UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONALIZANTE EM MATEMÁTICA

CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS COM AUXILIO DE GEOMETRIA DINÂMICA

Wilson de Almeida Alecrim Lopes Júnior

MANAUS
2019

UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONALIZANTE EM MATEMÁTICA

Wilson de Almeida Alecrim Lopes Júnior

CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS COM AUXÍLIO DE GEOMETRIA DINÂMICA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Amazonas, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Nilomar Vieria de Oliveira

MANAUS
2019

Ficha Catalográfica

Ficha catalográfica elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Lopes Júnior, Wilson de Almeida Alecrim

L864c Construções geométricas com auxílio de geometria dinâmica / Wilson de Almeida Alecrim Lopes Júnior. 2019

86 f.: il.; 31 cm.

Orientador: Nilomar Vieira de Oliveira

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Federal do Amazonas.

1. régua. 2. compasso. 3. geometria dinâmica. 4. construção geométrica. I. Oliveira, Nilomar Vieira de II. Universidade Federal do Amazonas III. Título

WILSON DE ALMEIDA ALECRIM LOPES JÚNIOR

CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS COM AUXILIO DE GEOMETRIA DINÂMICA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Amazonas, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovado em 27 de Março de 2019.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Nilomar Vieira de Oliveira
Orientador

Prof. Dr. Disney Douglas de Lima Oliveira
Membro interno

Prof. Dr. Alcides de Castro Amorim Neto
Membro externo

AGRADECIMENTOS

Primeiramente à Deus, o grande Geômetra, como disse Gelileu: "A Matemática é o alfabeto com o qual Deus escreveu o Universo".

A minha mãe, que sempre me apoiou e torceu pelo meu bem.

A meu saudoso pai, que, além de tudo era meu amigo, sempre me aconselhou e me inspirou.

À minha esposa, Kleuciane Araújo de Oliveira, à minha filha Wilka Karoline de Oliveria Alecrim, à meu filho Wilson José de Oliveira Alecrim pela compreensão de minha ausencia nos fins de semana para poder estudar e concluir este trabalho.

À todos os meus amigos que acompanham minha trajetóra desde a infância, à todos os amigos colegas que conheci neste curso de Mestrado, pois sem o apoio destes, talvez este trabalho não fosse possível.

À todos os professores que conhecemos e tivemos neste curso; Professora Dra. Flávia Morgana, Professor Dr. Carlos Wagner, Professor Dr. Waltemir, Professor Dr. Nilomar, Professor Dr. Disney Douglas, Professor Dr. Dimas Martinez e Professor Dr. Roberto Prata.

Em especial ao meu orientador, Professor Dr. Nilomar Vieira de Oliveira, pela paciência na orientação, mostrando ser possível a conclusão deste trabalho.

RESUMO

Este trabalho tem o intuito de levar para a sala as construções geométricas via régua e compasso ainda com auxílio de um software de geometria dinâmica, no caso, usaremos o geogebra para fazer as construções. Mostraremos a importância de se construir os lugares geométricos para fixação e melhor aprendizagem dos estudantes para o ensino da Geometria no ensino fundamental e médio. Fizemos as aplicações em sala de aula e obtivemos um desempenho significativo no aprendizado dos alunos do ensino fundamental e médio em geometria.

Estudaremos neste trabalho o asssunto Construção geométrica através de uma perspectiva tradicional, usando compasso e régua. Demonstraremos como utilizar estes instrumentos para construção de vários elementos da geometria e justificando as construções. Realizaremos a resolução de alguns problemas com auxilio de compasso e régua e depois vamos relacionar todas as construções com uma ferramenta auxiliar no ensino e aprendizagem de geometria, o software de geometria dinâmica, Geogebra, onde em algumas construções conseguiremos fazer algumas pequenas animações. Além das construções verificaremos, usando o modo tradicional e o modo dinâmico, a solução de alguns problemas de geometria e a demonstração da desigualdade das médias. Também faremos um breve comentário sobre 3 problemas clássicos da matemática que são impossíveis de resolve-los usando somente régua e compasso, estes problemas foram importantes, pois ajudaram a matemática dar grandes saltos em seus avanços algébricos.

Palavras-chave: Régua e compasso, Geometria dinâmica.

ABSTRACT

This work intends to take to the room the geometric constructions via ruler and compass with the aid of a software of dynamic geometry, in this case, we will use the geogebra to make the constructions. We will show the importance of constructing the geometric places for fixing and better learning of the students for the teaching of Geometry in primary and secondary education. We did the applications in the classroom and we achieved a significant performance in the learning of elementary and middle school students in geometry.

We will study in this work the assemblage Geometric construction through a traditional perspective, using compass and ruler. We will demonstrate how to use these instruments to construct various elements of geometry and justify constructions. We will solve some problems with help of compass and ruler and then we will relate all the constructions with an auxiliary tool in the teaching and learning of geometry, the software of dynamic geometry, Geogebra, where in some constructions we will be able to make some small animations. Besides the constructions we will verify, using the traditional mode and the dynamic mode, the solution of some problems of geometry and the demonstration of the inequality of the means. We will also make a brief commentary on 3 classical problems of mathematics that are impossible to solve using only ruler and compass, these problems were important because they helped math to make great leaps in their algebraic advances.

Keywords: Ruler and compass, Dynamic geometry

LISTA DE SÍMBOLOS

$\mathbb{Z}$	Conjunto dos números inteiros.
$\mathbb{Z}^+$	Conjunto dos números inteiros não negativos.
$\mathbb{Z}^+_*$	Conjunto dos números inteiros não nulos e não negativos.
$\mathbb{Q}$	Conjunto dos números racionais.
$\mathbb{I}$	Conjunto dos números irracionais.
$\mathbb{R}$	Conjunto dos números reais.
Pol	Polígono.
$=$	Igual.
$\neq$	Diferente.
$\equiv$	Congruente.
$\cong$	Aproximado.
$\sim$	Semelhante.
$>$	Maior.
$<$	Menor.
$\cap$	Interseção.
$\cup$	União.
$\in$	Pertence.
$\notin$	Não pertence.
$//$	Paralelo.
$\perp$	Perpendicular.
M_G	Média Geométrica.
M_P	Média Proporcional.
$\overline{AB}$	Segmento AB.
AB	Medida do segmento AB.
$A\widehat{B}C$	Medida do ângulo ABC.
$\widehat{B}$	Ângulo B.
$o.p.v$	Opostos pelo vértice.
$\triangle$	Triângulo.
$S_\triangle$	Área do triângulo.
S_C	Área do Círculo.
S_Q	Área do Quadrado.
$\blacksquare$	Indica o fim de uma demonstração.

Lista de Figuras

Sumário

Introdução

Muito tempo antes dos conhecimentos existentes, o homem já criava, através de experimentos, as bases da Geometria. Datadas desde muitos anos antes de Cristo, as construções geométricas tiveram uma grande importância para o desenvolvimento da matemática. Acredita-se que a Geometria (Geo = terra, metria = medir) surgiu a partir de várias necessidades do cotidiano, por exemplo, partilhar terras férteis às margens de um rio, construir casas, observar e tentar prever o movimentos do Sol, Lua e outros planetas. Documentos a respeito das antigas civilizações egípcia e babilônica mostram que estes possuíam bons conhecimentos do assunto, geralmente ligados à astrologia, mas foram os Gregos a primeira civilização a trabalhar com régua e compasso nas construções geométricas. Problemas e exercícios que hoje temos que calcular, os gregos antigos tinham a função de construir.

Construção geométrica é parte integrante do estudo da geometria, entretanto, apesar de vir poucas construções nos livros didáticos, quase nenhuma, poucos professores trabalham as construções. O estudo das construções geométricas vão proporcionar aos estudante a capacidade de entendimento de outros conhecimentos em todos os campos das atividades humanas, além de ajudar a desenvolver o raciocínio lógico, o pensamento divergente, a organização e a criatividade. Ainda com toda a grandeza da geometria como auxilio no desenvolvimento cognitivo e motor de nossos alunos, esta parte da disciplina de geometria é tratada com indiferença por muitos professores do ensino básico. Segundo Sérgio Lorenzato [11]

Pesquisas psicológicas indicam que a aprendizagem geométrica é necessária ao desenvolvimento da criança, pois inúmeras situações escolares requerem percepção espacial, tanto em matemática (por exemplo: algoritmos, medições, valor posicional, séries, seqüências...) como na leitura e escrita. Ela é uma das melhores oportunidades para aprender a matematizar a realidade, já que as descobertas feitas pelos próprios olhos e mãos são mais surpreendentes e convincentes.

O processo de construção permite que o aluno entenda de forma concisa as propriedades aplicadas em uma construção geométrica, para se construir é necessário pensar e traçar um planejamento, pois o mais importante de se fazer as construções é aprender a dicrever os passos usados e saber justifica-los, entretanto, nos dias atuais, pelo menos, pelas escolas que já lecionei, vejo que a maioria dos professores não fazem uso das ferramentas régua e compasso, muito menos de um software de geometria dinâmica tornando o assunto de geometria um tanto abstrato, sem sentido e significado para o aluno.

A aprendizagem significativa que é o conceito central da teoria de aprendizagem de David Ausubel [3], [10] afirma que esta é uma aprendizagem compreensiva, onde conhecemos o porquê do que aprendemos e sabemos aplicar esses conhecimentos, atribuindo significado ao conteúdo aprendido. E esta aprendizagem significativa ocorre quando as novas informações ficam vinculadas a conceitos relevantes preexistentes na estrutura cognitiva do estudante, que, segundo Ausubel, são os subsunçores. A partir de um conceito geral o conhecimento poderá ser construido de modo a liga-lo a novos conhecimentos, facilitando o aprendizado de novas informações. A meu ver, para que os conceitos básicos de geometria tenham sentido é necessário que o estudante entenda e saiba fazer construções geométricas para poder ancorar os conceitos iniciais de geometria.

Ao longo de minha vida como professor de Matemática do ensino básico, percebi que a maioria dos alunos, principalmente, oitavo e nono do fundamental e a maioria do primeiro, segundo e terceiro ano do ensino médio, possuem muitas dificuldades para entender os conceitos básicos de geometria, como bissetriz, mediatriz, ponto médio, teorema de Tales e etc. Tive alunos considerados alunos bons, estudiosos, do segundo ano do ensino médio, que não sabiam e ficaram surpresos quando relacionamos as soluções de um sistema de equações lineares com geometria, alguns não consiguiam vincular aquele conhecimento algébrico com a geometria, não conseguiam ver nenhum vínculo, haviam muitas dificudades em montar um gráfico em um plano cartesiano. Comecei a fazer um trabalho diferenciado com relação as aulas de geometria, introduzi as construções geométricas, que despertou bastante interesse dos alunos em também fazer as mesmas construções, após pouco tempo, percebi que meus alunos melhoraram bastante com as aulas de construções geométricas, além de mostrar como fazer as construções geométricas, após o término das construções via régua e compasso, faço também as construções no software Geogebra no computador para todos, através de um projetor multimídia. Pela experiência que estou tendo, percebo a importância de saber fazer as construções via régua e compasso para poder fazer as aplicações de forma correta no Geogebra.

Neste pequeno trabalho tento trazer à tona a possibilidade de construir, via régua e compasso, vários tipos de construções geométricas e soluções para alguns problemas que podem ser apresentados por expressões algébricas, mostrando a ligação intrínseca entre a álgebra e a Geometria. Além de que acredito ser de importância singular, levar aos estudantes este olhar geométrico para as expressões algébricas, isto pode abrir novos caminhos na busca por soluções de uma expressão algébrica, facilitando a compreensão de conceitos e das propriedades geométricas, não somente da geometria Euclidiana, mas também da geometria analítica e a contribuição para o entendimento de que a álgebra e geometria se complementam.

Nas construções geométricas de hoje temos a opção de substituir a régua e o compasso por softwares que permitem construções com alta precisão, no entanto, pela experiência que tive, verifiquei a importância de saber usar a régua e compasso para poder usar e aplicar nos softwares de geometria dinâmica a fim de se obter um melhor desempenho. A chamada Geometria Dinâmica se destaca neste contexto por proporcionar aos estudantes a experimentação e pesquisa das propriedades mais importantes e invariantes nas construções geométricas.

Ao longo deste trabalho apresentarei algumas construções geométricas usando régua sem graduação e compasso mostrando algumas propriedades e tentando fazer um link direto com o software de Geometria Dinâmica, Geogebra, que é um software livre onde qualquer estudante poderá baixar em seu computador ou celular sem custo algum, através do endereço https://www.geogebra.org/download. Alguns Livros citam o geogebra como Software para auxílio de geometria Dinâmica (pode ser consultado a referência [6])

Ainda neste trabalho também mostrarei que alguns números são construtíveis utilizando-se apenas a régua e o compasso, tal construção surgiu, historicamente, da busca por soluções para alguns problemas famosos de construções geométricas como o problemas da duplicação do cubo, que consiste em construir via régua e compasso um cubo cujo volume seja o dobro de outro cubo dado; o problema da quadratura do círculo, que consiste em construir um quadrado cuja área seja a mesma de um círculo dado; o problema da trissecção do ângulo, que consiste em dividir um ângulo em três partes iguais, problemas que aguardaram dois milênios de evolução da matemática para que se atingisse o ápice de sua compreensão e solução; são exemplos de problemas que por milênios nortearam a busca por soluções e proporcionaram e ainda proporcionam o desenvolvimento da matemática.

Além da minha crença na importância do assunto construções geométricas vinculando a algum software de Geometria Dinâmica, a Base Nacional Comum Curricular - BNCC homologada de 2018 [8] também afirma esta importância, os testos abaixo foram tirados da BNCC homologada de 2018:

"*A Geometria envolve o estudo de um amplo conjunto de conceitos e procedimentos necessários para resolver problemas do mundo físico e de diferentes áreas do conhecimento. Assim, nessa unidade temática, estudar posição e deslocamentos no espaço, formas e relações entre elementos de figuras planas e espaciais pode desenvolver o pensamento geométrico dos alunos. Esse pensamento é necessário para investigar propriedades, fazer conjecturas e produzir argumentos geométricos convincentes. É importante, também, considerar o aspecto funcional que deve estar presente no estudo da Geometria: as transformações geométricas, sobretudo as simetrias. As ideias matemáticas fundamentais associadas a essa temática são, principalmente,* ***construção****, representação e interdependência.*

No Ensino Fundamental: Anos Iniciais, espera-se que os alunos identifiquem e estabeleçam pontos de referência para a localização e o deslocamento de objetos, construam representações de espaços conhecidos e estimem distâncias, usando, como suporte, mapas (em papel, tablets ou smartphones), croquis e outras representações. Em relação às formas, espera-se que os alunos indiquem características das formas geométricas tridimensionais e bidimensionais, associem figuras espaciais a suas planificações e vice-versa. Espera-se, também, que nomeiem e comparem polígonos, por meio de propriedades relativas aos lados, vértices e ângulos. O *estudo das simetrias deve ser iniciado por meio da manipulação de representações de figuras geométricas planas em quadriculados ou no plano cartesiano,* ***e com recurso de softwares de geometria dinâmica.***

No Ensino Fundamental: Anos Finais, o ensino de Geometria precisa ser visto como consolidação e ampliação das aprendizagens realizadas. Nessa etapa, devem ser enfatizadas também as tarefas que analisam e produzem transformações e ampliações/reduções de figuras geométricas planas, identificando seus elementos variantes e invariantes, de modo a desenvolver os conceitos de congruência e semelhança. Esses conceitos devem ter destaque nessa fase do Ensino Fundamental, de modo que os alunos sejam capazes de reconhecer as condições necessárias e suficientes para obter triângulos congruentes ou semelhantes e que saibam aplicar esse conhecimento para realizar demonstrações simples, contribuindo para a formação de um tipo de raciocínio importante para a Matemática, o raciocínio hipotético-dedutivo. ***Outro ponto a ser destacado é a aproximação da Álgebra com a Geometria****, desde o início do estudo do plano cartesiano, por meio da geometria analítica. As atividades envolvendo a ideia de coordenadas, já iniciadas no Ensino Fundamental Anos Iniciais, podem ser ampliadas para o contexto das representações no plano cartesiano, como a representação de sistemas de equações do 1º grau, articulando, para isso, conhecimentos decorrentes da ampliação dos conjuntos numéricos e de suas representações na reta numérica. Assim,****a Geometria não pode ficar reduzida a mera aplicação de fórmulas de cálculo de área e de volume nem a aplicações numéricas imediatas de teoremas sobre relações de proporcionalidade em situações relativas a feixes de retas paralelas cortadas por retas secantes ou do teorema de Pitágoras****. A equivalência de áreas, por exemplo, já praticada há milhares de anos pelos mesopotâmios e gregos antigos sem utilizar fórmulas, permite transformar qualquer região poligonal plana em um quadrado com mesma área (é o que os gregos chamavam "fazer a quadratura de uma figura"). Isso permite, inclusive, resolver geometricamente problemas que podem ser traduzidos por uma equação do 2º grau.*

Portanto, a BNCC orienta-se pelo pressuposto de que a aprendizagem em Matemática está intrinsecamente relacionada à compreensão, ou seja, à apreensão de significados dos objetos matemáticos, sem deixar de lado suas aplicações. Os significados desses objetos resultam das conexões que os alunos estabelecem entre eles e os demais componentes, entre eles e seu cotidiano e entre os diferentes temas matemáticos. ***Desse modo, recursos didáticos como softwares de geometria dinâmica****, malhas quadriculadas, ábacos, jogos, livros, vídeos, calculadoras e planilhas eletrônicas têm um papel essencial para a compreensão e utilização das noções matemáticas. Entretanto, esses materiais precisam estar integrados a situações que levem à reflexão e à sistematização, para que se inicie um processo de formalização."*

Por isso, reafirmo minha crença na importância do assunto Construções Geométricas, sempre atual, interessante e motivador, que a meu ver e embasado em documentos oficiais da Educação, deve ser pautado em sala de aula, e ao qual a Geometria Dinâmica, através de vários softwares livres trazem uma nova forma de ensinar matemática, sendo uma grande parceira para o ensino e aprendizagem para os estudantes.

Capítulo 1

Construções geométricas

Neste capítulo, irei apresentar algumas construções elementares pelo modo tradicional utilizando régua e compasso demonstrando algumas propriedades envolvidas nas justificativas das construções, também levarei para o leitor algumas resoluções de problemas de construções geométricas que acabam aguçando a imaginação dos estudantes e até mesmos dos professores que lecionam Matemática, finalizarei este capítulo com 3 problemas clássicos da Matemática que mostram que algumas construções são impossíveis com régua e compasso.

Construções estranhas feitas pelos antigos Persas para estudar o movimento dos astros, esquadros e compassos primitivos, papiros com desenhos geométricos e o busto do grande Euclides foram etapas fundamentais no desenvolvimento da Geometria. Como já mencionado o termo Geometria, do grego, medida de terra; geo = terra e metria = medir, parece ter surgido devido as necessidades de partilhar terras férteis às margens de um rio, construir moradas, observar e prever o movimento dos astros que são atividades que dependem de operações geométricas. As construções geométricas datam desta época e, de maneira geral, utilizando régua sem graduação , consistem em construções de entes geométricos, que geralmente eram motivadas às resoluções de problemas. Tais estudos hoje podem ser feitos com auxílio de softwares, entretanto, acredito ser de fundamental importância que o estudante saiba usar a régua e o compasso para ter um melhor aproveitamento de um software de geometria dinâmica,veja [6]).

As construções geométricas estimulam a criatividade do indivíduo, exigindo do estudante a imaginação, não somente para ver, em sua mente, as construções antes de serem realizadas, mas de fixar e entender as propriedades geométricas usadas em tal construção, auxiliando o estudante a concretizar o conteúdo abstrato da geometria estudada no ensino fundamental e no ensino médio, pois segundo a atual BNCC [8] , os conteúdos como plano cartesiano, simetria e semelhança já devem entrar apartir do 5º ano do ensino fundamental 1, apoiando as propriedades, axiomas ou consequência das figuras planas.

Os processo de construções geométricas são importantes pois exigem do aluno um planejamento, um projeto ou abstração a ser feita, habilitando o estudante a diversos conteúdos da matemática e outras disciplinas. Veja [4].

Alguns problemas de construção geométrica têm finalidades práticas, como os que envolvem cartas marítimas, ou construção de pontos com distância mínima. Um exemplo disso posso citar o de um colega professor que veio de outra cidade ministrar aulas de Lingua Portuguesa em Manaus e ficou lotado em três escolas distintas, escolas A, B e C, o problema consiste em encontrar um local (um ponto P) situado a mesma distância das três escolas. Uma solução para este problema, à luz da construção geométrica usando régua e compasso, será apresentado mais adiante.

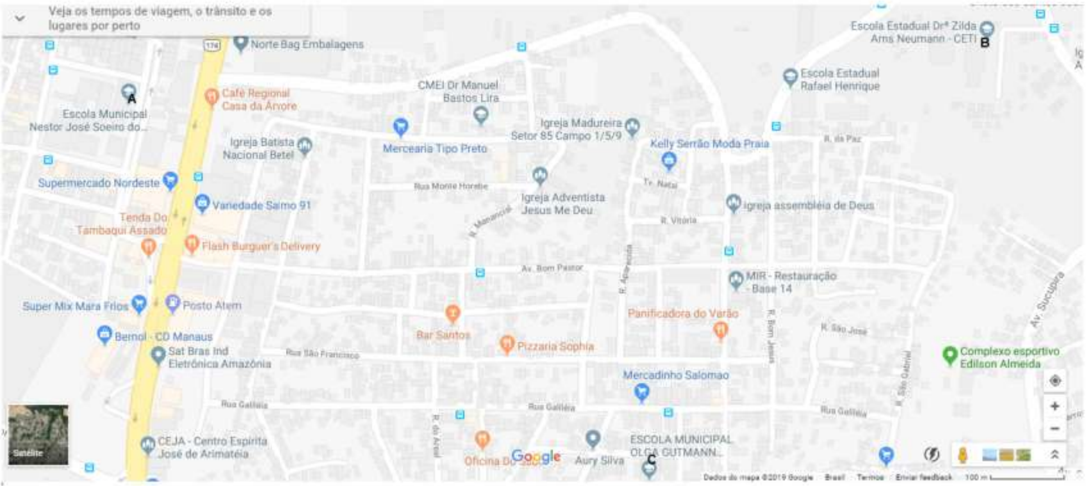

Figura 1.1: parte de Manaus onde localiza as três escolas da situação Problema

A Figura 1.1 mostra-nos o mapa de Manaus, exatamente, na área onde o colega precisa residir para ficar equidistante das três escolas.

Neste trabalho, além das construções realizadas por meio de régua e compasso, no capítulo 2 faremos uso do software de geometria dinâmica Geogebra como ferramenta auxiliar.

Pelas escolas que já passei, percebo que uma parte considerável de professores não usa nenhum software de geometria dinâmica, talvez por não saber usar régua e compasso, cito aqui um outro caso que ocorreu comigo nas salas dos professores entre meus colegas professores de Matemática, quando tracei um segmento AB qualquer no quadro e pedi a eles que divissem o segmento em 3 partes iguais usando apenas régua e compasso. Trata-se de um problema, relativamente, simples, que será desenvolvido na seção 1.3, mas, pelo fato de não usarem régua e compasso, meus colegas não tiveram nenhuma idéia de imediato de como resolver o problema e quando começei a resolver, é claro que todos lembraram e acharam interessante o tal problema para levar para sala de aula. É claro que não estou fazendo nenhuma crítica negativa aos meus colegas, muito pelo contrário, pois eles me ajudaram bastante me motivando a desenvoler este trabalho, mas, são fatos como este que estimulam mais a trabalhar a geometria desta forma com régua e compasso e levando para um software de geometria dinâmica.

Por isso minha intenção neste trabalho é de trazer o uso de régua e compasso para sala de aula e trazer a possibilidade do uso do geogebra como ferramenta auxiliar, pois, pelas escolas que já lecionei ao longo de minha vida como professor de matemática da educação básica, somente uma faz uso do software, ainda com baixa frequência.

1.1 Construções Geométricas elementares

Quando pensamos em fazer uma construção geométrica, temos que ter em mente que o mais importante é descrever como este desenho atende as condições exigidas em tais problemas ou seja deve-se saber justificar as propriedades usadas em tal construção mostrando que elas atendem as condições exigidas (veja, por exemplo, a referência [1]). Para as construções vamos utilizar somente régua sem graduação e um compasso.Vamos começar com algumas construções triviais, por exemplo:

Construção 1: Construir um segmento congruente ao segmento PQ, dado, sobre a reta r dada, conforme figura [**?**]

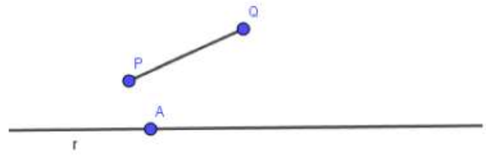

Figura 1.2: Construção do segmento congruente ao segmento dado

Resolução: A princípio tomamos o ponto A pertencente a reta r e neste caso vamos utilizar somente o compasso, instrumento usado para traçar circunferência, no entanto, em construções geométricas o compasso serve para transferir comprimentos. Então, fixamos a ponta seca do compasso no ponto P ou Q abrimos o compasso até o outro ponto, se você escolheu o ponto P então abrirá até o ponto Q, se escolheu o ponto Q então abrirá até o ponto P, a abertura do compasso corresponde exatamente ao comprimento do segmento PQ, fixe a abertura e, com a ponta seca em cima do ponto A, trace um pequeno arco passando pela reta r encontrando o ponto B. O ponto B pode estar tanto na esquerda quanto a direita de A, as duas formas satisfará o que se pede.

Neste pequeno exemplo, o objetivo é fazer com que o estudante se familiarize com o compasso e entenda que é um instrumento que serve também para transferência de comprimentos.

Construção 2: Construir um ângulo AÔB congruente ao ângulo α dado. conforme a figura [**?**]

Resolução: Primeiro marcamos dois pontos quaisquer O e A e traçamos uma reta r que passa por estes pontos, agora com abertura qualquer fixa no compasso, fixamos a ponta seca no vértice do ângulo α e traçamos um arco que intersecte os dois lados do ângulo, em seguida com a mesma abertura do compasso, fixamos a ponta seca no ponto O e tracemos um arco

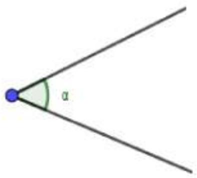

Figura 1.3: Ângulo dado

com comprimento suficiente para o ângulo desejado intersectando a reta r, agora voltamos ao desenho do ângulo dado e abrimos o compasso com uma abertura que vai da intersecção de um lado até a intersecção do outro lado e vamos transferir este comprimento para a outra figura, fixando a ponta seca na intersecção da reta r, traçamos um pequeno arco para encontrar um ponto B, desta forma encontramos o ângulo AÔB congruente ao ângulo α. Mas esse procedimento não é suficiente para provar que AÔB é congruente a α, para justificar faremos o seguinte; completaremos os dois triângulos através das intersecções encontradas, note que os dois lados do ângulo α possuem a mesma medida 'a', como usamos esta mesma abertura (raio) na reta r no ponto O, então as medidas do lado OB e OC, sendo C o ponto de intersecção da circunferência de raio 'a', OB e OC também possuem comprimento igual a 'a', ainda, como transferimos o comprimento que vai de uma intersecção a outra nos lados do ângulo α para o ângulo AÔB, estes possuem a mesma medida, podemos chamar esta medida de 'b', logo temos um caso de congruência de triângulos de lados a, a e b, portanto pelo caso LLL o ângulo α é congruente a AÔB, conforme a figura [?]

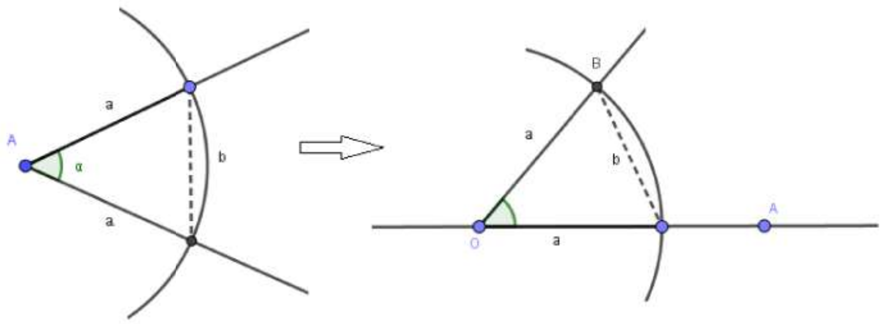

Figura 1.4: Construção do ângulo congruente

Construção 3: Traçar a mediatriz de um segmento AB dado.

Resolução: Mediatriz é a perpendicular que passa pelo ponto médio entre os dois pontos dados. Então neste exercício já ganharemos o procedimento para encontrar o ponto médio entre dois segmentos. Mas neste caso não vamos usar esta caracterização para construir a media-

Figura 1.5: Segmento AB dado

triz, vamos usar o fato de que se traçarmos a mediatriz de um segmento, todos os pontos dessa mediatriz são equidistantes aos pontos extremos do segmento e todos os pontos fora dessa mediatriz possuem distâncias diferentes aos pontos do segmento. Então basta que encontremos dois pontos com essa característica para encontrarmos a mediatriz, pois dois pontos com essa característica, necessariamente, pertencem a mediatriz do segmento, além de que sabemos que dois pontos definem uma reta. Para isso tomamos o compasso com abertura qualquer maior que metade do segmento e com a ponta seca no ponto A, traçamos um pedaço de circunferência, depois com a mesma abertura, agora com ponta seca em B traçamos outro pedaço de circunferência que intersecte a metade da primeira circunferência encontrando os dois pontos C e D equidistantes aos extremos do segmento AB, logo, pertencentes a mediatriz de AB. Agora com a régua traçamos a reta que passa pelo segmento CD, perpendicular a AB encontrando o ponto médio M de AB.

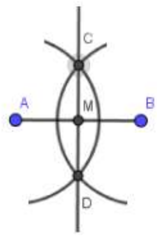

Figura 1.6: Construção da mediatriz

Construção 4: Traçar a perpendicular a uma reta r dada pelo ponto P dado.

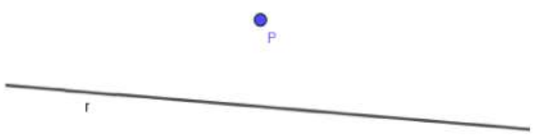

Figura 1.7: Reta e ponto dados

Resolução: Vimos no exemplo anterior que a mediatriz é uma reta perpendicular a um segmento de reta. Tomando este conceito como base, pegamos o compasso e, com abertura suficiente para intersectar a reta r, fixamos a ponta seca no ponto P, traçamos um arco que intersecte a reta em dois pontos, que posso chama-los de ponto A e B. Perceba que a distância de

P até A que pertence a r e P até B que também pertence a r são iguais pois PA e PB possuem a mesma medida (que é a abertura do compasso), logo, podemos afirmar que P pertence a Mediatriz de AB, então basta encontrar outro ponto que seja equidistante a A e B. Então, agora com o compasso com abertura maior que o meio do segmento AB, fixamos a ponta seca A e traçamos um pequeno arco acima ou abaixo da reta r, com a mesma abertura, fixamos a ponta seca em B e traçamos outro arco afim de intersectar o primeiro, desta forma encontramos outro ponto equidistante a A e B, que podemos chama-lo de ponto C. Como dois pontos definem uma reta, tracemos a reta que passa pelos ponto P e C que contem todos os pontos equidistantes de A e B, consequentemente, esta reta é a mediatriz de A e B, logo esta é a reta perpendicular a r que passa pelo ponto P.

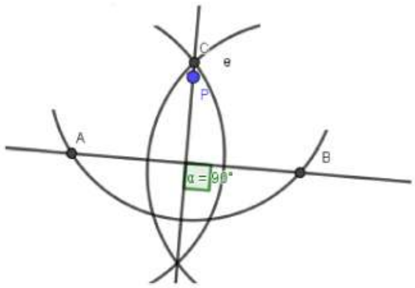

Figura 1.8: Construção da reta perpendicular

Construção 5: Traçar a perpendicular a uma reta r dada pelo ponto P pertencente a r.

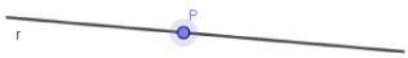

Figura 1.9: Reta e ponto dado pertencente a r

Resolução: Como já vimos que a mediatriz é uma reta perpendicular que passa pelo ponto médio de um segmento, faremos da seguinte forma: abertura qualquer no compasso, ponta seca em P, traça-se metade de uma circunferência com centro em P, achado os dois pontos A e B que intersectam a reta r, verifica-se que P agora é ponto médio do segmento AB, agora, com procedimento já conhecido nos exercícios anteriores, basta encontrar mais um ponto equidistante a A e B e segue-se a Mediatriz, que atende as exigências do exercício.

Construção 6: Traçar a bissetriz de um ângulo dado:

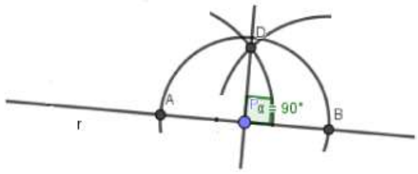

Figura 1.10: Construção da perpendicular segunda parte

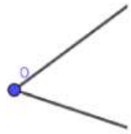

Figura 1.11: Ângulo dado

Resolução: Sabendo que bissetriz de um ângulo é uma semi-reta que divide um ângulo em dois ângulos congruentes, tomamos o compasso e com abertura qualquer, fixamos a ponta seca em O, traçamos um arco que intersecte os dois lados do ângulo encontrando os pontos A e B. Agora com abertura qualquer, que pode até ser a mesma do primeiro arco, tracemos um pequeno arco com centro em A, agora com a mesma abertura tracemos outro arco com centro em B, intersectando o arco encontrando o ponto C, agora é só traçar a semi-reta OC que é a bissetriz do ângulo dado. Mas este procedimento não é suficiente para provar que a semi-reta OC é bissetriz, para tanto basta observar que OA e OB são congruentes de tamanho a, e AC e BC também são congruentes de tamanho b, desta forma verificamos, pelo caso LLL, que os triângulos $\triangle$OAC e $\triangle$OBC são congruentes com o lado AC comum, assim podemos afirmar que os ângulos AÔC e AÔB são congruentes, portanto OC é bissetriz do ângulo AÔC.

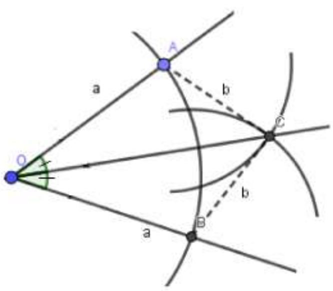

Figura 1.12: Construção da bissetriz

Construção 7: Traçar uma reta paralela a reta r passando por um ponto P fora dela.

Resolução: Para tal procedimento faremos o seguinte: tomamos um ponto A em r a abrimos o compasso com distância AP, traçamos um arco que passa por P e intersecta a reta r

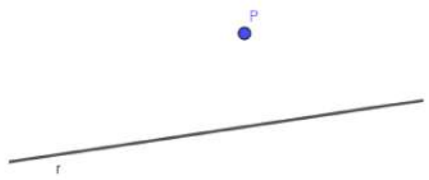

Figura 1.13: Ponto e reta dados

encontrando um ponto B, agora com mesma abertura, ponta seca em B traçamos um novo arco, novamente com a mesma abertura, ponta seca em P, traçamos outro arco que intersecte o primeiro encontrando o ponto Q, pronto, agora basta traçar a reta s que passa pelos pontos P e Q que é paralela a r. Justificamos a construção, observando que usamos a mesma abertura do compasso em todos os arcos, desta forma, podemos afirmar que AB, PQ, AP e BQ possuem a mesma medida, desta forma temos um losango é um paralelogramo temos assim dois pares de lados paralelos, satisfazendo a exigência do problema.

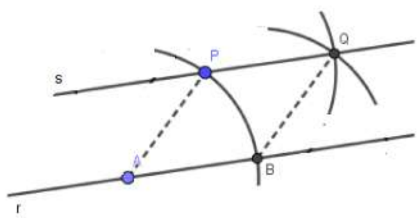

Figura 1.14: Construção da paralela

Vamos mostrar a construção de dois pontos notáveis de um triângulo:

1.1.1 Circuncentro

CIRCUNFERÊNCIA CIRCUNSCRITA A UM TRIÂNGULO

Teorema: as mediatrizes dos lados de um triângulo concorrem num mesmo ponto chamado Circuncentro, o qual é o centro da circunferência circunscrita ao triângulo, em consequência este ponto é equidistante dos vértices do triângulo.

Seja o triângulo ΔABC. Então os mediatrizes de AB, AC e BC intersectam num ponto P. Além disso, PA = PB = PC. Demonstração: Dado o triângulo ΔABC com M, N e P, pontos médios dos lados AB, BC e AC respectivamente. Como as mediatrizes de AB e BC são concorrentes e se cruzam no ponto O. Como O está na mediatriz de AB, é equidistante de A e B, sendo OA = OB. Analogamente, OB = OC e consequentemente, O é equidistante dos vértices.

Agora considere a reta que passa pelo ponto P e O. Como P é o ponto médio e O é equidistante de A e C, a reta é mediatriz do lado AC. Portanto, todas as mediatrizes cruzam em O que

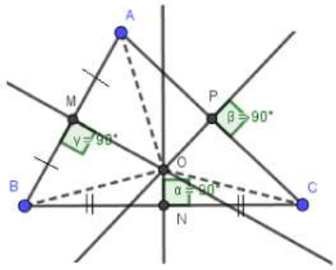

Figura 1.15: Construção do circuncentro

é equidistante dos vértices. Uma circunferência com centro no circuncentro que passa em um dos vértices, passa em todos os outros vértices. A circunferência que passa em todos os vértices de um polígono é chamado de circunferência circunscrita. A intersecção das mediatrizes dos lados de um triângulo é o centro da circunferência circunscrita.

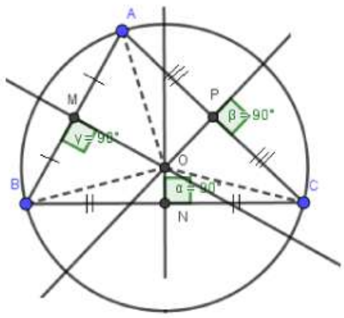

Figura 1.16: Construção do circuncentro segunda parte

Construção 8: Traçar a circunferência que passa por 3 pontos dados:

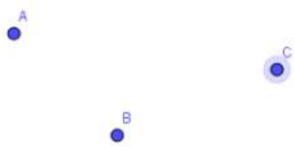

Figura 1.17: Pontos dados

Resolução: Sabendo que pelos três pontos podemos traçar o triângulo ΔABC, sendo assim basta encontrarmos as mediatrizes dos segmentos AB, BC e AC (procedimento já conhecido), Entretanto, como já demonstramos que as mediatrizes dos segmentos que formam um triângulo se cruzam num único ponto chamado circuncentro, basta que tracemos duas mediatrizes para encontra-lo, agora basta traçar a circunferência com centro no circuncentro.

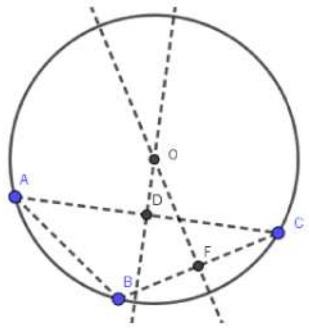

Figura 1.18: Ponto equidistante encontrados

Depois do conhecimento e demonstração do circuncentro, vamos resolver o caso do início do capítulo referente ao professor que veio para Manaus trabalhar em 3 escolas distintas e gostaria de ficar à mesma distância de cada escola.

Para a solução deste problema à luz da construção geométrica via régua e compasso, devemos encontrar um ponto em que a distância deste ponto às escolas, representadas pelos pontos, A, B e C, seja a mesma.

Se fossem apenas dois colégios, A e B, esta casa deveria estar posicionada no ponto médio do segmento AB. Como são três colégios não colineares, devemos encontrar uma casa, um ponto, que denotaremos por ponto O, que esteja a igual distância dos três colégios. Este ponto então é o centro do círculo que possui os pontos A, B e C em sua circunferência. Então devemos inscrever o triângulo ΔABC no círculo de raio AO = OB = OC, onde O é o centro deste círculo, que deverá ser posicionada a casa desejada.

Então, neste caso, vamos usar o conhecimento de circuncentro do triângulo, pois, como os pontos não são colineares, podemos traçar o triângulo ΔABC e assim basta que tracemos duas mediatrizes dos segmentos que formam este triângulo, encontrando o ponto O, local onde deverá ficar a casa procurada, procedimento já conhecido.

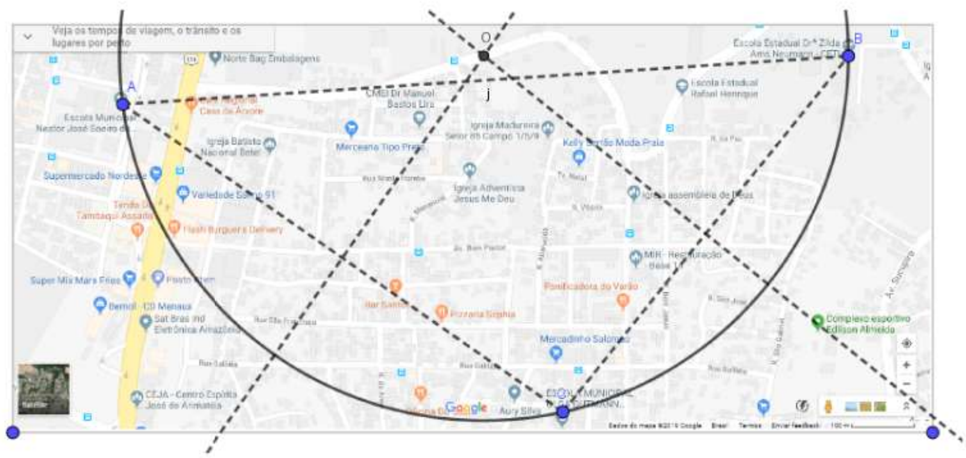

Figura 1.19: Mapa de parte da cidade de Manaus

1.1.2 Incentro

CIRCUNFERÊNCIA INSCRITA A UM TRIÂNGULO.

Teorema: As bissetrizes dos ângulos de um triângulo concorrem em um único ponto no seu interior chamado incentro o qual é equidistante de seu lados.

Demonstração: Considere o triângulo ΔABC e as bissetrizes dos vértices B e C. Então elas cruzam no interior do triângulo que denotaremos por O.

Como O está sobre a bissetriz do vértice B, ele é equidistante a AB e BC. Mas também está na bissetriz do vértice C de forma que O é equidistante de AC e BC. Assim, O é equidistante aos três lados. Agora considere AO. Como AO divide o ângulo do vértice A e passa no ponto fora do vértice equidistante de AB e AC, este será a bissetriz do ângulo do vértice A.

A circunferência com centro em O que passa num dos pontos entre D, E e F passa em todos os outros. Como OM, ON e OP são raios desta circunferência e são ortogonais aos lados do triângulo, a circuferência tangencia todos os lados do triângulo. A circunferência que tangencia todos os lados de um polígono é denominado de circunferência inscrita. Logo, a interseção das bissetrizes determina o centro da circunferência inscrita de um triângulo.

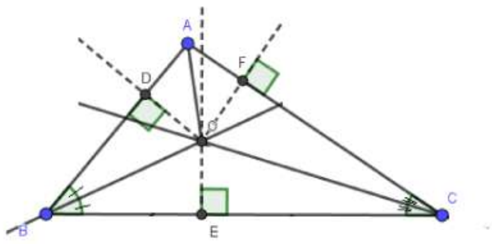

Figura 1.20: Construção do Incentro

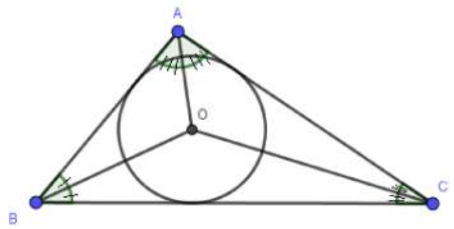

Figura 1.21: Construção do Incentro 2

Construção 9: Dado um triângulo ΔABC, construir um círculo inscrito a ele.

Resolução: Para construir um círculo devemos determinar seu centro e o comprimento de seu raio. Neste caso, queremos um círculo que tangencia os três lados do triangulo ΔABC, é claro que já vimos que o centro terá, necessariamente, que ser no ponto notável chamado de

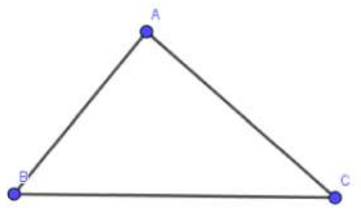

Figura 1.22: Triângulo $\triangle ABC$ dado

Incentro que é equidistante dos três lados deste triângulo. Como já vimos que o Incentro é o ponto de encontro das três bissetrizes dos ângulos internos de um triângulo, basta encontrarmos este ponto,e para tal, como já foi provado, basta que traçemos duas bissetrizes e o ponto de interseção será o ponto procurado para o centro da circunferência. Mais importante que uma construção geométrica é saber descrever como fazer a construção, então neste caso, faremos um pequeno roteiro para construção da figura solicitada: 1º Traçar as bissetrizes de dois ângulos internos ($\hat{B}$ e $\hat{C}$)

2º Seja I a interseção dessas bissetrizes.

3º Por I, traçar uma perpendicular a um dos lados (BC) de $\triangle ABC$.

4º Seja D o pé da perpendicular a BC, traçada por I.

5º O Raio da círcunferência será ID.

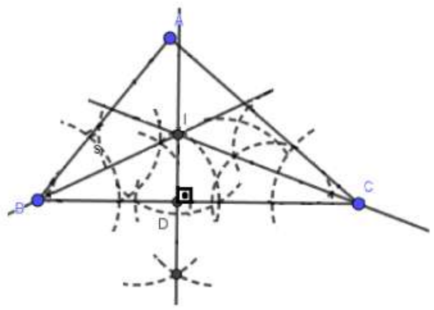

Figura 1.23: Construção do círculo inscrito no triângulo

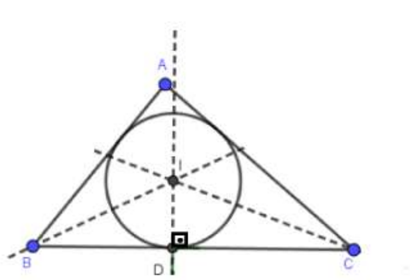

Figura 1.24: Construção do círculo inscrito no triângulo segunda parte

1.1.3 Arco Capaz

Vamos demonstrar o arco capaz através de uma construção geométrica e mais a frente na seção de resolução de problemas via Lugares Geométricos, vamos mostrar a fundamentação do arco capaz.

Construção 10: Dado um ângulo α e um segmento AB. Determinar um ponto P, no plano, que $A\hat{P}B = \alpha$.

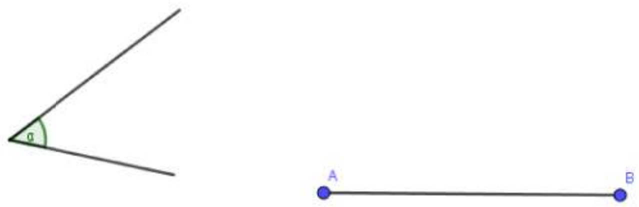

Figura 1.25: Ângulo e segmento dados

Como já foi demonstrado e provado alguns tipos de construções básicas, a partir de agora vamos somente lembrar os procedimentos sem muitos detalhes. Neste caso, faremos primeiramente a construção de outro ângulo com medida igual ao de α tendo como vértice o ponto A do segmento AB (procedimento já conhecido na segunda construção. A grosso modo vamos transferir o ângulo α para o segmento AB. Agora vamos traçar uma perpendicular a reta que formou o ângulo α que passe pelo ponto A (procedimento também já conhecido na quarta construção). Na sequência vamos traçar a mediatriz do segmento AB (procedimento já conhecido na terceira construção), encontrando o ponto M entre A e B e o ponto O pertencente a mediatriz do segmento AB, logo é válido que OA $\cong$ OB, agora com ponta seca do compasso em O e abertura de comprimento OA, tracemos o arco que inicia em A e termina em B. Observe que o ângulo adjacente a α é o próprio complemento de α, pois estas retas são perpendiculares e o ângulo $A\hat{M}O$ é igual a 90º, então o ângulo $A\hat{O}M$ têm medida igual a α, daí observamos que o mesmo acontece com os ângulos $M\hat{B}O$ e $B\hat{O}M$, logo os triângulos ΔAOM e ΔBOM são congruentes. Observe que se completarmos a circunferência, o arco que ficou na parte superior é igual a 2α, isso quer dizer que se pegarmos qualquer ponto do arco na parte inferior este terá medida igual a metade do arco superior, ou seja terá medida igual a α. Na verdade concluímos que qualquer ponto P pertencente ao arco inferior, satisfaz a exigência da construção, conforme a figura [**?**]. O nome deste arco é chamado de Arco Capaz de α sobre a corda AB. No capítulo seguinte, mostraremos como fazer essa construção com movimento do Ponto P mostrando que este não se altera.

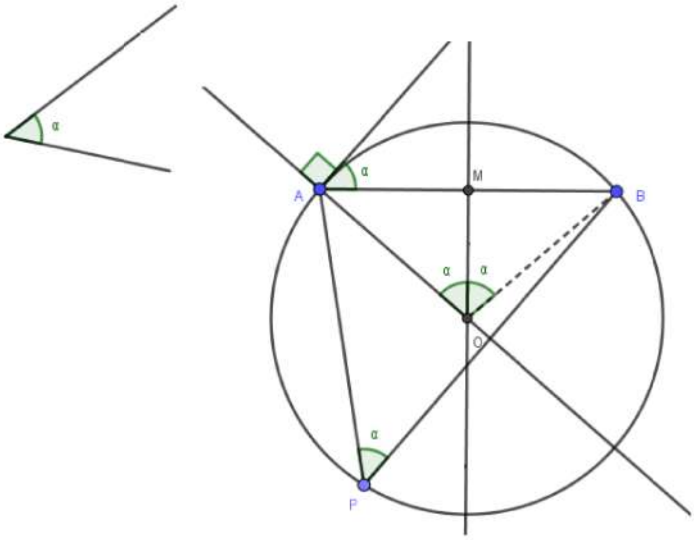

Figura 1.26: Construção do arco capaz

1.2 O Teorema Fundamental da Proporcionalidade e o Teorema de Tales

Definição: Se uma transversal intersecciona duas restas r e s, respectivamente, nos pontos A e B, dizemos que r e s determinam o segmento AB sobre a transversal.

Se uma transversal intersecciona três rets r, s e t nos pontos A, B e C, respectivamente, e se AB = BC, então dizemos que as três retas determinam segmentos congruentes sobre a transversal.

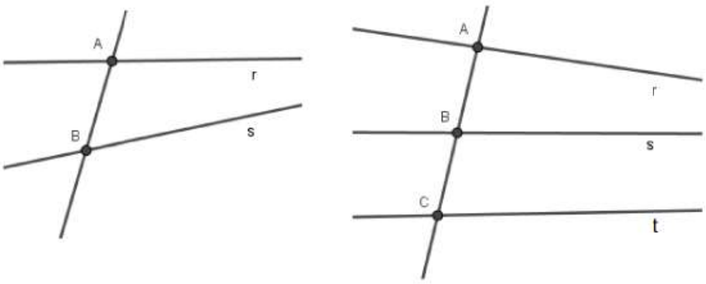

Figura 1.27: Retas paralelas e transversais

Teorema: Se três retas paralelas determinam segmentos congruentes sobre uma transversal, então determinam segmentos congruentes sobre qualquer outra transversal.

Demonstração: Consideramos uma transversal t interseccionando as retas paralelas a, b e c nos pontos A, B e C, respectivamente, com AB = BC. Seja s uma outra transversal interseccionando estas retas nos pontos D, E e F, respectivamente. Vamos mostrar que DE = EF.

Demonstraremos primeiro o teorema no caso em que s e t não são paralelas e A $\neq$ D, como na figura abaixo:

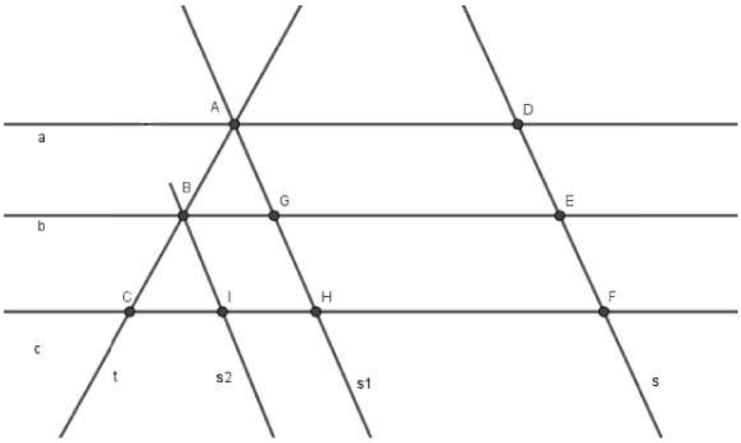

Figura 1.28: Retas paralelas e transversais segunda parte

Seja s1 a reta paralela a s que passa por A, e que intersecciona b e c em G e H, respectivamente: e seja s2 a reta paralela a s que passa por B, e que intersecciona a reta c em I. Temos assim formados os paralelogramos AGED e BIFE, e disso decorre:

$$AG \cong DE \text{ e } BI \cong EF \ (*)$$

Agora, pelo teorema A.L.A. temos que $\Delta ABG \cong \Delta BCI$ pois AB = BC, por hipótese; e $A\hat{B}G \cong B\hat{C}I$ e $B\hat{A}G \cong B\hat{C}I$, ambos pelo postulado das paralelas que diz:
a) Duas retas paralelas cortadas por uma transversal formam pares de ângulo correspondentes.
b) Duas retas distintas paraleleas a uma mesma reta são paralelas entre si.
c) Se uma reta é perpendicular a uma de duas retas paralelas, então é perpendicular à outra.
Portanto AG = BI.

Substituindo em (*) obtemos DE = EF.

Vamos considerar o caso em que as transversais se interseccionam em um ponto A da reta a. Seja s1 a reta que passa por B, paralela a s e que intersecciona c em I (figura 1 abaixo). Temos que $\Delta ABE \cong \Delta BCI$ (pelo teorema A.L.A) e portanto AE = BI. Como BIFE é um paralelogramo, temos BI = EF. Portanto AE = EF, isto é, DE = EF.

No caso em que as duas transversais s e t são paralelas, como na figura 2 abaixo, o resultado decorre imediatamente das propriedades dos paralelogramos. (Esta demonstração pode ser consultada na referência [2]

1.3 Segmentos Construtíveis

DIVISÃO DE UM SEGMENTO

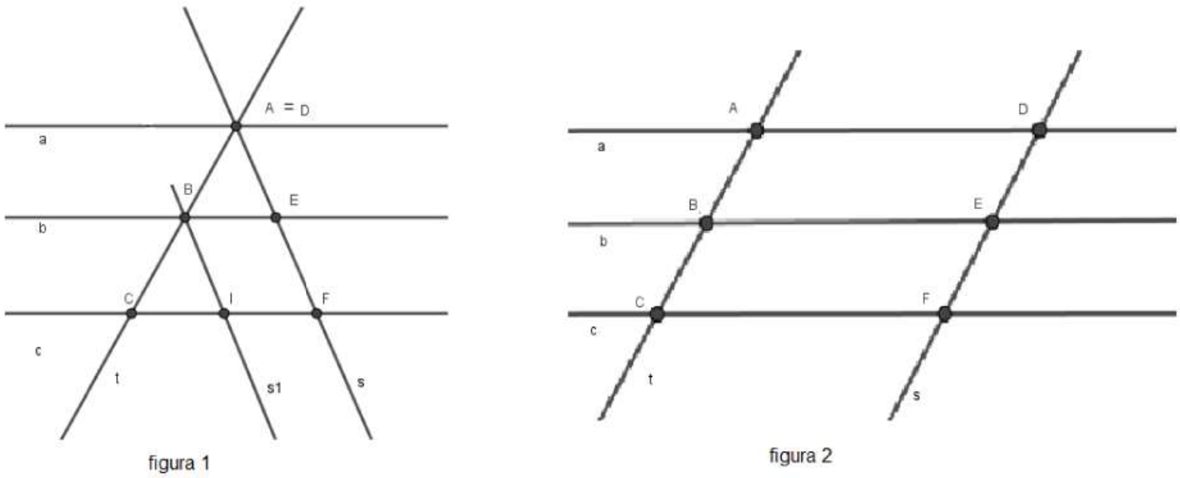

Figura 1.29: Retas paralelas e transversais terceira parte

Divisão de um segmento usando régua e compasso é um problema elementar mas que muito ajuda nas construções mais elaboradas, além de que, fazendo divisão de um segmento o aluno já fixa o aprendizado do Teorema de Talles, relacionado as retas paralelas e duas transversais.

Construção 11: Dividir o segmento AB em 3 partes iguais.

Figura 1.30: Segmento dado

Para esta construção, iniciaremos traçando um ângulo qualquer com uso da régua, neste caso escolhemos o ponto A para ser vértice do ângulo. Agora com abertura qualquer do compasso, a partir de A, como queremos 3 seguimentos de mesmo comprimento, marcamos 3 pontos equidistantes C, D e E, conforme abertura do compasso, agora, com uso da régua, traçamos a reta que passa pelos pontos E e B, na sequência traçar uma paralela a EB que passa pelo ponto D intersectando o segmento AB encontrando o ponto N, por último, traçar outra paralela a EB que passe pelo ponto C intersectando o segmento AB em M. Como o procedimento de traçar paralelas já é conhecido (construção 7), podemos fazer uso do esquadro, o procedimento é bem simples, basta posicionar o esquadro no segmento EB, apoiar a régua na parte inferior do esquadro e arrastar o esquadro encontrando os outros pontos de interseção no segmento AB.

O procedimento em si, não é suficiente para provar que os segmentos AM, MN e NB possuem a mesma medida. No entanto, é fácil verificar uma vez que já demonstramos o teorema de Tales. Tendo em vista que os segmentos AC, CD e DE possuem a mesma medida por cons-

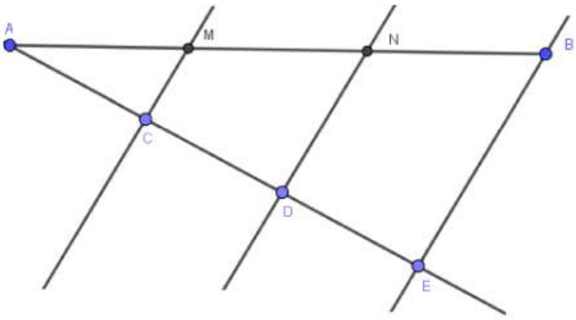

Figura 1.31: Divisão do segmento

trução e que os segmentos EB, DN e CM são paralelos entre si, pelo Teorema de Tales que afirma: Se duas retas são transversais a aum conjunto de retas paralelas, então a razão entre os comprimentos de dois segmentos quaisquer de uma dela é igual à razão entre os comprimentos dos segmentos correpondentes da outra. Então, como sabemos que AC, CD e DE possuem a mesma medida n, então AC = CD = DE = n e seja AM = p, MN = q e NB = r, pelo teorema de Tales, temos:

$$\frac{AC}{AM} = \frac{CD}{MN}$$

Daí, temos que: CD . AM = AC . MN, e como CD = AM = n e AM = p e MN = q
Segui-se que: n . p = n . q, logo p = q, portanto AM = MN

agora tomemos:

$$\frac{CD}{DE} = \frac{MN}{NB}$$

De forma análoga, temos:
CD . NB = DE . MN, como CD = DE = n e seja MN = q e NB = r
temos que: n . r = n . q, logo r = q, quer dizer que MN = NB

Portanto, AM = MN = NB, satisfazendo a exigencia do problema.

Construção 12: Dividir o segmento AB em partes proporcionais a 2 e 3.

Figura 1.32: Segmento dado

Resolução: Como temos que dividir o segmento em partes proporcionais a 2 e 3, começaremos dividindo o segmento AB em 5 partes iguais. Então como na construção anterior, vamos, usando o mesmo procedimento, traçar um ângulo qualquer com vértice em A. Com abertura qualquer do compasso, agora marcar 5 pontos equidistantes na reta construida, seja C, D, E, F e G estes pontos. tomando o comprimento de cada segmento AC, CD, DE, EF e FG como uma unidade unitária qualquer, percebemos que o segmento AD valor 2 unidades de medida e o segmento DG equivale a 3 unidades de medida. Agora traçar a reta que contenha os pontos GB, daí traçar uma paralela a GB que passe pelo ponto D, intersectando o semento AB em N, desta forma temos o segmento AN proporcional a 2 e o segmento NB proporcional a 3.

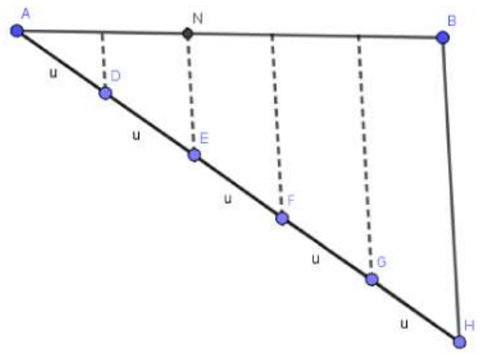

Figura 1.33: Divisão do segmento em partes proporcionais

Pelos mesmos argumentos da construção anterior, podemos justificar a construção, pois percebemos que $\frac{AD}{DG} = \frac{AN}{NB}$, como AD = 2 unidades de medida e DG = 3 unidades de medida, temos que: $\frac{2}{3} = \frac{MN}{NB}$ que é equivalente a:

$$\frac{AN}{2} = \frac{NB}{3}$$

Antes de iniciarmos a próxima construção que trata-se de traçamos um quadrado que seja o dobro do primeiro, iremos postular as seguintes propriedades.

1º Polígonos congruentes têm áres iguais.

2º Se um polígono convexo é particionado em um número finito de outros polígono convexos, isto é, se o polígono é a união de um número finito de outros polígonos convexos, tais que dois quaisquer deles partilham somente um vértice ou uma aresta, então a área do polígono maior é a soma das áreas dos polígonos menores.

3º Se um polígono (maior) contém outro (menor) em seu interior, então a área do polígono maior é maior que a área do polígono menor.

4º A área de um quadrado de lado 1cm é igual a 1cm^2.

Valendo os postulados 1 a 4 acima, vamos particionar uma quadrado de lado n $\in \mathbb{N}$ em n^2 quadrados de lados 1 cada. Denotando a área do quadrado maior por A$_n$ igual a soma das áres desss n^2 quadrados de lado 1, de maneira que

$$A_n = n^2.$$

Considere, agora um quadrado de lado $\frac{m}{n}$ com m, n $\in \mathbb{N}$ e área $A_{\frac{m}{n}}$. Arranje n^2 cópias do mesmo, empilhando n quadrados de lado $\frac{m}{n}$ por fila, em n filas, formando assim um quadrado de lado $\frac{m}{n}$.n = m. Tal quadrado maior terá, como já sabemos, área m^2; por outro lado , como ele está particionado em n^2 quadrados, cada um dos quais de lado $\frac{m}{n}$, sua área é igual à soma das áreas desses n^2 quadrados, isto é:

$$m^2 = n^2.A_{\frac{m}{n}}$$

Portanto:

$$A_{\frac{m}{n}} = \frac{m^2}{n^2}. = (\frac{m}{n})^2$$

A discussão acima sugere que a área de um quadrado de lado l deve ser igual a l^2.
A área de um paralelogramo de base a e altura h é igual a ah.
Demonstração: Seja ABCD um paralelogramo de diagonais AC e BD, e E e F respectivamente os pés das perpendiculares baixadas de D e C à reta AB. Ademais, suponha, sem perda de generalidade, que E $\in$ AB. É imediato verificar que os triângulos ADE e BCF são

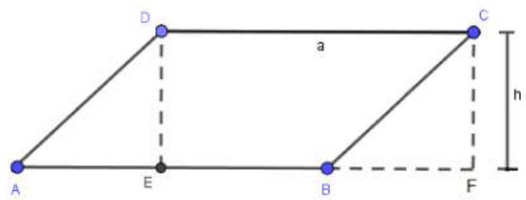

Figura 1.34: Paralelogramo

congruentes, de modo que AE = BF e pelo postulado 1) A(ADE) = A(BCF). Então, temos:

$$A(ABCD) = A(ADE) + A(BEDC) = A(BCF) + A(BEDC) = A(CDEF)$$

Por outro lado , CDEF é um retângulo de altura h e base a, pois:

$$EF = EB + BF = EB + AE = AB = a$$

Portanto, segue que A(ABCD) = A(EFCD) = ah.

Para o caso do triângulo, temos a seguinte proposição:

Seja ABC um triângulo de lados AB = c, AC = b e BC = a, e as alturas h_a, h_b e h_c, respectivamente relativas aos lados a, b e c. Então,

$$A(ABC) = \frac{ah_a}{2} = \frac{bh_b}{2} = \frac{ch_c}{2}$$

Em particular, ah_a = bh_b = ch_c.

Demonstração: Seja S = A(ABC) e D a interseção da paralela a BC por A com a paralela a AB por C (figura abaixo). Então ABC $\cong$ CDa pelo caso ALA (uma vez que B$\hat{A}$C = D$\hat{C}$A, AC é lado comum B$\hat{C}$A = D$\hat{A}$C), de sorte que A(ABC) = A(CDA) pelo postulado 1.

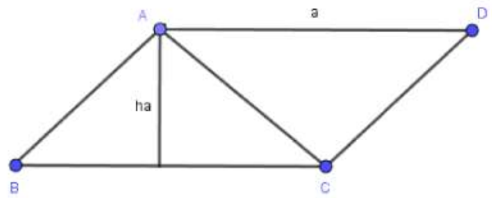

Figura 1.35: Paralelogramo segunda parte

Mas, como ABCD é um paralelogramo de base a e altura h_a, segue que:

$$2S = A(ABC) + A(CDA) = A(ABCD) = ah_a$$

Portanto, A(ABC) = S = $\frac{1}{2}$ah_a, e as outras duas igualdades podem ser obtidas de modo análogo.

De posse do material discutido até aqui, calcular áreas de polígonos convexos é, em princípio uma tarefa fácil: uma vez que as diagonais do mesmo, traçadas a partir de um de seus vértices, o particionam em triângulos, basta calcular a área de cada um desses triângulos com a ajuda da proposição anterior, somando os resultados obtidos.

Antes de entrar na próxima construção vamos finalizar esta última parte falando sobre razão de semelhanças entre polígonos. Vamos pegar o caso de triângulos e partir daí basta generalizar para outros casos.

Sejam ABC e A'B'C' dois triângulos semelhantes. Sendo k a razão de semelhança de ABC para A'B'C', temos:

$$\frac{A(ABC}{A(A'B'C')} = k^2$$

Demonstração: Seja o triângulo ΔABC, onde BC = a, B'C' = a' e h e h' as alturas de ABC e A'B'C', respectivamente relativas a BC e B'C'. Sendo a = k.a' e h = k.h'm seque que:

$$\frac{A(ABC)}{A(A'B'C')} = \frac{ah}{a'h'} = \frac{ka'.kh'}{a'h'} = k^2$$

1.3.1 Construção do Segmento Medindo Raiz de $\sqrt{n}$

Construção 13: Dado um segmento AB = a, construir um segmento de a$\sqrt{n}$ com n $\in \mathbb{N}$

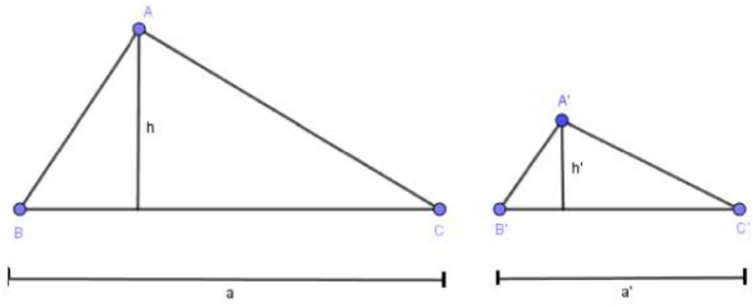

Figura 1.36: Triângulos semelhantes

Comentário: Trata-se de uma construção, relativamente, simples, onde sua solução pode ser usada para resolução de problema muito mais complexos. É claro que não faremos um segmento de tamanho n, pois n é qualquer natural, no entanto, vamos mostrar como podemos chegar a um segmento a$\sqrt{2}$ ou a$\sqrt{5}$ e mostrar como este mesmo processo pode ser usado para construir um segmento de comprimento a$\sqrt{n}$.

Podemos realizar algumas conjecturas, por exemplo, podemos começar a construir a$\sqrt{2}$, depois a$\sqrt{3}$, a$\sqrt{4}$, a$\sqrt{5}$ e partir dai, podemos generalizar o processo para qualquer n $\in \mathbb{N}$.

Vamos fazer algumas sucessivas construções e verificar um padrão. Primeiramente, vamos traçar um segmento igual AC perpendicular a AB de forma que o segmento AC e AB tenha comprimento a, então, pelo teorema de Pitágoras o comprimento BC terá comprimento igual a a$\sqrt{2}$, se o n fosse 2, o problema já teria sido resolvido, no entanto, vamos usar este procedimento agora para encontrar a$\sqrt{3}$. Percebemos que se traçarmos uma perpendicular a hipotenusa a$\sqrt{2}$, teremos outro triângulo de catetos a e a$\sqrt{2}$ e , pelo teorema de pitágoras, a nova hipotenusa será igual a $\sqrt{a^2 + (a\sqrt{2})^2}$ = a$\sqrt{3}$. Vamos repetir o procedimento, traçar um segmento de comprimento 'a' perpendicular a nova hipotenusa, daí teremos um novo triângulo retângulo de catetos a e a$\sqrt{3}$.

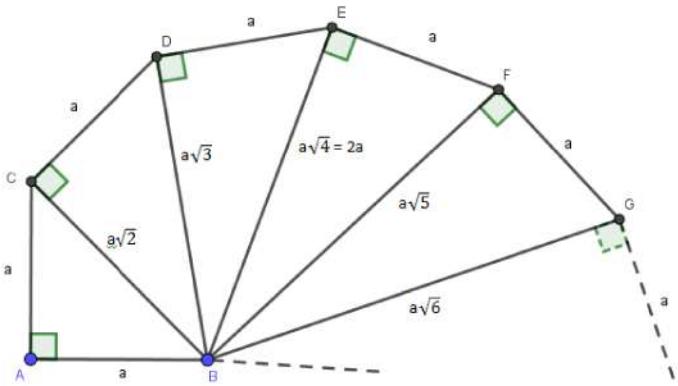

Figura 1.37: Construção do segmento $\sqrt{n}$

Recorrentemente, percebemos que vamos chegar a um triângulo de catetos a e a$\sqrt{n-1}$, considerando sua hipotenusa como y e, pelo teorema de Pitágoras, temos:

$$y^2 = a^2 + (a\sqrt{n-1})^2$$
$$y^2 = a^2 + (n-1)a^2$$
$$y^2 = a^2(1 + (n - 1))$$
$$y^2 = a^2 n$$
$$y = a\sqrt{n}$$

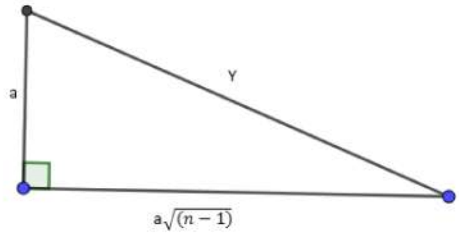

Figura 1.38: Construção do segmento $\sqrt{n}$ parte final

De acordo com as construções e com a recorrência, verificamos que o segmento procurado a$\sqrt{n}$ é a hipotenusa y, portanto para traçar um segmento de tamanhao a$\sqrt{n}$, n $\in \mathbb{N}$, este será a hipotenusa do triângulo retângulo de catetos a e $a\sqrt{n-1}$ (pode ser consultado a referência [7]

Fazendo uma pequena análise com relação as construções anteriores sobre intersecções, observa-se que partindo de pontos do plano com coordenadas racionais e fizermos construções com régua e compasso, que envolva apenas, intersecções de reta com reta, reta com círculo ou círculo com círculo, os pontos obtidos, possuem coordenadas racionais ou, no máximo, passam a ser da forma a + b$\sqrt{c}$, onde a, b e c são racionais e c ≥ 0. Se continuar-mos prosseguindo com uma segunda etapa de construção com régua e compasso, os novos números das coodenadas ainda serão do tipo a + b$\sqrt{c}$, então segue a proposição:
"O conjunto A = $\{a + b\sqrt{c}; a, b \quad e \quad c \in \mathbb{Q}, c \geq 0\}$ com operações de adição e multiplicação é um corpo". A demonstração desta proposição pode ser consultada nos livros de introdução a análise real, por exemplo a referência [5], ou se preferir no endereço: `www.mat.unb.br/furtado/homepage/verao/livro_de_analise-novo.pdf`.

Como já vimos, um ponto A é construtível se o ponto a ele associado na reta puder ser construído a partir de um segmento unitário. Entretanto o segmento unitário está associado a unidade 1 que é um racional e pelo que já vimos, partindo de um ponto com coordenadas racionais, fazendo um número finito de intersecções com retas e/ou circunferências, obtemos um número que pode ser escrito como um racional usando apenas adição, multiplicação, inversos, simétricos e raízes quadradas. Assim sendo, segue o seguinte critério de construtibilidade:

Um número a é construtível se, e somente se, puder ser escrito numa expressão algébrica em termos de números racionais e envolvendo apenas adições, multiplicações, simétricos, inversos e raízes de ordem par.

Por exemplo o número a = $\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}$ é construtível pois ele já está escrito numa expressão algébrica em termos do racional 2 e envolvendo raízes de ordem par.

O problema agora consiste em buscar formas de reconhecer se um número dado arbitrariamente pode ou não ser escrito da forma dada na proposição anterior. Aqui nesta seção vamos aceitar algumas proposições estudadas e demonstradas em livros de construções geométricas:

Todo número construtível é raiz de uma equação polinomial, cujos coeficientes são números inteiros.

Todo número construtível é algébrico.

Um número transcendente não é construtível

É importante ressaltar que existem números algébricos que não são construtíveis e que, portanto, a recíproca da proposição "Todo número construtível é algébrico"não é verdadeira. Por meio das pesquisas e construções, verificamos que um número construtível é sempre uma raiz de um polinômio com coeficientes inteiros e cujo grau é uma potência de 2. Um fato geral, que não vamos demonstrar aqui é que "Todo número algébrico é raiz de um único polinômio irredutível com coeficientes inteiros", o grau deste polinômio é dito grau do número algébrico.

1.4 Problemas de Construções Geométricas elementares

A partir de agora, veremos algumas construções que são um pouco mais sofisticadas, pois, já temos, basicamente, toda a bagagem necessária para construi-las.

Construção 14: Sobre o segmento AB, encontre o ponto P de modo que o quadrado de lado AP tenha o dobro da área do quadrado de lado PB.

Trata-se de uma construção um pouco mais sofsticada, então vamos usar um pouco de teoria para poder montar uma estratégia e chegar no objetivo do problema. Para tanto podemos pensar no seguinte: consideremos um segmento AB, então, estamos procurando um ponto P entre A e B de modo que os segmentos AP e PB sejam bases de um quadrado Q_1 e outro Q_2, respectivamente, de modo que Q_1 tenha área igual ao dobro da área do quadrado Q_2. Já vimos que a razão entre duas figuras semelhantes é igual ao quadrado da razão de semelhança. Diante desta afirmação, intuitivamente, percebemos que todas as figuras regulares de mesmo gênero são semelhantes entre si, então todos quadrados são semelhantes entre si e a razão de semelhança é a razão entre seus lados. Tomando os seguimento AP e PB como lados dos quadrados Q_1 e Q_2, respectivamente e sendo AP = a_1 e PB = a_2 que são os lados dos quadrados, temos que os dois quadrados são semelhantes e a razão entre eles é $\frac{a_1}{a_2}$, sabemos ainda a razão entrea as áreas desses dois quadrados será $\frac{a_1^2}{a_2^2}$ e neste caso, como Q_1 têm área igual ao dobro de Q_2, essa razão razão terá que ser igual a 2, logo temos o seguinte: $\frac{a_1^2}{a_2^2} = \frac{2}{1}$, logo extraindo a raiz quadrada dos dois lados temos que $\frac{a_1}{a_2} = \frac{\sqrt{2}}{1}$, como a idéia não é medir, podemos usar uma unidade de medida qualquer, vamos usar a letra 'u' como unidade de medida, então, nesse caso temos $\frac{a_1}{a_2} = \frac{u\sqrt{2}}{u}$, isto quer dizer que, se pegarmos um quadrado de lado u, o outro quadrado que terá área igual ao dobro do primeiro terá que ter lado igual a u$\sqrt{2}$. Observe que se um quadrado tem lado igual a 'u', sua diagonal será igual a u$\sqrt{2}$, então, resumindo, basta dividir o segmento AB em partes proporcionais a u$\sqrt{2}$ e a u.

Agora, com a extratégia montada, vamos contruir o segmento.

Então, seja o o segmento AB dado, primeiramente vamos construir um quadrado de lado 'u'. Para construir o quadrado vamos usar alguns procedimentos já conhecidos nas construção anteriores, vamos primeiramente, traçar um segmento de tamanhao 'u' qualquer, traçar duas perpendiculares nos extremos do segmento de tamanho 'u', agora com o compasso, transferir o tamanho 'u' para os lados laterais e ligar estes últimos pontos, veja que a diagonal deste quadrado é a hipotenusa do triângulo retángulo de lados igual a u, portanto, pelo teorema de Pitágoras temos que esta diagonal é igual a u$\sqrt{2}$. Agora trace um ângulo qualquer a partir do ponto A desenhando a reta s. Com auxílio do compasso, transfira os segmentos u$\sqrt{2}$ e u para a reta s a partir do ponto A, econtrando os pontos C e D, ligue os ponto D e B, encontrando o segmento DB, trace uma paralela ao segmento DB que passe pelo ponto C, encontrando o ponto P em AB, onde AP é proporcional a u$\sqrt{2}$ e PB é proporcional a u. Pronto, como já foi demonstrado anteriormente pelo teorema de Tales, temos dua paralelas e duas transversais, logo:

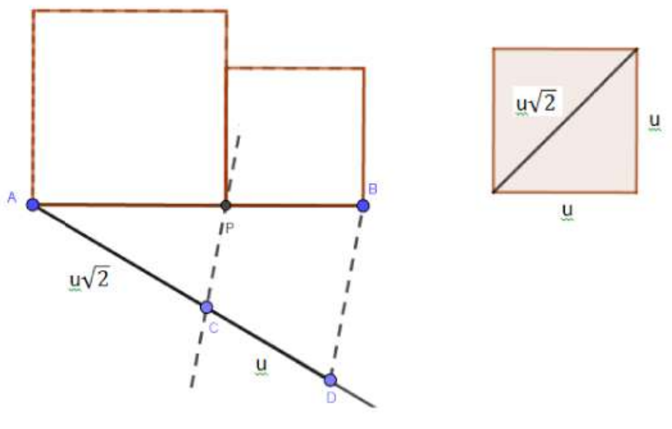

Figura 1.39: Resolução do problema da construção 14

$$\frac{AP}{PB} = \frac{u\sqrt{2}}{u} = \frac{\sqrt{2}}{1}$$

Resumindo, o quadrado de lado AP que possui medida proporcional a u$\sqrt{2}$ têm área igual $(u\sqrt{2})^2$ que é igual a 2u^2 e o quadrado PB de lado proporcional a u, têm área igual a u^2, portanto a área do quadrado de lado AP é o dobro da área do quadrado de lado PB como queríamos construir.

Construção 15: Traçar as tangentes a um círculo dado, passando por um ponto exterior.

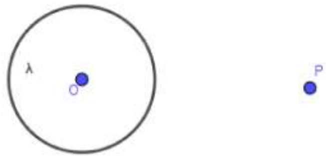

Figura 1.40: Circunferência e ponto dado

Devido a posição relativa do ponto, no caso ser um ponto externo à circunferência λ de centro O, temos duas soluções possíveis, se P estivesse no interior da circunferência não existiria nenhuma tangente e se P estivesse sobre a circunferência existiria somente uma tangente. Para iniciarmos a construção é necessário lembrarmos de algumas propriedade, entre elas, lembrar que uma tangente é uma reta perpendicular à reta normal do círculo, neste caso, uma reta normal será qualquer reta que passe pelo centro do círculo, então, imaginemos esse ângulo reto no círculo, e ligando os três pontos obteremos um triângulo retângulo, no entanto, conhecemos apenas os vértices P e O que é o centro da circunferência λ, falta apenas conhecer o outro vértice que será onde se encontra o ângulo reto, entretanto, um modo bastante elementar de conhecer este último ponto, é lembrar que todo triângulo retângulo cabe numa semi-circunferência, pois a semi-circunferência é o arco capaz de um ângulo reto, logo, isso quer dizer que se traçarmos uma outra circunferência δ de diâmetro de OP, esta circunferência intersectará os pontos desejados, achando estes últimos pontos, automaticamente, encontraremos os pontos de tangência que passam por P.

Baseado no que foi pensado, podemos traçar uma estratégia para organizar o modo dessa construção:

1º Encontrar o ponto médio (M) de AP (procedimento já conhecido)

2º Traçar a circunferência δ de raio MP

3º Sejam $\{A, B\} = \delta \cap \lambda$

4º Traçar as retas PA e PB

TRAÇANDO UMA CORDA

Construção 15:

São dados:

1) Uma circunferência de centro O

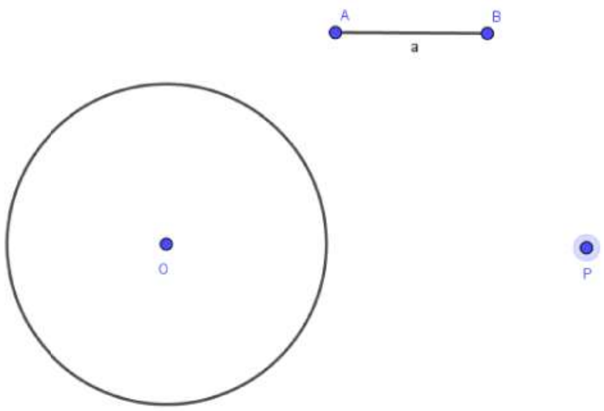

Figura 1.41: Segmento, ponto e círculo dados

2) Um ponto P exterior à circunferência
3) Um segmento de comprimento a

Traçar uma reta por P que determine sobre a circunferência uma corda de comprimento a.

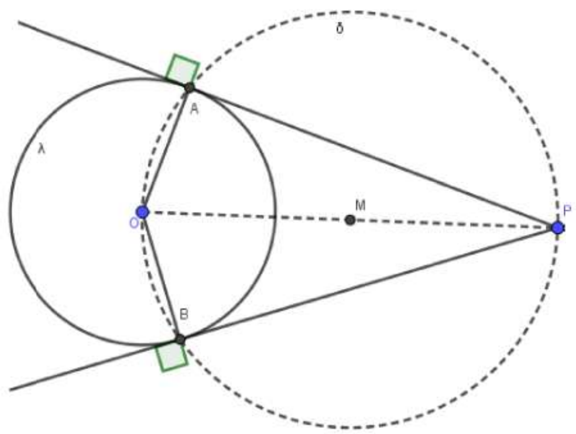

Figura 1.42: Construção das tangentes dado um círculo e um ponto

Comentário: Esta já não é mais uma construção elementar, trata-se de um problema mais elaborado. Diante dos dados fornecidos, a idéia seria traçar por P uma reta secante à circunferência que determina sobre esta circunferência uma corda de comprimento igual ao segmento dado, ou seja, de comprimento a. Em construções um pouco mais elaboradas é sempre válido, antes de iniciar a construção, fazer um esboço. Neste caso o que temos é somente um círculo, um ponto exterior e um segmento de comprimento fixo e temos que encontrar uma secante que passe por P intersectando a circunferência de tal maneira que a corda determinada pela reta que passa por P tenha o comprimento exigido, como o ponto é exterior, já percebemos que haverá duas soluções para o caso. Agora nos perguntamos: Como resolver?

Depois de entender o meu problema, temos que montar uma estratégia para poder chegar na solução. Vale lembrar que sempre que temos uma corda, o raio intersectará a corda ao meio de forma perpendicular, no caso cada pedaço de segmento terá comprimento $\frac{a}{2}$. Percebemos que a figura forma dois triângulos retângulos congruentes de hipotenusa conhecida, no caso igual a R (raio da circunferência)e catetos iguais a $\frac{a}{2}$, falta determinar o comprimento da altura que é o outro cateto. Lembramos ainda que se um conjunto mínimos de propriedades garante esta congruência, também garante que ele seja construtível ou seja: conhecendo a hipotenusa e um dos catetos deste triângulo retângulo, conseguimos construir este triângulo encontrando o outro cateto desconhecido que chamarei de x. Então, primeiramente, farei um esboço de uma circunferência de diâmetro R, lembramos que qualquer triângulo retângulo está inscrito em uma semi-circunferência pelo caso do arco capaz. Percebemos que o cateto $\frac{a}{2}$ está sobre uma das extremidades do diâmetro R, então se abrirmos o compasso no tamanho $\frac{a}{2}$ e traçarmos um arco com ponto seca em uma extremidade do diâmetro R, percebemos que o outro lado é o lado x procurado, vimos que o lado x é perpencicular à corda procurada. Como este segmento é perpendicular, então uma circunferência de raio igual ao comprimento x, será tangente à corda e lembrando que traçar uma tangente a uma circunferência que passe por um ponto externo, já é uma construção conhecida, logo concluimos que encontrar o ponto x, basicamente, resolve o problema. Diante dos comentários conseguiremos traçar nossa estratégia.
1º Faça uma circunferência à parte com diâmetro R (procedimento já conhecido, apenas transferir o comprimento de R para outra reta, achar o ponto médio e traçar a circunferência que, naturalmente, terá diâmetro R)
2º Abra o compasso em $\frac{a}{2}$ (procedimento também já conhecido) e com ponta seca em um dos extremos do diâmetro encontre o ponto de interseção na circunferência, desta forma encontramos o triângulo retângulo de catetos $\frac{a}{2}$ e hipotenusa igual a R, logo o outro cateto é o comprimento x procurado. 3º Compasso com abertura igual ao comprimento x, ponto seca no centro da circunferência dada, traçar a circunferência de raio x 4º Econtrar a tangente à circunferência de raio x que passe pelo ponto P. Naturamente, os ponto A e B que determinam a corda de comprimento a aparecerá e ainda podemos encontrar os pontos A' e B' referente a outra solução.

Construção 16: Construir um triângulo ABC, dados os segmentos BC, a altura h_a relativa ao segmento BC e o ângulo α.

Comentário: Pensando num esboço para resolução desta construção, verificamos que temos um lado conhecido, temos um ângulo dado, vale lembrar que se este ângulo α é conhecido, temos um lugar geométrico dos pontos P que enxergam essa corda BC, ou seja enxergam o segmento BC, seguindo o ângulo α e o nome deste lugar geométrico é arco capaz e já vimos como se faz esta construção. Isso quer dizer que o vértice A está sobre o arco capaz, na verdade todos os pontos deste arco vão enxergar BC sob o ângulo α, entretanto temos que escolher sobre

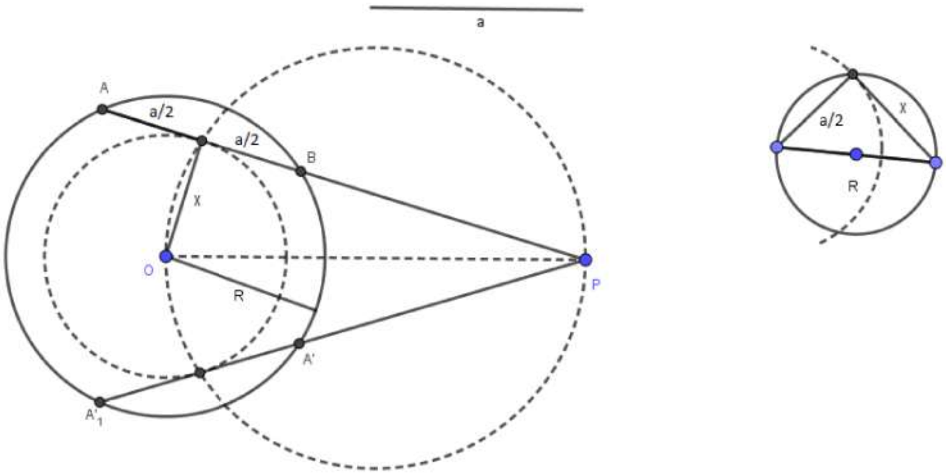

Figura 1.43: Resolução do problema da construção de encontrar a reta que passa por P e pela corda de comprimento dado

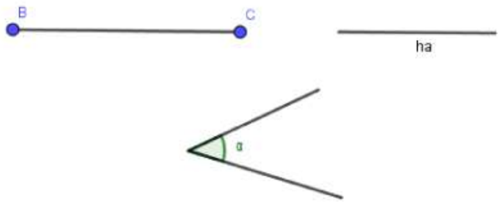

Figura 1.44: Ângulo, lado e altura dados

este arco capaz, um ponto que tenha a distância h_a a BC, para isso traçaremos uma perpendicular a BC, marcamos a altura h_a e traçamos uma paralela a BC que seja distante h_a de BC, é claro que só haverá solução se esta parela intersectar o arco capaz, pode ser que tenha duas soluções ou até mesmo uma se esta paralela for tangente ao arco, caso a altura seja maior que o arco capaz, não haverá solução para o problema.

Depois de montar a estratégia, agora podemos fazer um roteiro para a construção.

1º Traçar uma reta qualquer e transferir o segmento AB para esta reta.

2º Traçar o arco capaz do ângulo α que é dado com o segmento BC, logo, tomando qualquer ponto A pertencente ao arco, o ângulo BÂC sempre será igual ao ângulo α.

3º Escolhido um ponto P passando pela reta, traçar uma perpendicular, transferir o comprimento da altura para esta perpendicula, encontrando o ponto Q. 4º Traçar a paralela ao segmento BC passando por Q, pronto, os pontos encontrando nos dão as soluções. Obs.: É claro que podemos fazer outro arco capaz no outro semi-plano que também resolve o problema e nos dá outro triângulo congruente espelhado.

construção 17: Construir o triângulo ΔABC dados: AB = 5cm, AC = 6cm, h_a = 4cm.

Comentário: Verificando os dados, percebemos que altura relativa parte do vértice A, outra,

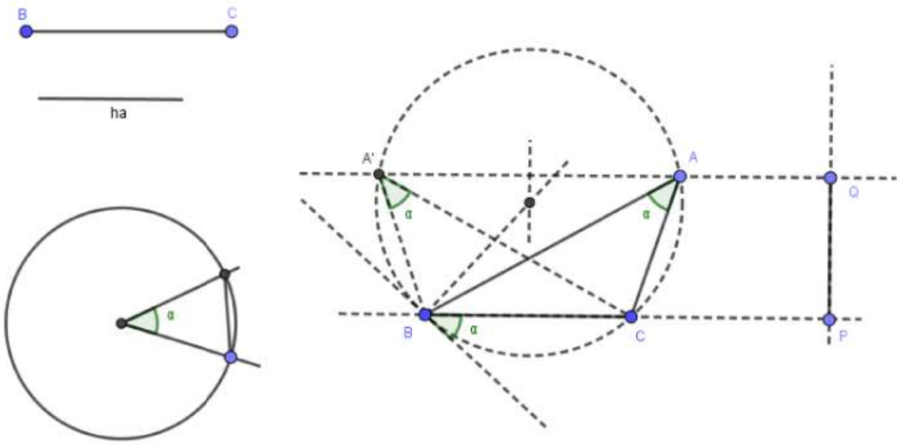

Figura 1.45: Soluções do problema de construir um triângulo dados lado, ângulo e altura

o exercício não nos direciona para uma única solução, pode ser que tenha mais de uma. Então vamos montar o roteiro para construção do exercício.
1º Traçamos uma reta qualquer e marcamos o ponto A.
2º Traçamos uma perpendicula à reta que contêm o ponto A, distante 4cm do ponto A, já nos dando h$_a$
3º Com o compasso, e abertura igual ao segmento AB, 5 cm, ponta seca em A, traço um arco, intersectanto a reta perpendicular em dois pontos, o ponto B e B'.
4º Com o compasso, e abertura igual ao segmento AC, 6 cm, ponta seca em A, traçar outro arco, intersectando a reta perpendicular em dois pontos, o ponto C e C'.

Percebemos que após a construção, temos algumas soluções que atendem a exigencia do exercício, podemos traçar como soluçao os triângulos $\triangle$ABC', $\triangle$AB'C, $\triangle$ABC ou $\triangle$AB'C'

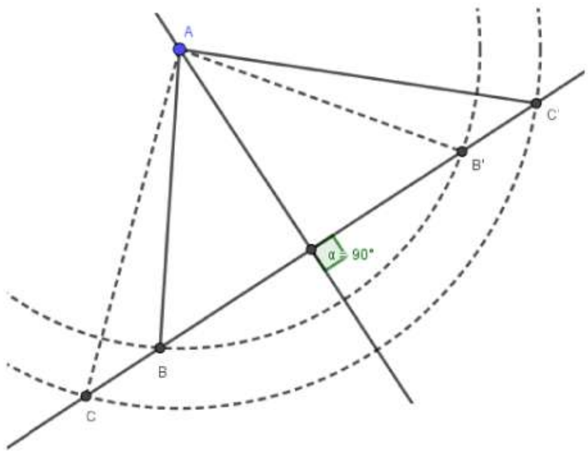

Figura 1.46: Soluções do problema de construir um triângulo dados 2 de seus lados e altura

1.4.1 Construção do Quadrado Inscrito em um Triângulo

Contrução 18: Dado um triângulo qualquer ΔABC, construa um quadrado inscrito a este.

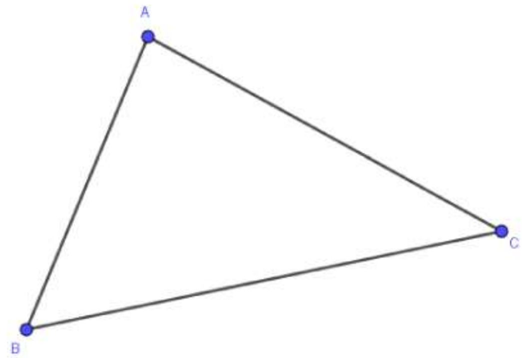

Figura 1.47: Triângulo dado

Comentário: Neste caso vamos fazer um pouco diferente do que vinhamos fazendo até o momento. Vamos, basicamente, descartar uma das condições que são pedidas e vamos mostrar como conseguir a solução a partir daquela que foi descartada.

Analizando a questão, de imediato, já verificamos que teremos que ter dois vértices consecutivos em um mesmo lado, então começaremos a traçar nossa estratégia.

1º Marcaremos um ponto X no lado BC (mas poderia ser qualquer lado)

2º Traçar uma perpendicular ao lado BC passando por X, encontrando o ponto W, onde o segmento XW definirá o lado deste quadrado.

3º A partir do ponto X, traçar o quadrado de comprimento XW, encontrando o ponto Y e o ponto Z. Observamos que este quadrado teve um vértice, no caso o ponto Z, fora de um dos lados do triângulo, com certeza não é a solução que procuramos.

4º Agora, a partir do ponto B, traçaremos uma reta intercectando o lado AC no ponto achado M.

5º Traçar uma paralela ao lado ZY que passe por M encontrando o ponto L no lado BC e outra paralela ao lado WZ que passe pelo ponto M encontrando o ponto N no lado AB. Afirmamos que o quadrilátero JLMN é um quadrado e todos os vértices dele estão sobre os lados do triângulo, entretanto nada está justificado.

Vamos mostrar que isto é verdade.

Para demonstrar que nossa solução está correta, vamos usar um pouco de semelhança de triângulos.

Observamos de imediato que o triângulo ΔBYZ pelo caso A.A.A. é semelhante ao Triângulo ΔBLM:

$$\Delta BYZ \sim \Delta BLM$$

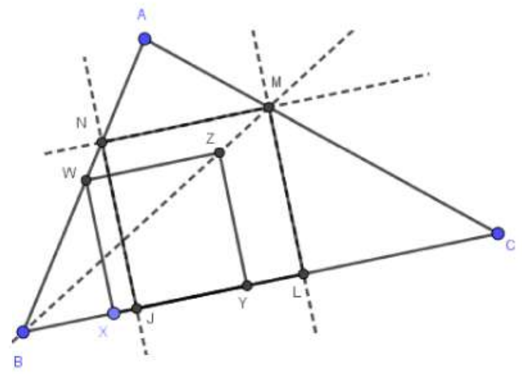

Figura 1.48: Construção do quadrado inscrito no triângulo

, como eles são semelhantes, vale a seguinte proporção:

$$\frac{YZ}{LM} = \frac{BZ}{BM}$$

Por outro lado, ainda pelo caso A.A.A. observamos que o triângulo $\triangle$BWZ é semelhante ao triângulo $\triangle$BNM:

$$\Delta BWZ \sim \Delta BNM$$

, portanto é válido a seguinte proporção:

$$\frac{WZ}{NM} = \frac{BZ}{BM}$$

Perceba que a segunda parte da primeira igualdade, aparece na segunda igualdade, então se duas coisas são iguais a uma coisa, elas são iguais entre si; $\frac{YZ}{LM} = \frac{BZ}{BM} = \frac{WZ}{NM}$, logo, podemos afirmar que $\frac{YZ}{LM} = \frac{WZ}{NM}$, pela construção, sabemos que YZ = WZ, então se duas frações são iguais e seus numeradores são iguais, então seus denominadores também são iguais, logo LM = NM e isso é suficiente para garantir que nossa figura é um quadrado, pois, a princípio tínhamos o quadrilátero JLMN como um retângulo e como demonstramos que seus lados concorrentes são iguais, concluimos que JLMN é um quadrado e está inscrito no triângulo $\triangle$ABC

1.4.2 Aplicação em um problema para descobrir o ângulo α

Escolhi dois problemas que são, razoavelmente, conhecidos para os que estudam e gostam de geometria, onde resolveremos à luz da construção geométrica.

Problema 1 Na figura a seguir, AE // BC; AC $\perp$ BC; DE = 2.AB e A$\hat{B}$C mede 78º. Determine a medida $E\hat{B}C$.

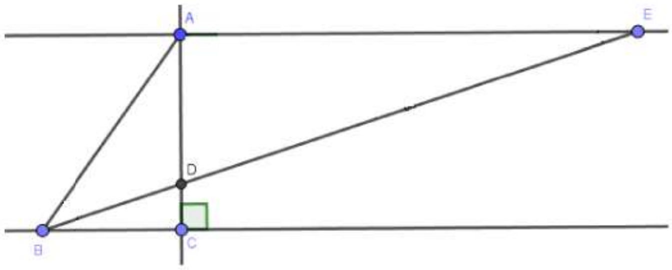

Figura 1.49: Construção dada para encontrar o valor do ângulo

Comentário: Como BC // AE, então, de imediato já verificamos que o ângulo $E\hat{A}D$ é 90^o, desta forma o triângulo ΔADE é retângulo, sendo BA igual a um comprimento 'a', DE será igual a '2a', tomando o ponto médio de DE, um ponto M, e sendo um triângulo retângulo, ligando o vértice A ao ponto M, AM terá medida igual a metade da hipotenusa, logo AM = 'a'. Vamos chamar o ângulo $A\hat{E}D$ de α, como triângulos ΔAME é isósceles, o ângulo $E\hat{A}M$ também tem medida = α. Sabendo que o ângulo extenos de um triângulo é igual a soma dos dois ângulos internos opostos, então o ângulo $A\hat{M}D$ terá medida igual a 2α e sendo o triângulo ΔABM isósceles, o ângulo $A\hat{B}M$ também têm medida igual a 2α, como o ângulo $A\hat{E}M$ é alterno exteno com relação ao ângulo $E\hat{B}C$, temos que este tem medida igual a α, então o ângulo $E\hat{B}C$ = α. Pelo dado do problema o ângulo $A\hat{B}C$ mede 78^o e, de acordo com esta análise este ângulo é igual a 3α, logo:

$$3\alpha = 78^o \therefore \alpha = E\hat{B}C = 26^o$$

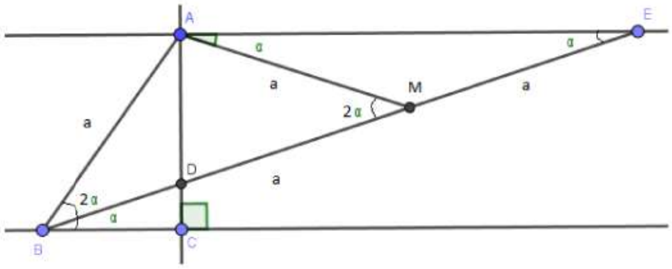

Figura 1.50: Resolução do problema de encontrar o valor do ângulo

Problema 2 Na figura BC = 2AE e $D\hat{O}C$ mede 63^o. Determine a medida do ângulo $D\hat{A}B$.

Comentário: Olhando a figura e pelos dados do problema, percebemos que BC é o diâmetro da circunferência, como BC = 2AE, então AE é igual ao comprimento do raio da circunferência, logo, se traçarmos o segmento OE, este têm o mesmo comprimento de AE, então o triângulo

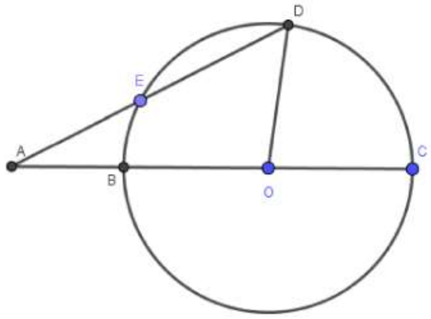

Figura 1.51: Construção dada para encontrar o valor do ângulo segunda parte

ΔAEO é isósceles. O ângulo que queremos descobrir é o ângulo D$\hat{A}$B, vamos chama-lo de α, então o ângulo E$\hat{O}$B também têm medida α. Novamente um caso onde temos os dois ângulos de um triângulo, então o ângulo externo será a soma dos dois internos, isso quer dizer que o ângulo O$\hat{E}$D é igual 2α. Como o triângulo ΔDEO também é isósceles, o ângulo E$\hat{D}$O, também têm medida igual a 2α. Agora vamos olhar para o triângulo ΔADO, veja que temos dois ângulos conhecidos, o ângulo O$\hat{A}$D = α e o ângulo A$\hat{D}$O = 2α, assim podemos determinar o ângulo externo que valerá a soma dos dois, portanto, o ângulo D$\hat{O}$C vale 3α, no entanto os dados nos dizem que este ângulo é igual a 63º, então:

$$3\alpha = 63^{o} \therefore \alpha = \text{D}\hat{\text{A}}\text{B} = 21^{o}$$

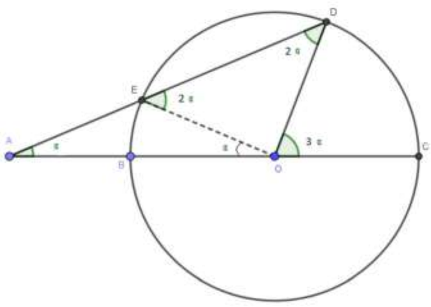

Figura 1.52: Resolução do problema de encontrar o valor do ângulo segunda parte

1.5 Demonstração geométrica da Desisgualdades das Médias

Vamos fazer essa demonstração através de uma construção geométrica, mas, antes precisamos demonstrar uma propriedade no triângulo retângulo.

Em um triângulo retângulo,
a) A altura relativa à hipotenusa é a média geométrica entre os segmentos em que é dividida a hipotenusa e
b) cada cateto é a média geométrica entre a hipotenusa e o segmento da hipotenusa que é a projeção deste cateto sobre ela.

Demonstração. Consideremos o triângulo ΔABC, retângulo em Â, e seja H o pé da altura desde A até BC.
Denotamos: a = BC, b = CA e c = AB; m = BH, n = HC e h = AH.
Vamos mostrar que
(1) h^2 = mn
(2) c^2 = am e b^2 = an

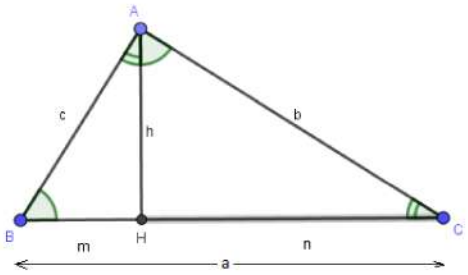

Figura 1.53: Triângulo retângulo com altura relativa à hipotenusa

Pelo teorema de semelhança de triângulos, ΔABH $\sim$ ΔCAH. Portanto, obtemos $\frac{BH}{AH} = \frac{AH}{HC}$, ou seja, $\frac{m}{h} = \frac{h}{n}$, logo h^2 = mn.

Também pelo teorema anterior, temos ΔABH $\sim$ Δ CBA. Portanto $\frac{BH}{AB} = \frac{AB}{BC}$, ou seja, $\frac{m}{c} = \frac{c}{a}$, logo c^2 = am.

Também, ΔCHA $\sim$ ΔCAB e, portanto, $\frac{CH}{AC} = \frac{AC}{BC}$, ou seja $\frac{n}{b} = \frac{b}{a}$, logo b^2 = an

Desigualdade das médias

Média arítmética

Dado dois segmentos a e b, definimos a média aritmética entre eles como o segmento x tal que x = $\frac{(a+b)}{2}$.
Vamos construir a média arítmética entre os segmentos a e b.
O procedimento é bastante simple, basta transferir o comprimento dos segmentos para uma reta r, encontrar o ponto médio M do segmento AC = AB + BC, traçar a circunferência de centro M, encontrar o ponto j na mediatriz do segmento AC intersecção com a circunferência. O segmento MJ é a média arítmética dos segmentos a e b. Perceba que a média aritmética de dois segmento a e b é igual ao comprimento do raio de uma circunferência de diâmetro (a+b).

Média Geométrica

Dados dois segmentos a e b, definimos a média geométrica ou a média proporcional entre eles

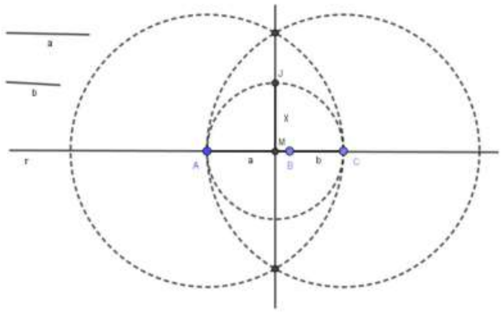

Figura 1.54: Construção da média aritmética entre dois segmentos dados

como o segmento y tal que y = $\sqrt{ab}$.
Vamos construir a média geométrica entre os segmentos a e b.
O procedimento também é bastante simples, vamos transportar os segmentos a = AB e o segmento b = BC para uma reta dada, traçar a semi-circunferência de diâmetro (a + b) = AC, pode-se pegar qualquer ponto desta semi-circunferência, pois já vimos que a semi-circunferência é o arco capaz que contêm um triângulo retângulo. Finalizamos traçando o segmento y que representa a média geométrica, pois "Em todo triângulo retângulo, a altura relativa à hipotenusa, é a média geométrica quadrada de um segmento b dado, em que foi tomado para a o segmento unitário.

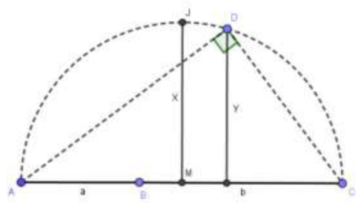

Figura 1.55: Construção da desigualdade das médias

De acordo com a construção perceba que o segmento y terá maior valor quando tiver o comprimento do raio, ou seja quando tiver comprimento igual o da média aritmética, desta forma fica demonstrada de forma geométrica a desigualdade das médias que afirma: "A média aritmética é maior ou igual a média geométrica".

$$\frac{(a+b)}{2} \geq \sqrt{ab}$$

1.6 Construções impossíveis com régua e compasso

Nesta seção falarei um pouco das limitações daquilo que estamos estudando. Para ilustrar um pouco falarei sobre os três problemas clássicos da matemática que são impossíveis de resolver usando régua e compasso, o ponto positivo destes problemas é que serviram de motivação para a Matemática dar saltos, melhorar bastante a qualidade e etc.

1.6.1 Trissecção do ângulo

O primeiro problema que vamos comentar é o Problema da Trissecção do ângulo, que consiste em, dado um ângulo qualquer, construir um outro ângulo com um terço de sua medida. É claro que alguns casos particulares são possíveis fazer tal trissecção, por exemplo, o ângulo de 90°, se torna fácil, porque podemos construir o ângulo de 30° bisseccionando o ângulo de 60°, no entanto, não há como trisseccionar o ângulo de 60º, pois não há como construir o ângulo de 20º usando régua e compasso.

A resposta negativa, realmente, só foi obtida no século IX pelo matemático francês Pierre Laurent Wantzel, que se apoiava nas afirmações de Gauss, em sua obra Disquisitiones Arithmeticae, publicada em 1801, entretanto, Gauss nunca publicou uma demonstração de tal enunciado.

Para demonstrar que nem todos os ângulos são construtíveis, partiremos da definição de que um ângulo será construtível se seu cosseno ou seno for construtível.

De modo geral, se um ângulo qualquer 3θ for construtível teremos como consequência que seu seno e cosseno também serão construtíveis. Pelas relações básicas de trigonometria, temos:

$$\begin{gathered}
\cos 3\theta = \cos(\theta + 2\theta) \\
\cos 3\theta = \cos\theta.\cos 2\theta - \operatorname{sen}\theta.\operatorname{sen} 2\theta \\
\cos 3\theta = \cos\theta.[\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta] - \operatorname{sen}\theta.[2\operatorname{sen}\theta.\cos\theta] \\
\cos 3\theta = \cos\theta.\{\cos^2\theta - [1 - \cos^2\theta]\} - 2\operatorname{sen}^2\theta.\cos\theta \\
\cos 3\theta = \cos\theta.[2\cos^2\theta - 1] - 2\cos\theta.[1 - \cos^2\theta] \\
\cos 3\theta = 2\cos^3\theta - \cos\theta - 2\cos\theta + 2\cos^3\theta \therefore \\
\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta
\end{gathered}$$

Este fato demonstra que nem todos os ângulos podem ser trisseccionados, pegando o exemplo do ângulo de 60º, veja como é impossível construir o número $\cos 20^{\text{o}}$. Vejamos a aplicação da demonstração

$$\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$$
$$\cos(60^o) = 4\cos^3(20^o) - 3\cos(20^o)$$
$$\tfrac{1}{2} = 4\cos^3(20^o) - 3\cos(20^o)$$

Veja que a equação equivalente a esta é

$$\tfrac{1}{2} = 4x^3 - 3x$$

que nos dá

$$8x^3 - 6x - 1 = 0$$

Resolvendo a equação verificamos que esta não possui raiz racional. Supondo que haja uma raiz racional x = $\frac{a}{b}$, com a e b inteiros e primos entre si, então, temos;

$$8(\tfrac{a}{b})^3 - 6(\tfrac{a}{b}) - 1 = 0$$
$$\tfrac{8a^3}{b^3} - \tfrac{6a}{b} - 1 = 0$$

Multiplicando ambos os menbros por b^3, temos:

$$8a^3 - 6ab^2 - b^3 = 0$$

o que nos sujere as duas equações a seguir

$$b^3 = 2a(4a^2 - 3b^2) \qquad e \qquad (2a)^3 = b^2(6a + b)$$

Pelas duas equações, verificamos que 2a é divisor de b^3 de modos que a = $\{-1, 1\}$, b^2 é divisor de (2a)^3, de modo que b = $\{-2, -1, 1, 2\}$, pois a e b são primos entre si. Desta forma, as possibilidades para $\frac{a}{b}$ são $\left\{-1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right\}$. Constata-se que nenhum desses valores é raiz do polinômio dado, desta forma, podemos afirmar que o polinômio $8a^3 - 6ab^2 - b^3 = 0$, podemos concluir que este polinômio é irredutível com coeficientes inteiros. Assim, segue que $\cos$ 20^o é algébrico de grau 3 e pelo teorema: "Um número é construtível se, e somente se, for algébrico de grau igual a uma potência de 2", temos que este não é construtível. Este teorema não será demonstrado aqui, em virtude de envolver fatos relacionados à teoria de extensões de corpos e teoria de Galois. Desta forma, conclui-se que o ângulo de 20^o não é construtível via régua e compasso, sendo assim, o ângulo de 60^o não podeser trisseccionado.

O problema da trissecção do ângulo pode ser resolvido baseado no primeiro problema de encontrar o o ângulo α, no entanto, usando as normas e regras que conhecemos para o uso de régua e compasso não seria possivel, teriamos que aplicar uma outra técnica que é chamada de "neusis"que consiste em ajustar um segmento dado com a exigência de que o segmento passe por um ponto dado.

1.6.2 Quadratura do círculo

Este foi mais um problema impossível de se resolver proposto pelos antigos geômetras gregos.

O problema consiste em construir via régua e compasso, um quadrado com área igual a de um círculo de raio dado.

Vamos considerar um círculo de área igual a A = πr^2. Para construir um quadrado de lado l com a mesma área, se faz necessário que l^2 = πr^2, desta forma, temos:

$$l = \sqrt{\pi r^2}$$
$$l = r\sqrt{\pi}$$

O problema seria construir, via régua e compasso, um segmento de comprimento $\sqrt{\pi}$, o que é impossível, pois já verificamos que π é um número transcedente, portanto a $\sqrt{\pi}$ não é construtível.

A título de informação, Arquimedes deu uma solução para este problema, aproximadamente 250 a.C., entretanto utilizando outros meios além de régua não graduada e o compasso. Em 1882 Carl Louis Ferdinand von Lindemann π é um número transcendente, ou seja, não é raiz de nenhum polinômio com coeficientes racionais, mostrando que é impossível construir um segmento cujo comprimento seja π.

1.6.3 Duplicação do Cubo

Este problema também é conhecido como problema Deliano. A origem deste problema se dá através de uma lenda que conta, que em 427 a.C., o orador e general da antiga Grécia, Péricles, um dos principais líderes democráticos da Atenas, morrera vítima da peste, juntamente com um quarto da população de Atenas. Os habitantes, sensibilizados com esta perda, foram consultar o oráculo de Apolo em Delos para saber como combater a tal peste. Em resposta o oráculo disse que o altar de Apolo, que possuía o formato de um cubo, deveria ser duplicado. De imediato os atenienses dobraram as dimensões do altar mas isso não afastou a peste. O volume fora multiplicado por oito e não por dois. Depois desta estória, dada a aresta de um cubo, construir só com régua e compasso a aresta de um outro cubo sendo que tenha o dobro do volume do primeiro, ficou conhecido como problema deliano.

De fato se considerarmos um cubo de aresta a, seu volume será igual a a^3. Para construi outro cubo de aresta b tal que seu volume seja 2a^3, teríamos então que:

$$b^3 = 2a^3$$
$$b = \sqrt[3]{2a^3}$$
$$b = a\sqrt[3]{2}$$

Então o problema consistia em construir a $\sqrt[3]{2}$, os habitantes de Delos, tentaram construir com régua e compasso, mas, não obtiveram êxito e a peste continuou a castigar a cidade. Somente depois de algum tempo, os gregos com muita sabedoria notaram a dificuldade em duplicar o cubo utilizando somente régua e compasso, que eram as ferramentas da época para construções geométricas. A partir do século XVII com os avanços da Matemática que foi provado que tal segmento era impossível de se construir utilizando somente régua e compasso.

À luz dos Teoremas aqui estudados, a impossibilidade da construção de $\sqrt[3]{2}$ decorre do fato de que ele é algébrico de grau 3, por ser raiz do polinômio irredutível x^3 - 2, e portanto não satisfaz ao critério de construtibilidade de um segmento.

Foi Carl Friedrich Gauss quem afirmou que dobrar o volume de um cubo usando apenas a régua e o compasso era impossível, e foi Pierre Wantzel em 1837 quem provou.

1.7 Resolução de Problemas pelo Método de Lugares Geométricos

O método dos lugares geométricos e sua linguagem vêm propocionar maior praticidade na resolução e entendimento de muitos dos problemas que envolvem construções geométricas. Vamos tentar mostrar aqui alguns lugares geométricos que poderão ser utilizados na resolução de problemas de desenho geométrico exemplificando o procedimento desenvolvido.

1.7.1 Lugar Geométrico

Consideremos uma circunferência com centro em um ponto C e de raio d.

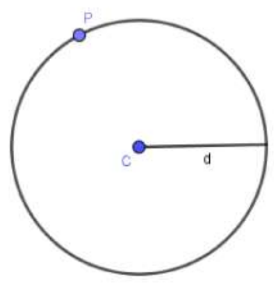

Figura 1.56: circunferencia de raio d

Podemos afirmar que:

1. Todo ponto P que pertence a essa circunferência está à distância d do ponto C. Além disso,

2. Se um ponto é tal que sua distância ao ponto C é d, então este ponto pertence à circunferência λ(C,d).

Resumindo, todos os pontos de λ(C,d) dista d de C e somente estes pontos têm essa propriedade. Esse fato também pode ser entendido quando dizemos que a circunferência λ(C,d) é o lugar geométrico dos pontos que esão à distância d de C.

1.7.2 Definição

Uma figura recebe o nome de lugar geométrico dos pontos que possuem uma propriedade P quando

a) Todos os seus pontos satisfazem a propriedade P;

b) Somente os pontos dessa figura satisfazem a propriedade P, isto é, se um ponto A possui a propriedade P, então pertence à figura.

Exemplo 1. O lugar geométrico dos pontos equidistantes de dois pontos dados é uma reta, a saber, a reta mediatriz do semento formado por elas.

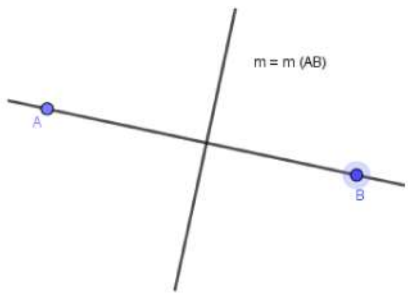

Figura 1.57: Bissetriz

Na figura acima m (AB) denota a mediatriz do segmento AB

Na figura abaixo vemos o lugar geométrico dos pontos equidistantes de três pontos não colineares que é, então, o ponto O, obtido pela intersecção das mediatrizes m (AB) com m (BC) e m (AC), bastando a intersecção de duas delas, como provado no capítulo anterior.

No plano, em geral, os lugares geométricos são representados por retas, circunferências, arcos e pares de retas.

A resolução de um problema pelo método dos lugares geométricos consiste em procurar a solução, que em geral é um ponto obtido pela intersecção de dois lugares geométricos.

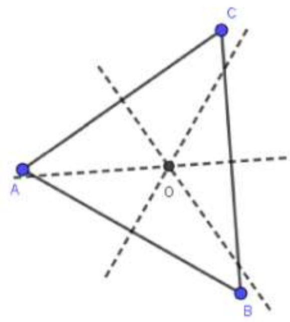

Figura 1.58: Ponto equidistante a 3 pontos dados

Exemplo 2. Consideremos dados um lado AB (desenhado) de um triângulo e as medidas a e b dos outros dois lados. A proposta é encontrar o terceiro vértice C (ou C'), que será determinado pela intersecção de dois lugares geométricos, a saber, as duas circunferências λ(A,a) e δ(B,b)

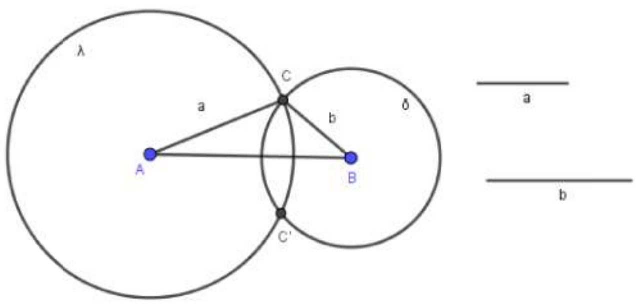

Figura 1.59: Interseção de duas circunferências

1.8 Principais Lugares Geométricos

Já vimos o primeiro dos lugares geométricos que seguem.

L.1 O lugar geométrico de centro C e raio d.

Chamamos de corda de uma circunferência qualquer segmento cujas extremidades sejam pontos pertencentes à circunferência. Qualquer corda de uma circunferência que contenha seu centro é chamada diâmetro da circunferência. Um raio é também um segmento com uma extremidade sendo um ponto da circunferência e a outra, o centro da mesma. É claro que a medida do diâmetro da circunferência é o dobro da medida de seu raio.

Alguns casos particulares do L.1 são:

L.1 a) O lugar geométrico dos pontos tais que os segmentos tangentes a uma circunferência dada e com uma das extremidades neles têm comprimento constante, é uma circunferência.

Consideremos a circunferência λ(C,a)

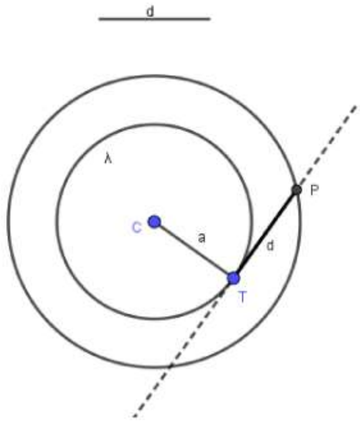

Figura 1.60: Lugar geométrico L.1 a)

Procedimento.

Por um ponto qualquer de λ(C,a), traçamo uma reta tangente a ela e marcamos o comprimento d a partir deste ponto e sobre a tangente, determinando o ponto P.

A circunferência $\delta(C,r)$ = CP, é o lugar geométrico procurado. De fato,

a) seja X um ponto qualquer que satisfaz a propriedade apresentada e T_x o ponto de tangência de uma das retas tangentes à circunferência λ(C,a), passando por X.

Então XT_x = d. Logo, o triângulo retângulo CT_xX tem os catetos a e d, e qualquer outro ponto que satisfaça a propriedade apresentada estará nestas condições, pois, sendo constantes os catetos a e d, pelo Postulado L.A.L. são constantes também as hipotenusas. Logo, X está na circunferência $\delta(C, r)$.

b) Seja Y um ponto qualquer de $\delta(C, r)$, distinto de X e seja T_y um de seus correspondentes pontos de tangência, como na figura. Os triângulos CXT_x e CYT_y são retângulos congruentes e, portanto, YT_y = XT_x.

Aplicação. Utilizando esse lugar geométrico, pode ser resolvido o seguinte problema: dadas as circunferências δ(C,r) e λ(O,s), r < s, construa um segmento AB de medida a dada, que seja tangente a δ(C,r) no ponto B e tenha sua extremidade A pertencente à circunferência λ(O,s).

L.1 b) O lugar geométrico dos pontos que vêm uma circunferência conhecida sob um ângulo dado é uma circunferência.

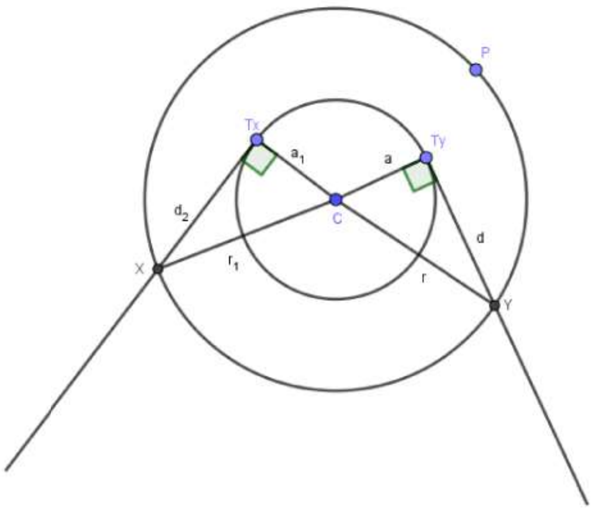

Figura 1.61: Lugar geométrico L.1   a)segunda parte

Observação: Dizemos que um ponto, externo a uma circunferência, vê a circunferência sob um ângulo α.

Procedimento. Sejam dados o ângulo e a circunferência δ(C,r).

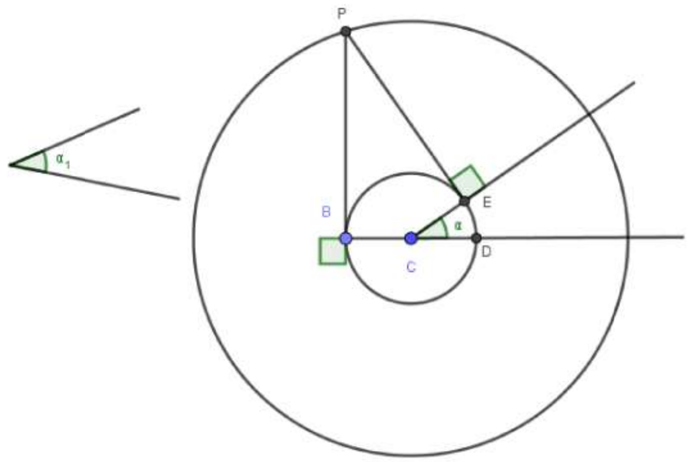

Figura 1.62: Lugar geométrico L.1   b)

- Traçamos o diâmetro BD.

- Transportamos o ângulo α a partir da semi-reta CD, em um dos semiplanos determinados pela reta CD, obtendo o ponto E na circunferência δ(C,r).

Traçamos as tangentes à circunferência δ(C,r), passando pelo ponto E e B respectivamente, cuja intersecção denotaremos por P.

Afirmamos que $\hat{P}$ é congruente a α. De fato, os ângulo $\hat{P}$ e B$\hat{C}$E são ângulos de um quadrilátero cujos outros dois ângulos são retos, logo $\hat{P}$ e B$\hat{C}$E são suplementares. Portanto $\hat{P} \cong \alpha$. A circunferência λ(C,CP) é o lugar geométrico procurado.

De fato,

a) Seja X um ponto qualquer que vê δ(C,r) sob o ângulo α. O triângulo CT_xX, retângulo em T_x, tem r como um cateto e como ângulo oposto um ângulo cuja medida é $\frac{1}{2}$mα. Pelo caso L.A.A de congruência de triângulos, temos que CP = CX. Portanto o ponto X está na circunferência de centro C e raio CX.

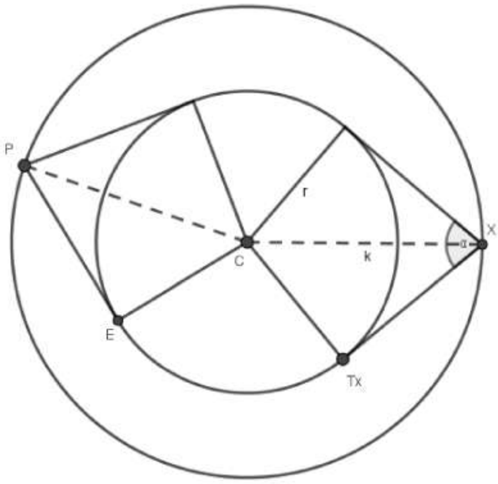

Figura 1.63: Lugar geométrico L.1 b)segunda parte

Seja X um de da circunferência de centro C e raio CP, distinto de P. Os triângulos PEC e XT_xC são congruentes, pelo Tteorema da da Hipotenusa e do Cateto. Logo são congruentes os ângulos C$\hat{X}T_x$ e C$\hat{P}$E, cuja medida é $\frac{1}{2}$mα. Logo $\hat{X} \cong \alpha$ e, portanto, X vê a circunferência de centro C e raior r por um ângulo α.

Observamos que duas circunferências são tangentes exteriormente ou interiormente quando a distância entre seus centros é igual a soma ou diferença de seus raios, respectivamente.

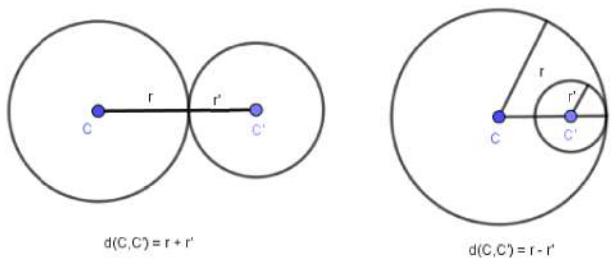

Figura 1.64: Cículos tangentes

Observamos também que, em ambos os caso, os dois centros e o ponto de contato são colineares.

L.2 O lugar geométrico dos pontos que são equidistantes de dois pontos dados é a mediatriz do segmento formado por eles.

Procedimento. Basta traçar as circunferências $\delta(A, r)$ e $\lambda(B, r)$ com $r > \frac{1}{2}AB$. a reta PQ determinada pelos pontos P e Q obtidos pela intersecção das duas circunferências é o lugar geométrico procurado.

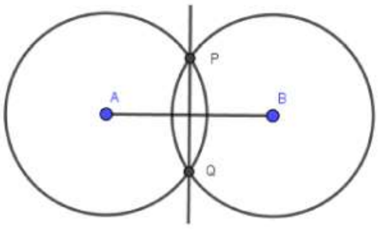

Figura 1.65: Lugar geométrico Mediatriz

A justificativa segue imediatamente da definição de mediatriz, que diz: "A mediatriz de um segmento é o conjunto dos pontos que equidistam das extremidades do segmento".
Demonstração: Seja AB um segmento com ponto médio M. Seja m a mediatriz de AB e seja P um ponto pertencente a m.

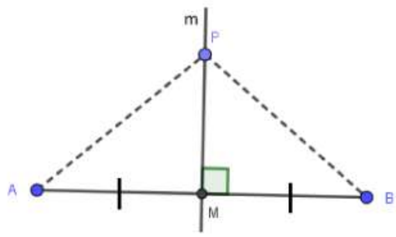

Figura 1.66: Lugar geométrico Mediatriz sem os traços de construção

Se P está em AB, então P = M e portanto PA = PB, pela definição de ponto.

Se P não está em AB, então temos PM = PM, MA = MB e $P\hat{M}A = P\hat{M}B$ pela hipótese. Pelo postulado L.A.L., temos $\Delta PMA \cong \Delta PMB$. Portanto PA = PB. Nos dois casos obtemos que P é equidistante dos pontos A e B.

Agora, seja P um ponto equidistante dos pontos A e B. se P está em AB, então P coincide com o ponto médio M de AB, e, portanto, P está em m.

Consideremos agora o caso em que P não pertence a AB

Seja m´ = PM. Como PM = PM, MA = MB e PA = PB, pelo caso L.L.L. temos $\Delta PMA \cong \Delta PMB$. Portanto $mP\hat{M}A = mP\hat{M}B = 90^o$, m' é perpendicular a AB. Pela unicidade da mediatriz temos m = m' e, portanto, P está em m.

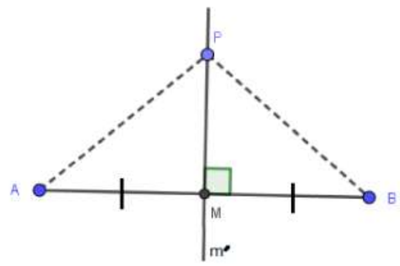

Figura 1.67: Lugar geométrico Mediatriz sem os traços de construção segunda parte

L.3 O lugar geométrico dos pontos que estão a uma distância d, conhecida, de uma reta r dada, é o par de retas s e s', paralelas a r, à distância d.

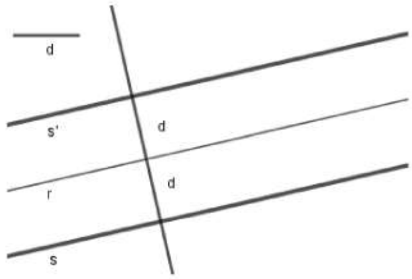

Figura 1.68: Lugar geométrico paralelas

L.4a) O lugar geométrico dos pontos equidistantes de duas retas r e s, concorrenters, é o par de retas t e t' formadas pelas semi-retas que são bissetrizes dos ângulos formados por elas

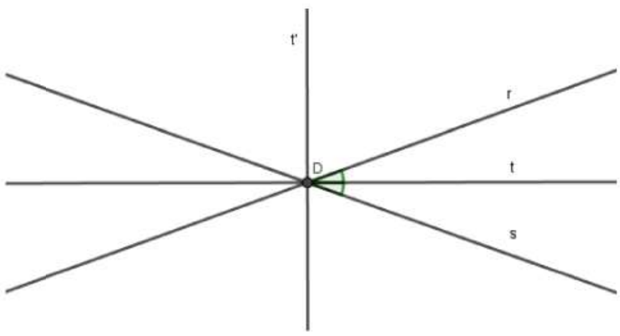

Figura 1.69: Lugar geométrico Bissetriz

L.4 b) O lugar geométrico dos pontos equidistantes de duas retas r e s, paralelas, é a reta m, paralela a ambas, situada à distância $\frac{1}{2}$d(r, s) de r e de s. Por exemplo:
Sejam dadas as retas paralelas r e s, mostre o lugar geométrico dos pontos equidistantes das mesmas.

Para construção deste lugar geométrico, basta traçar a reta t perpendicular a r, esta reta determinará os pontos P e Q. Traçar a mediatriz do segmento PQ. A mediatriz m de PQ é o lugar geométrico procurado.

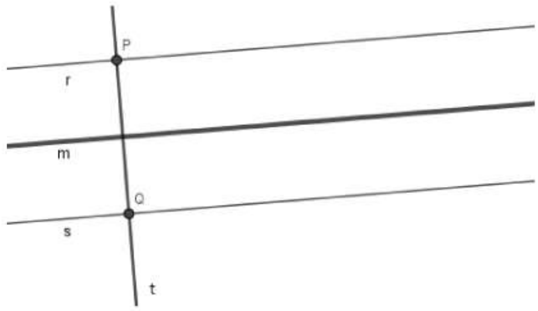

Figura 1.70: Lugar geométrico L. 4

Arco Capaz

L.5 O lugar geométrico dos pontos que vêem um segmento dado sob um ângulo de medida conhecida é o par de arcos capazes do ângulo, construídos sobre o segmento. Em particular, se o ângulo dado é um ângulo reto, então os dois arcos são semicircunferências, tendo o segmento dado como diâmetro, excluindo as extremidades desse segmento.

Sejam dados o segmento AB e o ângulo α.

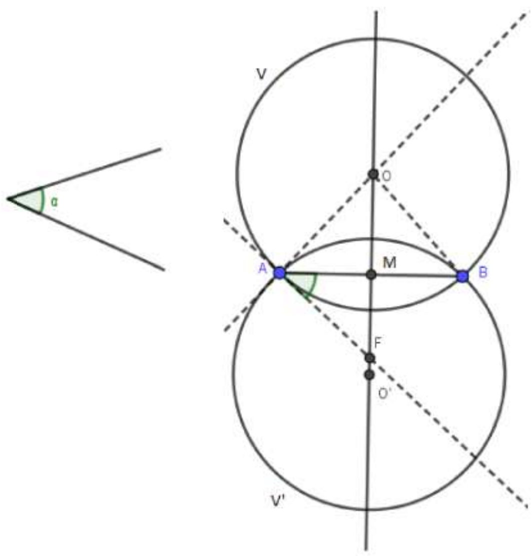

Figura 1.71: Lugar geométrico L. 5 - Arco capaz

A construção do arco capaz, foi realizada no capítulo anteior, no entanto haviamos mostrado somente em um plano, vamos fazer também no semi-plano. Trata-se de um procedimento simples.

Feito a tranferência do ângulo α para o segmento AB, traçado a perpendicular à reta auxiliar que serviu para traçar o ângulo dado, traçado a mediatriz do segmento AB, encontrando o ponto médio M e o ponto O de intersecção com a perpendicular e a mediatriz. Ponto O servirá para encontrar os arcos procurados. Primeiro traçar o arco $\overset{\frown}{AVB}$, na seguência rebater o ponto O para o semi-plano e achar o ponto O' que serviu para traçar o arco $\overset{\frown}{AV'B}$. O par de arcos $\overset{\frown}{AVB}$ e $\overset{\frown}{AV'B}$ é o lugar geométrico procurado, figura [**?**]

Justificativa: O procedimento é perfeitamente justificável, levando em conta que, pela semelhança dos triângulos retângulos OAF e AMF, o ângulo AÔF é conguente ao ângulo dado. Como o triângulo ΔOAB é isósceles e a reta OM é a mediatriz da base, temos m(AÔB) = 2m(AÔM). Pelo Teorema do ângulo inscrito numa circunferência que diz: "A medida de um ângulo inscrito numa circunferência é a metade da medida de seu arco correspondente", então, temos m($\overset{\frown}{AVB}$) = $\frac{1}{2}$m(AÔB) = α

De fato, verifique que seja D um ponto qualquer do arco $\overset{\frown}{AB}$ com D $\neq 4$ A e D $\neq$ B. Afirmamos que o ângulo AD̂B, nestas condições, sempre será semelhante a α. Esta afirmação fica bem clara, pois da semelhança dos triângulos ΔEMA e ΔEAO, retângulos em M e em A, respectivamente, segue a congruência dos ângulo AÔM e α. Concluindo, como α tem a metade da medida do ângulo central AOB, obtemos que o ângulo inscrito ADB é congruente ao ângulo α.

Capítulo 2

Construções geométricas via Geometria Dinâmica

Neste capítulo iremos fazer algumas aplicações das construções que realizamos no primeiro capítulo usando o software de Geometria Dinâmica, o Geogebra. Dentre os softwares livres que existem, escolhi o Geogebra, por ter um pouco mais de afinidade com este. O software Geogebra é um software livre de Geometria Dinâmica que pode ser baixado no notebook e agora há versões para celular e tablets.

Usando o Geogebra, é notório que para fazer bom uso da ferramenta se faz necessário ter um mínimo de conhecimento em construção geométrica via régua e compasso, é claro que há comandos que são bastante diretos, mas, algumas construções requerem um pouco mais de habilidades em construções geométricas.

Em sala de aula faço todas as demonstrações via régua e compasso e depois mostro para os alunos a construção no geogebra, desta forma eles conseguem fazer a conexão da construção via régua e compasso com a construção dinâmica. Começei essa experiência de levar para sala de aula as construções via régua e compasso desde o ano passado, naquele primeiro momento, levei o assunto para sala de aula de forma um pouco tímida, pois era, basicamente somente eu que trabalhava de tal forma, começei este trabalho quando percebi que meus alunos finalistas do ensino médio possuiam grandes dificuldades em geometria, principalmente, quando se tratava de conceitos básicos, não entendiam o que seria um ponto médio, uma bissetriz, não entendiam o que seria um lugar geométrico.

Passando por várias escolas que já lecionei, percebi que a maioria dos professores de Matemática também não se preocupavam com essa questão de mostrar de forma mais prática e dinâmica os conceito básicos e as contruções geométricas para os alunos, foi quando começei a acreditar na importância de tratar este assunto em sala de aula. No início não tinha muita certeza se estava fazendo o certo, pois era, somente eu trabalhando com régua e compasso em sala de aula, mas agora com este trabalho e com as orientações do professor Dr. Nilomar, que me orientou em procurar embasamento na BNCC e nos PCNs, constatei que essa parte de construção geométrica, juntamente com os conceitos básicos de geometria deve ser aprofundado e sistematizado as **Orientações Curriculares Para o Ensino da Matemática** afirma: "*O estudo da Geometria deve possibilitar aos alunos o desenvolvimento da capacidade de resolver problemas práticos do quotidiano, como, por exemplo, orientar-se no espaço, ler mapas, estimar e comparar distâncias percorridas,reconhecer propriedades de formas geométricas básicas, saber usar diferentes unidades de medida. Também é um estudo em que os alunos podem ter uma oportunidade especial, com certeza não a única, de apreciar a faceta da Matemática que trata de teoremas e argumentações dedutivas. Esse estudo apresenta dois aspectos: a geometria que leva à trigonometria e a geometria para o cálculo de comprimentos, áreas e volumes... Alguns conceitos estudados no ensino fundamental devem ser consolidados, como, por exemplo, as idéias de congruência, semelhança e proporcionalidade, o Teorema de Tales e suas aplicações, as relações métricas e trigonométricas nos triângulos (retângulos e quaisquer) e o Teorema de Pitágoras*.

2.1 Ambiente do software Geogebra

Iniciarei a primeira construção no Geogebra como fiz com as construções elementares, mas antes é necessário que o leitor conheça o ambiente do geogebra, a imagem abaixo nos mostra o ambiente.

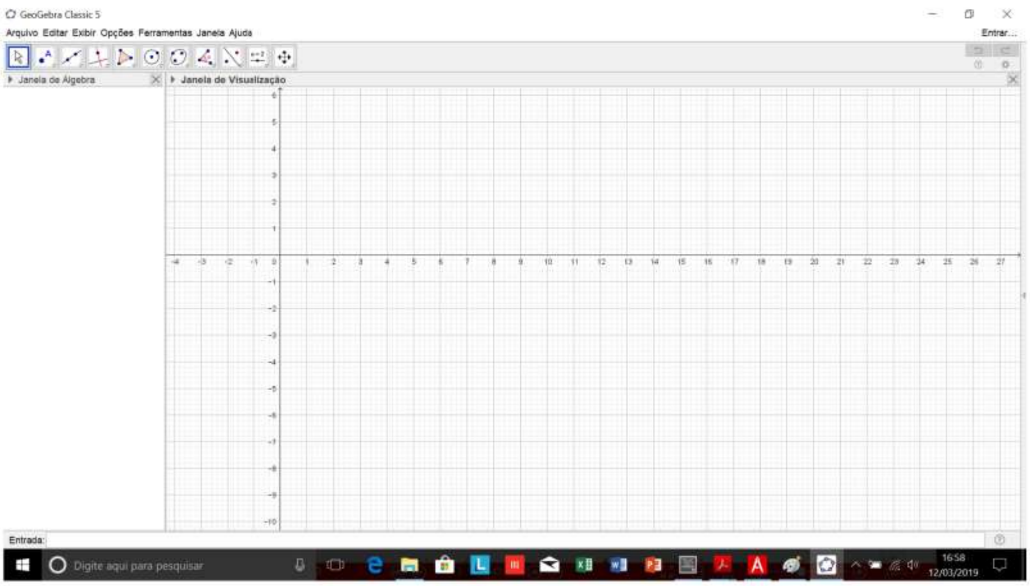

Figura 2.1: Ambiente Geogebra

Os botões de comandos básicos ficam logo acima do lado esquerdo, os comandos básicos são os da figura abaixo.

Da esquerda para direita, apresento o ícone para iniciar o programa Geogebra, logo após vem o menu básico, muito parecido com os outros programas, "Arquivo", "Editar", "exibir",

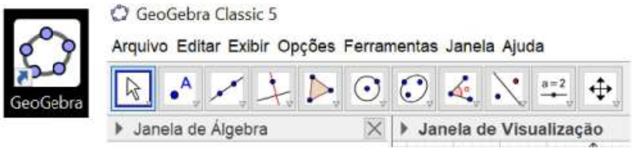

Figura 2.2: Ícone do Geogebra e botões de comandos básicos

"opções", "Ferramentas", "Janela"e "Ajuda", cada comando exibe várias opções para editar ou exibir janelas 2D ou 3D. Cada botão abaixo desses comando também apresenta várias opções que são, basicamente, sub-funções da primeira O primeiro botão serve para arrastar ou selecionar objetos, o segundo para marcar um ponto qualquer, mas, clicando no canto inferior deste, têm-se as opções de marcar um ponto em objeto, marcar um ponto médio ou marcar um ponto de interseção, o próximo botão serve para traçar retas ou segmentos de retas, ao lado o botão que traça paralelas, perpendiculares, bissetrizes ou mediatrizes, na sequência o botão de traçar polígonos regulares ou não regulares, o próximo serve para traçar circunferências ou setores circulares, o próximo botão serve para traçar elipses, hipérboles ou parábolas, ao lado deste o botão que serve para marcar ou construir ângulos, o botão seguinte serve para marcar pontos de reflexão em relação a uma reta, o penúltimo ponto serve para inserir um constrole deslizante, um texto, uma imagem, o último botão serve para mover uma janela, ampliar ou reduzir. Não enumerei todas as funções dos botões, selecionei apenas aquelas que, basicamente, iremos usar. Os recursos do Geogebra são muito abrangentes, vamos usar apenas uma pequena parte voltada para as construções geométricas da geometria plana.

2.2 Construções com auxilio do Geogebra

Então partirei da primeira construção que era um exercício simples, de construir um segmento congruente a um segmento dado sobre a reta r dada.

No Geogebra, vá na opção "ponto em objeto", marque um ponto qualquer na reta dada, no caso o Geogebra nomeou o ponto como ponto E, mas caso queira renomear o nome do ponto, basta, clicar na opção mover, depois leve o cursor até o ponto, clique no botão direito, vá na opção renomear e mudar o nome. Quando você clicar no botão direito, verá várias opções, mas, as que mais usaremos será exibir rótulo, exibir objeto, renomear e propriedades

Após marcar o ponto, clicar no botão círculo dado centro e raio, clique no botão E, aparecerá uma tela para se preencher o tamanho do raio, neste caso você pode por o nome do segmento, no caso AB ou, neste caso, f, agora clique no botão interseção de dois objetos e marque a interção da circunferência com a reta, que poderá ter duas soluções que poderá ser o segmento EF ou GE, o que mostra que o segmento AB dado é congruente a qualquer raio de circunferência de diâmetro 2AB.

A segunda construção solicita que construa um ângulo congruente ao ângulo α dado.

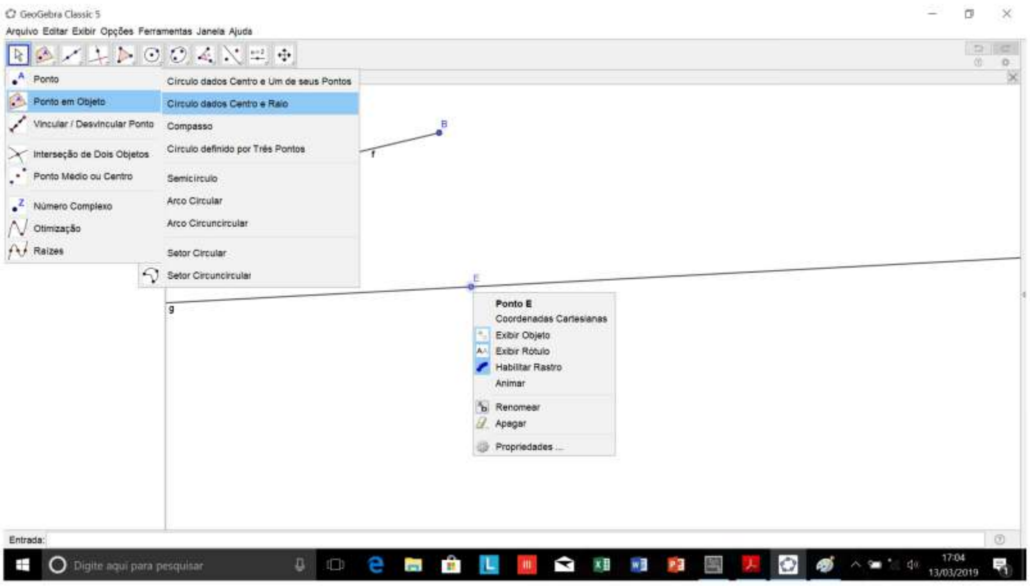

Figura 2.3: Tela do geogebra para construção do segmento congruente ao dado

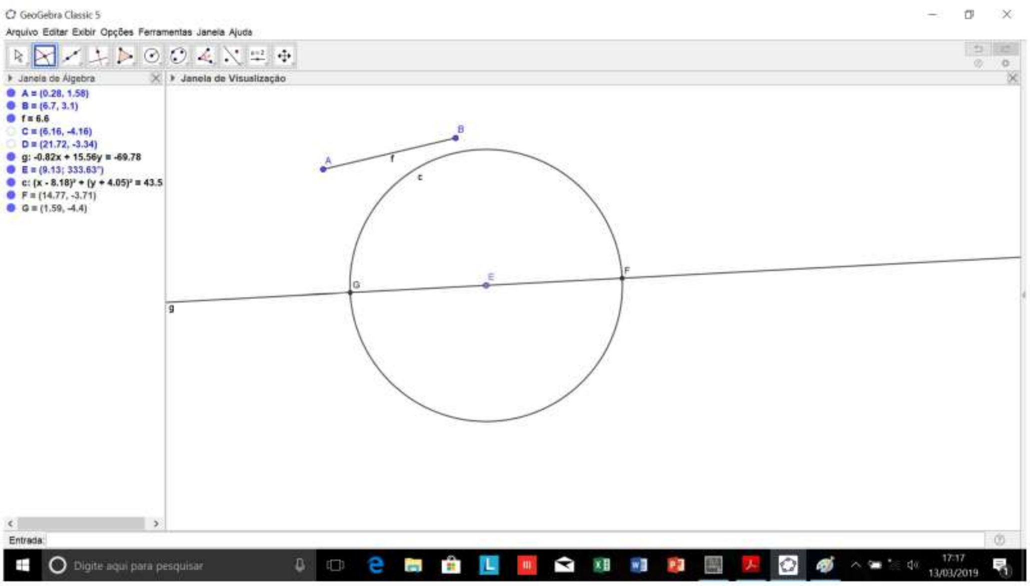

Figura 2.4: construção do segmento congruente ao segmento dado

No Geogebra, marcaremos dois pontos, no caso D e E, traçamos uma reta, no caso a reta h, agora clicamos no botão circunferencia e traçamos uma circunferência com centro em B, agora marcamos os pontos de interseção F e G e traça o segmento FG, agora podemos escolher um vértice para o ângulo dado, escolhemos o ponto D, então no ponto D traçar uma circunferência de raio BF, marcar o ponto de interseção da circunferência e a reta h, no caso o ponto H, agora no ponto H, traçar uma circunferência de raio FG, marcar o ponto de interseção entre as duas circunferências, no caso o ponto I, traçar o segmento DI, pronto o ângulo $H\hat{D}B = \beta \cong \alpha$

A figura 2.6 nos mostra já a construção do ângulo dado, é claro que aqui no Geogebra temos a opção de ocutar todos os riscos desnecessários e deixar somente o que se pede, perceba que

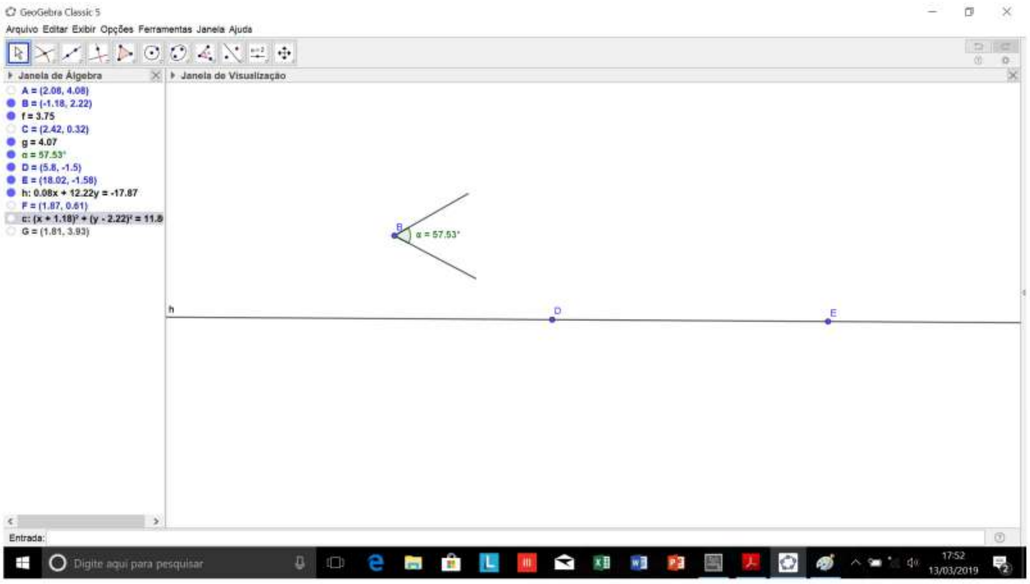

Figura 2.5: Ângulo dado para construção de outro congruente a este

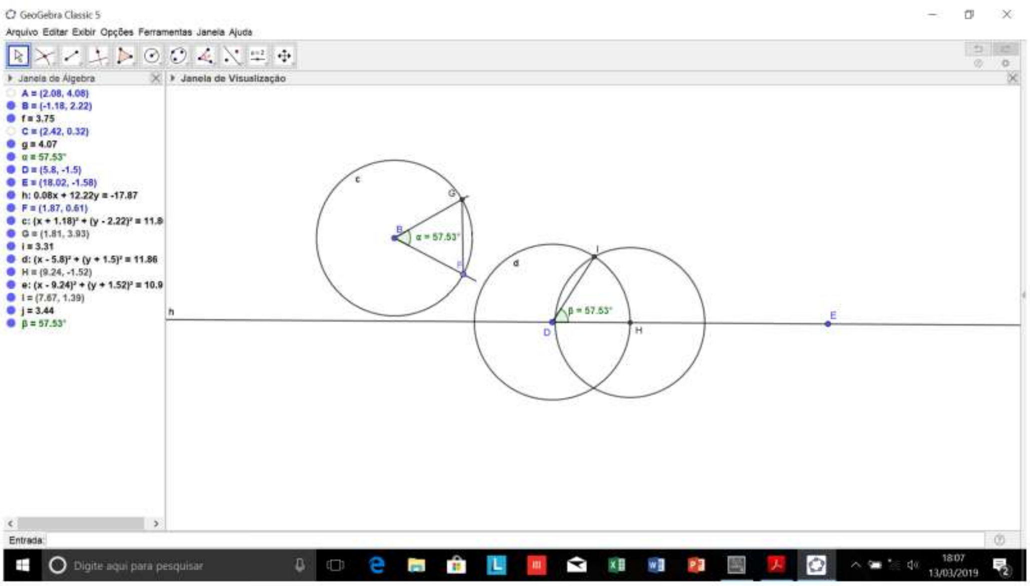

Figura 2.6: Construção do ângulo congruente ao ângulo dado

as contruções são muito parecidadas com as construções via régua e compasso, por isso em sala de aula, mostro primeiramente, as construções via régua e compasso, depois vamos para a geometria dinâmica.

A próxima construção trata-se da construção da mediatriz do segmento dado. No Geogebra, o procedimento pode ser feito da seguinte forma:
Trace uma circunferência de raio AB com centro em A, na sequência trace outra circunferência de centro em B, marque os pontos de interseção entre as circunferência, no caso, os ponto C e D, agora trace a reta que passa por C e D, pronto traçamos a mediatriz e ainda ganhamos o ponto Médio, no caso, o ponto E.

No geogebra, temos as opções de atalhos para algumas construções, por exemplo, neste caso, poderíamos, diretamente, clicar na opção de ponto médio, clicava no segmento, encontraria de imediato o ponto médio, depois, clicava na opção de reta perpendicular a um segmento, clicava novamente no segmento AB, apareceria a reta perpendicula e escolheria o ponto médio para passar por ela ou, ainda, poderia ser mais rápido ainda, bastava clicar no botão de mediatriz, clicar no segmento e pronto, mas, a intenção do exercício é mostrar as construções de forma mais tradicional.

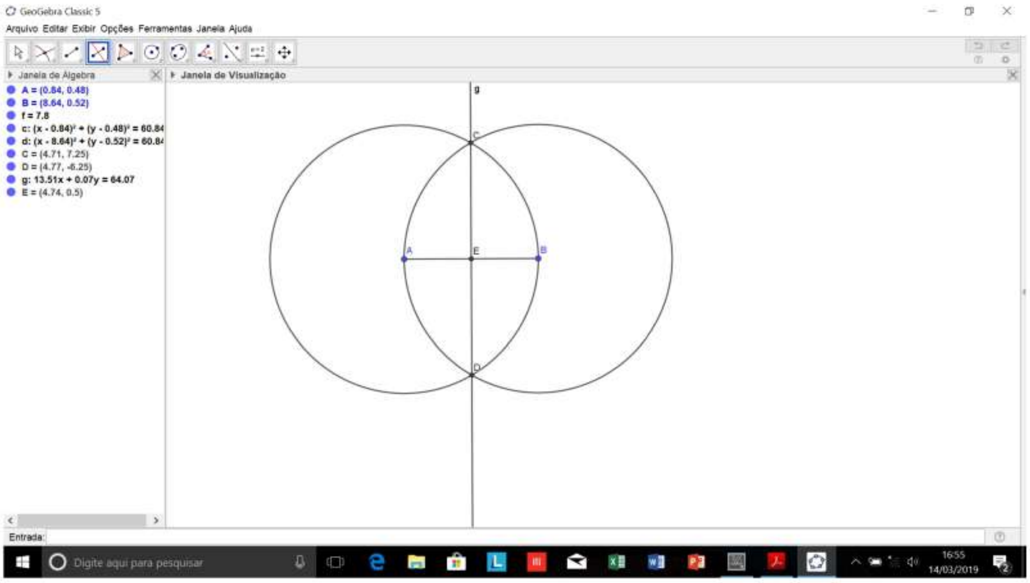

Figura 2.7: Construção da Mediatriz pelo Geogebra

Agora vamos construir uma reta perpendicular a uma reta dada que passa por um ponto dado Faremos o seguinte, tomando o ponto C, trace uma circunferência com centro em C de modo que esta intercecte a reta dada em dois pontos, a partir dos pontos encontrados no caso os ponto E e D, vamos traçar duas outras circunferências de raios EC e DC, marque o ponto de intersecção (ponto F) entre as duas circunferências, a reta que passa pelos ponto C e F é perpendicular a reta dada e passa pelo ponto dado.

A quinta construção se trata de traçar uma perpendicular a um ponto P da reta dada.

Esta construção é análoga à construção anterior, os primeiros passos são os mesmos, no entanto após traçar a circunferência com centro no ponto dado encontrando dois pontos de intersecção, deve-se traçar duas outras circunferências de centro nos pontos de intersecção, no caso nos pontos E e D com raio um pouco maior que a primeira, neste caso, clique no botão "circunferência dados centro e raio", depois clique nos pontos de intersecção e dê um tamanho um pouco maior que o raio da primeira, em nosso caso, usamos $\frac{3}{2}$PD, mas pode ser usado qualquer valor um pouco maior que 1, marque os pontos de intersecção entre as circunferências e trace a reta perpendicular solicitada.

A próxima construção solicita traçar a bissetriz de um ângulo dado.

O processo é bem simples e muito parecido com o da construção via régua e compasso.

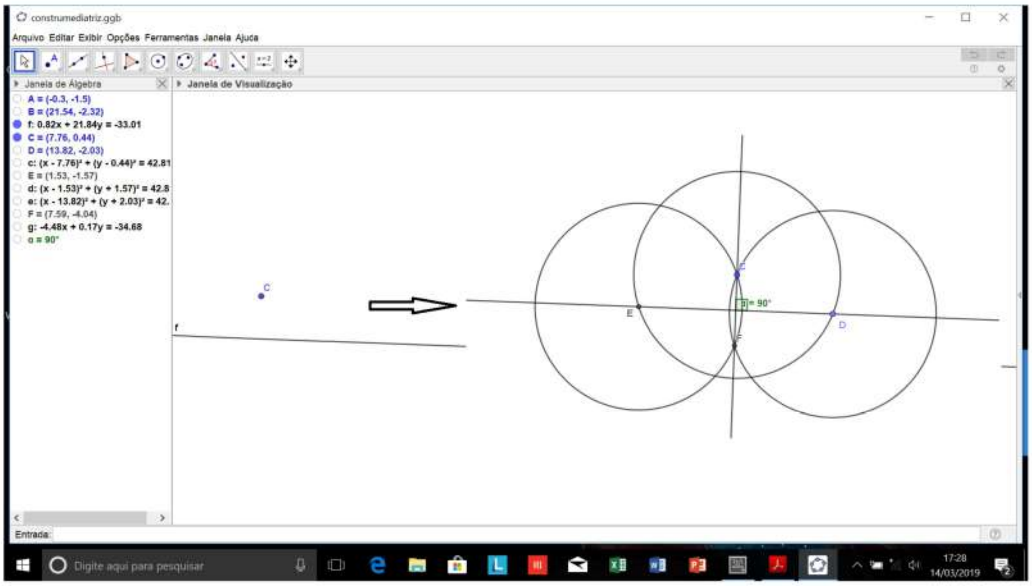

Figura 2.8: Construção da reta perpendicular que passa pelo ponto dado

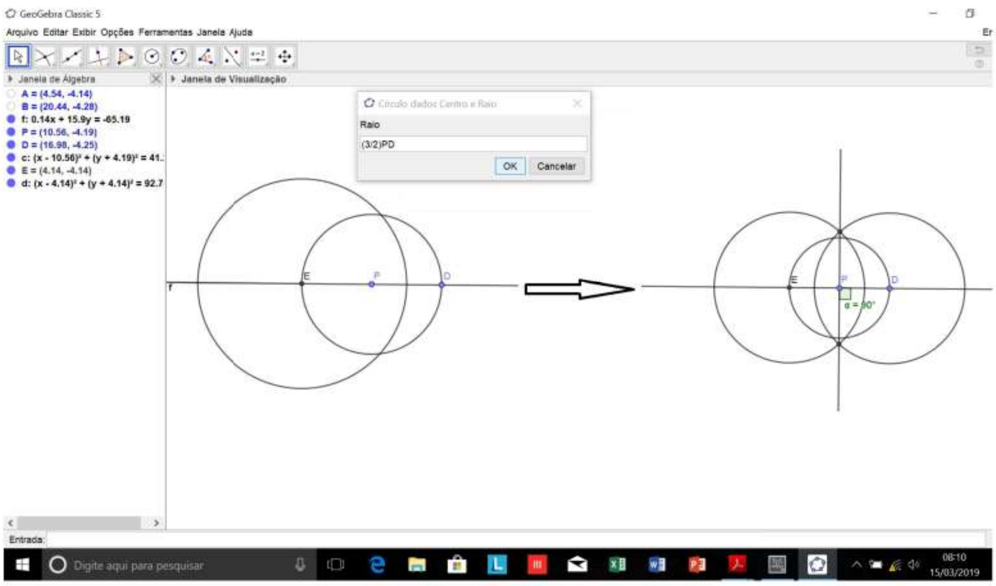

Figura 2.9: Construção da reta perpendicular que passa pelo ponto P $\in$ f

Primeiramente, traçar uma circunferência com centro no vértice do ângulo dado, traçar duas circunferências cada uma com centro nos pontos de intersecção e raio igual a distância entre as intersecções da primeira circunferência, por último, traçar a reta que passa pela intersecção das duas últimas circunferências. É claro que, no Geogebra, pode-se fazer tudo isso com apenas um comando, que é o comando Bissetriz.

Na figura 2.10 estamos mostrando primeiramente o ângulo dado, depois a construção e na sequência sem os riscos usados para a construção.

A próxima construção é para traçar uma reta paralela a reta dada que passa pelo ponto P fora

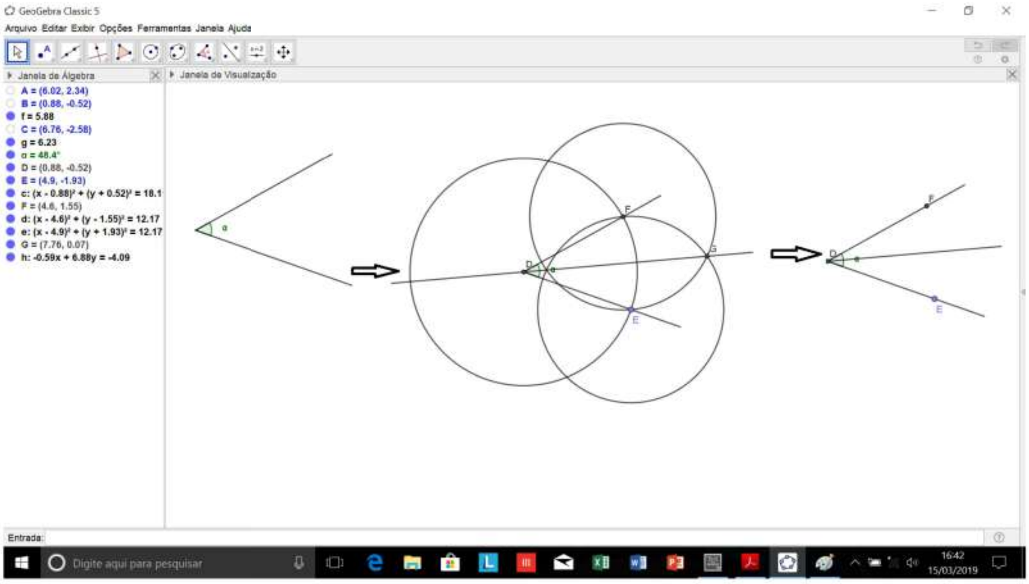

Figura 2.10: Construção da bissetriz

dela.
Para esta construção, pega-se um ponto arbitrário da reta, no caso, escolhemos o ponto C, traçamos a circunferência de centro em C e raio CP, marque o ponto de intersecção D, e agora trace outra circunferência de centro em D com raio igual a CD, por último, tracar outra circunferência de centro em P com o mesmo raio, no caso CD, marque o ponto de intersecção entre as duas últimas intersecções, em nosso caso o ponto E, agora basta traçar a reta que passar ponto P e E e temos a nossa paralela que passa por P. No geogebra, temos a opção de dar apenas um comando, no caso clicar no botão "reta paralela"e construir a reta paralela de imediato.

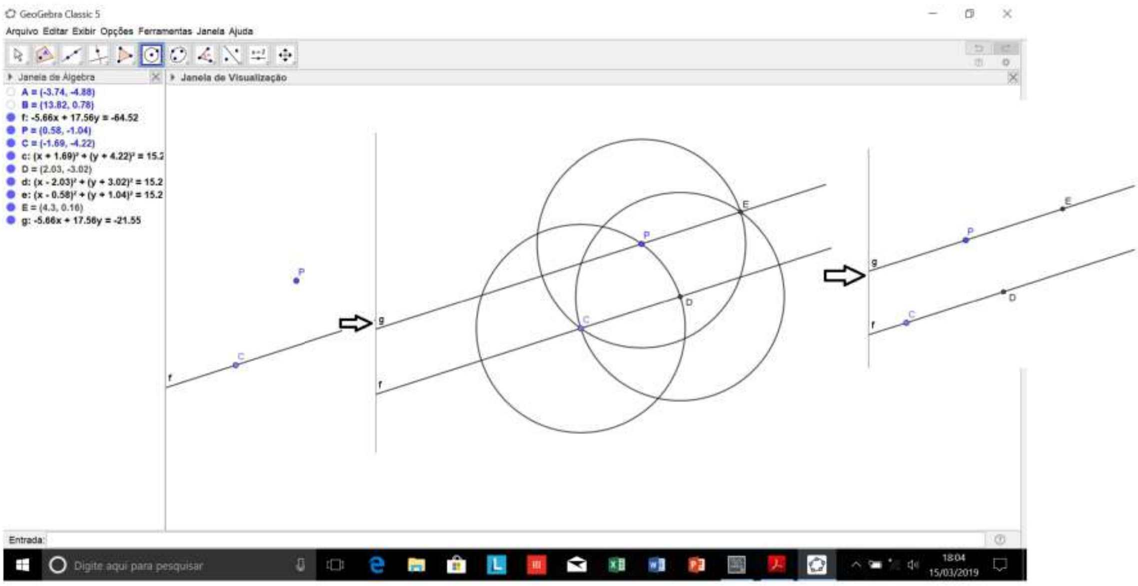

Figura 2.11: Construção da reta paralela

Como já sabemos traçar uma paralela, uma bissetriz, uma mediatriz ou uma perpendicular vamos usar alguns atalhos nas próximas construções do geogebra.

Vamos construir um ponto que seja equidistante a três pontos dados.
Este ponto é chamado de circuncentro, para construi-lo no geogebra, procederemos da seguinte forma:
Dado 3 pontos não colineares, primeiramente, vamos traçar as 3 mediatrizes entre os pontos, como já conhecemos o procedimento para traçar mediatrizes, começaremos a partir de agora, usar alguns atalhos, para encontrar este ponto, neste caso podemos usar de forma direta, o botão mediatriz e clicar nos dois ponstos que queremos a mediatriz, depois clicamos em outros dois e daí encontramos o ponto D, equidistante aos três ponstos dados, como já provamos, no capítulo anterior que, basta traçar duas mediatrizes para encontrar o circuncentro, não vamos repetir a demonstração, em todo caso vamos traçar uma circunferência com centro no ponto D encontrado somente para ilustrar a equidistância entre os pontos.

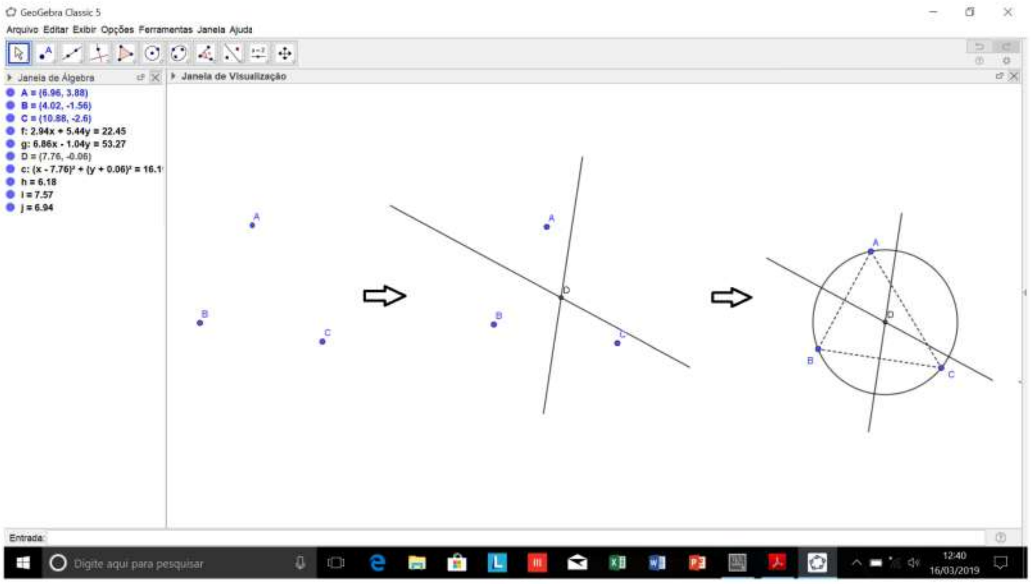

Figura 2.12: Construção do circuncentro

Perceba que para traçar a mediatriz de um segmento, não precisamos traçar a semi-reta destes pontos, pois, a mediatriz é o lugar geométrico onde ficam os ponstos equidistantes dos ponstos extremos do segmento dado, no entanto para a construção, tanto com régua e compasso ou em geometria dinâmica, o segmento serve, basicamente para encontrar-mos o ponto médio, mas, nesse caso não precisamos dele, entretanto, para fins de demonstração, se faz necessário. No final da construção tracei, somente, por uma questão de estética.

Como no capítulo anterior já demonstramos como resolvemos o problema do colega professor que chegou a escola e foi trabalhar em três escolas distintas, onde usamos o conceito de Circuncentro para resolver o caso dele, acrescento aqui apenas, que, quando este colega, procurou-me, e disse de seu problema, de imediato baixei a imagem do mapa direto do google map, dei um print, joguei no Geogebra e lhe mostrei a solução de forma que ele ficou muito agradecido.

A próxima construção se trata de encontrar o incentro, mais um ponto notável de um triângulo, que trata do ponto de intersecção entre as bissetrizes dos ângulos internos de um triângulo. Nesta construção também vamos usar um pequeno atalho. Vamos clicar no botão "Bissetriz"selecionar duas retas ou, neste caso, segumentos de reta e encontrar de imediato as bissetrizes, como já foi demonstrado no capítulo anterior, basta traçar duas bissetrizes para encontrar o ponto notável "Incentro". Tendo traçado as duas bissetrizes, agora marco o ponto de intersecção entre as bissetrizes e renomeio o ponto para ponto I, para traçar a circunferência, precido saber a menor distância entre o ponto I e algun lado do triângulo, para isso, vamos traçar uma perpendicular ao lado escolhido que contenha o ponto I, procedimento já conhecido, no entanto, usaremos outro atalho, vamos clicar no botão perpendicular, clicar no lado escolhido e depois no ponto I, encontramos agora o ponto D, agora basta traçar a circunferência de raio ID.

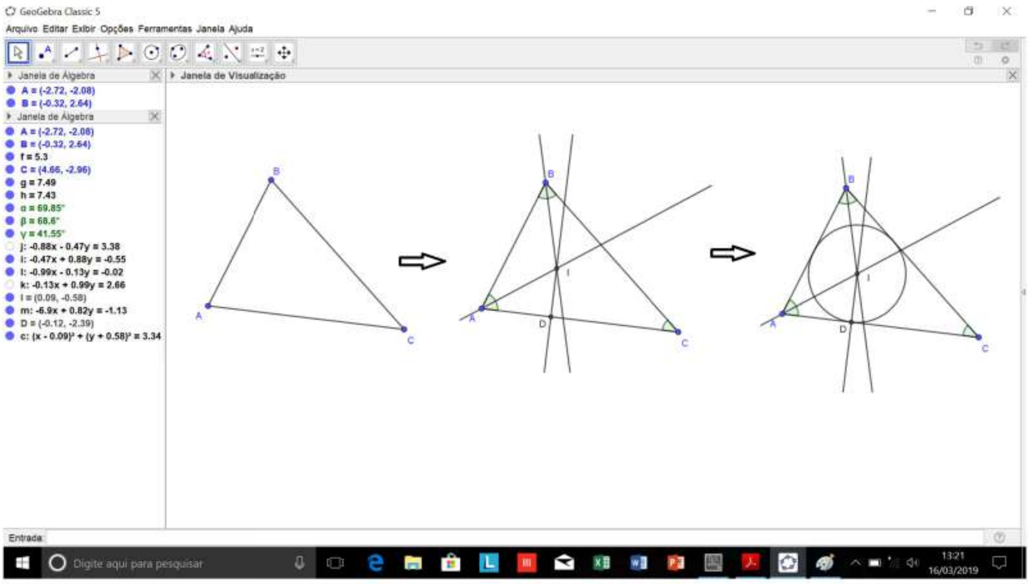

Figura 2.13: Construção do incentro

A próxima construção, trata-se de construirmos um arco capaz. Seja dado o ângulo α, e o segmento AB, vamos encontrar um ponto P de modo que AP e BP formem o ângulo α.

Primeiramente, vamos transferir o ângulo α para o segmento AB, para esta transferência, usaremos um atalho, clicamos no botão "ângulo com amplitude fixa"e clicando nos pontos A e B do segmento usaremos o valor do ângulo α, agora vamos traçar uma perpendicular ao segmento que auxiliou na construção do ângulo α que passe pelo ponto A, agora, clicando no botão "mediatriz"vamos traçar a mediatriz do segmento AB de forma mais direta, agora no ponto de intersecção da mediatriz com a perpendicular traçada, vamos traçar a circunferência de raio OA, agora vamos clicar em "ponto em objeto"e selecionar qualquer ponto da circunferência, neste caso foi o ponto P, agora vamos ligar os segmentos PA e PB, pronto feito o arco capaz. Perceba que o ponto E, deixamos ele pertencente à circunferência, desta forma podemos movimentalo, podemos até anima-lo, o interessante disse é que, como deixamos o ângulo em evidência, percebemos que movimentando o ponto ele não se altera, pois pertence ao arco capaz. Esse tipo de construção é muito interessante e chama bastante atenção dos alunos, despertando interesse pelos assuntos de geometria.

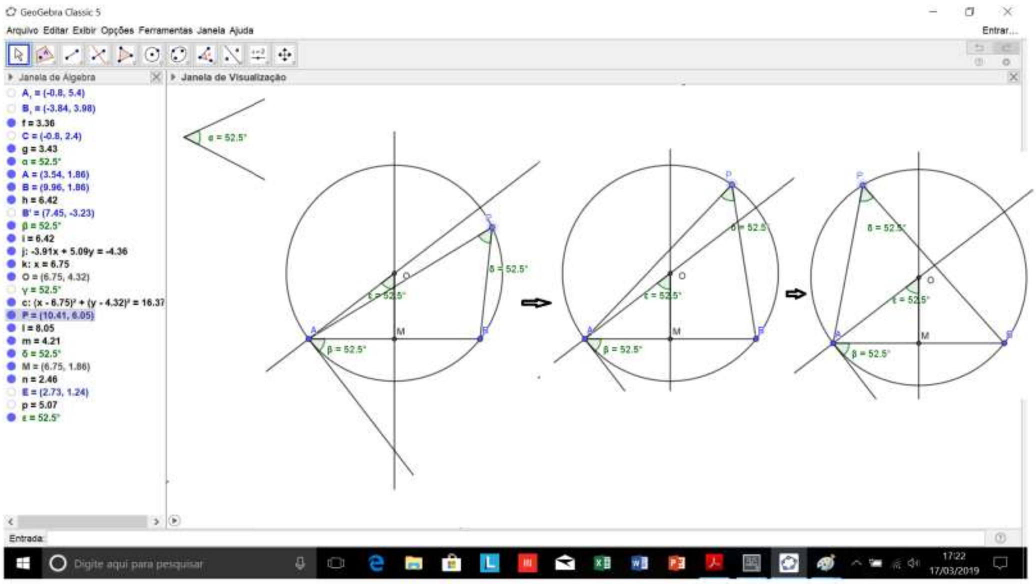

Figura 2.14: Construção do arco capaz de um ângulo dado

A figura 2.14 refere-se a construção do arco capaz no Geogebra. Perceba que tivemos que seguir, basicamente, todos os passos de uma construção com régua e compasso.

A próxima construção se trata de dividir um segmento dado em três partes iguais. Este tipo de problema acaba sendo bastante interessante, tanto com régua e compasso ou no Geogebra, pois, para este tipo de caso, o estudante, realmente, terá que pensar um pouquinho mais, pois não há comando para dividir um segmento em "n"partes iguais. Este foi o caso que lancei como brincadeira para os colegas professores de matemática da escola que trabalho e não conseguiram desenvolver a solução. Neste caso, procederemos como na construção via régua e compasso.

No segmento dado vamos construir um ângulo qualquer, neste caso, sem usar o botão "ângulo", basta traçar uma reta que passe por um dos pontos do segmento. Agora, traçar uma circunferência com centro no ponto de intersecção da reta construida com o segmento AB dado, encontrando o ponto de intersecção D, agora traçar, através do botão "círculo dado centro e raio", criar outra circunferência com centro em D de raio igual a AD encontrando o ponto E na reta, como queremos dividir o segmento AB em três segmentos congruentes, vamos construir mais uma circunferência, agora com centro em E e raio AD encontrando o último ponto necessário, no caso o ponto F. Agora que encontramos os pontos necessários, vamos ocutar cada circunferência, selecionando o botão ",mover"clicando em cima de cada cirncuferência, clicando no botão direito do mouse e escolhendo a opção "exibir objeto", agora trace o segmento FB, na sequência, com auxílio do botão de atalho "reta paralela", trace duas parelelas ao segmento FB de forma que passem pelos pontos auxiliares E e D, encontrando os pontos H e G no segmento AB divididuo em três segmentos iguais, e para provar, basta aplicar o teorema de Tales.

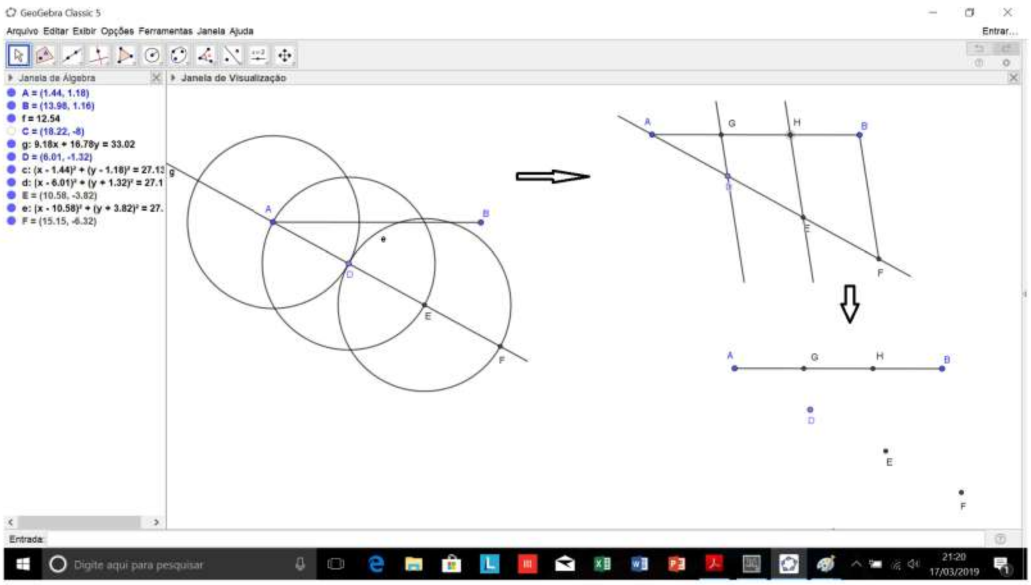

Figura 2.15: Divisão de um segmento em 3 partes iguais

A próxima construção é análoga a primeira, no entanto seu enunciado é: "Dividir um segmento AB e partes proporcionais a 2 e 3". Tenho percebido durante minhas aulas que a maioria dos estudantes tem um pouco de dificuldades em Proporção, mesmo os que antes já viram o assunto, que deve ser iniciado a partir do sexto ou sétimo anos do ensino fundamental, juntamente com grandezas diretamente e inversamente proporcionais. Então lancei este problema, percebi que a maioria dos alunos queriam vincular o número 2 e 3 a algum tipo de unidade de medida, mas, não é isso que pede a questão, ela exige que o segmento seja divido em dois segmentos, um proporcional a 2 e outro proporcional e 3. Estes números não possuem nenhum tipo de unidade de medida, percebo muitas vezes que uma parte dos estudantes do ensino básico, tanto o fundamental, quanto ao médio possuem alguma dificuldade em entender que, em determinados problemas, um número pode representar parte de um todo. Neste tipo de problema é o que tento mostrar a eles, digo que o segmento dado é um "todo "e devemos dividi-lo em em 5 cinco parte iguais, no entanto, o que nos interessa é um que tenha duas partes deste todo e o outro que fica com o restante, logicamente, três partes desse "todo". Tenho observado que tenho bons resultados após essas resoluções.

Agora temos a construção do segmento de tamanho a$\sqrt{n}$. Esta construção no geogebra se torna bastante interessante, pois envolve algumas construções que não possuem um atalho.

Primeiramente, construiremos um segmento AB de tamanho "a"qualquer. Após a construção deste segmento e sabendo que a$\sqrt{2}$ é a hipotenusa de um triângulo retângulo de catetos iguais a "a", vamos construir outro segmento de mesmo tamanho do segmento do segmento AB que seja perpendicular ao segmento AB. Para fazer outro segmento de mesmo tamanho perpendicular a

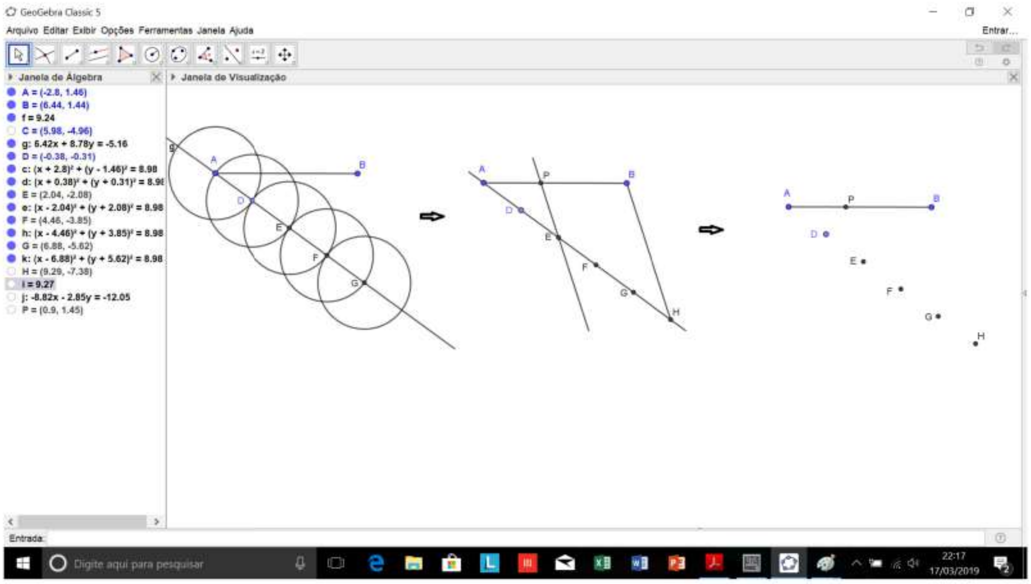

Figura 2.16: Divisão de um segmento em partes proporcionais a 2 e 3

este, através do botão "reta perpendicular"vamos traçar uma perpendicular ao segmento AB que passe por A, agora com o botão "círculo dados centro e de seus pontos", traçar uma circunferência de centro em A e raio AB, marcaremos o ponto de intersecção da perpendicular com a circunferência. Para ficar mais limpa nossa construção, vamos ocutar a perpendicular e a circunferência e traçar o segmento que será o outro cateto de mesmo tamanho AB, neste caso será o cateto AC. Agora traçar o segmento CB que, além de ser a hipotenusa de triângulo retângulo de catetos iguais a "a", também é o segmento procurado. podemos repetir esta operação várias vezes para encontrar o segmento desejado, no entanto já provamos por recorrência no capítulo anterior que a$\sqrt{n}$ é a hipotenusa de um triângulo retângulo de catetos "a"e "a$\sqrt{(n-1)}$

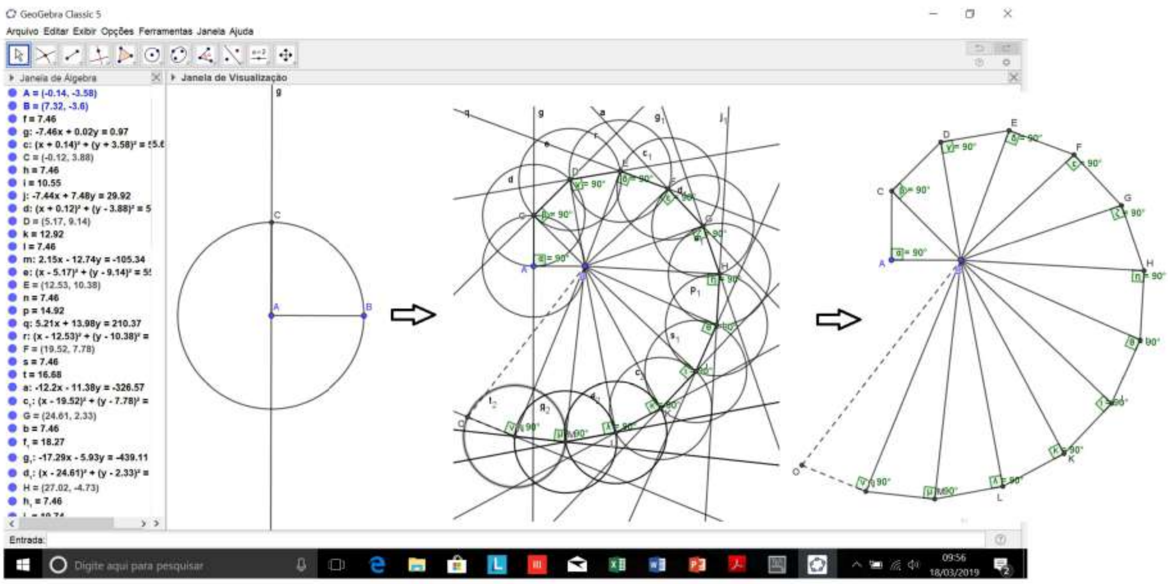

Figura 2.17: Construção do segmento a$\sqrt{n}$

A figura 2.17 nos mostra a construção passo a passo do segmento a$\sqrt{n}$, na primeira etapa a construção do cateto de tamanho "a", na sequência as repetições para encontrar-mos a hipotenusa dos triângulos retângulos, que são os segmentos procurados e a última parte trata-se da figura limpa, dando origem a uma apiral.

A próxima construção exige um pouco mais de pensar, trata-se de encontrar um ponto P pertencente ao segmento AB de forma que o quadrado de lado AP tenha o dobro do quadrado de lado PB. Trata-de um problema bastante interessante para ser passado em sala de aula, tanto com régua e compasso, quanto com geometria dinâmica. Como já foi resolvido este problema no capítulo anterior, vamos direto à construção no geogebra. Neste caso vamos ter que fazer um pequeno rascunho no próprio geogebra, com o auxílio do botão "polígono regular"vamos construir um quadrado de lado "u"qualquer, traçar uma diagonal deste quadrado, que nesse caso será u$\sqrt{2}$, pois já sabemos que, para que o outro quadrado tenha área igual ao dobro de um quadrado de lado "u", se faz necessário que seu lado seja igual a u$\sqrt{2}$. A idéia agora é dividir o segmento AB em dois segmentos, sendo um proporcional a "u$\sqrt{2}$"e outro a "u". Já sabemos como dividir um segmento em partes proporcionais, então vamos construir um ângulo qualquer tomando o ponto A como vértice deste ângulo. Agora com auxilío do botão "círculo dados centro e raio"clicar no ponto A fazer uma círcunferência de centro em A e raio DF (diagonal do quadrado auxiliar), encontrando o ponto H, agora traçar outra circunferência de centro em H e raio CD (lado do quadrado auxiliar), encontrando o ponto I, agora traçar o segmento IB. Com o auxílio do botão "reta paralela"traçar uma paralela a IB que passe por H, encontrando o ponto P no segmento AB. Para ilustrar que o primeiro têm área igual ao dobro do segundo, podemos inserir uma legenda com as áreas das figuras.

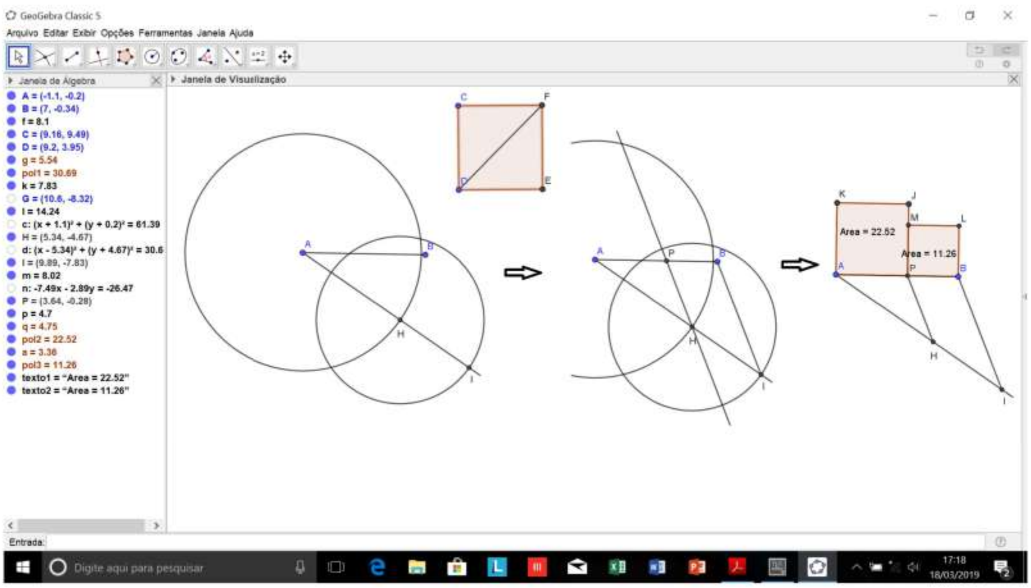

Figura 2.18: Construção para encontrar o ponto P de forma que o quadrado de lado AP tenha área igual ao dobro do quadrado de lado PB

A próxima construção é para traçar as tangentes a um círculo dado, passando por um ponto exterior. Este tipo de problema, no Geogebra, se resolve de forma análoga ao da construção via régua e compasso.
Seja a circunferência dada de centro O e o ponto P fora dela, encontrar as tangentes a esta circunferência que passam por P. Primeiramente, através do botão de atalho "ponto médio ou centro"vamos localizar o ponto médio entre os ponto O e P, basta clicar em O e depois em P. Agora, com auxílio do botão "círculo dado centro e raio", vamos marcar uma circunferência de centro em M e raio MP, vamos marcar os pontos de intersecção e para finalizar, traçar as retas PA e PC que são as tangentes, para melhor ilustrar, podemos traçar os segmentos OA e OC, clicar em ângulo e mostrar que as tangentes são perpendiculares com relação ao raio.

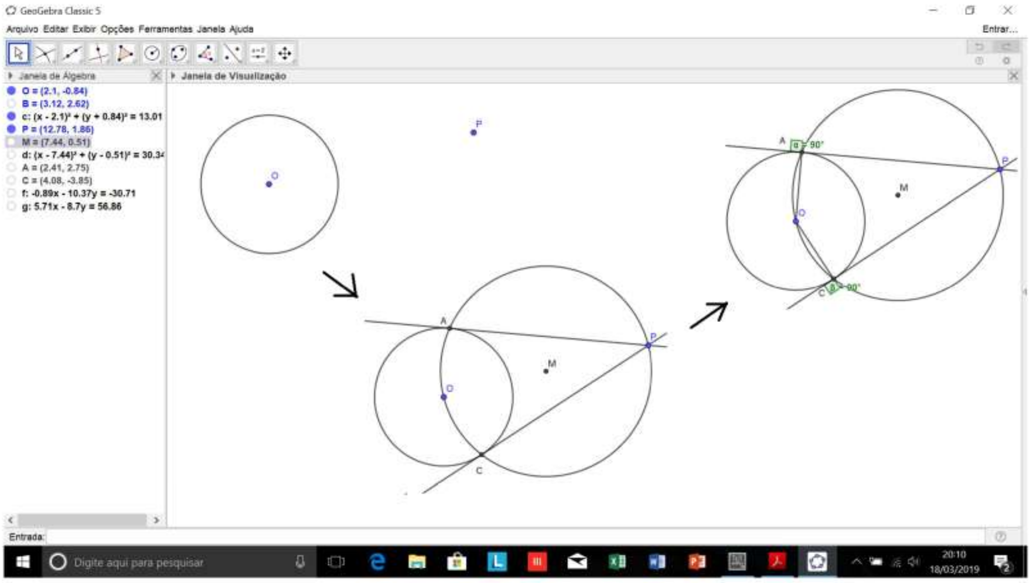

Figura 2.19: Construção das tangentes a um círculo dado passando por um ponto ponto externo

Agora vem um problema de construçao bem mais elaborado, onde é dado uma circunferência de centro O, um ponto P exterior à circunferência e um segmento de comprimento fixo "a". Este problema exige que encontremos a reta que passa por P e determine sobre a circunferência uma corda de comprimento "a". Para esta construção teremos que proceder como na construção via régua e compasso, depois de ter pensado e ter traçado uma estratégia, vamos primeiramente fazer um pequeno rascunho no próprio geogebra o tamanho do raio que deverá ter a circunferência interna auxiliar, então com auxílio do botão "círculo dado centro e raio"construiremos uma circunferência no rascunho com raio $\frac{OC}{2}$, onde OC é o raio da circunferência dada. Agora devemos marcar o diâmetro desta circunferência do esboço, traçar a circunferência de centro em E e raio $\frac{AB}{2}$, achando o ponto de intersecção G, mas o que precisaremos é o comprimento do segmento GF. Agora em O, vamos traçar a circunferência de raio GF, na sequência encontrar o ponto médio entre P e O, traçar a circunferência de centro em H e raio PH, encontrando os pontos de intersecção I e J, agora basta traçar as retas que passam por P e I, encontrando o segmento KL e a outra reta que passa por P e J, encontrando o segmento MN, onde KL e MN possuem comprimento igual ao de AB

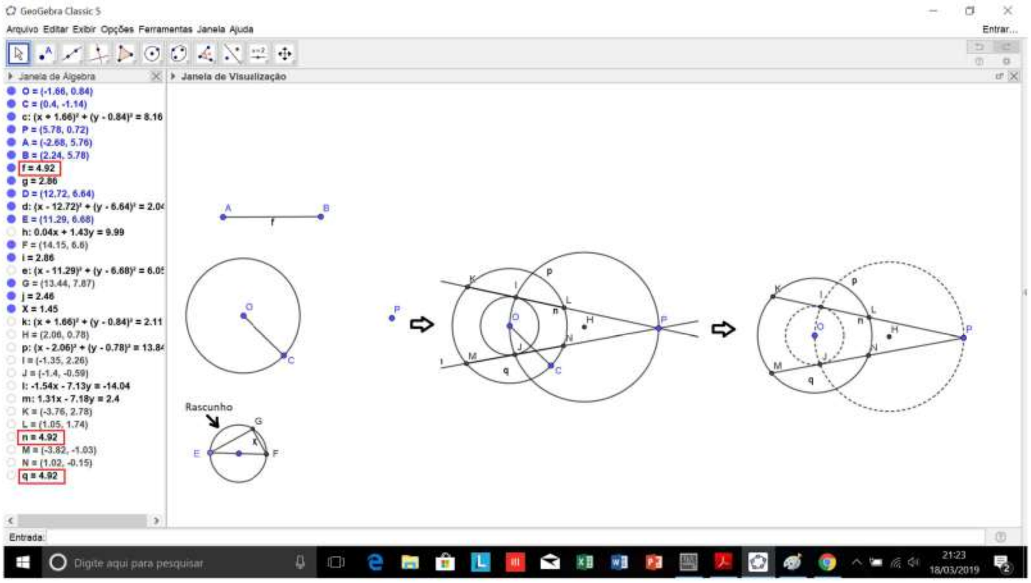

Figura 2.20: Construção das retas que intersectam uma circunferência determinando nela uma corda de tamanho exigido

Perceba, no geogebra que os segmentos AB, KL e MN estão representados pelas letras f, n e q respectivamente, veja na janela do Geogebra que os comprimentos destes são, exatamente, iguais o que nos leva a crer que a construção está correta. A figura 2.20 nos mostra a janela do Geogebra mostrando estas indicações onde as coloquei em um retângulo vermelho.

Na próxima construção, mostraremos como construir um triângulo ΔABC dados os segmentos BC, a altura h$_a$ relativa ao segmento BC e o ângulo α.
Realizaremos esta construção seguindo os mesmos passos da construção via régua e compasso. Então, primeiramente, vamos traçar uma reta qualquer e sobre ela por o segmento AB, como é exigido que a altura tenha comprimento fixo igual a h$_a$, vamos traçar uma perpendicular à reta que contêm o segmento BC, marcar a altura h$_a$, traçar uma paralela distante h$_a$ do segmento BC. (Obs.: para tranferir o segmento BC para a reta construida, deve-se fazer como se faz com régua e compasso, pegue um ponto qualquer da reta, com auxílio do botão "Circulo dado centro e raio", escolha o raio igual a BC, marque o segmento que será congruente a BC, neste caso não dá pra usar o botão de atalho "segmento de comprimento fixo", se usar, o segmento ficará fora da reta e prejudicará toda a construção). Após estes passos, vamos construir o arco capaz do ângulo α (procedimento conhecido e já realizado). Após a construção do arco capaz, devemos marcar os pontos de intersecção entre a circunferência auxiliar para encontrarmos o ponto A e A' que distam exatamente h$_a$ de BC. Verificamos que temos duas soluções para este problema, sendo os triângulos ΔABC e ΔA'BC.

A construção seguinte, trata-se da construção de um triângulo ΔABC onde são dados os valores dos segumentos AB, AC e h$_a$ que valem, respectivamente, 5cm, 6cm e 4cm. Neste caso,

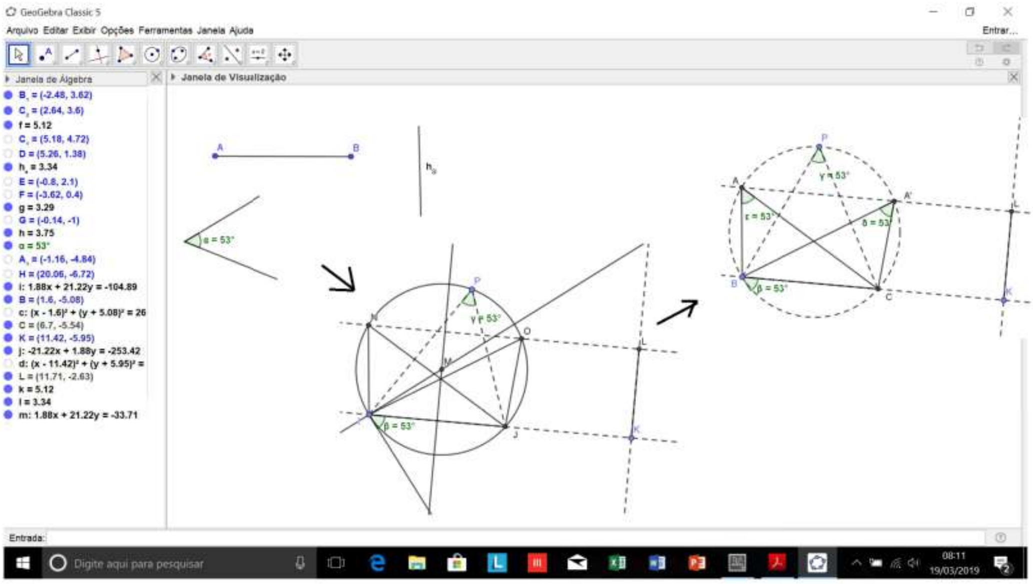

Figura 2.21: Construção do triângulo ΔABC dado segmento BC, ângulo α e altura h$_a$

temos os comprimentos dos segmento AB, AC e h$_a$, para construção destes comprimentos, com auxílio do botão "círculo dado centro e raio", faremos três circunferência, uma de raio 5, outra de raio 6 e aúltima de raio 4. Agora vamos pegar qualquer ponto pertencente a cada circunferência, e traçar os raios de cada uma. Neste caso, os segmentos AD, BE e CF representam os comprimentos 5cm, 6cm e 4cm, respectivamente. Agora vamos seguir os mesmos passos da construção via régua e compasso.
construir uma reta qualquer e marcar um Ponto distante 4cm a esta reta, agora traçar duas circunferência com centro em J de raios, encontrando os pontos K, L, M e N de intersecção com a reta, percebemos que os segmentos KJ e LJ possuem 6cm e os segmentos MJ e NJ possuem 5cm desta forma esses segmentos nos dão uma combinação de 4 possíveis soluções que são os triângulos: ΔKJN, ΔMJL, ΔKJM e ΔNJL

A próxima construção trata-se de inscrever um quadrado em um triângulo ΔABC. Este tipo de problema se mostra bastante versátil, bom para ser usado em "questões desafios". Usei esta questão como desafio entre os colegas professores na sala dos professores e também usei em sala de aula com os alunos, entre os alunos fiz a atividade em equipes e sairam muitas boas idéias.

A solução deste problema em geometria dinâmica, seguirá os mesmos passos feitos via régua e compasso. Iniciando a construção, como já foi dado o triângulo ΔABC, vamos começar marcando um ponto qualquer em um dos lados do segmento, neste caso foi o ponto D. É bom que este ponto fique próximo da extremidade do seguimento escolhido. Agora traçar uma perpendicular ao segmento escolhido passando pelo ponto D, intersectando o segmento adjacente, encontrando outro ponto, no caso o ponto E. Traçar uma paralela a DE e outra paralela a FD, encontrando o ponto G de intersecção entre as paralelas e encontrando o quadrado FDEG. Agora traçar a reta que passa C e G, encontrando outro ponto no segmento oposta, no caso o ponto

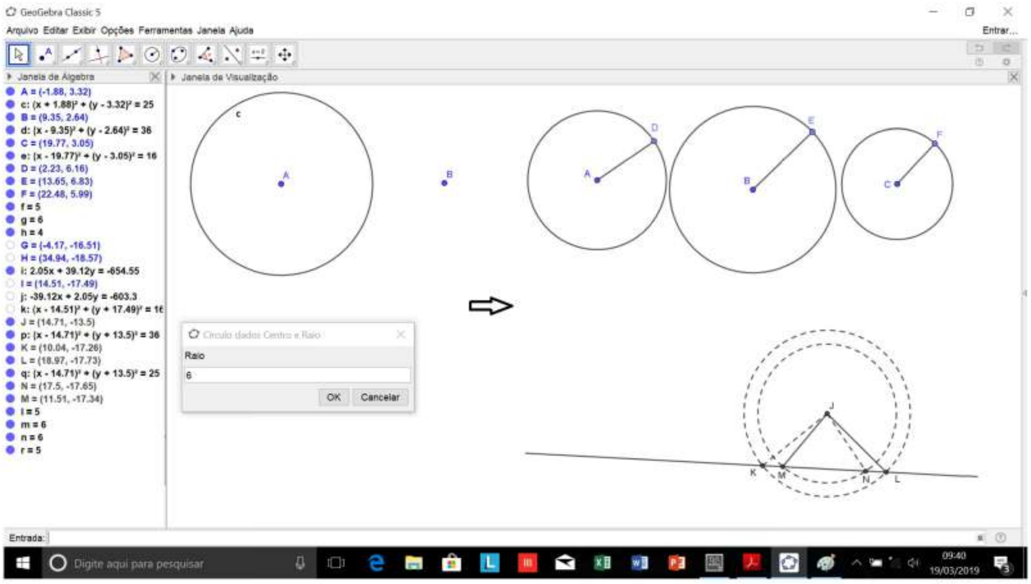

Figura 2.22: Construção do triângulo ΔABC de comprimentos fixos, dado segmento AB de 5cm, AC de 6cm e altura h_a de 4cm

H, o próximo passo é traçar uma paralela a GE que passe pelo ponto H intersectando o lado BC encontrando o ponto I, traçar outra paralela a GF que passe pelo ponto I intersectando o lado AC, encontrando o ponto J, por último, traçar outra paralela a GF que passe pelo ponto H, intersectando o lado AC no ponto K e, desta forma encontramos nosso quadrado IJKH inscrito no triângulo ΔABC.

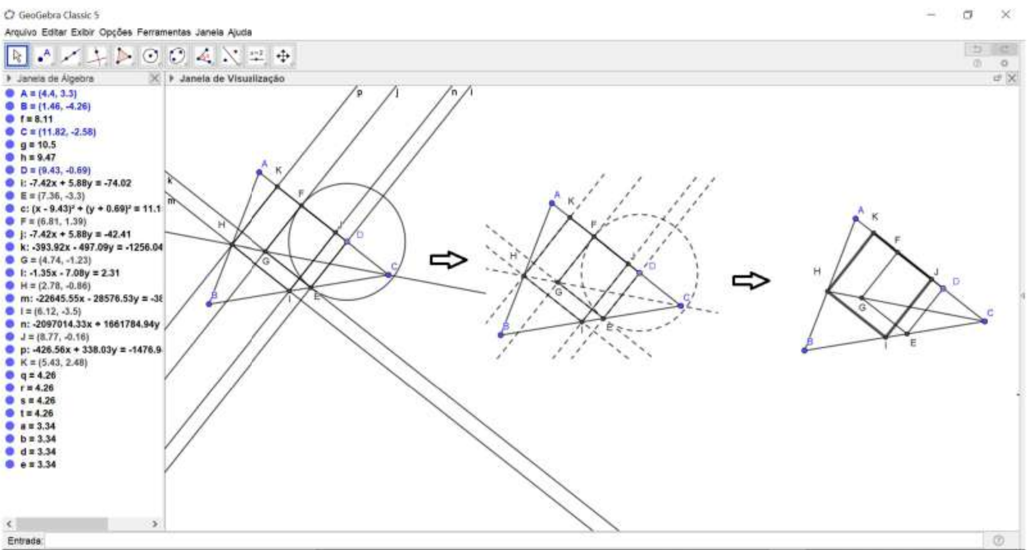

Figura 2.23: Problema do quadrado inscrito em um triângulo

Finalizaremos este capítulo com a construção da demonstração geométrica da desigualdade das médias. Sejam dados dois segmentos distintos, AB e CD, primeiramente vamos transportar estes segmentos para uma reta, no caso do geogebra, o segmento GH representa AB e o segmento HI representa CD. Agora encontrar o ponto médio de GI, traçar a semi-circunferência de centro em M e raio MG, na sequência traçar a mediatriz que passa por M, encontrando o ponto de intersecção J, o segmento MJ é exatamente a média aritmética dos segmentos dados. Agora tomamos um ponto K do arco, traçamos uma perpendicular ao segmento GI que passe pelo ponto K e ponto L, onde KL é a média geométrica, pois KL é a altura relativa à hipotenua do triângulo retângulo ΔGKI e como já foi demonstrado no primeiro capítulo: "Em todo Triângulo retâgunlo, a altura relativa à hipotenusa, é a média geométrica quadrada de um segmento b dado, em que foi tomado a o segmento unitário", e como K pertence a semi-circunferência de forma que, em geometria dinâmica, podemos dar movimento ao segmento KL, mostrando que este segmento que representa a média geométria varia no arco e se torna menor ou, no máximo, igual a média aritmética.

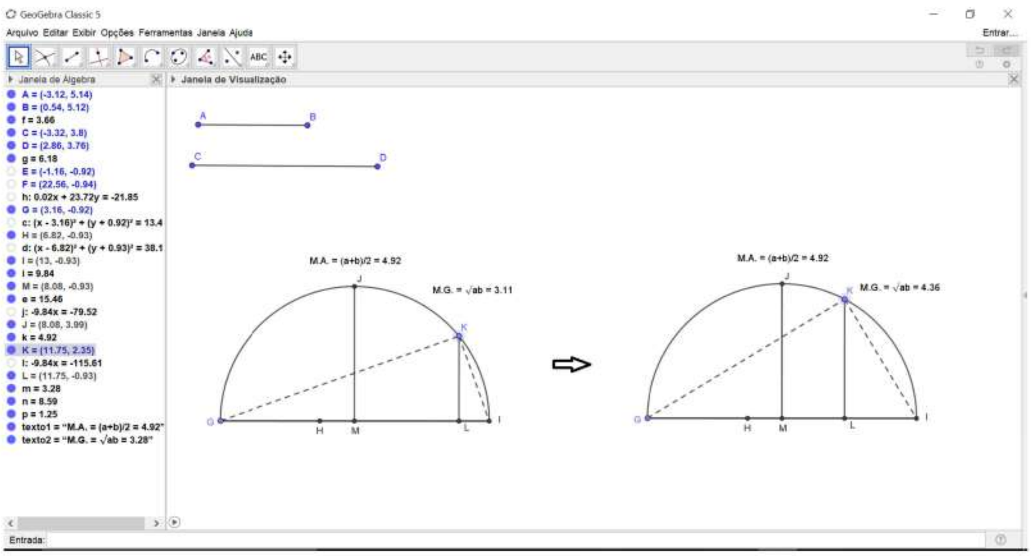

Figura 2.24: Construção da demonstração geométrica da desigualdade das médias

Na figura 2.24 representa a construção já pronta da demonstração da desigualdade das médias e para melhor ilustrar, podemos inserir um texto mostrando a média arítmética e a média geométrica, onde movimentando o segmento KL a média geométrica se altera também.

Considerações Finais

Chegando ao fim deste trabalho, podemos falar com mais propriedade da importância das construções geométricas para o ensino-aprendizagem de geometria. O ensino da geometria, principalmente, no que tange as construções geométricas devem estar presentes na vida escolar desde as séries iniciais. A minha experiência em sala de aula também me levar a crer na importância de se ensinar as construções geométricas, pois começei a ter bons resultados nas aulas de geometria, percebi que os alunos começam a ter um pensamento espacial melhor e para acompanhar essa geração a Geometria dinâmica vem em boa hora, no entanto, percebo que, mesmo com o auxílio da geometria dinâmica, é importante o ensino das construções via régua e compasso, pois, para se construir qualquer objeto no geogebra é necessário que os alunos tenham uma noção de construções geométricas. Dentro da minha experiência tive muitos alunos que logo que viram o software funcionando, queriam de imediato baixar em seus celulares, tablets ou computadores, no entanto, alguns perdiam interesse se não tivessem tarefaz para fazer, daí a consideração que faço é que o professor além de ensinsar as construções deve, também, passar construções-problemas para os alunos se sentirem desafiados e despertar neles mais o interesse pela Geometria.

Diante das dificuldades em geometria e de se estruturar um pensamento geométrico que tenho visto na maioria dos estudantes tanto de ensino fundamental quanto médio, chego a mais uma conclusão de que o ensino das construções geométricas servem para ancorar os novos conhecimentos de geometria que os alunos devem adquirir até o fim do ensino médio, pois a Geometria deve ser admitida como uma ferramenta indispensável a compreensão e descrição do espaço que vivemos. Ainda tendo visto a indiferença que este assunto é tratado por muitos outros professores da edução básica, e há ainda quem acredite que o fracasso escolar é somente a falta de disposição do aluno em aprender, acaba esquecendo que o professor é o profissional qualificado para criar momentos que possibilitam a construção do conhecimento, assim, vejo que temos que ser multiplicadores da boa prática de ensinar as construções geométricas e suas fundamentações. Finalizando, percebi que o emprego das construções geométricas juntamente com o auxílio da Geometria Dinâmica em sala de aula aumentam o interesse do aluno nas aulas de Geometria, dando muito mais siginificado para que o estudante consiga se apropriar destes conhecimentos, por isso esta prática deve ser realizada em sala de aula, além de que os documentos oficiais da educação orientam quanto ao uso destas técnicas.

Referências Bibliográficas

[1] REZENDE, E. Q. F.; QUEIROZ, M. L. B. **Geometria Euclidiana Plana e Construções Geométricas**. Campinas-SP, Editora da Unicamp, 2000.

[2] MUNIZ NETO, A. C. **Geometria**. Coleção PROFMAT, 1.ed. Rio de Janeiro, Editora SBM, 2013.

[3] MOREIRA, M. A. **Aprendizagem significativa - A Teoria e Textos Complementares**. Rio de Janeiro, Editora L. F, 2012

[4] WAGNER, E. **Uma introdução às Construções Geométricas**. Rio de Janeiro, IMPA 2015.

[5] LIMA, E. L. **Curso de Análise**. v. 1. 14.ed. Rio de Janeiro, IMPA, 2017.

[6] COSTA, J. L. **Prática de Ensino; Construçoes Geométricas**. Cabo Frio, Rio de Janeiro, Visão Editora, 2016.

[7] WAGNER, E.; CARNEIRO, J. P. Q. **Construções Geométricas**. Rio de Janeiro, SBM, 2007.

[8] http://basenacionalcomum.mec.gov.br/wp-content/uploads/2018/02/bncc-20dez-site.pdf Acessado em 15/01/2019

[9] https://novaescola.org.br/bncc/conteudo/33/compare-as-mudancas-dos-pcns-para-a-bncc-em-matematica Acessado em 16/01/2019

[10] https://educador.brasilescola.uol.com.br/trabalho-docente/aprendizagem-significativa.htm Acessado em 16/01/2019

[11] LORENZATO, S. **Aprender a Ensinar Geometria**. Campinas, SP, Série Educação Matemática, Mercado das Letras, 2015.

Anexo: Propostas de Exercícios

1. Construa um triângulo ΔABC, sendo conhecidos, o lado BC, a altura h$_a$ relativa a esse lado e a razão k = $\frac{2}{3}$, entre os outros dois lados do triângulo.

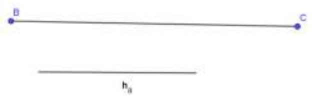

Figura 2.25: Segmento BC e Altura dados

2. Construa um triângulo ΔABC, sendo conhecidos o lado a, o ângulo α, oposto a esse lado, e razão k = $\frac{3}{5}$ entre os lados c e b.

3. Inscreva uma circunferência num setor circular dado.

4. Dadas duas retas concorrentes t e s, e sobre s o ponto E, construa uma circunferência que contenha o ponto E, tenha centro em s e seja tangente a t.

5. Construa um retângulo de diagonal medindo 7cm e semiperímetro, 8cm.

6. Sejam a e b retas paralelas, P um ponto qualquer não pertencente a essas retas e O um ponto situado entre elas, como na figura. Trace por P uma reta r que encontra a num ponto Y e b num ponto Z, tas que $YO \cong ZO$. (Sugestão. Obtenha o ponto médio entre Y e Z)

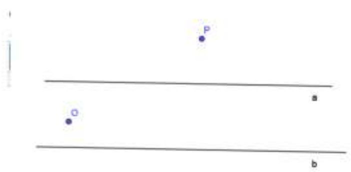

Figura 2.26: retas paralelas e pontos dados