UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM REDE NACIONAL EM MATEMÁTICA

Arnaldo Oliveira Silva Junior

OS TRÊS NÍVEIS DA SOLUÇÃO DE PROBLEMAS

São Luís - MA
2019

Arnaldo Oliveira Silva Junior

OS TRÊS NÍVEIS DA SOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal do Maranhão como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Marcos Antonio Ferreira de Araújo
Doutor em Matemática

Coorientador: Prof. Me. Cleber Araújo Cavalcanti
Mestre em Matemática

São Luís - MA
2019

Ficha gerada por meio do SIGAA/Biblioteca com dados fornecidos pelo(a) autor(a).
Núcleo Integrado de Bibliotecas/UFMA

Silva Junior, Arnaldo Oliveira.
Os três níveis da solução de problemas / Arnaldo Oliveira Silva Junior. - 2019.
95 p.

Coorientador(a): Prof. Me. Cleber Araújo Cavalcanti.
Orientador(a): Prof. Dr. Marcos Antonio Ferreira de Araújo.
Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-graduação em Rede - Matemática em Rede Nacional/ccet, Universidade Federal do Maranhão, São Luis, 2019.

1. Estratégias. 2. Ferramentas. 3. Resolução de problemas. 4. Táticas. I. Araújo, Prof. Dr. Marcos Antonio Ferreira de. II. Cavalcanti, Prof. Me. Cleber Araújo. III. Título.

Arnaldo Oliveira Silva Junior

OS TRÊS NÍVEIS DA SOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Dissertação apresentada ao PROFMAT-UFMA, como requisito para a obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Educação Matemática

São Luís, 14 de março de 2019

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Marcos Antonio Ferreira de Araújo (Orientador)
Universidade Federal do Maranhão - UFMA

Prof. Me. Cleber Araújo Cavalcanti (Co-orientador)
Universidade Federal do Maranhão - UFMA

Prof. Dr. Adecarlos Costa Carvalho
Universidade Federal do Maranhão - UFMA

Prof. Dr. Antônio José da Silva
Universidade Federal do Maranhão - UFMA

À Samuel e Melyssa...

Agradecimentos

Em primeiro lugar a Deus, por ser a razão da minha existência.

Aos meus filhos Samuel e Melyssa, por serem meu maior motivo para seguir.

A minha esposa Shirley, a quem amo muito, por ter me encorajado desde o início.

Ao meu sogro Izanildo, por me acompanhar nas viagens, mesmo debaixo de chuva.

A minha família, em especial, Rozelina, cunhadas e concunhados, pelo incentivo.

Aos meus amigos do PROFMAT Alvimar, Lenildo, Laércio, Denison, Clenilton, Anacleto, e Wallace por todas as questões discutidas, horas de estudos, momentos compartilhados, brincadeiras e apoio, em especial a Aldivan e Ana Gabriela, pois sempre me socorreram nos momentos de dificuldades.

Aos meu amigo Josemilson, pelo apoio.

Aos Municípios de Mirinzal e Central do Maranhão que contribuíram diretamente para que esse momento chegasse.

Ao IMPA e SBM, pela iniciativa através do PROFMAT.

A CAPES, pelo incentivo financeiro.

A UFMA, por ter me alcançado através do Proeb.

Ao coordenador do PROFMAT, Professor Antônio José, por tudo o que fez pelo melhor andamento do curso e por todo o apoio prestado a mim e meus colegas.

Ao meu orientador Marcos Antonio, pelos momentos de orientação e dedicação.

Ao meu coorientador Cleber, pela paciência e conhecimento transmitido.

Aos professores do PROFMAT, por todo o conhecimento repassado e em especial aos professores Anselmo e Josenildo e a professora Valeska pelo companheirismo, paciência e ensino.

Resumo

Este trabalho tem como objetivo apresentar a resolução de problemas a partir da atuação do resolvedor em três níveis denominados estratégias, táticas e ferramentas diferenciando cada um desses por meio de conceitos e exemplos clássicos. Nesse contexto, as estratégias são elementos que norteiam o primeiro contato com o problema bem como sua abordagem de forma geral. Enquanto que as táticas, são resultados matemáticos aplicados na superação de obstáculos que se apresentam durante a resolução. Já as ferramentas são instrumentos para as situações mais especificas da resolução. Por fim, este trabalho trás uma série de aplicações com problemas de diversas áreas da matemática visando a identificação dos elementos que caracterizam cada nível de atuação demonstrando a eficácia de resolver problema a partir desta perspectiva oferecendo, dessa forma, um novo ponto de vista para as discussões ja existentes sobre o tema.

Palavras-chave: Resolução de problemas, estratégias, táticas e ferramentas

Abstract

This work aims to present the problem solving from the action of the resolver in three levels called strategies, tactics and tools differentiating each one of them through classic concepts and examples. In this answer, strategies are elements that guide the first contact with the problem as well as its approach in general. While the tactics are mathematical results applied in overcoming obstacles that arise during resolution. The tools are instruments for the more specific situations of resolution. Finally, this paper presents a series of applications with problems in several areas of mathematics, aiming at identifying the elements that characterize each level of performance, demonstrating the effectiveness of problem solving from this perspective, thus offering a new point of view for the discussions on the subject.

Keywords: Problem solving, strategies, tactics and tools

Lista de ilustrações

Lista de tabelas

Sumário

1 INTRODUÇÃO

O ensino da matemática e os meios para garantir a sua qualidade é matéria recorrente entre os teóricos da área. Principalmente com o advento das avaliações nacionais responsáveis por medir a qualidade do ensino no pais, as discussões sobre os métodos de ensino de matemática passam pela resolução de problemas, pois consideram esta um caminho eficaz para exploração dos conceitos e conteúdos matemáticos.

Muitos escritores são destaques na produção sobre resolução de problemas como o brasileiro Luiz Roberto Dante e George Polya, considerado por muito, a maior autoridade no tema. Este, no livro "A arte de resolver problemas", propõe a resolução de problemas em quatro fases, as quais são: a compreensão do problema; a elaboração de um plano; a execução de um plano e o retrospecto. A obra de Polya tem contribuído para a discussão desse tema em vários países e por muitos anos, principalmente através de suas obras que são traduzidas para vários idiomas, influenciando outros pesquisadores e escritores.

Contudo, os maus resultados nas avaliações nacionais e a necessidades dos professores de relacionarem os conteúdos matemáticos com as experiencias concretas dos seus alunos evidenciam a necessidade de uma discussão cada vez mais ampla sobre resolução de problemas não só na esfera do ensino básico, mas na própria formação de professores e bacharéis em matemática. É com essa motivação que esse trabalho tomou forma com o objetivo de fomentar a resolução de problemas a partir da atuação em três níveis apresentando diferentes estratégias, táticas e ferramentas aplicadas nas mesmas.

Para isso, estas notas tem como principal fundamento as considerações de Paul Zeitz contidas no livro "The Art and Craft of Problem Solving" no qual apresenta a Resolução de Problemas a partir da operação em três níveis, a saber: o nível das estratégias; o nível das táticas e o nível das ferramentas. No entanto, vale destacar, que essa abordagem não diverge da apresentada por Polya, mencionada no segundo parágrafo, pelo contrário, a amplia oferecendo uma perspectiva diferente do mesmo tema.

A metodologia utilizada foi a pesquisa bibliográfica através da leitura sistemática da literatura disponível, usando as fontes primárias de informações como livros, artigos, revistas, dissertações, vídeos e sites. As aplicações foram feitas utilizando os princípios abordados no trabalho estabelecendo a relação entre a teoria apresentada e a prática proposta em cada problema.

A apresentação do presente trabalho organiza-se em ordem cronológica de pensamento dividida em 6 capítulos, sendo que, o primeiro, a introdução, faz a apresentação da obra por completo expondo as motivações, objetivos e organização da mesma. O segundo capítulo, atuando em três níveis para resolver problemas, trás algumas definições de problema, estabelece a diferença entre problema e exercício e apresenta os três níveis da solução de problemas. Já o terceiro, faz referência às estratégias para investigar problemas apresentando as estratégias psicológicas, estratégias para investigar problemas e finaliza-se com os métodos de argumentação. O quarto capítulo, intitulado o nível das táticas, expõe por meio da teoria e de exemplos as principais táticas utilizadas na resolução de problemas como a Simetria, o Princípio das casas de pombos, Princípio dos extremos, Invariantes e Desigualdade das médias. O quinto capítulo são as aplicações trazendo problemas que são resolvidos a partir da atuação nos três níveis apresentados. E, por fim, o sexto e último capítulo apresenta as considerações finais.

Portanto, por meio de uma perspectiva pouco explorada, como é o caso da resolução de problemas a partir da atuação nos níveis das estratégias, tática e ferramentas, acredita-se que estas notas constituem-se em um instrumento facilitador na formação do indivíduo através de uma fonte de pesquisa capaz de ampliar a visão ja estabelecida sobre o tema abordado. Sobretudo, para alunos professores e acadêmicos interessados em resolver e ensinar outros a resolverem problemas de matemática.

2 ATUANDO EM TRÊS NÍVEIS PARA RESOLVER PROBLEMAS

Neste capítulo apresentar-se ideias de resolução de problemas matemáticos. Faz-se três seções, a primeira traz algumas definições de problemas que terão seus conceitos completados com a diferenciação entre o significado de exercício e problema, assunto abordado na segunda seção. Já a terceira, apresenta os três níveis da resolução de problemas, segundo Paul Zeitz.

2.1 O que é um problema?

A história da resolução de problemas se confunde com a própria História da Matemática. Esta surgiu a partir da necessidade do homem de resolver situações-problemas do seu cotidiano. Segundo Andrade (1998), pode-se olhar o problema como um elemento que é capaz disparar um processo de construção do conhecimento e, ainda que, resolver um problema matemático pode representar um desenvolvimento extraordinário para a humanidade.

O problema é visto como uma ferramenta que leva a construção de conhecimento. Contudo, resolvê-lo não é um tarefa simples, requerendo de quem se propõe a fazê-lo um investimento de muito mais do que tempo e dedicação. Mais afinal "o que é um problema?" Muitos autores usam diferentes argumentos para a definição de problema. Entre estes, destaca-se a seguinte afirmação: "O problema pode ser modesto, mas se ele desafiar a curiosidade e puser em jogo as faculdades inventivas, quem o resolver por seus próprios meios experimentará a tensão e gozará o triunfo da descoberta." (POLYA, 1995, p.V) Nesse contexto, o problema é visto como algo desafiador que por sua vez é capaz de produzir a autorrealização em quem atinge a solução.

Para Perrenoud (1999, p 48), uma situação-problema deve colocar o aprendiz diante de uma série de decisões a serem tomadas para alcançar um objetivo que ele mesmo escolheu, ou que lhe foi proposto e até mesmo traçado. Perrenoud evidencia a característica investigadora que um problema exige do seu resolvedor, colocando-o na posição de avaliar e definir o caminho que o levará à solução.

Problema é visto ainda como " uma situação em que o indivíduo ou grupo quer ou precisa resolver e para o qual não dispõe de um caminho rápido e direto que o leve à solução."(LESTER, 1982. apud DANTE, 2010 p.12) Já os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) dizem que um problema matemático é uma situação que demanda a realização de uma sequência de ações ou operações para obter um resultado, ou seja, a solução não está disponível de início, no entanto é possível construí-la. Em muitos casos, os problemas usualmente apresentados aos alunos não constituem verdadeiros problemas, pois via de regra, não existe um real desafio nem a necessidade de verificação para validar o processo de solução. O que é problema para um aluno pode não ser para outro, em função do seu nível de desenvolvimento intelectual e dos conhecimentos de que dispõe.

As afirmações feitas configuram a ideia de problema que pretende-se abordar neste trabalho, o qual é dado como uma situação que não dispõe de um caminho direto para a solução, desafiando a curiosidade e as faculdades inventivas do resolvedor, propondo-lhe objetivos que de início ele não sabe como alcançar. Porém ao alcançar, isto é, ao resolvê-lo experimentará uma felicidade que só pode ser descrita por quem passa por tal experiência.

2.2 Exercício vs Problema

Algumas vezes uma situação pode não exigir muito do resolvedor para alcançar a solução, isto pode ser devido a sua experiência com os assuntos matemáticos abordados por tal situação. Quando isso acontece, pode ser que não se esteja diante de um problema e sim de um exercício. Diante disso, faz-se necessário estabelecer a diferença entre problema e exercício. É possível ter uma visão mais clara do conceito de problema matemático a partir de sua diferenciação de exercício. (DANTE, 1991 p. 43)

> Exercício, como o próprio nome diz, serve para exercitar, para praticar um determinado algoritmo ou processo. O aluno lê o exercício e extrai as informações necessárias para praticar uma ou mais habilidades algorítmicas. Problema – processo [...] é a descrição de uma situação onde se procura algo desconhecido e não se tem previamente nenhum algoritmo que garanta sua solução.

Um exercício é uma questão que requer para sua solução a aplicação de técnicas específicas e focadas no que foi alvo de discussões recentes, em outras palavras, um exercício é de imediata resolução. Um problema não apresenta um caminho imediato para sua solução. Este, requer que o interessado em resolvê-lo invista tempo e um certo esforço mental para encontrar uma forma de abordá-lo, mesmo sem a garantia de que esta conduzirá à solução.

Para que esta diferença fique bem clara apresentamos dois exemplos. O primeiro, um exercício e o segundo, um problema.

Exemplo 2.1 *Calcule* $\left(\frac{5}{4}\right)^{-3}$.

Solução: Não há dificuldades para resolver esta questão, basta seguir corretamente o algoritmo da potenciação de base racional e expoente inteiro, ou seja,

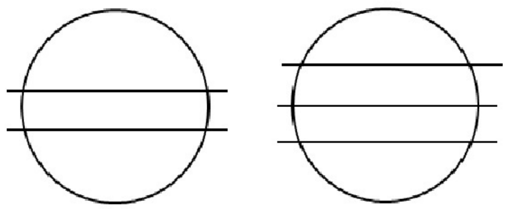
$$\left(\frac{5}{4}\right)^{-3} = \left(\frac{4}{5}\right)^{3} = \frac{4^3}{5^3} = \frac{64}{125} = 0,512.$$

□

Exemplo 2.2 [Pizza de Steiner] *Determine o número máximo de pedaços que uma pizza pode ser dividida por* 100 *cortes retilíneos?*

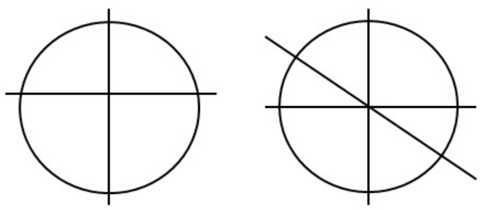
Solução: A princípio pode parecer um simples exercício. Basta fazer 100 cortes em uma pizza. Mas como garantir que esses cortes gerem o maior número possível de pedaços? Este é o primeiro obstáculo apresentado na questão. Representando a pizza como um círculo e os cortes retilíneos como retas, precisa-se garantir que essas retas dividam o círculo no máximo de regiões possíveis. Observando as duas figuras a seguir pode-se notar que se as retas forem concorrentes em um ponto, elas dividem o círculos em mais regiões do que retas paralelas. Assim,

Figura 2.1 – Retas paralelas dividindo o círculo.



Fonte: Próprio autor

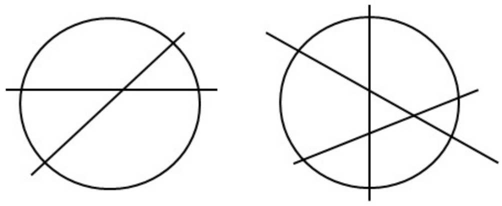
Figura 2.2 – Retas concorrentes dividindo o círculo.



Fonte: Próprio autor

Conforme mostra a Figura 2.3, se as retas interceptarem-se em pontos distintos, estas dividem o círculo no número máximo de regiões.

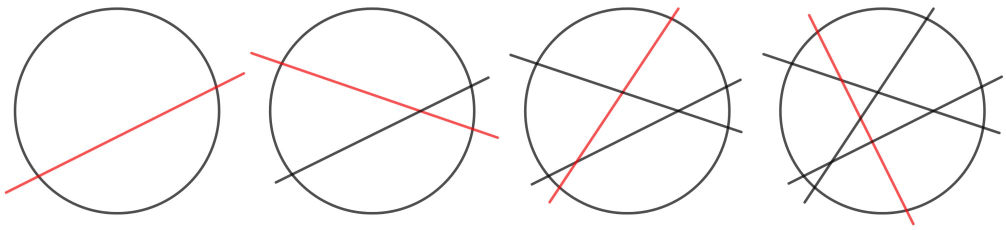
Figura 2.3 – Retas concorrentes em pontos distintos dividindo o círculo.



Fonte: Próprio autor.

Observando o que acontece com 1, 2, 3 e 4 cortes, temos

Figura 2.4 – Máximo de regiões que n retas divide o círculo.



Fonte: Próprio autor.

Tabela 2.1 – Divisão do círculo com n retas para $n = 1, 2, 3$ e 4.

Número de cortes	Número de pedaços	Número de pedaços acrescentados
1	2	–
2	4	2
3	7	3
4	11	4

Fonte: Próprio autor.

Nota-se, que para 1 corte há $1 + 1 = 2$ pedaços; 2 cortes há $1 + 1 + 2 = 1 + 3 = 1 + \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 2 = 4$ pedaços; 3 cortes há $1 + 1 + 2 + 3 = 1 + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 = 7$ pedaços e para 4 cortes há $1 + 1 + 2 + 3 + 4 = 1 + \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 4 = 11$ pedaços. O que leva a conjecturar que para n cortes haverá $1 + 1 + 2 + 3 + ... + n = 1 + \frac{1}{2}\, n(n + 1)$ pedaços. Este é, sem dúvidas, outro obstáculo. Esta conjectura é verdadeira? Em caso afirmativo, o problema estará resolvido. Mas como fazer esta comprovação?

Através da indução finita é possível verificar a veracidade da conjectura. Portanto, uma pizza pode ser dividida com 100 cortes retilíneos, no máximo em $1+\frac{1}{2}\cdot 100\cdot 101 = 5051$ pedaços. $\square$

A partir desses dois exemplos é possível diferenciar exercício de problema. A solução do exemplo 2.2, não foi obtida de forma imediata como no exemplo que o antecedeu. Para solucioná-lo foi necessário desprender um esforço para encontrar a abordagem adequada e superar dois obstáculos que surgiram no decorrer da trajetória, garantir que retas dividam o círculo no máximo de regiões e provar a conjectura, que embora não sendo feita passo-a-passo, mas não há dúvidas que esta se faz por indução finita, o que será feito no Exemplo 3.19 na página 35. Assim, o exemplo da Pizza de Steiner é o que pode ser denominado de problema.

Embora existam exercícios fáceis e exercícios difíceis, de uma maneira geral, sua solução ocorre de forma mecânica, onde aplicam-se automaticamente técnicas aprendidas anteriormente sem exigir um raciocínio muito profundo. O problema sempre traz algo novo e desconhecido que confronta o resolvedor, pois a princípio este não sabe como resolvê-lo e só após uma reflexão mais aprofundada e algum tempo investido, as primeiras ideias, para a solução vão surgindo.

2.3 Os três níveis da solução de problemas

Como visto anteriormente, resolver um problema não é uma tarefa simples. Muitos que se propõe a isso após algum esforço desprendido e nenhum progresso feito é levado a desistir. Apesar disso, a solução de um problema é, em sua maioria, acessível. Segundo Zeitz (2007), a resolução de um problema é operada em três diferentes níveis: estratégias, táticas e ferramentas. Sendo as estratégias ideias matemáticas e psicológicas para abordar e iniciar a investigação de um problema, as táticas são os métodos matemáticos que funcionam em diferentes configurações, já as ferramentas são técnicas estritamente focadas para situações específicas. Diante de um problema, o que deve-se fazer em primeiro lugar é pensar estrategicamente e em seguida estudá-lo a partir de um ponto de vista mais geral permitindo assim uma análise global da situação descrita no enunciado favorecendo a adoção de uma abordagem mais eficaz. O exemplo a seguir apresenta a solução de um problema bastante conhecido, demonstrando como os três níveis apresentados anteriormente entram em ação.

Exemplo 2.3 (ZEITZ, 2007) *Prove que o produto de quatro números naturais consecutivos não podem ser um quadrado perfeito.*

Solução: A primeira estratégia a ser adotada deve ser a compreensão do enunciado, pois não deve-se passar para uma etapa seguinte sem antes entender o que o problema pede. Sendo assim, a primeira estratégia é a **orientação**. Para Zeitz (2007), os problemas usualmente são de dois tipos: aqueles que pedem para provar algo e aqueles que pedem para encontrar algo. Neste contexto o problema em questão pede para provar que algo não acontece. Pode-se dividi-lo em duas partes: hipótese, seja n um número natural e conclusão, $n(n+1)(n+2)(n+3)$ não pode ser um quadrado perfeito.

Às vezes, pode-se dar ênfase a conclusão: "Como provar que um número não é um quadrado perfeito?". Esta estratégia de olhar para o que leva imediatamente para a conclusão, Zeitz (2007) nomeia de **penúltimo passo**. Contudo, não é fácil encontrar uma forma de mostrar quando um número não é um quadrado perfeito. Logo, faz-se necessário adotar uma outra estratégia, **por as mão na massa**, isto é, fazer experimentações com os primeiros números naturais. Atribuindo diferentes valores para n e chamando de $f(n)$ o produto $n(n+1)(n+2)(n+3)$, na tabela a seguir pede-se fazer algumas suposições.

Tabela 2.2 – Produto $n(n+1)(n+2)(n+3)$ para os primeiros valores de n.

n	1	2	3	4	5	10
$f(n)$	24	120	360	840	1680	17160

Fonte: próprio autor.

Pelo enunciado o problema leva a observação de quadrados, sendo que para $n = 1$ e $n = 2$, $f(n)$ é um quadrado perfeito menos 1, ou seja, $f(1) = 5^2 - 1$ e $f(2) = 11^2 - 1$. E investigando os demais valores para n tem-se, $f(3) = 19^2 - 1$, $f(4) = 29^2 - 1$, $f(5) = 41^2 - 1$, $f(10) = 131^2 - 1$.

Pela experimentação dos primeiros valores atribuídos a n pode-se conjecturar que $f(n)$ é um antecessor de um quadrado perfeito. Provar esta conjectura é o **penúltimo passo** para a solução, já que na sequência $1, 4, 9, 16, ...$ é possível notar que a menor diferença entre os termos consecutivos é três. A estratégia agora será provar a conjectura. Para isso, recorre-se aos níveis das táticas e das ferramentas. Precisa-se mostrar que o produto $n(n+1)(n+2)(n+3)$ é um antecessor de um quadrado perfeito, ou seja, que $n(n+1)(n+2)(n+3)+1$ é um quadrado perfeito. A tática de **fatorar** a expressão é ideal nesse caso. Deve-se manipular a expressão a fim de obter um quadrado perfeito. Reagrupando os fatores e efetuando as devidas multiplicações, tem-se

$$[n(n+3)][(n+1)(n+2)] + 1 = (n^2+3n)(n^2+3n+2) + 1.$$

Adicionando dois termos **simétricos** no primeiro fator e separando o termo $+2$ em duas parcelas de $+1$, temos

$$(n^2+3n)(n^2+3n+2) + 1 = [(n^2+3n+1) - 1][(n^2+3n+1) + 1] + 1.$$

Assim obtemos a diferença de dois quadrados na forma fatorada, o que leva a

$$[(n^2+3n+1) - 1][(n^2+3n+1) + 1] + 1 = (n^2+3n+1)^2 - 1 + 1 = (n^2+3n+1)^2.$$

Logo, $f(n)$ antede um quadrado perfeito em uma unidade e por isso não é um quadrado perfeito para todo inteiro n. $\square$

A partir da resolução do problema 2.3, podemos notar os três níveis da resolução de problemas, iniciando pela **orientação**. O que está de acordo com o que George Polya chama de compreender o problema. "É uma tolice responder a uma pergunta que não tenha sido compreendida. É triste trabalhar para um fim que não se deseja. Estas coisas tolas e tristes fazem-se muitas vezes[...]. Primeiro que tudo, o enunciado verbal do problema precisa ficar bem entendido." (POLYA, 1995, p. 4)

O autor considera a compreensão do problema como a primeira das quatro fases do trabalho da solução de problemas. Portanto, não fica dúvidas que para uma abordagem eficiente a primeira estratégia é compreendê-lo, isto é adquirir **orientação.** Após uma leitura atenciosa do enunciado do problema explorado, a abordagem inicial foi olhar para o **penúltimo passo** que não levou a um progresso, dando lugar a outra estratégia, **experimentar os primeiros valores para** n, conduzindo a formulação da conjectura. Para Polya (1995) essas são as fases de estabelecer e executar um plano.

> O caminho que vai desde a compreensão do problema até o estabelecimento de um plano, pode ser longo e tortuoso. Realmente, o principal feito na resolução de um problema é a concepção da ideia de um plano. Essa ideia pode surgir gradualmente ou, então, após tentativas infrutíferas e um período de hesitação, aparecer repentinamente, num lampejo, como uma ideia brilhante.[...] Executar um plano é muito mais fácil, paciência é o que mais se precisa. (POLYA, 1995, p. 5)

Polya considera que, na maiorias das vezes, a primeira estratégia adotada não é a mais adequada como ocorreu no exemplo estudado. Contudo, pela experimentação obteve-se uma conjectura cuja a demonstração recorreu à tática da **fatoração** e da simetria completando com o uso das ferramentas multiplicação organização dos termos comuns.

Diante disto, viu-se que um o resolvedor de problemas opera nos três níveis apresentados, a saber: a estratégia, que é o primeiro nível, a abordagem mais geral que norteia o contato com problema; o segundo é o nível das táticas que, após definida a estratégia a ser usada, as táticas definem como percorrer o caminho traçado visando a solução; e por fim o último nível, as ferramentas, que são as ações mais focadas para a superação de um obstáculo bem específico que se apresente durante o caminho escolhido.

3 AS ESTRATÉGIAS PARA INVESTIGAR PROBLEMAS

A palavra estratégia tem sua origem no grego, mais especificamente, na palavra *strategós* que é a junção das palavras *stratos*, que significa “exército” e *ago*, “liderança”. Na sua origem, estratégia tem seu significado atrelado a expressão “a arte do general”. Desse modo, estratégia estava estritamente relacionado às posições políticas e militares da época.

De um modo geral, o termo estratégia era compreendida como o planejamento elaborado pelo comandante militar para a condução do seu exército à vitória. Entretanto, com o desenvolvimento da humanidade, o termo foi incorporado à outras áreas tanto no contexto social como no pessoal. Partindo desse princípio, Bechara (2011, p. 610) dá duas definições para estratégia: “1. É a arte militar que consiste em traçar planos e executar operações relativas a pessoal e materiais, para garantir posições vantajosas de onde se possa empreender ações táticas. 2. Arte de aplicar meios e recursos disponíveis para atingir um objetivo.”

Considerando a segunda definição de Bechara, neste trabalho, compreende-se estratégia como a arte e a habilidade de gerenciar e aplicar os meios e recursos disponíveis, matemáticos ou não matemáticos, para atingir um objetivo, isto é, a solução de um problema.

A partir da definição anterior e partindo do princípio de que um problema é, por sua característica, desafiador e sua solução requer que o resolvedor faça o que ele não sabe como fazer, resolvê-lo exige esforço e a combinação correta de táticas matemáticas, juntamente com o emprego da estratégia adequada que em alguns casos não são de abordagens matemáticas. Diante de um problema, a primeira dificuldade que se encontra é definir o ponto de partida. Neste sentido, as estratégias desempenham um papel de grande importância. Algumas estratégias psicológicas ajudam o resolvedor a encarar o problema com o espírito certo, enquanto outras ajudam a iniciar a investigação e dão estrutura para o emprego das táticas e ferramentas, afim de chegar a conclusão do problema. Neste capítulo, apresenta-se as estratégias psicológicas com foco no pensamento positivo e na criatividade, estratégias que iniciam a investigação de um problema e os principais métodos de argumentação.

3.1 Estratégias Psicológicas

Quando confrontado com um problema, o estado de espírito em que se encontra o resolvedor pode influenciar o quanto de sucesso será alcançado na solução. Algumas estratégias psicológicas como a **resistência mental** e a **criatividade** podem ajudar a reverter esse quadro.

3.1.1 Resistência Mental

Para Zeitz (2007), uma característica comum aos bons resolvedores de problemas é o fato de serem mentalmente fortes, não desistindo frente as primeiras dificuldades, o que os leva ao sucesso. A Figura 3.1 traz uma analogia da postura de quem enfrenta um problema com um estado de espírito adequado.

Figura 3.1 – Garça tentando engolir uma rã.

Fonte: Imagem extraída da internet.

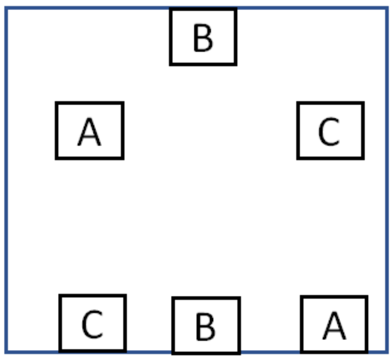
Resolver um problema de matemática não é uma situação extrema, mas a ideia expressa na imagem é não desistir, embora o problema aparentemente não tenha solução. Nunca deve-se admitir a derrota apenas com um olhar superficial, deve-se começar com **otimismo**, assumir que o problema pode ser resolvido. Isto não significa, no entanto, que não se deve desistir em algum momento, ou que sempre dá para resolver um problema. Do contrário, não haveriam problemas matemáticos ainda sem solução.

Para Zeitz (2007), um resolvedor deve saber a hora de desistir, ou pelo menos, desistir por um tempo e posteriormente voltar ao problema. Para ele, o que diferencia os bons resolvedores dos inexperientes é que os primeiros tem um nível de concentração elevado e a resistência mental aprimorada. Sendo que, a ausência dessas duas características faz com que os inexperientes desistam muito facilmente. No entanto, ele considera possível para o resolvedor iniciante desenvolver seu nível de concentração e resistência mental, iniciando com problemas mais fáceis, isto é, com problemas que podem ser resolvidos com um pouco de esforço. À medida que se chegue a solução, o cérebro fica em treino, o subconsciente fica pronto para o sucesso fazendo com que a confiança aumente automaticamente.

O aumento gradativo da dificuldade do problema proporcionará o desenvolvimento do poder de concentração, possibilitando que o resolvedor permaneça trabalhando por mais tempo em um problema. Em consequência disso, sua resistência mental será aprimorada tornando-o capaz de lidar com problemas cada vez mais complexos. No entanto, para atingir os níveis satisfatórios o resolvedor deve buscar desenvolver sua resistência mental continuamente.

Exemplo 3.1 (ZEITZ, 2007) *Conecte com uma linha cada quadradinho da parte superior com um quadradinho da parte inferior que tenha a mesma letra, sem que as linhas se cruzem ou saiam do quadrado maior.*

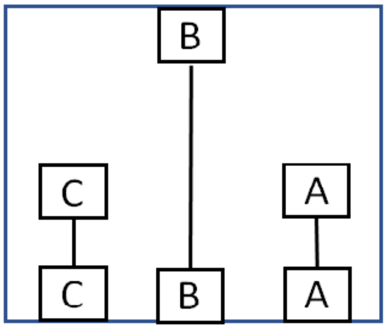
Figura 3.2 – Exemplo 2.1.



Fonte: Próprio autor, baseado em Zeitz (2007, p. 15).

Solução: Aparentemente este problema é impossível. Porém, segundo Zeitz, um problema ao parecer impossível não significa que seja realmente impossível. Para resolver este problema, deve-se despreocupar-se com as regras e restrições, adotando um **pensamento positivo** e **tornando o problema em outro mais mais fácil**.

Figura 3.3 – Solução parcial do Exemplo 2.1

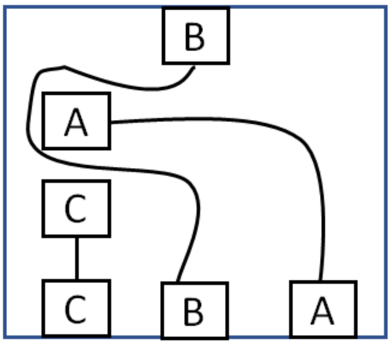


Fonte: Próprio autor, baseado em Zeitz (2007, p. 16)

O que dificulta a solução é a posição dos quadradinhos em relação as letras **A** e **C**, reposicionando-as tornamos o problema mais fácil.

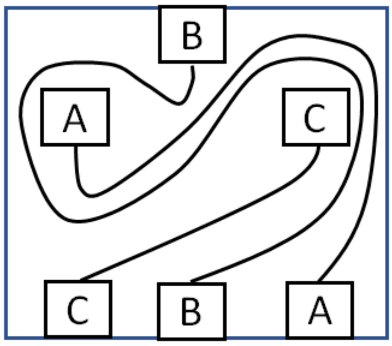
Tornar um problema em outro problema mais fácil é uma estratégia que colabora muito para alcançarmos a solução original. De posse da solução do problema secundário, transportamos os quadradinhos para a posição inicial, primeiro o que tem a letra **A** e depois o quadradinho com a letra **C**.

Figura 3.4 – Reposicionando o quadradinho com a letra **A**.



Fonte: Próprio autor, baseado em Zeitz (2007, p. 16)

Figura 3.5 – Reposicionando o quadradinho com a letra **C**.



Fonte: Próprio autor, baseado em Zeitz (2007, p. 16)

Assim, o problema está resolvido. □

A solução deste problema deu-se pela utilização de dois princípios estratégicos. O primeiro foi a estratégia psicológica de cultivar uma atitude positiva e o segundo foi a estratégia de transformá-lo em um problema mais fácil, que resolvido e após efetuadas algumas manipulações culminou com a solução do problema original. Diante disso, um problema que a princípio aparentava impossível mostrou-se possível. No um primeiro momento pode parecer confortável para o resolvedor desistir diante da dificuldade e declará-lo impossível de se resolver, porém com a dose certa de otimismo e concentração a solução será uma consequência.

3.1.2 Criatividade

Para Polya (1995), um problema, mesmo que seja modesto, desafiará as faculdades inventivas do resolvedor, proporcionará, a quem o resolver, o gozo do triunfo. Estas faculdades inventivas, nesse trabalho, são entendidas como **criatividade**. Segundo Bechara (2011, p. 465) "é a qualidade de quem ou do que é criativo, inteligência, talento para criar algo novo, para inventar".

Diante disso, a solução para muitos problemas surge, algumas vezes, sem uma explicação lógica, embora a solução em si tenha todo sentido. Nesse caso, parece que foi inventada, criada a partir de elementos que não indicavam para os olhos comuns que dali poderia ser obtida. É neste sentido que a criatividade é conceituada como "a capacidade de apresentar inúmeras possibilidades de solução apropriadas para uma situação-problema de modo que estas focalizem os aspectos distintos do problema e/ou forma diferenciada de solucioná-los, principalmente formas incomuns." (GONTIJO, 2006, p. 4) Para Gontijo, o resolvedor dotado desta capacidade tem uma percepção diferenciada possibilitando a obtenção de informações do problema que outros não conseguem, favorecendo assim a visualização de caminhos que levam a uma solução.

Resolvedores com essa característica são considerados **criativos**. Zeitz compara a um número de mágica a forma como resolvedores solucionam problemas de modo criativo. E ainda, apresenta um exemplo que expressa com muita propriedade a criatividade em ação na solução de problemas.

Exemplo 3.2 (ZEITZ, 2007) *Um monge sobe uma montanha, ele começa às 8 da manhã e chega ao cume ao meio-dia. Ele passa a noite no cume e na manhã seguinte às 8 horas ele desce pela mesma rota que usou para subir atingindo a base ao meio-dia. Prove que há um instante entre 8 da manhã e meio-dia que o monge estava no mesmo local da montanha nos dois dias.(Observe que não há especificação sobre a velocidade do monge tanto na subida quanto na descida. Ele pode acelerar, ir para a frente, ir para trás, correr e parar para descansar...)*

Qual seria a estratégia adequada para abordar um problema como esse? As informações do enunciado parecem esgotar e não fornecem o caminho para a solução. Em um contexto como esse que a criatividade faz a diferença. Uma solução, segundo Zeitz (2007), é deixar o monge subir a montanha do jeito que ele faz. No instante que ele começa sua descida na manhã seguinte, peça a outro monge que comece a subir da mesma forma que o anterior. Em algum ponto da montanha, os dois monges se encontrarão. Esse é o instante e o lugar procurado.

Não há como negar que esta solução foi obtida a partir da adoção de uma estratégia inesperada, inovadora e criativa. A ideia de pedir a outro monge para subir a montanha não era fomentada pelo enunciado. Ela foi inventada por um resolvedor que viu no problema informações que outros não viram. Logo, estratégias psicológicas, como a criatividade, são de grande valia para quem se propõe a resolver problemas. Embora a ideia que ficou até aqui é de que nem todos os resolvedores são criativos, Zeitz considera que todos podem aprender a ser mais criativos. Segundo ele, parte desse processo vem do cultivo de uma atitude confiante, ou seja, frente a uma solução criativa, o resolvedor não pode pensar que nunca apresentaria uma solução como a contemplada. Ao contrário, deve considerar que ele próprio poderia ter ideias como a utilizada para solucionar o problema. Zeitz acredita que, para desenvolver sua criatividade o resolvedor deve abrir-se a novas ideias, apropriando-se das mesmas, manipulando-as e utilizando-as na resolução de vários problemas, não ficando preso a um método, mas adotando uma postura solta, tentando dobrar e quebrar as regras.

Portanto, o pensamento positivo que torna o resolvedor mentalmente forte quanto a criatividade são duas estratégias psicológicas que fornecem um aparato sem igual para enfrentar os desafios propostos por um problema. A não adoção destas acarreta um aumento substancial nas dificuldades enfrentadas por quem se propõe a resolver problemas e que, em alguns casos leva a desistência.

3.2 Estratégias para iniciar a investigação

Na resolução de problemas, definir o ponto de partida é o momento de maior indecisão. "Como abordar o problema?", "De onde começar?", "O que fazer com as informações do enunciado?", perguntas como essas costumam pairar no pensamento de quem está diante de um problema. Considerando isto, esta parte ocupa-se em fornecer orientações de como iniciar a investigação de um problema com base nas considerações de Paul Zeitz.

George Polya, definiu como a primeira fase na resolução de um problema a compreensão do enunciado. É nesse sentido que Zeitz considera que a primeira atitude do resolvedor deve ser a obtenção da **orientação**. Não é difícil aceitar esta afirmação, pois se o indivíduo está perdido, sem saber como prosseguir, antes de começar a caminhar deve orientar-se, obter o máximo de informação que está ao seu alcance, para de posse delas, dar os primeiros passos.

Assim, para orientar-se, o resolvedor dever ler o enunciado com muita atenção. "Primeiro de tudo, o enunciado verbal do problema deve ficar bem entendido." (POLYA, 1995, p.4) Partindo deste princípio, Zeitz considera fundamental que durante a leitura, devemos prestar atenção em detalhes como positivo e negativo, finito e infinito, identificar se o problema pede para encontrar ou para provar, determinar se o problema é semelhante a um já visto, identificar a hipótese e a conclusão, pensar na notação conveniente, considerar se um método de argumentação parece plausível, se é possível adivinhar uma solução, se existem palavras-chaves ou conceitos que pareçam importantes e depois das verificações anteriores , reler o enunciado. Após obter orientação, deve-se conhecer as principais características do problema, pois ainda não há garantia de que a solução estará à vista e o problema será solucionado. Para isso, algumas estratégias como **por as mãos na massa**, o **penúltimo passo** e **tornar o problema mais fácil**, são de grande valia para uma abordagem eficiente.

Por as mãos na massa, como a própria expressão já sugere, é partir para o trabalho, brincar com as informações, ordenar, desordenar e reordenar os números. Se houver uma figura relacionada, manipulá-la, desfazê-la e reconstruí-la novamente. Caso o problema envolva números com muitos dígitos, fazer experimentações com valores menores, organizar as informações em tabelas e até construir gráficos se necessários. Embora seja exaustiva, esta estratégia traz um pouco de divertimento e frequentemente apresenta um caminho que leva à solução.

Uma vez que se conhece a solução, é interessante pensar no que pode levar imediatamente a ela. Esta estratégia é o **penúltimo passo** da ação que tem como consequência imediata a solução do problema. No exemplo 2.2, notamos que provar a conjectura referente aos$n$ *cortes retilíneos*, gera $1+1+2+3+...+n = 1+\frac{n(n+1)}{2}$ pedaços de pizza, o penúltimo passo para resolver o problema proposto. Logo, investir tempo no que levaria imediatamente a conclusão pode configurar-se como uma boa estratégia. Contudo, só é possível pensar desta forma quando já se tem certeza da conclusão que pretende-se chegar. No entanto, na maioria das vezes, vislumbrar o penúltimo passo não ocorre com facilidade, requerendo do resolvedor experiência e, em muitos casos diversas tentativas, pois, quanto mais experiência houver, mais naturalmente visualizará como chegar à solução com um só passo.

As duas estratégias apresentadas nos dois parágrafos acima constituem um ótimo arsenal para o resolvedor. Contudo, se o problema tornou-se inatingível com estas, uma estratégia eficiente é tomar um problema considerado difícil e **torná-lo em outro mais fácil**, como o que ocorreu na solução do exemplo 3.1. Assim, a dificuldade imposta pelo problema original pode ser "trapaceada" ao passo que a solução do problema mais fácil tornou-se um atalho para resolver o problema original. Entretanto, o termo trapaceado não pode ser encarado como algo ruim ou desonesto, mas como um recurso sutil e eficaz dos bons resolvedores. Neste contexto, o resolvedor pode sentir-se autor do problema, guardadas as devidas proporções sem receio de transformá-lo, considerando-se dono da situação. Resolver o problema fácil, quando não indicar a solução do difícil, fornecerá subsídios para progredir na direção desejada.

Sendo assim, a investigação do problema é a etapa central na sua abordagem, pois ela proporcionará a obtenção das informações que subsidiarão as tomadas de decisões posteriores. Sendo a orientação a estratégia inicial, dando a condição necessária para o ponto de partida que, juntamente com outras estratégias como o penúltimo passo, por as mãos na massa e tornar o problema mais fácil, municiarão o resolvedor para solucionar os mais diversos problemas.

3.3 Métodos de argumentação

Tão importante quanto encontrar a solução de um problema é convencer a si mesmo e aos outros que a solução encontrada é a correta. É neste cenário que os métodos de argumentação desempenham o protagonismo. Dos quais destacam-se a **argumentação por exaustão**, **prova direta ou dedução**, **contraposição**, **argumentação por contradição ou redução ao absurdo** e **indução matemática**.

Nesta seção apresenta-se os métodos mencionados de forma simplificada, não distanciando-se do objetivo central deste texto, os três níveis da resolução de problemas.

3.3.1 Argumentação por exaustão

Quando um problema envolve um universo finito de possibilidades, ele pode ser resolvido verificando todas essas possibilidades. A **argumentação por exaustão** significa que foram esgotados todos os casos possíveis. Porém, este método só é conveniente para um conjunto pequeno de possibilidades, pois quanto maior o número de elementos do conjunto maior será o trabalho de fazer as verificações.

O exemplo a seguir faz uso da argumentação por exaustão.

Exemplo 3.3 (ZEITZ, 2007) *Um recenseador bate em uma porta e pergunta à mulher que está dentro, quantos filhos você tem e quais as suas idades?*

-Eu tenho três filhas, suas idades são números inteiros e o produto das idades é 36, diz a mãe.

-Isso não é informação suficiente, responde o recenseador.

-Diria a soma das idades delas, mas você ainda ficaria perplexo.

-Gostaria que você me contasse algo mais.

-Ok, minha filha mais velha Annie gosta de cachorros.

Quais são as idades das três filhas?

Solução: O produto das idades é 36, então há apenas alguns triplos possíveis de idades. A tabela abaixo mostra todas as possibilidades com as somas das idades de cada triplo.

Tabela 3.1 – Possíveis triplos cujo o produto é 36.

$(1,1,36)$	$(1,2,18)$	$(1,3,12)$	$(1,4,9)$	$(1,6,6)$	$(2,2,9)$	$(2,3,6)$	$(3,3,4)$
38	21	16	14	13	13	11	10

Fonte: Próprio autor.

A segunda afirmação da mãe, "diria a soma das idades delas, mas você ainda ficaria perplexo", dá informações valiosas, as idades são (1, 6, 6) ou (2, 2, 9), pois em todos os outros casos, o conhecimento da soma diria inequivocamente quais idades são, pois estes são os únicos triplos que têm a mesma soma. Este é o motivo do recenseador ainda ficar perplexo mesmo sabendo tal soma. A pista final agora faz sentido, ao dizer que existe uma filha mais velha, eliminando o triplo (1, 6, 6). As filhas têm, portanto, 2, 2 e 9 anos de idade. $\square$

Para descobrir quais os triplos de idades tinham seu produto igual a 36 foi usado o **método da exaustão**. Testando cada possibilidade foi permitido encontrar, com base nas demais informações do enunciado, a solução do problema proposto.

3.3.2 Argumentação por dedução ou prova direta

A argumentação por dedução ou prova direta está baseada na propriedade transitiva da inclusão de conjuntos conforme afirma Lima (2006).

> A propriedade transitiva da inclusão é a base do raciocínio dedutivo, sob a forma que classicamente se chama de silogismo.[...]A relação de inclusão de conjuntos está estreitamente relacionada com a implicação lógica. Vejamos como. Sejam P e Q propriedades referentes a um elemento genérico de um conjunto U. Essas propriedades definem os conjuntos A, formados pelos elementos de U que gozam da propriedade P, e B, conjunto formado pelos elementos de U que satisfazem a propriedade Q. Diz-se então que a propriedade P implica (ou acarreta) a propriedade Q e escreve-se $P \Rightarrow Q$.

Neste sentido, Lima (2006) apresenta um exemplo que explica a afirmação citada acima:

Exemplo 3.4 *Sejam* P, Q *e* R *as respectivas propriedades: o ser humano ser um animal, o animal ser mortal e o ser humano ser mortal. E sejam* H*,* A *e* M *os conjuntos, respectivamente dos seres humanos, dos animais e dos mortais. O silogismo: todo ser humano é um animal, todo animal é mortal, logo todo ser humano é mortal. Pode ser escrito de forma equivalente na linguagem de conjuntos:* $H \subset A$ *e* $A \subset M$*, logo* $H \subset M$ *ou como implicações lógicas:* $P \Rightarrow Q$ *e* $Q \Rightarrow R$*, logo* $P \Rightarrow R$.

A relação $P \Rightarrow Q$ pode ser lida como "P implica Q", "se P, então Q", "P é condição suficiente para Q", "Q é condição necessária para P" ou "P somente se Q". Chama-se de recíproca de $P \Rightarrow Q$ a relação $Q \Rightarrow P$. A veracidade de $P \Rightarrow Q$ não garante que $Q \Rightarrow P$ seja verdade. Todavia, quando as duas relações $P \Rightarrow Q$ e $Q \Rightarrow P$ são verdadeiras, diz-se que há uma relação de equivalência, escreve-se $P \Leftrightarrow Q$ e lê-se "P se, e somente se, Q".

Sendo assim, para provar uma equivalência como $P \Leftrightarrow Q$ é necessário provar a implicação $P \Rightarrow Q$ e sua recíproca $Q \Rightarrow P$. Utilizando a notação do Exemplo 3.4 na linguagem de conjuntos teríamos a expressão "se $P \Rightarrow Q$ e $Q \Rightarrow P$, então $P \Leftrightarrow Q$" equivalente a expressão "se $H \subset A$ e $A \subset H$, então $A = H$". (Aqui a intenção é só exemplificar a equivalência de linguagens, pois é obvio que pelo Exemplo 3.4 o conjunto A não está contido no conjunto H o que faz $A \neq H$).

Fazer uma demonstração por prova direta consiste em presumir verdadeira a hipótese e, a partir desta por uma sequência lógica de argumentos, comprovar ser verdadeira a tese, isto é, comprovar a veracidade da conclusão. Assim, fica a cargo do resolvedor definir a linguagem com a qual pretende argumentar, se com a de conjunto ou de símbolos lógicos. Na resolução do Exemplo 2.3 da página 17 foi utilizada a **argumentação direta ou por dedução**. De fato, tem-se

$$\begin{aligned}
&n(n+1)(n+2)(n+3)+1\\
&\quad=[n(n+3)][(n+1)(n+2)]+1\\
&\quad=(n^2+3n)(n^2+3n+2)+1\\
&\quad=[(n^2+3n+1)-1][(n^2+3n+1)+1]+1\\
&\quad=(n^2+3n+1)^2-1+1\\
&\quad=(n^2+3n+1)^2.
\end{aligned}$$

O próximo exemplo apresenta uma argumentação por dedução utilizando a linguagem de conjuntos.

Exemplo 3.5 (LIMA, 2013) *Sejam* X_1, X_2, Y_1, Y_2 *subconjuntos do conjunto-universo* U. *Suponha que* $X_1 \cup X_2 = U$ *e* $Y_1 \cap Y_2 = \varnothing$, *que* $X_1 \subset Y_1$ *e que* $X_2 \subset Y_2$. *Prove que* $X_1 = Y_1$ *e* $X_2 = Y_2$.

Solução: Para provar que $X_1 = Y_1$ e $X_2 = Y_2$, basta mostrar que $Y_1 \subset X_1$ e $Y_2 \subset X_2$. Assim, considere um $y \in Y_1$, como $X_1 \cup X_2 = U$, deve-se ter $y \in X_1$ ou $y \in X_2$. Mas, já que $X_2 \subset Y_2$, se fosse $y \in X_2$ teria-se $y \in Y_2$ o que faria $Y_1 \cap Y_2 \neq \varnothing$. Portanto $y \in X_1$ e daí $Y_1 \subset X_1$. Analogamente seja um $y \in Y_2$, como $X_1 \cup X_2 = U$, deve-se ter $y \in X_1$ ou $y \in X_2$. Mas, já que $X_1 \subset Y_1$, se fosse $y \in X_1$ teria-se $y \in Y_1$ o que faria $Y_1 \cap Y_2 \neq \varnothing$. Portanto $y \in X_2$ e daí $Y_2 \subset X_2$. □

Diante do exposto, a argumentação por dedução ou prova direta é uma aplicação simples das implicações lógicas e está baseada na propriedade transitiva da inclusão de conjuntos, proporcionando assim, ao resolvedor, duas linguagens para construir sua argumentação.

3.3.3 Argumentação por contraposição

Há problemas em que utilizar a implicação $P \Rightarrow Q$ não mostra-se viável, isto é, com base na validade da proposição P concluir a validade da proposição Q é um caminho muito complexo. Neste caso, pode-se utilizar o artifício de negar a proposição Q e concluir que a negação da proposição P é verdadeira. Em outras palavras, a negação de P e Q são, respectivamente, $\neg P$ lê-se "não P" e $\neg Q$ lê-se "não Q". A implicação $\neg Q \Rightarrow \neg P$ é a contrapositiva da implicação de $P \Rightarrow Q$. De onde segue que, afirmar que $\neg Q \Rightarrow \neg P$ lê-se "não Q implica não P" expressa a mesma mensagem da implicação $P \Rightarrow Q$ conforme afirma Lima (2006, p.12).

> Sob o ponto de vista pragmático, a contrapositiva de uma implicação nada mais é do que a mesma implicação dita com outras palavras, ou vista de um ângulo diferente. assim, por exemplo, a afirmação de que

> todo número primo maior do que 2 é ímpar e a afirmação de que um número par maior do que 2 não é primo dizem exatamente a mesma coisa, ou seja, exprimem a mesma ideia, só que com diferentes termos.

Sendo que, argumentar utilizando o recurso da contrapositiva é denominado de **argumentação por contraposição**.

Exemplo 3.6 *Prove que se n^2 é par, então n também é par.*

Solução: Seja P a proposição "n^2 é par" e Q a proposição "n é par". Não é muito simples provar que $P \Rightarrow Q$. Mas tomando as negações de P e Q, ou seja, $\neg P$ é a proposição "n^2 é ímpar" e $\neg Q$ é a proposição "n é ímpar". A implicação $\neg Q \Rightarrow \neg P$ é a contrapositiva de $P \Rightarrow Q$, ou seja, se n é ímpar, então n^2 também o é. Fazendo uso da argumentação por contraposição, tem-se que n ímpar, então pode-se escrever $n = 2k + 1$ com k natural o que faz

$$n^2 = (2k+1)^2 = (2k+1)(2k+1) = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1,$$

logo n também é ímpar. Sendo assim, $\neg Q \Rightarrow \neg P$ e, portanto, $P \Rightarrow Q$. $\square$

A demonstração por contraposição fornece ao resolvedor um meio mais acessível frente a dificuldade imposta por certas métodos de argumentação, o que está de acordo com a afirmação: "No dia-a-dia da matemática é frequente e, muitas vezes útil, substituir uma implicação por sua contrapositiva a fim de tornar seu significado mais claro ou mais manejável". (LIMA, 2006, p.12)

3.3.4 Argumentação por contradição ou por redução ao absurdo

A argumentação por contradição ou por redução ao absurdo certamente está entre os mais elegantes métodos de resolução e tem seu raciocínio fundamentado na equivalência entre uma implicação e sua contrapositiva. Esta forma de demonstração é utilizada quando há muita dificuldade para fazer uma prova direta. Assim, consiste em assumir falso o que se pretende provar e mostrar que essa suposição leva a uma conclusão absurda, ou seja, leva a uma contradição. A seguir, mostraremos dois exemplos clássicos da argumentação por redução ao absurdo. Para isso, duas definições são de extrema importância:

Definição 3.7 *Dadas duas retas r e s no plano, somente há duas possibilidades para as mesma: r e s tem um ponto em comum ou não tem nenhum ponto em comum; no primeiro caso, defini-se **retas concorrentes** e no segundo, define-se **retas paralelas**.*

Definição 3.8 *Duas reta r e s são ditas perpendiculares se concorrerem em um ponto formando ente si ângulos de $90°$.*

Exemplo 3.9 (LIMA, 2006) *Considere, no plano* Π *as retas perpendiculares* r *e* s. *Seja* P *a propriedade que tem uma reta* $x \subset \Pi$ *de ser diferente de* s *e perpendicular a* r. *Por outro lado, seja* Q *a propriedade de uma reta* $x \subset \Pi$ *ser paralela a* s. *Prove que* $P \Rightarrow Q$, *ou seja, se duas reta distintas* s *e* $x \subset \Pi$ *são perpendiculares a uma reta* $r \subset \Pi$, *então* s *e* x *são paralelas.*

Solução: Seja $\neg P$ a negação de P, a propriedade de uma reta em Π coincidir com s ou não ser perpendicular a r. E $\neg Q$, a negação de Q, a propriedade que tem uma reta do plano Π de não ser paralela a s. Logo, a contrapositiva $\neg Q \Rightarrow \neg P$ lê-se: se duas retas distintas contidas em Π não são paralelas, então elas não são perpendiculares a uma terceira reta também contida no plano Π. Neste caso, é mais natural provar a implicação $\neg Q \Rightarrow \neg P$ do que $P \Rightarrow Q$, em outras palavras, prova-se $P \Rightarrow Q$ por **contradição** ou por **redução ao absurdo.**

Para isso, considere, por absurdo, que as retas distintas s e x não são paralelas, consequentemente, elas têm um ponto A em comum. Logo, como é única a perpendicular s a reta r que passa pelo ponto A, segue que, ser x uma perpendicular a r, uma contradição, pois esta também passa pelo ponto A. $\square$

Para o próximo exemplo, considere o seguinte sobre os conjuntos numéricos:

Definição 3.10 *O conjunto dos números inteiros, representado pelo símbolo* $\mathbb{Z}$, *é definido por*

$$\mathbb{Z} = \{x; \quad x \in \mathbb{N} \cup \{0\} \cup -\mathbb{N}\}$$

sendo que, $\mathbb{N}$ *representa o conjunto dos números naturais o qual será melhor definido na Subseção 3.3.5 na página 33 e, ainda,*

$$-\mathbb{N} = \{n; \quad -n \in \mathbb{N}\}.$$

Definição 3.11 *Define-se conjunto dos números racionais e, representa-se por* $\mathbb{Q}$, *o conjunto dos números que podem ser representados da forma* $\frac{p}{q}$ *com* p *e* q *inteiros e com* $q \neq 0$.

Definição 3.12 *O conjunto dos números que possuem, em sua representação decimal, uma parte decimal infinita e não periódica e que, não admitem uma representação da forma* $\frac{p}{q}$ *com* p *e* q *inteiros e* $q \neq 0$, *define-se conjunto dos números irracionais.*

Definição 3.13 *Define-se conjunto dos números reais e representa-se por* $\mathbb{R}$ *o conjunto formado por todo número que é racional ou irracional.*

Observação 3.14 *Para representar o conjunto dos números irracionais pode-se usar a notação* $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$.

Exemplo 3.15 *Prove que* $\sqrt{2}$ *é irracional:*

Solução: Suponha, por absurdo, que $\sqrt{2}$ não é irracional, como é sabido que $\sqrt{2}$ é um número real, então dizer que não é irracional é o mesmo que dizer que ele é um número racional. Sendo assim, pode-se escrevê-lo como uma fração irredutível, isto é, como o quociente de dois números inteiros p e q que não têm um divisor comum maior do que 1. (Sem perda de generalidade, pode-se considerar que p e q são positivos). Logo, $\sqrt{2} = \dfrac{p}{q}$, com p, $q \in \mathbb{N}$. Elevando ambos os membros da igualdade $\sqrt{2} = \dfrac{p}{q}$ ao quadrado passa-se a ter $2 = \dfrac{p^2}{q^2}$, o que implica $2q^2 = p^2$. Todavia, da última igualdade, tem-se que p^2 é par, pois é um múltiplo de 2. Mas, pelo Exemplo 3.6 da página 31, se p^2 é par, p também o é, logo, conforme a Subseção 4.4.1 da página 55, pode-se escrever $p = 2k$, com k natural. Substituindo p por $2k$, tem-se

$$2q^2 = p^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2 \cdot 2k^2$$

mas isto é o mesmo que dizer

$$2q^2 = 2 \cdot 2k^2 \Longrightarrow q^2 = 2k^2$$

o que faz q^2 um múltiplo de 2 e, portanto, um número par. Mas q^2 par implica que q também é par, consequentemente, 2 é divisor comum de p e q. Um absurdo! Sendo assim, $\sqrt{2}$ só pode ser irracional. $\square$

No primeiro exemplo, o argumento concentrou-se em provar a implicação $P \Rightarrow Q$ a partir da sua contrapositiva, a saber $\neg Q \Rightarrow \neg P$ estabelecendo a base da prova por absurdo como a equivalência entre uma implicação e sua contrapositiva. O exemplo deixa claro a elegância de considerar falso o que se pretende provar e, a partir dessa suposição, concluir algo absurdo, ou seja, chegar a uma contradição. Portanto, ao fazer uso da argumentação por redução ao absurdo, o resolvedor contará não só com um método eficaz para subsidiar suas resoluções, mas também com o aparato estético que esse método acrescenta às demonstrações.

3.3.5 Indução Matemática

Para dar início ao estudo da **Indução Matemática** é necessário conhecer uma propriedade dos números naturais denominado **Princípio da Boa Ordenação (PBO)** que, a princípio, será considerado como um axioma.

Axioma 3.16 *Todo subconjunto não vazio de* $\mathbb{N}$ *possui um menor elemento.*

Qualquer subconjunto de $\mathbb{N}$ é limitado inferiormente por 1, logo, todo subconjunto não vazio de $\mathbb{N}$ possui um menor elemento. Hefez (2016), considera que uma das mais importantes consequências do **Princípio da Boa Ordenação** é o **Princípio da Indução Matemática**. Sendo que este último também é conhecido como o **4º axioma de Peano**.

Teorema 3.17 (Princípio da Indução Finita) *Seja* X *um subconjunto do conjunto* $\mathbb{N}$ *dos inteiros positivos, isto é,* $X \subset N$ *que satisfaz as duas condições a seguir:*

i. $1 \in X$*;*

ii. para todo inteiro, positivo k*, se* $k \in X$*, então* $k + 1 \in X$*.*

Nestas condições, X *é o conjunto* $\mathbb{N}$ *dos inteiros positivos:* $X = \mathbb{N}$*.*

Demonstração: Suponha, por absurdo, que X não é o conjunto $\mathbb{N}$ dos inteiros positivos, ou seja, $X \neq \mathbb{N}$ e seja Y o conjunto de todos os inteiros positivos que não pertencem a X, isto é:

$$Y = \{y |\, y \in \mathbb{N} \text{ e } y \notin X\} = \mathbb{N} - X.$$

Então Y é um subconjunto não vazio de $\mathbb{N}$, ou seja, $Y \subset \mathbb{N} \neq \varnothing$ e, pelo **Princípio da Boa Ordenação**, Y possui um menor elemento y. Pela condição *1*, $y > 1$ e, consequentemente, $y - 1$ é um inteiro positivo que não pertence a Y, logo $y - 1 \in X$ e, pela condição *ii* segue que $(y - 1) + 1 = y \in X$ o que é uma contradição, pois, $y \in Y = \mathbb{N} - X$, isto é, $y \notin X$. Assim, só pode-se ter $Y = \varnothing$ e $X = \mathbb{N}$. ∎

O método de argumentação por **Indução Matemática** é um instrumento poderoso para resolver problemas que envolvem os números naturais, caracterizado pelos três primeiros axiomas de Peano, a saber:

i. Todo número natural n tem um sucessor, representado por $n + 1$;

ii. Naturais diferentes possuem sucessores diferentes;

iii. Existe um único número natural chamado *um* e representado por 1 que não é sucessor de nenhum outro natural.

Assim, os três primeiros axiomas de Peano juntamente com o Princípio da Boa Ordenação dão os subsídios para que, dado um subconjunto não vazio de $\mathbb{N}$, se o resolvedor provar que o menor elemento deste subconjunto possui uma certa propriedade e se, para qualquer elemento deste, que possui essa propriedade, o seu sucessor também a possuir, ele estará provando que essa propriedade é característica de todo o subconjunto.

Teorema 3.18 [Prova por Indução Matemática] *Seja* $P(n)$ *uma proposição associada a cada inteiro positivo* n *e que satisfaz às duas seguintes condições:*

i. $P(1)$ *é verdadeira;*

ii. *Para todo inteiro positivo* k*, se* $P(k)$ *é verdadeira, então* $P(k+1)$ *também é verdadeira.*

Nestas condições, a proposição $P(n)$ *é verdadeira para todo inteiro positivo* n*.*

Demonstração: Seja X o conjunto de todos os inteiros positivos n para as quais a propriedade $P(n)$ é verdadeira, isto é,

$$X = \{n \in \mathbb{N}; P(n) \text{ é } verdadeira\}$$

Pela condição (i), $P(1)$ é verdadeira e, portanto $1 \in X$, pela condição (ii), para todo inteiro positivo k, se $k \in X$, então $k+1 \in X$. Logo, o conjunto X satisfaz as duas condições do **Princípio de indução Matemática** e, portanto, $X = \mathbb{N}$, ou seja, $P(n)$ é verdadeira para todo positivo inteiro n. ■

Na argumentação por Indução Matemática, deve-se verificar se as condições (i) e (ii) do Teorema 3.18 são satisfeitas. A verificação da primeira, ou seja, determinar se a propriedade é válida para o menor elemento do conjunto, denominado **caso base** é simples. Todavia, a verificação da segunda condição, chamada de **passo indutivo** exige mais trabalho em alguns casos, requerendo a demonstração de um teorema auxiliar cuja a hipótese é considerar a proposição $P(k)$ verdadeira para $k \in \mathbb{N}$, e a tese é a proposição $P(k+1)$ verdadeira. Satisfazendo as duas condições e concluindo que $P(n)$ vale para todo o conjunto observado a argumentação está completa.

Exemplo 3.19 *Prove, por indução, a conjectura*

$$1 + 1 + 2 + 3 + ... + n = 1 + \frac{n(n+1)}{2}.$$

Solução: Seja

$$P(n) : 1 + 1 + 2 + 3 + \cdots + n = 1 + \frac{n(n+1)}{2}$$

uma propriedade temos,

1 (Caso base) $P(1)$ é válido, pois

$$P(1) : 1 + 1 = 1 + \frac{1(1+1)}{2} = 2$$

2 (Passo indutivo) Suponha que

$$P(k) : 1 + 1 + 2 + 3 + \cdots + k = 1 + \frac{k(k+1)}{2}$$

seja verdadeira para algum $k \in \mathbb{N}$.

Adicionando $k + 1$ ao somatório $1 + 1 + 2 + 3 + \cdots + K$ em ambos os membros da igualdade

$$1 + 1 + 2 + 3 + \cdots + k \ = \ 1 + \frac{k(k+1)}{2}$$

tem-se,

$$\begin{aligned} 1 + 1 + 2 + 3 + \cdots + k + (k+1) \ &= 1 + \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) \\ &= 1 + \frac{k(k+1) + 2(k+1)}{2} \\ &= 1 + \frac{(k+1)(k+2)}{2}. \end{aligned}$$

Portanto, $P(k + 1)$ é verdadeira.

Logo, pelo **Princípio da Indução Matemática**, a propriedade $P(n)$ é válida para todo $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Contudo, há problemas que envolvem os números inteiros não-negativos, representados pelo conjunto $\mathbb{Z}_+$, neste caso é perfeitamente viável considerar o zero como seu menor elemento e fazer uma pequena modificação do Teorema 3.18. E ainda, há problemas em que não é suficiente considerar a propriedade válida para um certo $k \in \mathbb{Z}_+$ e sim para todos os inteiros não-negativos menores do que k. E, para resolver problemas como esses, usa-se uma variação da Indução Matemática, denominada de **Indução Completa**, a qual apresenta-se a seguir.

Teorema 3.20 [Prova por Indução Completa] *Seja* $P(n)$ *uma proposição associada a cada inteiro positivo* n *e que satisfaz às duas seguintes condições:*

i. $P(1)$ *é verdadeira;*

ii. para todo inteiro positivo k*, se* $P(1), P(2), P(3), ..., P(k)$ *são todas verdadeiras, então* $P(k + 1)$ *também é verdadeira.*

Nestas condições, a proposição $P(n)$ *é verdadeira para todo inteiro positivo* n*.*

Demonstração: Seja X o conjunto de todos os inteiros positivos n para as quais a propriedade $P(n)$ é verdadeira, isto é,

$$X = \{n \in \mathbb{N}; P(n) \text{ é verdadeira}\}.$$

Suponha, por absurdo, que $X \neq \mathbb{N}$ e seja Y o conjunto de todos os inteiros positivos que não pertencem a X, isto é:

$$Y = \{y |\, y \in \mathbb{N} \; e \; y \notin X\} = \mathbb{N} - X.$$

Então Y é um subconjunto não vazio de $\mathbb{N}$, ou seja, $Y \subset \mathbb{N} \neq \varnothing$ e, pelo **Princípio da Boa Ordenação**, Y possui um menor elemento ν. Pela condição (i), $\nu > 1$ e como ν é menor inteiro positivo que não pertence a X, segue que as proposições

$$P(1), P(2), P(3), ..., P(\nu - 1)$$

são todas verdadeiras. Então, pela condição (ii) a proposição $P(\nu)$ é verdadeira e $\nu \in X$ o que é uma contradição, pois, $\nu \in Y = \mathbb{N} - X$, isto é, $\nu \notin X$. Assim, só pode-se ter $Y = \varnothing$, $X = \mathbb{N}$ e a proposição $P(n)$ é verdadeira para todo inteiro positivo n. ■

Exemplo 3.21 [Princípio da Boa Ordenação] *Prove que um subconjunto S de $\mathbb{N}$ que não possua um menor elemento é vazio.*

Solução: Deve-se mostrar que $S = \varnothing$ usando a **indução completa**. Sendo assim, considere o conjunto S^c como o complementar de S, a intenção é mostrar que $S^c = \mathbb{N}$. Seja $P(n)$ a propriedade de algum $n \in \mathbb{N}$ pertencer a S^c.

1 (Caso base). $P(1)$ é válido, pois $1 \notin S$, caso contrário 1 seria o menor elemento de S, logo $1 \in S^c$.

2 (Passo indutivo). Suponha que $P(k)$ seja válido para todo $k \leq n$, isto faz com que todo natural de 1 a n pertençam a S^c. Logo, não pertence a S. Isto mostra que $n+1$ não pode pertencer a S. Assim, $n+1$ seria o seu menor elemento e, por hipótese, S não possui menor elemento, então $n + 1 \in S^c$, o que mostra que $P(n + 1)$ também é válida.

Portanto, pelo **Princípio da indução Completa** $P(n)$ é válida para todo $n \in \mathbb{N}$, ou seja, $S^c = \mathbb{N}$ e $S = \varnothing$. □

Diante do exposto, no nível das estratégias é que o resolvedor compreende o enunciado, abstrai as primeiras informações, identifica aspectos fundamentais como os principais conceitos matemáticos que o problema envolve. Nas estratégias define-se a forma de abordar o problema, é o primeiro contato que o resolvedor estabelece com a questão, é o nível de obtenção de orientação, de tomada de decisão, de escolha e, neste nível, se é capaz de escolher o método de argumentação mais adequado e de definir como abordar o problema.

4 O NÍVEL DAS TÁTICAS

Na resolução de problemas as estratégias formam o nível mais geral. Porém, raramente um problema é resolvido apenas com a atuação no nível das estratégias, fazendo-se necessário sair da abordagem geral e focar em situações ou etapas mais específicas do problema. Esta forma de trabalhar em situações mais específicas de um problema compõe o nível das táticas. Assim, tática é entendida por Bechara (2011, p.1081), como sendo a arte de dispor e manobrar as tropas. Considerando que qualquer centro de inteligência em uma batalha primeiro define uma forma de encarar seu inimigo, isto é, define sua estratégia e depois para cumpri-la, dispõe e manobra suas tropas, empregando a tática.

Se o resolvedor encarar um problema como uma batalha contra um inimigo, primeiro deve definir uma estratégia e, em seguida, dispor e manobrar suas tropas. Sendo que estas, são constituídas pelas informações, dados e conceitos matemáticos referentes ao problema. Partindo deste princípio, apresenta-se neste capítulo algumas táticas eficientes na resolução dos mais diversos problemas: a Simetria, o Princípio das casas de pombos, Princípio dos extremos, Invariantes e Desigualdade das médias. Sendo, as quatro primeiras, baseadas nas considerações de Paul Zeitz.

4.1 Simetria

A ideia de simetria vem sendo discutida desde o início da escolarização de qualquer indivíduo, sendo expressa como a conformidade em medida, forma e posição relativa entre as partes dispostas em cada lado de uma linha divisória. Ela pode ser percebida em vários aspectos da vida do ser humano, na geometria dos objetos da natureza, nas configurações das sequências e funções. Por isso, é comum que esteja presente em muitos problemas. Sendo assim, uma boa tática focar na simetria que o problema pode apresentar.

Segundo Zeitz (2007), a simetria é importante porque dá informações livres, ou seja, se sabe-se que algo é simétrico em relação a uma rotação de 90 graus, então pode-se olhar apenas para um quarto desse objeto, o ponto de rotação de um objeto é um ponto especial que merece uma minuciosa investigação. Ele afirma que deve-se buscar a simetria em lugares improváveis, mesmo que não sejam bem simétrico, pois mesmo nestes casos aprende-se algo útil para solucionar o problema. Ele dá uma definição alternativa para simetria, a harmonia. Com base nesta definição, deve-se investir em perceber harmonia e beleza sempre que investigar um problema, pois, segundo ele, se o resolvedor puder fazer algo que torne as coisas mais harmoniosas ou mais bonitas, mesmo que não tenha ideia de como definir esses dois termos, estará no caminho certo.

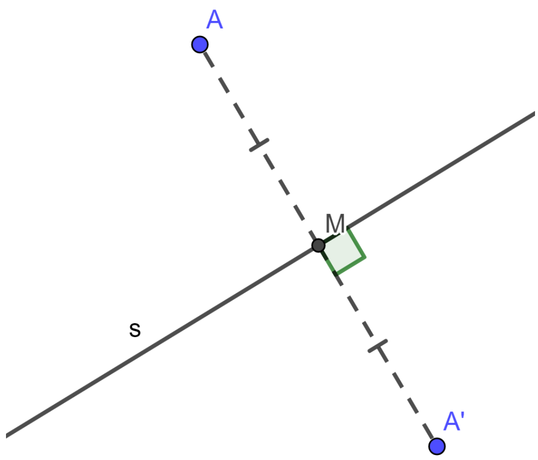
Este texto apresenta exemplos que exploram a **simetria geométrica**, a **simetria algébrica**, presentes em diversos problemas.

4.1.1 Simetria Geométrica

A Simetria Geométrica pode ser entendida segundo Bechara (2011, p.1048), como a propriedade de uma configuração que não varia desde que não se alterem as relações métricas, mesmo que se alterem as posições dos elementos que a constituem.

Segundo Silveira e Marques (2013), a Simetria Geométrica pode-se apresentar na forma da **simetria axial**, caracterizada pela presença de um eixo de simetria. Os próximos cinco exemplos abordados apresentam modelos de simetria axial.

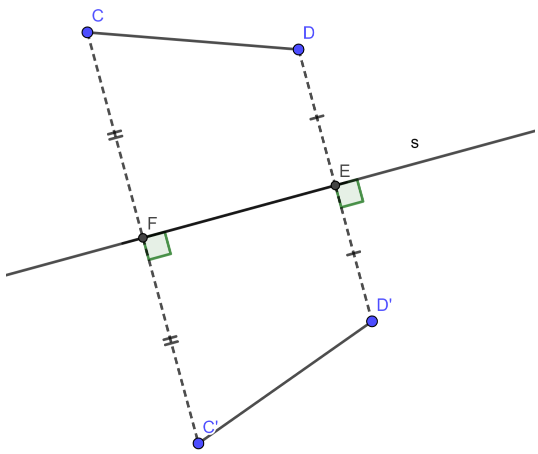
Figura 4.1 – Simetria de um ponto.



Fonte: Próprio autor, baseado em Silveira e Marques (2013)

Exemplo 4.1 *Os pontos* A *e* A' *são simétricos em relação à reta* s*, pois esta divide o segmento* $\overline{AA'}$ *perpendicularmente no seu ponto médio* M*.*

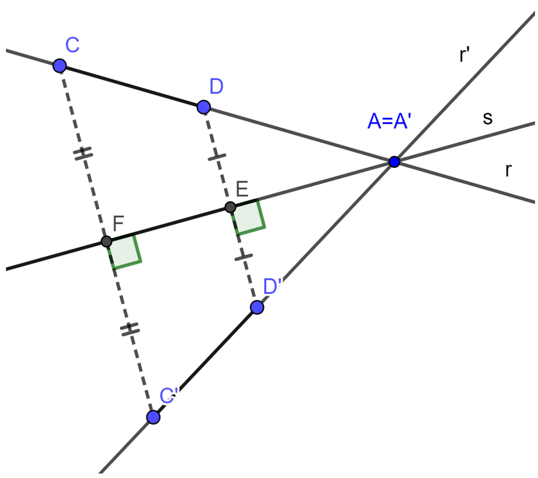
Figura 4.2 – Simetria de um segmento de reta.



Fonte: Próprio autor, baseado em Silveira e Marques (2013)

Exemplo 4.2 *Os segmentos* $\overline{\mathsf{CD}}$ *e* $\overline{\mathsf{C'D'}}$ *são simétricos em relação à reta* s*, pois pelo Exemplo 4.1 da página 39, os pontos* $\mathsf{C'}$ *e* $\mathsf{D'}$ *são, respectivamente, os simétricos de* C *e* D *em relação à reta* s*. Logo, conclui-se que, qualquer ponto* X *pertencente ao segmento* $\overline{\mathsf{CD}}$ *existe um ponto* $\mathsf{X'}$ *que pertence ao segmento* $\overline{\mathsf{C'D'}}$ *cuja a reta* s *divide o segmento* $\mathsf{XX'}$ *perpendicularmente no seu ponto médio, o que faz* $\mathsf{X'}$ *o simétrico de* X *em relação à reta* s*.*

Figura 4.3 – Simetria de uma reta.

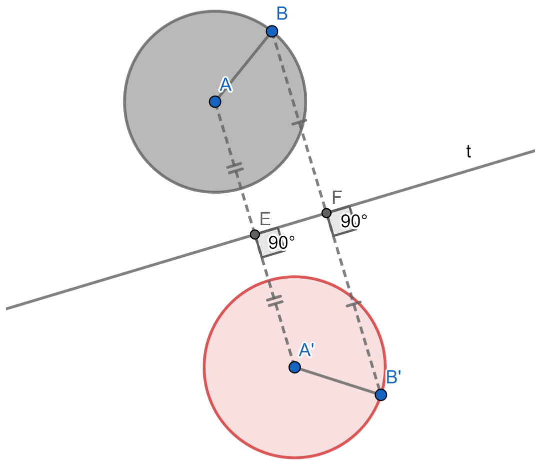


Fonte: Próprio autor, baseado em Silveira e Marques (2013)

Exemplo 4.3 *A reta* $\mathsf{r'}$ *determinada pelos pontos* $\mathsf{A'}$*,* $\mathsf{C'}$ *e* $\mathsf{D'}$ *é simétrica à reta* r *determinada pelos pontos* A*,* C *e* D *em relação à reta* s*, pois pelo Exemplo 4.1, os pontos*

A', C' *e* D' *são, respectivamente, simétricos de* A, C *e* D *em relação à* s *e, pelo Exemplo 4.2, qualquer segmento* $\overline{X'Y'}$ *contido em* r' *é simétrico à* $\overline{XY}$ *contido em* r *tal que* X' *e* Y' *sejam, respectivamente, os simétricos de* X *e* Y *em relação à* s. *Daí, conclui-se que, para qualquer ponto* $Z \in r$ *existe um ponto* $Z' \in r'$ *cuja a reta* s *divide o segmento* $\overline{ZZ'}$ *perpendicularmente no seu ponto médio.*

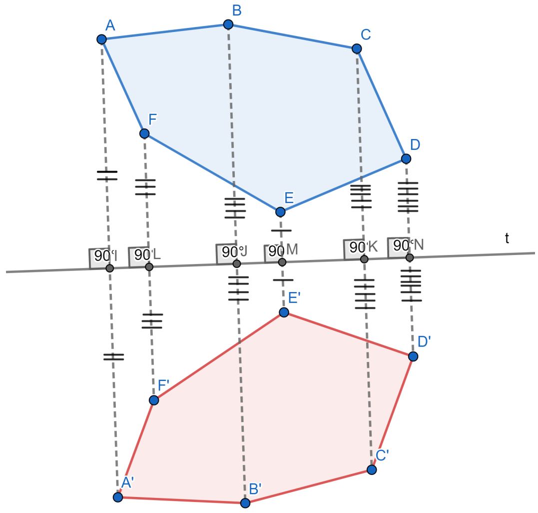
Figura 4.4 – Simetria de um círculo.



Fonte: Próprio autor, baseado em Silveira e Marques (2013)

Exemplo 4.4 *Pelos Exemplos 4.1 e 4.2, os pontos* A' *e* B' *são, respectivamente simétricos aos pontos* A *e* B *e o segmento* $\overline{A'B'}$ *é simétrico à* $\overline{AB}$ *em relação à reta* t *o que faz* $\overline{AE} \cong \overline{EA'}$, $\overline{BF} \cong \overline{FB'}$ *e* $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$. *Logo, os círculos da Figura 4.4 tem centros* A *e* A' *simétricos em relação à* t *e raio de mesma medida. Daí conclui-se que, para qualquer ponto* X' *pertencente ao círculo de centro em* A' *e raio* $A'B'$ *existe um ponto* X *pertencente ao círculo de centro em* A *e raio* AB *cuja a reta* t *divide o segmento* XX' *perpendicularmente no seu ponto médio. Portanto, esses dois círculos são simétricos em relação à* t

Figura 4.5 – Simetria de um polígono.

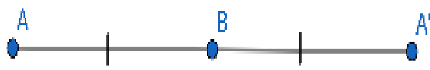


Fonte: Próprio autor, baseado em Silveira e Marques (2013)

Exemplo 4.5 *O polígono* ABCDEF *é simétrico ao polígono* $\mathsf{A'B'C'D'E'F'}$ *em relação à reta* t*. Pois, pelo Exemplo 4.1 os pontos* $\mathsf{A', B', C', D', E'}$ *e* $\mathsf{F'}$ *são, respectivamente, simétricos de* $\mathsf{A, B, C, D, E}$ *e* F *em relação à* t *e pelo Exemplo 4.2, para qualquer segmento* $\overline{\mathsf{XY}}$ *que forma um lado de* ABCDEF *existe um segmento* $\overline{\mathsf{X'Y'}}$ *que forma um lado de* $\mathsf{A'B'C'D'E'F'}$ *e que é simétrico à* $\overline{\mathsf{XY}}$ *em relação à* t*. Logo, com base no Exemplo 4.4, para qualquer ponto* $\mathsf{Z} \in \mathsf{ABCDEF}$ *existe um* $\mathsf{Z'} \in \mathsf{A'B'C'D'E'F'}$ *tal que* t *divide* $\overline{\mathsf{ZZ'}}$ *no seu ponto médio.*

Segundo Silveira e Marques (2013), a outra forma de simetria geométrica é a **Simetria Central**, caracterizada por uma simetria de rotação em relação a um ponto fixo do plano. Para ele, “Duas figuras são simétricas em relação a um ponto se ficam sobrepostas após um giro de meia-volta em torno desse ponto.”(SILVEIRA; MARQUES, 2013 p. 227). Para explorar melhor este caso de Simetria Geométrica, os cinco exemplos a seguir apresentam modelos de simetria central.

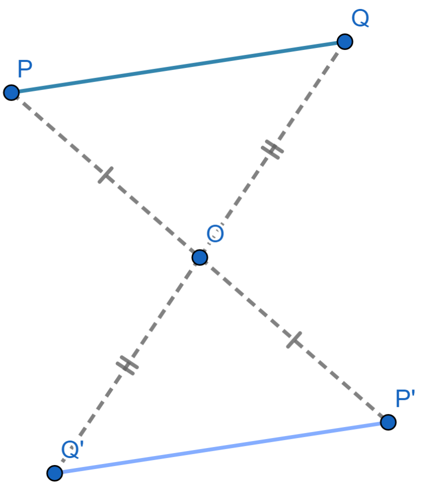
Figura 4.6 – Simetria de um ponto.



Fonte: Próprio autor, baseado em Silveira e Marques (2013)

Exemplo 4.6 *Considerando o segmento* $\overline{\mathsf{AA'}}$*, o ponto* $\mathsf{A'}$ *é o simétrico do ponto* A *em relação ao ponto* B*, se* B *for o ponto médio do segmento* $\overline{\mathsf{AA'}}$ *o que faz* $\overline{\mathsf{AB}} \cong \overline{\mathsf{BA'}}$*.*

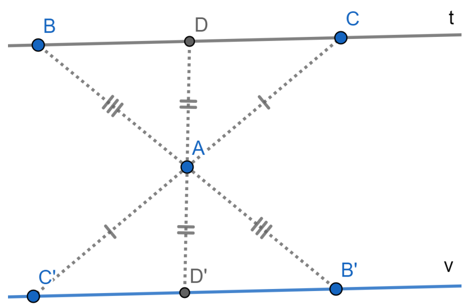
Figura 4.7 – Simetria de um segmento de reta.



Fonte: Próprio autor, baseado em Silveira e Marques (2013)

Exemplo 4.7 $\overline{\mathsf{P'Q'}}$ *é o segmento de reta simétrico a* $\overline{\mathsf{PQ}}$ *em relação ao ponto* O*, pois pelo exposto no exemplo 4.6, os pontos* $\mathsf{P'}$ *e* $\mathsf{Q'}$ *são, respectivamente, os simétricos de* P *e* Q *em relação ao ponto* O *o que faz* $\overline{\mathsf{PO}} \cong \overline{\mathsf{OP'}}$*,* $\overline{\mathsf{QO}} \cong \overline{\mathsf{OQ'}}$ *e* $\overline{\mathsf{PQ}} \cong \overline{\mathsf{P'Q'}}$*, consequentemente tem-se* $\overline{\mathsf{PQ}} \parallel \overline{\mathsf{P'Q'}}$*.*

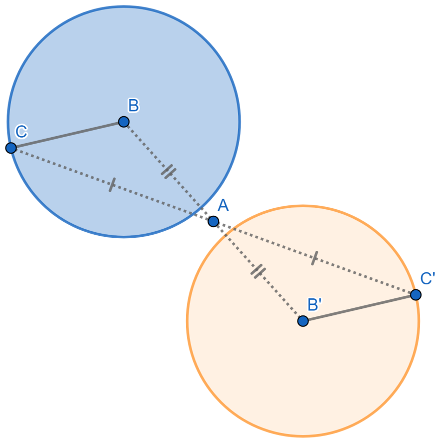
Figura 4.8 – Simetria de uma reta.



Fonte: Próprio autor, baseado em Silveira e Marques (2013)

Exemplo 4.8 *A reta* v *é simétrica à reta* t *em relação ao ponto* A*, pois os pontos* B'*,* C' *e* D' *pertencentes à* v *são, respectivamente, simétricos aos pontos* B*,* C *e* D *pertencentes à reta* t*. logo, pelo Exemplo 4.6, tem-se* $\overline{\mathsf{BA}} \cong \overline{\mathsf{AB}'}$*,* $\overline{\mathsf{CA}} \cong \overline{\mathsf{AC}'}$ *e* $\overline{\mathsf{DA}} \cong \overline{\mathsf{AD}'}$*, o que faz* $\overleftrightarrow{\mathsf{BC}} \parallel \overleftrightarrow{\mathsf{B}'\mathsf{C}'}$.

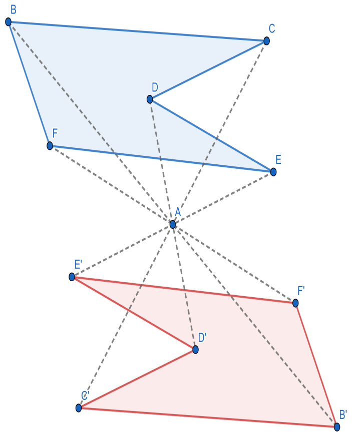
Figura 4.9 – Simetria de um círculo



Fonte: Próprio autor, baseado em Silveira e Marques (2013)

Exemplo 4.9 *O círculo de centro* B' *e raio* $\overline{\mathsf{B}'\mathsf{C}'}$ *é o simétrico do círculo de centro* B *e raio* BC *em relação ao ponto* A*, pois pelo Exemplo 4.7, tem-se* $\overline{\mathsf{BA}} \cong \overline{\mathsf{AB}'}$ *e* $\overline{\mathsf{CA}} \cong \overline{\mathsf{AC}'}$*, logo* $\overline{\mathsf{BC}} \cong \overline{\mathsf{B}'\mathsf{C}'}$*, o que faz os dois círculos terem raios de mesma medida.*

Figura 4.10 – Simetria de um polígono.

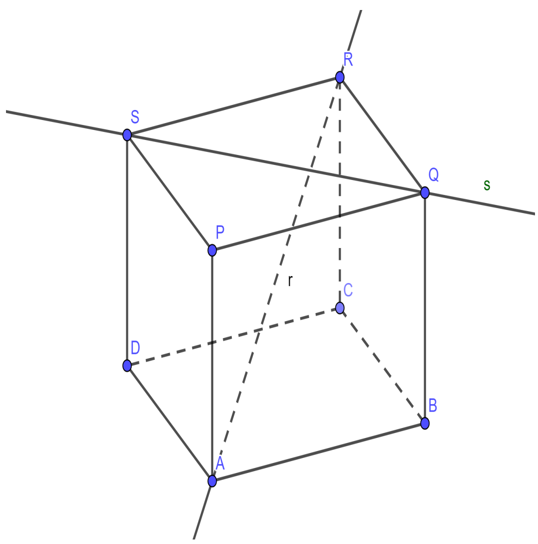


Fonte: Próprio autor, baseado em Silveira e Marques (2013)

Exemplo 4.10 *O polígono* $B'C'D'E'F'$ *é simétrico ao polígono* $BCDEF$ *em relação ao ponto* A, *pois pelo Exemplo 4.7, os pontos* B', C', D', E' *e* F' *são, respectivamente, os simétricos de* B, C, D, E *e* F *em relação ao ponto* A, *logo, tem-se* $\overline{BA} \cong \overline{AB'}$, $\overline{CA} \cong \overline{AC'}$, $\overline{DA} \cong \overline{AD'}$, $\overline{EA} \cong \overline{AE'}$, $\overline{FA} \cong \overline{AF'}$ *e, portanto,* $BCDEF \cong B'C'D'E'F'$.

Exemplo 4.11 (PROFMAT- Exame Nacional de Qualificação - ENQ 2018.1) *Dadas duas retas reversas* r *e* s *no espaço, definimos o ângulo entre* r *e* s *como o sendo o menor ângulo entre* r *e* s' *onde* s' *é qualquer reta paralela a* s *e concorrente com* r. *Pode-se provar que este ângulo não depende da reta* s' *escolhida. Na figura abaixo, as retas reversas* r *e* s *são suporte, respectivamente, de uma diagonal do cubo e de uma diagonal de uma de suas faces.*

Figura 4.11 – Retas reversas r e s

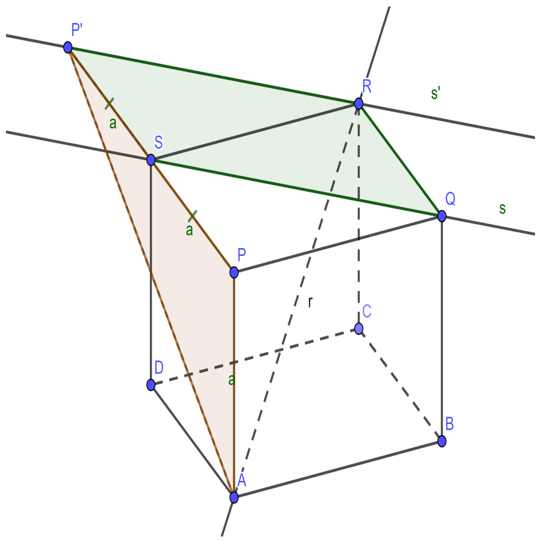


Fonte: Próprio autor, baseado no ENQ 2018.1 - do PROFMAT

Calcule, conforme a definição acima, o cosseno do ângulo entre as retas r *e* s*.*

Solução: Tomando a definição de ângulo entre retas reversas do enunciado, precisa-se encontrar uma reta s' paralela a s e concorrente a r. O que é feito tomando o ponto P' simétrico ao ponto P em relação à reta que contém o segmento $\overline{RS}$. Da simetria de P e P', tem-se $\overline{P'S} \cong \overline{PS}$,os ângulos $P'\hat{S}R$ e $S\hat{P}Q$ são congruentes, pois são correspondentes e da definição de cubo temos que, $\overline{SR} \cong \overline{PQ}$. Logo, os triângulos $P'RS$ e PQS são congruentes pelo caso LAL, o que faz $\overline{P'R} \cong \overline{SQ}$ e, consequentemente, o quadrilátero $P'SQR$, um paralelogramo, pois $\overline{P'S} \cong \overline{RQ}$ pela simetria de P e P'. Conclui-se que a reta s', que contém o segmento $\overline{P'R}$, é paralela à reta s e concorrente com r no ponto R.

Figura 4.12 – Solução do Exemplo 4.11



Fonte: Próprio autor, baseado no ENQ 2018.1 - do PROFMAT

Agora, chamando a aresta do cubo de a, segue que, a diagonal do cubo e uma das diagonais de uma das faces do cubo são, respectivamente, $|\overline{AR}| = a\sqrt{3}$ e $|\overline{P'R}| = a\sqrt{2}$. Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo APP', tem-se

$$|\overline{AP'}|^2 = |\overline{AP}|^2 + |\overline{PP'}|^2 = a^2 + (2a)^2 = a^2 + 4a^2 = 5a^2 \Longleftrightarrow |\overline{AP'}| = a\sqrt{5}.$$

Por fim, aplicando a lei dos cossenos no triângulo ARP' tem-se,

$$\begin{aligned} |\overline{AP'}|^2 &= |\overline{P'R}|^2 + |\overline{AR}|^2 - 2 \cdot |\overline{P'R}| \cdot |\overline{AR}| \cdot \cos P'\hat{R}A \\ 5a^2 &= 2a^2 + 3a^2 - 2 \cdot a\sqrt{2} \cdot a\sqrt{3} \cdot \cos P'\hat{R}A \\ 0 &= -2 \cdot a\sqrt{2} \cdot a\sqrt{3} \cdot \cos P'\hat{R}A. \end{aligned}$$

Para a última igualdade ser verdadeira, deve-se ter $\cos P\hat{R}A = 0$, pois o ângulo $P'\hat{R}A$ mede 90 graus.

□

Para iniciar a solução desse problema, a primeira tática executada foi a aplicação da simetria do ponto P em relação à reta suporte do segmento $\overline{RS}$ dando início a uma sequência de fáceis deduções até a resolução. Claro que um problema como este pode apresentar soluções alternativas, algumas vezes, com argumentos mais simplificados, porém que exigem do resolvedor uma experiência maior com a geometria espacial. Todavia, a simetria geométrica é um instrumento facilitador na superação de obstáculos, como os apresentados no último exemplo.

4.1.2 Simetria Algébrica

A simetria não é uma característica só dos objetos físicos ou geométricos, elementos algébricos também podem apresentar tal característica. Um exemplo disso são as sequências que representam as linhas do Triângulo de Pascal:

$$\begin{array}{ccccccccccc} & & & & & 1 & & & & & \\ & & & & 1 & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\ & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\ 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \end{array}$$

Conforme Zeitz (2007), isto é apenas o começo. Em praticamente qualquer situação que se possa imaginar um "emparelhamento" das coisas, pode-se pensar em simetria. Um outro exemplo, é a forma como é feita a soma dos 100 primeiros números naturais, forma que segundo alguns autores é atribuída a Carl Friedrich Gauss (1777 - 1855), que foi um dos maiores matemáticos da história. Segundo relatos, embora não se possa precisar a veracidades deles, Gauss estava com 10 anos, seu professor punia sua classe com uma soma aparentemente tediosa:

$$1 + 2 + 3 + ... + 98 + 99 + 100.$$

Enquanto os outros alunos lentamente adicionavam os números, o pequeno Carl descobriu um atalho e imediatamente chegou à resposta de 5.050, ele foi o único aluno a encontrar a soma correta. Sua visão foi perceber que 1 poderia ser emparelhado com 100, 2 com 99, 3 com 98, e assim por diante, para produzir 50 somas idênticas de valor 101. Daí, a resposta $101 \times 50 = 5050$. Outra maneira mais formal de encontrar o mesmo resultado é escrever a quantia duas vezes, primeiro na ordem crescente das parcelas e depois na ordem decrescente das parcelas:

$$\begin{aligned} S &= 1 + 2 + ... + 99 + 100 \\ S &= 100 + 99 + ... + 2 + 1 \\ 2S &= 100 \times 101 \end{aligned}$$

Consequentemente tem-se, $S = 5.050$.

Para Zeitz (2007), o resolvedor não deve ficar restrito a somas, deve procurar por qualquer tipo de simetria em um problema e, em seguida, investigar se um emparelhamento inteligente de itens pode simplificar as coisas.

4.2 Princípio das Casas de Pombos

A média é uma ideia muito relevante ao estudar o comportamento de lista de números, sendo que a média de uma dada lista é o número que pode substituir todos os elementos da lista sem alterar uma certa característica. Se a característica considerada é a soma, a média que pode substituir qualquer elemento sem alterar a soma é a **média aritmética simples**.

Definição 4.12 *Define-se a média aritmética simples da lista de* n *números* $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ *como*

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} x_j \ .$$

A partir da definição compreende-se que a média aritmética simples da lista de n números $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ é o número $\overline{x}$ tal que

$$x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n = \overline{x} + \overline{x} + \overline{x} + \cdots + \overline{x} = n\overline{x}.$$

A partir da definição de média aritmética, pode-se apresentar uma importante propriedade dessa média:

Teorema 4.13 *Se a média aritmética dos números* $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ *for* $\overline{x}$*, pelo menos um dos elementos* $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ *deve ser maior que ou igual a* $\overline{x}$*.*

Demonstração: Suponha, por absurdo, que fosse

$$x_1 < \overline{x}, x_2 < \overline{x}, x_3 < \overline{x}, \ldots, x_n < \overline{x},$$

isso implicaria que,

$$x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n < n\overline{x} \Rightarrow \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n}{n} < \overline{x} \Rightarrow \overline{x} < \overline{x},$$

o que é, claramente, uma contradição. ■

Após este resultado, há condições de apresentar o **Princípio das Casas de Pombos** que também é conhecido como **Princípio das Gavetas de Dirichlet**, pois este é uma consequência direta da propriedade da média aritmética apresentada anteriormente.

Teorema 4.14 (Princípio das Casas de Pombos) *Se $n+1$ pombos são colocados em n casas de pombos ou menos, pelo menos uma casa terá mais de um pombo.*

Demonstração: O número médio de pombos por casa será maior do que ou igual a $\dfrac{n+1}{n}$, que é maior do que 1, como os pombos só podem ser colocados em números inteiros, conclui-se que em alguma casa haverá mais de um pombo. ■

Mostrar-se a seguir um clássico exemplo da aplicação do Princípio das Casas de Pombos:

Exemplo 4.15 *Cinco pontos são selecionados no interior de um quadrado unitário, isto é, cuja a medida do lado é 1, prove que há pelo menos dois desses pontos em que a maior distância entre eles é menor do que ou igual $\frac{\sqrt{2}}{2}$.*

Solução: Partindo o quadrado em quatro quadrados de lados iguais a $\frac{1}{2}$, tem-se mais pontos do que quadrados e, pelo Princípio das Casas de Pombos, um desses quadrados de lado $\frac{1}{2}$ possui dois dos cinco pontos selecionados. Sabendo, que a maior distância entre dois pontos de um quadrado de lado $\frac{1}{2}$ é $\frac{\sqrt{2}}{2}$, pois esta é a medida de sua diagonal, a maior distância possível entre esses dois pontos é dada por $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

□

Para Zeitz (2007), a aplicação do Princípio das Casas de Pombos na solução de alguns problemas pode exigir a execução do processo em três passos:

i. Reconhecer que no problema pode ser aplicado o Princípio das Casas de Pombos;

ii. Descobrir o que são os pombos e o que são as casas, este é um ponto crucial;

iii. Perceber que, às vezes, a aplicação do Princípio das Casas de Pombos só conduz ao **penúltimo passo** e não resolve o problema necessitando de mais trabalho, inclusive, seguidas aplicações desse princípio.

Zeitz apresenta uma versão generalizada do Princípio das Casas de Pombos: "Se você tem p pombos e h casas, então pelo menos uma dessas casas contém no mínimo $\left\lceil \frac{p}{h} \right\rceil$ pombos"(ZEITZ 2007, p.86). Sendo que, a notação $\lceil z \rceil$ representa o menor inteiro maior ou igual a z. Não é difícil aceitar a verdade apresentada nesta última versão e, notar que o Teorema 4.14 é uma consequência desta afirmação. Pois se $p > h$ a quantidade $\left\lceil \frac{p}{h} \right\rceil$ é no mínimo 2. Para ilustrar esta generalização apresenta-se um exemplo do livro *The Art and Craft of Problem Solving*, que demonstra a aplicação dessa versão do Princípio das Casas de Pombos.

Exemplo 4.16 *Quarenta e uma torres são colocadas em um tabuleiro de xadrez* 10×10*. Prove que deve existir cinco torres onde nenhuma ataca a outra. (Considere que a torre ataca cada espaço localizado na linha ou na coluna)*

Solução: Quando deparado com o número 41 justaposto com 10, suspeita-se que o Princípio das Casas de Pombos pode estar envolvido, já que 41 é um a mais que $4 \cdot 10$. Uma vez sintonizado com o este princípio, não se pode deixar de notar que $\left\lceil \frac{41}{10} \right\rceil = 5$, que é encorajador, pois este é o número de torres que se está procurando. Isto, obviamente, não é uma solução, mas sugere que deve-se sondar cuidadosamente usando o Princípio das Casas de Pombos. Sendo que, procura-se cinco torres que não atacam umas às outras. Duas torres não se atacam se elas estiverem localizadas em linhas diferentes e colunas diferentes. Então precisa-se encontrar cinco torres, cada uma posicionada em uma linha diferente, e cada uma posicionada em uma coluna diferente.

Esta, todavia, é uma estratégia vaga: precisa-se de cinco linhas diferentes, cada uma com grande quantidade de torres. Nesse caso, escolhe-se uma torre de uma linha e encontra-se outra torre em uma coluna diferente na outra linha, etc. Há 10 linhas e 41 torres, então o Princípio das Casas de Pombos diz que uma linha deve conter pelo menos $\left\lceil \frac{41}{10} \right\rceil = 5$ torres. Isso é um começo. Aplicando este princípio de novo para obter mais informações e descobrir o que está acontecendo com as outras linhas. Pretende-se encontrar outras linhas que tenham muitas torres.

Diante disso, isolando uma linha com pelo menos cinco torres e removendo-a, no máximo, remover-se-ia 10 torres. Isso deixa 31 torres nas nove linhas restantes. E, novamente, pelo Princípio das Casas de Pombos, em uma dessas nove linhas devem conter pelo menos $\left\lceil \frac{31}{9} \right\rceil = 4$ torres. Repetindo o processo anterior, ou seja, removendo esta linha, e pelo mesmo princípio, deduz-se que há outra linha contendo pelo menos $\left\lceil \frac{21}{8} \right\rceil = 3$ torres. Continuando, vê-se que outra linha deve ter pelo menos duas torres e mais uma linha deve conter pelo menos uma torre. Portanto, há cinco linhas especiais no tabuleiro de xadrez, contendo pelo menos 5, 4, 3, 2 e 1 torres, respectivamente.

Agora pode-se encontrar as cinco torres descritas no enunciado: Escolhendo a torre na linha que tem pelo menos uma torre. Então, na fila com pelo menos duas torres, pelo menos uma dessas torres não estará na mesma coluna da primeira torre escolhida, então esta será a segunda torre escolhida. Em seguida, olhando para a linha que tem pelo menos três torres, uma dessas três torres não está na mesma coluna que a primeira ou a segunda torre. Esta será terceira torre. Dessa forma, escolhe-se a quarta e a quinta torre, respectivamente, nas linhas que tem pelo menos quatro e cinco torres. □

4.3 Princípio dos Extremos

Alguns problemas podem não apresentar alguma característica conhecida e ter as informações do enunciado, aparentemente desordenadas e que não faz nenhum sentido. Fazendo, assim, com que o resolvedor sinta-se incapaz de resolvê-lo com os instrumentos abordados até aqui. O **Princípio dos extremos** é uma tática valiosíssima. Ela consiste em procurar os extremos expressos no problema como o maior ou o menor elemento, o ponto de partida ou o ponto de chegada. Segundo Zeitz (2007), o resolvedor deve, se possível assumir que os elementos do problema estão ordenados e procurar o maior ou o menor dos elementos. Para ele, esta postura leva à descoberta de um interessante caminho para a solução do problema.

Para demonstrar a aplicação deste princípio, o próximo exemplo traz um problema cuja a solução foi apresentada pelo professor Roberto Imbuzeiro no Programa de Aperfeiçoamento de Professores de Matemática do Ensino Médio (PAPMEM), realizado pelo Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA) em julho de 2018.

Exemplo 4.17 *Imagine uma aula de matemática com a seguinte propriedade: Cada aluno nesta aula tira uma única soneca isto é, ele cai no sono num certo instante de tempo* $\mathtt{s}$ *e acorda no instante de tempo* $\mathtt{t} > \mathtt{s}$*.(Considere* $\mathtt{s}, \mathtt{t}$ *e todos os números entre eles como momentos em que o dado aluno está dormindo). Dados quaisquer dois alunos, há ao menos um instante de tempo em que ambos estão dormindo. Demonstre que há pelo menos um instante de tempo em que todos os alunos estão dormindo simultaneamente.*

Solução: Desenhando o tempo em que os alunos dormem como uma linha reta, notamos que o tempo que cada aluno passa dormindo é um intervalo fechado cujos extremos são $\mathtt{s}$ e $\mathtt{t}$, respectivamente, início e fim da soneca. Considerando ainda, que os alunos têm um tempo de soneca comum, acarreta que, a interseção de todos os intervalos é não-vazia. Se há um período de soneca comum, seus extremos são o momento em que o período começa e o momento em que ele termina. Podemos concluir que esse período também é um intervalo. Considerando que o primeiro aluno não deve acordar sem que o último esteja dormindo. Logo os dois extremos que devem ser encontrados são os instantes quando a soneca comum começa e quando ela termina.

A intenção aqui é provar que todos os intervalos tem um instante comum que começa quando o último aluno dorme e termina quando o primeiro aluno acorda. Para isso, suponha que há $n > 1$ alunos, com $n \in \mathbb{N}$. Numerando os alunos de 1 a n, o tempo em que o aluno i, $1 < i < n$, dorme é o intervalo $I_i = [a_i, b_i]$ com $a_i < b_i$, ou seja, a_i e b_i representam, respectivamente, o início e o fim da soneca. Consequentemente, tem-se por hipótese que $I_1, I_2, \ldots, I_n$ são intervalos da forma $I_i = [a_i, b_i]$ com $a_i < b_i$. Tem-se ainda que $I_i \cap I_j \neq \varnothing$, para quaisquer $1 \leq i < j \leq n$. Logo, a tese é que $I_1 \cap I_2 \cap \cdots \cap I_n \neq \varnothing$.

Resta agora provar que o intervalo $J =$[maxa_i, minb_j], corresponde a momentos de soneca comum. O que será feito em partes. Primeiro, prova-se que J é mesmo um intervalo. Para isso, seja i_* um índice tal que $a_{i_*} = \max a_i$, isto é, a_{i_*} é o instante em que o último aluno inicia a sua soneca e, seja j_*, tal que $b_{j_*} = \min b_j$, ou seja, b_{j_*} é o instante em que o primeiro aluno acorda. Sabe-se que os intervalos I_{i_*} e I_{j_*} se interceptam (por hipótese), logo, $\max a_i < \min b_i$. Pois se dois intervalos fechados se interceptam, o menor ponto de um é menor que o maior ponto do outro. Esta afirmação é o ponto chave da prova formal. Para demonstrar a afirmação, seja $A = [x, y]$ e $B = [z, w]$ dois intervalos fechados quaisquer com $x \leq y$ e $z \leq w$. A afirmação diz que $y \geq z$ sempre que $A \cap B \neq \varnothing$. Pois se $A \cap B$ é não-vazio, tome $t \in A \cap B$ e note que:

$$t \in A \Longrightarrow x \leq t \leq y$$

e

$$t \in B \Rightarrow z \leq t \leq w.$$

Portanto, $z \leq t \leq y$ o que faz $z \leq y$. Neste caso particular, isto diz que $a_{i_*} \leq b_{j_*}$, o que completa a primeira parte da prova. A segunda parte é mostrar que $J \subset I_1 \cap I_2 \cap I_3 \cap \cdots \cap I_n$. Basta mostrar que $J \subset I_k$ para todo $1 \leq k \leq n$. Mas isto segue claramente do fato que $a_k \leq \max a_i \leq \min b_i \leq b_k$. □

4.4 Invariantes

Diante de um problema, o resolvedor precisa lançar mão de tudo que pode ajudá-lo na hora de abordá-lo. Se após muito tempo desprendido e nenhum avanço feito, uma boa tática é olhar para os elementos do problema que não se modificam. E esses existem! para compreender isso basta lembrar do que foi apresentado na seção se simetria.

Em muitos problemas, estão presentes elementos que, apesar do enredo do enunciado, conservam sua forma, valor, posição *etc.* Neste caso, estes elementos não variam e por isso, aqui são chamados de **invariantes**.

Para Zeitz (2007), invariante é meramente um aspecto do problema, usualmente uma qualidade numérica, que não pode ser mudada como a paridade, por exemplo. Esta característica faz com que tais elementos sejam especiais, merecendo uma atenção privilegiada, pois estes podem oferecer um caminho muito produtivo de interação com o problema.

Partindo deste contexto, estas notas apresentarão a **congruência modular** e a **paridade** como invariantes. Embora estas não sejam as únicas, com elas é possível apresentar esta tática com muita propriedade. Contudo, para apresentá-las, faz-se necessário expor alguns resultados que lhe servem de base.

Alerta-se, no entanto, que as notas que se seguem têm apenas o objetivo de estabelecer o mínimo necessário para apresentar a paridade dos números inteiros e a congruência modular e não um estudo aprofundado das propriedades da divisão de inteiros. Para isso, recomenda-se uns anos mergulhado na teoria dos números.

Definição 4.18 *Sejam dois inteiros* a *e* b *com* $a \neq 0$*, dizemos que* a *divide* b *e escrevemos* $a \mid b$ *quando existir um* $k \in \mathbb{Z}$ *tal que* $b = ka$*. Nesse casso diz-se ainda que* a *é um divisor de* b *ou ainda que* b *é um múltiplo de* a

A notação "$a \mid b$" indica uma relação de divisibilidade em $\mathbb{Z}$ e, portanto, a notação $a \nmid b$ indica que a não divide b, isto é, não existe algum $k \in \mathbb{Z}$ tal que $b = ka$.

Ainda nesse contexto, se $a \mid b$, então $a \mid -b$ e $-a \mid b$. Conforme Alencar Filho (1981, p. 68 e 69) "Se a é um divisor de b, então $-a$ também é um divisor de b, porque a igualdade $b = aq$ implica $b = (-a)(-q)$, de modo que os divisores de um inteiro qualquer são dois a dois iguais em valor absoluto e de sinais opostos (simétricos)".

Teorema 4.19 *Quaisquer que sejam os inteiros* a*,* b *e* c *tem-se:*

i) $a \mid 0$*,* $1 \mid a$ *e* $a \mid a$

ii) *Se* $a \mid 1$*, então* $a = \pm 1$

iii) *Se* $a \mid b$ *e se* $c \mid d$*, então* $ac \mid bd$

iv) *Se* $a \mid b$ *e se* $b \mid c$*, então* $a \mid c$

v) *Se* $a \mid b$ *e se* $b \mid a$*, então* $a \mid \pm b$

vi) *Se* $a \mid b$*, com* $b \neq 0$*, então* $|a| \leq |b|$

vii) *Se* $a \mid b$ *e se* $a \mid c$*, então* $a \mid (bx + cy)$*, para todo* $x, y \in \mathbb{Z}$

Demonstração:

i) De fato: $0 = a \cdot 0$, $a = 1 \cdot a$ e $a = a \cdot 1$.

ii) Se $a \mid 1$, então $1 = ak$, com $k \in \mathbb{Z}$, o que implica $a = 1$ e $q = 1$ ou $a = -1$ e $q = -1$, ou seja: $a = \pm 1$.

iii) De fato: $a \mid b \Rightarrow b = ak_1$ e $c \mid d \Rightarrow d = ck_2$, com $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$. Portanto, $bd = (ac)(k_1k_2) \Rightarrow ac \mid bd$.

iv) De fato: $a \mid b \Rightarrow b = ak_1$ e $b \mid c \Rightarrow c = bk_2$, com $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$. Portanto, $c = a(k_1k_2) \Rightarrow a \mid c$.

v) De fato: $a \mid b \Rightarrow b = ak_1$ e $b \mid a \Rightarrow a = bk_2$, com $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$. Portanto,

$$\begin{aligned} a = a(k_1k_2) &\Rightarrow (k_1k_2) = 1 \Rightarrow k_1 \mid 1 \quad e \quad k_2 \mid 1 \\ &\Rightarrow k_1 = \pm 1 \quad e \quad k_2 = \pm 1 \Rightarrow a = \pm b. \end{aligned}$$

vi) Com efeito: $a \mid b$, $b \neq 0 \Rightarrow b = aK$, $k \neq 0$ e $|b| = |a||k|$, com $k \neq 0$, segue-se que $|k| \geq 1$ e, portanto, $|b| \geq |a|$.

vii) Com efeito: $a \mid b \Rightarrow b = ak_1$, e $a \mid c \Rightarrow c = ak_2$, com $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$. Portanto, quaisquer que sejam os inteiros x e y:

$$bx + cy = ak_1x + ak_2y = a(k_1x + k_2y) \Rightarrow a \mid (bx + cy) \qquad \blacksquare$$

Dados dois números inteiros a e b com $a \neq 0$ ou $b \neq 0$, a cada um deles pode-se associar seu conjunto de divisores positivos, o qual pode-se denominar, respectivamente, de $D(a)$ e $D(b)$, os elementos comuns aos dois conjuntos formam o conjunto dos divisores comuns de a e b. Este conjunto que pode ser denotado por $D(a) \cap D(b)$ é limitado com base no item (vi) do teorema 4.19 e não vazio com base no item (i) do mesmo teorema (já que 1 pertence à interseção). Por ser finito, $D(a) \cap D(b)$ possui elemento máximo, que chama-se máximo divisor comum (mdc) dos números a e b. E pode-se denotá-lo por $mdc(a, b)$. Quando $mdc(a, b) = 1$ diz-se que a e b são primos entre si.

Há, porém, muitos casos em que, dados dois inteiros quaisquer a e b, com $b \neq 0$, $b \nmid a$, isto é $b \notin D(a)$. Contudo, Euclides mostra que é sempre possível dividir a por b. Todavia, na divisão de a por b, quando $b \nmid a$ existe uma sobra $r \neq 0$ que denomina-se resto.

Diante disso, ainda como base para apresentação de paridade e da congruência modular, o próximo teorema é conhecido na literatura como **Divisão Euclidiana** e apresenta a divisão com resto que foi abordada no parágrafo a cima.

Teorema 4.20 *Sejam $a, b \in \mathbb{Z}$ com $b \neq 0$. Existem dois únicos inteiros q e r tais que $a = bq + r$, com $0 \leq r < |b|$.*

Demonstração: Considere o conjunto

$$S = \{x = a - by; y \in \mathbb{Z}\} \cap (\mathbb{N} \cup \{0\}).$$

Existência: Pela Propriedade Arquimediana, existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que $n(-b) > -a$, logo $a - nb > 0$, o que mostra que S é não vazio. O conjunto S é limitado inferiormente por 0, logo, pelo Princípio da Boa Ordenação, temos que S possui um menor elemento r. Suponha agora, então que $r = a - bq$. Sabe-se que $r \geq 0$. Para mostrar que $r < |b|$, suponha, por absurdo, que $r \geq |b|$. Portanto, existe $s \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tal que $r = |b| + s$, daí segue que

$$\begin{aligned} r = |b| + s \Rightarrow\ & a - bq = |b| + s \\ \Rightarrow\ & a - bq - |b| = s \\ \Rightarrow\ & a - bq \pm b = s \\ \Rightarrow\ & a - b(q \pm 1) = s. \end{aligned}$$

logo $0 \leq s < r$. Mas isso contradiz o fato de r ser o menor elemento de S, pois $s = a - (q \pm 1)b \in S$, com $s < r$.

Unicidade: Suponha que $a = bq_1 + r_1 = bq_2 + r_2$, onde $q_1, q_2, r_1, r_2 \in \mathbb{Z}$, com $0 \leq r_1 < |b|$ e $0 \leq r_2 < |b|$. Desse modo tem-se que

$$-|b| < -r_1 \leq r_2 - r_1 \leq r_2 < |b|.$$

Logo $|r_2 - r_1| < |b|$. Por outro lado $b(q_1 - q_2) = r_2 - r_1$, o que implica que

$$|b||q_1 - q_2| = |r_2 - r_1| < |b|,$$

o que só é possível quando $q_1 = q_2$ e consequentemente, $r_1 = r_2$ ■

4.4.1 Paridade dos números inteiros

Na divisão de um inteiro qualquer a por $c = 2$ os possíveis restos são $r = 0$ ou $r = 1$,. Se $r = 0$, então o inteiro $a = 2q + 0$ é denominado par; se $r = 1$, o inteiro $a = 2q + 1$ é denominado ímpar.

Como a soma e o produto de inteiros é feita dois a dois, não é difícil verificar que:

1. A soma e a diferença de dois números é par se, e somente se, estes possuírem a mesma paridade;
2. O produto de dois números é par se, e somente se, pelo menos um deles for par;
3. A potência de um número é par se, e somente se, este número for par;
4. A soma de n números ímpares é par se, e somente se, n for par

De fato, sejam os números pares $a = 2q_1$, $b = 2q_2$ e os números ímpares $c = 2q_1+1$ e $d = 2q_2 + 1$, tem-se $a + b = 2q_1 + 2q_2 = 2(q_1 + q_2)$ e

$$c + d = (2q_1 + 1) + (2q_2 + 1) = 2q_1 + 2q_2 + 1 + 1 = 2\{(q_1 + q_2) + 1\},$$

mas

$$a + d = 2q_1 + (2q_2 + 1) = 2q_1 + 2q_2 + 1 = 2(q_1 + q_2) + 1.$$

Tem-se também

$$a \cdot b = 2q_1 \cdot 2q_2 = 4q_1q_2 = 2(2q_1q_2)$$

e

$$a \cdot d = 2q_1 \cdot (2q_2 + 1) = 4q_1q_2 + 2q_1 + = 2(2q_1q_2 + q_1),$$

mas no produto de dois ímpares tem-se:

$$\begin{aligned} c \cdot d &= (2q_1 + 1) \cdot (2q_2 + 1) \\ &= 4q_1q_2 + 2q_1 + 2q_2 + 1 \\ &= 2(2q_1q_2) + 2(q_1 + q_2) + 1 \\ &= 2(2q_1q_2 + q_1 + q_2) + 1. \end{aligned}$$

Para o item 3 tem-se; Se for $a^b = (2q_1) \cdot (2q_1) \cdot ... \cdot (2q_1)$ com um número par de fatores iguais a $(2q_1)$ que foi mostrado no item anterior que este produto é par. Caso seja a^c será $a^c = (2q_1) \cdot (2q_1) \cdot ... \cdot (2q_1)$ com um número ímpar de fatores iguais a $(2q_1)$ continua sendo um produto de fatores pares e, pelo item anterior, é par. Porém se tiver c^a ou c^d tem-se um produto com um número par ou um número ímpar de fatores iguais a $(2q_1 + 1)$ que, pelo item anterior, é ímpar.

Para o item 4, basta notar que a soma de dois ímpares é par, pelo item 1 e que acrescentando o próximo ímpar, o resultado só pode ser ímpar, também pelo item 1, visto que os dois números tem paridade diferente, acrescentado sempre o próximo ímpar o item 1 garante o resultado.

O exemplo a seguir trás um problema em que a paridade foi umas das táticas utilizadas para solucioná-lo.

Exemplo 4.21 (Blog Desafios da Matemática Elementar) *Imagine que 10 prisioneiros estejam trancados em uma cela quando chega um carcereiro com o seguinte comunicado:*

- Amanhã todos vocês passarão por um teste. Todos vocês ficarão em fila indiana e serão colocados chapéus nas cabeças de cada um de vocês. Cada um poderá ver os chapéus dos que estarão a sua frente, porém não poderão ver os chapéus dos que estão atrás, nem o seu próprio chapéu. Os chapéus serão pretos ou brancos. Feito isso, será perguntado a cada um de vocês, do último para o primeiro, em ordem qual a cor do seu chapéu. Se a pessoa errar a cor do seu chapéu, será morta.

Será que os prisioneiros podem montar uma estratégia para salvar pelo menos 9 deles?

Solução: Refletindo sobre o problema nota-se a probabilidade de que todos sejam salvos é minima, pois para que isso ocorra todos tem que acertar a cor do seu próprio chapéu e isso requer um pouco de sorte. Todavia, para o que o enunciado pede, uma estratégia que salve o máximo possível dos prisioneiros.

Partindo desse princípio, a estratégia adotada pode ser que combinem de cada um deles falar a cor do chapéu que está imediatamente a sua frente. Porém, basta que as cores dos chapéus estejam alternadas para a estratégia não funcionar. Já que dessa forma não há como salvar 9 prisioneiros.

Contudo, voltando ao enunciado, o fato de 9 dos 10 prisioneiros serem salvos dá um forte indício que o primeiro ou o último da fila não deve se salvar. Assim deve-se pensar uma estratégia em que um destes são deixados por sua própria sorte.

Mais uma vez buscando **orientação** no enunciado, observa-se um aspecto muito interessante que agregado com a observação do parágrafo anterior pode trazer um progresso nesta solução. Este aspecto é o fato de que cada um dos prisioneiros pode falar apenas uma entre duas palavras que são: preto ou branco. Isto corresponde a um sistema de linguagem binário assim como sim e não, zero ou um, par ou ímpar. Esta referência, **par** ou **ímpar**, será a base para a estratégia adotada. Que será a seguinte:

O último da fila deve olhar para frente e contar o número de chapéus brancos. Se este número for **par**, ele deve gritar branco. Caso contrário, ele deve gritar preto. Com isso, todos ficam sabendo a **paridade** da quantidade de chapéus brancos que existe entre os nove primeiros da fila.

Agora, o penúltimo vai olhar para frente e ver a quantidade de chapéus brancos. Se a **paridade** continuar a mesma informada pelo último, então seu chapéu é preto. Se mudar ele pode concluir que seu chapéu é branco. E isto pode ser feito para todos os demais membros da fila, pois todos saberão a cor dos chapéus dos anteriores (tirando a cor do chapéu do último) e a **paridade** do número de chapéus brancos que existem entre os nove primeiros.

Portanto, é possível salvar os nove primeiros, enquanto o último fica por conta da sua própria sorte sorte! □

Este último exemplo apresenta, acima de tudo, uma solução muito simples, sem cálculos sofisticados, que deixa bem claro a eficiência da tática estudada. Sendo assim, recomenda-se adotar como uma das estratégias iniciais, a análise da paridade dos números presentes no problema, pois esta ja provou que pode levar a caminhos fáceis de trilhar na solução de problemas complicados.

4.4.2 Congruência modular

A congruência modular sintetiza um aspecto dos números que não varia, por isso aqui chama-se de invariante.

Definição 4.22 *Sejam* $a, b, m \in \mathbb{Z}$ *diz-se que* a *é congruente a* b *módulo* m *e denota-se*

$$a \equiv b \pmod{m}$$

se e somente se m *divide a diferença* $a - b$.

Em outras palavras, pode-se dizer que a é congruente a c módulo m se a e c divididos por m deixam o mesmo resto. Ou ainda, a é congruente a c módulo m se existir um $k \in \mathbb{Z}$ tal que $a - b = km$.

Em termos de simbologia tem-se

$$a \equiv b \pmod{m} \Leftrightarrow m \mid (a - b)$$

ou ainda

$$a \equiv b \pmod{m} \Leftrightarrow \exists \ k \in \mathbb{Z};\ a - b = km.$$

Nesse contexto, diz-se que

$$3 \equiv 24 \pmod{7}, \quad \text{pois} \quad 7 \mid (3 - 24)$$

$$-80 \equiv 1 \pmod{9}, \quad \text{pois} \quad 9 \mid (-80 - 1)$$

$$-12 \equiv -48 \pmod{6}, \quad \text{pois} \quad 6 \mid (-12 - (-48)).$$

A seguinte proposição apresenta as mais importantes propriedades da congruência modular, fornecendo ferramentas fantásticas para a solução de problemas que envolvem divisibilidade de inteiros.

Teorema 4.23 *Para quaisquer* $a, b, c, d, n \in \mathbb{Z}$ *tem-se:*

1. *(Reflexividade).* $a \equiv a \pmod{n}$;
2. *(Simetria) se* $a \equiv b \pmod{n}$, *então* $b \equiv a \pmod{n}$;
3. *(Transitividade) se* $a \equiv b \pmod{n}$ *e* $b \equiv c \pmod{n}$, *então* $a \equiv c \pmod{n}$;
4. *(Compatibilidade com a soma e diferença) Pode-se somar e subtrair "membro a membro":*

$$\{a \equiv b \pmod{n} \ \text{ e } \ c \equiv d \pmod{n}\}$$

$$\Rightarrow \{a + c \equiv b + d \pmod{n} \ \text{ ou } \ a - c \equiv b - d \pmod{n}\}$$

Em particular, se $a \equiv b \pmod{n}$, *então* $ka \equiv kb \pmod{n}$ *para todo* $k \in \mathbb{Z}$

5. *(Compatibilidade com o produto) Pode-se multiplicar "membro a membro":*

$$\{a \equiv b \pmod{n} \ \text{e} \ c \equiv d \pmod{n}\} \Rightarrow ac \equiv bd \pmod{n}$$

Em particular, se $a \equiv b \pmod{n}$, *então* $ak \equiv bk \pmod{n}$ *para todo* $k \in \mathbb{N}$;

Demonstração:

1. Basta notar que $n \mid a - a = 0$.

2. se $n \mid a - b$, então $n \mid -(a - b) \Leftrightarrow n \mid b - a$.

3. Se $n \mid a - b$ e $n \mid b - c$, então $n \mid (a - b) + (b - c) \Leftrightarrow n \mid a - c$.

4 Se $a \equiv b \pmod{n}$ e se $c \equiv d \pmod{n}$ existem $k_1, \ k_2 \in \mathbb{Z}$ tais que $a - b = k_1 n$ e $c - d = k_2 n$. Daí segue que,

$$(k_1 + k_2)n = k_1 n + k_2 n = (a - b) + (c - d) = a - b + c - d = (a + c) - (b + d).$$

Mas isso implica que $n \mid (a+c)-(b+d)$ e, consequentemente, $a+c \equiv c+d \pmod{n}$. E ainda,

$$(k_1 - k_2)n = k_1 n - k_2 n = (a - b) - (c - d) = a - b - c - d = (a - c) - (b - d).$$

Que, por sua vez, implica que $n \mid (a - c) - (b - d)$ e, consequentemente, $a - c \equiv c - d \pmod{n}$.

5 Pelo item 4, pode-se escrever $ac \equiv bc \pmod{n}$ e $bc \equiv bd \pmod{n}$ o que leva à $n \mid ac - bc$ e $n \mid bc - bd$. Novamente, pelo item 4, tem-se

$$n \mid (ac - bc) + (bc - bd) \ \leftarrow n \mid ac - bc + bc - bd.$$

Daí segue que $n \mid ac - bd$ e, consequentemente, $ac \equiv bd \pmod{n}$ ■

O conceito de congruência está intimamente relacionado com os problemas que envolvem divisibilidades de inteiros

Exemplo 4.24 *Qual o resto de* $1^{2000} + 2^{2000} + ... + 2000^{2000}$ *na divisão por 7?*

Solução: *(baseada em Portal da Matemática-OBMEP)* A princípio este problema pode assustar devido a quantidade de parcelas, o valor do expoente e o fato de sete ser um número primo não parece ajudar muito. Contudo, uma boa estratégia para iniciar é **quebrar o enunciado**, ou seja, ao invés de dividir a soma por 7, estudar o comportamento de cada parcela em particular. E como tática emprega-se a congruência modular para considerar a divisão das parcelas por sete.

Em primeiro lugar, como $i^{2000} \equiv (i+7k)^{2000} \pmod{7}$, visto que pelo desenvolvimento do binômio de Newton a única parcela de $(i+7k)^{2000}$ que não é múltipla de 7 é i^{2000}, pode-se simplificar o problema calculando primeiramente o valor de:

$$1^{2000}+2^{2000}+3^{2000}+4^{2000}+5^{2000}+6^{2000}+7^{2000} \pmod{7}.$$

Outra observação importante que simplificará o cálculo é perceber que $2^3 \equiv 1 \pmod{7}$. Assim, pelo item 5 do Teorema 4.23,

$$\begin{aligned} 2^{3k} &\equiv 1 \pmod{7} \\ 2^{3k+1} &\equiv 2 \pmod{7} \\ 2^{3k+2} &\equiv 4 \pmod{7}. \end{aligned}$$

Usando isso e o fato de que 2000 é par, tem-se:

$$\begin{aligned} & 1^{2000}+2^{2000}+3^{2000}+4^{2000}+5^{2000}+6^{2000}+7^{2000} \\ \equiv\ & 1^{2000}+2^{2000}+(-4)^{2000}+4^{2000}+(-2)^{2000}+(-1)^{2000}+0^{2000} \\ \equiv\ & 1+4+2+2+4+1+0 \\ \equiv\ & 0 \pmod{7}. \end{aligned}$$

Dentre os primeiros 2000 naturais consecutivos, pode-se formar 285 grupos de 7 números consecutivos cuja soma é múltipla de 7, em virtude da soma anterior. Os cinco números restantes possuem como resto na divisão por 7 o número:

$$\begin{aligned} 1996^{2000}+1997^{2000}+1998^{2000}+1999^{2000}+2000^{2000} &\equiv 1+4+2+2+4 \\ &\equiv 6 \pmod{7}. \end{aligned}$$

Assim, o resto da divisão de $1^{2000}+2^{2000}+\ldots+2000^{2000}$ por 7 é 6. □

A **congruência modular** é uma tática mais sofisticada do que a **paridade**, embora a última seja um caso específico da primeira, isto é, um número k é dito **par** se, e somente se, $k \equiv 0 \pmod{2}$ e é dito **ímpar** se, e somente se, $k \equiv 1 \pmod{2}$. Consequentemente, recorrer a congruência modular para resolver problemas exige uma experiencia mais aprofundada desse tema.

4.5 Desigualdade das médias

A média aritmética foi a presentada na seção 4.2 pela Definição 4.12 da página 48. No entanto, há mais três médias que apresentam-se com muita frequência como característica de lista de números, as quais definem-se a seguir.

Se a característica a ser considerada for o produto dos elementos da lista, obtém-se a **média geométrica (simples)** dos n números positivos $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ como o número positivo G tal que $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \ldots \cdot x_n = G \cdot G \cdot G \cdot ... \cdot G = G^n$. Dessa forma, segue a definição:

Definição 4.25 *A média Geométrica (simples) dos* n *números positivos* $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ *é definida por*

$$G = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \ldots \cdot x_n}$$

Agora, se a característica a ser observada for a soma dos inversos dos elementos da lista, obtém-se a média harmônica. A **média harmônica (simples)** dos n números positivos $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ é o número H tal que

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \ldots + \frac{1}{x_n} = \frac{1}{H} + \frac{1}{H} + \frac{1}{H} + \ldots + \frac{1}{H} = \frac{n}{H}.$$

Como consequência pode-se fazer a próxima definição:

Definição 4.26 *A média harmônica (simples) dos* n *números positivos* $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ *é definida por*

$$H = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \ldots + \frac{1}{x_n}}.$$

Por fim, se a raiz quadrada da média aritmética do quadrado dos números da lista for uma característica relevante, deve-se procurara a **média quadrática**. A média quadrática dos n números $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ é o número positivo Q tal que

$$Q^2 = \frac{{x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2 + \ldots + {x_n}^2}{n}.$$

Deste modo, pode-se definir a última média.

Definição 4.27 *A média quadrática dos números* $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ *é definida por*

$$Q = \sqrt{\frac{{x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2 + \ldots + {x_n}^2}{n}}.$$

De posse dessas definições, agora tem-se condições de abordar o assunto principal desta seção, que é apresentar a desigualdade entre as médias e mostrar que esta constitui-se de uma tática valiosíssima na solução de alguns problemas.

Teorema 4.28 (Desigualdade das médias) *Sejam* $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ *números reais positivos em ordem crescente e denominando de* A, G, H *e* Q *respectivamente as médias aritmética, geométrica, harmônica e quadrática desses números, são verdadeiras as desigualdades*

$$H \leq G \leq A \leq Q.$$

Além disso, só ocorrerá igualdade em qualquer ponto das desigualdades acima, se somente se, $x_1 = x_2 = x_3 = ... = x_n$, *isto é, só ha igualdade se todos os números da lista forem iguais.*

Demonstração:[Baseada em (MORGADO, 2015)] A prova aqui apresentada terá como base a demonstração feita pelo matemático francês Louis Cauchy (1789-1857). Primeiramente, prova-se que $A \geq G$ para $n = 2$. sendo $A(x_1, x_2)$ e $G(x_1, x_2)$, respectivamente, as médias aritméticas e geométricas dos números x_1 e x_2, tem-se

$$\begin{aligned} A(x_1, x_2) - G(x_1, x_2) &= \frac{x_1 + x_2}{2} - \sqrt{x_1 x_2} \\ &= \frac{x_1 + x_2 - 2\sqrt{x_1 x_2}}{2} \\ &= \frac{(\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2})^2}{2} \geq 0. \end{aligned}$$

e $A(x_1, x_2) = G(x_1, x_2)$ ocorrerá se $A(x_1, x_2) - G(x_1, x_2) = 0$ o que só acontece se $x_1 = x_2$. Este é o fim da demonstração para $n = 2$.

Para $n = 4$, tem-se $A(x_1, x_2, x_3, x_4)$ e $G(x_1, x_2, x_3, x_4)$ como suas respectivas médias aritmética e geométrica. Aplicando o resultado ja provado para $n = 2$ aos números $\frac{x_1 + x_2}{2}$ e $\frac{x_3 + x_4}{2}$, obtém-se

$$\frac{\frac{x_1 + x_2}{2} + \frac{x_3 + x_4}{2}}{2} \geq \sqrt{\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)\left(\frac{x_3 + x_4}{2}\right)},$$

isto é,

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4} \geq \sqrt{\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)\left(\frac{x_3 + x_4}{2}\right)}.$$

A igualdade só ocorrerá quando os números $\frac{x_1 + x_2}{2}$ e $\frac{x_3 + x_4}{2}$ forem iguais. Aplicando duas vezes a desigualdade no caso $n = 2$, primeiramente para x_1 e x_2, e posteriormente para x_3 e x_4, obtém-se

$$\sqrt{\frac{x_1 + x_2}{2} \cdot \frac{x_3 + x_4}{2}} \geq \sqrt{\sqrt{x_1 x_2}\sqrt{x_3 x_4}} = \sqrt[4]{x_1 x_2 x_3 x_4}$$

sendo que a igualdade so ocorre se $x_1 = x_2 = x_3 = x_4$. Conclui-se então que,

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4} \geq \sqrt[4]{x_1 x_2 x_3 x_4},$$

o que finaliza a prova para $n = 4$. Desse modo, pode-se provar, através da indução matemática (ver subseção 3.3.5), a desigualdade para qualquer $n = 2^k$ onde k é natural.

Agora, faz-se-á a prova para $n = 3$. Sejam x_1, x_2 e x_3 números positivos e sejam A e G, sua respectivas médias aritmética e geométrica. Não é difícil aceitar que

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3 + A}{4} = \frac{3A + A}{4} = A.$$

Aplicando a desigualdade das médias no caso $n = 4$ aos números x_1, x_2, x_3 e A, obtém-se

$$A = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + A}{4} \geq \sqrt[4]{x_1 x_2 x_3 A}.$$

Elevando ambos os lados à quarta potência,

$$A^4 \geq x_1 x_2 x_3 A,$$

daí segue que

$$\begin{aligned} A^4 \geq x_1x_2x_3A = A^3 \cdot A &\geq x_1x_2x_3 \cdot A \\ &\Rightarrow A^3 \geq x_1x_2x_3 \\ &\Rightarrow A \geq \sqrt[3]{x_1x_2x_3} = G. \end{aligned}$$

A igualdade só ocorre quando $x_1 = x_2 = x_3 = A$, isto é, quando $x_1 = x_2 = x_3$.

Para provar a desigualdade para cinco números positivos x_1, x_2, x_3, x_4 e x_5, basta aplicar a desigualdade aos 8 números x_1, x_2, x_3, x_4 e x_5, A, A e A, sendo que A é a média aritmética dos números x_1, x_2, x_3, x_4 e x_5. O mesmo raciocínio pode mostrar que, se a desigualdade é verdadeira para $n = k$, então ela é também verdadeira para todo $n < k$.

Feita a prova de $G \leq A$, utiliza-se esse resultado para provar que $H \leq G$. Sendo assim, tomando os números x_1, x_2 e x_3 e calculando as médias aritmética e geométrica dos inversos de x_1, x_2 e x_3, tem=se

$$\begin{aligned} A \geq G \Leftrightarrow \quad & \frac{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}}{3} \geq \sqrt[3]{\frac{1}{x_1} \cdot \frac{1}{x_2} \cdot \frac{1}{x_3}} \\ \Leftrightarrow \quad & \frac{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}}{3} \geq \frac{\sqrt[3]{1}}{\sqrt[3]{x_1x_2x_3}} \\ \Leftrightarrow \quad & \frac{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}}{3} \geq \frac{1}{\sqrt[3]{x_1x_2x_3}} \\ \Leftrightarrow \quad & \frac{1}{H} \geq \frac{1}{G} \\ \Leftrightarrow \quad & H \leq G. \end{aligned}$$

Só falta agora provar que $Q \geq A$. Para isso, considere a expressão

$$(x_1 - A)^2 + (x_2 - A)^2 + (x_3 - A)^2 \geq 0,$$

considerando também A como a média aritmética dos números x_1, x_2 e x_3, esta expressão é válida para quaisquer reais x_1, x_2 e x_3 onde a igualdade só ocorre quando $x_1 = x_2 = x_3 = A$. Com isso,

$$(x_1 - A)^2 + (x_2 - A)^2 + (x_3 - A)^2 \geq 0$$

desenvolvendo os quadrados é igual a

$$x_1{}^2 - 2x_1A + A^2 + x_2{}^2 - 2x_2A + A^2 + x_3{}^2 - 2x_3A + A^2 \geq 0.$$

Agrupando os termos comuns, somado os semelhantes e colocando $-2A$ em evidência, a expressão acima fica

$$x_1{}^2 + x_2{}^2 + x_3{}^2 - 2A(x_1 + x_2 + x_3) + 3A^2 \geq 0.$$

Pela definição média aritmética, pode-se substituir a soma $x_1 + x_2 + x_3$ por $3A$ que dá origem a expressão

$$x_1{}^2 + x_2{}^2 + x_3{}^2 - 2 \cdot 3A \cdot A + 3A^2 \geq 0$$

que é igual a

$$x_1{}^2 + x_2{}^2 + x_3{}^2 - 6A^2 + 3A^2 \geq 0.$$

Adicionando os termos semelhantes e o simétrico de $-3A^2$ tem-se

$$x_1{}^2 + x_2{}^2 + x_3{}^2 - 3A^2 \geq 0$$

e depois,

$$x_1{}^2 + x_2{}^2 + x_3{}^2 \geq 3A^2.$$

Dividindo os membros por 3

$$\frac{x_1{}^2 + x_2{}^2 + x_3{}^2}{3} \geq A^2$$

aplicando a raiz quadrada nos dois membros

$$\sqrt{\frac{x_1{}^2 + x_2{}^2 + x_3{}^2}{3}} \geq A.$$

Portanto, $Q \geq A$.

A prova das desigualdades $H \leq G$ e $A \leq Q$ foi feita apenas para $n = 3$, visto que esse mesmo argumento pode ser utilizado para fazer a prova para qualquer n natural.

Portanto, por transitividade, tem-se $H \leq G \leq A \leq Q$. ■

Apresenta-se em seguida um problema no qual o principal recurso para resolvê-lo foi a tática acima explorada.

Exemplo 4.29 (ZEITZ, 2007)

Se $a, b, c > 0$*, prove que*

$$(a^2b + b^2c + c^2a)(ab^2 + bc^2 + ca^2) \geq 9a^2b^2c^2.$$

Solução: Em uma primeira análise, pode-se partir para efetuar o produto do primeiro membro da igualdade. Todavia, isso nos traia uma expressão do tipo

$$a^3b^3 + b^3c^3 + c^3a^3 + a^4bc + b^4ac + c^4ab \geq 6a^2b^2c^2$$

que toma um caminho no mínimo estranho ao que se pretende.

Contudo, olhando com mais cuidado para a desigualdade inicial, é possível perceber que usando a tática da **fatoração** que foi utilizada pela primeira vez nestas notas no Exemplo 2.3 na página 17 envereda-se no caminho mais propício ao sucesso. Dessa forma, fatorando $(a^2b + b^2c + c^2a)(ab^2 + bc^2 + ca^2)$ e pondo abc em evidência, tem-se

$$(a^2b + b^2c + c^2a)(ab^2 + bc^2 + ca^2) = \left[abc\left(\frac{a}{c} + \frac{b}{a} + \frac{c}{b}\right)\right]\left[abc\left(\frac{b}{c} + \frac{c}{a} + \frac{a}{b}\right)\right]$$

multiplicando os fatores do último membro este passa a ser igual a

$$a^2b^2c^2\left(\frac{a}{c} + \frac{b}{a} + \frac{c}{b}\right)\left(\frac{b}{c} + \frac{c}{a} + \frac{a}{b}\right),$$

multiplicando cada um dos dois últimos fatores pelos inversos 3 e $\frac{1}{3}$, esta expressão é igual a

$$a^2b^2c^2 \cdot 3\left[\frac{1}{3}\left(\frac{a}{c} + \frac{b}{a} + \frac{c}{b}\right)\right] \cdot 3\left[\frac{1}{3}\left(\frac{b}{c} + \frac{c}{a} + \frac{a}{b}\right)\right].$$

Agora, aplicando a **desigualdade das médias aritmética e geométrica** aos dois últimos fatores desta expressão, a seguinte desigualdade é estabelecida

$$9a^2b^2c^2\left(\frac{\frac{a}{c} + \frac{b}{a} + \frac{c}{b}}{3}\right)\left(\frac{\frac{b}{c} + \frac{c}{a} + \frac{a}{b}}{3}\right) \geq 9a^2b^2c^2\sqrt[3]{\frac{a}{c} \cdot \frac{b}{a} \cdot \frac{c}{b}} \cdot \sqrt[3]{\frac{b}{c} \cdot \frac{c}{a} \cdot \frac{a}{b}}.$$

Mas

$$9a^2b^2c^2\sqrt[3]{\frac{a}{c} \cdot \frac{b}{a} \cdot \frac{c}{b}} \cdot \sqrt[3]{\frac{b}{c} \cdot \frac{c}{a} \cdot \frac{a}{b}} = 9a^2b^2c^2 \cdot 1 \cdot 1 = 9a^2b^2c^2,$$

portanto,

$$(a^2b + b^2c + c^2a)(ab^2 + bc^2 + ca^2) \geq 9a^2b^2c^2. \qquad \square$$

A desigualdade das médias ainda é um recurso pouco explorado por resolvedores iniciantes, embora pareça um pouco contraditório visto que, para LIMA (1991), esta está entre os resultados mais demonstrado no meio matemático. Portanto, conhecer estas desigualdades e desenvolver as habilidades para utilizá-las quando estiver em ação tornou-se um pré-requisito para o pleno desenvolvimento do resolvedor.

Considerando o exposto neste capítulo, convém salientar que as táticas apresentadas não constituem todas as possibilidades de atuação neste nível da resolução de problemas. Ainda há muito a ser explorado! No entanto, o que foi apresentado aqui tem como objetivo apresentar as táticas como os métodos matemáticos que permitirão a superação de obstáculos que se apresentem durante a resolução de um problema como é o caso da **simetria**, do **princípio das casas de pombos**, das **desigualdades das médias** e outras.

Um outro aspecto interessante deste capítulo é o fato das seções e dos exemplos estabelecerem com muita clareza a diferença entre tática e estratégia na perspectiva dos níveis da resolução de problemas abordados neste texto. Por vezes, esses níveis são confundidos por resolvedores inexperientes.

Nesse contexto, pode-se acrescentar aos conceitos de estratégias e táticas da Seção 2.3 da página 17, sendo a primeira considerada como o caminho escolhido para chegar à solução e a segunda, como os meios utilizados para superar certos obstáculos encontrados durante a caminhada.

5 APLICAÇÕES

Após a apresentação da resolução de problemas a partir da perspectiva dos três níveis, a saber: **as estratégias**, **as táticas** e **as ferramentas**; esta parte dedica-se a expor soluções de problemas partindo da ótica desses níveis. Ou seja, as soluções dos problemas propostos neste capítulo serão construídas aplicando, principalmente, as estratégias e táticas aqui abordadas.

Diante disso, no texto das soluções serão evidenciados quais estratégias, táticas e ferramentas foram usadas com seu destaque em negrito para as **estratégias**, itálico para as *táticas* e sublinhado para as <u>ferramentas</u> com o objetivo de deixar claro o nível em que se está operando na solução do problema proposto.

Para as aplicações proporcionarem um entendimento mais claro é necessário a apresentação de algumas definições, as quais são:

Definição 5.1 *Define-se n-ésima* ***potência*** *de um* $k \in \mathbb{R}$*, denota-se* k^n*, o número real obtido multiplicando* k *por ele mesmo* n *vezes.*

São exemplos de potências:

$$n = 1 \Rightarrow k^n = k$$

$$n = 2 \Rightarrow k^n = k \cdot k = k^2$$

$$n = 10 \Rightarrow k^n = \underbrace{k \cdot \cdots \cdot k}_{10 \quad \text{fatores}} = k^{10}$$

$$n = m \Rightarrow k^n = \underbrace{k \cdot \cdots \cdot k}_{m \quad \text{fatores}} = k^m.$$

Definição 5.2 *Define-se* ***logaritmo de*** a ***na base*** b *e denota-se* $\log_b a$ *o número real* x *tal que* $b^x = a$*, com* $a, b \in \mathbb{R}$*,* $a \neq 1 > 0$ *e* $b > 0$*.*

São exemplos de logaritmos

$$3 = \log_2 8 \Leftrightarrow 2^3 = 8$$

$$4 = \log_5 625 \Leftrightarrow 5^4 = 625$$

$$10 = \log_2 1024 \Leftrightarrow 2^{10} = 1024$$

$$z = \log_m y \Leftrightarrow m^z = y.$$

Definição 5.3 (MUNIZ NETO, 2015, p. 23) *Define-se como **parte inteira** de um número real x como o maior inteiro menor ou igual a x e denota-se $\lfloor x \rfloor$. São exemplos,* $\lfloor \pi \rfloor = 3$, $\lfloor -\frac{3}{2} \rfloor = -2$ *e* $\lfloor 4 \rfloor = 4$.

Aplicação 5.4 *Encontre o inteiro positivo n para o qual*

$$\lfloor \log_2 1 \rfloor + \lfloor \log_2 2 \rfloor + \lfloor \log_2 3 \rfloor + ... + \lfloor \log_2 n \rfloor = 2018.$$

Solução: Inicialmente calcula-se os primeiros valores de $\lfloor \log_2 i \rfloor$, com $i = 1, 2, ..., n$ obtendo os seguintes resultados:

$$\lfloor \log_2 1 \rfloor = 0$$

$$\lfloor \log_2 2 \rfloor = 1, \quad \lfloor \log_2 3 \rfloor = 1.$$

$$\lfloor \log_2 4 \rfloor = 2, \quad \lfloor \log_2 5 \rfloor = 2, \quad \lfloor \log_2 6 \rfloor = 2, \quad \lfloor \log_2 7 \rfloor = 2.$$

$$\lfloor \log_2 8 \rfloor = 3, \quad \lfloor \log_2 9 \rfloor = 3, \quad \lfloor \log_2 10 \rfloor = 3, \quad \lfloor \log_2 11 \rfloor = 3...$$

O valor de cada parcela da equação aparece em números que são potências de 2. Isto é, o 0 aparece uma vez, ou seja, $2^0 = 1$, o 1, $2^1 = 2$ vezes, o 2, $2^2 = 4$ vezes, o 3, $2^3 = 8$ vezes e assim por diante.

Baseados nessa **experimentação**, pode-se reescrever a equação do enunciado da seguinte forma:

$$0 + 1 + 1 + 2 + 2 + 2 + 2 + 3 + ... + 3 + 4 + ... + 8 + ... + \lfloor \log_2 n \rfloor = 2018 \tag{5.1}$$

. Sendo que o valor de cada parcela aparece em números que são potências de 2, pode-se obter, a partir da ferramenta da <u>substituição</u> dos valores pelo produto adequado, a equação

$$0 + 2^1 \cdot 1 + 2^2 \cdot 2 + 2^3 \cdot 3 + 2^4 \cdot 4 + 2^5 \cdot 5 + 2^6 \cdot 6 + 2^7 \cdot 7 + 8 + ... + \lfloor \log_2 n \rfloor = 2018 \tag{5.2}$$

. De onde segue que

$$0 + 2^1 \cdot 1 + 2^2 \cdot 2 + 2^3 \cdot 3 + 2^4 \cdot 4 + 2^5 \cdot 5 + 2^6 \cdot 6 + 2^7 \cdot 7 = 1538. \tag{5.3}$$

sendo que, a equação 5.3 representa a soma

$$\lfloor \log_2 1 \rfloor + \lfloor \log_2 2 \rfloor + \lfloor \log_2 3 \rfloor + ... + \lfloor \log_2 255 \rfloor = 15388.$$

visto que, $\lfloor \log_2 256 \rfloor = 8$.

Agora, <u>substituindo</u> o primeiro membro pelo segundo da equação 5.3 na equação 5.2, passa-se a ter

$$1538 + 8 + ... + \lfloor \log_2 n \rfloor = 2018 \tag{5.4}$$

.

Sabe-se, no entanto, que há 256 parcelas $\lfloor \log_2 i \rfloor = 8$ com $i = 256, 257, ..., 511.$ Mas $2^8 \cdot 8 = 256 \cdot 8 = 2048$ que somado a 1538 ultrapassa 2018. Isto faz com que $\lfloor \log_2 n \rfloor = 8$. Consequentemente, o n procurado está no conjunto $\{256, 257, ..., 511.\}$. E, para encontrá-lo, deve-se seguir os seguintes passos:

Adicionar o *simétricos* de 1538 na equação 5.4

$$1538 - 1538 + 8 + ... + \lfloor \log_2 n \rfloor = 2018 - 1538$$

de onde segue que

$$8 + ... + \lfloor \log_2 n \rfloor = 480.$$

Como $\lfloor \log_2 n \rfloor = 8$ e $480 = 8 \cdot 60$ conclui-se que, na equação $8 + ... + \lfloor \log_2 n \rfloor = 480.$ há 60 parcelas iguais a 8.

Portanto, $\lfloor \log_2 n \rfloor = 255 + 60 = 315$ □

Aplicação 5.5 (GARDNER, 1998) *"Ouço uma meninada brincando no quintal", diz Jones, um estudante de Matemática. "São todos seus filhos?"*

"Credo, não", exclama o professor Smith, eminente teórico dos números. "Os meus filhos estão brincando com os meninos de três outras famílias vizinhas, embora, na verdade, a nossa seja a maior. Os Brown têm menor número de filhos, os Green menos ainda e os Black menos de todos"

"Quantas crianças são ao todo?", perguntou Jones

"Deduza você: São menos que 18 *e o produto dos números das quatro famílias é igual ao número da minha casa, que você conhece."*

Jones tirou do bolso papel e lápis e começou a rabiscar. Pouco depois ele ergueu os olhos e disse: "Preciso de mais um dado. Há mais de uma criança na família Black?"

Imediatamente após a resposta de Smith, Jones sorriu e deu o número certo de crianças de cada família. Que números são esses?

Solução: A primeira estratégia é a **orientação**, isto é, fazer uma análise no enunciado e verificar quais informações foram utilizadas para conduzir a solução. Sendo assim, percebe-se que, Jones sabia de início, que as quatro famílias tinham todas números diferentes de filhos e que o total era menor do que 18. Soube mais que o produto dos quatro números era igual ao número da casa do professor.

É evidente, então que o primeiro passo seja *fatorar* o número da casa em quatro números diferentes que desse um total menor do que 18. Se a solução fosse unívoca ele teria imediatamente a solução do problema. Como ele não o tivesse resolvido sem solicitar mais informações, concluí-se deve ter havido mais de um modo de fatorar o número da casa.

Isto leva a necessidade de empregar uma outra estratégia. Deve-se, nesse momento, **por as mãos na massa** e anotar todas as possíveis combinações de quatro números diferentes com total menor do que 18 e efetuar os produtos de cada grupo.

Tabela 5.1 – Possíveis combinações de quatro números diferentes com total menor do que 18

$1\cdot2\cdot3\cdot4=24$	$1\cdot2\cdot3\cdot5=30$	$1\cdot2\cdot3\cdot6=36$	$1\cdot2\cdot3\cdot7=42$
$1\cdot2\cdot3\cdot8=48$	$1\cdot2\cdot3\cdot9=54$	$1\cdot2\cdot3\cdot10=60$	$1\cdot2\cdot3\cdot11=66$
$1\cdot2\cdot4\cdot5=40$	$1\cdot2\cdot4\cdot6=48$	$1\cdot2\cdot4\cdot7=56$	$1\cdot2\cdot4\cdot8=64$
$1\cdot2\cdot4\cdot9=72$	$1\cdot2\cdot4\cdot10=80$	$1\cdot2\cdot5\cdot6=60$	$1\cdot2\cdot5\cdot7=70$
$1\cdot2\cdot5\cdot8=80$	$1\cdot2\cdot5\cdot9=90$	$1\cdot2\cdot6\cdot7=84$	$1\cdot2\cdot6\cdot8=96$
$1\cdot3\cdot4\cdot5=60$	$1\cdot3\cdot4\cdot6=72$	$1\cdot3\cdot4\cdot7=84$	$1\cdot3\cdot4\cdot8=96$
$1\cdot3\cdot4\cdot9=108$	$1\cdot3\cdot5\cdot6=90$	$1\cdot3\cdot5\cdot7=105$	$1\cdot3\cdot5\cdot8=120$
$1\cdot3\cdot6\cdot7=126$	$1\cdot4\cdot5\cdot6=120$	$1\cdot4\cdot5\cdot7=140$	$2\cdot3\cdot4\cdot5=120$
$2\cdot3\cdot4\cdot6=144$	$2\cdot3\cdot4\cdot7=168$	$2\cdot3\cdot4\cdot8=192$	$2\cdot3\cdot5\cdot6=180$
$2\cdot3\cdot5\cdot7=210$	$2\cdot4\cdot5\cdot6=240$	–	–

Fonte: Próprio autor

Verifica-se que há vários casos em que mais de uma combinação dá o mesmo produto. Como decidir qual o número casa?

Mais uma vez recorrendo ao enunciado, encontra-se a resposta no fato de Jones ter perguntado se havia mais de uma criança na família menor. Essa pergunta só tem sentido se o número da casa for 120, pois todas as outras possíveis combinações que tiveram produto repetido contava com o número 1.

Agora, observando que 120 pode ser fatorado como $1\cdot3\cdot5\cdot8$, $1\cdot4\cdot5\cdot6$, ou $2\cdot3\cdot4\cdot5$. Se Smith tivesse respondido não, o problema seria insolúvel. Como Jones o resolveu, sabe-se que a resposta foi sim. Portanto, as famílias eram compostas de dois, três, quatro e cinco filhos. □

Esse problema tem um diferencial em relação aos demais. Ele busca descobrir como Jones o resolveu, isto é, sabe-se que é possível solucioná-lo e tenta-se repetir o raciocínio do resolvedor. Para isso, duas estratégias foram adotadas, a saber, a **orientação** e **por as mãos na massa** sendo necessário trabalhar arduamente utilizando sempre as ferramentas de somar e multiplicar.

Aplicação 5.6 *Seja $n \geq 3$ um inteiro dado. prove que em todo n-ágono (aqui entendido como um polígono de n lados) convexo, o comprimento de cada lado é menor do que a soma dos comprimentos dos $n-1$ lados restantes.*

Solução: Recorrendo a estratégia da **orientação**, pode-se levantar alguns aspectos interessantes do problema: Primeiro ele quer a prova de que uma certa característica está presente em todos os polígonos convexos não importando o número de lados; Segundo, ele envolve números inteiros.

Sem dúvidas esse é um problema de geometria. Mas o fato dessa propriedade valer para qualquer número natural maior do que ou igual a 3 trás uma complicação para a solução, pois deve-se adotar uma estratégia capaz de relacionar esses dois aspectos.

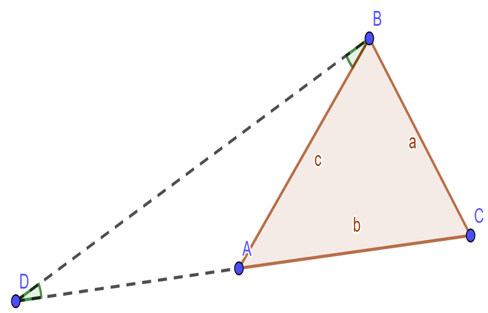
Voltando ao enunciado, descobre-se que este sugere a existência de uma propriedade que vale para todo inteiro $n \geq 3$. Logo, a **indução matemática**, da Seção 3.3.5 da página 33, parece uma boa estratégia de argumentação. Isso porém, apresenta um obstáculo: Como mostrar o caso base e o passo indutivo, isto é, mostrar que se essa propriedade valer para n ela também vale para $n+1$, sendo esse problema de geometria?

Novamente no enunciado encontra-se a resposta, isto é, o fato de n ser maior do que ou igual a 3 é bastante sugestivo no que se refere a polígonos convexos, pois o triângulo é o menor deles em número de lados. Neste caso, A solução recorrerá à indução sobre n e a verificação da validade da propriedade para o triângulo será o caso base.

Vamos à indução: Seja $P(n)$: Em todo n-ágono convexo, o comprimento de cada lado é menor do que a soma dos comprimentos dos $n-1$ lados restantes uma propriedade do númeno inteiro $n \geq 3$.

Vejamos de $P(3)$ é verdadeira. Para isso, deve-se lembrar que seja ABC um triângulo tal que $\widehat{B} > \widehat{C}$, então $|\overline{AC}| > |\overline{AB}|$, cuja a demonstração pode ser encontrada em MUNIZ NETO (2013, p. 46). Exposto isso e considerando que, em ABC, $|\overline{AB}| = c$, $|\overline{AC}| = b$ e $|\overline{BC}| = a$. Mostremos que $a < b + c$. Marque o ponto D sobre a semirreta $\overrightarrow{CA}$ tal que $A \in \overline{CD}$ e $|\overline{AD}| = |\overline{AB}|$.

Figura 5.1 – Triângulo BCD tal que $a < b + c$.



Fonte: Próprio autor.

Uma vez que

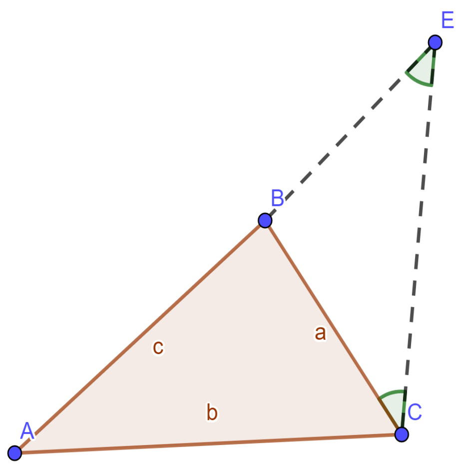
$$|\overline{CD}| = |\overline{AC}| + |\overline{AD}| = |\overline{AC}| + |\overline{AB}| = b + c;$$

pela afirmação feita no início do parágrafo, é suficiente mostrarmos que $B\widehat{D}C < D\widehat{B}C$. Mas, desde que $B\widehat{D}A = D\widehat{B}A$, basta observarmos que

$$B\widehat{D}C = B\widehat{D}A = D\widehat{B}A < D\widehat{B}A + A\widehat{B}C = D\widehat{B}C.$$

Analogamente, para mostrar que $b < c + a$ marque o ponto E sobre a semirreta $\overrightarrow{AB}$ tal que $B \in \overline{AE}$ e $|\overline{BE}| = |\overline{BC}|$.

Figura 5.2 – Triângulo AEC tal que $b < c + a$.



Fonte: Próprio autor.

Uma vez que

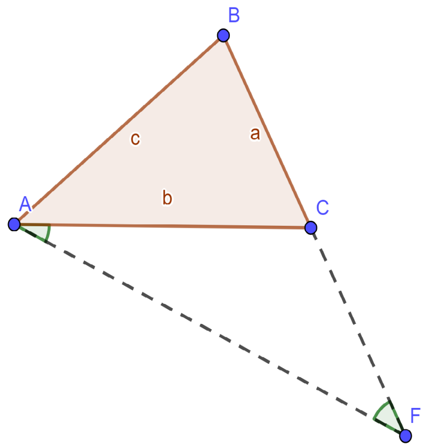
$$|\overline{AE}| = |\overline{AB}| + |\overline{BE}| = |\overline{AB}| + |\overline{BC}| = c + a;$$

semelhantemente, resolve-se esse caso quando mostrar-se que $B\widehat{E}C < E\widehat{C}A$. Mas, desde que $B\widehat{E}C = E\widehat{C}B$, basta observar que

$$B\widehat{E}C = A\widehat{E}C = B\widehat{C}E < B\widehat{C}E + B\widehat{C}A = E\widehat{C}A.$$

De igual forma, para mostrar que $c < a + b$ marque o ponto F sobre a semirreta $\overrightarrow{BC}$ tal que $C \in \overline{BF}$ e $|\overline{CF}| = |\overline{CA}|$.

Figura 5.3 – Triângulo ABF tal que $c < a + b$.



Fonte:Próprio autor.

Uma vez que

$$|\overline{BF}| = |\overline{BC}| + |\overline{CF}| = |\overline{BC}| + |\overline{CA}| = a + b;$$

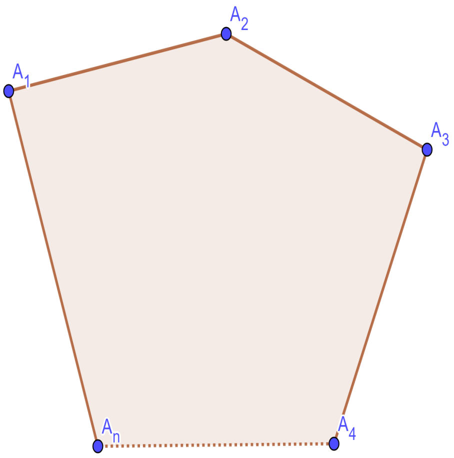
como nos casos anteriores, basta mostrarmos que $C\widehat{F}A < F\widehat{A}B$. Mas, desde que $C\widehat{F}A = F\widehat{A}C$, basta observarmos que

$$C\widehat{F}A = B\widehat{F}A = C\widehat{A}F < C\widehat{A}F + C\widehat{A}B = F\widehat{A}B.$$

Logo, como $a < b + c$, $b < c + a$ e $c < a + c$, temos que $P(3)$ é verdadeira.

Suponha, agora, que $P(n)$ é verdadeira para algum $n \geq 3$, deve-se mostrar agora que que a propriedade também é verdadeira para $n + 1$. Sendo assim, seja o n-ágono $A_1A_2A_3...A_n$ conforme figura abaixo

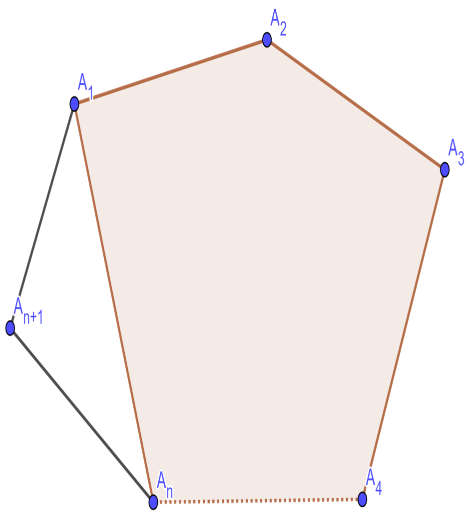
Figura 5.4 – n-ágono.



Fonte: Próprio autor.

Para mostrar que a propriedade é válida para um polígono de $n+1$ executa-se a tática **de tomar um ponto A_{n+1} exterior ao polígono dado**.

Figura 5.5 – n+1-ágono.



Fonte: Próprio autor.

Dessa forma, os segmentos $\overline{A_nA_{n+1}}$, $\overline{A_{n+1}A_1}$ e $\overline{A_nA_1}$ formam o triângulo $A_1A_nA_{n+1}$ e pelo caso base, nenhum deles é maior do que a soma dos outros dois. E como, pela hipótese de indução,a medida do segmento $\overline{A_nA_1}$ é menor do que a soma

$$|\overline{A_1A_2}| + |\overline{A_2A_3}| + ... + |\overline{A_2A_3}|,$$

temos que a propriedade é válida para $n+1$.

Portanto, pelo princípio da indução matemática, em todo n-ágono convexo, o comprimento de cada lado é menor do que a soma dos comprimentos dos $n-1$ lados restantes é uma propriedade válida para todo número inteiro $n \geq 3$. □

A aplicação seguinte é um problema que envolve áreas de polígonos convexos. Segundo Muniz Neto (2013), para que qualquer conceito de área para polígonos tenha utilidade, é preciso considerar como postulados as seguintes propriedades:

1. Polígonos congruentes (um deles pode ser deslocado no espaço, sem deformá- lo, até coincidir com o outro) têm áreas iguais.

2. Se um polígono convexo é particionado em um número finito de outros polígonos convexos (i.e., se o polígono é a união de um número finito de outros polígonos convexos, os quais não têm pontos interiores comuns), então a área do polígono maior é a soma das áreas dos polígonos menores.

3. Se um polígono (maior) contém outro (menor) em seu interior, então a área do polígono maior é maior que a área do polígono menor.

4. A área de um quadrado de lado $1cm$ é igual a $1cm^2$.

Seja ABC um triângulo de lados $|\overline{BC}| = a$, $|\overline{AC}| = b$, $|\overline{AB}| = c$ e alturas (entendida como um segmento cuja uma extremidade está um vértice do triângulo e o outro encontra-se no lado oposto a este, formando, assim, com o referido lado um ângulo reto) h_a; h_b; h_c respectivamente relativas aos lados a; b; c. Ao relacionar os lados e suas alturas relativas pode-se dizer que o lado é a base e a altura relativa é a altura do triângulo. Neste caso a área de ABC e, denotada por $S(ABC)$ é dada por:

$$\frac{base \cdot altura}{2}$$

cuja demonstração encontra-se em (MUNIZ NETO, 2013, p. 184).

Três definições também são necessárias, a saber, a de reta perpendicular, a de distância de um ponto a uma reta e a de somatório, as quais são:

Definição 5.7 *Seja uma reta* r *e um ponto* $P \notin r$ *e seja* P' *o pé da perpendicular a* r *que passa por* P. *Define-se como distância de* P *a* r *o segmento* $\overline{PP'}$.

Definição 5.8 *Dada uma sequência* $(x_k)_{k\geq 1}$ *escreve-se* $\sum_{i=1}^{n} x_i$ *para denotar a soma* $x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n$, *e lê-se somatório dos* x_i, *para* $1 \leq i \leq n$.

Feitas as devidas apresentações e definições, segue a aplicação:

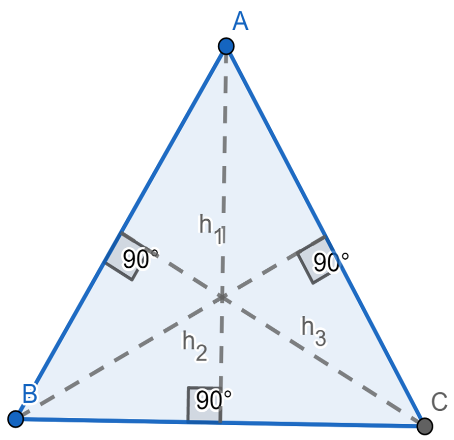
Aplicação 5.9 (MUNIZ NETO, 2013) *Mostre que, se* P *for um ponto no interior de polígono regular* $A_1A_2...A_n$*, então a soma das distâncias de* P *às retas suportes dos lados de* $A_1A_2...A_n$ *independe da posição de* P*.*

Solução: A partir da **orientação** observa-se que o problema fala de polígonos regulares e o triângulo equilátero é o menor deles, o que pode indicar os *extremos* como uma tática a se considerar. Contudo, **transformá-lo em um problema mais fácil** levará a um progresso mais rápido. Ou seja, resolve-se o problema para o caso do triângulo equilátero e, a partir deste, generaliza-se para um polígono com n lados iguais.

Para fazer o que foi proposto no parágrafo anterior, recorre-se como tática *a aplicação dos conceitos de área.* Para isso, seja ABC um triângulo equilátero, chamando de a o comprimento de seus lados e de S a sua área. utilizando $\dfrac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2}$ como a fórmula para calcular a área do triângulo, tem-se

$$S(ABC) = \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2} = S.$$

Figura 5.6 – Triângulo equilátero ABC de lado a.



Fonte: Próprio autor.

Sabe-se no entanto, que não importa qual a base e a altura relativa considerada na fórmula $\dfrac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2}$, a área do triângulo não muda.

Desse modo, utilizando como ferramenta a equação para a área do triângulo e considerando: $\overline{BC}$ como base e h_1 sua altura relativa, segue que

$$\frac{\overline{BC} \cdot h_1}{2} = S \Leftrightarrow \frac{a \cdot h_1}{2} = S \Leftrightarrow h_1 = \frac{2S}{a};$$

$\overline{AC}$ como base e h_2 sua altura relativa, segue que

$$\frac{\overline{AC} \cdot h_2}{2} = S \Leftrightarrow \frac{a \cdot h_2}{2} = S \Leftrightarrow h_2 = \frac{2S}{a};$$

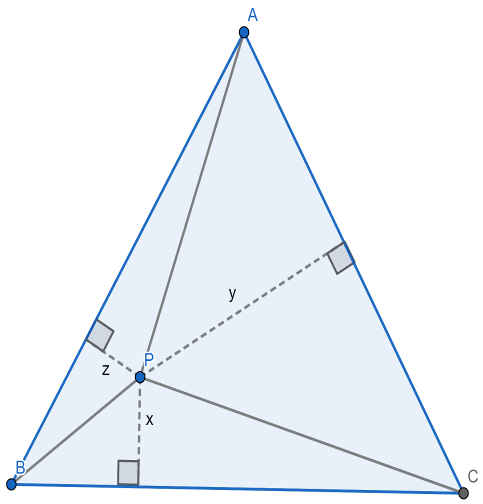
$\overline{AB}$ como base e h_3 sua altura relativa, segue que

$$\frac{\overline{AB}\cdot h_3}{2} = S \Leftrightarrow \frac{a\cdot h_1}{2} = S \Leftrightarrow h_3 = \frac{2S}{a}.$$

Logo, $h_1 = h_2 = h_3$, as três alturas de ABC têm comprimentos iguais.

Agora, seja P um ponto no interior de ABC e sejam x, y e z, respectivamente, as distâncias de P aos lados $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ e $\overline{AB}$.

Figura 5.7 – O ponto P no interior do triângulo equilátero ABC.



Fonte: Próprio autor.

A ferramenta desta vez é a igualdade

$$S(ABC) = S(BCP) + S(ACP) + S(ABP)$$

a qual implica que

$$S = \frac{a\cdot x}{2} + \frac{a\cdot y}{2} + \frac{a\cdot z}{2} = \frac{a(x+y+z)}{2}.$$

Consequentemente,

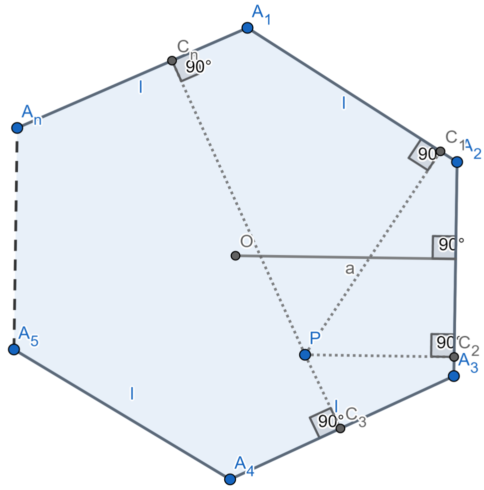
$$x+y+z = \frac{2S}{a}.$$

Isto é, a soma das distâncias de um ponto escolhido no interior de ABC a seus lados independe da posição do ponto e é igual ao comprimento da alturas de ABC.

Com isso, resolve-se o problema mais fácil e para mostrar que o resultado também vale para um polígono regula de n lados a tática será a mesma acrescida de *considerar a distância do centro do polígono aos seus lados.* Logo, seja o polígono regular $A_1A_2...A_n$ e sejam O o seu centro, ℓ, o comprimento do lado e d a distância comum do centro O aos lados e P um ponto qualquer no interior de $A_1A_2...A_n$.

Seja, ainda, C_i o pé da perpendicular baixada de P à reta $\overleftrightarrow{A_iA_{i+1}}$ sendo que $A_{n+1} = A_1$.

Figura 5.8 – Polígono regular de n lados.



Fonte: Próprio autor.

A partir das igualdades

$$\sum_{i=1}^{n} S(OA_iA_{i+1}) = S(A_1A_2...A_n) = \sum_{i=1}^{n} S(PA_iA_{i+1})$$

pode-se obter

$$\underbrace{\frac{d\cdot\ell}{2}+\cdots+\frac{d\cdot\ell}{2}}_{n \quad parcelas} = n\cdot\frac{d\cdot\ell}{2} = \frac{\overline{PC_1}\cdot\ell}{2}+\frac{\overline{PC_2}\cdot\ell}{2}+\cdots+\frac{\overline{PC_n}\cdot\ell}{2} = \frac{\ell\cdot(\overline{PC_1}+\overline{PC_2}+\cdots+\overline{PC_n})}{2}.$$

Mas,

$$n\cdot\frac{d\cdot\ell}{2} = \frac{\ell\cdot(\overline{PC_1}+\overline{PC_2}+\cdots+\overline{PC_n})}{2} \Rightarrow \overline{PC_1}+\overline{PC_2}+\cdots+\overline{PC_n} = n\cdot d.$$

Portanto, a soma das distâncias de um P qualquer às retas suportes dos lados de $A_1A_2...A_n$ não depende de P, pois é igual a n vezes a distância comum do centro de $A_1A_2...A_n$ aos seus lados. □

Aplicação 5.10 (ZEITZ, 2007) *Temos n > 1 pessoas num descampado. Todas estão participando de uma brincadeira em que jogarão baldes de tinta nos outros. A regra é que cada pessoa jogará seu balde de tinta no participante mais próximo de si (excluindo a si mesma!). Mostre que, se n for ímpar e todas as distâncias entre as pessoas são distintas, então pelo menos um participante sairá limpo do jogo.*

Solução:[baseada na solução apresentada pelo professor Roberto Imbuzeiro cuja referência encontra-se na seção 4.3] Assim como na maioria dos problemas, a **orientação** deve ser a primeira estratégia a ser aplicada aqui, visto que entender o problema é indispensável para definir a abordagem mais adequada. partindo dessa estratégia, destaca-se os seguintes pontos:

1. Há mais de duas pessoas na brincadeira, já que o problema sugere número ímpar de participantes;

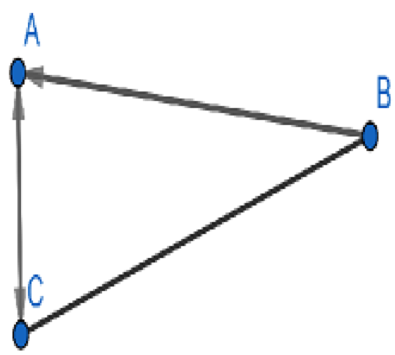
2. Todos jogarão a tinta nos participantes mais próximos;

3. As distâncias são distintas umas das outras;

4. Sempre sairá pelo menos um participante que ninguém jogou tinta.

Para obter mais informações, é fazer **experimentações para 3 e para 5 participantes** e analisar as indicações que estas experimentações fazem. E para que essa análise seja facilitada **faz-se um desenho** dessas experimentações. Diante disso, tem-se

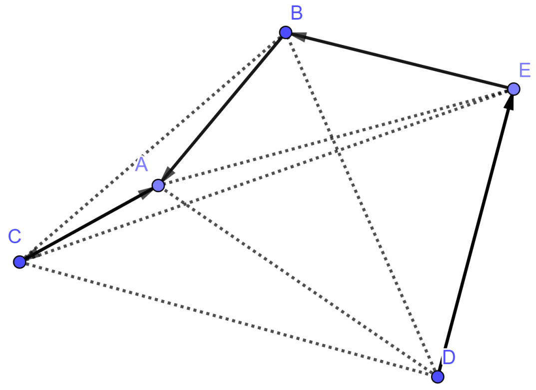
Figura 5.9 – Brincadeira com três participantes.



Fonte: Próprio autor.

no jogo com três participantes, isto é, A, B, e C, os participantes A e C, por estarem mais próximos entre si do que de B, se sujam mutualmente e B suja o mais próximo, neste caso, o participante A e fica limpo.

Figura 5.10 – Brincadeira com cinco participantes.



Fonte: Próprio autor.

No caso com cinco participantes, a saber, A, B, C, D e E a distâncias entre A e C é a menor de todas, logo eles se sujam. Depois disto, A está mais próximo de B e este o mais próximo de E que está mais perto de D, o que faz com que B, suje A, E suje B, D suje E e ninguém suje D, que sai limpo.

A partir das indicações dessas experimentações, nota-se que há claramente a ideia de extremos como a menor e a maior distância. Sendo assim, passa-se a aplicar a tática dos *extremos*. Pela característica da brincadeira, de todas as distâncias serem distintas, haverá sempre um participante cuja a maior distância para os demais é a maior. Com isso, o foco estará somente na *maior entre as menores distâncias*, pois, como visto nos casos com 3 e 5 participantes, os jogadores com a menor distância sempre sujam-se mutualmente, o que leva a conjecturar que o participante cuja a menor distância para os demais é a maior, sempre sairá limpo.

Esta conjectura pode ser comprovada utilizando o método de argumentação **indução completa** conforme Teorema 3.20 da página 36. O qual pode ser feito da seguinte forma:

Tomando $n = 2k + 1$, prova-se o resultado por indução em k,

Seja $P(k)$: um jogo conforme o descrito no enunciado do problema no qual n é da forma $2k + 1$ e todas as distâncias entre as pessoas são distintas, então pelo menos um participante sairá limpo do jogo, uma propriedade do número natural.

Tem-se que para $k = 1$, como visto na experimentação para 3 participantes, os dois jogadores mais próximos se atacam mutuamente e o jogador restante sai limpo do jogo, $P(K)$ é verdadeira.

Para $k > 1$ e um jogo com $2k + 1$ jogadores. Suponha que todas as propriedades $P(1)$, $P(2)$, $P(3)$, ..., $P(k-2)$, $P(k-1)$ são verdadeiras. Isto é, suponha que todos os jogos com menos jogadores do que $2k + 1$, sempre tem um que saia limpo. Novamente, os dois jogadores mais próximos (que chamaremos de A e B) se atacam mutuamente. A tática para o passo indutivo é *tirar esses dois jogadores mais próximos*, por meio da ferramenta de subtrair, o que faz o jogo ter exatamente $2(k - 1) + 1$ participantes. Pela hipótese de indução, algum dos jogadores do jogo "menor" sai limpo, o qual pode ser chamado de L. Agora ao adicionar de volta A e B ao jogo. Ao fazer isso, pode ser que algum jogador C "mude de ideia sobre quem atacar". No entanto, isso só pode ocorrer quando C atacava um certo D, mas um dentre A e B está ainda mais perto que D. Ou seja, quem "muda de ideia" passa a atacar A ou B e não L. Deduzimos que L continua limpo: afinal, nem A nem B o atacam, nem qualquer C restante. Isto prova que, pelo princípio da indução completa, $P(k)$ é verdadeiro para todo k natural.

Portanto, para um número ímpar de participantes no jogo descrito no enunciado, há sempre um que sai limpo. $\square$

Para solucionar este problema, a primeira estratégia foi a **orientação**, através da qual pode-se compreender vários pontos importantes do enunciado. Todavia, não foi só através da observação direta que a **orientação** ocorreu, foi necessário aplicar a estratégia da **experimentação** para levantar mais informações.

A apresentação das experimentações recorreu à estratégia de **representar graficamente**, possibilitando a visualização dos experimentos e do comportamento dos jogadores. Estas observações permitiram que os esforços se voltasse para os *extremos*, sendo o foco no extremo *a maior entre as menores distâncias* a tática utilizada para formular a conjectura que foi provada pela **indução completa** sendo que para o passo indutivo, as ferramentas de subtrair e adicionar os jogadores mais próximos foram decisivas.

A tabela a seguir apresenta os níveis pelos quais se deu a solução da problema dos baldes de tintas.

Tabela 5.2 – Níveis de atuação no problema principal.

Nível	Descrição
Estratégias	orientação, experimentação, fazer um desenho, indução completa
Táticas	focar no extremo "a maior entre as menores distâncias"
Ferramentas	subtrair e adicionar os participantes mais próximos

Fonte: Próprio autor.

Como última observação, destaca-se que na atuação no nível das táticas formulou-se uma conjectura e, prová-la transformou-se em um problema secundário que exigiu uma atuação específica no nível da estratégia. A qual foi **orientar-se** e definir a **indução completa** como método de argumentação, sendo as ferramentas de subtrair e logo depois adicionar os participantes mais próximos muito útil no passo indutivo. Contudo, não se deve esquecer que, tanto a formulação quanto a prova da conjectura compõe a solução do problema principal, sendo, portanto, uma consequência da atuação no nível das táticas, pelo menos neste caso.

A aplicação seguinte estabelece um novo critério de divisibilidade por 6.

Aplicação 5.11 *Mostre que, na base 10, um número é divisível por 6 se, e só se, o algarismo das unidades somado com o quadruplo de cada um dos outros algarismos é divisível por 6.*

Solução: Este problema é mais um ótimo exemplo que a **orientação** deve ser a primeira estratégia abordada, pois ele trás, no seu enunciado, um elemento que ainda não foi abordado nessas notas, a saber, a representação dos números inteiros na base 10. Para conhecer um pouco sobre esse sistema, vejamos algumas considerações:

> No sistema decimal, todo número inteiro é representado por uma sequência formada pelos algarismos $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ acrescidos do simbolo 0 (zero) que representa a ausência de algarismos. Por serem dez os algarismos o sistema é chamado de decimal. O sistema é também chamado posicional, pois cada algarismo, além do seu valor intrínseco, possui um peso que lhe é atribuído em função da posição que ele ocupa no número. Esse peso sempre é uma potência de dez. (HEFEZ, 2016 p. 58).

Baseado em Hefez o número 15345, na base 10, é a representação de

$$1 \cdot 10^4 + 5 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10 + 5.$$

Agora estamos prontos para começarmos a considerar o nosso problema.

O **pensamento positivo** é uma boa abordagem neste momento, ou seja, deve-se considerar o problema como possível de ser resolvido, e isso é fato para alguns casos a partir da *experimentação.* Como são os casos de 210 e 96, pois

$$6 \cdot 35 = 210 \Leftrightarrow 0 + 4 \cdot 2 + 4 \cdot 1 = 12 = 2 \cdot 6$$

e

$$6 \cdot 16 = 96 \Leftrightarrow 6 + 4 \cdot 9 = 42 = 7 \cdot 6.$$

Um dos pontos chaves desse problema é encontrar uma representação numérica que possibilite a prova do que foi *experimentado* para um caso geral, resolvendo, assim, o problema.

Nesse caso, para generalizar, considera-se o números a tal que, na base 10,

$$a = a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + ... + a_1 10^1 + a_0 10^0$$

e *estabelece-se um* b *que seja a soma do algarismo das unidades com o quadruplo de cada um dos outros algarismos*, ou seja,

$$b = 4a_n + 4a_{n-1} + ... + 4a_1 + a_0.$$

Pelo enunciado sabe-se que $6 \mid a$, utilizando uma ferramenta muito conhecida, a subtração pode-se fazer a seguinte verificação:

$$\begin{aligned} a-b =& (a_n 10^n + a_{n-1}10^{n-1} + ... + a_1 10^1 + a_0 10^0) - (4a_n + 4a_{n-1} + ... + 4a_1 + a_0) \\ =& (a_n 10^n - 4a_n) + (a_{n-1}10^{n-1} - 4a_{n-1}) + ... + (a_1 10^1 - 4a_1) + (a_0 10^0 - a_0) \\ =& a_n(10^n - 4) + a_{n-1}(10^{n-1} - 4) + ... + a_1(10-4). \end{aligned}$$

Na última linha há
$$\sum_{k=1}^{n} a_k(10^k - 4).$$
Se cada parcela desse somatório for um múltiplo de 6 então a soma toda será divisível por 6, esta implicação está demonstrada em (HEFEZ, 2016, p. 41 e 42). Como os a_k são os algarismos na representação decimal, utiliza-se $(10^k - 4)$, pois se este for múltiplo de 6 todo o produto também será. Com isso, a **indução matemática** será mais uma vez o método de argumentação utilizado.

A intenção é provar que $6 \mid (10^k - 4)$ e será feito empregando a tática da *congruência modular*, isto é, precisa-se mostrar que $(10^k - 4) \equiv 0 \pmod 6$. Como dito anteriormente, faz-se-á por indução sobre k.

Seja $P(k) : (10^k - 4) \equiv 0 \pmod 6$ uma propriedade de algum número inteiro positivo.

1. $P(1)$ é válido, pois $(10^1 - 4) = 6 \equiv 0 \pmod 6$.

2. Suponha, agora que $P(k)$ é válido para algum inteiro positivo e será verificado se $P(k+1)$ também o é. Para isso, veja que $10^{k+1} - 4 = 10 \cdot 10^k - 4$, aplicando a tática da *simetria algébrica*, ou seja, adicionando dois inteiros simétricos no segundo membro da igualdade, passa-se a ter

$$\begin{aligned} 10 \cdot 10^k - 4 =& 10 \cdot (10^k - 4 + 4) - 4 \\ =& 10 \cdot (10^k - 4) + 36. \end{aligned}$$

   Mas, pela hipótese de indução, $(10^k - 4) \equiv 0 \pmod 6$ e, pelo item 5 do Teorema 4.23, $10 \cdot (10^k - 4) \equiv 10 \cdot 0 = 0 \pmod 6$. Logo, pelo item 4, também do Teorema 4.23,
$$10 \cdot (10^k - 4) \equiv 0 + 36 \equiv 0 + 0 = 0 \pmod 6.$$
   O que mostra que $P(k+1)$ é válida e, portanto, pelo **princípio da indução matemática**, $(10^k - 4) \equiv 0 \pmod 6$ é uma propriedade válida para todo inteiro positivo.

Tem-se que $6 \mid a$, pelo enunciado, e foi provado que $6 \mid a - b$. Daí segue que,

$$6 \mid a - b \Leftrightarrow a \equiv b \pmod 6.$$

Mas $6 \mid a \Leftrightarrow a \equiv 0 \pmod 6$, segue pois que $b \equiv 0 \pmod 6$ e, portanto, $6 \mid b$. $\square$

Para a aplicação seguinte necessita-se de algumas definições.

Definição 5.12 *Seja um inteiro* n *e seja o conjunto* $D(n) = \{x \in \mathbb{N}; \;\; x \mid n\}$ *o conjunto dos divisores de* n*, define-se a soma de todos os divisores naturais de* n *e denota-se* $S(n)$ *como o resultado da adição de exatamente todos os divisores naturais do inteiro* n.

Definição 5.13 *Um inteiro* a *é dito perfeito se tiver a propriedade de ser igual a metade da soma de seus divisores naturais, ou seja,* a *é perfeito se* $S(a) = 2a$.

Aplicação 5.14 *Mostre que os únicos dois números primos cujo produto é perfeito são* 2 *e* 3.

Solução: Este problema tem um enunciado muito curto. Mesmo assim, apresenta alguns dos mais importantes resultados da teoria dos números os quais são: múltiplos e divisores, números primos e números perfeitos. Isto é muito valioso para a análise do mesmo, pois indica que deve-se iniciar com uma abordagem voltada para os números inteiros.

Com base na **orientação** verifica-se que o problema pede para mostrar duas dois resultados diferentes: que o produto de 2 e 3 é um número perfeito e que estes são os únicos primos cujo produto é perfeito.

A primeira parte é suficientemente fácil e pode ser feita pela **prova direta**, como segue:

$2 \cdot 3 = 6$, como $D(6) = \{1, \;\; 2, \;\; 3, \;\; 6\}$ e $S(6) = 1 + 2 + 3 + 6 = 12 = 2 \cdot 6$, tem-se que 6 é um número perfeito.

Já a segunda parte é que torna esta questão um problema. Como pode-se mostrar que 2 e 3 são os únicos primos cujo produto é perfeito? A alternativa aqui é **generalizar**, isto é, tomar dois primos e considerar seu produto perfeito, em seguida, verificar se esses números só podem ser 2 e 3.

Pois, sejam dois primos quaisquer p e q tais que pq é um número perfeito. para fazer a verificação proposta no parágrafo anterior aplica-se a tática de *dividir em casos*, ou seja, em que $p = q$ e $p \neq q$. Sendo que, cada caso desse torna-se em um mini problema que podem requerer abordagens diferentes para solucioná-los.

Para verificar o primeiro caso, o método de argumentação será **por redução ao absurdo**. Neste caso, suponha, por absurdo, que $p = q$, daí segue que, $p \cdot q = p^2$. mas para p^2 ser perfeito, teria

$$\begin{aligned} S(p^2) = 2p^2 &\Rightarrow 1 + p + p^2 = 2p^2 \\ &\Rightarrow p^2 = p + 1. \end{aligned}$$

Que é claramente uma contradição já que teria-se um p primo cujo seu quadrado é também seu sucessor.

Já a verificação do segundo caso será por **prova direta**. Isto é, seja $p \neq q$ sem perda de generalidade, suponha que $q < p$. Conforme (HEFEZ 2016), se pq é perfeito, deve-se ter

$$1 + p + q + pq = S(pq) = 2pq.$$

Daí segue que $1 + p + q = pq$. Todavia,

$$\begin{aligned} q < p \ &\Rightarrow pq = 1 + p + q < 3p \\ &\Rightarrow pq < 3p \\ &\Rightarrow q < 3. \end{aligned}$$

Logo, só pode ser $q = 2$. E, usando a ferramenta da substituição de q por 2 em $1 + p + q + pq = 2pq$, tem-se

$$1 + p + q + pq = 2pq \ \Rightarrow \ 1 + p + 2 + 2p = 4p \ \Rightarrow \ p = 3.$$

Portanto, os únicos primos cujo produto é perfeito são 2 e 3. □

Esta solução é muito interessante e conveniente para o objeto destas notas. Porque ela aborda algumas estratégias como a orientação, os métodos de argumentação da prova direta e da redução ao absurdo e apresenta a generalização como estratégia para sair do caso particular para o geral.

Um outro aspecto de relevância foi a tática de dividir a verificação em casos que levou a mini problemas e cada um desses exigiu uma atuação específica nos níveis da estratégia, táticas e ferramentas. Com isso, mostrou-se que a solução de alguns problemas pode levar a outros menores que exige toda uma abordagem específica, independentemente da adotada no problema inicial.

Os dois próximos problemas são atribuídos pela revista Galileu à Agência Nacional de Segurança dos Estados Unidos (NSA) cuja as soluções são baseadas nas apresentadas pela própria revista.

Aplicação 5.15 *Em um dia chuvoso de verão, os irmãos Dylan e Austin estão se distraindo com diversos jogos enquanto o avô deles observa a brincadeira. Depois de ganhar duas partidas de xadrez, três de poker e cinco de ping-pong, Austin decide desafiar Dylan para um desafio final. Austin pega um cofre cheio de moedas (ressalta-se que o cofre em questão contém uma grande quantidade de moedas) que está no balcão enquanto Dylan esvazia a mesa quadrada da cozinha.*

O jogo é bem simples na explicação de Austin. Os irmãos colocam, uma vez cada um, uma moeda sobre a mesa. Quem ficar primeiro sem espaço para por sua próxima *moeda perde a competição. Não vale, claro, empurrar ou apertar um pouquinho. O perdedor dá ao vencedor a sobremesa do jantar. Logo antes do início do jogo, Austin pergunta a Dylan em um tom arrogante: "quem vai primeiro, você ou eu?".*

Dylan pede um conselho para seu avô. O avô sabe que ele está cansado de perder todos os jogos para seu irmão. Qual dica o avô dá para Dylan?

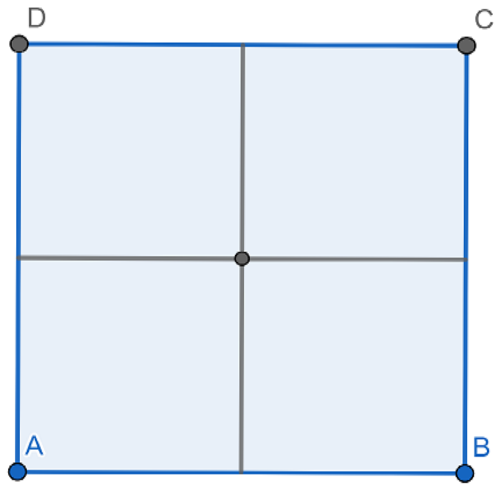
Solução: É claro que a resposta do avô deve ser baseada em uma estratégia vencedora e, de fato, é essa a grande questão do problema: Qual estratégia Dylan deve adotar para que saia vencedor?

Para elaborar uma resposta que satisfaça as expectativas de Dylan, seu avô deve fazer um levantamento das informações do contexto do enunciado, mas precisamente, **orientar-se** no que diz respeito às regras e instrumentos do desafio e considerar todos os elementos que podem lhe mostrar um caminho de sucesso. Algumas perguntas podem ajudar durante a **orientação** como: Há elementos em ordem no problema? Dá pra usar o *Princípio das casas de pombos*? E focar nos *extremos*, ajuda? Há elementos que *não variam*?

Ainda sim, a **orientação** funciona pouco. Nesse caso, como a mesa utilizada para o desafio é quadrada e a diferença entre seu tamanho e o da moeda é bem significativa, **fazer um desenho** e **projetar as primeiras jogadas** parecem estratégias que indicarão muitos pontos relevantes sobre o desafio.

Com isso, desenhado o quadrado ABCD para representar a mesa e dividindo-o em quatro regiões a partir do do ponto médio dos lados para melhor organizar o preenchimento e considerando o ponto P como a moeda, nota-se que há quatro posições possíveis para colocar as moedas: nos vértices, nos lados, no centro e nos pontos internos do quadrado diferentes dos mencionados anteriormente. Uma outra observação que se faz a partir do desenho é que o quadrado é uma figura simétrica em relação ao centro, ver subseção 4.1.1.

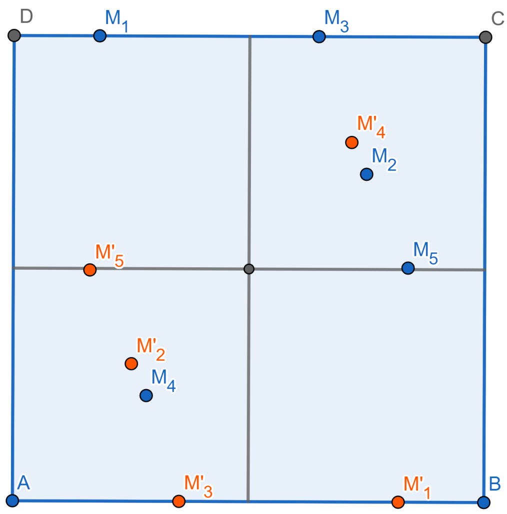
Figura 5.11 – Quadrado representando a mesa.



Fonte: Próprio autor

A figura seguinte representa algumas jogadas onde a moeda do primeiro jogador é indicada por M_i e a do jogador seguinte por M_i', com i indicando a ordem da jogada.

Figura 5.12 – Representação das primeiras jogadas do desafio.



Fonte: Próprio autor

A partir da reprodução de algumas possíveis jogadas, observa-se que, para cada moeda que for colocada em um dos vértices, ou em um dos lados, ou no interior do quadrado menos o centro, quem coloca em seguida sempre terá um espaço para preencher devido a simetria do quadrado a não ser no centro, pois este é o ponto do quadrado que não possui simétrico. E ainda, considerando as regiões do quadrado como quadrantes, os quadrantes opostos pelo vértices são simétricos em relação ao centro

Com isso, a tática da *simetria geométrica* é o ponto chave para elaborar a estratégia vencedora, pois quem jogar primeiro terá que, em sua primeira jogada, posicionar uma moeda bem no centro da mesa e, devido a sua simétrica anteriormente apresentada, sempre que o segundo a jogar posicionar uma moeda na mesa, o primeiro poderá "espelhar" o posicionamento no quadrante oposto com uma moeda de mesmo diâmetro da posicionada pelo adversário.

Nesse caso, Dylan deve ser o primeiro a jogar e seguir a estratégia do parágrafo anterior. Pois esta assegura que sempre que Austin encontrar um espaço vazio, Dylan encontrará também e, obrigatoriamente, Austin ficará sem espaço antes de Dylan. □

Aplicação 5.16 *No happy hour da firma, Todd propõe um desafio a seus colegas. Bruce e Ava são escolhidos para participar primeiro. Todd põe uma nota de 100 dólares na mesa e explica o jogo. Bruce vai tirar uma única carta aleatória de um baralho comum, e Ava também. Ambos colocarão as cartas na própria testa, de forma que todos menos o próprio possuidor da carta possam vê-las. Os jogadores não podem trocar informações entre si de nenhuma forma.*

Bruce e Ava irão, alternadamente, escrever em um papel um palpite sobre a cor de suas próprias cartas (vermelho ou preto). Se qualquer um dos dois acertar, ambos ganham 50 dólares cada um. Se ambos errarem, não ganham nada. Todd dá a Bruce e Ava cinco minutos para criar, antes de começar, uma estratégia que possa garantir que ambos sairão do bar com o dinheiro no bolso.

Bruce e Ava terminam a partida e Todd anuncia o segundo estágio do jogo. Ele põe 200 dólares na mesa. Diz a quatro de seus colegas – Emily, Charles, Doug e Fran – que eles irão jogar o mesmo jogo, com a exceção de que desta vez eles terão de adivinhar o naipe de suas cartas – paus, ouros, copas ou espadas. Todos poderão ver as cartas dos três outros colegas, mas não sua própria. Se apenas um dos quatro participantes acertar em cheio, todos levam 50 dólares para casa. De novo, eles não poderão se comunicar durante a partida, mas terão cinco minutos para desenvolver uma estratégia que garanta a vitória.

Para qualquer uma das situações – com dois ou quatro jogadores – como os participantes podem garantir que alguém no grupo sempre adivinhará corretamente?

Solução: O caso com duas pessoas é mais simples e pode ser uma indicação do que fazer no caso de quatro. Sendo assim, a primeira estratégia é **enumerar todas as possibilidades** de combinações das cartas escolhidas pelos dois participantes, o que não são muitas, pois só há duas cores no baralho comum, preto e vermelho. Para casos como esse, em que as possibilidades são reduzidas, esta estratégia é bem eficaz.

Na escolha, Bruce e Ava, poderão escolher baralhos da mesma cor ou em cores diferentes, logo as possibilidades são quatro: (vermelho, vermelho) e (preto, preto) se tirarem baralhos da mesma cor; (vermelho, preto) e (preto, vermelho) se tirarem de cores diferentes. Sendo que as possibilidades são 4 e os participantes são 2 e $2 \mid 4$, a tática é *distribuir igualmente as possibilidades entre os dois* (note que a ferramenta <u>dividir</u> está bem explícita nesta tática), o que é muito conveniente já que as possibilidades se agrupam em cores iguais e cores diferentes.

Baseados nisso, é suficiente que um dos participantes suponha que sua carta é da mesma cor que a de seu companheiro, assim cobrirá os casos (vermelho, vermelho) e (preto, preto) e o outro supor que sua carta seja diferente da do primeiro o que cobre os casos (preto, vermelho) e (vermelho, preto). Assim um deles necessariamente estará certo e será impossível perder o jogo.

Para resolver o caso com quatro pessoas é necessário um investimento maior em tempo e esforço, sendo muito difícil de executar em apenas cinco minutos. De qualquer modo, como num baralho comum há quatro naipes, cada pessoa tem quatro possibilidades de escolha, logo haverá $4^4 = 256$ possibilidades, o que não é nada animador. Porém, é possível seguir o mesmo plano do caso anterior, com muito mais sofisticação, é claro.

A tática empregada será *distribuir os casos possíveis entre as quatro pessoas* tal que a distribuição garanta que todas as possibilidades de resposta sejam cobertas isto é aceitável, já que $4 \mid 256$. Contudo, depara-se com um outro problema: Qual critério seguir para a distribuição?

Distribuir aqui significa <u>dividir</u>, e sempre que dividir está envolvido, vale a pena considerar a *congruência modular*. Note que pretende-se distribuir as possibilidades para quatro pessoas e que, qualquer inteiro positivo é da forma $4k$, $4k+1$, $4k+2$ ou $4k+3$, com $k \in \mathbb{N}$. Em outras palavras, todo inteiro positivo divididos por 4 só podem deixar como restos 0, 1, 2 e 3.

Sendo assim, é conveniente que cada pessoa cubra uma das formas $4k$, $4k+1$, $4k+2$ e $4k+3$. Para isso, seja o conjunto das possibilidades $\{1, 2, ..., 256\}$ e numerando os naipes ouro, paus, copas e espadas, respectivamente em 0, 1, 2 e 3, o primeiro cobrirá todas as possibilidades da forma $4k$, o segundo, as da forma $4k+1$, o terceiro, as da forma $4k+2$ e o último, as da forma $4k+3$.

Quando todos tiverem de posse de sua carta e olharem as cartas dos seus companheiros, utilizarão a ferramenta da <u>soma</u> para indicar sua resposta. Isto é, somarão os números referentes aos naipes de seus companheiros ao número que deixa a soma da forma de sua responsabilidade. Um dos quatro certamente adivinhará o naipe de sua carta. Segue uma simulação para deixar a estratégia vencedora mais clara.

Suponha que Emily, Charles, Doug e Fran são responsáveis pelas possibilidades da forma $4k$, $4k+1$, $4k+2$ e $4k+3$, respectivamente. Suponha ainda que, Emily olhou as cartas dos colegas e viu que Charles está com copas (2), Doug também (2) e Fran está com espadas (3). Ela soma os três números e fica com sete (7). Emily irá supor que sua carta é de um número que, se somado a sete, dará um múltiplo de quatro, isto é, um número da forma $4k$. Ela chuta que sua carta é de paus (1), para que a soma das cartas de todos dê oito (8), um múltiplo de quatro. Charles irá adivinhar seu naipe de maneira que a soma de todas as cartas mais a sua dê um número da forma $4k+1$, isto é, que seja um dígito mais alto que um múltiplo de quatro (4). Ele vê ouro (0), copas (2), espadas (3) e chuta ouro (0), pois a soma $(0+2+3+0)$ dá cinco (5), um dígito maior que um número divisível por quatro, no caso, quatro (4). Doug fará a mesma coisa, de maneira que a soma dê um número da forma $4k+2$, isto é, um número congruente a dois módulo 4. E Fran também, mas o resto de sua divisão deverá ser três (3). Seguindo a tática à risca, um deles irá acertar em cheio a própria carta e todos levarão o prêmio. $\square$

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A resolução de problemas é um tema bastante explorado na educação matemática. Porém, o que se tem visto, é uma repetição do discurso dentro da reflexão do ensino de matemática por meio de problemas. Contrariando essa corrente, estas notas apresenta a resolução de problemas desarraigada do contexto da relação professor-aluno e ensino-aprendizagem e foca na ação do resolvedor em três níveis de atuação, a saber, as estratégias, as táticas e as ferramentas.

Entende-se que para classificar uma questão como um problema, depende das experiências do resolvedor. Isto é, se sabe imediatamente como resolvê-la, a questão não passa de um exercício. Todavia, se precisa inovar, criar, desprender tempo e esforço para abordá-la, sem dúvidas, esta questão é um problema. E, ainda, resolvedores experientes atuam em três níveis para resolver problemas: Nas estratégias orientam-se, definem como abordá-lo e com que método argumentar; nas táticas dispõem de instrumentos para superar situações num contexto mais focado, e nas ferramentas utilizam resultados e propriedades matemáticas como teoremas e operações para atuar em uma configuração específica.

O pensamento positivo e a criatividade são valiosíssimas estratégias que levam o resolvedor a enfrentar o problema com autoestima elevada sentindo-se capaz de resolver um problema que a princípio não faz ideia de como começar. Já a orientação, por as mãos na massa, transformar o problema em outo mais fácil, buscar o penúltimo passo são estratégias para investigar problemas que adicionada aos principais métodos de argumentação constituem o nível mais geral de atuação.

O nível das táticas não pode confundir-se com o descrito no parágrafo anterior, aqui é favorecido o uso do princípio das casa de pombos, das desigualdades das médias, do princípio dos extremos, da paridade, da congruência modular, da simetria, da fatoração entre outros instrumentos capazes de superar obstáculos depois que a estratégia para a solução do problema ja foi definida.

No nível da ferramentas, por sua vez, ocorre a atuação em situações de diversas configurações como as simples operações de adicionar, multiplicar e racionalizar ou a aplicação de um teorema como o tão famoso Teorema de Pitágoras. O que deve ficar claro, é que o nível das ferramentas é o mais focado enquanto que o nível das estratégias é o mais geral.

Apesar deste texto não apresentar a resolução de problemas a partir da relação professor-aluno, convém destacar que, o professor da educação básica pode fazer uso destas notas para fundamentar o ensino da matemática por meio dos três níveis da solução de problemas. Para isso, sugere-se de início, levar os alunos a formular o conceito e diferenciar estratégias, táticas e ferramentas, em seguida, conduzi-los a resolverem problemas propostos evidenciando as diferentes estratégias, táticas e ferramentas utilizadas nas soluções apresentadas.

Deste modo, o aluno atingido com essa abordagem terá ampla condição de determinar em qual nível está operando, de identificar alguns dos principais instrumentos que compõem cada nível, bem como de desenvolver sua autonomia para resolver problemas cada vez mais complexos.

Portanto, qualquer pessoa interessada em resolução de problemas deve investir no conhecimento dessa abordagem e cultivar uma atitude que o leve a resolver problemas atuando nos três níveis. Para isso, precisa desenvolver o hábito de estudar a literatura do assunto dos quais sugere-se o livro base destas notas e, ainda, resolver problemas identificando elementos que caracteriza cada nível de atuação. Dessa forma, além de reconhecer os apresentados aqui, poderá, o que considera-se como um evento certo, identificar outros e contribuir para enriquecimento das discussões do tema e para a formação de indivíduos que, como este, interessa-se por resolução de problemas.

Referências bibliográficas

ALENCAR FILHO, Edgard de. *Teoria Elementar dos Números.* São Paulo: Nobel, 1981.

ANDRADE, S. *Ensino - aprendizagem de Matemática via resolução, exploração, codificação e decodificação de problemas.* Rio Claro: UNESP, 1998. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Universidade Estadual Paulista, 1998.

BECHARA, Evanildo. *Dicionário da língua portuguesa.* 1 ed. Rio de Janeiro: Editora Nova Fronteira, 2011.

BLOG DESAFIOS DA MATEMÁTICA ELEMENTAR. *Problema dos chapéus.* Disponível em:<http://desafiosdamatemticaelementar.blogspot.com/2009/03/o-problema-dos-chapeus.html> Acesso em: 03/01/2019 às 09:40.

DANTE, Luis Roberto. *Didática da Resolução de Problemas de Matemática.* São Paulo: Ática, 1991.

DANTE, Luis Roberto. *Formulação e resolução de problemas de Matemática: teoria e prática.* São Paulo: Ática, 2010.

GARDNER, Martin. *Divertimentos Matemáticos.* Tradução de Bruno Mazza. 3 ed. São Paulo: IBRASA, 1998.

GONTIJO, C.H. *Resolução e Formulação de Problemas: caminhos para o desenvolvimento da criatividade em Matemática* . In Anais do SIPEMAT. Recife, Programa de Pós-Graduação em Educação-Centro de Educação - Universidade Federal de Pernambuco, 2006.

HEFEZ, Abramo. *Aritmética.* Rio de Janeiro: SBM, 2016.

HEFEZ, Abramo. *Exercícios resolvidos de Aritmética.* Rio de Janeiro: SBM, 2016.

IMBUZEIRO, Roberto. *Problemas Envolvendo Extremos.* PAPMEM(Julho de 2018). Disponível em:<https://impa.br/wp-content/uploads/2018/07/PAPMEM-2018-Textos-problemas-envolvendo-extremos-roberto.pdf> Acesso em: 05/02/2019 às 20:47.

IMBUZEIRO, Roberto. *Problemas Envolvendo Extremos: exercícios.* PAPMEM(Julho de 2018). Disponível em:<https://impa.br/wp-content/uploads/2018/07/PAPMEM-JULHO-2018-Exercicios-problemas-envolvendo-extremos-roberto.pdf> Acesso em: 05/02/2019 às 20:25.

LIMA, Elon Lages. *Meu Professor de Matemática e outras histórias*. Rio de Janeiro: SBM, 1991.

LIMA, Elon Lages. *Números e Funções Reais*. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

LIMA, Elon Lages; CARVALHO, Paulo César Pinto; WAGNER, Eduardo; MORGADO, Augusto César. *A Matemática do Ensino Médio* - volume 1. 9º ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

MINISTÉRIO de Educação e do Desporto, Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais* (PCN) - Matemática - Terceiro e quarto ciclos do Ensino Fundamental. Brasília, 1998.

MORGADO, Augusto César; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto. *Matemática discreta*. Rio de Janeiro: SBM, 2015.

MUNIZ NETO, Antonio Caminha. *Geometria*. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

MUNIZ NETO, Antonio Caminha. *Fundamentos de Cálculo*. Rio de Janeiro: SBM, 2015.

PERRENOUD, P. *Construir as competências desde a escola*. Traduzido por Bruno Magne. Porto Alegre, Artmed, 1999.

POLYA, George. *A arte de resolver problemas*. Traduzido e adaptado por Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro: Interciência, 1995.

PORTAL DA MATEMÁTICA - OBMEP. *Aritmética Modular*. Disponível em:<https://portaldosaber.obmep.org.br/uploads/material/5oeoy5b8w0gso.pdf>
Acesso em: 05/02/2019 às 17:00.

SILVEIRA, Ênio; MARQUES, Cláudio. *Matemática: compreensão e prática*. 2º ed. São Paulo: Moderna, 2013.

SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA - PROFMAT. Exame Nacional de Qualifição 2018.1. Disponível em:<http://www.profmat-sbm.org.br/wp-content/uploads/sites/23/2017/06/ENQ-2018-1-gabarito.pdf> Acesso em: 05/02/2019 às 16:00.

VAIANO, Bruno; MOREIRA, Isabela. *Você consegue resolver estes problemas de lógica da NSA?* Disponível em: <https://revistagalileu.globo.com/Ciencia/noticia/2016/08/voce-consegue-resolver-estes-problemas-de-logica-da-nsa.html> Acesso em 10/01/2019 as 22:03.

ZEITZ, Paul. *The Art and Craft of Problem Solving*. 2º ed. New York: John Wiley, 2007.