UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA, PÓS GRADUAÇÃO E INOVAÇÃO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL
EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

CLENILTON FERNANDES ALVES

TRIGONOMETRIA E NÚMEROS COMPLEXOS: UMA ABORDAGEM ELEMENTAR COM APLICAÇÕES

São Luís - MA
2019

CLENILTON FERNANDES ALVES

TRIGONOMETRIA E NÚMEROS COMPLEXOS: UMA ABORDAGEM ELEMENTAR COM APLICAÇÕES

Dissertação apresentada ao PROFMAT-UFMA, como requisito para a obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Antônio José da Silva

Coorientador: Prof. Me. Anselmo Baganha Raposo Júnior

São Luís - MA
2019

Ficha gerada por meio do SIGAA/Biblioteca com dados fornecidos pelo(a) autor(a).
Núcleo Integrado de Bibliotecas/UFMA

Alves, Clenilton Fernandes.
Trigonometria e Números Complexos : uma abordagem elementar com aplicações / Clenilton Fernandes Alves. - 2019.
64 p.

Coorientador(a): Anselmo Barganha Rapouso Junior.
Orientador(a): Antonio José da Silva.
Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-graduação em Rede - Matemática em Rede Nacional/ccet, Universidade Federal do Maranhão, UFMA, 2019.

1. Aplicações. 2. Funções trigonométricas. 3. Números Complexos. 4. Trigonometria. I. Junior, Anselmo Barganha Rapouso. II. Silva, Antonio José da. III. Título.

CLENILTON FERNANDES ALVES

**TRIGONOMETRIA E NÚMEROS COMPLEXOS:
UMA ABORDAGEM ELEMENTAR COM APLICAÇÕES**

Dissertação apresentada ao PROFMAT-UFMA, como requisito para a obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Educação Matemática

São Luís, 28 de fevereiro de 2019

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Antônio José da Silva (Orientador)
Universidade Federal do Maranhão - UFMA

Prof. Me. Anselmo Baganha Raposo Júnior (Coorientador)
Universidade Federal do Maranhão - UFMA

Prof. Dr. José Santana Campos Costa
Universidade Federal do Maranhão - UFMA

Prof. Dr. José Antônio Pires Ferreira Marão
Universidade Federal do Maranhão - UFMA

"Eu tentei 99 vezes e falhei. mais na centésima tentativa eu consegui. Nunca desisti dos seus objetivos, mesmo que eles pareçam impossíveis. A próxima tentaiva pode ser a vitoriosa".

(Albert Einstein)

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a DEUS, por ter me conduzido em todas as etapas do mestrado, permitindo que eu chegasse até aqui, por toda a força concedida na concretização desse sonho, sobretudo nos momentos mais difíceis.

Ao PROFMAT-UFMA pela honrosa oportunidade de participar de um universo intelectual bastante incentivador, que contribuiu positivamente com mais um passo em minha formação, além de ter agregado muito conhecimento.

Ao meu orientador (Dr. Antônio José Silva), pelas correções e apontamentos, sem os quais este trabalho não se realizaria.

Aos colegas de turma PROFMAT-UFMA 2017, Ana Gabriela, Alvimar, Aldivan, Anacleto, Arnaldo, Denison, Wallace, Laécio e Lenildo que, pela união, fizeram com que toda a trajetória aparentasse menos árdua do que de fato foi, em especial a Ana Gabriela e ao Denison, por estarem sempre dispostos e comugarmos do mesmo objetivo (a conclusão do mestrado) e ao Aldivan, pelo acolhimento em meu primeiro local de trabalho nesta cidade e por manter o companherismo e a parceria

Aos Professores Josenildo, Jairo, Valeska, Valdiane, Cleber, que contribuiram para o meu crescimento profissional e intelectual e principalmente para a minha realização pessoal.

Ao Prof. Me. Anselmo, minha imensa gratidão, meu respeito, minha admiração por sempre ter se mostrado à disposição para me ajudar.

Ao meu pai José Odivaldo de Sousa Alves por ser o meu exemplo de vida ao lado da minha mãe Maria do Perpétuo Socorro, que é minha fortaleza nos momentos de angústia.

À minha família, em especial aos meus irmão: Cleyton, Clevyston, Clenilson, Clenadilson e Sid Cley e aos meus tios em especial a Regina, Dijé, Francisco Carlos (Nego gato), Antonia e a minhas cunhadas Edilma, Maria, Célia e Angela, que sempre me apoiaram, para a concretização desse sonho.

Ao meu filho Kaleb Eduardo, por compreender minhas ausências e por toda a ajuda, companheirismo, carinho e amizade durante a árdua jornada.

Resumo

O presente trabalho apresenta uma abordagem elementar acerca da trigonometria e dos números complexos afim de que estudantes no final do Ensino Fundamental ou início do Ensino Médio possam por meio deste, iniciar seus estudos nos temas em questão. São definidas as relações métricas no triângulo retângulo para que seja estabelecido o Teorema de Pitágoras. As funções trigonométricas elementares seno, cosseno e tangente são introduzidas no contexto dos ângulos agudos via razões trigonométricas no triângulo retângulo. As Leis do Seno e do Cosseno são, então, estabelecidas. Introduz-se, em seguida, o ciclo trigonométrico estabelecendo-se a relação entre números reais e arcos no ciclo afim de se estender as funções trigonométricas elementares bem como ampliar o alcance da Relação Fundamental da Trigonometria. Aparece, então, o caráter periódico destas funções e a noção de redução de um arco ao primeiro quadrante é estabelecida para que por meio dela a paridade destas funções seja estabelicida. A fórmula do seno da soma e do cosseno da soma de arcos são estabelecidas e com elas ficam ainda estabelecidas extensões de resultado análogos para ângulos agudos. Finalmente, os números complexos são apresentados destacando-se a sua representação trigométrica e as Leis de De Moivre. Aplicações da teoria são expostas para evidenciar sua importância e alcance.

Palavras-chave: Trigonometria, Funções Trigonométricas, Números Complexos, Aplicações.

Abstract

The present paper presents an elementary approach to trigonometry and complex numbers so that students at the end of elementary school or early high school can begin their studies in the subjects in question. The metric relations are defined in the right-angled triangle so that the Pythagorean Theorem is established. The elementary trigonometric functions sine, cosine, and tangent are introduced in the context of the acute angles via trigonometric ratios in the right-angled triangle. The Laws of the Sine and the Cosine are then established. Then the trigonometric cycle is introduced, establishing the relation between real numbers and arcs in the cycle in order to extend the elementary trigonometric functions as well as to extend the scope of the Fundamental Relationship of Trigonometry. The periodic character of these functions appears, and the notion of reducing an arc to the first quadrant is established so that the parity of these functions is stable. The sine an consine formulas of arcs sum are established and with them are still established similar result lengths for acute angles. Finally, the complex numbers are presented highlighting its trigometric representation and the De Moivre Laws. Applications of the theory are exposed to evidence its importance and scope.

Keywords: Trigonometry, Trigonometric Functions, Complex Numbers, Applications.

Lista de Figuras

Sumário

Introdução

Este texto tem como objetivo principal abordar de forma clara, objetiva e elementar os resultados básicos acerca da teoria da Trigonometria e dos Números Complexos afim de que se torne um texto para um primeiro contato com o assunto para alunos nas séries finais do Ensino Fundamental ou início do Ensino Médio. Além disso, pretende-se aqui justificar a necessidade da apreensão destes assuntos, pelo menos no nível aqui exposto, para um desenvolvimento pleno de uma cultura matemática básica, através da aplicabilidade destes conteúdos tanto na Matemática quanto em áreas afins.

No primeiro capítulo os elementos trigonométricos fundamentais são construídos: apresenta-se o Teorema de Pitágoras, definindo-se as relações métricas no triângulo retângulo. Em seguida, ainda no âmbito dos triângulos retângulos, são definidas as três razões trigonométricas básicas: o seno, o cosseno e a tangente. Além disso, uma série de resultados acerca destes elementos no contexto de ângulos agudos são apresentados, com destaque para as Leis do Seno e do Cosseno.

O segundo capítulo dedica-se a ampliar os horizontes das funções trigonométricas elementares. Define-se aqui o ciclo trigonométrico, estrutura que permitirá a extensão das funções seno e cosseno a toda a reta real além da função tangente em todo ponto que não seja um múltiplo inteiro ímpar de $\frac{\pi}{2}$. Essa extensão, por meio de sua construção, permite evidenciar as funções trigonométricas básicas em termos de sua periodicidade, destacando–se a noção de ângulos congruentes. Apresenta-se o conceito de redução ao primeiro quandrante, fato que permitirá não só identificar ângulos no ciclo trigonométrico com um ângulo particular no primeiro quadrante do círculo afim de que se possa, ao mesmo tempo, facilitar cálculos e dar notoriedade ao caráter de extensão da construção feita no que diz respeito ao tratamento dado no primeiro capítulo no âmbito ângulos agudos, como caracterizar estas funções quanto a sua paridade. É apresentada aqui as fórmulas do seno e do cosseno para a soma de arcos.

O terceiro capítulo introduz o conjunto dos números complexos. Nele fica evidente a relevância da trigonometria para o desenvolvimento da teoria no que diz respeito a obtenção de propriedades e representações geométricas relevantes no tocante aos elementos deste conjunto. São ainda apresentadas as fórmulas de De Moivre para o cálculo da n-ésima potência e das raízes n-ésimas de um número complexo.

O quarto capítulo traz aplicações referentes aos assuntos abordados nos capítulos precedentes. Observa-se aqui que também é válido o sentido de tratar de números complexos para concluir resultados de trigonometria, destacando o alto grau de conexão entre estas partes.

Capítulo 1

Elementos Trigonométricos Fundamentais

Neste capítulo, iniciaremos o nosso estudo trigonométrico partindo da intepretação da palvra TRIGONOMETRIA. Ela é composta de três radicais gregos, pois TRI singinifica três, GONOS significa ângulos e METRIA significa medida, logo TRIGONOMETRIA siginifica medição de três lados e três ângulos, isto mostra que inicialmente, iremos apresentar os conceitos básicos de seno, cosseno e tangente nos triângulos retângulos relacionando a medida dos lados e dos ângulos, bem como as leis do seno e do cosseno, que servirão de suporte para o estudo do desenvolvimento das funções trigonométricas que serão analisadas na circunferência unitária ou no círculo unitário, que iremos definir como sendo $C = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = 1\right\}$, tendo assim o status de uma função de uma variável real, ou seja: a função $\cos x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e de forma análoga tem-se as funções sen, tg, ctg, sec e $\cos \sec$, completando assim as funções trigonometricas que iremos abordar nesse capitulo e que servirá de ferramenta para a exploração das propriedades dos números complexos, que será o carro chefe para o desenvolvimento desse trabalho.

1.1 Aspectos Históricos

A palavra trigonometria teve origem na Grécia aproximadamente 300 a.C, onde pensava que estava exclusivamente ligada a situações de medições de terrenos ou de determinação de medidas sobre a superfície da Terra, como calcular largura de rios, distância entre pontos sobre superfícies terrestre, estabelcecer alturas inacessível como montanhas, árvores e contruções.

No entanto, o astronomo, cartográfo e matemático da escola de Alexandria, Hiparco de Nicéia (180 - 125) a.C, é considerado pai da trigonometria por ter sido o pioneiro na elaboração de uma tabela trigonométrica, com valores de uma série de ângulos, utilizando a ideia pioneira de Hípsicles (180 a.C.), herdada dos babilônios, da divisão do círculo em

360 partes iguais (140 a.C.) e a divisão do grau em sessenta minutos de sessenta segundos, e a utilizou para introduzir as medidas sexagessimais em astronomia. Hiparco de Nicéia, aplicou as noções trigonométricas para fazer medições, prever eclipses, fazer calendário e na navegação.

A trigonometria, teve a sua primeira aplicação prática, ocorrendo com Ptolomeu em 150 d.C, além de continuar aplicando-a aos estudo da astronomia, usou para determinar a latitude e longitude de cidades e de outros pontos geográficos em seu mapas.

Segundo (Eves 2011) Os astrônomos babilônico do século IV e V a.C acumularam uma massa considerável de dados de observações e hoje se sabe que grande parte desse material passou para os gregos, foi essa astrônomia que deu origem a trigonometria esférica.

Aproximadamente, 400 d.C passou da Grécia para a Índia, onde a trigonometria era usado em cálculos astrólogico, que ainda era um problema astrônomico. Por volta de 800 d.C ela chegou ao mundo islâmico, onde mais tarde foram expandidos por matemáticos árabes e persas, nos século IX, Al-Khwãrismi, produziu uma tabela preciosa do seno e do cosseno e a primeira tabela da tangente, por volta do século X, na obra de Abu Al-wafã e Al-buzjãni, matemáticos islãmico já estavam usando todas as seis funções trigonométricas, depois de descobrir as funções secantes, cosecantes e cotangentes, ele também desenvolveu a fórmula $\operatorname{sen}(2x) = 2\operatorname{sen}(x)\cos(x)$, que mais tarde foi considerado o arco duplo do seno.

No mundo Islâmico, a trigonometria , teve uma grande aplicação na astrônomia e na cartografia. Por volta de 1100 d.C, ela chegou na Europa cristão, juntamente com os livros de Ptolomeu, onde, inicialmente foi estudada tão somente por suas aplicações à astrônomia com os portuguêses da Escola de Sagres, onde encontraram uma aplicação de enorme valor econômico na navegação oceânica.

Os principais autrores da trigonometria são:

- Tales de Mileto: (624-546 A.C), Nasceu na cidade de Mileto e morreu na mesma cidade. Os gregos dos tempos posteriores consideravam Tales como fundador da ciência, da matemática e da filosofia grega.

Um dos seus principais feitos matemático, foi um pedido feito por um mensageiro do Faraó, que calculasse a medida da pirâmide de Quéops, assim o fez, quando se encontrava no Egito,

- Erastóstenes: (276-194A.C) Ele estimulou um dos mais importantes cálculo para a circunferência e raio da Terra. Ele comparou posições relativas de sombras exatamente, ao meio dia do solstício de verão em duas cidades: Siene e Alexandria. Assim, obteve que o ângulo era cerca de 1/50 do diâmetro do circulo e assim obteve a distância entre essas duas cidades cerca de 925 Km e com isso pode estimar que o perímetro da Terra é de 46250 Km.

- Hiparco de Nicéia: (180-125 A.C), Foi um astrônomo, construtor, cartógrafo e matemático grego da escola de Alexandria nascido 180 a.C em Nicéia, viveu em Alexandria, sendo um dos grandes representantes da escola da cidade de sua origem, do ponto de vista da contribuição para a mecânica. Hoje é considerado fundador da astronomia científica e é também chamado de pai da trigonometria, por ter sido o pioneiro na elaboração de uma tabela trigonométrica.

- Cláudio Ptolomeu: (150 d.c) considerado o autor da mais importante obra da trigonometria, surgida no século II de nossa era, em Alexandria, composta de treze volumes. Ela ficou conhecida como Almagesto, que significa em árabe "a maior = al magest".

- Hiparco foi uma figura importante e pode-se afirmar que seus trabalhos contribuíram para a transição entre a astronomia babilônica e as idéias do grande Cláudio Ptolomeu.

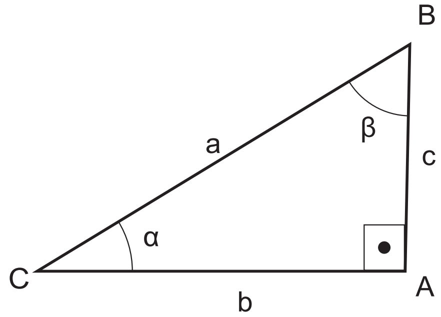
1.2 Conceitos Básicos

Introduzir-se-ão, agora, os conceitos fundamentais que alicerçarão a teoria que pretende-se aqui desenvolver.

Definição 1.2.1 **Ângulo** *é a reunião de duas semi-retas de mesma origem, mais não contida em uma mesma reta (não colineares). As semi-retas são chamadas de lados do ângulo e esse ângulo pode ter a sua medida dada em graus ou radiano* (DULCE, 1993).

Considere o triângulo ABC retângulo em A cujos segmentos de retas $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ são concorrentes nos pontos B e $\overline{BC}$ e $\overline{AC}$ concorrem no ponto C formando assim os ângulos α e β repectivamente e que os segmentos de retas $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$ são os lados do triângulo retângulo e que $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ são chamados de catetos, palavra esta que são originaria da palavra Cathetós, que significa "perpendicular" e que recebem nomes especiais de acordo com a posição em relação do ângulo de análise, que representaremos por b e c. Já o lado $\overline{BC}$, oposto ao ângulo reto é chamado de hipotenusa, cuja palavra é derivada da palavra grega "hypoteinusa", que significa: o que se estende embaixo, como mostra a figura abaixo

Figura 1: Triângulo retângulo.



Fonte: Da autoria

Definição 1.2.2 *Dados três pontos* A, B *e* C *não colineres, à reunião dos segmentos* $\overline{AB}, \overline{AC}$ *e* $\overline{BC}$ *chama-se de* **triângulo***, e o indicamos por triângulo* ABC *ou* ΔABC (DULCE, 1993).

Deste modo, se A, B e C são pontos não colineares, então

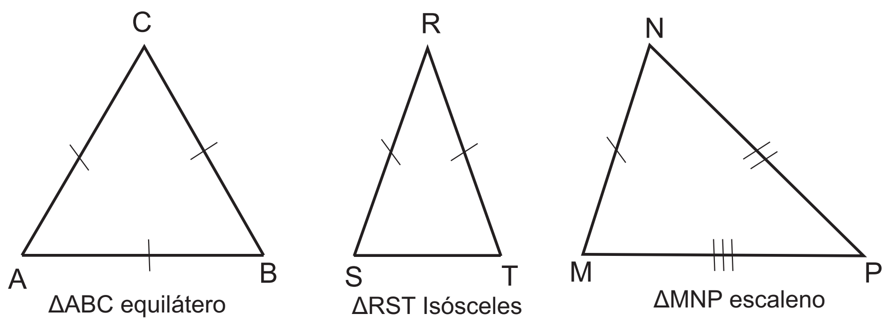
$$\Delta ABC = \overline{AB} \cup \overline{AC} \cup \overline{BC}.$$

Os triângulos possuem três lados, três ângulos internos, três ângulos externos e três alturas. São classificados quanto aos seus lados e quanto aos seus ângulos.

Quanto aos lados, os triângulos podem ser classificados em:

- Equilátero: se possuem os seus três lados iguais;
- Isósceles: se possuem dois dos seus três lados iguais;
- Escaleno: se possuem os seus três lados diferentes

Figura 2: Classificação quanto aos lados.



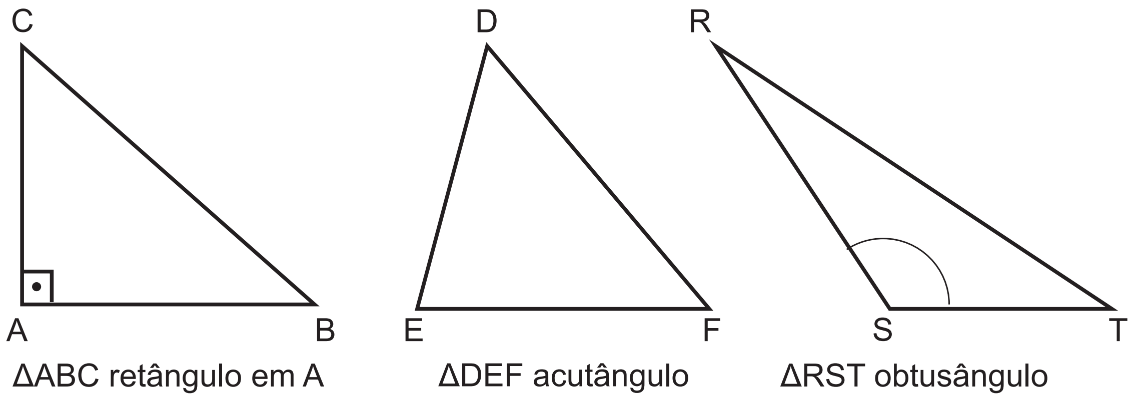
Fonte: Da autoria

Deve ficar claro que a igualdade ou diferença entre os lados refere-se ao fato de possuirem ou não a mesma medida.

Quanto aos ângulos, os triângulos podem ser classificados em:

- Retângulo: se possui um ângulo interno reto, ou seja, medindo $90°$;
- Acutângulo: se possui todos os seus ângulos internos agudos;
- Obtusângulo: se possuir um ângulo interno obtuso.

Figura 3: Classificação quanto aos ângulos.



Fonte: Da autoria

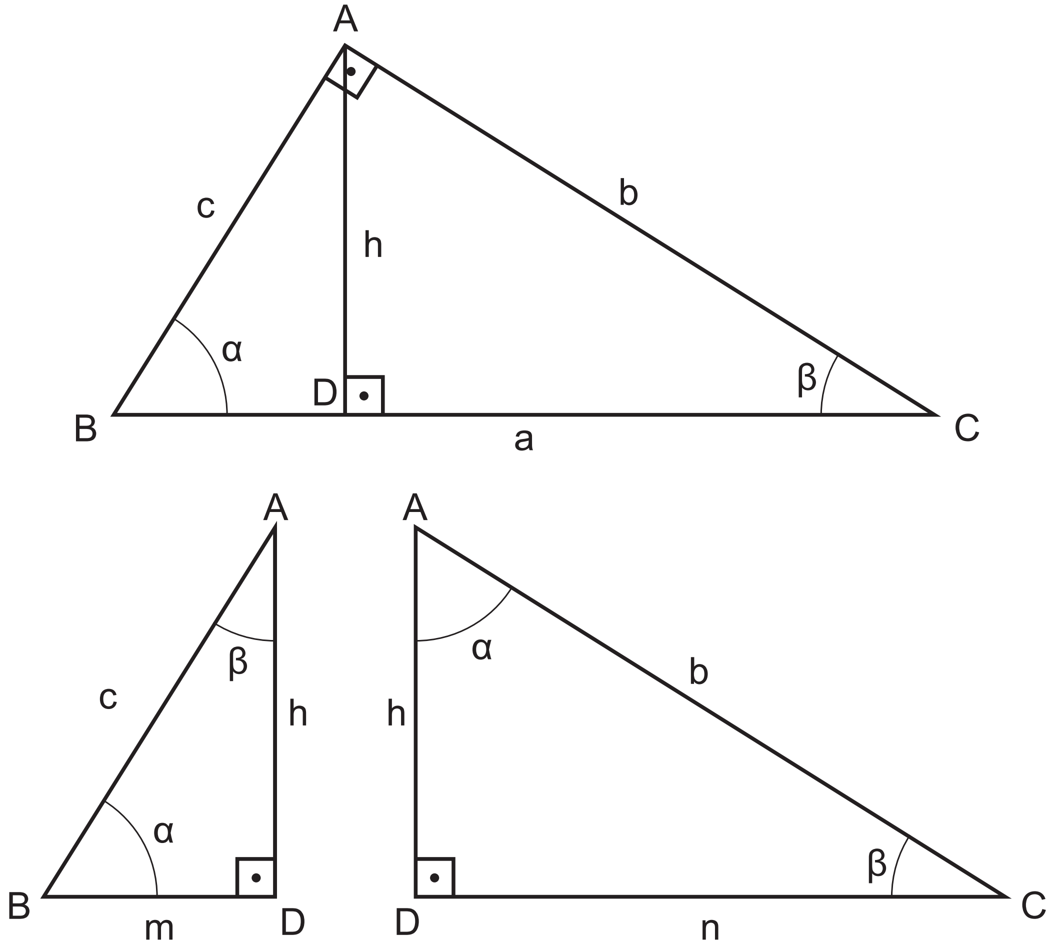
Em especial, os triângulos retângulos, possuem dois ângulos internos agudos, que são complementares, e um ângulo reto. Os seus três lados são: a hipotenusa, que é o maior de seus lados, e os outros dois são denominados de catetos, que são os lados que formam o ângulo reto. Num triângulo retângulo, duas de suas alturas são seus próprios catetos. A outra é obtida considerando-se, sobre a hipotenusa, a projeção ortogonal do vértice que lhe é oposto.

Não é de nosso interesse aqui neste trabalho estabelecer toda a teoria elementar acerca de triângulos. Supor-se-á aqui a familiaridade do leitor com resultados básicos acerca de geometria plana como semelhança de triângulos, bem como do conhecimento do fato de que, em qualquer triângulo, a soma dos ângulos internos é 180^o, além de conceitos fundamentais como o de altura relativa a um lado dado, dentre outros.

1.3 Relações métricas nos triângulos retângulos

Considerando-se o triângulo ABC, ilustrado abaixo, retângulo em A, e tomando-se a sua altura em relação a sua hipotenusa, tem-se que esta subdivide ABC em dois ourtos triângulos retângulos, ora designados por ABD e ADC, semelhantes ao triângulo ABC pelo critério ângulo-ângulo (AA).

Figura 4: Projeção da altura em relação a hipotenusa.



Fonte: Da autoria

Assim, os triângulos ΔABC, ΔABD e ΔADC são, dois a dois, semelhantes. Da semelhança entre $\triangle ABC$ e $\triangle ABD$ segue que

$$\frac{AB}{BC} = \frac{BD}{AB} \Rightarrow \frac{c}{a} = \frac{m}{c},$$

o que nos fornece

$$c^2 = am \tag{1.1}$$

Da semelhança entre $\triangle ABC$ e $\triangle ADC$, obtemos

$$\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{AC} \Rightarrow \frac{c}{a} = \frac{h}{b},$$
$$\frac{AC}{BC} = \frac{DC}{AC} \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{n}{b},$$

de onde extraímos

$$ah = bc \tag{1.2}$$

e

$$b^2 = an \tag{1.3}$$

Finalmente, da semelhança entre os triângulos ΔABD e ΔADC, concluímos que

$$\frac{AD}{BD} = \frac{CD}{AD} \Rightarrow \frac{h}{m} = \frac{n}{h},$$

o que nos permite inferir

$$h^2 = mn.$$

Teorema 1.3.1 *Seja* $\triangle ABC$ *um triângulo retângulo de catetos* a *e* b *e hipotenusa* c*. Então*

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

Demonstração: Tomando as igualdades (1.1) e (1.2) das relações acima e somando-as membro a membro, obtemos

$$\begin{aligned} c^2 + b^2 &= am + an \\ &= a\,(m + n) \end{aligned} \tag{1.4}$$

Por outro lado, observamos que $a = m + n$ e, portanto, substituindo essa relção em (1.4), temos que.

$$a^2 = b^2 + c^2,$$

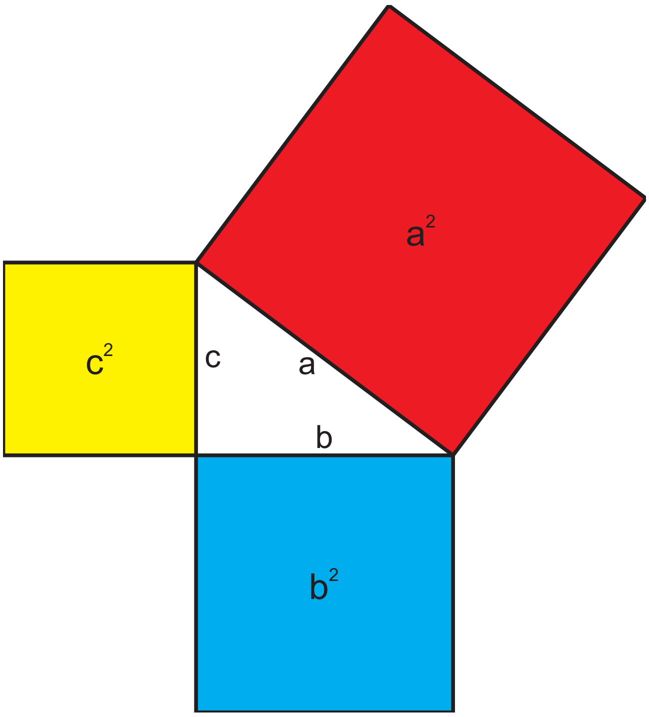
como queríamos demonstrar. ■

O Teorema de Pitágoras, é um dos teoremas mais utilizados em toda a matemática, sendo a mais popular e imprescindível ferramenta nas resoluções de problemas, sobretudo de geometria (plana, espacial e analítica). Por meio dele determina-se a fórmula para a distância entre dois pontos situados no espaço, é utilizado em problemas de determinação de elementos geométricos como área, perímetro e volume, dentre outras aplicações. Além de sua enorme aplicabilidade, sua fama também se deve ao fato de levar o nome do matemático grego Pitágoras de Samos (569 a.C. - 480 a.C. aproximadamente) e o verdadeiro mistério que envolve este personagem. Para alguns historiadores, Pitágoras nunca existiu; Já para outros, foi um nome atribuido a um grupo de gregos e para uma terceira corrente de historiadores, o matemático e filosófo de fato existiu, embora nenhum registro sobre a sua vida ou seus trabalhos tenham chegado até os dias atuais. Contudo, apesar de toda a mística que envolve a sua existência ou não que se perpetua ainda hoje é inegável a contribuição da matemática pitagórica para as ciências até os dias atuais.

Segundo (EVES, 2004), acredita-se que Pitágoras possa ter sido discípulo de Tales, pois, ao que se sabe, era 50 anos mais jovem do que este e morava perto de Mileto, local em que Tales residia. Depois de um certo tempo Pitágoras mudou para o Egito e ao retornar a Samos, encontrou o poder nas mãos dos tiranos Polícrates e a Jônia sobre o domínio Persa, forçando-o a migrar para uma colônia grega no sul da Itália, fundando ali a mais famosa escola do mundo antigo, a escola pitagórica, que, além de um centro de estudo de filosófia, matemática e ciências naturais, era também uma irmandade estritamente unida por ritos e cerimônas.

Não se sabe ao certo, qual foi a demonstração de Pitágoras, pois este não deixou nenhum trabalho escrito. A maioria dos historiadores acredita que foi uma demonstração do tipo geométrica, baseada na comparação de áreas. Não foi a que se encontra nos "Elementos" de Euclides, fornecida acima e que ainda hoje é muito encontrada nos livros de geometria. Acredita-se que esta demosntração, em particular foi concebida pelo próprio Euclides. Esse tão famoso resultado, estabelece uma relação direta entre os comprimentos dos lados de qualquer triângulo retângulo. Porém pode ser interpretado geometricamente e segundo (BARBOSA,1993), o Teorema de Pitágoras deve ser enunciado da seguinte forma: a área do quadrado construído sobre a hipotenusa, será igual a soma das áreas dos quadrados construídos sobre os catetos, como mostra a figura abaixo:

Figura 5: Interpretação geométrica do Teorema de Pitágoras.

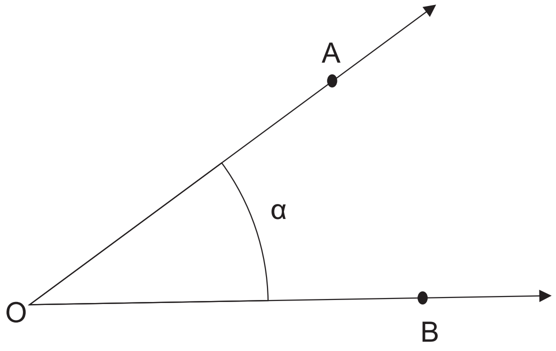


Fonte: Da autoria

1.4 Relações trigonométricas no triângulo retângulo

Considerando-se um ângulo $A\hat{O}B$ formado pela interseção das semi-retas $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$, sendo O o ponto de interseção entre as semi-retas dadas, dir-se-á que O é o **vértice do ângulo**, como mostra a Figura 6.

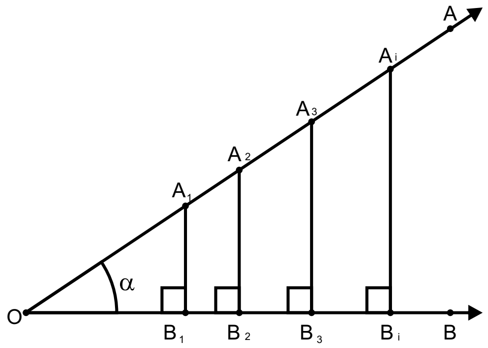
Figura 6: Vértice de um ângulo.



Fonte: Da autoria

Fazendo-se $A\hat{O}B = \alpha$, com $0^o < \alpha < 90^o$, considera-se A_i e B_i, com $i \in \mathbb{N}$, pontos pertencentes às semi-retas $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$, respectivamente, de modo que os segmentos $\overline{A_1B_1}, \overline{A_2B_2}, \ldots, \overline{A_iB_i}$ sejam perpendiculareas à semirreta $\overrightarrow{OB}$. Então os triângulos $OA_1B_1, OA_2B_2, \ldots, OA_iB_i$ serão semelhantes pelo critério de semelhança ângulo-ângulo, como mostra a figura abaixo:

Figura 7: Triângulos retângulos semelhantes apoiados sobre uma mesma semirreta suporte.



Fonte: Da autoria

Portanto, podemos concluir o seguinte:

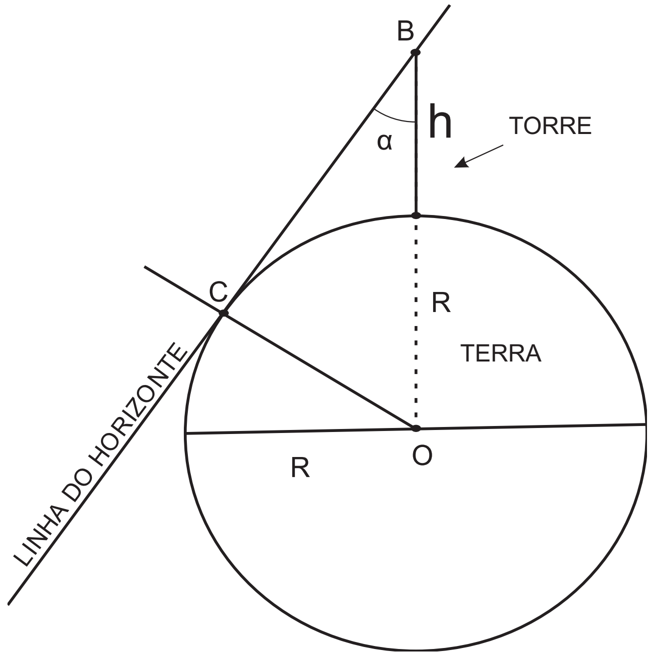
$$\frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{OA_1}} = \frac{\overline{A_2B_2}}{\overline{OA_2}} = \frac{\overline{A_3B_3}}{\overline{OA_3}} = \cdots = k_1,$$

onde $k_1 > 0$ é constante. Observa-se, deste modo, que k_1 só depende do ângulo de inclinação α e não dos compomprimentos dos seguimentos envolvidos. Isso motiva a definição a seguir.

Definição 1.4.1 *Seja α um dos ângulos agudos de um triângulo retângulo. O* **seno** *de α, denotado por* $\operatorname{sen}\alpha$*, é a razão entre o cateto oposto a α e a hipotenusa do triângulo.*

Exemplo 1.4.2 Deseja-se medir o raio R da Terra. Sabe-se que é humanamente impossível obter-se essa medida diretamente. Contudo, é possível calculá-lo com certa precisão por meio de um processo usado pelos gregos antigos, consistindo no seguinte: sobe-se a uma torre de altura h e mede-se o ângulo α que é formado pela reta BC do horizonte de B com a vertical BO do lugar, como mostra a figura abaixo.

Figura 8: Cálculo do raio da Terra.



Fonte: Da autoria

Logo, chega-se a seguinte conclusão:

$$\frac{R}{R+h} = \operatorname{sen}\alpha.$$

Aplicando a Lei da Proporcionalidade Direta, obtemos que

$$R\operatorname{sen}\alpha + h\operatorname{sen}\alpha = R$$

Isto é,

$$R = \frac{h\operatorname{sen}\alpha}{1-\operatorname{sen}\alpha}.$$

Deste modo, podemos concluir que para calcular o raio R da terra, necessita-se somente da altura da torre e do ângulo α de inclinação formado entre as retas do horizonte e a altura h da reta vertical do lugar. De posse das medidas de h e α e de uma tabela de senos, podemos determinar o raio R da terra.

Observando os triângulos semelhante contidos na Figura 7, pode-se destacar as seguintes relações:

$$\frac{\overline{OB_1}}{\overline{OA_1}} = \frac{\overline{OB_2}}{\overline{OA_2}} = \frac{\overline{OB_3}}{\overline{OA_3}} = \cdots = k_2 \quad \text{e} \quad \frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{OB_1}} = \frac{\overline{A_2B_2}}{\overline{OB_2}} = \frac{\overline{A_3B_3}}{\overline{OB_3}} = \cdots = k_3,$$

Como k_2 e k_3 são constantes, denominaremo-las, respectivamente, de cosseno e tangente do ângulo α, e escrever-se-á $k_2 = \cos\alpha$ e $k_3 = \operatorname{tg}\alpha$. Deste modo

$$\frac{\overline{OB_1}}{\overline{OA_1}} = \frac{\overline{OB_2}}{\overline{OA_2}} = \frac{\overline{OB_3}}{\overline{OA_3}} = \cdots = \cos\alpha \qquad \text{e} \qquad \frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{OB_1}} = \frac{\overline{A_2B_2}}{\overline{OB_2}} = \frac{\overline{A_3B_3}}{\overline{OB_3}} = \cdots = \operatorname{tg}\alpha$$

Observa-se que tanto k_2 quanto k_3, não dependem do comprimento dos segmento envolvidos e sim dos ângulos α de inclinação, o que motiva as definições a seguir.

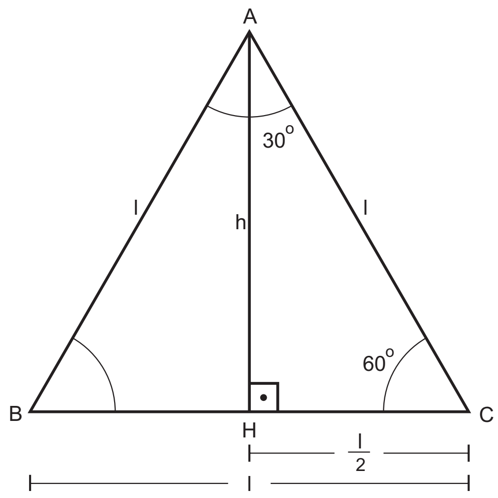
Definição 1.4.3 *Seja α um dos ângulos agudos de um triângulo retângulo. O* **cosseno** *de α, denotado por $\cos\alpha$, é a razão entre o cateto adjacente a α e a hipotenusa do triângulo.*

Definição 1.4.4 *Seja α um dos ângulos agudos de um triângulo retângulo. A* **tangente** *de α, denotado por $\operatorname{tg}\alpha$, é a razão entre o cateto oposto a α e o cateto adjacente a α.*

Do que foi feito, ficam estabelecidas as correspondências $\alpha \mapsto \operatorname{sen}\alpha$, $\alpha \mapsto \cos\alpha$ e $\alpha \mapsto \operatorname{tg}\alpha$, onde α é um ângulo agudo. Essas correspondência são as funções, seno, cosseno e tangente, que doravante serão denominadas de **funções trigonométricas** elementares. Mais adiante, veremos como estendê-las a intervalos maiores de números reais.

Exemplo 1.4.5 Na figura seguinte ABC é um triângulo equilátero. Sendo assim, cada um de seus ângulos internos vale 60^o. A altura $\overline{AH}$ é também a bissetriz do ângulo $B\hat{A}C$, e H é ponto médio de $\overline{BC}$. Se ℓ é a medida do lado do triângulo ABC, o Teorema de Pitágoras fornece $h = \dfrac{\ell\sqrt{3}}{2}$. Considerando o triângulo AHC, podemos determinar $\operatorname{sen} 30^\circ$, $\cos 30^\circ$, $\operatorname{tg} 30^\circ$, $\operatorname{sen} 60^\circ$, $\cos 60^\circ$ e $\operatorname{tg} 60^\circ$.

Figura 9: Utilização do triângulo equilátero para a determinação das razões trigonométricas dos ângulos de 30º e 60º.



Fonte: Da autoria

Tomando as definições já vistas das razões trigonométricas nos triângulos retângulo,

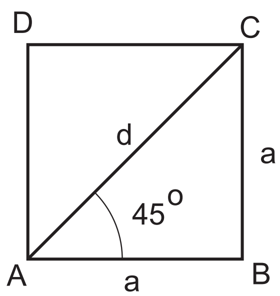
$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}}$$
$$\cos\alpha = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}}$$
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}} = \frac{\dfrac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}}}{\dfrac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}}} = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}$$

temos que

$$\operatorname{sen}30^\circ = \frac{\overline{CH}}{\overline{AC}} = \frac{\frac{\ell}{2}}{\ell} = \frac{\ell}{2}\cdot\frac{1}{\ell} = \frac{1}{2},$$
$$\cos 30^\circ = \frac{\overline{AH}}{\overline{AC}} = \frac{h}{\ell} = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{\ell} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$
$$\operatorname{tg}30^\circ = \frac{\operatorname{sen}30^\circ}{\cos 30^\circ} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$
$$\operatorname{sen}60^\circ = \frac{\overline{AH}}{\overline{AC}} = \frac{h}{\ell} = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{\ell} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$
$$\cos 60^\circ = \frac{\overline{CH}}{\overline{AC}} = \frac{\frac{\ell}{2}}{\ell} = \frac{\ell}{2}\cdot\frac{1}{\ell} = \frac{1}{2},$$
$$\operatorname{tg}60^\circ = \frac{\operatorname{sen}60^\circ}{\cos 60^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 2 = \sqrt{3}.$$

Exemplo 1.4.6 Considere o quadrado $ABCD$ cujos lados medem a. Mais uma vez, o Teorema de Pitágoras assegura que sua diagonal mede $a\sqrt{2}$.

Figura 10: Utilização do quadrado para a determinação das razões trigonométricas do ângulo de 45º.



Fonte: Da autoria

O triângulo ABC é retângulo em B e é isósceles. Deste modo, seus ângulos internos agudos são iguais e medem $45°$ cada um. Deseja-se determinar, assim, o seno, o cosseno e a tangente de $45°$. Das definições destas funções trigonométricas, tem-se que

$$\operatorname{sen} 45° = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$
$$\cos 45° = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$
$$\operatorname{tg} 45° = \frac{\operatorname{sen} 45°}{\cos 45°} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1.$$

Com os resutados obtidos nos dois exemplos anteriores evidenciam os valores do seno, do cosseno e da tangente dos ângulos agudos conhecidos como **ângulos notáveis**. Tem-se, pois, a seguinte tabela:

α	$30°$	$45°$	$60°$
$\operatorname{sen}\alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\operatorname{tg}\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

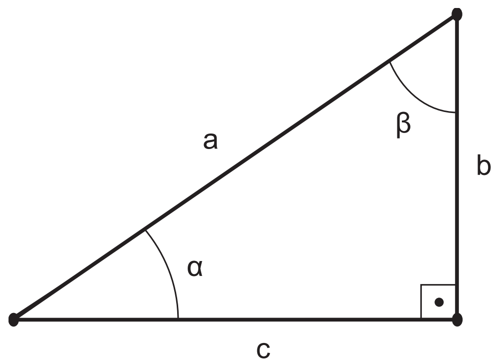
No triângulo retângulo abaixo, tem-se que

$$\cos\alpha = \frac{c}{a} \qquad \text{e} \qquad \operatorname{sen}\alpha = \frac{b}{a}.$$

Deste modo,

$$c = a\cos\alpha \qquad \text{e} \qquad b = a\operatorname{sen}\alpha.$$

Figura 11: Relação Fundamental da Trigonometria.



Fonte: Da autoria

Segue, pois, do Teorema de Pitágoras que

$$\begin{aligned} a^2 = b^2 + c^2 \quad &\Leftrightarrow \quad a^2 = (a\cos\alpha)^2 + (a \operatorname{sen}\alpha)^2 \\ &\Leftrightarrow \quad a^2 = a^2\cos^2\alpha + a^2 \operatorname{sen}^2\alpha \\ &\Leftrightarrow \quad a^2 = a^2\left(\cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha\right) \end{aligned}$$

Dividindo ambos os membros desta última igualdade por a^2, obetém-se

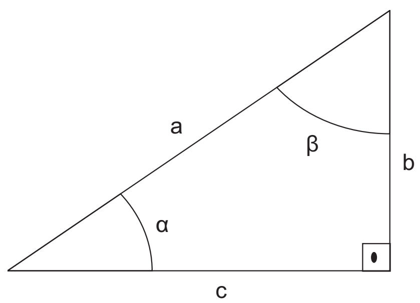
$$\cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha = 1.$$

Essa relação será conhecida como **Teorema Fundamental da Trigonometria** ou **Relação Fundamental da Trigonometria**, que pode ser enunciada da seguinte forma: o quadrado do cosseno de um ângulo adicionado do quadrado do seno desse mesmo ângulo, será sempre igual a 1.

Teorema 1.4.7 *Se dois ângulos agudos α e β são complementares, isto é, $\alpha + \beta = 90^o$, então $\operatorname{sen}\alpha = \cos\beta$, isto é, o cosseno de um ângulo é o seno do seu complementar, e $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{1}{\operatorname{tg}\beta}$.*

Demonstração: Considerando o triângulo ABC da Figura 12.

Figura 12: Seno, cosseno e tangente de arcos complementares.



Fonte: Da autoria

Aplicando a definição do seno e do cosseno, tem-se

$$\operatorname{sen}\alpha = \cos\beta = \frac{b}{a} \qquad \text{e} \qquad \operatorname{sen}\beta = \cos\alpha = \frac{c}{a}.$$

Observa-se, agora, que

$$\mathsf{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\cos\beta}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{1}{\dfrac{\operatorname{sen}\beta}{\cos\beta}} = \frac{1}{\operatorname{tg}\beta}$$

e o resultado segue. ■

A demonstração do próximo resultado segue os passos de (MORGADO, 2005).

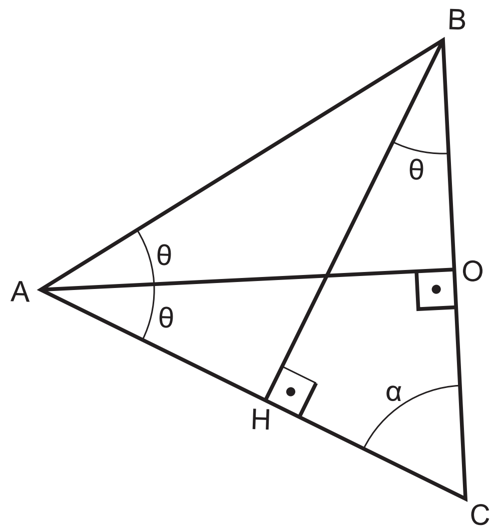
Teorema 1.4.8 *Se* $0° < \theta < 45°$, *então*

(i) $\operatorname{sen} 2\theta = 2 \operatorname{sen}\theta \cos\theta$;

(ii) $\operatorname{sen}\dfrac{\theta}{2} = \sqrt{\dfrac{1-\cos\theta}{2}}$.

Demonstração: Seja ABC um triângulo isósceles como mostra a figura abaixo.

Figura 13: Seno do arco duplo e seno do arco metade.



Fonte: Da autoria

Supondo-se $\overline{AB} = \overline{AC} = 1$, seja $\overline{OA}$ a bissetriz do ângulo $B\hat{A}C$. Divide-se, assim, o triângulo ABC nos triágulos AOC e AOB de mesma área. Esses triângulos são ambos retângulos em O e, visto que $\overline{OA}$ é uma bissetriz desse triângulo, tem-se $B\hat{A}O = C\hat{A}O = \theta$. Nestas condições, aplicando a definição do seno de um ângulo, no triângulo retângulo AOC, tem-se

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{\overline{OC}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{OC}}{1}$$

então,

$$\overline{OC} = \operatorname{sen}\theta$$

Fazendo uma análise análoga com respeito ao triângulo AOB, obtem-se

$$\overline{OB} = \operatorname{sen}\theta.$$

logo, podemos garantir que

$$\overline{OC} = \overline{OB} = \operatorname{sen}\theta,$$

o que mostra que O é o ponto médio do segmento $\overline{BC}$. Por outro lado, aplicando a definição do cosseno de um ângulo no triângulo AOC, obtem-se

$$\cos\theta = \frac{\overline{AO}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AO}}{1}$$

Logo,

$$\overline{AO} = \cos\theta.$$

Traçando a altura $\overline{BH}$ do triângulo ABC, em relação à base $\overline{AC}$ e aplicando a definição do seno no triângulo ABH, temos:

$$\operatorname{sen}(\theta+\theta) = \frac{\overline{BH}}{\overline{AB}} \Rightarrow \operatorname{sen}2\theta = \frac{\overline{BH}}{1} \Rightarrow \operatorname{sen}2\theta = \overline{BH}.$$

Sabendo-se que a área de qualquer triângulo, é a metade do produto da base pela altura relativa a essa base, verifica-se relativamente ao triângulo ABC, que a sua área é $\dfrac{\overline{BC}\cdot\overline{AO}}{2}$ ou, também é igual a $\dfrac{\overline{AC}\cdot\overline{BH}}{2}$. Daqui,

$$\overline{BC}\cdot\overline{AO} = \overline{AC}\cdot\overline{BH},$$

e, consequentemente,

$$\begin{aligned}\left(\overline{BO}+\overline{OC}\right)\cdot\overline{AO} = \overline{AC}\cdot\overline{BH} \quad &\Rightarrow \quad \left(\overline{OC}+\overline{OC}\right)\cdot\overline{AO} = \overline{AC}\cdot\overline{BH}\\ &\Rightarrow \quad 2\overline{OC}\cdot\overline{AO} = \overline{AC}\cdot\overline{BH}.\end{aligned}$$

Uma vez que $\overline{OC} = \overline{OB} = \operatorname{sen}\theta$, $\overline{AO} = \cos\theta$, $\overline{AC} = 1$ e $\overline{BH} = \operatorname{sen}2\theta$, pode-se concluir que

$$2\operatorname{sen}\theta\cdot\cos\theta = 1\cdot\operatorname{sen}2\theta,$$

isto é,

$$\operatorname{sen}2\theta = 2\operatorname{sen}\theta\cdot\cos\theta.$$

Do triângulo ABH, obtem-se

$$\cos 2\theta = \frac{\overline{AH}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AH}}{1}.$$

Logo,

$$\overline{AH} = \cos 2\theta.$$

analisando agora o triângulo BHC, tem-se que

$$\cos\alpha = \frac{\overline{HC}}{\overline{BC}},$$

o que fornece

$$\overline{HC} = \overline{BC}\cdot\cos\alpha.$$

Verifica-se ainda que

$$\overline{BC} = \overline{BO}+\overline{OC} = 2\operatorname{sen}\theta,$$

e, consequentemente,

$$\overline{HC} = 2 \operatorname{sen} \theta \cos \alpha$$

Sabendo-se que $\overline{BH}$ é a altura em relação ao lado $\overline{AC}$ e que

$$\overline{AH} + \overline{HC} = \overline{AC} = 1,$$

é imediato que

$$\cos 2\theta + 2 \operatorname{sen} \theta \cos \alpha = 1$$

Sendo α e θ ângulos complementares, tem-se

$$\operatorname{sen} \alpha = \cos \theta \qquad \text{e} \qquad \operatorname{sen} \theta = \cos \alpha.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \cos 2\theta + 2 \operatorname{sen} \theta \cos \alpha = 1 \quad &\Rightarrow \quad \cos 2\theta + 2 \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \theta = 1 \\ &\Rightarrow \quad \cos 2\theta + 2 \operatorname{sen}^2 \theta = 1 \\ &\Rightarrow \quad \operatorname{sen}^2 \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2} \end{aligned}$$

Tomando $\beta = 2$, conclui-se que

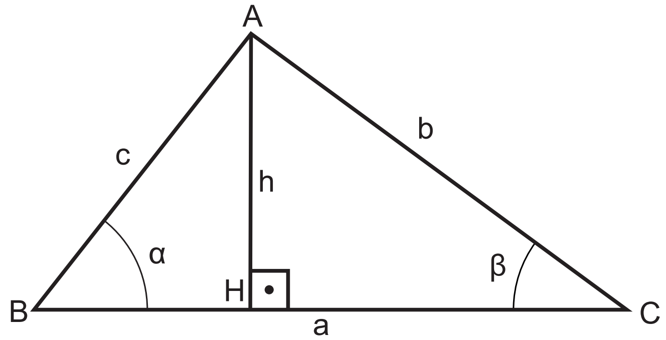
$$\operatorname{sen} \frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \beta}{2}}.$$

■

Teorema 1.4.9 (Lei dos Senos) *Os lados de um triângulo são proporcionais aos senos dos ângulos opostos e a constante de proporcionalidade é o diâmetro da circunferência circunscrita ao triângulo.*

Demonstração: Seja ABC um triângulo qualquer, como na Figura 14.

Figura 14: Lei dos Senos.



Fonte: Da autoria

Tomando a altura do triângulo ABC relativamente ao lado $\overline{BC}$, obtem-se dois triângulos retângulos: ΔAHC e o ΔAHB. Das razões trigonométricas, extrai-se as seguintes relações:

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{h}{c} \Leftrightarrow h = c\operatorname{sen}\alpha \tag{1.5}$$

e

$$\operatorname{sen}\beta = \frac{h}{b} \Leftrightarrow h = b\operatorname{sen}\beta \tag{1.6}$$

De (1.5) e (1.6), tem-se

$$c\operatorname{sen}\alpha = b\operatorname{sen}\beta$$

e, daí,

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{b} = \frac{\operatorname{sen}\beta}{c} \tag{1.7}$$

De forma análoga, baixando-se a altura do triângulo em relação $\overline{AC}$ e aplicando o mesmo processo descrito anteriormente, tem-se

$$\frac{\operatorname{sen}\theta}{a} = \frac{\operatorname{sen}\beta}{c}. \tag{1.8}$$

Assim, de (1.7) e (1.8),

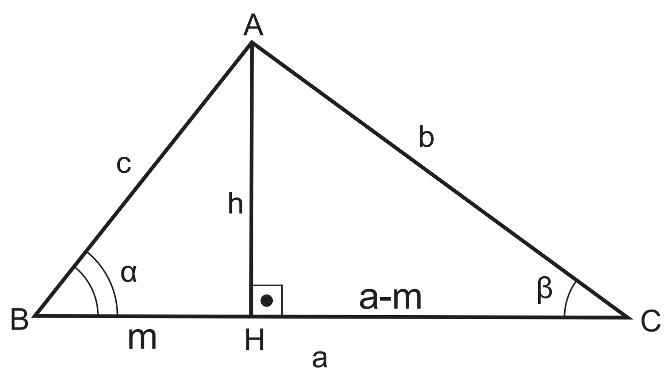
$$\frac{\operatorname{sen}\theta}{a} = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{b} = \frac{\operatorname{sen}\beta}{c}$$

■

Teorema 1.4.10 (Lei dos Cossenos) *Em qualquer triângulo, o quadrado de um lado é igual à soma dos quadrados dos outros dois lados menos duas vezes o produto desses dois lados pelo cosseno do ângulo por eles formados.*

Demonstração: Considere o triângulo qualquer ABC, abaixo.

Figura 15: Lei dos Cossenos.



Fonte: Da autoria

Aplicando o Teorema de Pitágoras nos triângulos AHC e AHB obtemos,

$$b^2 = h^2 + (a - m)^2 \tag{1.9}$$

e

$$c^2 = h^2 + m \tag{1.10}$$

De (1.9) e (1.10), obtém-se ■

$$\begin{aligned} b^2 - c^2 &= (a-m)^2 - m^2 \\ &= a^2 - 2am \end{aligned}$$

e, portanto,

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2am. \tag{1.11}$$

Por outro lado, $\cos\alpha = \dfrac{m}{c}$ ou, equivalentemente,

$$m = c\cos\alpha. \tag{1.12}$$

Substituindo-se (1.12) em (1.11), encontra-se

$$b^2 = a^2 + b^2 - 2ac\cos\alpha$$

De forma análoga, baixando as alturas relativas aos lados $\overline{AC}$ e $\overline{AB}$ e procedendo da mesma forma, podemos concluir que

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\theta$$

e que

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\beta.$$

Capítulo 2

Estendendo as Funções Trigonométricas: o Ciclo Trigonométrico

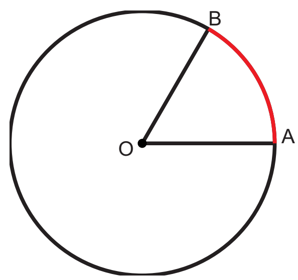
Na seção anterior, viu-se a trigonometria nos triângulos retângulos, onde foram definidas as razões trigonométricas, seno; cosseno e tangente, com o objetivo de resolver problemas relacionados exclusivamente a esse tipo de triângulo. Nesta seção, amplia-se o horizonte destas funções de modo que as nescessidades que a matemática atual posssui sejam atendidas. Com essa nova abordagem trigonométrica, o triângulo retângulo é insuficiente para as devidas definições nescessárias havendo a necessidade da implementação de um novo ambiente para a trigonometria. Este novo ambiente é o que chamaremos de circunferência trigonométrica ou ciclo trigonométrico.

2.1 Medida de arco

Definição 2.1.1 *Chamamos de* **medida de um arco***, a medida do ângulo central que determina o arco.*

Na figura abaixo, a medida do arco AB, corresponde a medida do ângulo central AOB.

Figura 16: Medida de um arco.

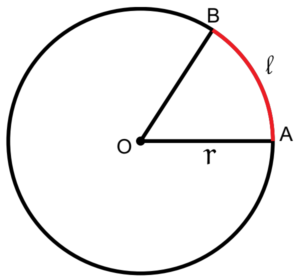


Fonte: Da autoria

A unidade de medida mais utilizada na trigonometria é o grau (º), onde $1°$ equivale a $\frac{1}{360}$ de uma circunferência. Para medidas menores do que um grau, adota-se os submúltiplos, chamados de minuto ($'$) e segundo ($''$) que, para efeito de cálculo, tem-se um minuto equivalente a $\frac{1}{60}$ do grau, isto é, $1° = 60'$ e um segundo equivale a $\frac{1}{60}$ do minuto, ou seja, $1' = 60''$.

Os arcos também podem ser medidos em radianos. Segundo (XAVIER, 2013), o termo radiano (radian) aparece impresso pela primeira vez em 1873, num exame escrito pelo físico James Thonson. O termo radian (radiano), provavelmente foi inspirado pela palavra radius (raio). O uso da unidada radiano em trigonometria surgiu da nescessidade de unificar as unidades de medidas do arco e da corda (ou meia corda) e o raio do círculo foi adotado como unidade de medida comum. Então, pode-se definir a medida de um arco em radiano (rad), como sendo a razão do comprimento de um arco determinado pelo ângulo central de um círculo, cujo centro é o vértice do ângulo pelo comprimento do raio do circulo. Para efeito de cálculo, adota-se 1 rad $\approx 57°17'57''$.

Figura 17: O radiano.



comprimento do arco (ℓ) = comprimento do raio (r)

Fonte: Da autoria

É muito comum a converção de unidade de grau para radiano ou de radiano para grau. Sabendo que uma circunferência tem $360°$ e que se C é seu comprimento então esta circunferência mede $\frac{C}{r}$ rad, tem-se a equivalência

$$360^o = \frac{C}{r} = \frac{2\pi r}{r} = 2\pi \text{ rad}$$

Observa-se aqui que a medida de um arco em radiano, não depende da unidade de comprimento considerada. Assim, para fazermos uma tranformação de grau para radiano ou de radiano para grau, basta fazer uma regra de três simples e direta. Deste modo, para efeito de cálculo, tem-se $180^o = \pi$ rad.

Exemplo 2.1.2 Deseja-se converter $30°$ para radiano. Tem-se assim, a seguinte regra de três simples:

$$\begin{array}{ccc} \text{grau} & & \text{radiano} \\ 180^\circ & \rightarrow & \pi \\ 30^\circ & \rightarrow & x \end{array}$$

E assim,

$$\frac{180}{30} = \frac{\pi}{x}$$

de onde se extrai

$$x = \frac{30\pi}{180} = \frac{\pi}{6} \text{ rad}\,.$$

Exemplo 2.1.3 Deseja-se escrever $\frac{3\pi}{4}$ rad em graus. Para tanto, tem-se a seguinte regra de três simples:

$$\begin{array}{ccc} \text{grau} & & \text{radiano} \\ 180^\circ & \rightarrow & \pi \\ x & \rightarrow & \frac{3\pi}{4} \end{array}$$

Assim,

$$\frac{180}{x} = \frac{\pi}{\frac{3\pi}{4}}$$

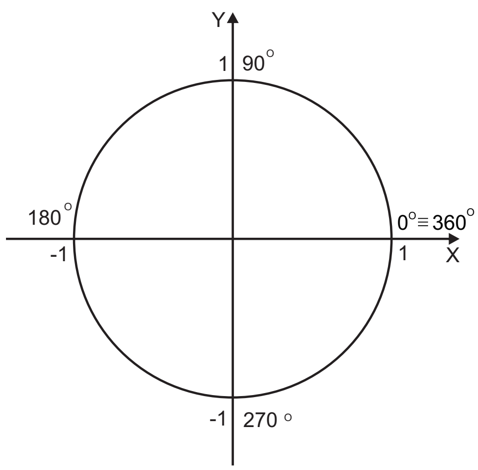
de onde se extrai

$$x = \frac{180 \cdot 3}{4} = 135^\circ.$$

2.2 O ciclo trigonométrico

Chamamos de **círculo** ou **ciclo trigonométrico** à cirfunferência de raio unitário centrada na origem de um plano cartesiano de eixos ortogonais.

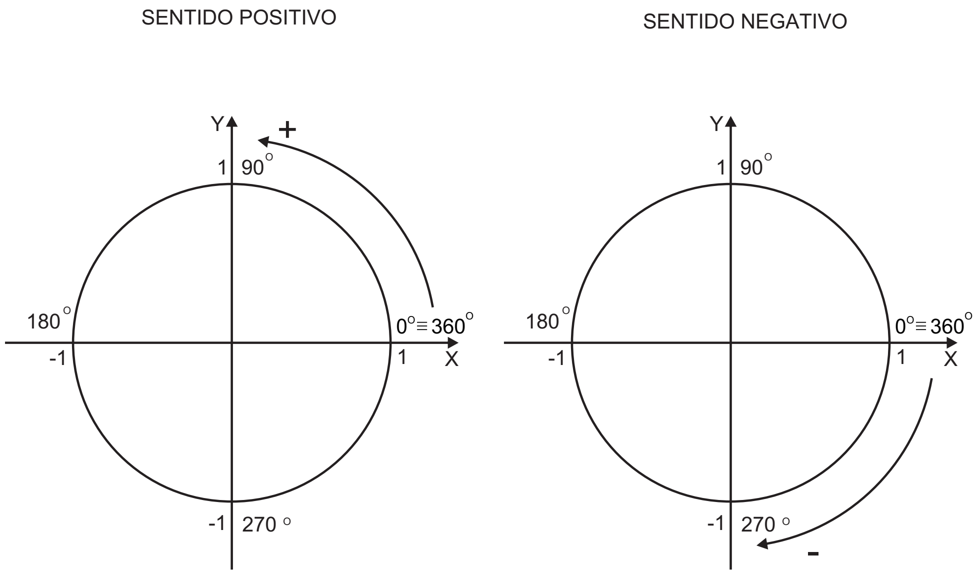
Figura 18: O ciclo trigonométrico.



Fonte: Da autoria

O círculo trigonométrico, pode ser percorrido nos dois sentidos, que chamamos de sentido horário (segundo os ponteiros do relógio) e anti-horario (sentido oposto). Convenciona-se o sentido anti-horário como sendo o sentido positivo de percurso sobre o cículo trigonométrico e o sentido horário como sendo o sentido negativo.

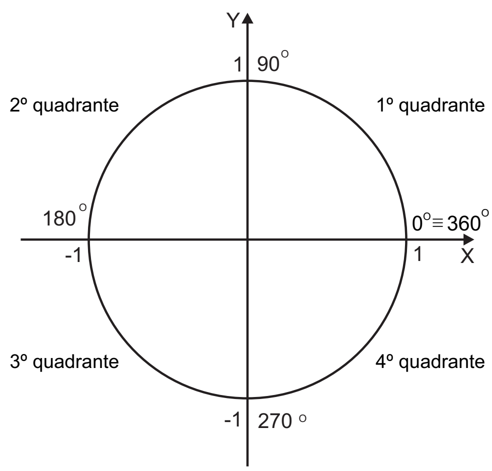
Figura 19: Orientações do ciclo trigonométrico.



Fonte: Da autoria

Observamos que os eixos x e y, dividem a circunferência trigonométrica em quatro regiões congruentes, chamadas de quadrantes enumeradas de 1 a 4 e contada apartir do ponto $A = (0, 1)$ e no sentido anti-horário da trajetória, como mostra a Figura 20.

Figura 20: Contagem dos quadrantes.



Fonte: Da autoria

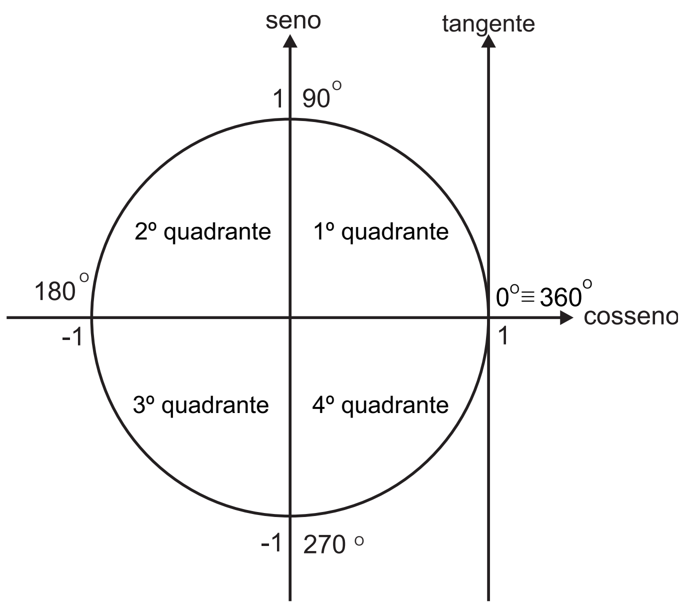
Considerando o ciclo trigonométrico de centro em $O = (0, 0)$ e origem em $A = (1, 0)$, para efeito de estudo das funções trigonométricas, associaremos ao ciclo quatro eixos:

(i) Consideremos o eixo X no sentido horizontal, orientado na direção de OA e com sentido positivo de O para A, como sendo o eixo dos cossenos.

(ii) O eixo vertical Y, será dito eixo dos senos, sendo o seu sentido positivo de O para $B = (0, 1)$. Nota-se que o arco AB mede $\frac{\pi}{2}$.

(iii) O eixo das tangentes, será paralelo ao eixo dos senos, passando por A, e o seu sentido posivo será o mesmo do item (i) .

Figura 21: Contagem dos quadrantes com eixos orientados.



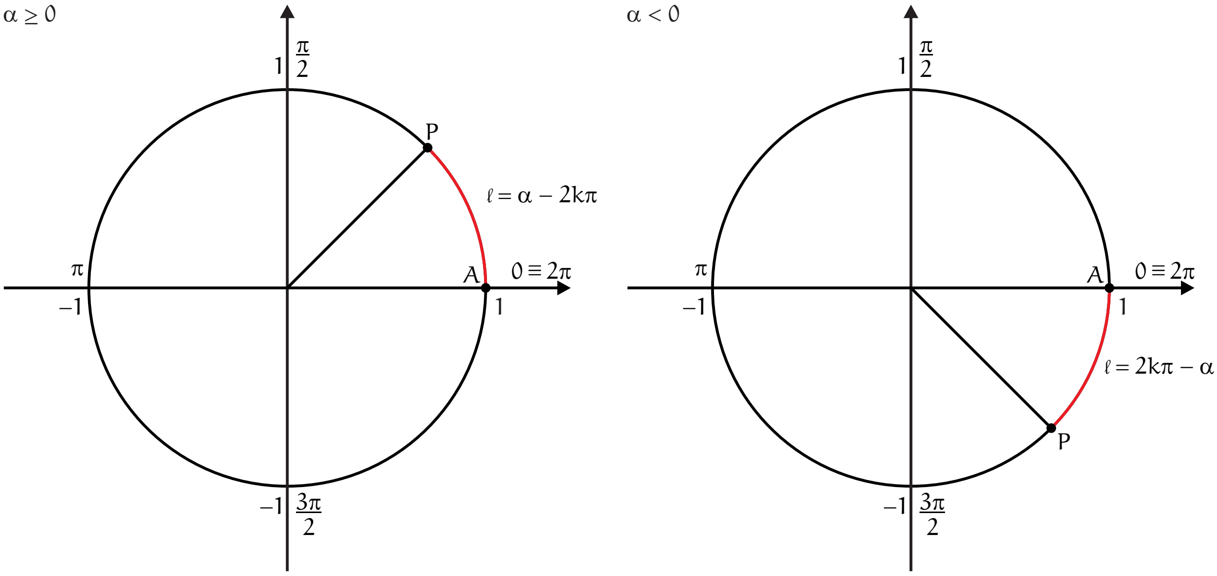
Fonte: Da autoria

A cada número real α associamos um ponto P do ciclo trigonométrico do seguinte modo:

- se $\alpha \geq 0$, considera-se o maior inteiro não-negativo k tal que $2k\pi \leq \alpha$. Fazendo-se $\ell = \alpha - 2k\pi$, apartir de A, segundo o sentido positivo, P será o ponto do ciclo tal que o comprimento do arco AP é ℓ.

- se $\alpha < 0$, considera-se o menor inteiro não-negativo k tal que $2k\pi > \alpha$. Fazendo-se $\ell = 2k\pi - \alpha$, apartir de A, segundo o sentido negativo, P será o ponto do ciclo tal que o comprimento do arco AP é ℓ.

Figura 22: Localização do arco nos quadrantes.



Fonte: Da autoria

De maneira mais simples dado $\alpha \in \mathbb{R}$, consideramos um segmento de tamanho $|\alpha|$ e o enrolamos, fazendo seu extremo inicial coincidir com o ponto A, no sentido positivo, se α é positivo, ou no sentido negativo, se α é negativo. O ponto determinado no ciclo pelo extremo final do segmento após este enrolar o ciclo será o ponto P.
Deste modo diz-se que α determina um arco do i-ésimo quadrante, $i = 1, 2, 3, 4$, quando o ponto P determinado por α pertence ao i-ésimo quadrante.

Definição 2.2.1 *Dir-se-á que os números* α *e* β *determinam* **arcos côngruos** *ou* **congruentes** *quando determinam o mesmo ponto* P *sobre o ciclo trigonométrico.*

Observa-se que se dois arcos representados por um mesmo ponto P do ciclo trigonométtrico diferem entre si por um múltiplo de 2π, o que corresponde ao comprimento de cada volta no ciclo trigonométrico.

Observa-se aqui que, caso se esteja olhando para os ângulos em grau, estes serão congruentes se a diferença entre eles é um múltiplo de $360°$

Exemplo 2.2.2 Os arcos $\dfrac{7\pi}{3}$ rad e $\dfrac{\pi}{3}$ rad são côngruos pois $\dfrac{7\pi}{3} - \dfrac{\pi}{3} = 2\pi$. Nota-se que isto é equivalente a dizer que os ângulos de 420^o e $60°$ são côngruos.

2.3 Estendendo as funções trigonométricas

Definição 2.3.1 (IEZZI -1995) *Uma função* $f : A \to B$ *é dita* **periódica** *se existir um numero real* $p > 0$ *satisfazendo a condição*

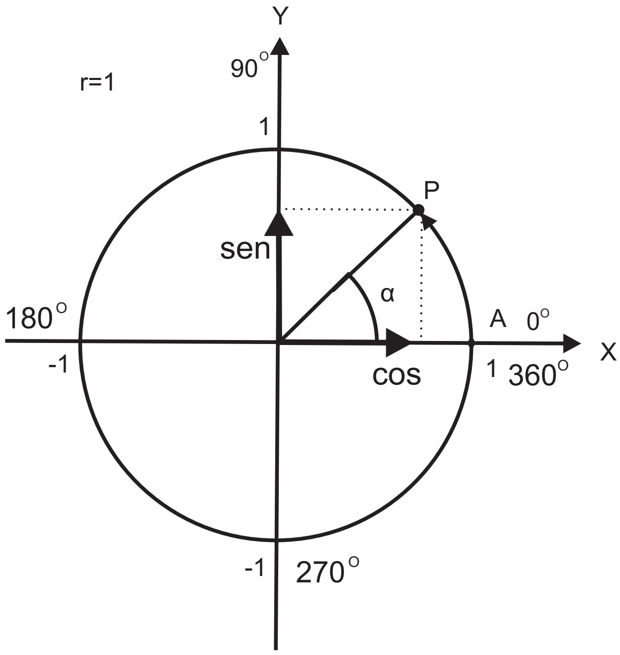
$$f(x + p) = f(x),$$

para todo $x \in A$*. O menor valor de* p *que satisfaz a condição acima é chamado de* **período** *de* f*.*

As funções trigonométicas estão bem definidas para ângulos α no intervalo $0^o < \alpha < 90^o$. Como esses ângulos podem ser também medidos em radianos então, para todos os arcos θ tais que $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, estas funções estão bem definidas.

Considerando o ângulo α, com $0^o < \alpha < 90^o$, o ponto P associado a α, pode ser localizado no plano cartesiano através das coordenadas $(\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha)$. Isso pode ser facilmente verificado, sabendo-se que o raio r, que liga o centro e o ponto P é a hipotenusa do triângulo retângulo determinado por α, como evidenciado na Figura 23.

Figura 23: Localização do arco nos quadrantes.



Fonte: Da autoria

Deste modo, se α é um ângulo em graus e $P = (x, y)$ é o ponto no ciclo determinado por α, tem-se

$$\cos\alpha = x \qquad \text{e} \qquad \operatorname{sen}\alpha = y.$$

Analogamente, se θ é um número real e $P = (x, y)$ é o ponto no ciclo trigonométrico determinado por θ, definimos

$$\cos\theta = x \qquad \text{e} \qquad \operatorname{sen}\theta = y.$$

Em particular, observa-se que

$$\begin{array}{ccc} \cos 0 = 1 & \text{e} & \operatorname{sen} 0 = 0, \\ \cos \dfrac{\pi}{2} = 0 & \text{e} & \operatorname{sen} \dfrac{\pi}{2} = 1, \\ \cos \pi = -1 & \text{e} & \operatorname{sen} \pi = 0, \\ \cos \dfrac{3\pi}{2} = 0 & \text{e} & \operatorname{sen} \dfrac{3\pi}{2} = -1, \\ \cos 2\pi = 1 & \text{e} & \operatorname{sen} 2\pi = 0. \end{array}$$

Pode-se extrair ainda desta construção que, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ (independendemente da unidade de medida),

$$\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1.$$

Essas novas definições estendem, claramente, as que foram dadas em termos de triângulos retângulos. No entanto, cabe observar que $\operatorname{tg} \alpha$ não está definida para $\alpha = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, para todo $k \in \mathbb{Z}$, pois, nestes casos, $\cos \alpha = 0$.

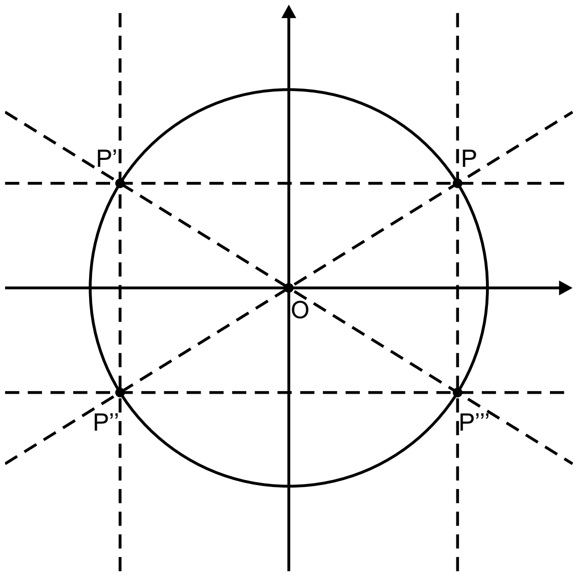
Por outro lado, para todo $k \in \mathbb{Z}$ e todo α real, temos que $\operatorname{sen}(\alpha + 2k\pi) = \operatorname{sen} \alpha$ e $\cos(\alpha + 2k\pi) = \cos \alpha$. Esse fato mostra que as funções seno e cosseno são periódicas de período 2π.

2.4 Redução ao primeiro quadrante

As funções do seno e do cosseno têm o seu sinal, diretamente ligado ao quadrante em que se encontra. É possível determinar os valores do seno e do cosseno em qualquer quadrante, conhecendo-se os valore destas funções em algum arco específico do primeiro quadrante. esse processo é chamado de **redução ao primeiro quadrante**.

Seja P a extremidade de um arco de medida a. O **simétrico de P em relação ao eixo vertical** é o ponto P' que é a interseção da reta paralela ao eixo das abscissas passando por P e o ciclo trigonométrico. O **simétrico de P em relação a origem** é o ponto P'' que é a interseção da reta OP e o ciclo trigonométrico. O **simétrico de P em relação ao eixo horizontal** é o ponto P''' que é a interseção da reta paralela ao eixo das ordenadas passando por P e o ciclo trigonométrico.

Figura 24: Pontos simétricos relativos no ciclo trigonométrico.



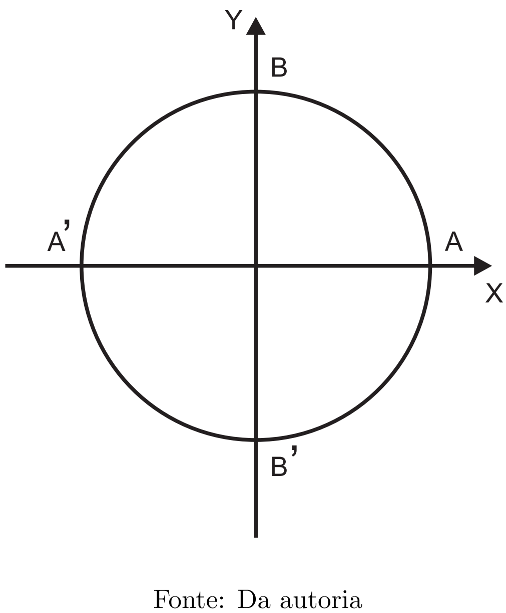
Fonte: Da autoria

O processo de redução ao primeiro quadrante corresponde a correlacionar um arco θ fora do primeiro quadrante a um arco α no primeiro quadrante de modo que

$$|\cos\theta| = \cos\alpha \qquad \text{e} \qquad |\text{sen}\,\theta| = \text{sen}\,\alpha.$$

Os pontos obtidos pela interseção entre o ciclo trigonométrico e os eixos do plano cartesiano são conhecidos como **pontos divisores dos quadrantes**, que aqui representaremos por A, A', B e B'.

Figura 25: Pontos divisores dos quadrantes.

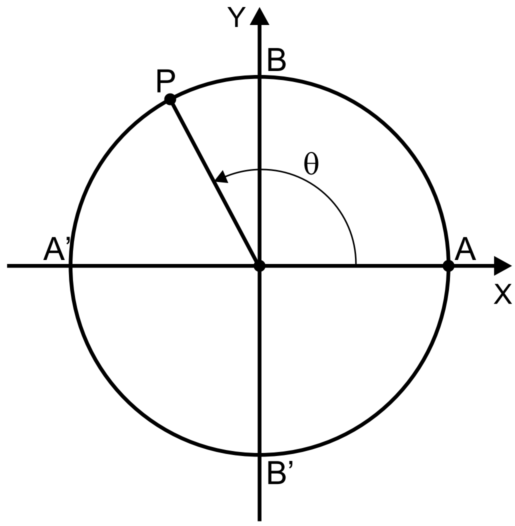


Fonte: Da autoria

2.4.1 Redução do segundo quadrante ao primeiro

Seja P um ponto no segundo quadrante e seja AP o arco que se obtém orientado positivamente, como mostra a figura abaixo.

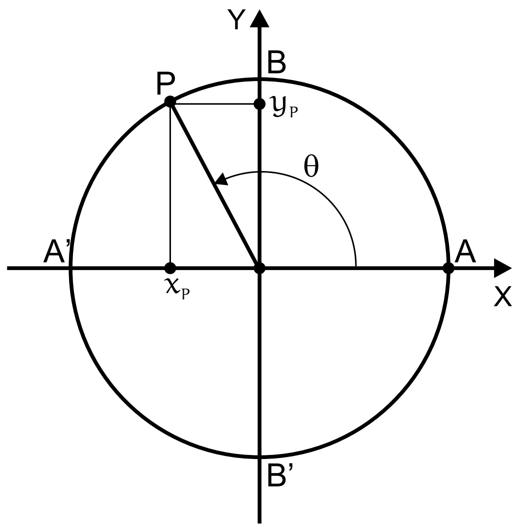
Figura 26: Arco no segundo quadrante.



Fonte: Da autoria

Uma que P é um ponto que pertece ao plano cartesino e está sobre a circurferência de raio unitário, P possui abscissa e ordenada, como na Figura 27.

Figura 27: Determinação das coordenas de um ponto no segundo quadrante.



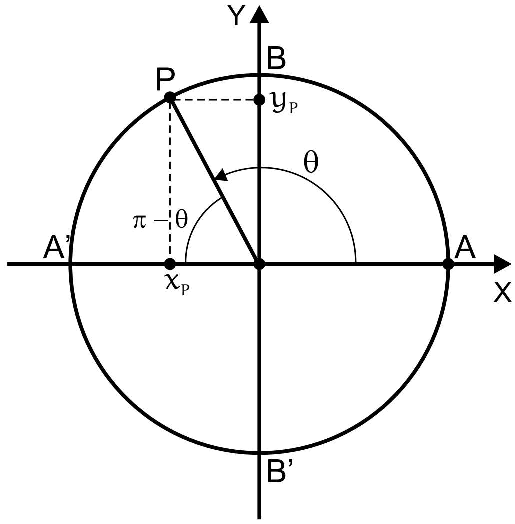
Fonte: Da autoria

Por outro lado, sabemos que os eixos das abscissas representa o eixo dos cosseno e o eixo das ordenadas representa o eixo dos senos. Assim,

$$\operatorname{sen}\theta = y \qquad \text{e} \qquad \cos\theta = x$$

Observando novamente a Figura 27, temos um arco que partiu de A até P, tendo um deslocamento de θ rad. Por outro lado, sabe-se que de P até A', será o **suplemento** de α, ou seja, o que está faltando para π rad. Logo, esse suplemento será de $\alpha = \pi - \theta$, como se pode observar na Figura 28.

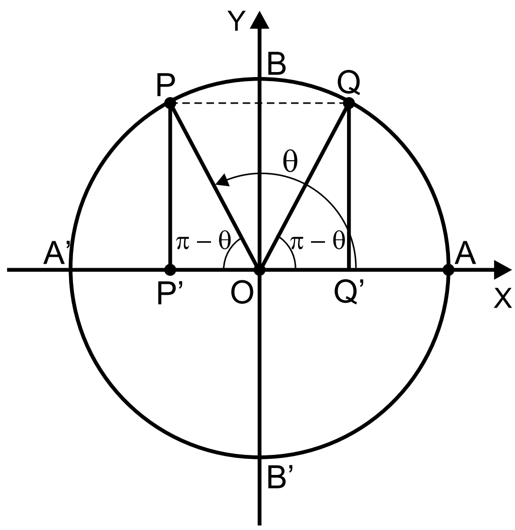
Figura 28: Ângulos suplementares.



Fonte: Da autoria

O triângulo OPP' é retângulo por construção e, fazendo-se uma reflexão de π rad desse triângulo em relação ao eixo das ordenadas, obtemos o triângulo OQQ', como se percebe na Figura 29.

Figura 29: Reflexão vertical do triângulo OPP'.



Fonte: Da autoria

Podemos notar que $OP' = OQ'$, $P'P = Q'Q$ e $OP = OQ = 1$ e que P e Q são simétricos em relação ao eixo das ordenadas, então, os pontos P e Q têm, respectivamente, coordenadas

$(x_P; y_P)$ e $(x_Q; y_Q)$ e, além disso,

$$x_Q = -x_P = \cos(\pi - \theta) \qquad \text{e} \qquad y_Q = y_P = \operatorname{sen}(\pi - \theta)$$

e, portanto, $\alpha = \pi - \theta$ é a redução de θ ao primeiro quadrante.

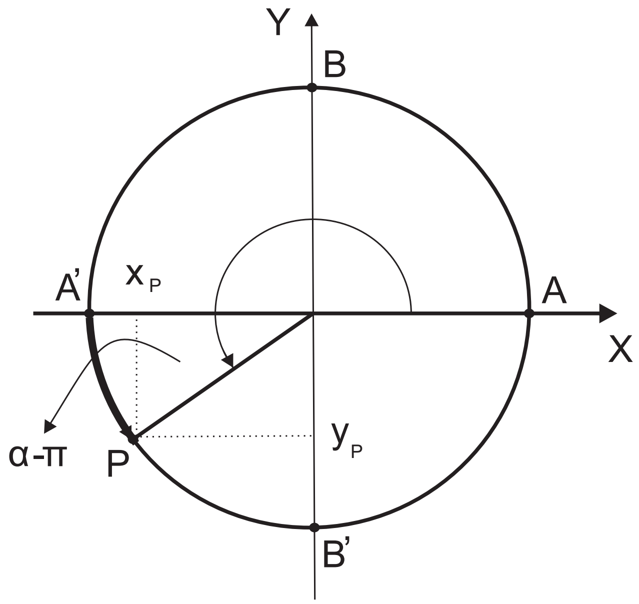
2.4.2 Redução do terceiro quadrante ao primeiro

Toma-se no ciclo trigonométrico um ângulo central α, cujo arco é AP, no sentido anti-horário. Tendo P as coordenadas $(x_P; y_P)$, tem-se que

$$\cos\alpha = x_P \qquad \text{e} \qquad \operatorname{sen}\alpha = y_P.$$

Por construção, o triângulo OPP' é retângulo, como mostra a Figura 30.

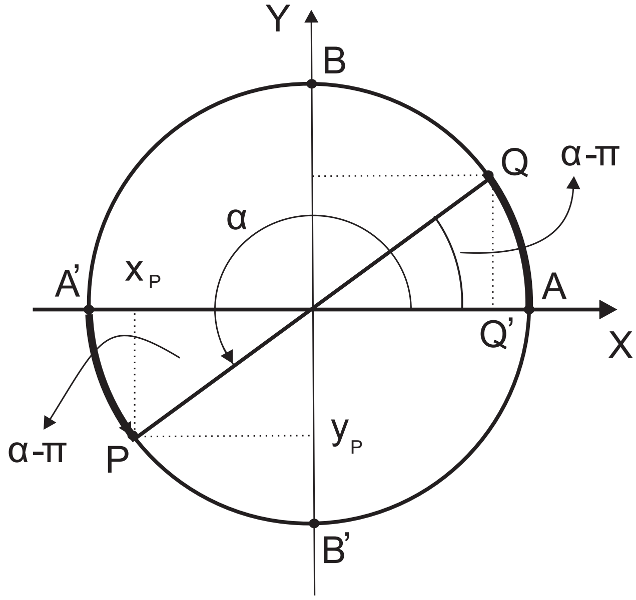
Figura 30: Arco no terceiro quadrante.



Fonte: Da autoria

Tomando o arco $A'P$, cujo ângulo central é $(\alpha - \pi)$, faz-se o prolongamento do segmento de reta $\overline{PO}$ até que se determine o ponto Q obtendo, assim, o segmento de reta $\overline{PQ}$. Dessa forma, obtem-se ângulos opostos pelo vértice e, sendo assim, por construção, os triângulos OPP' e OQQ' são congruentes (pelo criterio AA) como exemplificado na Figura 31.

Figura 31: Redução do terceiro quadrante.



Fonte: Da autoria

Tem-se, então que:

$$\overline{OP'} = \overline{OQ} \qquad \text{e} \qquad \overline{PP'} = \overline{QQ'},$$

garantindo que $Q = (-x_P, -y_p)$, isto é,

$$\cos(\alpha - \pi) = -x_p \qquad \text{e} \qquad \operatorname{sen}(\alpha - \pi) = -y_p$$

ou, equivalentemente,

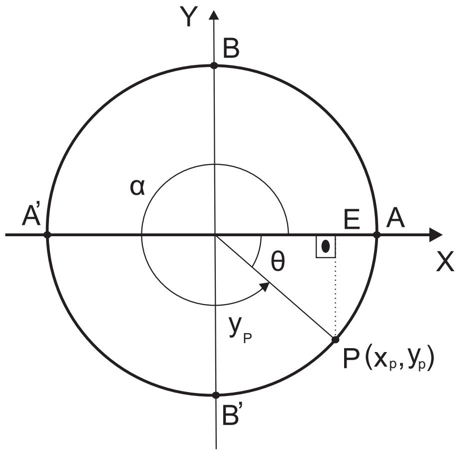
$$\cos\alpha = -\cos(\alpha - \pi) \qquad \text{e} \qquad \operatorname{sen}\alpha = -\operatorname{sen}(\alpha - \pi)\,.$$

O ângulo $\alpha - \pi$ é denominado de **explemento** de α.

2.4.3 Redução do quarto quadrante ao primeiro

Seja α um ângulo central qualquer, pertencente ao quarto quadrante, cujo arco é AP, determinado no sentido anti-horário. Sejam (x_p, y_p) as coordenadas de P.

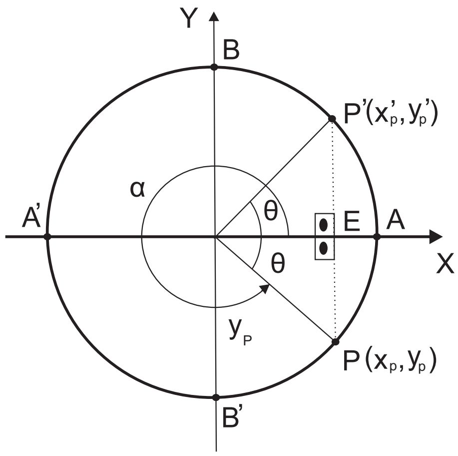
Figura 32: Arco pertencente ao quarto quadrante.



Fonte: Da autoria

Observa-se que α é o **replemento** de θ, isto é, $\alpha+\theta = 2\pi$. Tomando-se o triângulo OPP', fazendo uma reflexão de 180^o em relação ao eixo das abscissas, obtemos o ponto P', cuja representação no plano cartesiano é $P' = (x_{P'} y_{P'})$, como se observa na Figura 33.

Figura 33: Redução do quarto para o primeiro quadrante.



Fonte: Da autoria

Nota-se que os triângulos OPE e $OP'E$ são congruentes, e que $\overline{EP} = \overline{EP'}$. Neste caso, $x_P = x_{P'}$ e $y_P = -y_{P'}$ e, consequentemente, $P' = (x_P, -y_P)$. Uma vez que $\cos\alpha = x_P$, $\operatorname{sen}\alpha = y_P$, $\operatorname{sen}\theta = y_{P'}$ e $\cos\theta = x_{P'}$, pode-se concluir que

$$\cos\alpha = \cos\theta \qquad \text{e} \qquad \operatorname{sen}\alpha = -\operatorname{sen}\theta,$$

onde $\alpha + \theta = 2\pi$ ou, equivalentemente, $\theta = 2\pi - \alpha$.

2.5 Redução ao primeiro quadrante e a função tangente

Foram mencionados, até aqui, apenas os comportamentos das funções seno e cosseno no que diz respeito a relação entre os arcos pertencentes ao segundo, terceiro e quarto quadrantes e arcos localizados no primeiro quadrante. Apresentar-se-á, agora o comportamento da redução ao primeiro quadrante da tangente.

Dado um arco $\alpha = AP$, pertencente ao segundo quadrante, seja $\theta = \pi - \alpha$, o suplemento de α. Neste caso,

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\operatorname{sen}\theta}{-\cos\theta} = -\operatorname{tg}\theta.$$

Conclui-se, portanto, que a tangente de uma arco que está no segundo quadrante é o oposto da tangente do seu suplemento, que obrigatoriamente está no primeiro quadrante. De modo análogo, podemos determinar a tangente de um arco que esteja no terceiro ou no quarto quadrante tomando, respectivamente, o explemento ou o replemento do arco considerado. Assim, se α está no terceiro quadrante e $\theta = \alpha - \pi$, então

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \frac{-\operatorname{sen}\theta}{-\cos\theta} = \operatorname{tg}\theta$$

e, se α está no quarto quadrante e $\theta = 2\pi - \alpha$, então

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \frac{-\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} = -\operatorname{tg}\theta$$

Para efeito didático de memorização, podemos adotar o SETACO, palavra formada pelas duas primeiras letra das palvras SEno, TAngente e COsseno, respectivamente, onde nessa regra, expressamos somente os quadrantes em que o seno, cosseno e a tangente asumem valores positivos, como podemos observar no quadro abaixo:

SE	TA	CO
12	13	14

Assim, por exclusão, o seno será negativo no terceiro e quarto quadrantes, a tangente será negativa nos quadrantes ímpares e o cosseno será negativo no segundo e terceiro quadrantes.

2.6 Estudo da paridade das funções trigonométricas elementares

Conceitua-se, agora, a noção de função par e ímpar. Neste sentido, a redução ao primeiro quadrante será útil para caracterizar as funções seno, cosseno e tangente quanto a esses conceitos.

Definição 2.6.1 *Uma função* $f\colon (-a, a) \to \mathbb{R}$ *é dita* **par** *se* $f(x) = f(-x)$ *para todo* $x \in (-a, a)$ *e é dita* **ímpar** *se* $f(-x) = -f(x)$ *para todo* $x \in (-a, a)$.

Se $0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2}$, então $-\dfrac{\pi}{2} \leq -\theta \leq 0$, ou seja, $-\theta$ é um ângulo no quarto quadrante e θ é seu replemento. Neste caso, é sabido que

$$\cos(-\theta) = \cos(\theta) \qquad \text{e} \qquad \operatorname{sen}(-\theta) = -\operatorname{sen}\theta.$$

Se $\dfrac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi$, então $-\pi \leq -\theta \leq -\dfrac{\pi}{2}$, ou seja, $-\theta$ é um âgulo no terceiro quadrante cujo explemento α coincide com o suplemento de θ. Neste caso,

$$\cos(-\theta) = -\cos\alpha = \cos\theta \qquad \text{e} \qquad \operatorname{sen}(-\theta) = -\operatorname{sen}\alpha = -\operatorname{sen}\theta.$$

Uma vez que recai-se em análises análogas às duas anteriores quando se considera θ no terceiro ou no quarto quadrante, tem-se, de modo geral, que

$$\cos(-\theta) = \cos(\theta) \qquad \text{e} \qquad \operatorname{sen}(-\theta) = -\operatorname{sen}\theta,$$

para todo $\theta \in \mathbb{R}$, ou seja, a função cosseno é par e a função seno é ímpar.

Se $\theta \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$, então

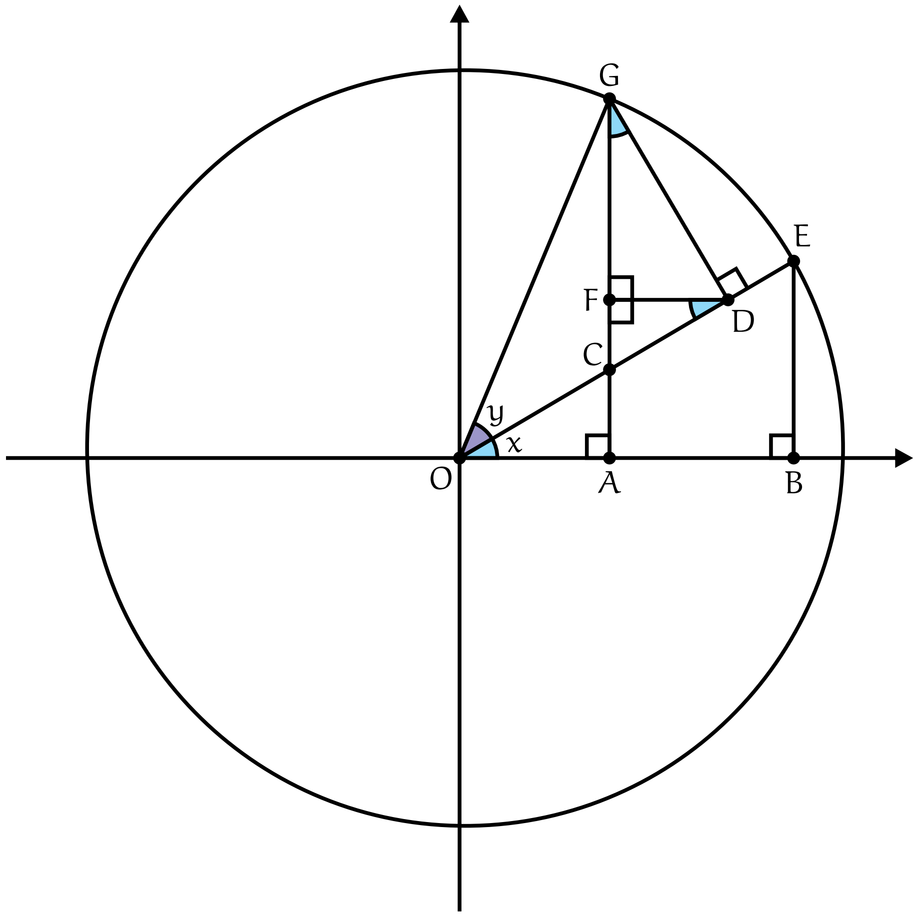
$$\operatorname{tg}(-\theta) = \frac{\operatorname{sen}(-\theta)}{\cos(-\theta)} = \frac{-\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} = -\operatorname{tg}\theta,$$

ou seja, a função tangente, no intervalo dado, é ímpar.

2.7 O seno e o cosseno da soma de arcos

Sejam x e y ângulos quaisquer. Considera-se a soma $x + y$ no ciclo trigonométrico como mostra a figura abaixo.

Figura 34: Determinação do seno e do cosseno da soma de arcos.



Fonte: Da autoria

Observa-se que

$$\operatorname{sen}(x+y) = \overline{AG} = \overline{AC} + \overline{CF} + \overline{FG}.$$

Os triângulos OAC, OBE, CDF e DFG são, claramente, semelhantes. Tem-se que

$$\operatorname{sen} x = \frac{\overline{AC}}{\overline{OC}} = \frac{\overline{CF}}{\overline{CD}},$$

de onde se extrai

$$\overline{AC} = \overline{OC}\operatorname{sen} x \qquad \text{e} \qquad \overline{CF} = \overline{CD}\operatorname{sen} x.$$

Logo,

$$\overline{AC} + \overline{CF} = \overline{OC}\operatorname{sen} x + \overline{CD}\operatorname{sen} x = \operatorname{sen} x\left(\overline{OD} + \overline{CD}\right) = \operatorname{sen} x\overline{OD}$$

e, uma vez que $\overline{OD} = \cos y$, tem-se

$$\overline{AC} + \overline{CF} = \operatorname{sen} x \cos y.$$

Por outro lado,

$$\cos x = \frac{\overline{FG}}{\overline{DG}}$$

e, portanto,

$$\overline{FG} = \overline{DG}\cos x.$$

Mas, $\overline{DG} = \operatorname{sen} y$ e, consequentemente,

$$\overline{FG} = \operatorname{sen} y \cos x.$$

Assim,

$$\operatorname{sen}(x+y) = \operatorname{sen}\mathbf{x}\cos\mathbf{y} + \operatorname{sen}\mathbf{y}\cos\mathbf{x}.$$

Observa-se, agora que

$$\cos(x+y) = \overline{OA}.$$

Mas,

$$\cos x = \frac{\overline{OA}}{\overline{OC}}$$

e, daí,

$$\overline{OA} = \overline{OC}\cos x = \cos x\left(\overline{OD} - \overline{CD}\right).$$

Como $\overline{OD} = \cos y$, tem-se

$$\cos(x+y) = \overline{OA} = \cos x \cos y - \overline{CD}\cos x.$$

Notando-se, agora, que

$$\operatorname{tg} x = \frac{\overline{CD}}{\overline{DG}} \qquad \text{e que} \qquad \overline{DG} = \operatorname{sen} y,$$

obtém-se

$$\overline{CD} = \operatorname{tg} x \operatorname{sen} y = \frac{\operatorname{sen} x \operatorname{sen} y}{\cos x}.$$

Assim,

$$\begin{aligned}\cos(x+y) &= \cos x \cos y - \frac{\operatorname{sen} x \operatorname{sen} y}{\cos x}\cos x \\ &= \cos x \cos y - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y.\end{aligned}$$

O caso da diferença de arcos faz utilizando as identidades acima e a paridade das funções seno e cosseno. De modo geral,

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(x-y) &= \operatorname{sen}(x+(-y)) \\ &= \operatorname{sen} x \cos(-y) + \operatorname{sen}(-y)\cos x \\ &= \operatorname{sen} x \cos y - \operatorname{sen} y \cos x\end{aligned}$$

e

$$
\begin{aligned}
\cos(x-y) &= \cos(x+(-y)) \\
&= \cos x \cos(-y) - \operatorname{sen} x \operatorname{sen}(-y) \\
&= \cos x \cos y + \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y.
\end{aligned}
$$

Segue daqui também as fórmulas para o seno e o cosseno do arco duplo:

$$\operatorname{sen} 2x = \operatorname{sen}(x+x) = 2 \operatorname{sen} x \cos x$$

e

$$\cos 2x = \cos(x+x) = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x.$$

Capítulo 3

Números Complexos

Nesse capítulo, apresentaremos os números complexos, entes matemáticos que começaram a ser utilizados sistematicamente com algebristas italianos dos séculos XVI, que ainda nessa época não tinham os conceitos de números negativos e irracionais bem consolidados. Percebe-se, assim, que, historicamente, o desenvolvimento dos conjuntos numéricos não seguiu, de forma alguma, um progresso linear.

Os números complexos tiveram sua primeira aplicação matemática realizada por Cardano (1501, 1576) em seu livro Ars Magna (1545), tendo surgido da necessidade de trabalhar com raízes quadradas de números reais negativos, quando da resolução da equação do terceiro grau. O matemático Rafael Bombelli, passou então a refletir a respeito da natureza desse novo conceito matemático, percebendo em seus trabalhos que as equações do tipo $x^2 + a = 0$ so poderiam ser resolvido com as raizes que Descartes chamou de imaginária. Dessa forma foi surgindo uma teoria mais sólida e com uma notação própria. Por volta do século XIX, foi apresentada pela primeira vez a interpretação gráfica dos números complexos, realizada por Gauss,

3.1 O conjunto $\mathbb{C}$ dos números complexos

Definição 3.1.1 (IEZZI, 1977) *Chama-se* **conjunto dos cúmeros complexos***, representado por $\mathbb{C}$, o conjunto dos pares ordenados de números reais para os quais estão definidas as operações de adição e multiplicação da seguinte forma:*

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$

e

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$$

Desta forma, fazendo a idenficação do número real x com o par $(x, 0)$, conclui-se que todo número complexo pode ser escrito de maneira única, sob a forma $z = a + bi$, em que $a = (a, 0)$ é denominado de **parte real** de z, denotado por $a = \mathrm{Re}\,(z)$, $b = (b, 0)$ é denominado de **parte imaginária** de z, denotado por $b = \mathrm{Im}\,(z)$, e $i = (0, 1)$ é a **unidade imaginária**.

Observa-se ainda que

$$\begin{aligned} i^2 &= (0,1)\cdot(0,1) \\ &= (0\cdot 0 - 1\cdot 1, 0\cdot 1 + 1\cdot 0) \\ &= (-1, 0) = -1. \end{aligned}$$

Assim, em 1777, Leonhard Euller utilizou pela primeira vez a notação de $i^2 = -1$, tendo seu uso absolutamente aceito por Gauss em 1801, tornando-se assim uma convenção (ou representação) adotada até os dias de hoje.

Observa-se sem dificuldades que a adição de números complexos possui as seguintes propriedades:

- Associatividade: $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$, para todo $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$;
- Comutatividade: $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$, para todo $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$;
- Elemento Neutro: $z + 0 = 0 + z = z$, para todo $z \in \mathbb{C}$, onde $0 = (0, 0)$;
- Elemento Simétrico: para todo $z = (a, b) \in \mathbb{C}$, o número complexo $-z = (-a, -b)$ é tal que
$$z + (-z) = (-z) + z = 0.$$

Verifica-se ainda que a multiplicação em $\mathbb{C}$ goza das seguintes propriedades:

- Associatividade: $(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)$, para todo $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$;
- Comutatividade: $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$, para todo $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$;
- Elemento Neutro: $z \cdot 1 = 1 \cdot z = z$, para todo $z \in \mathbb{C}$, onde $1 = (1, 0)$;
- Elemento Inverso: para todo $z = (a, b) \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, o número complexo $z^{-1} = \dfrac{1}{z} = \left(\dfrac{a}{a^2 + b^2}, -\dfrac{b}{a^2 + b^2}\right)$ é tal que
$$z \cdot \frac{1}{z} = 1;$$
- Distributividade da Multiplicação Relativamente a Adição: $z \cdot (z_1 + z_2) = zz_1 + zz_2$, para todo $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

Por definição, se $n \in \mathbb{N}$ a n-ésima potência de um número corresponde ao produto de n-fatores iguais a ele. Assim,

$$
\begin{aligned}
i^1 &= i \\
i^2 &= i \cdot i = -1 \\
i^3 &= i^2 \cdot i = (-1) \cdot i = -i \\
i^4 &= i^3 \cdot i = (-i) \cdot i = -i^2 = -(-1) = 1 \\
i^5 &= i^4 \cdot i = 1 \cdot i = i \\
i^6 &= i^5 \cdot i = i \cdot i = i^2 = -1 \\
i^7 &= i^6 \cdot i = (-1) \cdot i = -i \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Continuando com o mesmo processo, percebe-se que as potências de i começam a se repetir de 4 em 4 unidades, de modo que que se estabelece indutivamente que

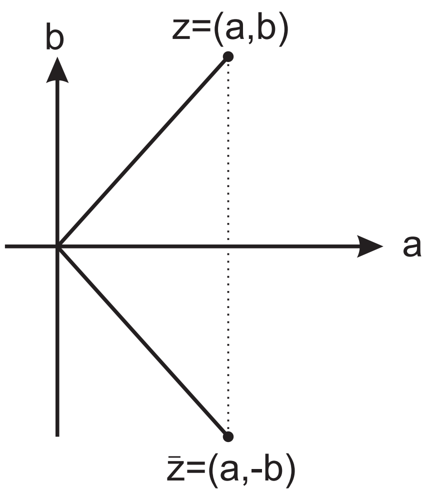
$$i^{4n+r} = i^r,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Definição 3.1.2 (CARMO, 2005) *Define-se o* **conjugado** *de um número complexo* $z = a + bi$ *como sendo o número complexo* $\overline{z} = a - bi$.

Geometricamente, o conjugado $\overline{z}$ é o simétrico de z, em relação ao eixo Ox, fato facilmente verificado através da representação em coordenadas no plano cartesiano de um número complexo, como evidenciado na figura abaixo:

Figura 35: Conjugado de um número complexo.



Fonte: Da autoria

A divisão do complexo $z_1 = a + bi$ pelo complexo não-nulo $z_2 = c + di$ é estabelecida em consonância com a divisão de números reais, isto é, deseja-se preservar em $\mathbb{C}$ a estrutura algébrica e aritmética de $\mathbb{R}$. Assim, tem-se, de modo geral, que

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{\overline{z_2}}{\overline{z_2}} = \frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{z_2 \cdot \overline{z_2}} = \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)} = (a+bi) \cdot \frac{c-di}{c^2+d^2} = z_1 \cdot z_2^{-1}.$$

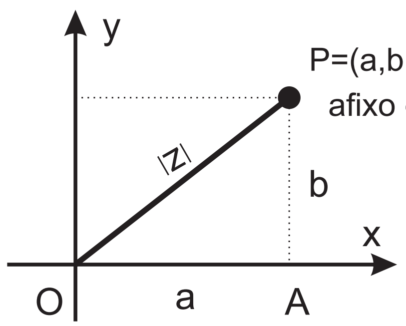
Para todo $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, com $z_2 \neq 0$.

Dado o número complexo $z = a + bi$, chama-se de **módulo** de um número complexo, o número real não-negativo

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Geometricamente, o módulo de um número complexo representa a distância da origem do sistema de coordenadas ao ponto (a, b).

Figura 36: Módulo de um número complexo.



Fonte: Da autoria

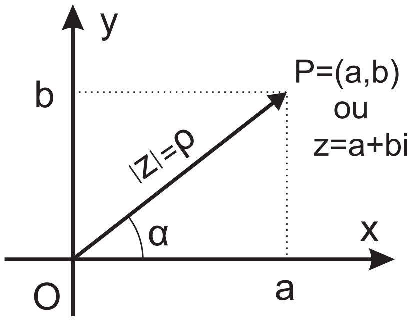
É imediato que um número complexo e seu conjugado possuem o mesmo módulo que, de modo geral, $z \cdot \overline{z} = |z|^2$.

3.2 Forma trigonométrica de um número complexo

Sabemos que um número complexo z pode ser representado através de um ponto no plano, chamado de **afixo** de z, de coordenadas (a, b), ou aproveitando a relação biunívoca entre pontos e vetores do plano, através do vetor $\overrightarrow{v}$, de origem $O = (0, 0)$ e extremidade $z = (a, b)$.

Essa representação dá ênfase aos elementos geométricos do vetor $\overrightarrow{v}$, que passaremos a chamar de coordenadas polares, isto é, podemos representar o número complexo z em termos de seu módulo e do ângulo, no sentido anti-horário, que $\overrightarrow{v}$ faz com o eixo Ox, denominado de **argumento** de z e denotado por $\arg(z)$.

Figura 37: Plano de Argand-Gauss.



Fonte: Da autoria

Tem-se, assim, que todo número complexo não-nulo z é perfeitamente determinado pelo par $(|z|, \arg(z))$.

Verifica-se que, se $z = a + bi$ e $\alpha = \arg(z)$, então

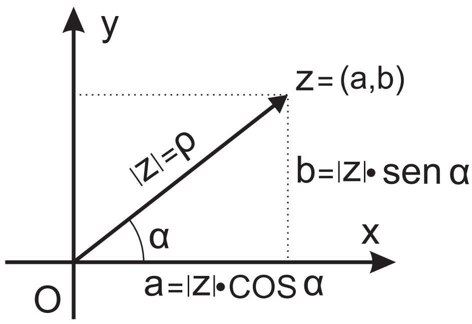
$$\cos\alpha = \frac{a}{|z|} \qquad \text{e} \qquad \operatorname{sen}\alpha = \frac{b}{|z|},$$

com $0 \leq \alpha < 2\pi$. Daí,

$$a = |z|\cos\alpha$$
$$b = |z|\operatorname{sen}\alpha$$

Geometricamente, temos:

Figura 38: Determinação da forma trigonométrica de um número complexo.



Fonte: Da autoria

Substituindo esses valores em $z = a + bi$, temos

$$z = a + bi = |z| \cos\alpha + i\,|z| \operatorname{sen}\alpha = |z| \left(\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha\right)$$

A forma $z = |z| \left(\cos\alpha + i \cdot \operatorname{sen}\alpha\right)$ é chamada de **forma trigonométrica** ou **forma polar** de z.

Observa-se que, subtistuindo o valor de α na expressão $z = |z| \cdot \left(\cos\alpha + i \cdot \operatorname{sen}\alpha\right)$ por $\alpha + 2k\pi$, onde k é um numero inteiro, o complexo z não se altera, o que permite concluir a igualdade

$$z = |z| \left(\cos\left(\alpha + 2k\pi\right) + \operatorname{sen}\left(\alpha + 2k\pi\right)\right).$$

De forma geral, dizemos que $\alpha + 2k\pi$, são os argumentos de z.

3.3 As fórmulas de De Moivre

Teorema 3.3.1 (IEZZI,1977) *O módulo do produto de dois numeros complexos é igual ao produto dos módulos dos fatores e seu argumento é congruente a soma dos argumentos dos fatores.*

Demonstração: Considere os números complexos na forma trigonométrica

$$z_1 = |z_1| \left(\cos\alpha_1 + i \operatorname{sen}\alpha_1\right) \qquad \text{e} \qquad z_2 = |z_2| \left(\cos\alpha_2 + i \operatorname{sen}\alpha_2\right).$$

Tem-se, assim, que ■

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= |z_1| \left(\cos\alpha_1 + i \operatorname{sen}\alpha_1\right) \cdot |z_2| \left(\cos\alpha_2 + i \operatorname{sen}\alpha_2\right) \\ &= |z_1|\,|z_2| \left(\cos\alpha_1 + i \operatorname{sen}\alpha_1\right)\left(\cos\alpha_2 + i \operatorname{sen}\alpha_2\right) \\ &= |z_1|\,|z_2| \left[\left(\cos\alpha_1 \cos\alpha_2 - \operatorname{sen}\alpha_1 \operatorname{sen}\alpha_2\right) + i\left(\cos\alpha_1 \operatorname{sen}\alpha_2 + \cos\alpha_2 \operatorname{sen}\alpha_1\right)\right] \end{aligned}$$

.Mas

$$\begin{aligned} \cos\alpha_1 \cos\alpha_2 - \operatorname{sen}\alpha_2 \operatorname{sen}\alpha_2 &= \cos\left(\alpha_1 + \alpha_2\right) \\ \operatorname{sen}\alpha_1 \cos\alpha_2 + \operatorname{sen}\alpha_2 \cos\alpha_1 &= \operatorname{sen}\left(\alpha_1 + \alpha_2\right) \end{aligned}$$

Daí, pode-se concluir que

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1|\,|z_2| \left[\cos\left(\alpha_1 + \alpha_2\right) + i \operatorname{sen}\left(\alpha_1 + \alpha_2\right)\right].$$

Observa-se deste último resultado que se $w = |w| \cdot \left[\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta\right]$, então a aplicação

$T\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dada por

$$T(z) = w \cdot z$$

é a função rotação por θ, isto é, multiplicar por w significa rotacionar z por um ângulo θ.

Uma consequência imediata do produto de números complexos é a potência de z, que é conhecida como **Primeira Fórmula de De Moivre**,

Teorema 3.3.2 (IEZZI, 1997) *Dados o número complexo não-nulo* $z = |z|(\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha)$ *e o inteiro positivo* n*, tem-se*

$$z^n = |z|^n (\cos n\alpha + \operatorname{sen} n\alpha).$$

Demonstração: O resultado é imediato para $n = 1$. Supondo sua validade para $n = k$, mostremos sua validade para $n = k + 1$. Assim,

$$z^{k+1} = z^k \cdot z,$$

onde $z^k = |z|^k (\cos k\alpha + i \operatorname{sen} k\alpha)$ e $z = |z|(\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha)$. Do Teorema 3.3.1 segue então que

$$z^{k+1} = |z|^{k+1} [\cos((k+1)\alpha) + i \operatorname{sen}((k+1)\alpha)]$$

e o resultado vale para $n = k + 1$. Segue do Princípio de Indução que a igualdade é verdadeira para todo inteiro positivo n. ■

Teorema 3.3.3 *O quociente de dois números complexos é igual ao quociente dos módulos dos fatores, e o seu argumento é congruente à diferença entre os argumentos dos fatores.*

Demonstração: Dados os números complexos $z_1 = |z_1|(\cos\alpha_1 + i \operatorname{sen}\alpha_1)$ e $z_2 = |z_2|(\cos\alpha_2 + i \operatorname{sen}\alpha$
tem-se ■

$$\begin{aligned}
\frac{z_1}{z_2} &= \frac{|z_1|(\cos\alpha_1 + i \operatorname{sen}\alpha_1)}{|z_2|(\cos\alpha_2 + i \operatorname{sen}\alpha_2)} \\
&= \frac{|z_1|(\cos\alpha_1 + i \operatorname{sen}\alpha_1)}{|z_2|(\cos\alpha_2 + i \operatorname{sen}\alpha_2)} \cdot \frac{(\cos\alpha_2 - i \operatorname{sen}\alpha_2)}{(\cos\alpha_2 - i \operatorname{sen}\alpha_2)} \\
&= \frac{|z_1|}{|z_2|} \cdot \frac{(\cos\alpha_1 + i \operatorname{sen}\alpha_1) \cdot [\cos(-\alpha_2) + i \operatorname{sen}(-\alpha_2)]}{\cos^2\alpha_2 + \operatorname{sen}^2\alpha} \\
&= \frac{|z_1|}{|z_2|} \cdot \cos(\alpha_1 - \alpha_2) + i \operatorname{sen}(\alpha_1 - \alpha_2)
\end{aligned}$$

e o resultado segue.

Considerando o complexo w, deseja-se investigar a equação $z^n = w$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$. Admitindo que possua solução, coloca-se w e z nas suas formas trigonométricas:

$$w = |w|\left(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta\right)$$
$$z = |z|\left(\cos\alpha + i\,\mathrm{sen}\,\alpha\right)$$

Por hipótese, temos que a n-ésima potência de z é w, então

$$z^n = w$$
$$\left(|z|\left(\cos\alpha + i\,\mathrm{sen}\,\alpha\right)\right)^n = |w|\left(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta\right)$$

Aplicando a Primeira Fórmula de De Moivre, tem-se

$$|z|^n\left(\cos n\alpha + i\,\mathrm{sen}\,n\alpha\right) = |w|\left(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta\right)$$

Tem-se, assim, uma igualdade de números complexos na forma trigonométrica. Consequentemente, seus módulos têm que ser iguais e seus argumentos devem ser arcos côngruos. Deste modo, $|z|^n = |w|$ ou, equivalentemente,

$$|z| = \sqrt[n]{|w|}$$

e $n\alpha = \theta + 2k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$, isto é,

$$\alpha = \frac{\theta + 2k\pi}{n},$$

com $k \in \mathbb{Z}$. Substituindo as expressões obtidas acima em z, obtem-se

$$z_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right),\ k \in \mathbb{Z}.$$

Observa-se que é suficiente tomar $z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}$ pois qualquer outro valor inteiro de k resultará numa dessas n raízes. Assim, de modo geral, para $n > 1$,

$$\sqrt[n]{w} = \sqrt[n]{|w|}\left(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right),\ 0 \leq k \leq n-1$$

Esta última identidade é conhecida como **Segunda Fórmula de De Moivre**.

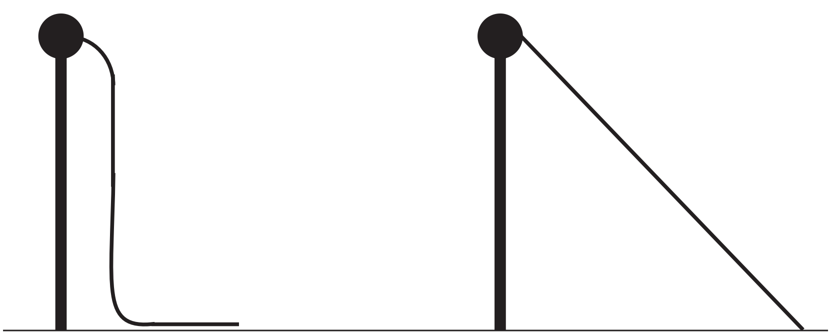
Capítulo 4

Aplicações

Nesse capítulo, apresentaremos aplicações do Teorema de Pitágoras, da trigonometria e dos números complexos, assuntos que possuem inúmeras aplicações nos diversos ramos das ciências, sendo consideradas ferramentas imprescindíveis para o desenvolvimento da Matemática moderna bem como de áreas correlatas como Física, Engenharias e outras.

Problema 4.1 (PIC OBMEP-2014) O antigo livro chinês Jiuzhang suanshu contem 246 problemas. Para as soluções de alguns, é nescessário o uso do gou gu, ou seja, do Teorema de Pitágoras. Veja um dos desses problemas traduzido do Capítulo 9 do Jiuzhang. No alto de um bambu vertical está presa uma corda. A parte da corda em contato com o solo mede 3 chih. Quando a corda é esticada, sua extremidade toca no solo a uma distância de 8 chih do pé do bambu. que comprimento tem o bambu?

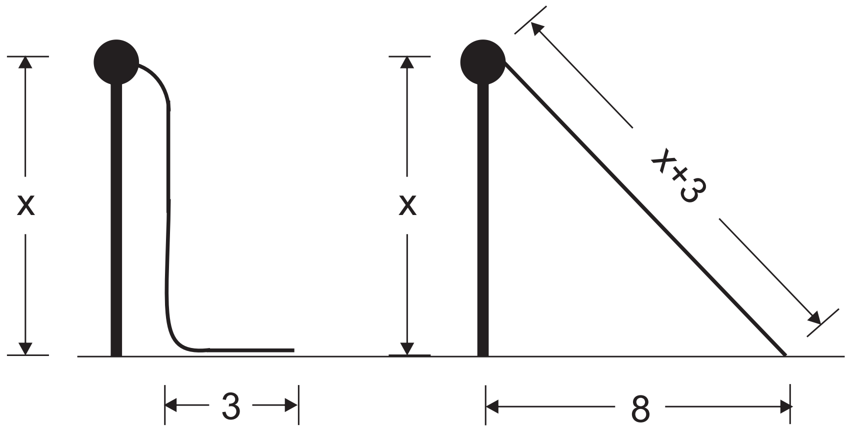
Figura 39: Fio preso ao bambu.



Fonte: Da autoria

Solução: Podemos observar que a corda que toca o chão tem o mesmo comprimento x do bambu. Como ainda restam 3 chih de corda sobre o solo, ao esticar a corda presa ao topo do bambu, conclui-se que ela possui um comprimento de $x + 3$ chih. Aplicando o Teorema de Pitágoras tem-se:

Figura 40: Determinando o comprimento do fio.



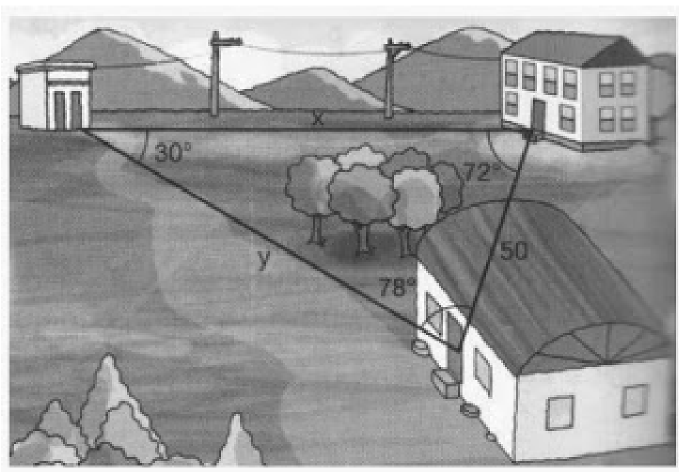
Fonte: Da autoria

$$\begin{aligned}(x+3)^2 = x^2+8^2 &\Leftrightarrow x^2+6x+9 = x^2+64\\ &\Leftrightarrow 6x = 55\\ &\Leftrightarrow x = \frac{55}{6}.\end{aligned}$$

Logo, a resposta é $x = \dfrac{55}{6}$ chih. □

Problema 4.2 Numa fazenda o galpão fica 50 m distante da casa. Sejam x e y, recpectivamente, as distâncias da casa e do galpão ao transformador de enérgia, conforme a figura abaixo. Calcule o valor de $x+y$. (Use: $\operatorname{sen} 30^o = \frac{1}{2}; \operatorname{sen} 78^o = 0,98; \operatorname{sen} 72^o = 0,95$)

Figura 41: Triângulo formado, pela casa, pelo galpão e pelo celeliro.



Fonte: http : //4.bp.blogspot.com/ − dUgkm2HIsFc/UohwoNT7$_m$I/AAAAAAAAGKo/4kgJV8KwISs/s1600/05.jpg

Solução: Aplicando a Lei do Seno no triângulo formado pelo galpão, pela casa e pelo transformador, temos:

$$\frac{\operatorname{sen} 30^{o}}{50} = \frac{\operatorname{sen} 78^{o}}{x} = \frac{\operatorname{sen} 72^{o}}{y}.$$

Daqui,

$$\frac{\operatorname{sen} 30^{o}}{50} = \frac{\operatorname{sen} 78^{o}}{x} \Leftrightarrow x = \frac{50 \cdot \operatorname{sen} 78^{o}}{\operatorname{sen} 30^{o}} = \frac{50 \cdot 0,98}{0,5} = 98$$

e

$$\frac{\operatorname{sen} 30^{o}}{50} = \frac{\operatorname{sen} 72^{o}}{y} \Leftrightarrow y = \frac{50 \cdot \operatorname{sen} 72^{o}}{\operatorname{sen} 30^{o}} = \frac{50 \cdot 0,95}{0,5} = 95$$

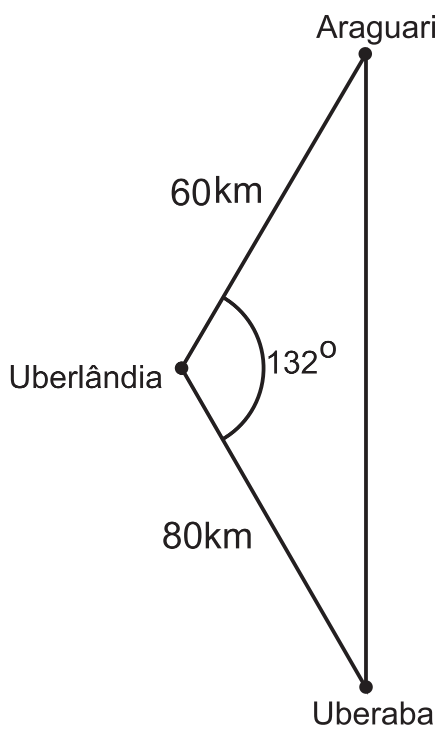
Então

$$x + y = 98 + 95 = 193.$$

□

Problema 4.3 Uberaba, Uberlândia e Araguari são cidades do Triângulo Mineiro localizadas conforme a figura a seguir. A partir dos dados fornecidos, determine a distância aproximada de Uberaba a Araguari. (Use $\operatorname{sen} 132^{o} = 0,74$, $\cos 132^{o} = -0,67$ e $\operatorname{tg} 132^{o} = -1,11$)

Figura 42: Cálculo da distância entre as cidades de Araguari e Uberaba.



Fonte: Da autoria

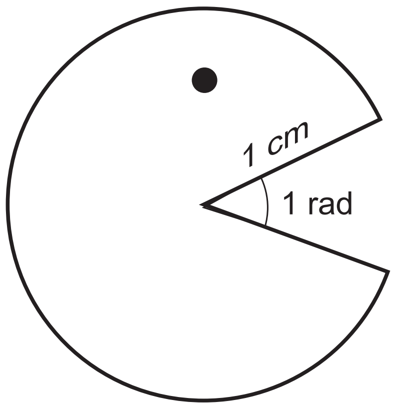
Solução: Aplicando a Lei dos Cossenos e denotando a distância de Uberaba a Araguari por x, tem-se

$$\begin{aligned} x^2 &= 80^2 + 60^2 - 2 \cdot 80 \cdot 60 \cos 132^o \\ &= 6400 + 3600 - 9600 \cdot (-0,67) \\ &= 6400 + 3600 + 6,432 \\ &= 16432 \\ x &= 128,18 \end{aligned}$$

donde, $x = 128,18\,$km. □

Problema 4.4 (VUNESP) Em um jogo eletrônico, o "monstro" tem a forma de um setor circular de raio $1\,$cm, como mostra a figura. A parte que falta no círculo é a boca do "monstro", e o ângulo de abertura mede 1 radiano. qual é o perímetro do "monstro"em cm.

Figura 43: Monstro.



Fonte: Da autoria

Solução: Sabe-se que o radiano é a razão entre o comprimento do arco c pelo seu raio r. Deste modo

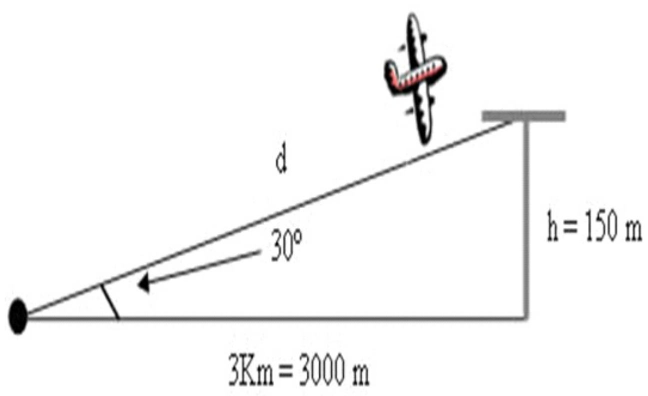
$$1 \text{ rad} = \frac{c}{1}$$

e $c = 1cm$. Isso, mostra que o comprimeto de um arco que tem como medida uma ângulo central de 1 rad e raio $1\,$cm é igual a $1\,$cm. Uma vez que o comprimento C de uma circunferência é igual a $2\pi r$, tem-se que o perímetro P da figura é dado por □

$$
\begin{aligned}
P &= C - c + 2r \\
&= 2\pi r - c + 2r \\
&= 2 \cdot 1\pi - 1 + 2 \cdot 1 \\
&= 2\pi + 1 \text{ cm}
\end{aligned}
$$

Problema 4.5 Ao decolar, um avião sobe formando um ângulo de $30°$ com a pista (horinzontal). Na direção do percurso existe uma torre de transmissão de energia elétrica situada a 30 km do aeroporto e com altura igual a 150 metros. Verifique se, mantendo-se o trajeto, o avião pode colidir com a torre. Adote $\sqrt{3} = 1,7$.

Figura 44: O avião e a torre.



Fonte: https://mundoeducacao.bol.uol.com.br/matematica/aplicacoes-trigonometria.htm

Solução: Da razão que define a tangente, tem-se

$$\operatorname{tg} 30^{\circ} = \frac{x}{3000}$$

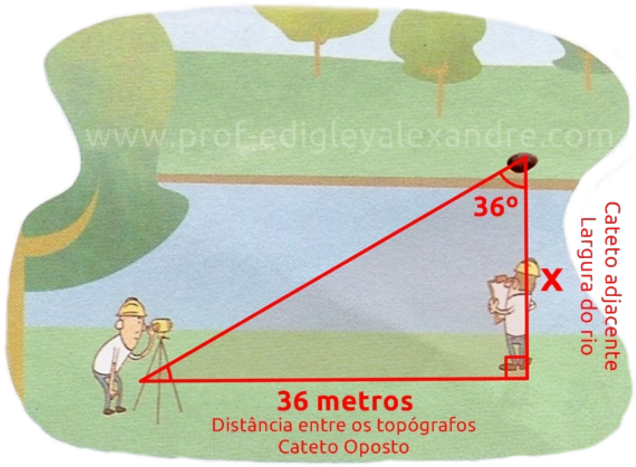
e, consequentemente,

$$x = \frac{3000\sqrt{3}}{3} = 1000\sqrt{3} = 1700\,\text{m}$$

Logo, o avião não irá colidir com a torre, pois esta possui 150 m enquanto o avião estará a uma altura de 1700 metros quando passar por ela. □

Problema 4.6 Dois topógrafos estão na mesma margem de um rio, separados por 36 metros um do outro. Um deles observa uma pedra que está na outra margem, bem enfrente ao seu companheiro. Com a ajuda de um teodolito, o observador verifica que a linha perpendicular que une a pedra ao colega forma um ângulo de 36°com alinha de mira do teodolito à pedra. Qual é a largura do rio? (Use $\operatorname{tg} 36° = 0,727$, $\cos 36^{\circ} = 0,809$ e $\operatorname{sen} 36^{\circ} = 0,588$)

Figura 45: Calculando a largura do rio.



Fonte: https://mundoeducacao.bol.uol.com.br/matematica/aplicacoes-trigonometria.htm

Solução: Da razão trigonométrica que define a tangente segue que

$$\operatorname{tg} 36^\circ = \frac{36}{x},$$

ou seja

$$x = \frac{36}{\operatorname{tg} 36^\circ} = \frac{36}{0,727} = 49,51$$

Portanto, a largura do rio é de aproximadamente de $49,51$ metros. □

Problema 4.7 Sabendo que a tangente de um ângulo agudo α é igual a 2, calcule o $\operatorname{sen}\alpha$ e o $\cos\alpha$.

Solução: Por hipótese,

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = 2$$

ou seja,

$$\operatorname{sen}\alpha = 2\cos\alpha$$

Da Relação Fundamental da Trigonometria é sabido que $\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$. Logo,

$$\begin{aligned}(2\cos\alpha)^2 + \cos^2\alpha = 1 \quad &\Rightarrow \quad 4\cos^2\alpha + \cos^2\alpha = 1\\ &\Rightarrow \quad 5\cos^2\alpha = 1\\ &\Rightarrow \quad \cos^2\alpha = \frac{1}{5}.\end{aligned}$$

Como o seno e o cosseno de ângulos agudos são valores positivos, tem-se

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

e, consequentemente,

$$\operatorname{sen} \alpha = 2\cos \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

$\square$

Problema 4.8 (CARMO, 1992) Usando a fórmula da adição, mostre

a) $\operatorname{tg} 2x = \dfrac{2\operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$.

b) $\operatorname{tg}(x - y) = \dfrac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y}{1 + \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y}$.

c) $\operatorname{sen}^2 x = \dfrac{1 - \cos 2x}{2}$.

Solução: (a) Tem-se que

$$\begin{aligned}
\operatorname{tg} 2x &= \frac{\operatorname{sen} 2x}{\cos 2x} = \frac{2\operatorname{sen} x \cos x}{\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x} \\
&= \frac{\dfrac{2\operatorname{sen} x \cos x}{\cos^2 x}}{\dfrac{\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x}} = \frac{2\dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}}{1 - \left(\dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\right)^2} \\
&= \frac{2\operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}
\end{aligned}$$

$\square$

(b) Tem-se que

$$\begin{aligned}
\operatorname{tg}(x - y) &= \frac{\operatorname{sen}(x - y)}{\cos(x - y)} \\
&= \frac{\operatorname{sen} x \cos y - \cos x \operatorname{sen} y}{\cos x \cos y + \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y} \\
&= \frac{\dfrac{\operatorname{sen} x \cos y - \cos x \operatorname{sen} y}{\cos x \cos y}}{\dfrac{\cos x \cos y + \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y}{\cos x \cos y}} \\
&= \frac{\dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x} - \dfrac{\operatorname{sen} y}{\cos y}}{1 - \left(\dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\right)^2} \\
&= \frac{2\operatorname{tg} x}{1 + \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\dfrac{\operatorname{sen} y}{\cos y}} \\
&= \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y}{1 + \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y}.
\end{aligned}$$

$\square$

(c) Da Relação Fundamental da Trigonometria segue que

$$\operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x \tag{4.1}$$

Por outro lado,

$$\cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x,$$

o que fornece

$$\operatorname{sen}^2 x = \cos^2 x - \cos 2x. \tag{4.2}$$

Somando-se as identidades (4.1) e (4.2) membro a membro, obtém-se

$$2\operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos 2x$$

e, consequentemente,

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}.$$

$\square$

Problema 4.9 (CARMOS, 1992) Demonstre as identidades trigonométricas abaixo:

a) $\dfrac{\operatorname{sen} 2x}{1 + \cos 2x} \cdot \dfrac{\cos x}{1 + \cos x} = \operatorname{tg} \dfrac{x}{2}$.

b) $\cos^4 x - \operatorname{sen}^4 x = \cos 2x$.

c) $\operatorname{sen} x \cos x\,(1 + \operatorname{tg} x)\,(1 + \operatorname{ctg} x) = 1 + \operatorname{sen} 2x$, onde $\operatorname{ctg} x = \dfrac{1}{\operatorname{tg} x}$.

d) $\operatorname{sen} x = \dfrac{2\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\dfrac{x}{2}}$.

Solução: (a) Sabe-se que

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} 2x &= 2\operatorname{sen} x \cos x \\ \cos 2x &= \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x \end{aligned}$$

Então

$$\begin{aligned} \frac{\operatorname{sen} 2x}{1 + \cos 2x} \cdot \frac{\cos x}{1 + \cos x} &= \frac{2\operatorname{sen} x \cos x}{(\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x) + (\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x)} \cdot \frac{\cos x}{1 + \cos x} && (4.3) \\ &= \frac{2\operatorname{sen} x \cos x}{2\cos^2 x} \cdot \frac{\cos x}{1 + \cos x} && (4.4) \\ &= \frac{\operatorname{sen} x}{1 + \cos x}. && (4.5) \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen} x &= \operatorname{sen}\left(2\frac{x}{2}\right) = 2\operatorname{sen}\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\\
\cos x &= \cos\left(2\frac{x}{2}\right) = \cos^2\frac{x}{2} - \operatorname{sen}^2\frac{x}{2}.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{\operatorname{sen} x}{1+\cos x} = \frac{2\operatorname{sen}\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{1+\cos^2\frac{x}{2} - \operatorname{sen}^2\frac{x}{2}}$$

Pela Relação Fundamental da Trigonometria,

$$\cos^2\frac{x}{2} + \operatorname{sen}^2\frac{x}{2} = 1$$

o que fornece

$$\begin{aligned}
\frac{\operatorname{sen} x}{1+\cos x} &= \frac{2\operatorname{sen}\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\left(\cos^2\frac{x}{2} + \operatorname{sen}^2\frac{x}{2}\right) + \left(\cos^2\frac{x}{2} - \operatorname{sen}^2\frac{x}{2}\right)} && (4.6)\\
&= \frac{2\operatorname{sen}\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}} && (4.7)\\
&= \frac{\operatorname{sen}\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}} && (4.8)\\
&= \operatorname{tg}\frac{x}{2}. && (4.9)
\end{aligned}$$

De (4.5) e (4.9) a igualdade segue. □

(b) Observa-se que

$$\cos^4 x - \operatorname{sen}^4 x = \left(\cos^2 x\right)^2 - \operatorname{sen}^4 x.$$

Da Relação Fundamental da Trigonometria se extrai

$$\begin{aligned}
\cos^4 x - \operatorname{sen}^4 x &= \left(\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x\right)\left(\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x\right)\\
&= 1\cdot\cos 2x\\
&= \cos 2x.
\end{aligned}$$

□

(c) Tem-se que

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen} x \cos x\,(1+\operatorname{tg} x)\,(1+\operatorname{ctg} x) &= \operatorname{sen} x \cos x\,(1+\operatorname{ctg} x+\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} x \operatorname{ctg} x)\\
&= \operatorname{sen} x \cos x\left(1+\operatorname{ctg} x+\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} x \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} x}\right)\\
&= \operatorname{sen} x \cos x\,(1+\operatorname{ctg} x+\operatorname{tg} x+1)\\
&= \operatorname{sen} x \cos x\,(2+\operatorname{ctg} x+\operatorname{tg} x)\\
&= \operatorname{sen} x \cos x\left(2+\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}+\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\right)\\
&= 2\operatorname{sen} x \cos x+\cos^2 x+\operatorname{sen}^2 x\\
&= 1+\operatorname{sen} 2x.
\end{aligned}$$

□

(d) Observa-se que

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen} x = \operatorname{sen}\left(2\frac{x}{2}\right) &= 2\operatorname{sen}\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\\
&= \frac{2\operatorname{sen}\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}} = 2\operatorname{tg}\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}\\
&= \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}} = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\frac{\cos^2\frac{x}{2}+\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}}\\
&= \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}.
\end{aligned}$$

□

Problema 4.10 (CARMO, 1992) Escreva as expressões abaixo na forma de $a+bi$.

a) $(7+4i)\,(2-3i)+(6-i)\,(2+5i)$

b) $2+6i-\overline{5+3i}$

Solução:

Solução 4.0.4 *(a) Tem-se*

$$\begin{aligned}(7+4i)(2-3i)+(6-i)(2+5i) &= 14-21i+8i-12i^2+12+30i-2i-5i^2\\ &= 14-13i+12+12+28i+5\\ &= 14+12+12+5-13i+28i\\ &= 43+15i\end{aligned}$$

□

(b) Nota-se que

$$\overline{5+3i}=5-3i$$

e, portanto, □

$$\begin{aligned}2+6i-\overline{5+3i} &= 2+6i-(5-3i)\\ &= 2+6i-5+3i\\ &= 2-5+6i+3i\\ &= -3+9i\end{aligned}$$

Problema 4.11 Calcule $\left(1+i\sqrt{3}\right)^{20}$.

Solução: Observa-se que o número $z = 1 + i\sqrt{3}$ está na forma algébrica e, portanto, devido o alto valor da potência, calcular $\left(1+i\sqrt{3}\right)^{20}$ pelo binômio de Newton, torna-se uma tarefa muito trabalhasa. Deste modo, exprimir-se o número complexo z em sua forma trigonométrica para que em seguida se aplique a Primeira Fórmula de De Moivre. Nota-se que

$$\begin{aligned}a = 1 \quad &\text{e} \quad b=\sqrt{3},\\ |z| &= \sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{1^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}=2,\\ \cos\theta &= \frac{a}{|z|}=\frac{1}{2}\\ \operatorname{sen}\theta &= \frac{b}{|z|}=\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \theta &= \arg(z)=60^\circ=\frac{\pi}{3}\ \text{rad}\end{aligned}$$

Aplicando a Primeira Fórmula de De Moivre, obtém-se

$$
\begin{aligned}
z^n &= (|z|)^n \left[\cos(n\theta) + i \operatorname{sen}(n\theta)\right] \\
\left(1 + i\sqrt{3}\right)^{20} &= 2^{20}\left(\cos(20 \cdot 60^\circ) + i \operatorname{sen}(20 \cdot 60^\circ)\right) \\
\left(1 + i\sqrt{3}\right)^{20} &= 2^{20}\left(\cos 1200^\circ + i \operatorname{sen} 1200^\circ\right)
\end{aligned}
$$

Fazendo redução ao primeiro quadrante,

$$
\begin{aligned}
\cos 1200^o &= \cos 120^o = -\cos 60^o = -\frac{1}{2} \\
\operatorname{sen} 1200^o &= \operatorname{sen} 120^o = \operatorname{sen} 60^o = \frac{\sqrt{3}}{2}
\end{aligned}
$$

e, daqui,

$$\left(1 + i\sqrt{3}\right)^{20} = 2^{19}\left(-1 + i\sqrt{3}\right)$$

□

Problema 4.12 (ENQ 2018.1) Escreva $\cos(3x)$ em função de $\cos x$

Solução: Escrevemos, pois

$$z = (\cos 3x + i \operatorname{sen} 3x).$$

Pela Primeira Fórmula de De Moivre, tem-se □

$$
\begin{aligned}
\cos 3x + i \operatorname{sen} 3x &= (\cos x + i \operatorname{sen} x)^3 \\
&= \cos^3 x + 3i\cos^2 x \operatorname{sen} x + 3i^2 \cos x \operatorname{sen}^2 x + i^3 \operatorname{sen}^3 x \\
&= \cos^3 x + 3i\cos^2 x \operatorname{sen} x - 3\cos x \operatorname{sen}^2 x - i \operatorname{sen}^3 x \\
&= \left(\cos^3 x - 3\cos x \operatorname{sen}^2 x\right) + \left(3i\cos^2 x \operatorname{sen} x - i \operatorname{sen}^3 x\right) \\
&= \left(\cos^3 x - 3\cos x \operatorname{sen}^2 x\right) + i\left(3\cos^2 x \operatorname{sen} x - \operatorname{sen}^3 x\right)
\end{aligned}
$$

Igualando as partes reais no primeiro e no último membro,

$$\cos 3x = \cos^3 x - 3\cos x \operatorname{sen}^2 x$$

Da Relação Fundamental da Trigonometria, fica

$$
\begin{aligned}
\cos 3x &= \cos^3 x - 3\cos x \operatorname{sen}^2 x \\
&= \cos^3 x - 3\cos x\left(1 - \cos^2 x\right) \\
&= \cos^3 x - 3\cos x + 3\cos^3 x \\
&= 4\cos^3 x - 3\cos x
\end{aligned}
$$

Problema 4.13 (CARMO, 1992) Dada a equação do segundo grau $x^2 + 2bx + c = 0$, onde b e c são números reais, verifica-se facilmente que as suas raízes (isto é, os valores de x que satisfazem a equação acima) são:

$$x_1 = -b + \sqrt{b^2 - c} \quad \text{e} \quad x_2 = -b - \sqrt{b^2 - c}.$$

Se só dispusermos de números reais, pode não ser possível efetuar a operação $\sqrt{b^2 - c}$. Entretanto, usando complexos, toda equação do segundo grau tem duas raízes. Achar as raízes complexas de:

a) $x^2 + 9 = 0$.

b) $x^2 + 2x + 6 = 0$

Solução: (a) Verifica-se que, neste caso,

$$2b = 0 \Rightarrow b = 0$$

e que

$$c = 9.$$

Assim, as raízes da equação dada são

$$x_1 = -b + \sqrt{b^2 - c} = \sqrt{-9} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{-1} = 3i$$

e

$$x_2 = -b - \sqrt{b^2 - c} = -\sqrt{-9} = -3i.$$

$\square$

(b) Verifica-se que, neste caso,

$$2b = 2 \Rightarrow b = 1$$

e que

$$c = 6.$$

Assim, as raízes da equação dada são

$$x_1 = -b + \sqrt{b^2 - c} = -1 + \sqrt{1 - 6} = -1 + \sqrt{-5} = -1 + \sqrt{-1} \cdot \sqrt{5} = -1 + i\sqrt{5}$$

e

$$x_2 = -b - \sqrt{b^2 - c} = -1 - \sqrt{-5} = -1 - i\sqrt{5}.$$

$\square$

Problema 4.14 (DANTE, 2010) Resolva a equação trinômia $x^6 + 26x^3 - 27 = 0$.

Solução: Percebe-se que

$$x^6 + 26x^3 - 27 = \left(x^3\right)^2 + 26x^3 - 27 = 0$$

Fazendo-se a mudança de variável

$$x^3 = y,$$

obtém-se

$$y^2 + 26y - 27 = 0.$$

Assim,

$$2b = 26 \Rightarrow b = 13$$

e

$$c = -27.$$

Logo,

$$\sqrt{b^2 - c} = \sqrt{169 + 27} = \sqrt{196} = 14$$

e, portanto,

$$y_1 = -b + \sqrt{b^2 - c} = -13 + 14 = 1 \qquad \text{e} \qquad y_2 = -b - \sqrt{b^2 - c} = -13 - 14 = -27.$$

Por outro lado, de $x^3 = y$ tem-se

$$x^3 = 1 \qquad \text{ou} \qquad x^3 = -27$$

Uma vez que

$$1 = \cos 0 + i \operatorname{sen} 0 \qquad \text{e} \qquad -27 = 27\left(\cos \pi + i \operatorname{sen} \pi\right)$$

segue da Segunda Fórmula de De Moivre que

$$\begin{aligned} u_k &= \cos\left(\frac{0 + 2k\pi}{3}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{0 + 2k\pi}{3}\right), \; k = 0, 1, 2 \\ v_k &= 3\left[\cos\left(\frac{\pi + 2k\pi}{3}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi + 2k\pi}{3}\right)\right], \; k = 0, 1, 2, \end{aligned}$$

são as raízes da equação dada. Deste modo:

- Para $k = 0$,

  $$u_0 = 1 \cos 0 + i \operatorname{sen} 0 = 1$$

  e

  $$v_0 = 3\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{3}\right) = \frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2} i.$$

- Para $k = 1$,

$$u_1 = \cos\frac{2\pi}{3} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

e

$$v_1 = 3\,(\cos\pi + i\,\mathrm{sen}\,\pi) = -3.$$

- Para $k = 2$,

$$u_2 = \cos\frac{4\pi}{3} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

e

$$v_2 = 3\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{5\pi}{3}\right) = \frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i$$

Logo o conjunto solução da equação $x^6 + 26x^3 - 27 = 0$, é

$$\left\{1, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i, \frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}, -3, \frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i\right\}.$$

$\square$

Considerações Finais

Apresentou-se aqui de forma clara e objetiva a teoria elementar acerca da Trigonometria e dos Números Complexos revelando as conexões existentes entre os temas e sua aplicabilidade quer seja tendo a Matemática como fim, quer seja em áreas correlatas que dependem do desenvolvimento destes assuntos para o seu próprio desenvolvimento. Deste modo, alunos no final do Ensino Fundamental ou início do Ensino Médio podem, por meio deste texto, ter um primeiro contato com o conteúdo de modo prático e inteligível.

Os assuntos aqui destacados vêm sendo gradativamente retirados do rol de conteúdos a serem trabalhados na Educação Básica, fato esse que acaba por dirimir o desenvolvimento pleno das habilidades matemáticas necessárias ao estudante para resolver problemas do dia-a-dia, bem como dar prosseguimento de forma suave aos seus estudos a nível técnico e/ou superior sobretudo em áreas que possuam a Matemática como ferramenta principal ou fundamental para o seu próprio desenvolvimento, como é o caso da Física, Engenharias, Arquitetura e Urbanismo, Astronomia e outras.

Neste contexto, o trabalho também mostra que o custo para a exposição destes assuntos é muito pouco (ou quase nenhum) se comparado com sua relevância e real necessidade de apreensão para uma formação matemática elementar sólida, visto que os pré-requisitos são mínimos, gozando o assunto de um forte apelo geométrico, o que facilita não só sua compreensão, como evidencia as ideias principais por trás de raciocínios analíticos e manipulações algébricas.

Referências Bibliográficas

BARBOSA, Ruy Madsen. **Descobrindo padrões pitagóricos**. São Paulo: Atual, 1993

DA SILVA, Sani de Carvalho Rutz; SCHIRLO, Ana. PIC/OBMEP: PROGRAMA DE ENSINO PARA ESTUDANTES COM TALENTO EM MATEMÁTICA. **Revista de Ensino de Ciências e Matemática**, v. 5, n. 1, p. 49-62, 2014.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática: contexto e aplicações**. São Paulo: Ática, v. 2, 2010.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática: contexto & aplicações**. 2. ed. São Paulo: Ática, 2013.

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática**/Howard Eves; tradução: Hygino H. Domingues. Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2004.

GIOVANNI JÚNIOR, José Ruy; CASTRUCCI, Benedicto. **A conquista da matemática**. São Paulo: FTD, 2009.

IEZZI, Gelson et al. **Matemática: ciência e aplicações**. 2001.

IEZZI, Gelson. **Fundamentos de Matemática Elementar**. Trigonometria. Vol. 3. São Paulo: Atual, 1995.

MORGADO, Augusto C.; WAGNER, E.; PERDIGÃO, M. P. **Trigonometria, Números Complexos**. Coleção do professor de, 1992.

MORGADO, Augusto César et al. **Temas e Problemas Elementares**. Coleçao do Professor de Matemática, SBM, 2005.

PATARO, PRM; SOUZA, JR de. **Vontade de saber matemática**. 2012.

REIS, Frederico. Matemática: **Arcos e ciclo trigonométrico**. Vol. 1. São Paulo: Bernoulli.

WAGNER, Eduardo. **Teorema de Pitágoras e áreas**. IMPA, Rio de Janeiro, 2006.

XAVIER, A.B. **O uso de material concretos para o ensino da trigonometria**. Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal Fluminese, Rio de Janeiro, 2013.

CARMO, Manfredo Perdigão; MORGADO, Augusto César; WAGNER, Eduardo. **Trigonometria números complexos**. Instituto de Matemaica Pura e Aplicada, 1992.

https://pt.wikipedia.org/wiki/Trigonometria#C%C3%ADrculo_trigonom%C3%A9trico. Acessado em 01/11/2018

https://pt.wikipedia.org/wiki/C%C3%ADrculo_unit%C3%A1rio. Acessado em 01/11/2018

https://mundoeducacao.bol.uol.com.br/matematica/circulo-trigonometrico.htm

https://www.infoescola.com/matematica/circulo-trigonometrico. Acessado em 12/11/2018
http://trigonoblog.blogspot.com/2014/07/autores-importantes-para-historia-da.html. Acessado em 21/12/2018