada para cima ou para baixo é determinada pelo sinal de a.

2.1.2- Variação do coeficiente b da função polinomial do 2º grau.

Variando o valor de b, observamos que as posições dos vértices das parábolas formam uma parábola.

Fig.2.6




Usando o Geogebra é possível fazer uma animação.

Em todas as funções polinomial do 2º grau, $f(x) = a.x^2 + b.x$ + c. Pode ser obtida por translações horizontais e verticais.

$$f(x) = a\left[x^2 + \frac{b}{a}.x + \frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2}\right]$$

$$f(x) = a\left[x + \frac{b}{2.a}\right]^2 + c - \frac{b^2}{4a}$$

$$f(x) = a\left[x + \frac{b}{2.a}\right]^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$$

$$f(x) = a\left[x + \frac{b}{2.a}\right]^2 - \frac{\Delta}{4a}$$

Observe que se substituíssemos $x\ por\ x' - \frac{b}{2a}$ que é uma translação horizontal. Poderemos escrever

$$f(x') = a[x']^2 - \frac{\Delta}{4a}.$$

E graficamente a mudança do valor de b, no contexto da física representará a mudança da velocidade inicial. O ponto onde se dá o máximo ou mínimo e consequentemente o seu valor, uma vez que Δ depende de b.( $\Delta = b^2 - 4.a.c$.

E fizéssemos $f(x) = g(x) - \frac{\Delta}{4a}$, uma translação vertical

Obtemos: $g(x) = a.x'^2$

Os passos descritos acima simbolizam uma mudança de eixos coordenados.

Observações:

1) As ilustrações tornam a descrição mais simples, isto é, melhora o entendimento;
2) A sistematização dos procedimentos também é muito importante, ajuda muito, não deixando as considerações se perderem.

# Capitulo 3

## Movimentos Curvilíneos – Não Retilíneo.

O movimento de um corpo não é na sua maioria bem-comportado, surgindo como isto, a necessidade de estudarmos algumas curvas não retilínea e suas propriedades. Mesmo assim, com a incorporação de outras curvas que conhecemos, não esgotam as possibilidades para a descrição de um movimento real.

Para o movimento cuja trajetória pode ser representada por uma curva em que sua aceleração seja conhecida e suposta constante em trechos desta trajetória. Considerarmos que em cada intervalo sua velocidade posso variar de forma bem-comportada com o tempo, ou seja, um segmento de reta, isto é, uma poligonal. Quanto maior for o número de intervalos, mais próximo do será o deslocamento real do calculado. Surgindo a necessidade empregarmos o conceito de limite e continuidade que será exposto de forma bastante intuitiva.

Sendo conhecida a sua velocidade, $v(t) = a.t + v_0$ , isto é, o valor de a e $v_0$. Função que nos permitirá ter para todo $t$ um valor de $v(t)$ correspondente.

Considerando que os intervalos sejam de mesmo comprimento, isto é, cada $\frac{\Delta t}{n}$ $\forall\ i \in N$, e $t_0 = 0 \rightarrow \Delta t = t$ cada intervalo $\frac{t}{n}$.

[ 0, $t$ ] = [ 0, $\frac{t}{n}$ ] U [ $\frac{t}{n}$ , 2.$\frac{t}{n}$ ] U [ 2.$\frac{t}{n}$ , 3.$\frac{t}{n}$ ]... [ (n-2) $\frac{t}{n}$, (n-1).$\frac{t}{n}$ ] U [ (n-1).$\frac{t}{n}$ , $t$ ]

Tomando o extremo inferior do intervalo para o caso da v(t) crescente estaremos usando os menores valores no intervalo e calculando os $v(t') = a.t' + v_0$

Vamos chamar $t' = \frac{i\,.\,t}{n}$ $\forall\ i \in \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots, n\}$

Logo podemos escrever $v\,(\,i\,) = i.a.\frac{t}{n} + v_0$

$$\left[v_0, v_0 + 1.a.\frac{t}{n}\right]; \left[v_0 + 1.a.\frac{t}{n}, v_0 + 2.a.\frac{t}{n}\right]; \left[v_0 + 2a.\frac{t}{n}, v_0 + 3.a.\frac{t}{n}\right]; \ldots \left[v_0 + (n-1).a.\frac{t}{n}, v_0 + n.a.\frac{t}{n}\right]$$

3.1- Dedução de um modelo para o movimento.

Na analise do comportamento de uma curva de pode ser escrita com uma função polinomial do 1º grau. Dependendo do valor de $a$.

Se $a > 0$ a função será crescente e, portanto, a aproximação se dará por valores menores, quando usarmos os limites inferiores. E se dará por valores maiores quando os limites superiores para o cálculo dos valores da função.

Se $a < 0$ a função será decrescente e, portanto, a aproximação se dará por valores maiores quando usarmos os limites inferiores. E se dará por valores menores quando os limites superiores para o cálculo dos valores da função.

$x_m = x_0 + \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} \left[v_0 + i.a.\frac{t}{n}\right].\frac{t}{n} = x_0 + \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} \left[ v_0.\frac{t}{n} + i.a.\left(\frac{t}{n}\right)^2 \right]$

$x_m = x_0 + \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} \left[ v_0.\frac{t}{n} \right] + \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} \left[ i.a.\left(\frac{t}{n}\right)^2 \right]$

$$x_m = x_0 + v_0.t + \lim_{n\to\infty} \left[ a.\left(\frac{t}{n}\right)^2 \right] . \sum_{i=0}^{n-1} i$$

$$x_m = x_0 + v_0.t + \lim_{n\to\infty} \left[ a.\left(\frac{t}{n}\right)^2 \right] . \left[\frac{n.(n-1)}{2}\right]$$

$$x_m = x_0 + v_0.t + \lim_{n\to\infty} \left[\frac{a.t^2}{2} - \frac{1}{2}a.\left(\frac{t}{n}\right)^2\right]$$

$$x_m = x_0 + v_0.t + \frac{a.t^2}{2} \ (1).$$

Agora vamos tomar o limite superior do intervalo, no caso de uma função crescente estaríamos com o maior valor no intervalo. Portanto, mudaremos no somatório.

$x_M = x_0 + \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left[ v_0 + i.a.\frac{t}{n} \right] . \frac{t}{n} = x_0 + \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left[ v_0.\frac{t}{n} + i.a.\left(\frac{t}{n}\right)^2 \right]$

$$x_M = x_0 + \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left[ v_0 . \frac{t}{n} \right] + \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left[ i.a. \left(\frac{t}{n}\right)^2 \right]$$

$$x_M = x_0 + v_0.t + \lim_{n\to\infty} \left[ a.\left(\frac{t}{n}\right)^2 \right] . \sum_{i=1}^{n} i$$

$$x_M = x_0 + v_0.t + \lim_{n\to\infty}\left[a.\left(\frac{t}{n}\right)^2\right].\left[\frac{n.(n+1)}{2}\right]$$

$$x_M = x_0 + v_0.t + \lim_{n\to\infty}\left[\frac{a.t^2}{2} + \frac{1}{2}a.\left(\frac{t}{n}\right)^2\right]$$

$$x_M = x_0 + v_0.t + \frac{a.t^2}{2}\ (2).$$

Como a função $v(i)$ dependendo do valor de a será crescente ou decrescente.

Teremos duas possibilidades:

i) Crescente $x_m \leq\ x_{modelo} \leq x_M$ , onde $x_{real}$ representa a posição.

ii) Decrescente $x_M \leq\ x_{modelo} \leq x_m$ , onde $x_{real}$ representa a posição.

Observamos que houve uma convergência das funções (1) e (2). Portanto, quando tomamos intervalos muito pequeno podemos representar por uma única função.

$$x_{modelo} = x_0 + v_0.t + \frac{a.t^2}{2}$$

3.2 – Somatório.

$\forall n \in N.$

i) $\sum_{i=1}^{n} k = n.k$

ii) $\sum_{i=1}^{n} i$ = 1 + 2 + 3 + ... + n = $\frac{n.(n+1)}{2}$

iii) $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n.(n+1).(2.n+1)}{6}$

iv) $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left[\frac{n.(n+1)}{2}\right]^2$

A seguir provaremos as identidades citadas acima. Usando indução finita.

3.2.1 - Indução Finita.

Uma maneira de provar que $P(n)$ , uma proposição ou sentença aberta, é verdadeira para todo natural $n \geq n_0$ é utilizar o chamado Principio da Indução Finita, que é um dos axiomas que caracterizam o conjunto dos números naturais. Que consiste em:

Seja $P(n)$ uma proposição relativa a números naturais. Suponha que:

i) $P(n_0)$ é verdadeira, e

ii) Se $P(n)$ é verdadeira, para algum número natural $n \geq n_0$, então $P(n+1)$ também é verdadeira.

Então $P(n)$ é verdadeira para todos os números maturais maiores ou igual a $n_0$.

Demonstração.

i) Para n = 1

K = k

Supondo que seja verdade para um k e provaremos que será verdade para uma k+1.

$$\sum_{i=1}^{k} k = k + k + k + k + k + k + k + k + k + k = k.k$$

$\sum_{i=1}^{k} k + k = k.k + k = (k+1).k = \sum_{i=1}^{k+1} k$

ii) Para n=1

$\sum_{i=1}^{1} i = 1 = \frac{1.(1+1)}{2} = 1$

Supondo que seja verdade para um k qualquer devemos provar que será verdade para um k+1.

$\sum_{i=1}^{k} i = 1 + 2 + 3 + ... + k = \frac{k\,.\,(k+1)}{2}$

$\sum_{i=1}^{k} i$ +k+1 = $1 + 2 + 3 + \ldots + k + (k + 1) = \frac{(k.\ (k+1))}{2} + k + 1 =$

$\frac{k.(k+1)+2.\ (k+1)}{2} = \frac{(k+1).(k+2)}{2}$

iii) $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n.(n+1).\ (2.n+1)}{6}$

Para n=1

$1^2 = \frac{1.(1+1).(2.1+1)}{6} = \frac{1.2.3}{6} = \frac{6}{6} = 1.$

Supondo que seja verdade para um k qualquer, devemos provar que será verdade para k + 1:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \cdots + k^2 = \frac{k.(k+1).(2.k+1)}{6}$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \cdots + k^2 + (k+1)^2 = \frac{k.(k+1).(2.k+1)}{6} + (k+1)^2$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \cdots + k^2 + (k+1)^2 = \frac{k.(k+1).(2.k+1) + 6.(k+1)^2}{6}$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \cdots + k^2 + (k+1)^2 = \frac{(k+1).[k.(2.k+1) + 6.(k+1)]}{6}$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \cdots + k^2 + (k+1)^2 = \frac{(k+1).[2k^2 + 7k + 6]}{6}$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \cdots + k^2 + (k+1)^2 = \frac{(k+1).[(2(k+1)+1).((k+)+1)]}{6}$$

iv) $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left[\frac{n.(n+1)}{2}\right]^2$

Para n=1

$1^3 = \left[\frac{1.(1+1)}{2}\right]^2$=1

Supondo que seja verdade para um k então seja verdade para k+1. Portanto valido para todo n.

Supondo que seja verdade para um k qualquer, isto é, $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + k^3 = \left[\frac{k.(k+1)}{2}\right]^2$

Portanto devemos ter:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + k^3 + (k+1)^3 = \left[\frac{k.(k+1)}{2}\right]^2 + (k+1)^3$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + k^3 + (k+1)^3 = \frac{k^2.(k+1)^2 + 4.(k+1)^3}{4}$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + k^3 + (k+1)^3 = \frac{(k+1)^2.[k^2 + 4.(k+1)^1]}{4}$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + k^3 + (k+1)^3 = \frac{(k+1)^2.[k^2 + 4.k + 4]}{4}$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + k^3 + (k+1)^3 = \frac{(k+1)^2.[(n+2)^2]}{4}$$

$$= \left[\frac{(k+1).((k+1)+1)}{2}\right]^2.$$

3.2.2 – Uma abordagem gráfica.

Poderíamos, para os casos onde a aceleração é constante e diferente de zero, fazer uma dedução mais simples do modelo apresentado anteriormente via somatório. Usando o conceito de área de retângulos e trapézios. Como mostraremos abaixo:

$$a: R^+ \to R$$

$$t \to k$$

Pela definição de aceleração: $a(t_i) = \frac{\Delta v}{\Delta t}$ podemos escrever $\Delta v = a(t_i).\Delta t$.

Sendo $a(t_i)$ constante, o seu gráfico representa um retângulo e sua área será calculado como sendo o produto da base vezes altura.

Área $\Delta v = a(t_i).\Delta t$ para $\Delta t = t - t_0 \ e \ t_0 = 0, logo, \Delta t = t$.

Usando uma interpretação gráfica.

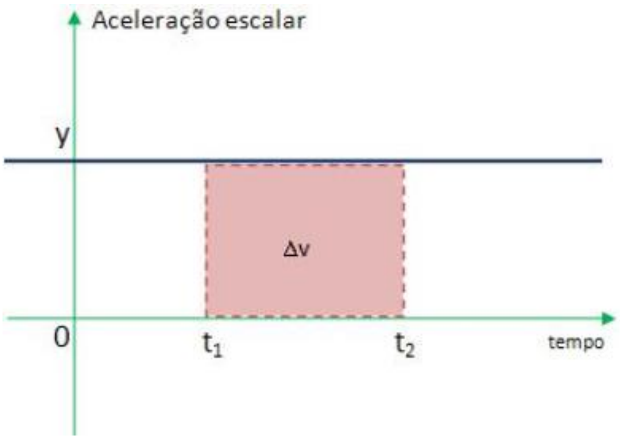



Fig.3.1

Como a aceleração é constante, isto é, ela permanece a mesma para todo tempo considerado.

$\Delta v$ =área = a. $(t_2 - t_2)$ $\qquad$ $v = v_o + a.(t_2 - t_1)$

Existe três possibilidades para os valores de a:

1) Se a = 0 → $\Delta v = 0 \ \rightarrow v = constante$

O gráfico de velocidade x tempo é semelhante ao de aceleração x tempo.

V > 0 $\qquad$ V < 0



Fig.3.2

Fig.3.3

$$\Delta s = v.\Delta t \rightarrow \Delta s = v.t \; para \; t_0 = 0$$

$$s - s_0 = v.t \rightarrow s = s_0 + v.t$$

Portanto, para a(t) = constante de diferente de zero.

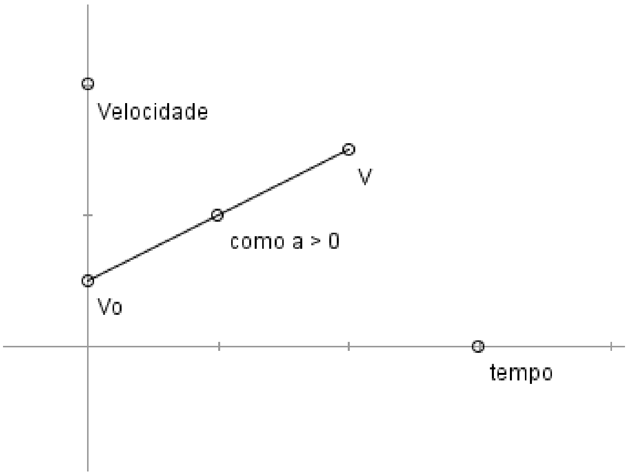



Fig. 3.4

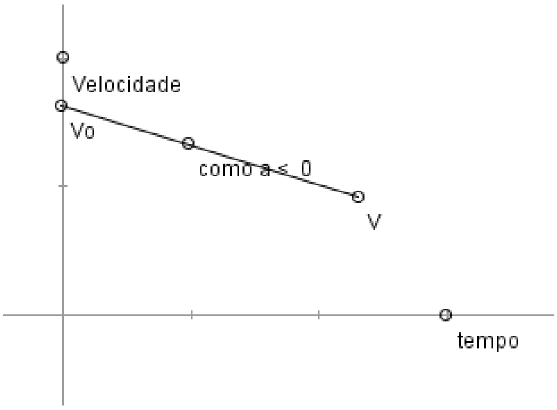



Fig.3.5

Nos dois casos teremos um trapézio.

Se considerarmos no caso da figura abaixo $t_1 = 0 \rightarrow \Delta t = t_2 \ = t$

$v - v_0 = a.t$

$v = v_0 + a.t$

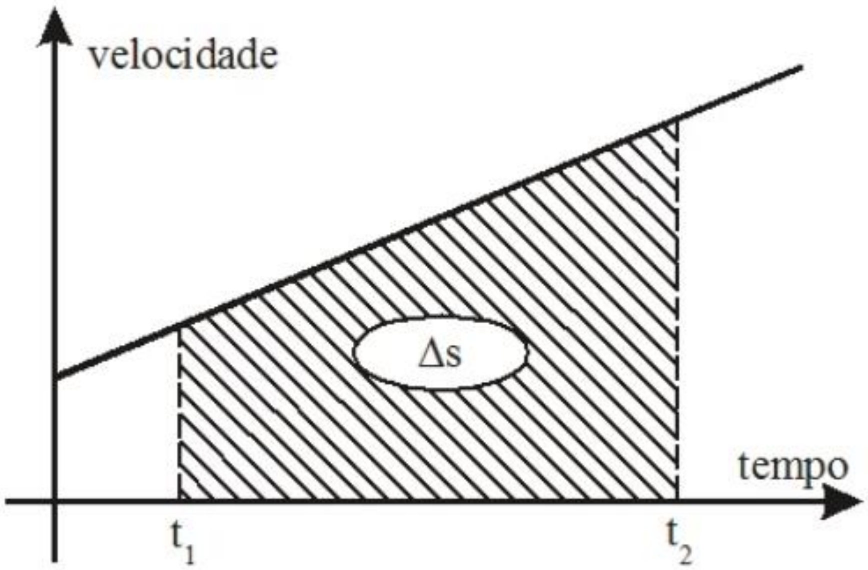



Fig. 3.6

$$\Delta s = Área$$

$$\Delta s = \frac{(v_0 + v_0 + a.t).}{2} t$$

$$\Delta s = \frac{(2.v_0 + a.t).}{2} t$$

$$\Delta s = v_0.t + \frac{a}{2}.t^2$$

$$s - s_0 = v_0.t + \frac{a}{2}.t^2$$

$$s = s_0 + v_0.t + \frac{a}{2}.t^2$$

3.2.3 – Analisando os parâmetros da função polinomial do 2º grau obtida.

Uma simples interpretação Gráfica, constatará a convergência, como aquela feita com o uso de somatório. Entretanto, é pouco provável que um movimento qualquer de um corpo livre atenda ao modelo. Portanto, é mais razoável fazermos um tratamento, em pequenos trechos, e depois generalizarmos. Isto é, uma curva formada por pequenos segmentos de reta. A abordagem ficaria difícil se tivéssemos a(t) uma função mais complicada.

A função, obtida acima, pode ser explorada em paralelo com o tópico de função quadrática, função polinomial do 2º grau, $f(x) = a.x^2 + b.x + c$ que também pode ser escrita como:

$$f(x) = a\left[x + \frac{b}{2.a}\right]^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$$

Para o a Física podemos escrever:

$$s(t) = s_0 + v_0.t + \frac{a}{2}.t^2$$

$$s(t) = \frac{a}{2}.\left[t^2 + 2.\frac{v_0}{a}.t\right] + s_0$$

$$s(t) = \frac{a}{2}.\left[t^2 + 2.\frac{v_0}{a}.t + \frac{v_0^2}{a^2} - \frac{v_0^2}{a^2}\right] + s_0$$

$$s(t) = \frac{a}{2}.\left[\left(t + \frac{v_0}{a}\right)^2 - \frac{v_0^2}{a^2}\right] + s_0$$

$$s(t) = \frac{a}{2}.\left[\left(t + \frac{v_0}{a}\right)^2\right] + s_0 - \frac{v_0^2}{2.a}$$

$$s(t) = \frac{a}{2}.\left[\left(t + \frac{v_0}{a}\right)^2\right] + \frac{2.a.s_0 - v_0^2}{2.a}$$

Analise:

Como, $\left(t + \frac{v_0}{a}\right)^2 \geq 0 \ \forall \ t \in R$

Portanto, $\frac{a}{2}.\left[\left(t + \frac{v_0}{a}\right)^2\right]$ tem o mesmo sinal de a.

Se $a > 0$ então o menor valor de $\frac{a}{2}.\left[\left(t+\frac{v_0}{a}\right)^2\right]$ será 0. Portanto, o menor valor de $s(t)$ é $\frac{2.a.s_0-v_0^2}{2.a}$ .

Se $a < 0$ então o maior valor de $\frac{a}{2}.\left[\left(t+\frac{v_0}{a}\right)^2\right]$ será 0. Portanto, o maior valor de $s(t)$ é $\frac{2.a.s_0-v_0^2}{2.a}$.

Sendo, o valor de t, tal que a s(t) atinja o seu valor máximo ou mínimo, será $-\frac{v_0}{a}$.

3.2.4 - Procedimentos para encontrarmos áreas de gráficos de funções.

O gráfico, *, apresenta uma função crescente, onde o seu domínio, foi dividido em intervalos. Observe que as alturas dos retângulos são os valores correspondentes aos limites inferiores dos intervalos considerados. Portanto, a soma das áreas é menor que a área do compreendida entre o gráfico e o eixo x.

Para calcularmos, usando o somatório, primeiramente deveremos sistematizar o uso das variáveis da função. Para cada , $x_i = a + (i-1).\frac{(b-a)}{n}$.

Quando: $i = 1$ então $x_1 = a$ e quando $i = n$ então $x_n = a + (n-1).\frac{(b-a)}{n}$, isto é, usaremos sempre o limite inferior do intervalo.

Portanto, a área será calculada da seguinte forma:

$S_m = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i).\left[\frac{b-a}{n}\right]$.

Fazendo uma comparação com a função for polinomial do 2º grau, onde consideramos $\propto, \beta$ e $\delta$ seus coeficientes para não confundir com a e b adotados como limites inferior e superior do intervalo, $x_i \epsilon [a, b]$.

$$f(x) = \alpha.x^2 + \beta.x + \delta$$

Quando substituímos $x_i$ por $a + (i-1).\frac{(b-a)}{n}$

$$S_m = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left\{ \alpha . \left( \mathrm{a} + (\mathrm{i}-1) . \frac{(\mathrm{b} - \mathrm{a})}{\mathrm{n}} \right)^2 + \beta . \left( \mathrm{a} + (\mathrm{i}-1) . \frac{(\mathrm{b} - \mathrm{a})}{\mathrm{n}} \right) + \delta \right\} . \left[ \frac{b-a}{n} \right]$$

$$S_m = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left\{ \alpha . \left( a^2 + 2.\mathrm{a}.(\mathrm{i}-1) . \frac{(\mathrm{b} - \mathrm{a})}{\mathrm{n}} + \left[ (\mathrm{i}-1) . \frac{(\mathrm{b} - \mathrm{a})}{\mathrm{n}} \right]^2 \right) + \beta . \left( \mathrm{a} + (\mathrm{i}-1) . \frac{(\mathrm{b} - \mathrm{a})}{\mathrm{n}} \right) + \delta \right\} . \left[ \frac{b-a}{n} \right]$$

$$S_m = \lim_{n\to\infty} \quad \left[ \frac{b-a}{n} \right] \sum_{i=1}^{n} \alpha a^2 + 2\alpha . a . \left[ \frac{b-a}{n} \right]^2 . \sum_{i=1}^{n} i - 2\alpha . a . \left[ \frac{b-a}{n} \right]^2 . \sum_{i=1}^{n} 1 + \left[ \frac{b-a}{n} \right]^3 . \alpha . \sum_{i=1}^{n} i^2 - 2. \left[ \frac{b-a}{n} \right]^3 . \alpha . \sum_{i=1}^{n} i + \left[ \frac{b-a}{n} \right]^3 . \alpha . \sum_{i=1}^{n} 1 + \beta . \left[ \frac{b-a}{n} \right] \sum_{i=1}^{n} a + \beta \left[ \frac{b-a}{n} \right]^2 . \sum_{i=1}^{n} i - \left[ \frac{b-a}{n} \right]^2 . \beta . \sum_{i=1}^{n} 1 + \left[ \frac{b-a}{n} \right] . \sum_{i=1}^{n} \delta$$

$$S_m = \lim_{n\to\infty} \left[ \frac{b-a}{n} \right] \alpha a^2 n + 2\alpha . a . \left[ \frac{b-a}{n} \right]^2 . \frac{n(n+1)}{2} - 2\alpha . a . \left[ \frac{b-a}{n} \right]^2 . n + \alpha . \left[ \frac{b-a}{n} \right]^3 . \frac{n(n+1).(2n+1)}{6} - 2\alpha . a . \left[ \frac{b-a}{n} \right]^2 . \frac{n(n+1)}{2} + \left[ \frac{b-a}{n} \right]^3 . \alpha . n + \beta . \left[ \frac{b-a}{n} \right] . a . n + \beta \left[ \frac{b-a}{n} \right]^2 . \frac{n(n+1)}{2} - \left[ \frac{b-a}{n} \right]^2 . n . \beta + \left[ \frac{b-a}{n} \right] . n . \delta$$

$$S_m = \lim_{n\to\infty} [b-a] \alpha a^2 + 2\alpha . a . \left[ \frac{b-a}{n} \right]^2 . \frac{n(n+1)}{2} - 2\alpha . a . \left[ \frac{b-a}{n} \right]^2 . n + \alpha . \left[ \frac{b-a}{n} \right]^3 . \frac{n(n+1).(2n+1)}{6} - 2\alpha . a . \left[ \frac{b-a}{n} \right]^2 . \frac{n(n+1)}{2} + \left[ \frac{b-a}{n} \right]^3 . \alpha . n + \beta . [b-a] . a + \beta \left[ \frac{b-a}{n} \right]^2 . \frac{n(n+1)}{2} - \left[ \frac{b-a}{n} \right]^2 . n . \beta + [b-a] . \delta$$

$S_m = [b-a]\alpha.a^2 + \alpha.a.[b-a]^2 + \frac{1}{3}\alpha.[b-a]^3 - \alpha.a.[b-a]^2 + \beta.[b-a].a + \beta.\frac{1}{2}.[b-a]^2 + [b-a].\delta$

$S_m = [b-a](\alpha.a^2 + \beta a + \delta) + [b-a]^2.\frac{1}{2}.\beta + \frac{1}{3}\alpha.[b-a]^3$

3.2.4.1 – Apresentação gráfica para funções crescentes.

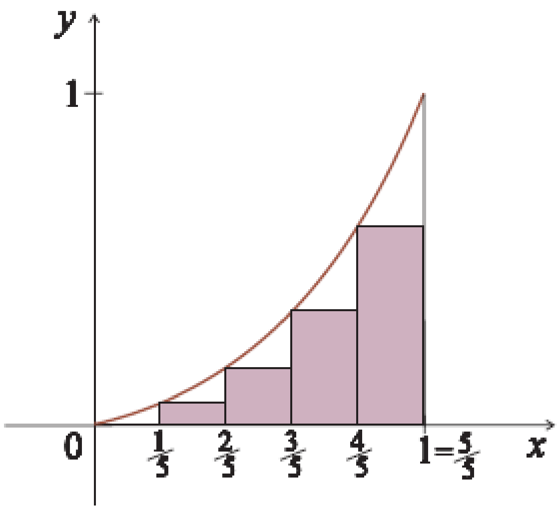



Fig. 3.7

Observe, graficamente, *, que existirá uma convergência. O uso das propriedades do somatório será necessário.

De forma semelhante, tomando os limites superiores do intervalo, teremos uma soma superior ao valor da área do gráfico.

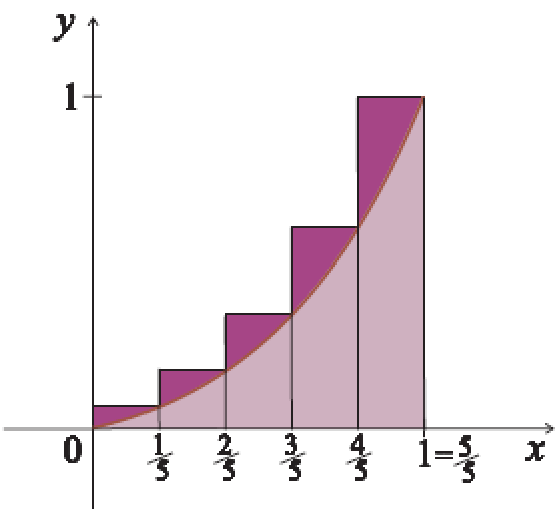


Fig. 3.8

Para os limites superiores usaremos:

$\mathrm{x_i}=\mathrm{a}+\mathrm{i}.\frac{\mathrm{(b\text{-}a)}}{\mathrm{n}}.$

Quando $i = 1$ então $x_1 = a + \frac{b-a}{n}$ e quando $i = n$ então $x_n = b$.

Portanto, para seu cálculo, fazendo a substituição de $\mathrm{x_i}$ na equação $f(x) = \alpha.x^2 + \beta.x + \delta$ que por sua vez substituiremos em $S_m = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i).\left[\frac{b-a}{n}\right]$.

$$S_M = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left\{\alpha.\left(\mathrm{a} + \mathrm{i}.\frac{(\mathrm{b}-\mathrm{a})}{\mathrm{n}}\right)^2 + \beta.\left(\mathrm{a} + \mathrm{i}.\frac{(\mathrm{b}-\mathrm{a})}{\mathrm{n}}\right) + \delta\right\}.\left[\frac{b-a}{n}\right]$$

$$S_M = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left\{\alpha.\left(a^2 + 2.\mathrm{a}.\mathrm{i}.\frac{(\mathrm{b}-\mathrm{a})}{\mathrm{n}} + \left[i.\frac{(\mathrm{b}-\mathrm{a})}{\mathrm{n}}\right]^2\right) + \beta.\left(\mathrm{a} + \mathrm{i}.\frac{(\mathrm{b}-\mathrm{a})}{\mathrm{n}}\right) + \delta\right\}.\left[\frac{b-a}{n}\right]$$

$$S_M = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{b-a}{n}\right] \sum_{i=1}^{n} \alpha.a^2 + 2.a.\alpha\left[\frac{b-a}{n}\right]^2.\sum_{i=1}^{n} i + \alpha\left[\frac{b-a}{n}\right]^3.\sum_{i=1}^{n} i^2 + \beta\left[\frac{b-a}{n}\right]\sum_{i=1}^{n} a + \beta\left[\frac{b-a}{n}\right]^2.\sum_{i=1}^{n} i + \left[\frac{b-a}{n}\right].\sum_{i=1}^{n} \delta$$

$$S_M = \lim_{n\to\infty} \left\{(b-a)\alpha.a^2 + 2.\alpha.a.\left(\frac{b-a}{n}\right)^2.\frac{n(n+1)}{2} + \alpha\left(\frac{b-a}{n}\right)^3.\frac{n(n+1).(2n+1)}{6} + \beta\left(\frac{b-a}{n}\right).a.n + \beta.\left(\frac{b-a}{n}\right)^2.\frac{n.(n+1)}{2} + (b-a).\delta\right\}$$

$$S_M = (b-a)\alpha.a^2 + \alpha.a.(b-a)^2 + \alpha(b-a)^3.\frac{1}{3} + \beta(b-a).a + \beta.(b-a)^2.\frac{1}{2} + (b-a).\delta$$

$$S_M = [b-a](\alpha . a^2 + \beta a + \delta) + [b-a]^2 . \frac{1}{2} . \beta + \frac{1}{3}\alpha . [b-a]^3$$

Observe que houve uma convergência. Portanto, as ilustrações que foram apresentadas, sistematicamente, formando retângulos menores, cuja soma chamamos de, ( $S_m$), e retângulos maiores, ( $S_M$), e calcularmos a sua soma. Como real, ($S_{real}$ ),será sempre maior ou igual ao menor e menor ou igual ao maior. Concluímos acima que $S_m \leq S_{real} \leq S_M$.

3.2.4.2 – Apresentação gráfica para funções decrescentes.

Para o caso onde a função é decrescente quando tomamos os limites inferiores, o valor da área encontrada será maior que a área do gráfico abaixo.

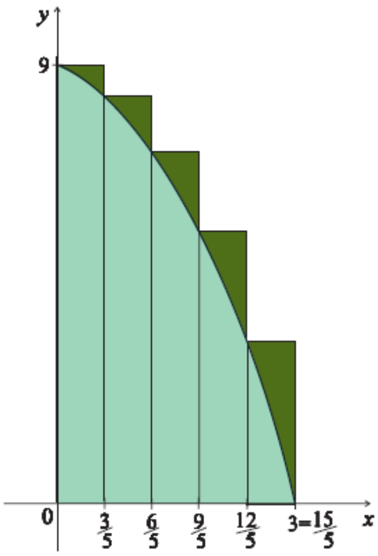



Fig.3.9

Quando tomamos o limite superior do intervalo estamos calculando valores menores que a áreas do gráfico, isto é, a soma das áreas será menor que a do gráfico abaixo.

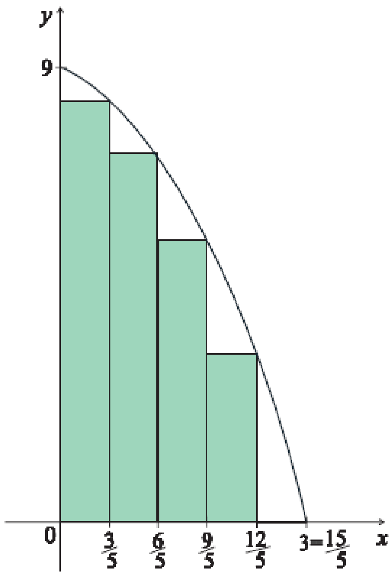



Fig.3.10

Em síntese:

Nos intervalos, onde a função é crescente, para calcularmos o $S_m$, tomamos o limite inferior do intervalo e nos decrescente o limite superior. Já para calcularmos o $S_M$ nos intervalos, onde a função é crescente tomamos o limite superior e nos decrescente o limite interior.

Nos gráficos, ...., podemos observar que existiu uma convergência de $S_m$ e $S_M$ ,para um único valor. Este valor, este será $S_{grafico}$.

Para garantirmos a sua existência. o procedimento de forma sistemática é muito importante.

## Capitulo 4

## A apresentação gráfica - Integral.

Suponhamos dada uma função $f:[a, b] \rightarrow$ R limitada. Admitamos, por simplicidade que f não seja negativa, isto é, $f(x) \geq 0$ ,para todo $x \in [a, b]$. Consideremos o conjunto $A = \{(x, y) \in R^2;\ a \leq x \leq b,\ 0 \leq y \leq f(x)\}$ formado pelos pontos do plano compreendidos entre o eixo da abscissa, o gráfico de f, e as retas verticais x = a e x = b.

A área de um subconjunto limitado A do plano $R^2$ poderá ser representada por um número real.

Vamos considerar a área de um conjunto A, representado graficamente abaixo, chamaremos de polígonos retangulares, vários retângulos justapostos cujos lados são paralelos aos eixos x = 0 e y = 0.

Cada um desses retângulos determina uma decomposição (“partição “) do intervalo [a, b] em subintervalos justapostos e, a área de total (soma das áreas dos retângulos que constituem) traz a noção de soma inferior, entre o eixo e o gráfico, (Área interna).

Ilustração do Conceito

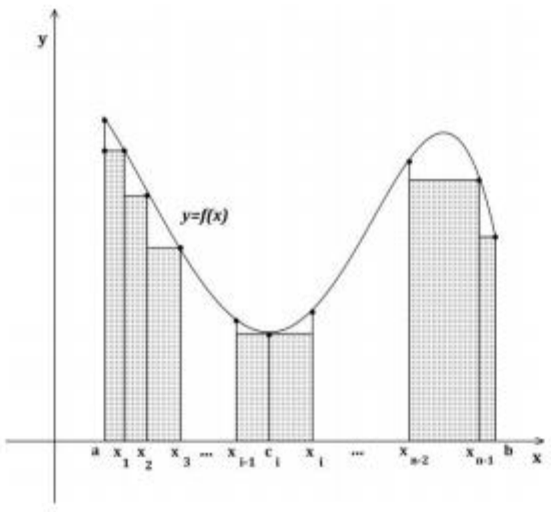



Fig.4.1

Observe que não podemos tomar os limites inferiores ou superiores de forma sistemática como fizemos anteriormente, uma vez que a função em alguns intervalos é crescente e em outros decrescente. Agora, portanto, existe a necessidade de introduzirmos dois conceitos de grande importância.

Tomemos o conjunto dos valores das funções em cada intervalo.

$$A = \{\{f(x_{i1}\ ), f(x_{i2}\ ), \dots, f(x_{i+1}) \subset R;\ x_i \in [x_i, x_{i+1}\ ] \subset [a, b]\}$$

O noção gráfica mostrada acima nos conduz a necessidade das definições de ínfimo e supremo. ,

Seja $A$,um subconjunto de R, isto é, $A \subset R$.

i) Um número real s é uma cota superior de A quando todos elementos de A são menores ou igual a s. $\forall\, a \;\in A : a \leq s$.

ii) Um número real i é uma cota inferior de A quando todos elementos de A são maiores ou igual a i. $\forall\, a \;\in A : a \geq i$.

iii) Quando para um subconjunto A, existem elementos que atendam as condições (i) e (ii), este subconjunto é dito limitado.

Se s é a menor das cotas superiores de A, diz-se que s = sup. A.

Se i é maior das cotas inferiores de A, diz que i = inf. A

O gráfico abaixo permite uma melhor visão.

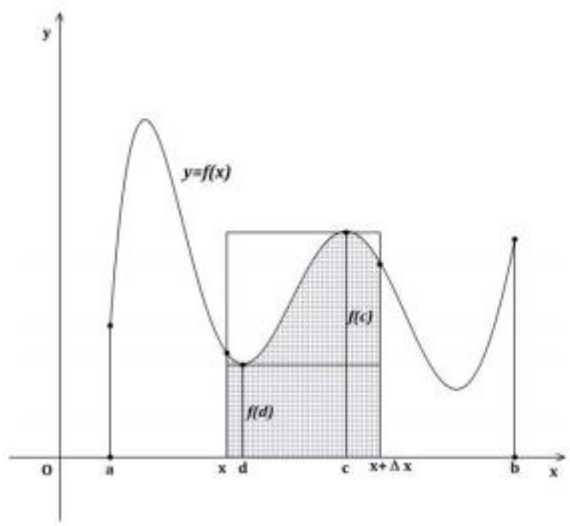



Fig.4.2

Consideremos os retângulos de base $[x, x + \Delta x]$ ilustração comparativa: 1) Se tomarmos $f(d)$, isto é, o menor valor de $f(x)$, e portando calcularemos um valor de área menor que do gráfico; 2) Se tomarmos $f(c)$ como altura, isto é, o maior valor de $f(x)$, e portanto calcularemos uma valor maior que a área do gráfico, a Integral estará entre as áreas.

Observemos a figura acima no retângulo largura, $\Delta x$, isto é de intervalo $[x, x + \Delta x]$. A altura a ser considera deverá ser $f(d)$ para garantir a área interna. A medida que tornamos o $\Delta x$ pequeno, o tanto quanto se queira. A medida que $\Delta x$ se torna pequena, a soma das áreas se aproxima por valores menores da interna do gráfico. De modo semelhante podemos fazer para encontrar a por valores maiores.

4.1- Apresentação gráfica de áreas de funções.

A representação de um retângulo e o cálculo de sua área e fazendo a composição de gráfico com a justaposição de retângulos provavelmente obtermos uma boa compreensão dos conceitos de área sobre o gráfico de funções apresentados.

Portanto, seduzir o aluno com ilustrações, mostrando as facilidades da análise gráfica, privilegiando o visual e depois partindo para o tratamento numérico, isto é, cálculo de valores e finalizando com uma análise.

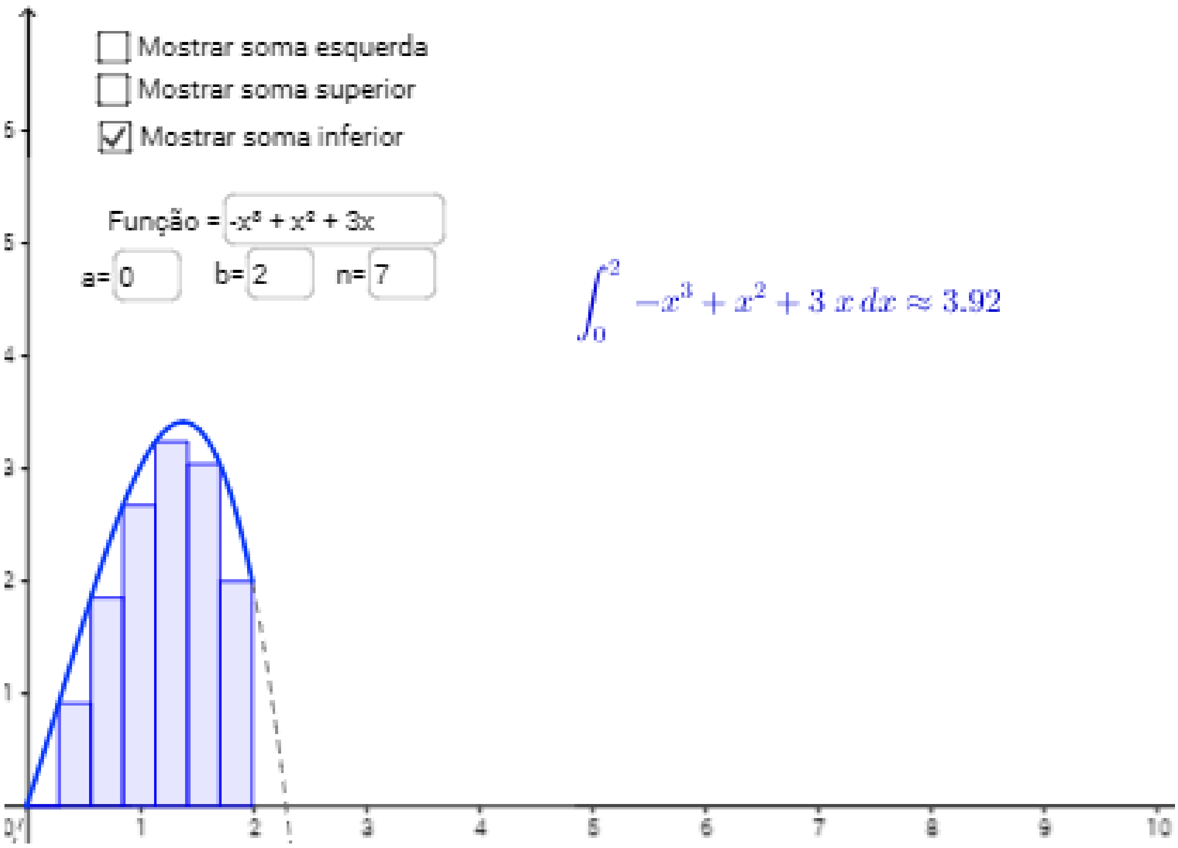



Fig. 4.3

Para n=7, estamos dividindo o intervalo $[a, b]$ em 7 subintervalos de mesmo tamanho. Podemos observar que existe uma aproximação da área do gráfico por valores menores.

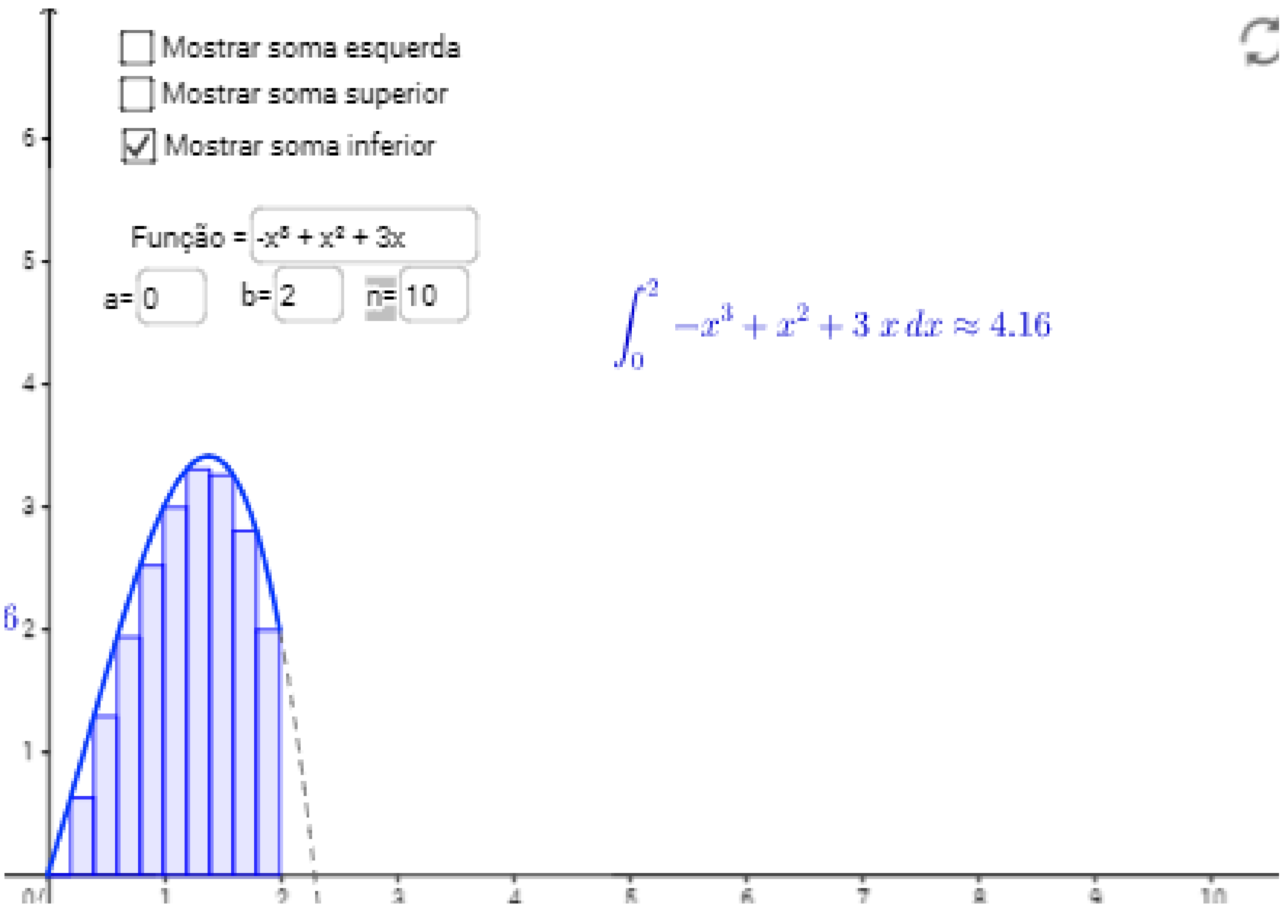



Fig.4.4

Podemos observar que quando aumentamos o número de retângulo, isto é, reduzimos o comprimento de sua base. E sua área aumenta, aproximando da área do gráfico.

Chamando $m_i$ os ínfimos das $f$ nos intervalos

$$m = m_1.(t_1 - t_0) + \cdots + m_n.(t_n - t_{n-1}) = \sum_{i=1}^{n} m_i.(t_i - t_{i-1})$$

Se fizéssemos por retângulos maiores teríamos a aproximação por valores superiores.

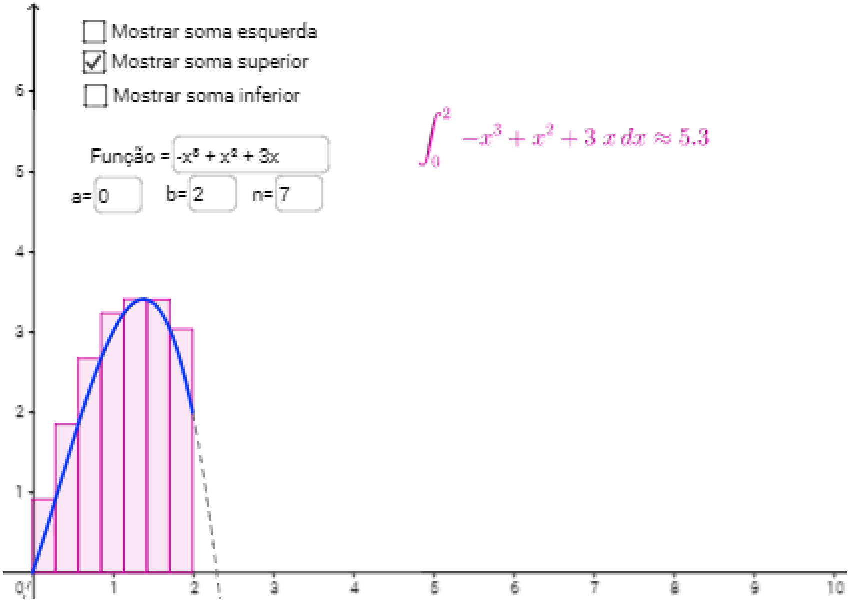



Fig.4.5

De modo semelhante a aproximação dos valores menores, apenas as áreas dos retângulos são maiores que do gráfico.

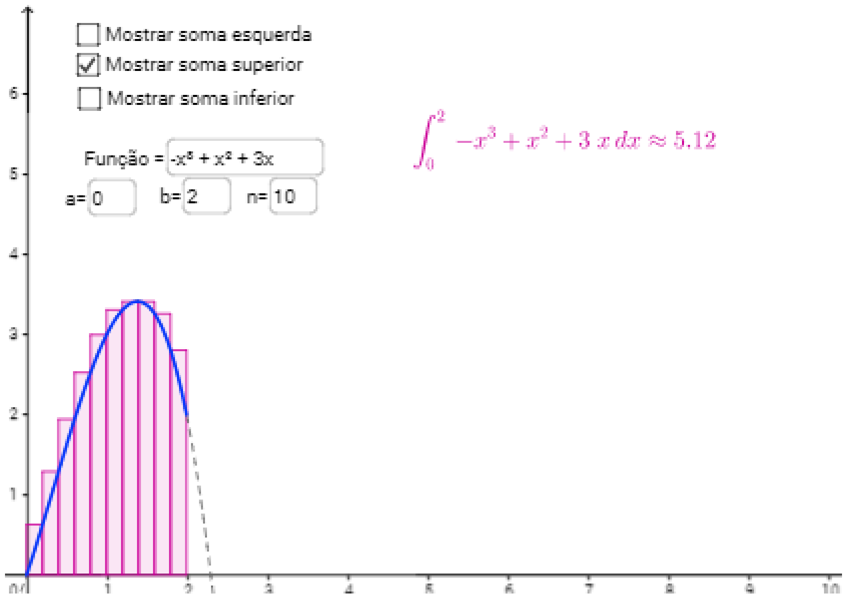



Fig.4.6

Podemos observar que quando aumentamos o número de retângulo, isto é, quando o numero de intervalos aumento sua área diminui, entretanto sempre maiores que as áreas dos gráficos.

Chamando $M_i$ os supremos das $f$ nos intervalos.

$$M = M_i.(t_1 - t_0) + \cdots + M_n.(t_n - t_{n-1}) = \sum_{i=1}^{n} M_i.(t_i - t_{i-1})$$

Portanto: $m \leq \int_a^b f(x)dx \leq M$

4.2 - Cálculo diferencial – O seu uso nas deduções.

Para um movimento onde a aceleração é descrita por uma função não bem-comportada, o cálculo diferencial facilitará em muito.

Pela definição de aceleração:

$$\frac{dv}{dt} = a(t)$$

$$dv = a(t).dt$$

$$\int dv = \int a(t).dt$$

$$v - v_0 = \int_{t_0}^{t} a(t).dt$$

$$v(t) = v_0 + \int_{t_0}^{t} a(t).dt$$

Conhecida a função $v(t)$ e aplicando as condições iniciais.

Isto é, $v(t_0)$, determinaremos $v(t)$

Pela definição de velocidade.

$$\frac{ds}{dt} = v(t)$$

$$ds = v(t).dt$$

$$\int ds = \int v(t).dt$$

$$s - s_0 = \int_{t_0}^{t} v(t).dt$$

$$s(t) = s_0 + \int_{t_0}^{t} v(t).\,dt$$

Aplicando as condições iniciais, encontramos uma função que descreve a posição da partícula a cada instante t.

$$s(t) = s_0 + \int_{t_0}^{t} [v_0 + \int_{t_0}^{t} a(t).\,dt]\,.\,dt$$

$$s(t) = s_0 + v_0 \int_{t_0}^{t} dt + \int_{t_0}^{t} \int_{t_0}^{t} a(t).\,dt\,.\,dt$$

$$s(t) = s_0 + v_0.(t - t_0) + \int_{t_0}^{t} \int_{t_0}^{t} a(t).\,dt.\,dt$$

Para fazer o cálculo da integral apresentada acima deveríamos ter uma função que descreva a função, a(t).

4.3 – Comprimento de Curvas no Plano – Usando cálculo diferencial.

E uma função, continua e diferençável, em todo o seu domínio.

Para calcularmos, o espaço percorrido, será feito a soma dos pequenos trechos.

$$D = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=0}^{n} \sqrt{[x_{i+1} - x_i]^2 + [f(x_{i+1}) - f(x_i)]^2} \quad (1)$$

Como a função é diferençável

$$f'(x_\varepsilon) = \lim_{x_{i+1} \to x_i} \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}$$

Logo, podemos escrever:

$$f(x_{i+1}) - f(x_i) = f'(x_\varepsilon).(x_{i+1} - x_i) \quad (2)$$

Substituindo (2) em (1). Temos

$$D = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=0}^{n} \sqrt{[x_{i+1} - x_i]^2 + [f'(x_\varepsilon).(x_{i+1} - x_i)]^2}$$

$$D = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=0}^{n} (x_{i+1} - x_i).\sqrt{1 + [f'(x_\varepsilon)]^2} \quad )$$

Portando, chegaremos a uma expressão do cálculo integral

$$D = \int_{x_a}^{x_b} \sqrt{\left(f'(x)\right)^2 + 1}\,.dx$$

4.3.1 – Usando ilustrações gráficas para mostrar a praticidade do cálculo.

Para usarmos um software, como ferramenta de cálculo, como a ilustração, existe a necessidade do seu domínio. Entretanto, devido à grande quantidade aplicações desenvolvidas na internet. O usuário, que tem um domínio do conceito, conhecimento “solido”, poderá filtrar e fazer adaptações nos exemplos oferecidos pelo software nas webs. Quando inicialmente trabalhamos com atividades em sala, em geral, partimos de atividades simples

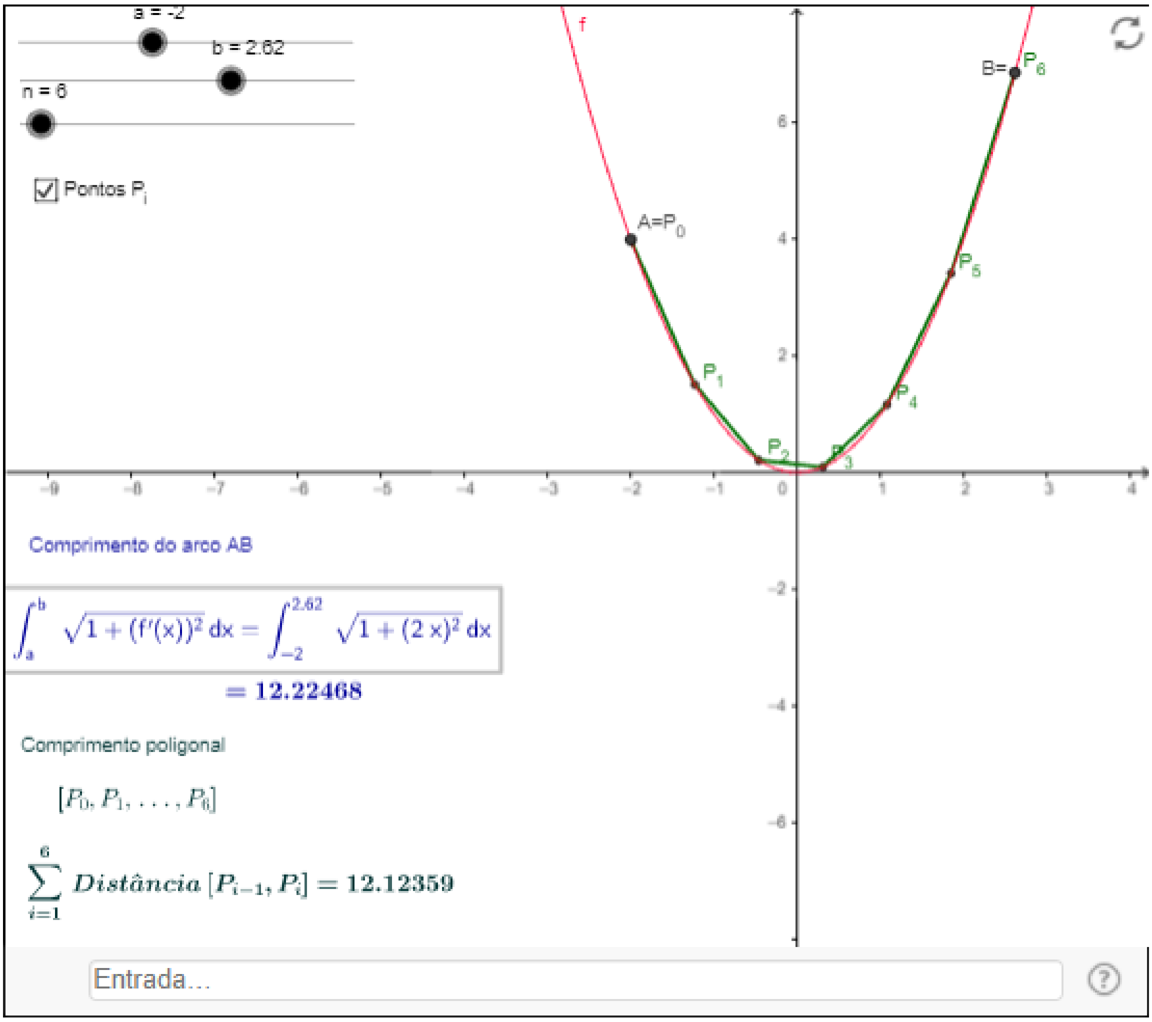



Fig.4.7

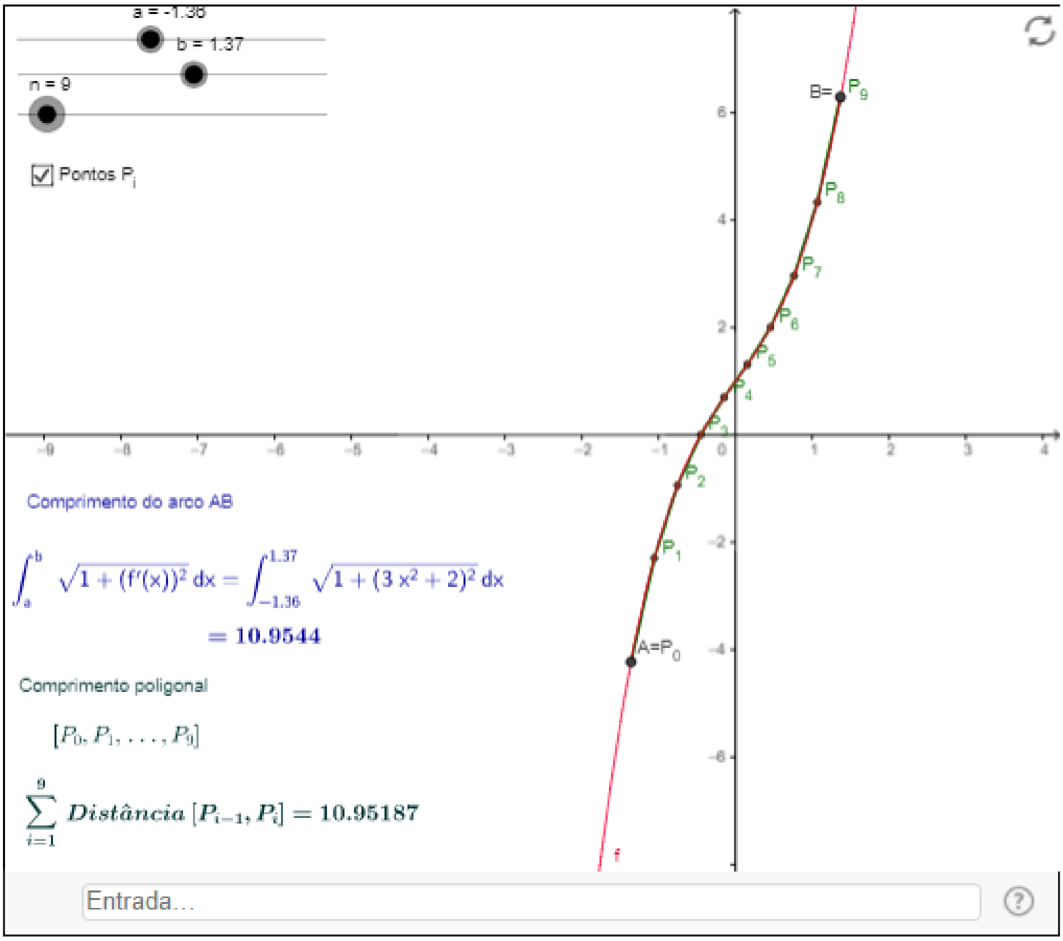



Fig.4.8

4.3.2 - Aplicação do conceito de Comprimento de curvas na Física.

Uma motivação bastante interessante. Conhecida, a uma função que descreva a trajetória, será possível calcular o espaço percorrido.

Para o movimento, em três dimensões.

Seja, C uma curva definida por uma função $\varphi(t), a \leq t \leq b$ , continuas no intervalo, portanto, pode ser subdividida em intervalos. Curva no $R^3$, e seja, uma partição do intervalo [ a ,b ] em n intervalos de mesmo comprimento, $\Delta t = t_{i+1} - t_i = \frac{b-a}{n}$ , isto é , podemos escrever $a = t_0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_n = b$.

Para, $0 \leq i \leq n-1$ , consideremos uma linha poligonal formado pela união de pares de pontos, de ( $\varphi(t_i), \varphi(t_{i+1})$)

Quando fizermos n, “grande “, então o comprimento da linha poligonal será aproximadamente igual ao comprimento da curva.

O comprimento da curva é a soma dos segmentos de reta, de $\varphi(t_i)$ até $\varphi(t_{i+1})$.

Detalhando melhor:

Seja $C : R \rightarrow R^3$ uma função real e C uma curva em $R^3$, definida pela função

$\varphi: I = [a, b] \rightarrow R^3$

$t \rightarrow \varphi(t) = \big(x(t), y(t), z(t)\big)$

O comprimento L: Soma dos segmentos = $\sum_{i=0}^{n-1} \mid \varphi(\, t_{i+1}\,) - \varphi\,(\, t_i\,)|$

A função $\varphi(t) = \big(x(t), y(t), z(t)\big)$ em $[t_i, t_{i+1}]$, existem, $t_i^1, t_i^2, t_i^3 \in (t_i, t_{i+1})$ , tais que:

$$x(t_{i+1}) - x(t_i) = x'(t_i^1).(t_{i+1} - t_i)$$
$$y(t_{i+1}) - y(t_i) = y'(t_i^2).(t_{i+1} - t_i)$$
$$z(t_{i+1}) - z(t_i) = z'(t_i^3).(t_{i+1} - t_i)$$

E sabemos que:

$$|\varphi(t_{i+1}) - \varphi(t_i)| = \sqrt{\big(x(t_{i+1}) - x(t_i)\big)^2 + \big(y(t_{i+1}) - y(t_i)\big)^2 + \big(z(t_{i+1}) - z(t_i)\big)^2}$$

Substituindo temos:

$$L = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{[x'(t_i^1).(t_{i+1} - t_i)]^2 + [y'(t_i^2).(t_{i+1} - t_i)]^2 + [z'(t_i^3).(t_{i+1} - t_i)]^2}$$

$$L = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{[x'(t_i^1)]^2 + [y'(t_i^2)]^2 + [z'(t_i^3)]^2}.(t_{i+1} - t_i)$$

Portanto, quando n tende ao infinito, com a $\varphi(t)$ é $continua$. Portanto, o somatório será equivalente a

$$L = \int_a^b \sqrt{[\, x'(\, t\,)\,]^2 + [\, y'\,(\, t\,)\,]^2 + [\, z'\,(\, t\,)\,]^2}.\,dt$$

4.4 - Uma forma simples de aproximar o comprimento de uma curva usando desigualdade triangular.

4.1-DESIGUALDADE TRIANGULAR.

Vamos provar a desigualdade triangular para o exemplo de distâncias a e b definidas em *R.* Partindo da definição de modulo: $|a| \geq 0 \; \forall \, a \; \in R$

$$|a| = \begin{cases} a, & se \; a \geq 0 \\ -a, & se \; a \; < 0 \end{cases}$$

Sejam $\forall \; a \; e \; b \; \in R,$ temos então que

$-|a| \leq \; a \; \leq \; |a|,$

$-|b| \; \leq \; b \leq \; |b|.$

Somando as desigualdades, temos

$-[|a| + |b| \leq a + b \; \leq |a| + |b| \rightarrow |a + b| \leq |a| + |b|.$

Sejam os pontos A, B sobre uma curva qualquer, tomando os pontos $P_i$ sobre a curva, obedecendo a seguinte sistemática:

i) Os pontos, 1 e 2, representará a 1ªetapa de marcação, isto é, início e final.

ii) A segunda será a marcação de um $P_3$, tal que o corresponde ao ponto médio do domínio da função.

iii) Gerando dois intervalos, portanto, terceira etapa, podemos marcas dois pontos de modo semelhante ao item ii.

Observamos que quando marcamos pontos intermediários, termos duas hipóteses:

1 – O ponto pode pertencer ao segmento que une os pontos anteriores, isto é, a soma dos segmentos formados é igual a segmento anterior.

2- O ponto não pertence ao segmento, não são colineares. Pela desigualdade triangular, a soma dos dois segmentos formados é maior que o segmento anterior.

Comentando a figura abaixo:

1- A interseção do segmento que une P1 ao P2 é o ponto P*.
2- P3 e P4 não pertencem ao segmento que une P1 ao P*, P* ao P2. Pela desigualdade triangular $\overline{P1P3} + \overline{P3P*} > \overline{P1P*}$.

3- De forma semelhante $\overline{P*P4} + \overline{P4P2} > \overline{P*P2}$

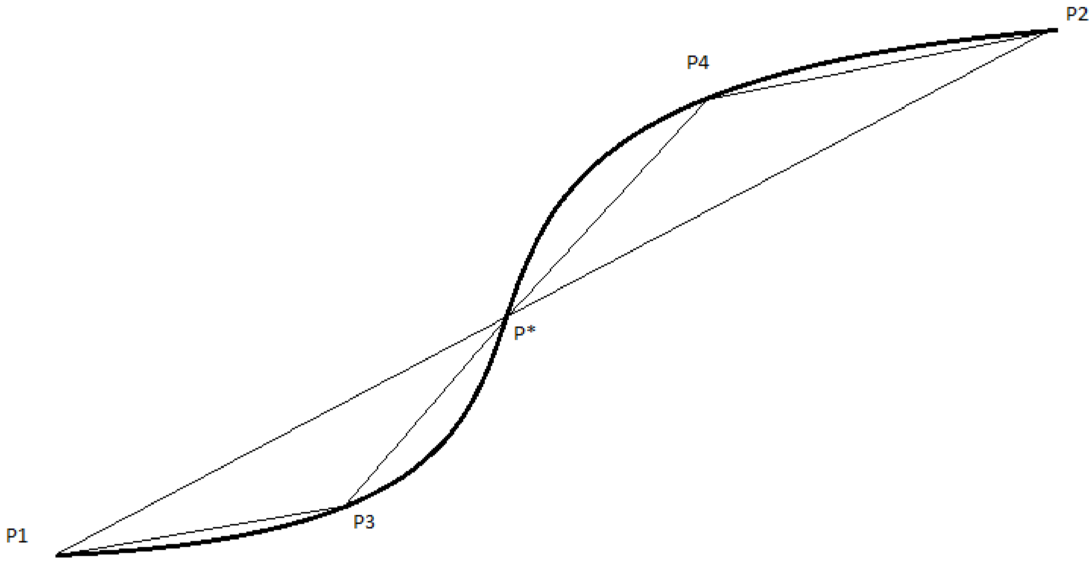



Fig.4.9

4- Observe que marcamos na terceira etapa os pontos: P5, P6,P7,P8

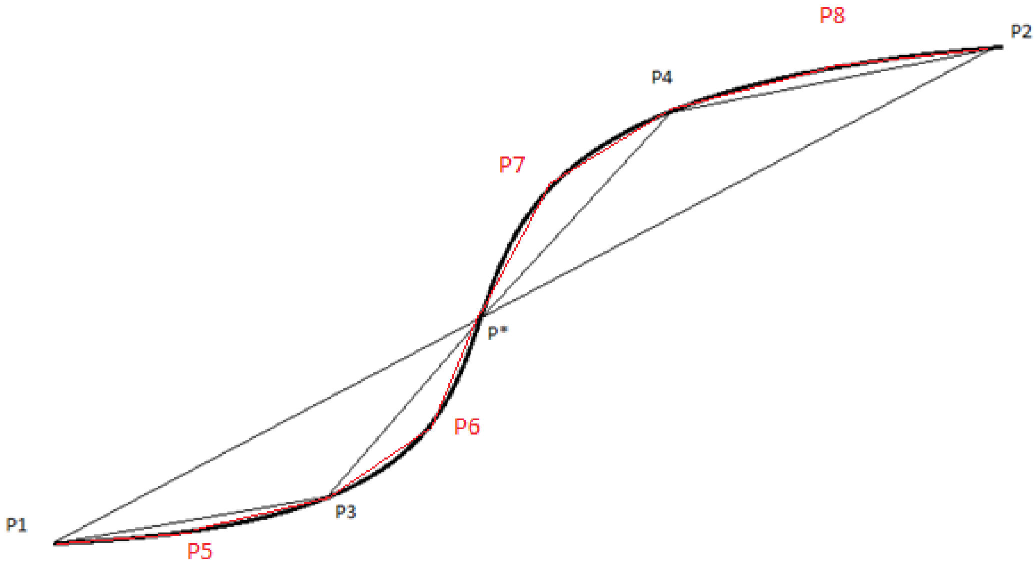



Fig.4.10

Fazendo esse processo n vezes, isto é, para um n “grande” existirá uma convergência. Pois estamos medindo o comprimento de uma curva. É um processo, trabalhoso e cansativo. Portanto, o uso de um software será muito importante para tornar a aula dinâmica e bem receptiva por parte dos alunos. Prendendo sua atenção por mais tempo, e a tornando mais compreensível. Uma vez que estamos trabalhando com uma geração ligada ao visual e a tecnologia. Inclusive existem software de uso no celular, Geogebra.

# Capitulo 5

## Outras curvas importantes.

5.1 - Circunferência

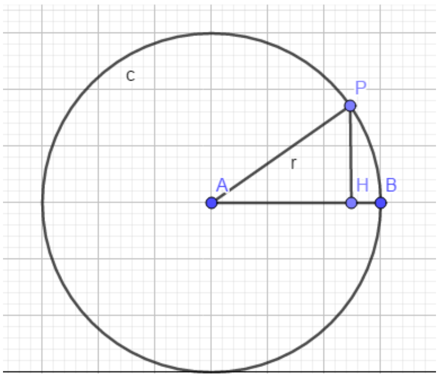



Fig.5.1

Vamos considerar os pontos A,P e H.

$A = (x_a, y_a)$ , $B = (x_b, y_b)$, $P = (x, y)$ e $H = (x_H\,, y_H)$

Consideremos que o segmento $\overline{PH} \perp \ \overline{AB}$ . Portanto, o triângulo AHP é retângulo, ângulo reto em H.

Denotando o ângulo $P\hat{A}H\ por\ \alpha$ e define-se $sen(\alpha)$ como a razão entre o cateto oposto e a hipotenusa e $\cos(\alpha)$ como a razão entre o cateto adjacente e a hipotenusa.

Portanto, podemos escrever:

$$sen(\alpha) = \frac{\overline{PH}}{r} \ \Rightarrow \overline{PH} = r.sen(\alpha)$$

$$\cos(\alpha) = \frac{\overline{AH}}{r} \Rightarrow \overline{AH} = r.\cos(\alpha)$$

Vamos escrever as coordenadas do ponto P em função do ponto A, do raio r e ângulo $\alpha$.

$P = (x, y)$ , portanto $x = x_a + r.sen(\alpha)$ e $y = y_a + r.\cos(\alpha)$.

$$\begin{cases} x = x_a + r.sen(\alpha) \\ y = y_a + r.\cos(\alpha) \end{cases}$$

Agora vamos escrever outra equação para descrever a circunferência.

Como sabemos, $x - x_a\ e\ y - y_a$ ,são catetos do triângulo retângulo AHP

$[r.sen(\alpha)]^2 + [r.\cos(\alpha)]^2 = r^2.[sen^2(\alpha) + cos^2(\alpha)]$

Como: $sen^2(\alpha) + cos^2(\alpha) = 1\ \forall\ \alpha \in R$

$[\ r\ .\ sen\ (\ \alpha\ )\ ]^2 + [\ r\ .\cos\ (\ \alpha\ )\ ]^2 = r^2$

e

$x - x_a = r.sen(\alpha)$ e $y - y_a = r.\cos(\alpha)$.

Aplicando o Teorema de Pitágoras.

$(x - x_a\ \ )^2 + (y - y_a)^2 = r^2$

Podemos explorar algumas propriedades:

Derivando y em relação a x: $\frac{dy}{dx} = f(x)$

$$2(x - x_a) + 2(y - y_a).\frac{dy}{dx} = 0$$

$$2(x - x_a)\frac{dx}{dx} + 2(y - y_a).\frac{dy}{dx} = 0$$

$(x - x_a).\frac{dx}{dx} + (y - y_a).\frac{dy}{dx} = 0\ \rightarrow < (x - x_a; y - y_a), \left(\frac{dx}{dx}\ ,\ \frac{dy}{dx}\right) \geq\ 0$

$(x - x_a, y - y_a) \perp (\frac{dx}{dx}\ \ ,\ \frac{dy}{dx})$

Como o vetor $(x - x_a, y - y_a)$ representa o raio e $\left(\frac{dx}{dx}\ ,\ \frac{dy}{dx}\right)$ o vetor velocidade.

5.2- Elipse.

Portanto, deveremos conhecer a definição e dedução da equação de elipse.

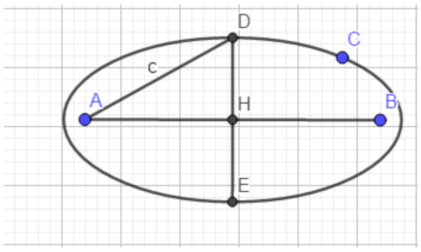



Fig.5.2

Sejam os pontos: A, B, H e D.

$A = (x_a, y_a) \quad B = (x_b, y_b\ ) \quad H = (x_0, y_o) = \left(\frac{x_b + x_a}{2}\ , \frac{y_a + y_b}{2}\ \right)$

$D = (x, y)$

Sendo, H é ponto médio entre os pontos A e B. Portanto, $\overline{AH} \equiv \overline{HB}$ e os ângulos $A\hat{H}D\ e\ B\hat{H}D$ são retos, o segmento $\overline{DH}$ é comum aos dois triângulos. Portanto, podemos concluir que eles são congruentes. Portanto, $\overline{AD} \equiv \overline{DB}$.

Observando a figura podemos concluir que a soma das distâncias é igual a 2c.

Definindo:

1- $A\ distância\ de\ A\ a\ D\ , vamos\ chamar\ de\ d_{AD}$ e $entre\ B\ a\ D\ de\ d_{BD}$.
2- $A\ distâncias\ entre\ pontos\ no\ plano, são\ definidas\ abaixo : Sendo\ A = (x_a, y_a)\ e\ D = (x, y)\ , d_{AD} = \sqrt{\ (\ x - x_a\ )^2 + (\ y - y_a\ )^2}$ e entre B e D $d_{BD} = \sqrt{(x - x_b)^2 + (y - y_b)^2}$

Definição de elipse. lugar geométrico dos pontos de um plano cujas distâncias a dois pontos fixos desse plano têm soma constante; interseção de um cone circular reto e um plano que corta todas as suas geratrizes.

Substituindo as distâncias.

$d_{AD} + d_{BD} = 2.a$

Por comodidade faremos algumas considerações:

1) O sistema de eixo coordenados passa pelos focos, isto é, a elipse não está rotacionada.

Eixo maior 2a, eixo menor 2b e distância entre focos 2c.

Centro ( $x_o, y_0$)

Portanto, $a^2 = b^2 + c^2$.

Focos $(x_0, y_0 + c)\ e\ (x_0, y_0 - c)$ .

Consideremos um ponto qualquer $(x, y)$.

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0-c)^2}+\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0+c)^2}=2a$$

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0-c)^2}+\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0+c)^2}=2a$$

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2-2c(y-y_o)+c^2} + \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+2c(y-y_0)+c^2}=2a$$

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2-2c(y-y_0)+c^2} = 2a-\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+2c(y-y_0)+c^2}$$

$$\left[\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2-2c(y-y_0)+c^2}\right]^2=\left[2a-\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+2c(y-y_0)+c^2}\right]^2$$

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2-2c(y-y_0)+c^2 = 4a^2-4a\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+2c(y-y_0)+c^2}+(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2+2c(y-y_0)+c^2$$

$$-2c(y-y_0)=4a^2-4a\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+2c(y-y_0)+c^2}+2c(y-y_0)$$

$$4a\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+2c(y-y_0)+c^2}=4a^2+4c(y-y_0)$$

$$a\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+2c(y-y_0)+c^2}=a^2+c(y-y_0)$$

$$\left[a\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+2c(y-y_0)+c^2}\right]^2=[a^2+c(y-y_0)]^2$$

$$\left[a\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+2c(y-y_0)+c^2}\right]^2=[a^2+c(y-y_0)]^2$$

$$a^2[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+2c(y-y_0)+c^2] = a^4+2.a^2.[c(y-y_0)]+c^2.(y-y_0)^2$$

$$a^2(x-x_0)^2 + a^2(y-y_0)^2 + 2ca^2(y-y_0) + c^2a^2$$
$$= a^4 + 2.a^2.[c(y-y_0)] + c^2.(y-y_0)^2$$

$$a^2(x-x_0)^2 + a^2(y-y_0)^2 + c^2a^2 = a^4 + c^2.(y-y_0)^2$$

$$a^2.(x-x_0)^2 + (a^2-c^2).(y-y_0)^2 = a^4 - c^2.a^2$$

$$a^2.(x-x_0)^2 + (a^2-c^2).(y-y_0)^2 = a^2.(a^2-c^2)$$

$$a^2.(x-x_0)^2 + (a^2-c^2).(y-y_0)^2 = a^2.(a^2-c^2)$$

$$\frac{a^2.(x-x_0)^2}{a^2.(a^2-c^2)} + \frac{(a^2-c^2).(y-y_0)^2}{a^2.(a^2-c^2)} = 1$$

$$\frac{(x-x_0)^2}{(a^2-c^2)} + \frac{(y-y_0)^2}{a^2} = 1$$

Como $a^2 = b^2 + c^2$.

$$\frac{(x-x_0)^2}{b^2} + \frac{(y-y_0)^2}{a^2} = 1$$

Derivando y em relação a x: $\frac{dy}{dx} = f\big(x, y(x)\big) = f(x)$

$$\frac{2.(x-x_0)}{b^2} + \frac{2(y-y_0)}{a^2}\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{(x-x_0)}{b^2}.\frac{dx}{dx} + \frac{(y-y_0)}{a^2}.\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -\left(\frac{a}{b}\right)^2.\frac{(x-x_0)}{(y-y_0)}$$

Da equação da Elipse: $\boxed{\frac{(x-x_0)^2}{b^2} + \frac{(y-y_0)^2}{a^2} = 1}$

## 5.2.1- Observações sobre as variações dos parâmetros da equação da elipse.

Observe se fixarmos um valor para b e variarmos o valor de a, teremos:

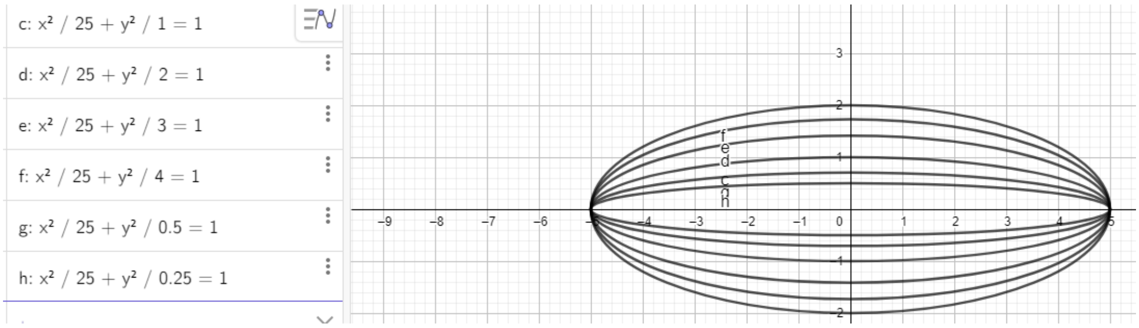



Fig.5.3

De forma análoga: fixamos a e variando b, teremos:

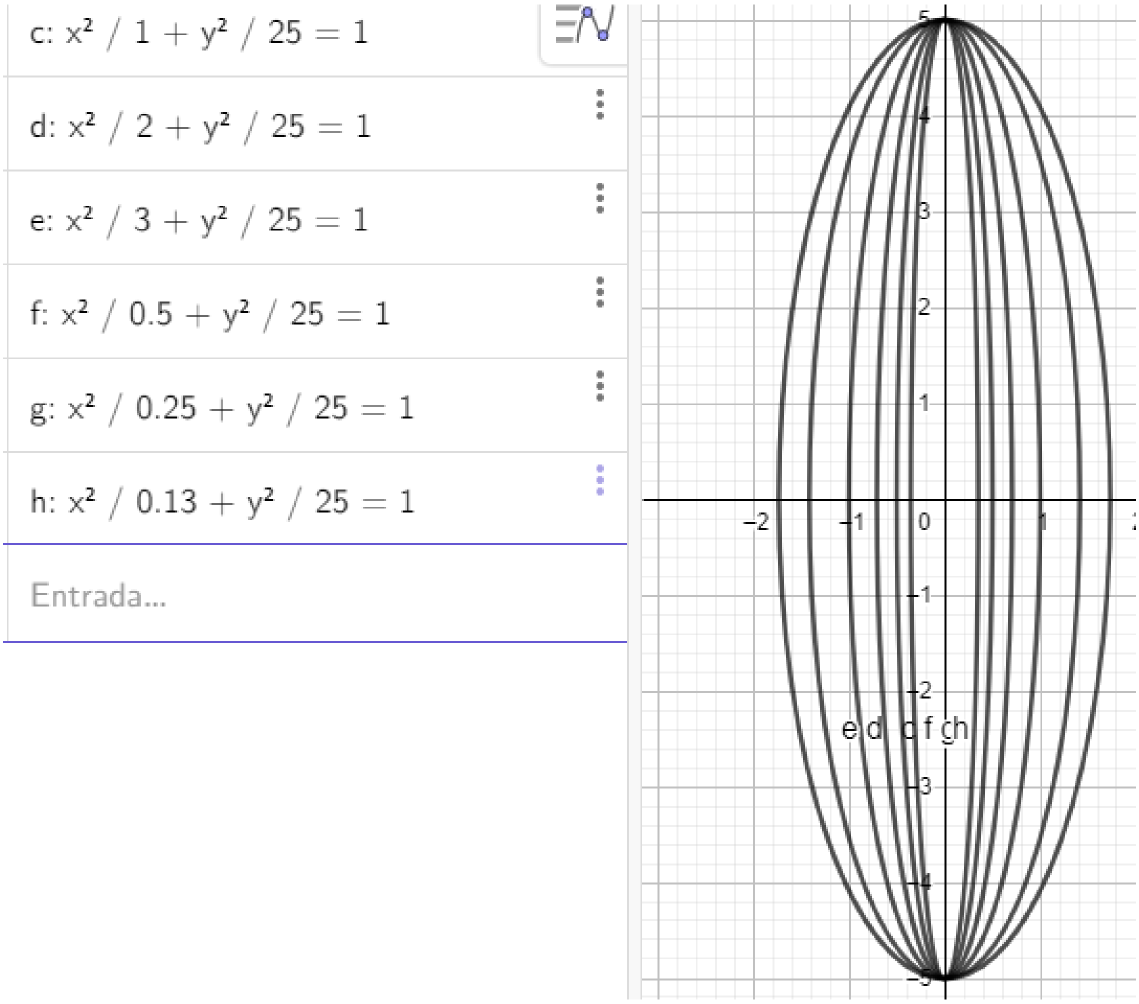



Fig.5.4

Observamos também que: a se aproxima de b, a elipse se aproxima da circunferência.

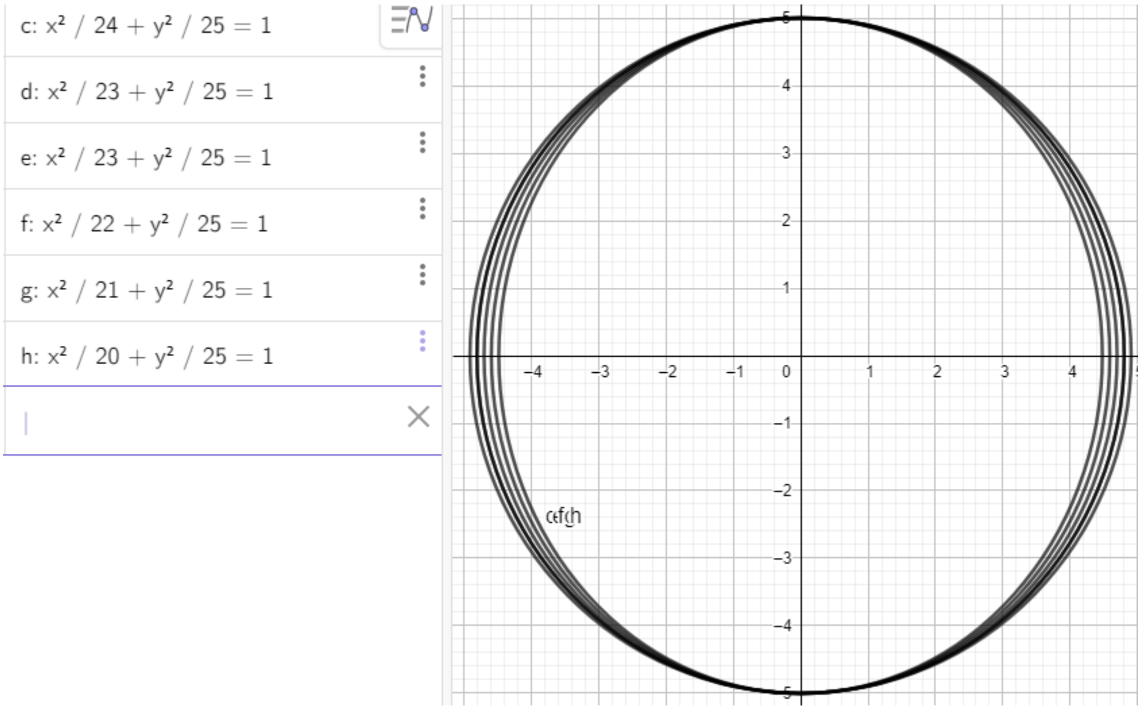



Fig. 5.5

$$\frac{(y-y_0)^2}{a^2} = 1 - \frac{(x-x_0)^2}{b^2}$$

$$(y-y_0)^2 = a^2 - \left(\frac{a}{b}\right)^2 (x-x_0)^2$$

$$y - y_0 = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{b}\right)^2 (x-x_0)^2}$$

Substituindo, temos:

$$\frac{dy}{dx} = -\left(\frac{a}{b}\right)^2 \cdot \frac{(x-x_0)}{\sqrt{a^2-\left(\frac{a}{b}\right)^2(x-x_0)^2}}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\left(\frac{a}{b}\right)^2 \cdot \frac{(x-x_0)}{a\sqrt{1-\left(\frac{1}{b}\right)^2(x-x_0)^2}}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{a}{b} \cdot \frac{(x-x_0)}{\sqrt{b^2-(x-x_0)^2}}$$

Quando $x = x_0 \to \frac{dy}{dx} = 0$ , isto é, para os pontos onde a distância do sol ao planeta é máxima ou mínima. Portanto, sua velocidade tem a direção do eixo de y.

Reta que passa pôr um ponto qualquer da elipse, $p = (x, y)$ e seus foco.

Sendo os focos: $(x_0, y_0 + c)$ e $(x_0, y_0 - c)$

Os vetores diretores são:

$\vec{u} = (x - x_0 \, , y - y_0 - c) \; e \; \vec{v} = (x - x_0 \, , y - y_0 + c)$

$Como \; p = (\, x \, , y \,) \in elipse.$

$$\vec{u} = \left( x - x_0 \, , \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{b}\right)^2 (x - x_0)^2} - c \right) \; e \; \vec{v}$$

$$= \left( x - x_0 \, , \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{b}\right)^2 (x - x_0)^2} + c \right)$$

Como sabemos a equação de uma elipse é da forma:

$\frac{(\, x - x_0 \,)^2}{a^2} + \frac{(\, y - y_0 \,)^2}{b^2} = 1$

Se chamarmos:

$$sen^2(\, \alpha \,) = \frac{(\, x - x_0 \,)^2}{a^2} \Rightarrow sen(\, \alpha \,) = \frac{x \, - \, x_0}{a} \Rightarrow a.sen(\, \alpha \,) = x - x_0$$

$$\Rightarrow x_0 + \; a.sen(\, \alpha \,) = x$$

$$cos^2(\, \alpha \,) = \frac{(\, y - y_0 \,)^2}{b^2} \Rightarrow \cos(\, \alpha \,) = \frac{y \, - \, y_0}{b} \Rightarrow \; b.\cos(\, \alpha \,) = y - y_0 \Rightarrow y_0 + b.con(\, \alpha \,) = y$$

Portanto, o conjunto de pontos será ( $x_0 + \; a.sen(\alpha), \; y_0 + b.con(\alpha)$)

$$\begin{cases} x = x_0 + \; a.sen(\alpha) \\ y = y_0 + b.con(\alpha) \end{cases}$$

5.2.2 - Uma outra forma de definirmos uma elipse.

Fixando no plano uma reta r, diretriz, e um ponto F, foco, não pertencente a reta r. O conjunto de pontos P = (x, y) no plano, tais que

$$\text{dist.}\,(P\,,F) = \text{e.dist.}\,(P\,,r)$$

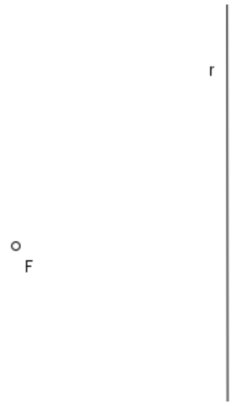



Fig.5.6

Tomando um sistema de eixo coordenados cujo eixo, x, passa pelo foco, F.

Onde:

1)$dist.(P,F)$ é a distância de um ponto, P, qualquer pertencente a curva ao foco;

2) $e$ é a excentricidade da elipse;

3) $dist(P,r)$ é a distância do ponto, P, a reta diretriz, $r$.

Considerações:

Sendo $e > 0$ , a equação representará uma cônica.

Demonstração:

Se e = 1 então, $dist.(P,F) = dist.(P,r)$, portanto uma parábola. Consideremos, o caso em que $e \neq 1$. Portanto, a substituição de (dist.( F, r )) que por comodidade por d  e tomando um sistema de eixos e r seja a vertical, $x = \frac{p}{e^2}$ . E sendo o foco, ( p, 0 ) ,por comodidade.

Se $dist.(F,r) = d$ e $F = (p,0)$ e $r : x = \frac{p}{e^2}$ .

$\frac{p}{e^2} - p = d \Rightarrow \frac{p - p.e^2}{e^2} = d \therefore p = \frac{d.e^2}{1-e^2}$

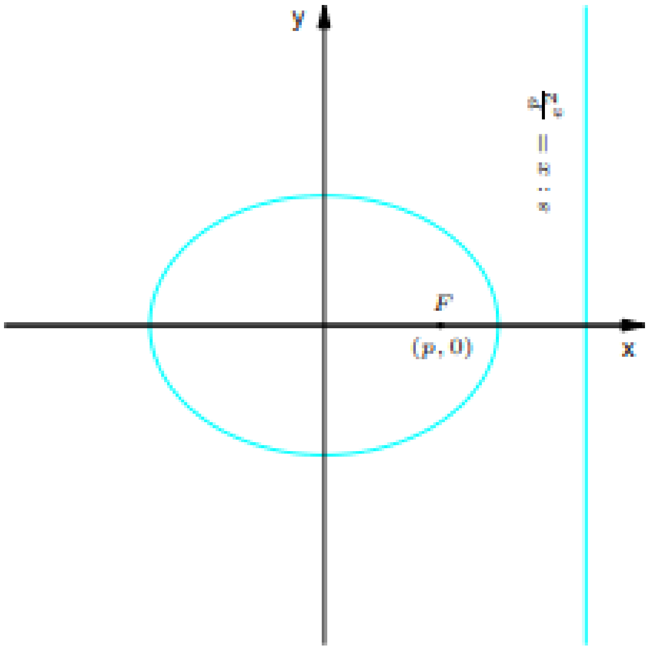



Fig.5.7

Teremos, então, $p = \frac{d.e^2}{1-e^2}$ , se a reta r estiver à direita do foco e $p = \frac{d.e^2}{e^2-1}$ se a esquerda.

Seja um ponto $P = (x, y)$ . Pela definição, temos:

$$\sqrt{(x-p)^2 + y^2} = e\left|x - \frac{p}{e^2}\right|$$

Elevando ao quadrado, temos:

$$(x-p)^2 + y^2 = e^2\left|x - \frac{p}{e^2}\right|^2$$

$$(x-p)^2 + y^2 = e^2.x^2 - 2x.\frac{p}{e^2}.e^2 + \frac{p^2}{e^4}.e^2$$

$$x^2 - 2x.p + p^2 + y^2 = e^2.x^2 - 2x.\frac{p}{e^2}.e^2 + \frac{p^2}{e^4}.e^2$$

$$x^2 - 2x.p + p^2 + y^2 = e^2.x^2 - 2x.p + \frac{p^2}{e^2}$$

$$x^2 + p^2 + y^2 = e^2.x^2 + \frac{p^2}{e^2}$$

$$x^2 - e^2.x^2 + y^2 = \frac{p^2}{e^2} - p^2$$

$$x^2.(1 - e^2) + y^2 = p^2\left(\frac{1}{e^2} - 1\right)$$

$$x^2.(1 - e^2) + y^2 = p^2\left(\frac{1 - e^2}{e^2}\right)$$

$$\frac{x^2}{\frac{p^2}{e^2}} + \frac{y^2}{p^2\left(\frac{1-e^2}{e^2}\right)} = 1$$

Se 0 < e < 1. está será a equação de uma elipse. Se e > 1, será uma hipérbole.

5.3 - Aplicação de Circunferência - orbitas de corpos celestiais.

A descrição do movimento dos planetas requer uma proposta de modelo e, portanto, será necessário o conhecimento das propriedades matemáticas.

O estudo do movimento da Lua, Terra e Sol são exemplos que podem ser descritos por uma circunferência. Embora, alguns modelos podem ter uma ideia errônea sobre a maneira como a Lua se move em torno do Sol ou Terra. A dificuldade em imaginar como a Lua pode girar em torno da Terra e ao mesmo tempo, ter uma trajetória que sempre se curva na direção do Sol. A verificação de que tipo de movimento a Lua descreve em torno do Sol, feita adotando-se modelos aproximados da trajetória que permite obter resultados analíticos simples que podem confirmar ou descartar o modelo. Muitos são obtidos de forma computacional através de simulação ou tratamento de informações. No nosso caso apenas motivacional.

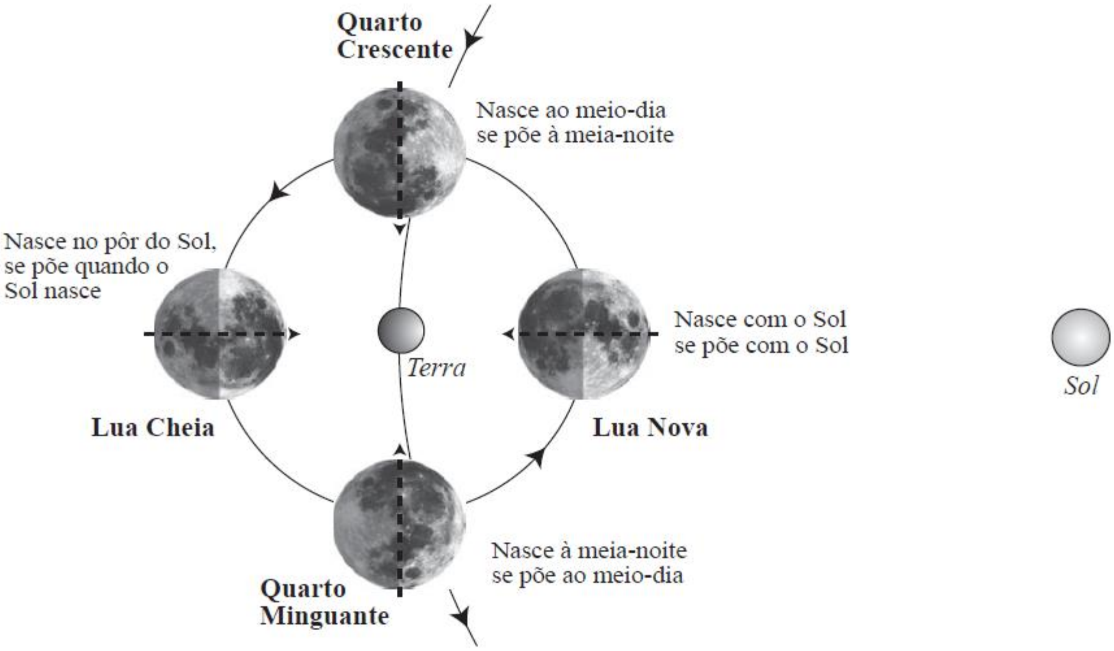



Fig. 5.8

5.3.1 – Aplicação de Elipse - 2ª lei de Kepler.

**Leis de Kepler**

Segundo Djairo Guedes de Figueiredo, em seu livro: Equações diferenciais aplicadas (2005):

> Ao publicar, em 1543, seu famoso trabalho “De Revolutionnibus Orbium Coelwstium” lançando a teoria heliocêntrica, Copérnico iniciava uma nova fase na História da Ciência. É difícil, hoje, fazer-se uma ideia do que significou naquela época desafiar a teoria milenar de Ptolomeu, entrando em conflito frontal com a teologia cristã e com arraigados princípios de ordem, estética e simplicidade matemática do Universo (FIGUEIREDO,2005,p.169)

Primeira Lei. “As órbitas descritas pelos planetas em redor do Sol é elipses com o Sol num dos focos”.

Pelo modelo proposto por Kepler para o movimento dos planetas em sua primeira Lei de Kepler, a órbita de um planeta é uma elipse. Observando o fato de que as órbitas dos planetas são percorridas periodicamente.

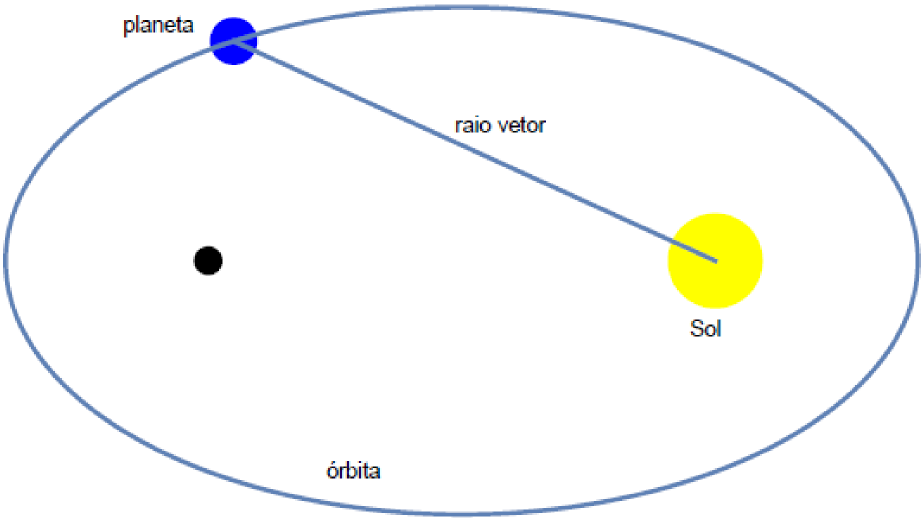
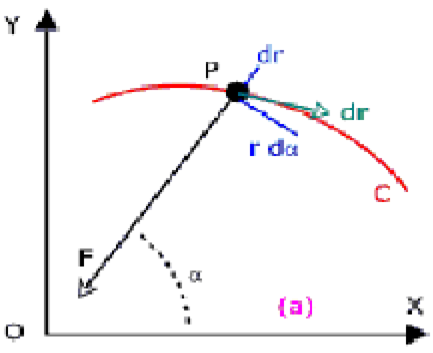



Fig.5.9




Fonte: http://www.mspc.eng.br/mecn/im01/dim2A02.gif

Fig.5.10

Momento Angular.

Usaremos como ferramenta auxiliar a derivada de um produto vetorial

$\vec{r}_1 = (x_1(t), y_1(t), z_1(t))$ e
$\vec{r}_2 = (x_2(t), y_2(t), z_2(t))$

Produto vetorial

$$\vec{r}_1(t) \times \vec{r}_2(t) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_1(t) & y_1(t) & z_1(t) \\ x_2(t) & y_2(t) & z_2(t) \end{vmatrix}$$

$\vec{r}_1(t) \times \vec{r}_2(t) = [y_1(t).z_2(t) - z_1(t).y_2(t)]i + [z_1(t).x_2(t) - x_1(t).z_2(t)]j + [x_1(t).y_2(t) - y_1(t).x_2(t)]k$

Derivada

$\frac{d}{dt}[\vec{r}_1(t) \times \vec{r}_2(t)] = [y_1'(t).z_2(t) + y_1(t).z_2'(t) - z_1'(t).y_2(t) - z_1(t).y_2'(t)]i + [z_1'(t).x_2(t) + z_1(t).x_2'(t) - x_1'(t).z_2(t) - x_1(t).z_2'(t)]j + [x_1'(t).y_2(t) + x_1(t).y_2'(t) - y_1'(t).x_2(t) - y_1(t).x_2'(t)]k$

$\frac{d}{dt}[\vec{r}_1(t) \times \vec{r}_2(t)] = [y_1'(t).z_2(t) - z_1'(t).y_2(t)]i + [+y_1(t).z_2'(t) - z_1(t).y_2'(t)]i + [z_1'(t).x_2(t) - x_1'(t).z_2(t)]j + [z_1(t).x_2'(t) - x_1(t).z_2'(t)]j + [x_1'(t).y_2(t) - y_1'(t).x_2(t)]k + [x_1(t).y_2'(t) - y_1(t).x_2'(t)]k$

$\frac{d}{dt}[\vec{r}_1(t) \times \vec{r}_2(t)] = \vec{r}_1(t) \times \frac{d(\vec{r}_2(t))}{dt} + \frac{d(\vec{r}_1(t))}{dt} \times \vec{r}_2(t)$

Temos a força $\vec{F}$ e também o momento linear da partícula $\vec{p}$ , relacionado pela 2ª lei de Newton.

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Mas o torque

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$

Como $\frac{d(\vec{r}\times\vec{p})}{dt} = \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} + \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p}$ como $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}$ e também $\vec{v}$ tem a mesma direção de $\vec{p}$. Portanto, $\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} = 0 \therefore \vec{\tau} = \frac{d\vec{l}}{dt}$ onde $\vec{l} = \vec{r} \times \vec{p}$ que chamamos de Momento Angular. O Momento Angular de uma partícula sujeita a forças centrais em relação ao centro de forças se conserva. Tendo como consequência que sua órbita é plana.

Segundo H.M. Nussenzveig em seu

> Além de verificar que a órbita de Marte não é circular, Kepler também percebeu através de suas observações que o movimento do planeta ao longo da orbita não é uniforme: a velocidade é maior quando ele está mais próximo do sol.

> Kepler procurou entender estes resultados em termos de uma ação do Sol como causa dos movimentos dos planetas. Para isto, imaginou um modelo extremamente peculiar, em que o Sol teria uma rotação em torno de seu eixo e emitiria raios confinados somente ao plano da órbita, que atuariam lateralmente sobre o planeta, “varrendo-o “em torno da órbita. Imaginou assim uma “força” que teria todas as características erradas: confinada ao plano da órbita, tangencial à órbita em lugar de central, e supôs ainda que variasse inversamente com a distância. Partindo desse modelo inteiramente errado, Kepler fez um cálculo também errado das áreas varridas pelo raio vetor que liga cada planeta ao Sol, e acabou chegando, miraculosamente, à lei certa ( Nussenzveig,1981, p.306).

**Segunda Lei. “**O raio vetor que liga um planeta ao Sol descreve áreas iguais em tempos iguais”.

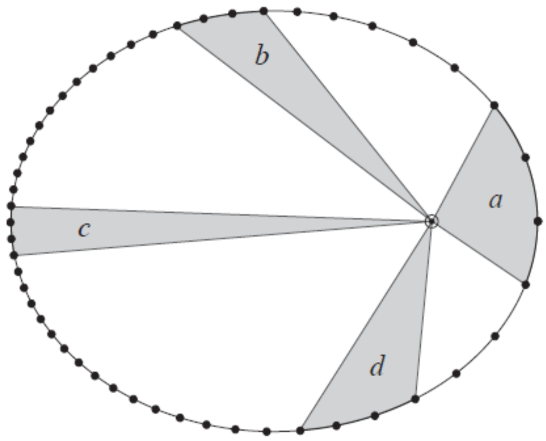



Fig.5.11

Na figura os pontos referem-se a intervalões de tempo iguais. Portanto, na região mais distante do foco o espaço entre os pontos é menor. Portanto, representa que este tem uma menor velocidade.

Segundo H.M. Nussenzveig, em seu livro: Física Básica (1981), enfatiza que:

> Assim, num dado intervalo de tempo t, o planeta descreve uma porção maior da órbita quando está no periélio (posição mais próxima do Sol) do que no afélio (posição mais distante do Sol ....). Kepler acabou percebendo que tinha cometido erros que se cancelaram, e procurou explicar por que. A explicação que deu também estava errada! ( Nussenzveig, 1981, p.307).

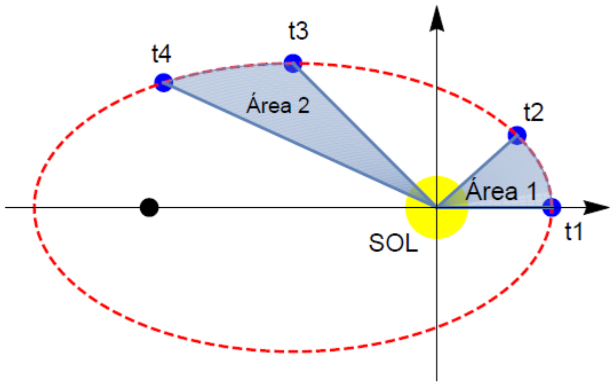



Fig.5.12

Se $A_1 = A_2$ , então a distância entre os pontos $t_4 \; e \; t_3$ é menor que entre $t_2 \; e \; t_1$.

Entretanto, como observamos anteriormente os a expressão desejada se tornará bem complicada e exige o uso do Teorema Fundamental do Cálculo. Observe que com o conhecimento de produto vetorial facilitará a demonstração.

Fazendo uma comparação entre as duas demonstrações, observamos que na segunda surge a possibilidade de representação da circunferência, elipse e hipérbole. Bastando apenas variar o valor da excentricidade. Tornando a representação mais interessante, como riqueza de possibilidades, e beleza matemática.

Vamos supor, um sistema de coordenadas no qual o Sol é a origem, e mais, o Sol ocupada um dos focos dessa elipse, e ainda, sem perda de generalidade, suporemos que o eixo maior está sobre o eixo x, vetor raio ( $\vec{r}$) .

5.3.2 - 2ª lei de Kepler - Usando coordenadas polares.

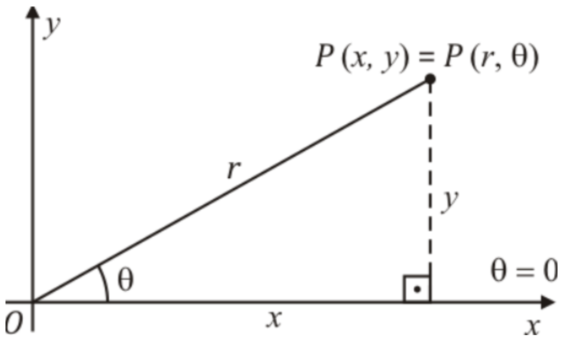



Fig.5.13

Como estamos interessados em escrever r e função de $\theta$ como a origem no foco.

$$r(\theta) = \frac{p(\frac{1}{e} - e)}{1 + e.\cos(\theta)}$$

Como $\vec{l} = \vec{r} \times \vec{p}$ e considerando um movimento no plano, sem perda.

$$\vec{r} = (x(t), y(t), 0)$$

$$m.\vec{p} = (m.\frac{dx(t)}{dt}, m.\frac{dy(t)}{dt}, \text{o})$$

Portanto, $\vec{l}$ , será perpendicular a $\vec{r}$ e $\vec{v}$ .

$$\vec{l} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x(t) & y(t) & 0 \\ m.\dfrac{dx(t)}{dt} & m.\dfrac{dy(t)}{dt} & 0 \end{vmatrix}$$

$$\vec{l} = (\ 0, 0, m.x(t).\frac{dy}{dt} - m.y(t).\frac{dx(t)}{dt})\ )$$

Portando, $\vec{l}$ , somente terá a componente não nula, $m.\left[x(t).\frac{dy(t)}{dt} - y(t).\frac{d}{dt}\right]$.

$x(t) = r.sen(\theta)$ e $y(t) = r.\cos(\theta)$

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{dr}{dt}.sen(\theta) + r.\cos(\theta).\frac{d(\theta)}{dt}$$

$$\frac{dy(t)}{dt} = \frac{dr}{dt}.cos(\theta) - r.\text{sen}(\theta).\frac{d(\theta)}{dt}$$

Substituindo em $\left[x(t).\frac{dy(t)}{dt} - y(t).\frac{dx(t)}{dt}\right]$ temos:

$\left[x(t).\frac{dy(t)}{dt} - y(t).\frac{dx(t)}{dt}\right] = r.\frac{dr}{dt}.sen(\theta).\cos(\theta) - r^2.sen^2(\theta).\frac{d(\theta)}{dt} -$
$r.\frac{dr}{dt}.sen(\theta).\cos(\theta) - r^2.\cos^2(\theta).\frac{d(\theta)}{dt} = -r^2[sen^2(\theta) + cos^2(\theta)]\frac{d\theta}{dt}$ = - $r^2.\frac{d\theta}{dt}$

Portando, $\vec{r}^2.\frac{d\theta}{dt}$ é constante.

A área será:

$$A(\theta) = \frac{1}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2}[r(\theta)]^2.d\theta$$

Pelo Teorema Fundamental do Cálculo.

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}\left[r^2(\theta_2).\frac{d\theta_2}{dt} - r^2(\theta_1).\frac{d\theta_1}{dt}\right]$$

Como consequência $\frac{dA}{dt} = constante.$

## 5.3.3- 2ª lei de Kepler – usando vetores.

Para tal demonstração deveremos expressar o vetor $\vec{r}$ : tomamos um ponto fixo, no caso o foco, e um ponto qualquer pertencente a curva.

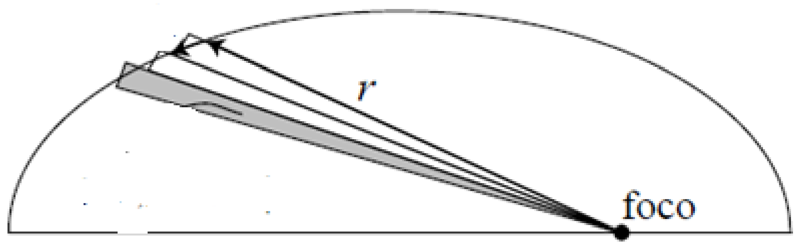



Fig.5.14

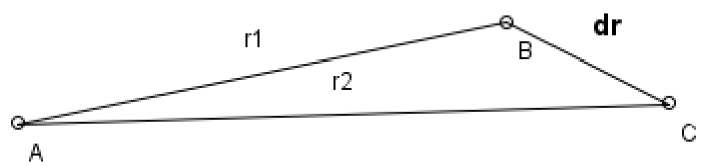



Fig.5.15

Pelas figuras 5.14 e 5.15

Demonstração da segunda lei Kepler.

Se conseguirmos mostrar que a variação de área é zero, sabendo que a velocidade do planeta é constante, estaremos demostrando a validade da lei.

Sendo $r_{1=}\ \overrightarrow{\mathrm{AB}}\ \mathrm{e} r_2 = \overrightarrow{\mathrm{AC}}$, vetores não paralelos seja o ângulo ,$\propto$,entre eles. A área do paralelogramo, cujos lados são os vetores, é o produto vetorial entre eles. Portanto, a área do triângulo será metade desta.

Que podemos escrever a área. $A = |\overrightarrow{r_1} \times \overrightarrow{r_2}| = \|\overrightarrow{AB}\|.\|\overrightarrow{AC}\|.sen(\alpha)$

Vamos apenas chamar de r e encontrarmos a área em função destes.

$$A = \frac{1}{2}\left|r \times \frac{dr}{dt}\right|.\Delta t$$

Queremos provar que, $\frac{1}{2}\left|r \times \frac{dr}{dt}\right|$ é constante, isto é, sua variação com o tempo é zero.

A = $\frac{1}{2}|r \times \Delta r|$

Como $\frac{dr}{dt} \times \frac{dr}{dt}$ =0.

Resulta em ter que provar que

$$r \times \frac{dr^2}{d^2t} = 0$$

$$\frac{dr^2}{d^2t} = aceleração$$

Como a aceleração tem a mesma direção do vetor Força e a força tem a direção do raio (r), distância que os separa. Concluindo a prova.

Nos cálculos acima será necessário o conceito de:

Também poderíamos

Definindo: $p = mv$ $o$ $momento$ $linear, onde$ $m$ é $a$ $massa$ $e$ $v$ é $a$ $velocidade$.

$\frac{d}{dt}(r \times p) = \frac{dr}{dt} \times p + r \times \frac{dp}{dt}$

Com $\frac{dr}{dt} = v$

$\frac{d}{dt}(r \times p) = v \times mv + r \times \frac{dp}{dt}$ $como$ $v \times mv = 0$ $\rightarrow \frac{d}{dt}(r \times p) = r \times \frac{dp}{dt}$

Pela segunda lei de Newton

$F = ma$ e $a = \frac{dv}{dt}$

$\frac{dp}{dt} = F \rightarrow r \times \frac{dp}{dt} = r \times F$

Substituindo temos

$\frac{d}{dt}(r \times p) = r \times F$ - Torque

Definindo seu momento angular (L)

$L = r \times mv \rightarrow Momento$ $angular$.

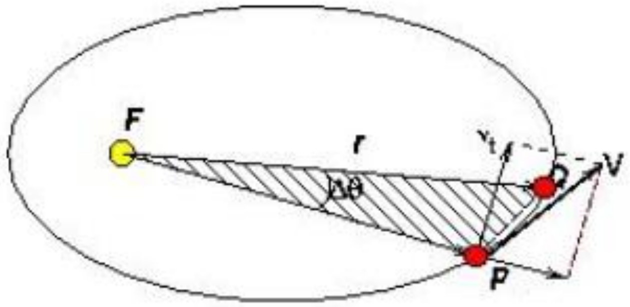



Fig.5.16

$$A = \frac{1}{2} r.r.\Delta\theta$$

$$A = \frac{1}{2}.r^2 \Delta\theta$$

$$\mathrm{L} = \mathrm{r} \times \mathrm{m.v} \quad \rightarrow L = r.m.v_t$$

Para pequenas variações de ângulos, podemos considerar $\mathrm{v_t} = \mathrm{r}\frac{\Delta\theta}{\Delta t}$

Substituindo, temos:

$$L = r.m.r\frac{\Delta\theta}{\Delta t} \rightarrow L = m.r^2.\frac{\Delta\theta}{\Delta t} \rightarrow \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{\mathrm{L}}{\mathrm{m.r^2}}$$

$$\frac{A}{\Delta t} = \frac{1}{2} r^2 \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \rightarrow \frac{A}{\Delta t} = \frac{1}{2} r^2.\frac{L}{m.r^2}$$

Portanto, $\frac{A}{\Delta t} = \frac{1}{2}.\frac{L}{m}$ - constante.

**Terceira Lei.** "Os quadrados dos períodos de revolução de dois planetas quaisquer estão entre si como os cubos de suas distâncias médias ao Sol" .
Segundo H.M. Nussenzveig, em seu livro: Física Básica (1981), comenta:

> Kepler publicou as duas primeiras leis em seu livro "Astronomia Nova (1609). Foi só muitos anos mais tarde que chegou à formulação de sua 3ª lei. Desde sua juventude, ele havia procurado correlacionar umas às outras as orbitas planetárias,

> através de alguma regularidade ligando os raios médios das órbitas, bem como seus períodos de revolução. Foi só perto do fim de sua vida, em 1618, após inúmeras tentativas infrutíferas, que ele acabou descobrindo a regularidade que buscava, na forma de sua 3ª lei.( Nussenzveig,1981,p.307).

## Capitulo 6

## **Argumentação pedagógica para o uso de software nas aulas de matemática.**

Neste capitulo vamos ressaltar a importância do uso das tecnologias no ensino de Matemática como suporte, apoio, as exposições gráficas feitas nos capítulos anteriores.

Sabemos que ao longo do tempo, diversas mudanças ocorreram na sociedade e no mundo. Acreditamos que as mudanças socioculturais e tecnológicas do mundo atual influenciam o pensamento, bem como o comportamento humano, revelando uma influência direta no cotidiano das pessoas. Portanto, a tecnologia computacional é uma ferramenta que pode ser vista como uma fonte potencial importante recurso para promover a aquisição do conhecimento. E acreditamos que o computador possa auxiliar o professor a promover a aprendizagem e estimular a criatividade dos alunos nas aulas de Matemática. Ele é um recurso tecnológico que tem sido utilizado pelas pessoas e vem ganhando espaço nas instituições escolares. Através dele, torna-se possível representar e testar ideias ou até mesmo hipóteses, que levam a compreensão de linguagens simbólicas. Contudo, devemos reforçar a necessidade e importância de incluí-lo nas aulas de matemática, a fim de proporcionar maior interesse, a participação mais efetiva do aluno e a construção do desenvolvimento.

A utilização do computador como instrumento didático no ensino da Matemática pode ampliar a capacidade e desenvolver novas competências, contribuindo de forma valiosa e também para o exercício da cidadania. Portanto, ao incluir a informática ao currículo escolar, pensamos que, além de explorar as mais diversas ferramentas, bem como seus recursos, o aluno acompanhará de certa forma, as mudanças que ocorrem na sociedade, mais especificamente, as relacionadas ao avanço da tecnologia e suas aplicações no ensino, no processo de desenvolvimento. Tais mudanças estão sendo incorporadas pelas escolas de forma precária devido à falta de investimentos. Neste processo de evolução, embora tímido, não nos permitir que fiquemos no comodismo. Devemos procurar uma forma incentivar a construção do conhecimento significativo, onde conceitos e ideias se articulam com a intuição e com a realidade.

Como será possível dizer aos nossos alunos que eles precisam acompanhar as transformações na sociedade, se muitas das vezes não começamos a transformação dentro da sala de aula? Tal pergunta nos leva a reflexão de que precisamos buscar caminhos diferenciados. Isto pode ocorrer, por exemplo, em aulas contextualizadas e práticas, e em capacitações sobre as novas tecnologias mesmo contando com a precariedade dos recursos.

Almejamos mostrar que a utilização de recursos tecnológicos no ensino da Matemática produz grandes contribuições, dinamizando o ensino, ajudando a formação de habilidades, o desenvolvimento da criatividade, a construção de conceitos e a promoção do processo significativo de ensino-aprendizagem.

## 6.1 Justificativa

Com o avanço das novas tecnologias tornou-se uma necessidade adaptar as escolas as necessidades da sociedade atual, onde o computador é uma ferramenta essencial. De igual forma, se bem trabalhado, pode ser um recurso valioso no processo de ensino aprendizagem.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais, em relação ao uso de computadores com internet, enfatizam que:

> É indiscutível a necessidade crescente do uso de computadores pelos alunos como instrumento de aprendizagem escolar, para que possam estar atualizados em relação às novas tecnologias da informação e se instrumentalizarem para as demandas sociais presentes e futuras.
> (BRASIL, 1997, p.67)

Assim, o computador, a internet, ampliam as oportunidades de capacitação e o desenvolvimento de novas competências, contribuindo para o exercício da cidadania.

**6.2 – Motivação para o uso.**

A motivação traz como objetivo geral analisar os benefícios do uso do computador como instrumento didático no ensino da Matemática.

Os objetivos específicos são:

- Promover a Informática educativa;
- Contribuir para a inclusão digital;
- Analisar o uso do computador, como ferramenta, pode auxiliar o professor no ensino de matemática;
- Oferecer uma aprendizagem que aproveite a criatividade dos alunos nas aulas de Matemática;
- Pontuar os benefícios da informatização do ensino através dos laboratórios virtuais de Matemática;

-Apresentar os conteúdos aos alunos de forma mais atraente, com aulas mais dinâmicas.

-Permitir a construção, alteração, modificação de dados de forma dinâmica, isso em pequeno intervalo de tempo. A rapidez permite ao professor prender a atenção do aluno.

As dificuldades que surgem em investigações e no ensino de Matemática têm caráter amplo. Do ponto de vista da Informática Educativa espera-se que esta ferramenta possa contribuir para a emancipação do estudante, de forma que ele possa aprender a aprender, ou ainda, que contribua para o desenvolvimento de um trabalho autônomo e criativo.

O processo de ensino e aprendizagem da Matemática necessita ser estudado e analisado pelos professores, para que os mesmos atendam as reais necessidades de seus alunos. Deste modo, os professores poderão levar seus alunos a utilizarem os conhecimentos matemáticos como meio para entenderem e transformarem o mundo a sua volta, através de propostas de situações voltadas para o contexto social dos alunos.

A Informática Educativa é a utilização do computador como recurso didático para a prática pedagógica dos diversos componentes curriculares, contribuindo para a construção do conhecimento de forma significativa as necessidades atuais.

Com o avanço das novas tecnologias tornou-se fundamental adaptar as escolas as necessidades da sociedade atual. Ao adaptar a informática ao currículo escolar, pode-se usar o computador e a internet como instrumentos para dar apoio às matérias e aos conteúdos a serem trabalhados, e dessa forma preparar o aluno para estar inserido numa sociedade informatizada.

Segundo Silva (2005) a escola é o melhor ambiente para a utilização da tecnologia digital na informática educativa, pois

> [...] um dos papeis da educação é fazer essa articulação entre educação e as tecnologias, até porque com as transformações que a sociedade do conhecimento requer não articular tecnologia e educação significa dar aval à exclusão social. Como a escola deve ser um dos espaços de formação plena da cidadania, não pode ficar de fora desse processo de mudança. (SILVA, 2005, p. 56)

Atualmente, o computador é uma ferramenta essencial. Através dele e de seus recursos é possível estudar Matemática de forma interativa e dinâmica, onde o aluno torna-se também, sujeito em seu próprio processo de aprendizagem.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais, em relação ao uso de computadores com internet, enfatizam que:

> É indiscutível a necessidade crescente do uso de computadores pelos alunos como instrumento de aprendizagem escolar, para que possam estar atualizados em relação às novas tecnologias da informação e se instrumentalizarem para as demandas sociais presentes e futuras. (BRASIL, 1997, p.67)

Para o caso particular da Matemática, sabe-se que os computadores exercem um papel fundamental, como uma ferramenta auxiliadora e facilitadora do processo ensino aprendizagem.

Através de aplicativos matemáticos torna-se possível trabalhar os mais variados conceitos, de forma dinâmica e atrativa. Aqui a função do professor não é somente a de ensinar, mas de estimular e criar condições que favoreçam o processo de aprendizagem. Isso significa que o professor deixa de ser um mero repassador de conhecimento e passa a ser um criador de situações e um facilitador no processo de desenvolvimento intelectual do aluno. Sem perder o rigor e preciosismo matemático necessário ao desenvolvimento do aluno.

De acordo com os aspectos anteriores, o professor exerce a função de mediador entre seus alunos e o conhecimento. O professor não é um mero detentor de conhecimentos, mas alguém que cria situações que levam o aluno a refletir e compreender não somente a Matemática como também o mundo que o cerca.

> Dentro da escola, é o educador, enquanto mediador, que possibilita ao aluno percorrer caminhos que não percorreria sozinho, conduzindo-o à conquista da autonomia, incentivando-o também. Assim, a curiosidade e a criatividade oferecem elementos desafiadores para o docente. A organização do trabalho nessa perspectiva é diferente a partir do momento em que apontamos que é possível construir relações sólidas e importantes na sala de aula. Cada um tem o seu lugar no processo, e o professor é o alguém com quem o aluno pode e deve contar, para resgatar sua autoestima e sua capacidade de aprender. (FALCÃO, 2007, p. 86)

Um aspecto da informática educativa na aprendizagem da matemática é que os laboratórios virtuais não buscam apenas a informatização do ensino, ou apenas uma melhor transmissão de conteúdo, mas uma transformação no contexto educacional, de modo a favorecer a formação de cidadãos mais críticos e agentes na construção do seu próprio conhecimento.

## 6.3 – A informática Educativa: vantagens e desvantagens

O ensino da Matemática deve estar pautado no desenvolvimento do raciocínio lógico do aluno, através de interpretações de situações-problema de seu cotidiano. O professor de matemática por sua vez, deve direcionar a aprendizagem de seus alunos instruindo-os, de modo que os mesmos possam desenvolver o conhecimento que já possuem. Além disso, cabe aos professores esforçarem-se para acabarem com o “rótulo” que muitos alunos atribuíram à matemática, dizendo ser ela, uma disciplina cansativa, sem aplicabilidade no dia a dia.

Além do favorecimento do lúdico, a informática educativa estimula o desenvolvimento do raciocínio lógico, desenvolve o foco de atenção e concentração dos alunos, favorece a expressão emocional, permite ao aluno o erro para que depois possa produzir resultados interessantes, reforça o auto conceito, quando o aluno “vence o computador” em software de desafios , consegue usar o software de forma ampla, ajuda a diminuir algumas dificuldades de aprendizagem, etc.

Como desvantagem, podemos citar a falta de preparo dos educadores para orientar os alunos. Entretanto, podemos observar um número muito grande de trabalhos prontos na internet, que podem ser adaptados para diversos contextos.

**6.4 – Metodologia para o Ensino de Matemática**

Neste trabalho foram abordadas algumas ideias e teorias que tomamos como base para o ensino da matemática mediado pelo computador e os recursos tecnológicos como ferramenta pedagógica, a fim de promover uma melhor aprendizagem dos conteúdos e a construção significativa do conhecimento matemático.

### 6.4.1 – O Ensino de Matemática

Desde a antiguidade, os povos sentiam a necessidade de desenvolver algum método que facilitasse a resolução de questões práticas, como, por exemplo, o controle daquilo que possuíam. Com o passar do tempo, surgiram símbolos e regras que buscavam facilitar a solução dos problemas encontrados no dia a dia.

As civilizações antigas criaram seus próprios sistemas de numeração, que depois de aperfeiçoado, se desenvolveu e se propagou entre diversas culturas, dando origem ao sistema de numeração que hoje usamos. Englobando como um todo, a Matemática, e seus ensinamentos sempre estiveram presentes na história da humanidade. Atualmente, vivemos na era da tecnologia e desejamos transmitir o conhecimento com sabedoria, de um modo criativo. Esperamos trazer o que é bom da tecnologia como aliado à educação, pois acreditamos que o ensino da Matemática deva incentivar os educandos não só a consolidar seus conhecimentos sobre o que é trabalhado em sala de aula, bem como levá-los a refletirem sobre questões que envolvam as atividades do dia a dia.

Os PCNs, Parâmetros Curriculares, com relação ao Ensino da Matemática, nos diz que:

> A Matemática faz-se presente na quantificação do real. Contagem, medição de grandezas e no desenvolvimento das técnicas de cálculo com os números e com as grandezas. No entanto, esse conhecimento vai muito além, criando sistemas abstratos, ideais, que organizam, inter-relacionam e revelam fenômenos do espaço, do movimento, das formas e dos números, associados quase sempre a fenômenos do mundo físico. (BRASIL, 1998, p. 25)

Nesse contexto, o ensino da Matemática deve ser trabalhado muito bem nas escolas para que os alunos não apresentem graves dificuldades futuras. Um dos primeiros passos seria levar nossos alunos a terem a percepção de que quase sempre pensamos de forma matemática. Além disso, é importante lembrar que, a Matemática pode ser desenvolvida de forma contextualizada. Afinal, já passamos da época em que os alunos eram meros expectadores. A física permite ao aluno, o emprego e a necessidade, do domínio de diversos conceitos matemáticos, sem o qual não podemos explica-los.

### 6.4.2 – A importância da Tecnologia no Ensino de Matemática

Os recursos tecnológicos estão cada vez mais presentes em nosso dia a dia. Além disso, gradativamente estão ganhando espaço nos meios escolares. No entanto, a incorporação da tecnologia necessita ser acompanhada pelos sujeitos envolvidos na educação e pelas escolas, para que nossos alunos se sintam capazes de criar, imaginar, inovar, etc. Com isso, as escolas podem desenvolver aos poucos o papel de formar indivíduos ativos, capazes de construir e reconstruir seus conhecimentos.

> Estudiosos do tema mostram que escrita, leitura, visão, audição, criação e aprendizagem são influenciados, cada vez mais, pelos recursos da informática. Nesse cenário, insere-se mais um desafio para a escola, ou seja, o de como incorporar ao seu trabalho, tradicionalmente apoiado na oralidade e na escrita, novas formas de comunicar e conhecer. (PCNs, BRASIL, 1998, p.43)

Vale ressaltar que para o uso do computador possuir utilidade no ensino da Matemática é necessário que haja planejamento. Oliveira (1997) afirma que:

> O computador não melhora o ensino por estar fisicamente na escola, a informatização da escola só dará bons resultados se conduzida por professores que saibam exatamente o que querem. Sem um projeto pedagógico, o computador na escola perde o seu sentido. (OLIVEIRA, 1997, p. 65)

Nesse contexto, cabe reforçar a importância do papel do professor. É ele o organizador da aprendizagem que facilitará o processo de ensino.

A Informática Educativa não promoverá resultados satisfatórios, sem a mediação do professor no processo de ensino - aprendizagem, pois o computador não é um substituto do professor, e sim, um excelente recurso, que se utilizado a partir de atividades bem planejadas, poderá enriquecer a aprendizagem do aluno.

Os alunos podem utilizar o computador para resolver problemas, desenvolver cálculos com rapidez e eficiência, utilizar-se de planilhas, sem contar com a quantidade de softwares matemáticos que podem ser utilizados pelos professores, de modo a tornar suas aulas mais prazerosas e atrativas, fazendo com que os alunos, trocando entre eles diversas informações, tenham vontade de aprender.

O computador pode diminuir as barreiras na aprendizagem da Matemática, desde que os educadores reconheçam a realidade, aceitando definitivamente que a Informática já faz parte da vida dos cidadãos de hoje.

Uma aula de Matemática com a utilização do computador, atrai a atenção dos alunos para a disciplina, auxilia no desenvolvimento cognitivo dos mesmos e permite que aprendam com seus próprios erros, minimizando assim, as barreiras na aprendizagem de Matemática.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais, em relação ao uso de computadores e a internet, enfatizam que:

> É indiscutível a necessidade crescente do uso de computadores pelos alunos como instrumento de aprendizagem escolar, para que possam estar atualizados em relação às novas tecnologias da informação e se instrumentalizarem para as demandas sociais presentes e futuras. (BRASIL,1997, p.67)

Assim, o uso dos computadores amplia as oportunidades de capacitação e desenvolvimento de novas competências e contribuem para o exercício da cidadania.

Entende-se que a utilização de computadores como recursos tecnológicos tem o poder de fornecer ao aluno a autoconfiança levando-o a criar e a desenvolver matemática. Contudo, além do enriquecimento das aulas, os professores também estão deixando para trás aulas que já faziam parte de uma rotina sem satisfatórios resultados.

> Por outro lado, o uso do computador também tem as suas desvantagens e limitações como o elevado custo de instalação e manutenção de uma rede de computadores. O rápido aparecimento de novas tecnologias provoca uma constante troca e mudança de equipamento. Há ainda o problema do analfabetismo informático e da desconfiança nos computadores. O professor tem que saber introduzir convenientemente os alunos no mundo dos computadores e ser capaz de os motivar e ajudar quando necessário. (Braz, David C. A)

Dentre tantas vantagens do uso dos computadores em sala de aula, podemos destacar o fato dos alunos tornarem-se mais independentes e participantes no processo de ensino - aprendizagem, estimulando e promovendo a autoestima e aumentando a criatividade durante a realização das tarefas propostas pelo professor. No entanto, é importante lembrar que a utilização do computador, exige conhecimento prévio, tanto por parte dos alunos, como por parte dos professores.

### 6.4.3 – Metodologia para o ensino de Matemática mediada por recursos tecnológicos

Devido as grandes mudanças na sociedade em relação a informatização, coube a escola fazer parte desse processo de atualização através da montagem de laboratórios de informática e o uso desses equipamentos nas aulas. O professor que há tempos era visto como detentor do conhecimento, agora precisa assumir uma nova postura; passa a ser um mediador da aprendizagem, promovendo a investigação, o conhecimento crítico e reflexivo.

De acordo com Moran (2000), o professor não é o único a deter as informações que os alunos precisam:

> A aquisição da informação, dos dados, dependerá cada vez menos do professor. As tecnologias podem trazer, hoje, dados, imagens, resumos de forma rápida e atraente. O papel do professor – o papel principal – é ajudar o aluno a interpretar esses dados, a relacioná-los, a contextualizá-los. (MORAN, 2000, p. 29)

Moran (2000, p.30) classificou o papel do professor em quatro formas:

Orientador/ mediador/ intelectual - seleciona informações, com o devido cuidado de que estas tenham significado para os alunos, a fim de que eles as contextualizem por meio da compreensão, avaliação, reelaboração e adaptação.

- Orientador/ mediador/ emocional - estimula, motiva e incentiva seus alunos. Organiza os limites com equilíbrio, credibilidade, autenticidade e empatia.

-Orientador/ mediador/ gerencial e comunicacional - gerencia as atividades propostas e organiza o desenvolvimento das diversas formas de comunicação e de interação.

-Orientador/ ético - ensina a assumir e vivenciar valores construtivos, individuais e sociais. Contribui na construção “sensorial-intelectual-emocional-ético” dos estudantes que vão consolidando referenciais de atitudes, valores e ideias. “Um bom educador faz a diferença”.

-O professor deve ser o criador do ambiente e conduzir sua aula com motivação, vivenciando as experiências com seus alunos.

O aluno por sua vez tem a responsabilidade de aprender a acessar, a pensar e refletir para se tornar um Co pesquisador, escolhendo suas estratégias de aprendizagem e promovendo a construção do seu próprio conhecimento.

A escolha do material didático é mais um fator importante e não se resume ao livro didático. Material didático é todo material usado com finalidade de promover a aprendizagem. Se a escolha não for feita de maneira adequada, poderá não alcançar os objetivos desejados.

**6.4.4 – Softwares matemáticos**

Podemos definir o Geogebra como um programa de computador, composto por uma sequência de instruções, que é interpretada e executada por uma máquina. Em um programa que funcione corretamente, essa sequência segue padrões específicos, que resultam em um comportamento desejado.

Dentre os mais variados aplicativo, existem os chamados educativos que são voltados para o ensino e possuem como objetivo fazer com que o aprendiz obtenha novos conhecimentos de forma interativa, dinâmica e prazerosa. Os matemáticos são programas que possuem objetivos pedagógicos criados para atender as necessidades educacionais na área de matemática. Devem ser trabalhados de acordo com uma determinada metodologia. Eles podem ser *freeware* (gratuitos) ou *shareware* (comercializados).

São poderosos sistemas para fazer matemática simbólica e numérica. Processa variáveis algébricas, expressões, equações, funções, vetores, matrizes e expressões booleanas. Os problemas nos campos da aritmética, da álgebra, da trigonometria, do cálculo, da álgebra linear podem ser resolvidos com o clique do mouse. Traça gráficos em 2D e 3D usando vários sistemas de coordenadas.

Eles podem contribuir para a excelência do ensino, mas vale ressaltar que o professor necessita estar preparado para sua utilização, pois apenas os recursos não serão suficientes para conduzir o processo de aprendizagem. Temos que tomar cuidado com a situação em que o professor não domine o conteúdo e não consiga trabalhar com esta ferramenta com a metodologia tradicional e acaba por não consiga explorar toda sua potencialidade. Entretanto, existem muitos exemplos que podem ser modificados e adaptados para o uso em sala de aula.

### 6.5 – O comportamento gráfico de curvas usando software.

No mundo globalizado de hoje, a capacidade de estabelecer relações entre as diferentes áreas do conhecimento é uma habilidade desejável para o bom desempenho. Nessa linha, o estudo das funções ocupa um papel fundamental na formação dos estudantes, estando presente em quase todas as atividades desenvolvidas no mundo. A capacidade de relacionar muitas informações, seja através de uma equação ou da representação gráfica, pode ser um diferencial.

No Ensino Médio, a leitura de tabela e construção de gráficos de funções deixa muito a desejar, bem como a construção de função, lei de formação, estabelecida entre dois conjuntos. Construir uma tabela partindo de valores obtidos da equação, formando pares ordenados, que servirão para traçar o gráfico sempre trabalho de forma mecânica, sem um bom entendimento. O ato de substituir valores, tendo uma percepção do sentido do que a grandeza representa, e sua e analise de comportamento da função é determinante na construção e interpretação gráfica. O uso de um aplicativo que permitirá fazer várias alterações nas construções e até animações, permite tirar conclusões mais rápidas.

As Orientações Curriculares para o Ensino Médio sugerem que:

> Sempre que possível, os gráficos das funções devem ser traçados a partir de um entendimento global da relação de crescimento/decrescimento entre as variáveis. A elaboração de um gráfico por meio da simples transcrição de dados tomados em uma tabela numérica não permite avançar na compreensão do comportamento das funções". (BRASIL, 2006, pág. 72)

A finalidade do Ensino Médio que a LDB faz destaque (Brasil, 1996) é a preparação básica para o trabalho e a cidadania do aluno, para que possa continuar aprendendo, e ser capaz de se adaptar as novas condições de ocupação ou aperfeiçoamento.

Existe uma necessidade crescente de preparar os alunos para que saibam enfrentar situações e contextos que são variáveis, e que exijam deles novos conhecimentos e habilidades. Em especial, no que se refere ao ensino de Matemática, parte da dificuldade em pôr em pratica os conhecimentos adquiridos e fazer relações entre as diversas áreas do conhecimento é devido à falta de comunicação e planejamento, além da dificuldade de uma linguagem adequada. O que dificulta as suas aplicações de forma mais abrangente.

Segundo Gravina e Santarosa:

> No contexto da Matemática, a aprendizagem nesta perspectiva depende de ações que caracterizam o "fazer matemática ": experimentar, interpretar, visualizar, induzir, conjeturar, abstrair, generalizar e enfim demonstrar. É o aluno agindo, diferentemente de seu papel passivo frente a uma apresentação formal do conhecimento, baseada essencialmente na transmissão ordenada de "fatos ", geralmente na forma de definições e propriedades (Gravina e Santarosa, 1998, p. 73)

Para nós o estudo de funções deve ter início nas relações entre duas grandezas em situações diferentes. Por exemplo: área; tempo e distância percorrida; tempo gasto em um lançamento; entre outras. Portanto, podemos fazer experimentação.

Acreditamos no papel crucial da motivação e inclusão dos alunos. É interessante que eles apresentem exemplos de relações funcionais e que, de início, esbocem qualitativamente os gráficos que representam essas relações, observando os tipos de crescimento e decrescimento (mais ou menos rápido). É, também, interessante solicitar aos alunos que escrevam em palavras uma função dada de forma algébrica, e vice-versa.

Hoje, estamos trabalhando com alunos que pertencem a uma geração da imagem, do visual, da Internet, uma geração ligada à tecnologia. Muitos dos quais fazem uso desse "aparato tecnológico" de forma precária. O conhecimento de informática é uma necessidade básica no nosso cotidiano. O domínio dessa tecnologia é tão importante que pessoas que não o fazem estão encontrando dificuldades semelhantes das enfrentadas pelos analfabetos. No Brasil, até mesmo para exercer o direito de cidadão na escolha dos representantes políticos, votação, tal conhecimento é necessário. Neste contexto, a utilização do computador nas escolas do Ensino Básico deve ocupar posição de destaque na formação dos estudantes. Acreditamos que o uso de um software para construção de gráficos venha a facilitar o estudo de matemática e ajudar os alunos no uso de aplicativos similares. Em síntese não podemos ficar a parte com o velho quadro.

Neste trabalho, analisamos o comportamento gráfico das funções com a utilização do Geogebra. Observamos os efeitos da variação dos parâmetros que descreve o cálculo de área, o número de retângulos formados, partindo de uma função cuja expressão seja conhecida.

Acreditamos que a utilização do ferramentas computacionais, aplicativos, facilitará o entendimento do conteúdo, de modo que o rendimento aumentou. E que iniciativas como essas são importantes para que o ensino da Matemática cumpra o seu papel na formação cognitiva e sociocultural dos nossos alunos.

Incentivar os alunos a estudarem alguns conteúdos de funções polinomiais utilizando o software, por exemplo, permitindo uma melhor visualização gráfica do comportamento da função. Desta forma, acreditamos, que se tornar mais atraente, e se vinculará a realidade dos alunos.

**Referências Bibliográficas:**


BORNATT, Gilmar. **Modelagem - simulação - Informática e a matemática.** Disponível em <http://*www.gilmaths.mat.br/Artigos/modelagem_simulacao_informatica.pdf>. Acesso em: 20 nov. 2017*

BORTOLOTTI, Nivaldo. **O computador e a disciplina de Matemática**. Londrina, 2008. Disponível em:<http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/114-4.pdf>. Acesso em: 18 nov. 2017.

BRASIL, Secretaria de Educação Básica. **Orientações Curriculares para o Ensino Médio: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias.** Brasília: MEC/SEB, 2006.

CHURCHHOUSE, R. F. Et al **A**. **influência dos computadores e da informática na matemática e no seu ensino,** *disponível em:*<http://www.mat.uc.pt/~jaimecs/nonius/nonius7_2.html>. Acesso em: 21 nov. 2017.

DANISIO, Dalton. ***O* uso do computador na escola.** Disponível em: <http://escoladanisiodalton.blogmakers.net/EEFM-DANISIO-DALTON-b1/O-Uso-do-computador-na-Escola-b1-p8.htm>. Acesso em: 21 nov. 2017.

ESCUDEIRO, Leila Cristina. **Introduzindo o computador nas aulas de matemática**. Cianorte, 2008. Disponível em:

<http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/328-4.pdf>.////Acesso em: 18 nov. 2017

FANTI, Ermínia de Lourdes Campello. Aparecida SILVA, Francisco da. **Informática e jogos no ensino da matemática.** *Disponível em:<http://www.bienasbm.ufba.br/M6.pdf>. Acesso em 19 nov. 2017.*

FUGUEIREDO, DJAIRO GUEDES DE. Equações diferenciais aplicadas.2ª edição. IMPA, 2005.

GONDAR, JUAN LOPEZ; CIPOLATTI, ROLCI. Iniciação à Física Matemática. Modelagem de Processos e Métodos de Solução. Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada – IMPA. Coleção Matemática e Aplicações. 2016

GRAVINA, M. A.; SANTAROSA, L. M. C. **A aprendizagem da Matemática em Ambientes Informatizados.** Revista Informática na Educação – teoria & prática, v.2, n.1. Porto Alegre: UFRGS, 1999, pg. 73 -88.

LIMA, ELON LAGES. Curso de análise; v.1. 11 ed. – Rio de Janeiro: Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2004.

LIMA, ELON LAGES. Curso de análise; v.2. 11 ed. – Rio de Janeiro: Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2005.

LOPES, José Junio. A **informática na escola.** Disponível em:<http://*www.clubedoprofessor.com.br/artigos/artigojunio.htm>.* Acesso em: 21 nov. 2017.

LUCCHESI, Eduardo Melloni. SEIDEL, Susana **Uso de software no ensino-aprendizagem de Matemática.** Disponível em: <*http://*www.cinted.ufrgs.br/ciclo3/af/34-usodesoftware.pdf>.- Acesso em: 21 nov. 2017.

Nussenzveig ,Herch Moises. Física Básica. V.1 -Mecânica.

OLIVEIRA, Jeanine Alves de. Et al. **A Informática no processo de ensino e aprendizagem de Matemática.** Disponível em:<http://www.pg.utfpr.edu.br/sinect/anais/artigos/10%20Ensinodematematica/Ensino dematematica_artigo1.pdf>. Acesso em: 21 nov. 2017

POINCARÉ, H. **O valor da ciência**. Rio de Janeiro: Contraponto, 1995.

SAUNDERS, J.; DEBLASSIO, J. **Relacionando funções com seus gráficos.** In : As ideias da álgebra. Org. Arthur F. Coxford e Alberto P. Shulte. São Paulo: Atual, 1995.

SILVA, João Gilberto. **A importância da Informáticana educação.** Disponível em:<http://matematicalife.blogspot.com/2010/03/importancia-da-informatica-na-educacao.html>. Acesso em: 21 nov. 2017.

SILVA, Juliana Xavier. **Influências da Informática Educativa na prática pedagógica do professor de Matemática.** Disponível em:<*http://www.edumat.ufms.br/Mestrado/Dissertacoes/dissertacao-silva-2009.pdf>.* Acesso em: 21 nov. 2017.

SOUZA, Maria José Araújo. **Informática educativa na Educação Matemática.** Disponível em:<http://ensino.univates.br/~chaet/Materiais/Dissertacao_Cabri.pdf>. Acesso em: 21 nov. 2017.

SENA, Rebeca Moreira, DARSIE**,** Marta Maria Pontin. **Informática educativa e educação matemática: evolução das concepções de professores a partir de um curso de capacitação.** Disponível em: <http://www.ufrrj.br/emanped/paginas/conteudo_producoes/docs_28/informatica.pdf>. Acesso em: 21 nov. 2017

SOUZA, M. **O Uso da informática nas aulas de matemática.** Disponível em:<http://*www.de9.ime.eb.br/~sousamaf/cd/pdf/arq0025.pdf*>*.* Acesso em: 21 nov. 2017

RODRIGUES, Silvia Vilela de Oliveira. **Professores de Matemática e o Uso do computador**. Cianorte, 2008. Disponível em: <http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/330-4.pdf>. Acesso em: 18 nov. 2017

VALENTE, José Armando. **Por que o computador na educação?** Disponível em:<http://edutec.net/Textos/Alia/PROINFO/prf_txtie09.htm>. Acesso em: 18 nov. 2017

BORRÕES, Manuel Luís Catela. **O computador na educação Matemática**. Disponível em:<http://www.apm.pt/apm/borrao/matematica.PDF>. Acesso em: 19 nov. 2017

SEIFERT, Leila Cristina Escudeiro. **A utilização de recursos tecnológicos como alternativa para o ensino da Matemática.** Cianorte, 2008. Disponível em:<http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/328-2.pdf>. Acesso em: 19 nov. 2017

LUCCHESI, Eduardo Melloni. SEIDEL, Susana **Uso de software no ensino-aprendizagem de Matemática.** Disponível em: <*http://*www.cinted.ufrgs.br/ciclo3/af/34-usodesoftware.pdf>*.*- Acesso em: 21 nov. 2017.