THIAGO TAVARES VITAL

EXPLORANDO UM RECURSO TECNOLÓGICO PARA O ENSINO DE MATEMÁTICA: A APLICABILIDADE DO SOFTWARE GEOGEBRA NA GEOMETRIA ANALÍTICA

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO NORTE FLUMINENSE
DARCY RIBEIRO - UENF
CAMPOS DOS GOYTACAZES - RJ
DEZEMBRO DE 2018

THIAGO TAVARES VITAL

EXPLORANDO UM RECURSO TECNOLÓGICO PARA O ENSINO DE MATEMÁTICA: A APLICABILIDADE DO SOFTWARE GEOGEBRA NA GEOMETRIA ANALÍTICA

"Dissertação apresentada ao Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, como parte das exigências para obtenção do título de Mestre em Matemática."

Orientador: Prof. Rigoberto Gregorio Sanabria Castro

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO NORTE FLUMINENSE
DARCY RIBEIRO - UENF
CAMPOS DOS GOYTACAZES - RJ
DEZEMBRO DE 2018

FICHA CATALOGRÁFICA
UENF - Bibliotecas
Elaborada com os dados fornecidos pelo autor.

V836 Vital, Thiago Tavares.

EXPLORANDO UM RECURSO TECNOLÓGICO PARA O ENSINO DE MATEMÁTICA : A APLICABILIDADE DO SOFTWARE GEOGEBRA NA GEOMETRIA ANALÍTICA / Thiago Tavares Vital. - Campos dos Goytacazes, RJ, 2018.

185 f. : il.
Bibliografia: 130 - 133.

Dissertação (Mestrado em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, Centro de Ciência e Tecnologia, 2018.
Orientador: Rigoberto Gregorio Sanabria Castro.

1. Um breve histórico da geometria analítica. 2. Educação e tecnologia. 3. O conteúdo de geometria analítica no ensino médio. 4. O desenvolvimento da pesquisa. 5. A aplicação da sequência didática e análise dos dados. I. Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro. II. Título.

CDD - 510

THIAGO TAVARES VITAL

EXPLORANDO UM RECURSO TECNOLÓGICO PARA O ENSINO DE MATEMÁTICA: A APLICABILIDADE DO SOFTWARE GEOGEBRA NA GEOMETRIA ANALÍTICA

"Dissertação apresentada ao Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, como parte das exigências para obtenção do título de Mestre em Matemática."

Aprovada em 04 de Dezembro de 2018.

Prof[a]. Arilise Moraes de Almeida Lopes
D.Sc. - IF Fluminense

Prof. Oscar Alfredo Paz La Torre
D.Sc. - UENF

Prof. Luiz Henrique Zeferino
D.Sc. - UENF

Prof. Rigoberto Gregorio Sanabria Castro
D.Sc. - UENF
(ORIENTADOR)

Agradecimentos

Agradeço a Deus pela minha vida, pelo dom do conhecimento e por me dar forças nos momentos difíceis.

Agradeço à minha mãe, por sempre acompanhar os meus estudos e me dar as condições necessárias para eu cumprir os meus objetivos.

Agradeço aos meus familiares e amigos, que me incentivaram e compreenderam minha dedicação aos estudos.

Agradeço à Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro e aos professores do PROFMAT: Elba, Geraldo, Liliana, Mikhail, Nelson e Oscar, que compartilharam conhecimentos e experiências que me fizeram refletir a prática e o meu papel enquanto professor. Em especial, gostaria de agradecer ao meu orientador Rigoberto, que acreditou na minha pesquisa e se fez presente em momentos tão difíceis.

Agradeço aos meus colegas de curso: Bárbara, Diógenes, Eliete, Emanuel, Érika, Gilmar, Rackel, Raul e Samara. Em especial, Bruna, Carla e Victor, que viajaram comigo todas as semanas ao longo desses dois anos, dividindo alegrias e dificuldades, mas que, com certeza, fizeram o meu caminho ser um pouco mais fácil.

Agradeço aos professores da banca pelas contribuições feitas à minha pesquisa.

Agradeço aos diretores da Escola Officina do Saber, Marcelo e Roseane, à supervisora Jane e à orientadora Amanda, que acreditaram no projeto desenvolvido e me deram todas as condições para realizá-lo.

Agradeço aos meus colegas de trabalho, pela torcida e pelas palavras de incentivo.

Agradeço aos meus queridos alunos e amigos, que se dedicaram e contribuíram com este trabalho. Desejo a todos sucesso na trajetória pessoal e profissional.

Agradeço à Isadora, pela leitura, sugestões e revisão textual desta pesquisa.

Agradeço à Sociedade Brasileira de Matemática, por possibilitar esse período de estudos e desenvolvimento profissional.

E a todos aqueles que colaboraram de alguma forma para a realização deste trabalho, o meu muito obrigado.

‘‘A Matemática é o alfabeto com o qual Deus escreveu o universo’’.
Galileu Galilei

Resumo

Considerando a dificuldade encontrada no ensino e na aprendizagem de Geometria Analítica na 3ª série do Ensino Médio, esta pesquisa tem como objetivo promover a aprendizagem desse conteúdo através de uma sequência didática com o auxílio do *software* GeoGebra, que permite a construção e manipulação de objetos geométricos. Foram criados, no GeoGebra, Atividades de Exploração que permitiram descobrir e estudar relações e propriedades de pontos, retas, circunferências, elipses, hipérboles e parábolas pelos alunos, que assumiram o papel central nas aulas. Listas de Problemas foram propostas para a aplicação das propriedades observadas e os Testes avaliaram o conhecimento adquirido. A sequência didática e os dados foram aplicados e coletados em um colégio particular na cidade de Carangola/MG, nos meses de agosto e setembro de 2018. Os resultados constataram que o *software* GeoGebra é um recurso que pode facilitar e tornar efetiva a aprendizagem de Geometria Analítica, pois estimula a participação, a experimentação e o senso crítico dos alunos.

Palavras-chaves: Geometria Analítica, GeoGebra, Ensino Médio, Matemática.

Abstract

Taking into account the difficulty found in the teaching and learning of Analytic Geometry in the third grade of High School, this research has the objective to promote the learning of this content through a didactic sequence with the help of Software GeoGebra, which allows the construction and manipulation of geometric objects. In it, exploration activities were created, which allowed the discovery and study of relations and properties of dots, straight lines, circunferences, ellipse, hyperbole and parable by the students, that assume the central role of the classes. Lists of problems were proposed for the application of the properties observed and the tests assessed the knowledge acquired. The didactic sequence and data were applicated and collected in a private school in the city of Carangola, Minas Gerais, in the months of August and September, 2018. The results showed up that the Software GeoGebra is a resource that can facilitate and make effective the learning of Analytic Geometry because it encouraged the participation, the experimentation and critical sense of the students.

Key-words: Analytic Geometry, GeoGebra, High School Teaching, Math.

Lista de ilustrações

Lista de quadros

Lista de abreviaturas e siglas

ENEM	Exame Nacional do Ensino Médio
MG	Minas Gerais
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais
TIC	Tecnologias da informação e comunicação
sen	Seno
$\cos$	Cosseno
tg	Tangente
cotg	Cotangente

Lista de símbolos

$+$	Adição
$-$	Subtração
$\cdot$	Multiplicação
$\times$	Multiplicação
$\div$	Divisão
$\surd$	Raiz quadrada
$=$	Igual
$\neq$	Diferente
$\pm$	Mais ou menos
$>$	Maior
$<$	Menor
$\geq$	Maior ou igual
$\leq$	Menor ou igual
α	Letra grega alpha
β	Letra grega beta
θ	Letra grega theta
λ	Letra grega lambda
$\in$	Pertence
$\vert$	Tal que
$\forall$	Para todo
$\exists$	Existe

$\nexists$	Não existe
$\parallel$	Paralelismo
$\perp$	Perpendicularidade
$\mathbb{R}$	Conjunto dos números reais
$\mathbb{R}^2$	Conjunto dos pares ordenados de números reais
$\Rightarrow$	Implicação
$\mid\mid$	Módulo
$()$	Parêntesis
$\{\}$	Chaves

Sumário

Introdução

O ensino da Matemática, assim como a educação de maneira geral, necessitam de uma renovação. Há tempos o quadro e o giz têm sido os únicos instrumentos utilizados pelo professor, em aulas tradicionais e expositivas, nas quais o docente transmite o seu conhecimento e a sua visão de um assunto aos alunos. Nessa abordagem, o aluno não participa ativamente do processo de aprendizagem, e o conteúdo, na maior parte das vezes, não é aprendido de forma significativa. Não é difícil perceber que tal prática não tem sido satisfatória para a educação.

Segundo D'Ambrosio (1989), algumas consequências dessa prática de ensino são:

- os alunos acreditam que a aprendizagem é fruto de decorar fórmulas;
- os alunos não questionam os conceitos, apenas os aceitam como verdadeiros;
- o aluno perde a autoconfiança em seu instinto matemático;
- o aluno desiste de resolver um problema por não conhecer a fórmula, o algoritmo ou o processo de solução apropriado para o problema.

Além dessas consequências, utilizando-se exclusivamente da estratégia de ensino da aula expositiva, dificilmente o aluno desenvolverá as competências e habilidades abordadas pelos PCN (BRASIL, 1998, p. 46) em Matemática, tais como:

- utilizar adequadamente os recursos tecnológicos como instrumentos de produção e de comunicação;
- formular hipóteses e prever resultados;
- fazer e validar conjecturas, experimentando, recorrendo a modelos, esboços, fatos conhecidos, relações e propriedades;
- utilizar adequadamente calculadoras e computador, reconhecendo suas limitações e potencialidades.

Nessa perspectiva, as Tecnologias da Informação e Comunicação (TIC) têm como objetivo proporcionar, no ramo da educação, uma aula mais dinâmica, na qual o aluno exerce o papel central no processo de ensino-aprendizagem. Os PCN (BRASIL, 1998, p. 53) abordam a diversidade de recursos utilizados no ensino da Matemática:

> Aulas e livros, contudo, em nenhuma hipótese resumem a enorme diversidade de recursos didáticos, meios e estratégias que podem ser utilizados no ensino das Ciências e da Matemática. O uso dessa diversidade é de fundamental importância para o aprendizado porque tabelas, gráficos, desenhos, fotos, vídeos, câmeras, computadores e outros equipamentos não são só meios. Dominar seu manuseio é também um dos objetivos do próprio ensino das Ciências, Matemática e suas Tecnologias. Determinados aspectos exigem imagens e, mais vantajosamente, imagens dinâmicas; outros necessitam de cálculos ou de tabelas de gráfico; outros podem demandar expressões analíticas, sendo sempre vantajosa a redundância de meios para garantir confiabilidade de registro e/ou reforço no aprendizado.

Uma área propícia ao uso das TIC é a Geometria Analítica, que consiste na relação entre geometria e álgebra e é um assunto considerado complexo pelos alunos da 3ª série do Ensino Médio. O uso de softwares educacionais nessa área poderia ser um importante recurso didático para contribuir no aprendizado. De acordo com Gil (2008b), apesar do grande destaque da álgebra no Ensino Médio, a dificuldade dos alunos se deve principalmente à rejeição à Matemática, à dificuldade de abstração e à utilização da linguagem simbólica. Em relação à geometria, nota-se um descaso histórico dessa área por parte de alunos, materiais didáticos e professores, que não dão a devida importância ao ensino da geometria. Segundo Pavanello (1993), esse abandono é evidenciado, principalmente nas escolas públicas, após a promulgação da Lei 5692/71.

> A liberdade que essa lei concedia às escolas quanto à decisão sobre os programas das diferentes disciplinas possibilitou que muitos professores de matemática, sentindo-se inseguros para trabalhar com a geometria, deixassem de incluí-la em sua programação. Por outro lado, mesmo dentre aqueles que continuaram a ensiná-la, muitos reservaram o final do ano letivo para sua abordagem em sala de aula - talvez numa tentativa, ainda que inconsciente, de utilizar a falta de tempo como desculpa pela não realização do trabalho programado com o tópico em questão (PAVANELLO, 1993, p. 7).

Diante desses problemas, a presente pesquisa deverá responder a seguinte questão: “O uso do GeoGebra pode facilitar o processo de ensino-aprendizagem da Geometria Analítica para alunos da 3ª série do ensino médio?”. O objetivo principal do trabalho é promover a aprendizagem da Geometria Analítica para alunos da 3ª série do Ensino Médio através de uma sequência didática com o auxílio do *software* GeoGebra, a fim de comprovar a hipótese de que esse recurso didático facilitaria o aprendizado dos discentes. Especificamente, espera-se que, ao final dessa pesquisa, os alunos resolvam problemas de geometria analítica, formulem hipóteses e prevejam resultados, conjecturem e experimentem relações e propriedades, utilizem o GeoGebra como instrumento de produção de conhecimento e reconheçam possíveis limitações do *software*.

Com o propósito de identificar trabalhos semelhantes à proposta deste projeto, foi realizada uma revisão de literatura no banco de dissertações do Profmat em fevereiro de 2018, em busca de pesquisas desenvolvidas a partir de 2013 que utilizassem o termo GeoGebra. A princípio, foram encontrados 247 registros. Dentre eles, foram selecionados 25 que continham pelo menos um dos seguintes termos: Geometria Analítica, Retas, Circunferência e Cônicas.

Após estudo dos resumos e, posteriormente dos trabalhos, três foram selecionados pela semelhança com a pesquisa e pelas possíveis contribuições para a realização deste trabalho: (i) "Geometria Analítica: explorando conceitos do Ensino Médio com o uso de Animações no GeoGebra", de Moraes (2016), que cria quatro construções sujeitas a movimentos no *software* envolvendo conceitos de reta, circunferências e vetores. Chama a atenção uma casa com janela e porta animadas, sendo possível abri-las e fechá-las, e um carro que pode se movimentar. (ii) "Atividades interativas com o GeoGebra: uma abordagem introdutória ao estudo de geometria analítica", de Sousa (2014), que elabora 22 atividades básicas com o GeoGebra para discutir os conceitos de Geometria Analítica abordados no Ensino Médio através da sua resolução. Além disso, resolve 8 problemas de geometria euclidiana pelo método analítico; (iii) "Uma proposta para o ensino de geometria analítica através da resolução de problemas e do uso do GeoGebra", de Cardoso (2016), que introduz e desenvolve um assunto por meio de um problema e utiliza o GeoGebra como ferramenta de resolução e visualização do caso.

A criatividade na elaboração de atividades de Moraes (2016), a maneira que todo o conteúdo de Geometria Analítica é abordado por Sousa (2014) e a utilização do GeoGebra como ferramenta de resolução de problemas por Cardoso (2016) ajudaram a moldar o presente trabalho, que diferencia-se dos demais por ter o aluno exercendo o papel central no processo de ensino-aprendizagem atuando como um pesquisador, manipulando objetos do GeoGebra para conjecturar e testar relações e fórmulas.

A motivação para esta pesquisa surgiu a partir da necessidade observada na prática de aprimorar o trabalho do ensino da Geometria Analítica para alunos de 3ª série do Ensino Médio, segmento no qual o pesquisador atua desde 2014. Por meio de aulas expositivas, observou-se que os recursos utilizados, em grande maioria o quadro e o giz, não eram suficientes para explorar e apresentar com qualidade os conteúdos relacionados à Geometria Analítica. Além disso, os resultados positivos obtidos nas provas nem sempre refletem o verdadeiro aprendizado, visto que algum tempo depois da avaliação a maioria dos alunos não se lembra mais do que foi estudado. Portanto, para que haja um aprendizado eficaz, é preciso que as experiências vividas em sala de aula sejam marcantes. Para explorar essa necessidade, o GeoGebra atuaria como uma ferramenta capaz de auxiliar tanto o professor quanto o aluno no ensino e aprendizado da Geometria Analítica.

O GeoGebra já é utilizado pelo pesquisador em sala de aula em funções afim, quadrática, exponencial, logarítmica, modular e trigonométrica, porém, com a finalidade de estudar os gráficos. No entanto, a proposta nesta pesquisa é investigar se o uso do GeoGebra, quando administrado pelos próprios alunos, tem resultados ainda mais efetivos no ensino, uma vez que, dessa forma, os alunos participarão ativamente do aprendizado, ficando a cargo do professor criar atividades propícias à aprendizagem e atuar como um mediador desse processo.

O trabalho foi organizado do seguinte modo: o primeiro capítulo apresenta um breve histórico da Geometria Analítica, destacando a importância de René Descartes e Pierre de Fermat; o segundo capítulo faz um paralelo entre educação e tecnologia, discute o novo papel do professor em sala de aula e trata do *software* GeoGebra; o terceiro capítulo aborda os temas trabalhados em Geometria Analítica no Ensino Médio: ponto, reta, circunferência, elipse, hipérbole e parábolas; o quarto apresenta a proposta da sequência didática para o ensino da Geometria Analítica, composta de Atividades de Exploração no GeoGebra, Listas de Problemas e Testes; o quinto discorre sobre os resultados e as observações feitas na aplicação das atividades em sala de aula; no último capítulo tem-se as considerações finais.

Capítulo 1

Um breve histórico da Geometria Analítica

Este capítulo traz um breve histórico sobre o surgimento, no século XVII, da Geometria Analítica, através de dois matemáticos franceses que, de forma independente, desenvolveram os primeiros trabalhos nessa área e estão entre os principais matemáticos da história.

Vale destacar que a história tem um papel muito importante no processo de ensino-aprendizagem da matemática. Aprender matemática se torna mais fácil quando é feito de maneira contextualizada. O aluno se sente motivado ao conhecer o cenário da época e a importância do assunto tratado atualmente. Para D'Ambrósio (1999), desvincular a matemática das outras atividades humanas é um erro.

Uma das competências e habilidades a serem desenvolvidas em matemática segundo os PCN (BRASIL, 1998, p. 46) é "relacionar etapas da história da matemática com a evolução da humanidade". Em outra passagem, que aborda a seleção dos conteúdos mínimos da Base Nacional Comum, diz que o critério central para a seleção é o da contextualização e da interdisciplinaridade, como a importância histórica do tema no desenvolvimento da ciência (BRASIL, 1998, p. 43).

Segundo D'Ambrósio (1999):

> [· · ·] não é necessário que o professor seja um especialista para introduzir História da Matemática em seus cursos. Se em algum tema o professor tem informação ou sabe de uma curiosidade histórica, deve compartilhar com os alunos. Se sobre outro tema ele não tem o que falar, não importa. Não é necessário desenvolver um currículo, linear e organizado, de História da Matemática. Basta colocar aqui e ali algumas reflexões. Isto pode gerar muito interesse nas aulas de matemática. E isso pode ser feito sem que o professor tenha se especializado em História da Matemática.

1.1 René Descartes

Descartes nasceu em La Haye (Figura 1), antiga província de Touraine, na França, em 31 de março de 1596. Frequentou a escola jesuíta de La Flèche por 8 anos e estudou direito e medicina na Universidade de Pointiers a partir dos 16 anos (VAZ, 2010). Viajou com diversas campanhas militares. Conheceu Mersenne (1588-1648) e vários outros cientistas em Paris. Tornou-se o "pai da filosofia moderna" ao anunciar em 1637 o *Discours de la méthode pour bien conduire sa raison et chercher la vérité dans les sciences* (Discuso sobre o método para raciocinar bem e procurar a verdade nas ciências) (BOYER; MERZBACH, 2012, p. 237). Segundo Smole e Diniz (2016, p. 77), esse livro "foi responsável por uma revolução de todo o pensamento ocidental, pois construiu o alicerce para o desenvolvimento da ciência".

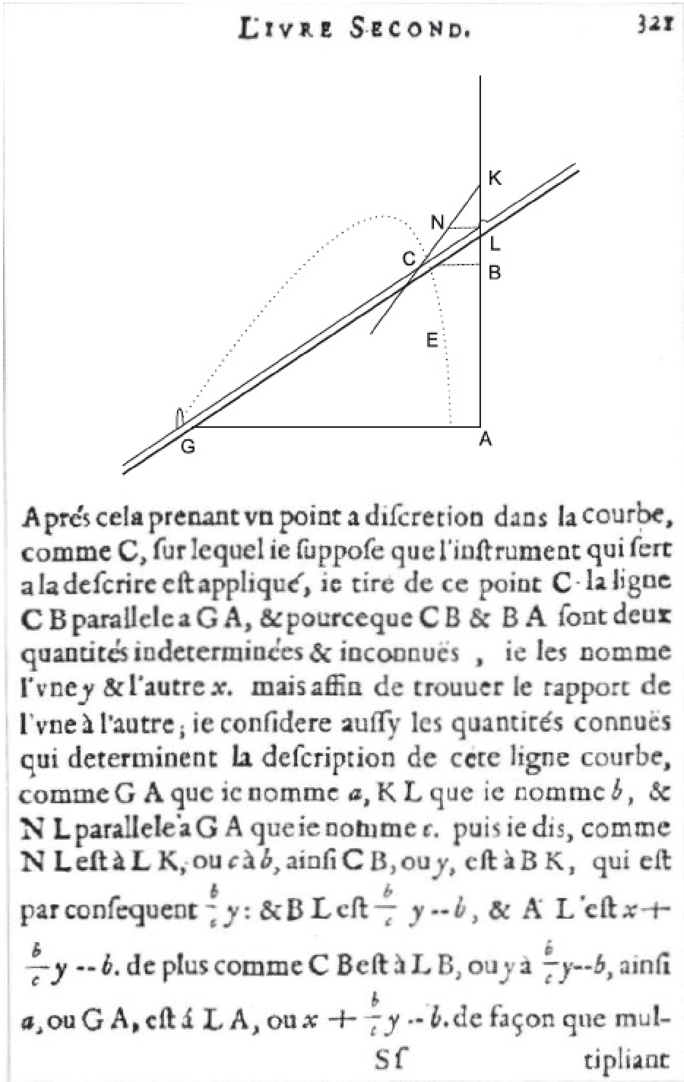
Figura 1 – René Descartes

Fonte: (EVES, 2011, p. 384)

De acordo com Boyer e Merzbach (2012), Descartes se interessou em matemática no frio inverno de 1619, quando estava com o exército bávaro. Nesse período descobriu a relação $V + F = A + 2$, que leva o nome de Euler (1707-1783), em que V é o número de vértices de um poliedro, F é o número de faces e A o número de arestas. Ainda contribuiu com um método para achar a solução algébrica de equações cúbicas e quárticas, como descobrir raízes racionais, como abaixar o grau de uma equação conhecendo uma raiz, encontrar a reta normal e a tangente a uma curva (embora o método de Fermat fosse mais eficiente), entre outras.

Sua obra mais conhecida, *La géométrie* (A geometria), foi apresentada como um dos três apêndices do *Discours de la méthode* (BOYER; MERZBACH, 2012). Segundo Eves (2011, p. 384), foi o único trabalho matemático de Descartes, que conta com cerca de cem páginas. O leitor contemporâneo consegue entender uma boa porção dessa obra, pois a notação utilizada em *La géométrie* assemelha-se bastante à atual, como se observa na Figura 2. As incógnitas eram representadas por letras do fim do alfabeto e os parâmetros pelas iniciais (DANTE, 2016, p. 92). O objetivo deste apêndice era ilustrar seu método filosófico geral. Para Descartes, “todo problema de geometria pode facilmente ser reduzido a termos tais que o conhecimento dos comprimentos de certos segmentos basta para a sua construção” (BOYER; MERZBACH, 2012, p. 238). Isso indica que o objetivo é uma construção geométrica, e não a redução da geometria à álgebra.

Figura 2 – Uma página de La géométrie


LIVRE SECOND. 321

Aprés cela prenant vn point a diſcretion dans la courbe, comme C, ſur lequel ie ſuppoſe que l'inſtrument qui ſert a la deſcrire eſt appliqué, ie tire de ce point C la ligne C B parallele a G A, & pourceque C B & B A ſont deux quantités indeterminées & inconnuës, ie les nomme l'vne y & l'autre x. mais affin de trouuer le rapport de l'vne à l'autre; ie conſidere auſſy les quantités connuës qui determinent la deſcription de cete ligne courbe, comme G A que ie nomme a, K L que ie nomme b, & N L parallele à G A que ie nomme c. puis ie dis, comme N L eſt à L K, ou c à b, ainſi C B, ou y, eſt à B K, qui eſt par conſequent $\frac{b}{c}y$: & B L eſt $\frac{b}{c}y - b$, & A L eſt $x + \frac{b}{c}y - b$. de plus comme C B eſt à L B, ou y à $\frac{b}{c}y - b$, ainſi a, ou G A, eſt à L A, ou $x + \frac{b}{c}y - b$. de façon que mul-

Sſ tipliant

Fonte: (EVES, 2011, p. 387)

> Praticamente toda a *La géométrie* está dedicada a uma completa aplicação da álgebra à geometria e da geometria à álgebra; mas há pouco no tratado que se assemelha ao que hoje consideramos como geometria analítica. Não há nada de sistemático sobre coordenadas retangulares, pois ordenadas oblíquas são geralmente consideradas; portanto, não há fórmulas para distâncias, inclinação, ponto de divisão, ângulo entre duas retas, ou outro material introdutório semelhante. Além disso, em toda a obra, não há uma única curva nova traçada diretamente a partir de sua equação, e o autor se interessava tão pouco por esboçar curvas que nunca entendeu completamente o significado de coordenadas negativas. Ele sabia de modo geral

> que ordenadas negativas são orientadas em sentido oposto ao tomado como positivo, mas nunca usou abscissas negativas. Além disso, o princípio fundamental da geometria analítica - a descoberta de que equações indeterminadas em duas incógnitas correspondem a lugares geométricos - só aparece no segundo livro, e mesmo então só incidentalemnte.(BOYER; MERZBACH, 2012, p. 242)

René Descartes faleceu no dia 11 de fevereiro de 1650, aos 53 anos de idade, em Estocolmo, capital da Suécia, vítima de uma pneumonia devido ao rigoroso inverno escandinavo (VAZ, 2010).

1.2 Pierre de Fermat

Considerado por muitos como um dos matemáticos mais notáveis do século XVII, o francês Pierre de Fermat (1601-1665) (Figura 3) não chegou a ser um matemático profissional. Fermat estudou direito em Toulouse e serviu no parlamento local como advogado e conselheiro. A matemática era vista como uma diversão (BOYER; MERZBACH, 2012).

Figura 3 – Pierre de Fermat

Fonte: (EVES, 2011, p. 390)

Segundo Ramos (2013, p. 48), Fermat trocava correspondências com outros matemáticos da época, como René Descartes, Evangelista Torricelli (1608-1647), Blaise Pascal (1623-1669), Bonaventura Cavalieri (1598-1647), dentre outros. O intercâmbio de ideias por cartas era bastante rápido, o que facilitou o desenvolvimento matemático da época. Fermat não publicava as suas descobertas. Os seus principais escritos, inclusive *Ad locus planos et solidos isagoge* (Introdução aos lugares geométricos planos e sólidos), foram publicados em 1679 em *Varia opera mathematica*, por seu filho Samuel Fermat.

De acordo com Carvalho e Roque (2012, p. 203), a diferença dada pelos dois precursores no tratamento da geometria analítica era que Descartes partia de um lugar geométrico para encontrar a equação que seus pontos satisfazem; Fermat partia de uma dada equação e encontrava o lugar geométrico dos pontos que a satisfazem. Ainda nessa época, notava-se que Fermat já possuía a ideia de uma geometria analítica em três dimensões, como observa-se no trecho de um de seus escritos:

> Há certos problemas que envolvem só uma incógnita e que podem ser chamados determinados, para distingui-los dos problemas de lugares geométricos. Há outros que envolvem duas incógnitas e que nunca podem ser reduzidos a uma só; e esse são os problemas de lugares geométricos. Nos primeiros problemas, procuramos um ponto único, nos segundos uma curva. Mas se o problema proposto envolve três incógnitas, deve-se achar, para satisfazer a equação, não apenas um ponto ou uma curva, mas toda uma superfície. Assim aparecem superfícies como lugares geométricos etc. (BOYER; MERZBACH, 2012, p. 246)

A geometria analítica de Fermat era mais sistemática, didática e assemelha-se mais com a que se conhece hoje do que a geometria analítica de Descartes. Fermat usava um sistema de coordenadas onde uma reta horizontal representava o semieixo positivo das abscissas. O eixo das ordenadas não era representado. Assim, trabalhava apenas no primeiro quadrante, não obtendo uma visualização completa de algumas curvas. Fermat dividiu a família das equações da forma $Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$ em sete subfamílias: reta ($ax = by$), hipérbole ($xy = b$), retas (a razão entre $x^2 \pm xy$ e y^2 é constante), parábola ($x^2 = ay$), círculo ($b^2 - x^2 = y^2$), elipse (a razão entre $b^2 - x^2$ e y^2 é constante) e hipérbole (a razão entre $b^2 + x^2$ e y^2 é constante) (RAMOS, 2013, p. 49, 50). Além disso, Fermat já aplicava translação e rotação de eixos para que algumas de suas equações ficassem mais simples (BOYER; MERZBACH, 2012, p. 245).

Provavelmente em 1629, antes mesmo de *La géométrie* (1637) de Descartes, Fermat já tinha desenvolvido sua geometria analítica, pois nessa época já tinha um método para encontrar retas tangentes e máximos e mínimos de funções, conceito que hoje é conhecido como derivada. Algum tempo depois, chegou a um teorema sobre o cálculo de áreas sob curvas, onde dividia certa região em uma infinidade de subintervalos, como é aplicado na soma de Riemann.

A aritmética foi outra área na qual Fermat se dedicou. Conjecturou que os números da forma $F_n = 2^{2^n} + 1$ eram primos. Euler demonstrou que a conjectura não é verdadeira para $n = 5$ (MOL, 2013, p. 98). Contribuiu com o "pequeno" teorema de Fermat, que diz que se p é primo e a é primo com p, então p divide $a^{p-1} - 1$. Esse teorema foi demonstrado primeiramente por Leibniz (1646-1716) e depois por Euler, utilizando a indução matemática, método que Fermat e Pascal já conheciam. Ainda deixou o "grande" teorema de Fermat, que diz que não existe números inteiros positivos x, y e z, tais que $x^n + y^n = z^n$ para qualquer inteiro n maior do que 2. Tal problema permaneceu sem solução até 1995, quando o matemático inglês Andrew Wiles o demonstrou usando métodos sofisticados (MOL, 2013, p. 98), embora Fermat tivesse deixado escrito que possuía uma maravilhosa demonstração desse teorema (BOYER; MERZBACH, 2012).

Capítulo 2

Educação e tecnologia

2.1 O uso de tecnologias no ensino da Matemática

Muito se discute sobre o uso de tecnologias na educação. De um lado, há quem acredita que a principal tecnologia usada no ensino, o computador, faz com que o aluno se torne apenas um repetidor de tarefas. Na área da matemática, destacada pela razão e lógica, o computador faria o trabalho de raciocinar, e, dessa forma, o aluno deixaria de desenvolver a sua inteligência. Do outro lado da discussão, existem argumentos que colocam o computador como a solução dos problemas educacionais.

Segundo Borba e Penteado (2007, p. 12), a prática educativa está em processo de transformação, o que não quer dizer que está melhor ou pior, mas é necessário analisar a tecnologia informática no cenário educacional. Desse modo, é importante que as experiências de sucesso no uso de tecnologias na educação sejam gradativamente incorporadas ao ensino à medida que os recursos se tornem acessíveis.

Um exemplo do uso do computador na área de matemática é a representação de expressões algébricas por meio de gráficos, assunto principal desta pesquisa. Nesse caso, usar um *software* conveniente permite que o professor ganhe tempo no traçado de gráficos, compare alguns deles em um mesmo plano, além de o gráfico ser melhor representado. Além disso, há vantagens também para o aluno, como defende Borba e Penteado (2007, p. 37): "As novas mídias, como os computadores com *softwares* gráficos e as calculadoras gráficas, permitem que o aluno experimente bastante, de modo semelhante ao que faz em aulas de biologia ou de física." A experimentação pode possibilitar um envolvimento maior dos estudantes com o conteúdo, levando-os a uma investigação de conceitos e desenvolvimento de ideias a ponto de criarem conjecturas e validá-las (BORBA, 2010, p. 4).

Para Valente (1998, p. 6), as novas modalidades de tecnologias na educação sugerem o computador como ferramenta, e não como "máquina de ensinar". Assim, o objetivo do uso das tecnologias não é substituir o professor por uma máquina, mas dar uma oportunidade ao aluno de buscar e encontrar respostas. De acordo com Moran (2004, p. 3), “o professor que dá tudo mastigado para o aluno, de um lado facilita a compreensão, mas, por outro, transfere para o aluno, como um pacote pronto, o nível de conhecimento de mundo que ele tem”. D’Ambrósio (2002, p. 19) defende que sejam feitas mudanças nos processos de ensino:

> É preciso substituir os processos de ensino que priorizam a exposição, que levam a um receber passivo do conteúdo, através de processos que não estimulem os alunos à participação. É preciso que eles deixem de ver a ‘ciência’ como um produto acabado, cuja transmissão de conteúdos é vista como um conjunto estático de conhecimentos e técnicas.

Conforme Almeida (2000, p. 19), na abordagem construcionista, o computador não é o detentor do conhecimento, como o professor na aula expositiva. O computador age como uma ferramenta tutorada pelo aluno. A ideia é que ao descrever os passos que levam à solução do problema, o aluno transforma seus conhecimentos em procedimentos.

Em concordância com as ideias anteriores, nota-se que o uso do computador como ferramenta no ensino da matemática, apesar de não ser a solução de todos os problemas da educação, é um importante aliado na construção do conhecimento e na busca por informação, conceitos que dificilmente são transmitidos por um professor em uma aula expositiva.

2.2 O papel do professor diante das novas tecnologias

O momento atual é visto como bastante propício para implementar práticas pedagógicas ligadas ao uso das novas tecnologias. Portanto, o professor deve estar apto a enfrentar esses novos desafios. Segundo Kenski (1999, p. 38), isso não significa que os professores devem aderir as novas tecnologias de forma incondicional em seu trabalho, porém, devem conhecer as vantagens e as desvantagens, os riscos e as possibilidades, para que saibam o melhor momento de inseri-las em sua prática e como fazer o melhor uso.

De um professor, espera-se competência na sua especialidade, busca por atualização, boa comunicação, interação com os alunos para mantê-los motivados, atentos e produtivos (MORAN, 2000, p. 5). O professor deve usar a razão junto com a emoção, para que as intuições e percepções sensoriais ajudem na compreensão do objeto em questão. De acordo com Kenski (1999, p. 47):

> Nesta abordagem alteram-se principalmente os procedimentos didáticos, independentemente de uso ou não das novas tecnologias em suas aulas. É preciso que o professor, antes de tudo, se posicione não mais como o detentor do monopólio do saber mas como um parceiro, um *pedagogo*, no sentido clássico do termo, que encaminhe e oriente o aluno diante das múltiplas possibilidades e formas de se alcançar o conhecimento e de se relacionar com ele.

Valente (1998, p. 7) defende que o papel do professor em sala de aula deve ser mudado. O computador pode repassar conhecimento ao aluno de forma mais eficiente do que o professor. Assim, a nova função do professor em sala de aula é como criador de ambientes de aprendizagem e facilitador do processo de desenvolvimento intelectual do aluno. Em consonância com a ideia anterior, Almeida (2000, p. 41) argumenta que o educador deve ser um eterno aprendiz e refletidor de sua prática, cabendo a ele

> [···] promover a aprendizagem do aluno para que este possa construir o conhecimento dentro de um ambiente que o desafie e motive para a exploração, a reflexão, a depuração de ideias e a descoberta. Antes de propor um plano - que deverá ser resultado de um trabalho cooperativo dos envolvidos na aprendizagem -, o professor precisa conhecer as potencialidades de seus alunos e suas experiências anteriores.

Ainda há obstáculos a serem superados, como os limites do conteúdo programático, do tempo e da sala de aula. Conforme Moran (2004, p. 3), a sala de aula deve ser confortável, ter uma boa acústica, disponibilizar acesso à internet, contar com um computador com projetor multimídia, além de professores preparados, motivados, bem remunerados e com formação pedagógica atualizada.

2.3 O software GeoGebra

O GeoGebra é um *software* de geometria dinâmica capaz de relacionar geometria, álgebra e cálculo. Foi desenvolvido a partir de 2001 pelo austríaco Markus Hohenwarter e uma equipe internacional de programadores, na universidade de Salzburg, com o objetivo de ensinar e aprender matemática nas escolas. Recebeu muitos prêmios internacionais, incluindo o prêmio de *software* educativo Alemão e Europeu (FERREIRA, 2010, p. 3).

O *software* GeoGebra é de fácil aquisição, por ser livre. Para baixá-lo, basta acessar https://www.geogebra.org/download e escolher a versão. Neste trabalho será usado o GeoGebra Clássico 6. O funcionamento desse *software* depende da instalação da linguagem Java; se o computador ainda não possuir o Java, basta baixá-lo gratuitamente em https://www.java.com/pt.

O uso do GeoGebra em sala de aula permite grandes vantagens em relação ao uso do quadro e do giz. O tempo gasto para traçar um gráfico no quadro é bastante superior ao do GeoGebra, no qual é possível representar mais de um gráfico no mesmo plano em questão de segundos e observar com perfeição a sua forma. Outras vantagens são o *layout* atraente que prende a atenção do aluno e a possibilidade de apresentar as características geométricas e algébricas de um mesmo objeto num único ambiente.

De acordo com Ferreira (2010), existem duas perspectivas características do GeoGebra: uma expressão na janela algébrica e um objeto na janela geométrica. É possível alterar os parâmetros na expressão para observar o comportamento do objeto; também é possível mudar o objeto geométrico com a finalidade de observar a mudança nos parâmetros da expressão. Essa é a principal vantagem do GeoGebra.

A utilização do GeoGebra é bem simples e intuitiva. O conhecimento das ferramentas do *software* e das propriedades do objeto estudado permitem a criação de excelentes atividades. Se for necessário, o usuário pode consultar o Manual Oficial da Versão 3.2 criado por (HOHENWARTER; HOHENWARTER, 2009). Apesar de ser o manual de uma versão mais antiga, as ferramentas, as janelas e os campos são semelhantes aos da versão atual.

Capítulo 3

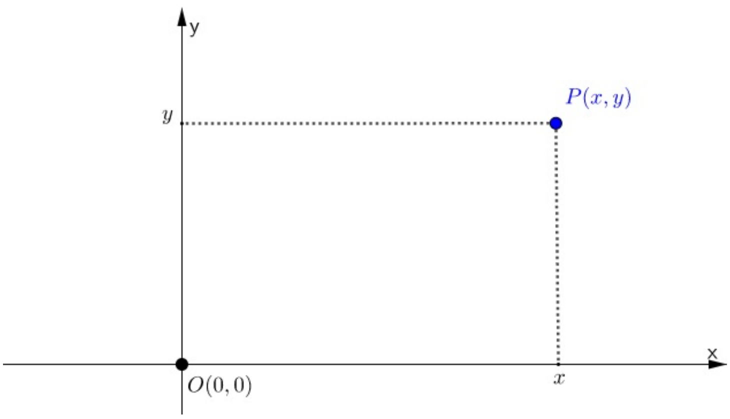
O conteúdo de Geometria Analítica no Ensino Médio

"A Geometria Analítica baseia-se na ideia de representar pontos da reta por números reais, pontos do plano por pares ordenados de números reais e pontos do espaço por ternos ordenados de números reais" (LIMA, 2015, p. 1). Porém, este trabalho restringe-se ao estudo dos pontos na reta, e, principalmente, no plano, que é o objeto de estudo da Geometria Analítica no Ensino Médio. A representação de um ponto no plano nos permitirá tratar de linhas como equações e vice-versa.

3.1 Plano cartesiano e ponto

Segundo Delgado, Frensel e Crissaff (2013, p. 5), um sistema de eixos ortogonais ou simplesmente um plano cartesiano, é formado por um par de eixos perpendiculares, denominados eixo horizontal (eixo x) e eixo vertical (eixo y), que se intersectam num ponto O chamado origem.

Figura 4 – Plano carteisano e ponto



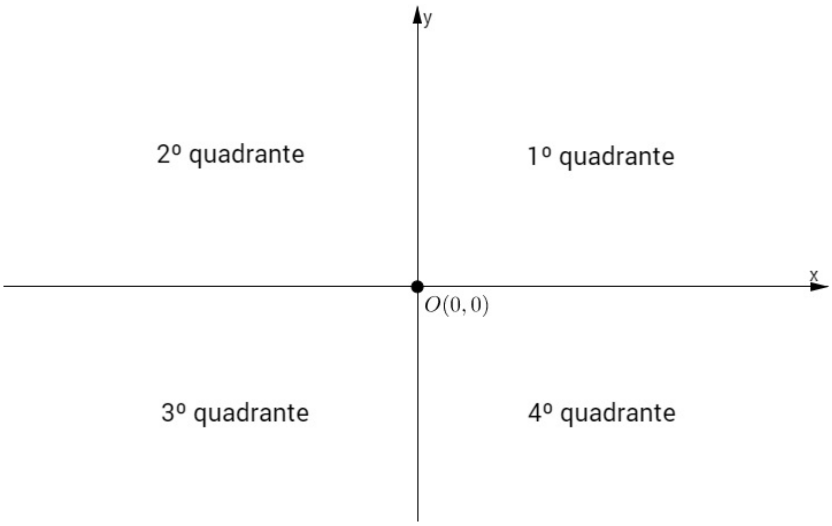
Fonte: Autoria própria

Pode-se estabelecer uma correspondência biunívuca entre os pontos de um plano e os pares ordenados do conjunto $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$. Os números $x, y \in \mathbb{R}$ do par ordenado (x, y) são as coordenadas cartesianas do ponto P, em que x é a abscissa e y é a ordenada de P (Figura 4).

O plano cartesiano é dividido em quatro regiões denominadas quadrantes e enumeradas como na Figura 5. Os pontos do eixo x têm coordenadas $(x, 0)$, os pontos do eixo y têm coordenadas $(0, y)$. Os quadrantes, dados em coordenadas são:

$$1^{\circ}\text{ quadrante} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0 \text{ e } y > 0\}$$
$$2^{\circ}\text{ quadrante} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < 0 \text{ e } y > 0\}$$
$$3^{\circ}\text{ quadrante} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < 0 \text{ e } y < 0\}$$
$$4^{\circ}\text{ quadrante} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0 \text{ e } y < 0\}$$

Figura 5 – Quadrantes

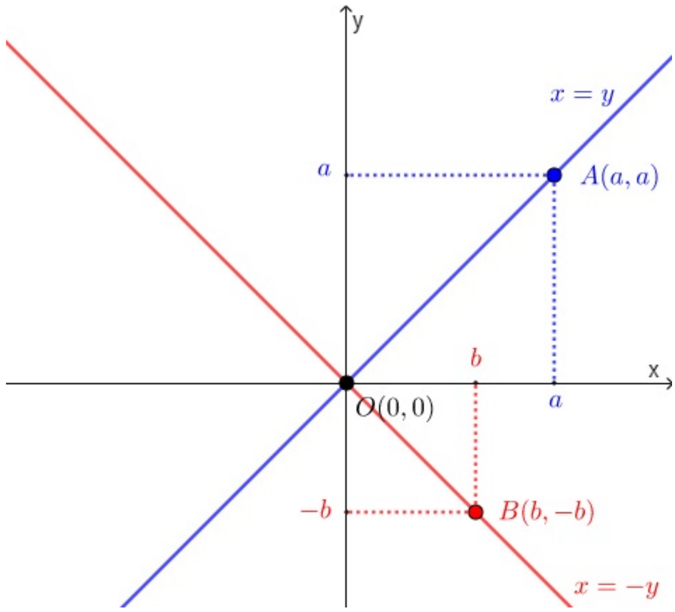


Fonte: Autoria própria

De acordo com Leonardo (2016), no plano cartesiano, a bissetriz do 1º e 3º quadrantes é denominada bissetriz dos quadrantes ímpares. A bissetriz do 2º e 4º quadrantes é chamada de bissetriz dos quadrantes pares.

Se um ponto $P(x, y)$ pertence à bissetriz dos quadrantes ímpares, então $x = y$. Se P pertence à bissetriz dos quadrantes pares, então $x = -y$. Na Figura 6, o ponto $A(a, a)$ está na bissetriz dos quadrantes ímpares e o ponto $B(b, -b)$ na bissetriz dos quadrantes pares.

Figura 6 – Bissetrizes dos quadrantes pares e ímpares



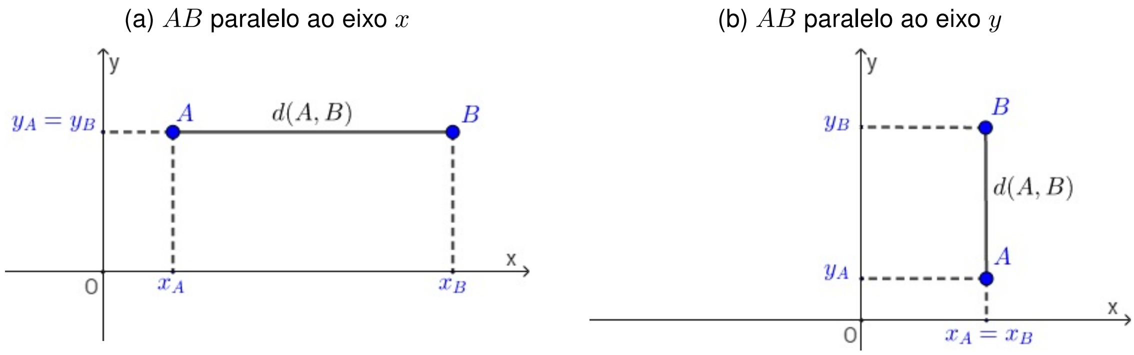
Fonte: Autoria própria

3.1.1 Distância entre dois pontos

Definição 3.1. *Sejam dois pontos A e B do plano cartesiano. Define-se como a distância entre os pontos A e B a medida do segmento de reta que tem esses dois pontos como extremidades. A distância será representada por $d(A, B)$ (IEZZI et al., 2016, p. 10).*

O cálculo da distância entre dois pontos $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$ é bastante simples quando o segmento de reta formado por esses pontos é paralelo ao eixo x ou ao eixo y (Figura 7). Se o segmento AB é paralelo ao eixo x, então $d(A, B) = |x_B - x_A|$. Se o segmento AB é paralelo ao eixo y então $d(A, B) = |y_B - y_A|$.

Figura 7 – Distância entre os pontos A e B quando o segmento de reta AB é paralelo a um dos eixos coordenados

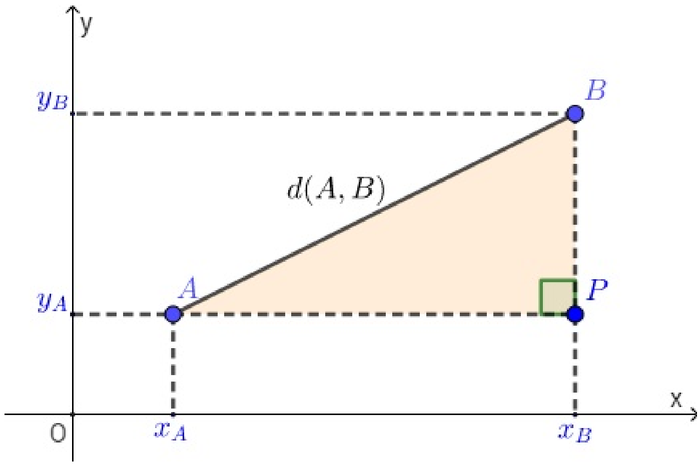


Fonte: Autoria própria

Proposição 3.2. *Dados os pontos $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$, a distância entre A e B, representada por $d(A, B)$ é dada por*

$$d(A,B) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} \tag{3.1}$$

Figura 8 – Distância entre dois pontos



Fonte: Autoria própria

Demonstração. Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo APB da Figura 8, e usando a propriedade $|a|^2 = a^2$, com $a \in \mathbb{R}$, tem-se:

$$\begin{aligned}
[d(A,B)]^2 &= [d(A,P)]^2 + [d(B,P)]^2 \\
&= (|x_B - x_A|)^2 + (|y_B - y_A|)^2 \\
&= (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2
\end{aligned}$$

Logo,

$$d(A,B) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

■

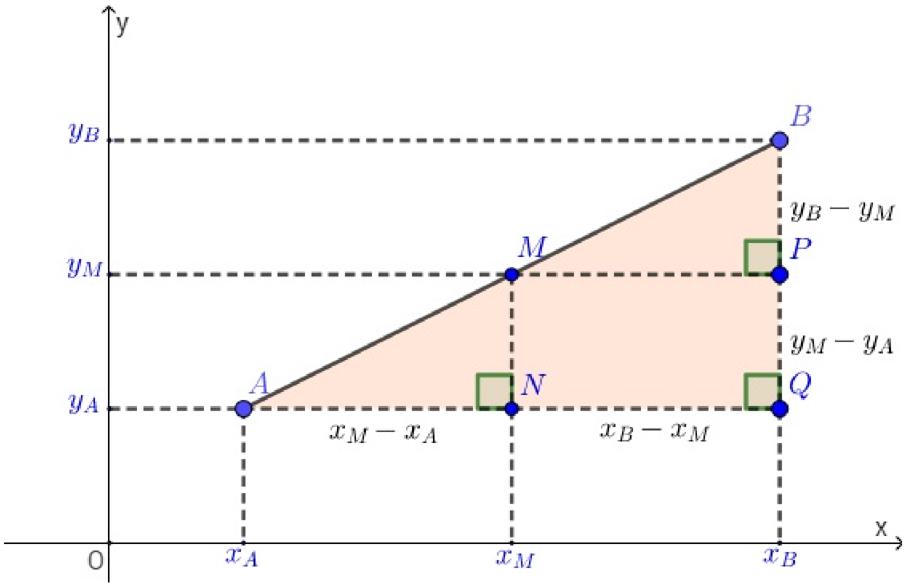
3.1.2 Ponto médio de um segmento

Proposição 3.3. *Sejam $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$ dois pontos do plano. Se $M(x_M, y_M)$ é o ponto médio do segmento AB, então*

$$M\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right) \tag{3.2}$$

(SOUZA; GARCIA, 2016, p. 43)

Figura 9 – Ponto médio de um segmento



Fonte: Autoria própria

Demonstração. Observa-se que os triângulos AMN e MBP da Figura 9 são semelhantes, e, como M é ponto médio de AB, $\overline{AM} = \overline{MB}$. Logo,

$$\begin{aligned}
\frac{\overline{AM}}{\overline{MB}} &= \frac{x_M - x_A}{x_B - x_M} \\
1 &= \frac{x_M - x_A}{x_B - x_M} \\
x_M - x_A &= x_B - x_M \\
2x_M &= x_A + x_B \\
x_M &= \frac{x_A + x_B}{2}
\end{aligned}$$

De modo análogo,

$$\begin{aligned}
\frac{\overline{AM}}{\overline{MB}} &= \frac{y_M - y_A}{y_B - y_M} \\
1 &= \frac{y_M - y_A}{y_B - y_M} \\
y_M - y_A &= y_B - y_M \\
2y_M &= y_A + y_B \\
y_M &= \frac{y_A + y_B}{2}
\end{aligned}$$

Portanto, $M\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right)$.

■

3.1.3 Baricentro de um triângulo

Definição 3.4. *A mediana em um triângulo é o segmento de reta cujas extremidades são um vértice do triângulo e o ponto médio do lado oposto a ele. Um triângulo possui três medianas que intersectam-se num único ponto, chamado baricentro do triângulo (BALESTRI, 2016, p. 154).*

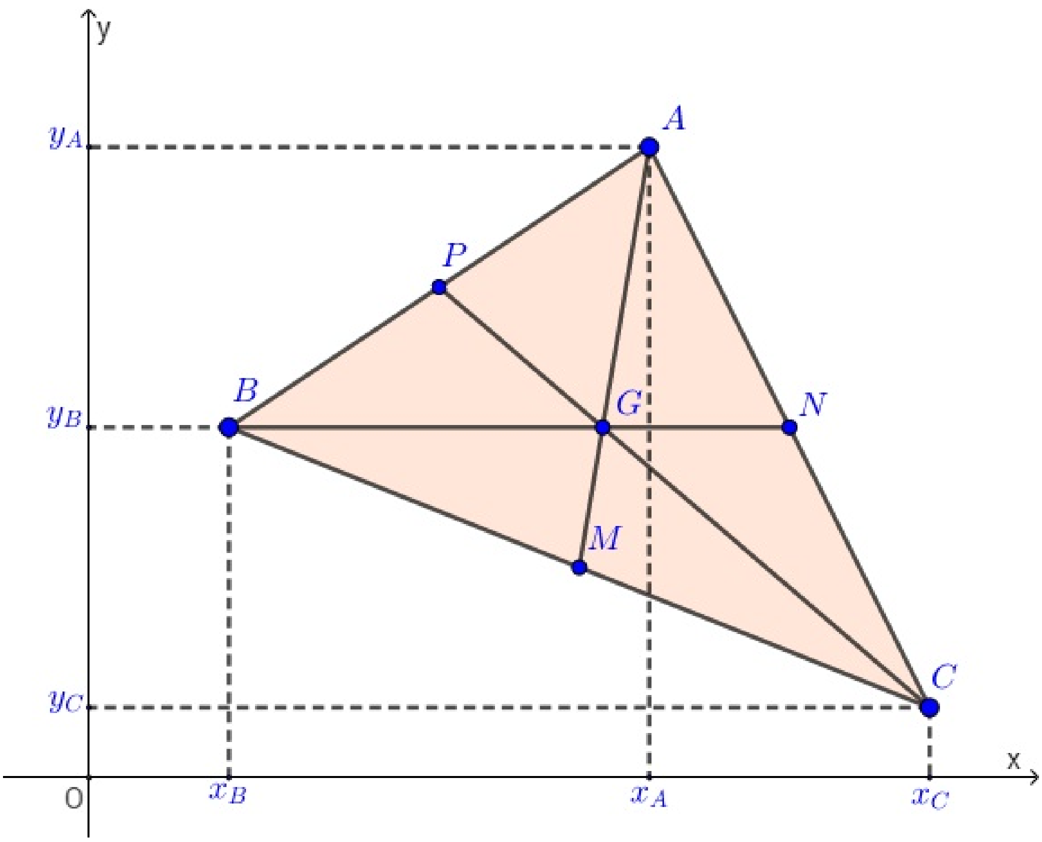
O baricentro do triângulo possui a propriedade de dividir a mediana na razão 2 para 1, ou seja, o segmento cujas extremidades são o baricentro e o vértice do triângulo mede o dobro do segmento cujas extremidades são o baricentro e o ponto médio do lado oposto.

Proposição 3.5. *Sejam $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ e $C(x_C, y_C)$ vértices de um triângulo e $G(x_G, y_G)$ o seu baricentro. As coordenadas de G em função das coordenadas de A, B e C, são*

$$G\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \frac{y_A + y_B + y_C}{3}\right) \tag{3.3}$$

(BALESTRI, 2016, p. 154).

Figura 10 – Baricentro de um triângulo



Fonte: Autoria própria

Demonstração. Considera-se o triângulo ABC da Figura 10. Seja $M(x_M, y_M)$ as coordenadas do ponto médio do lado BC. Sabe-se que $x_M = \dfrac{x_B + x_C}{2}$ e $y_M = \dfrac{y_B + y_C}{2}$. Além disso, como o baricentro divide a mediana na razão de 2 para 1, tem-se $\overline{AG} = 2 \cdot \overline{GM} \Rightarrow \dfrac{\overline{AG}}{\overline{GM}} = 2$, então:

$$
\begin{aligned}
\frac{x_A - x_G}{x_G - x_M} &= 2 \\
2x_G - 2x_M &= x_A - x_G \\
3x_G &= x_A + 2x_M \\
3x_G &= x_A + 2\left(\frac{x_B + x_C}{2}\right) \\
3x_G &= x_A + x_B + x_C \\
x_G &= \frac{x_A + x_B + x_C}{3}
\end{aligned}
$$

De maneira análoga:

$$
\begin{aligned}
\frac{y_A - y_G}{y_G - y_M} &= 2 \\
2y_G - 2y_M &= y_A - y_G \\
3y_G &= y_A + 2y_M \\
3y_G &= y_A + 2\left(\frac{y_B + y_C}{2}\right) \\
3y_G &= y_A + y_B + y_C \\
y_G &= \frac{y_A + y_B + y_C}{3}
\end{aligned}
$$

Portanto, $G\left(\dfrac{x_A + x_B + x_C}{3}, \dfrac{y_A + y_B + y_C}{3}\right)$.

■

3.1.4 Condição de alinhamento de três pontos

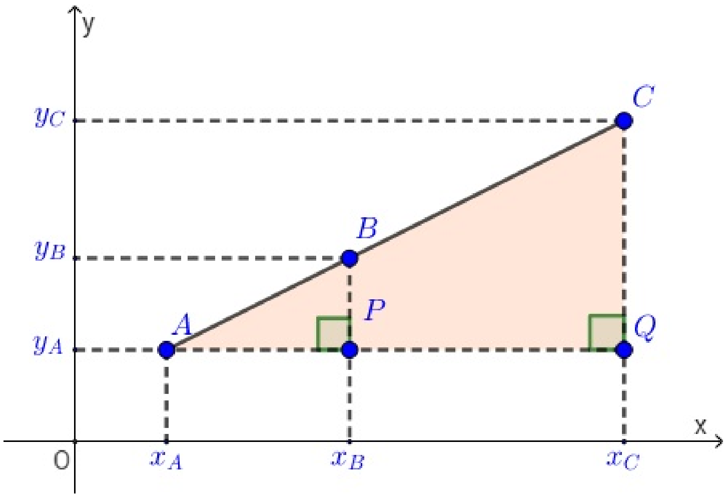
Proposição 3.6. *Sejam $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ e $C(x_C, y_C)$ pontos do plano cartesiano. A, B e C são colineares se, e somente se:*

$$
D = \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = 0 \tag{3.4}
$$

(BALESTRI, 2016, p. 157)

Demonstração. Observa-se na Figura 11 que os triângulos APB e AQC são semelhantes, pois possuem os ângulos correspondentes congruentes. Logo, os lados homólogos são

Figura 11 – Condição de alinhamento de três pontos



Fonte: Autoria própria

proporcionais, ou seja:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AP}}{\overline{AQ}} = \frac{\overline{PB}}{\overline{QC}}$$

Em particular, tem-se:

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{AQ}} = \frac{\overline{PB}}{\overline{QC}}$$

$$\frac{x_B - x_A}{x_C - x_A} = \frac{y_B - y_A}{y_C - y_A}$$

$$(x_B - x_A)(y_C - y_A) = (x_C - x_A)(y_B - y_A)$$

$$x_B y_C - x_B y_A - x_A y_C + x_A y_A = x_C y_B - x_C y_A - x_A y_B + x_A y_A$$

$$x_B y_C - x_B y_A - x_A y_C = x_C y_B - x_C y_A - x_A y_B$$

Passando todos os termos para o primeiro membro da igualdade, obtém-se:

$$x_B y_C + x_C y_A + x_A y_B - x_B y_A - x_A y_C - x_C y_B = 0$$

que pode ser escrito como o determinante:

$$D = \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = 0$$

■

Pelo processo inverso, mostra-se que a recíproca da Proposição 3.6 é verdadeira. Ou seja, se $D = 0$, então $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ e $C(x_C, y_C)$ são colineares.

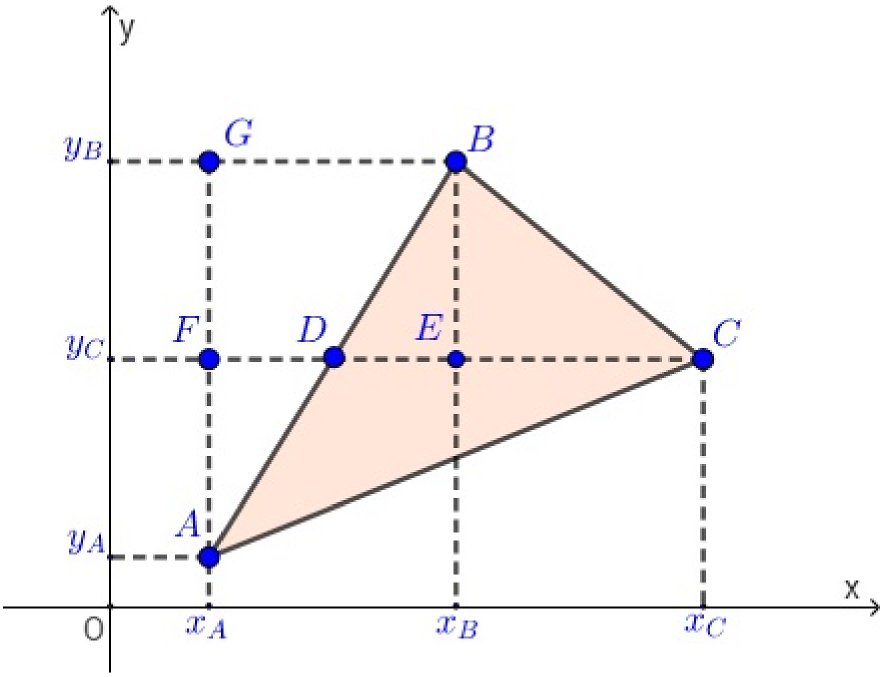
3.1.5 Área de um triângulo

Proposição 3.7. *Sejam três pontos distintos não colineares* $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ *e* $C(x_C, y_C)$. *A área do triângulo cujos vértices são esses pontos é dada por*

$$A_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}|D|, \tag{3.5}$$

em que $D = \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}$ *(SOUZA; GARCIA, 2016, p. 48).*

Figura 12 – Área de um triângulo



Fonte: Autoria própria

Demonstração. Considera-se o triângulo ABC da Figura 12. Em seguida, determina-se as coordenadas do ponto $D(x_D, y_D)$ em função das coordenadas conhecidas dos pontos A, B e C. Nota-se que $y_D = y_C$. Além disso, como os triângulos ABG e ADF são semelhantes, tem-se:

$$\begin{aligned}
\frac{\overline{BG}}{\overline{DF}} &= \frac{\overline{AG}}{\overline{AF}}\\
\frac{x_B - x_A}{x_D - x_A} &= \frac{y_B - y_A}{y_C - y_A}\\
x_D(y_B - y_A) - x_A(y_B - y_A) &= (x_B - x_A)(y_C - y_A)\\
x_D(y_B - y_A) &= x_A(y_B - y_A) + (x_B - x_A)(y_C - y_A)\\
x_D &= \frac{x_A(y_B - y_A) + (x_B - x_A)(y_C - y_A)}{(y_B - y_A)}\\
x_D &= x_A + \frac{(x_B - x_A)(y_C - y_A)}{y_B - y_A}
\end{aligned}$$

Determina-se agora a medida $\overline{CD}$:

$$\begin{aligned}
\overline{CD} &= |x_C - x_D|\\
&= \left| x_C - x_A - \frac{(x_B - x_A)(y_C - y_A)}{y_B - y_A} \right|\\
&= \left| \frac{(x_C - x_A)(y_B - y_A) - (x_B - x_A)(y_C - y_A)}{y_B - y_A} \right|
\end{aligned}$$

Por fim, calcula-se a área do triângulo ABC. Observa-se que a área do triângulo ABC é igual a soma das áreas do triângulo ACD e do triângulo BCD. Assim,

$$\begin{aligned}
A_{\Delta ABC} &= A_{\Delta ACD} + A_{\Delta BCD}\\
&= \frac{1}{2}\overline{CD} \cdot \overline{AF} + \frac{1}{2}\overline{CD} \cdot \overline{FG}\\
&= \frac{1}{2}\overline{CD} \cdot (\overline{AF} + \overline{FG})\\
&= \frac{1}{2}\overline{CD} \cdot \overline{AG}\\
&= \frac{1}{2}\left| \frac{(x_C - x_A)(y_B - y_A) - (x_B - x_A)(y_C - y_A)}{y_B - y_A} \right| |y_B - y_A|\\
&= \frac{1}{2}|(x_C - x_A)(y_B - y_A) - (x_B - x_A)(y_C - y_A)|\\
&= \frac{1}{2}|x_C y_B - x_C y_A - x_A y_B + x_A y_A - x_B y_C + x_B y_A + x_A y_C - x_A y_A|\\
&= \frac{1}{2}| - (x_A y_B + x_C y_A + x_B y_C - x_C y_B - x_B y_A - x_A y_C)|\\
&= \frac{1}{2}|x_A y_B + x_C y_A + x_B y_C - x_C y_B - x_B y_A - x_A y_C|
\end{aligned}$$

Nota-se que $x_A y_B + x_C y_A + x_B y_C - x_C y_B - x_B y_A - x_A y_C = \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = D$. Portanto a área do triângulo ABC é dada por $A_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}|D|$.

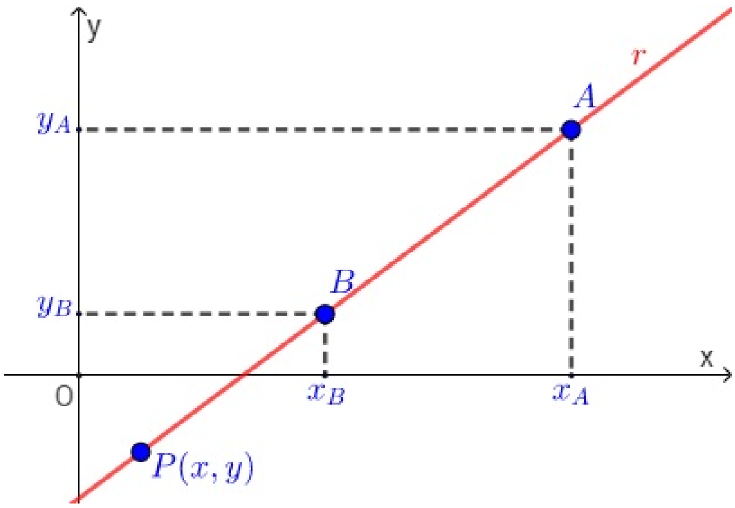
■

3.2 Estudo analítico da reta

3.2.1 Equação geral da reta

Proposição 3.8. *A cada reta r do plano cartesiano associa-se pelo menos uma equação da forma $ax + by + c = 0$, em que $a, b, c \in \mathbb{R}$, com $a \neq 0$ ou $b \neq 0$, e (x, y) são as coordenadas de um ponto qualquer da reta r (SMOLE; DINIZ, 2016, p. 94).*

Figura 13 – Equação geral da reta



Fonte: Autoria própria

Demonstração. Sejam $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$ pontos distintos que determinam uma reta r e $P(x, y)$ um ponto qualquer de r, como representado na Figura 13. Pela condição de alinhamento dos pontos P, A e B, tem-se:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$xy_A + x_By + x_Ay_B - x_By_A - xy_B - x_Ay = 0$$

$$(y_A - y_B)x + (x_B - x_A)y + x_Ay_B - x_By_A = 0$$

Considerando

$$\begin{cases} y_A - y_B = a \\ x_B - x_A = b \\ x_Ay_B - x_By_A = c \end{cases}$$

a equação é representada na forma $ax + by + c = 0$, em que $a \neq 0$ ou $b \neq 0$.

■

É possível observar na demonstração acima o porquê de a e b não serem nulos simultaneamente (IEZZI et al., 2016, p. 25). De fato, considerando $a = 0$ e $b = 0$, tem-se:

$$\begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_A - y_B = 0 \\ x_B - x_A = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_A = y_B \\ x_A = x_B \end{cases} \Rightarrow A = B,$$

o que é um absurdo, pois foi considerado A e B pontos distintos.

A recíproca da proposição anterior é verdadeira, como se vê a seguir:

Proposição 3.9. *A toda equação da forma $ax + by + c = 0$, com a, b e c reais, em que $a \neq 0$ ou $b \neq 0$ corresponde a uma única reta r do plano cartesiano, cujos pontos tem coordenadas satisfazendo a equação. A equação $ax + by + c = 0$, com $a \neq 0$ ou $b \neq 0$, é denominada* ***equação geral*** *da reta r (IEZZI et al., 2016, p.27).*

Demonstração. Sejam $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ e $C(x_C, y_C)$ pontos distintos cujas coordenadas satisfazem a equação $ax + by + c = 0$, onde $a, b, c \in \mathbb{R}$. Deve-se mostrar que A, B e C pertencem a uma mesma reta. Considerando-se, nesse caso, $a \neq 0$, tem-se:

$$\begin{cases} ax_A + by_A + c = 0 \Rightarrow x_A = \dfrac{-by_A - c}{a} \\ ax_B + by_B + c = 0 \Rightarrow x_B = \dfrac{-by_B - c}{a} \\ ax_C + by_C + c = 0 \Rightarrow x_C = \dfrac{-by_C - c}{a} \end{cases}$$

Calculando o determinante:

$$\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{-by_A - c}{a} & y_A & 1 \\ \dfrac{-by_B - c}{a} & y_B & 1 \\ \dfrac{-by_C - c}{a} & y_C & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow A,\ B \text{ e } C \text{ são colineares.}$$

■

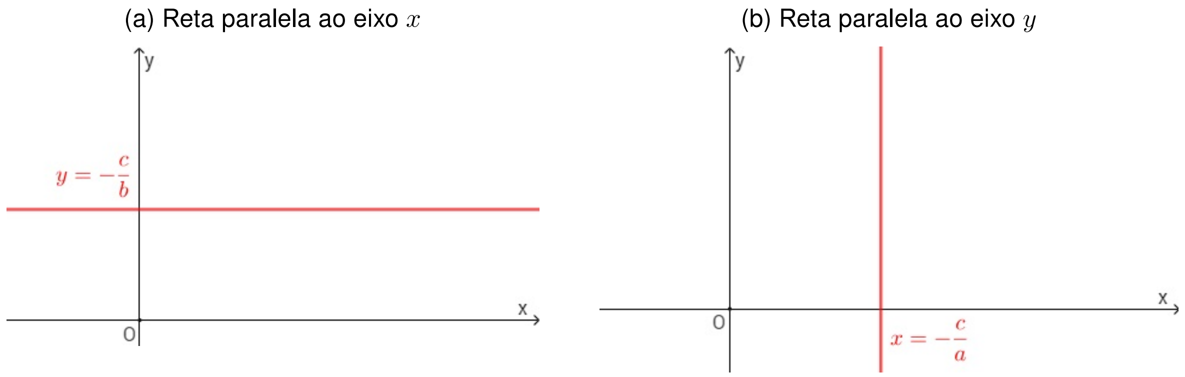
Quando $a = 0$ ou $b = 0$, as equações gerais da forma $ax+by+c = 0$ ficam reduzidas a equações da forma $y = -\dfrac{c}{b}$ ou $x = -\dfrac{c}{a}$, respectivamente. No primeiro caso obtém-se uma reta horizontal, e no segundo uma reta vertical, como mostrado na Figura 14.

3.2.2 Equação reduzida da reta

Proposição 3.10. *Seja $ax + by + c = 0$ a equação geral de uma reta r não paralela ao eixo y, ou seja, com $b \neq 0$. Pode-se reescrever a equação da reta na forma $y = mx + n$. Essa equação é denominada* ***equação reduzida*** *de r (SMOLE; DINIZ, 2016, p.100).*

Demonstração. Isolando y na equação $ax + by + c = 0$, tem-se $y = -\dfrac{a}{b}x - \dfrac{c}{a}$. Como, por hipótese, $b \neq 0$, toma-se $-\dfrac{a}{b} = m$ e $-\dfrac{c}{a} = n$, obtendo-se $y = mx + n$. ■

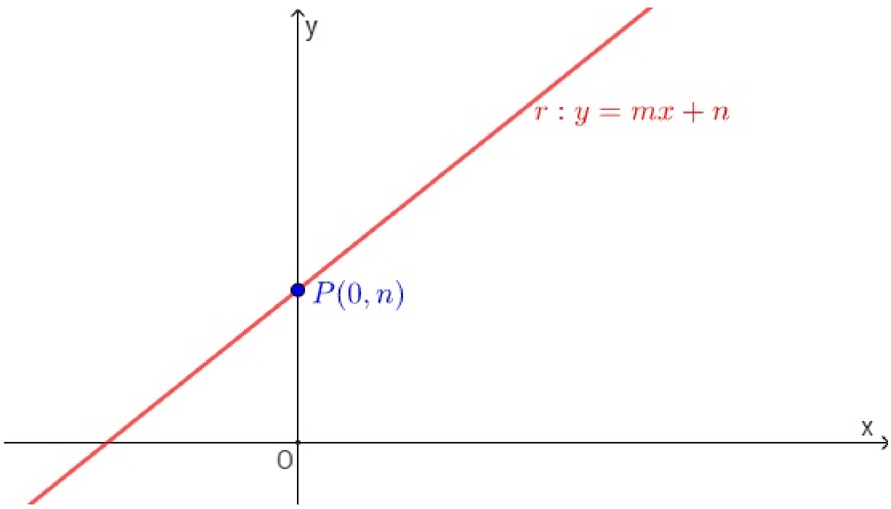
Figura 14 – Retas paralelas aos eixos coordenados



Fonte: Autoria própria

A equação reduzida da reta é estudada no 1° ano do ensino médio como função afim. Os coeficientes m e n são denominados **coeficiente angular** e **coeficiente linear** da reta r, respectivamente. O coeficiente linear representa a ordenada do ponto $P(0, n)$, interseção da reta com o eixo das ordenadas (Figura 15). Já o coeficiente angular atua na inclinação da reta, como será abordado a seguir.

Figura 15 – Equação reduzida da reta



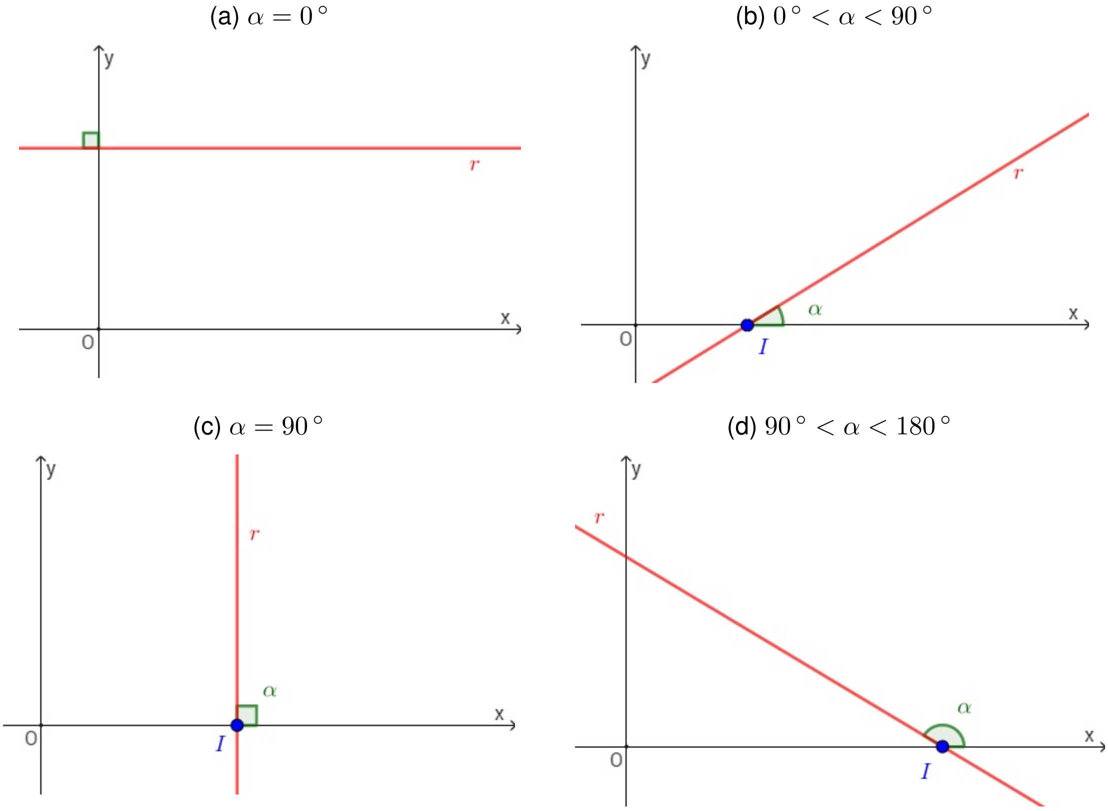
Fonte: Autoria própria

3.2.3 Inclinação e coeficiente angular de uma reta

Definição 3.11. *Seja I a interseção de uma reta r com o eixo x. O ângulo que a semirreta Ix descreve (entre 0° e 180°), ao girar em sentido anti-horário até estar contida em r, é denominado* ***inclinação*** *de r, e será representado por α. Se r for paralela ao eixo x, a inclinação de r é o ângulo nulo. (SMOLE; DINIZ, 2016, p. 100).*

A Figura 16 ilustra os casos possíveis.

Figura 16 – Inclinação de uma reta



(a) $\alpha = 0°$ (b) $0° < \alpha < 90°$ (c) $\alpha = 90°$ (d) $90° < \alpha < 180°$

Fonte: Autoria própria

Segundo Lima (2015, p. 41, 42), dada a equação reduzida de uma reta não vertical $r : y = mx + n$, deve-se ter bem claro o significado dos coeficientes. O coeficiente linear representa a ordenada do ponto de interseção da reta com o eixo x, como já visto anteriormente. O coeficiente angular determina a inclinação de r, medindo a taxa de crescimento de y em função de x. Quando se dá o aumento de uma unidade para x (passando de x para $x+1$), o aumento correspondente de y é $[m(x+1)+n]-[mx+n] = m$. De maneira geral, dados dois pontos $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$ da reta, com $x_A \neq x_B$, tem-se:

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \text{razão do acréscimo de } y \text{ para o acréscimo de } x.$$

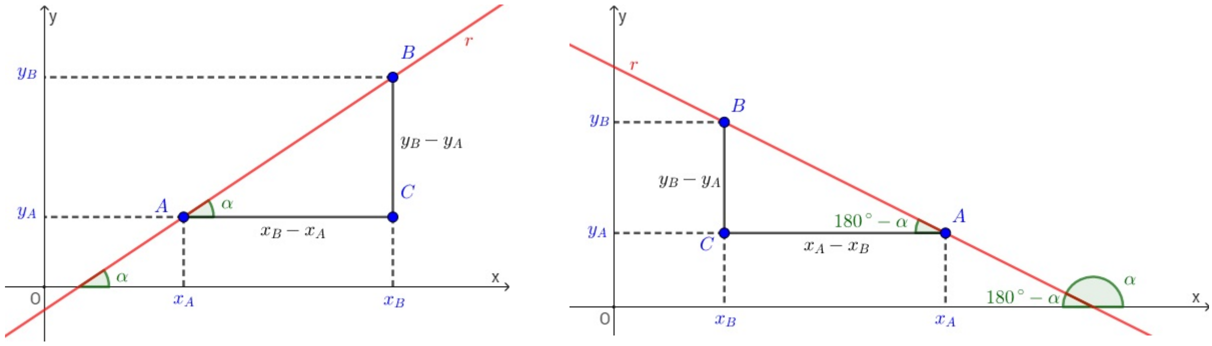
Proposição 3.12. *Dados dois pontos $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$ de uma reta r não paralela ao eixo y. O coeficiente angular ou a declividade da reta é dada por:*

$$m = \operatorname{tg} \alpha \tag{3.6}$$

onde α representa o ângulo de inclinação de r (BALESTRI, 2016, p. 160)

Figura 17 – Coeficiente angular ou declividade da reta

(a) $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ (b) $90^\circ < \alpha < 180^\circ$



Fonte: Autoria própria

Demonstração. No caso da figura 17a, onde α é um ângulo agudo, tem-se:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

No caso da figura 17b, onde α é um ângulo obtuso, tem-se:

$$\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \frac{y_B - y_A}{x_A - x_B}$$

Como $\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$, conclui-se que:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha &= -\frac{y_B - y_A}{x_A - x_B} \\ &= -\frac{y_B - y_A}{-(x_B - x_A)} \\ &= \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \end{aligned}$$

Portanto, $m = \operatorname{tg} \alpha$.

■

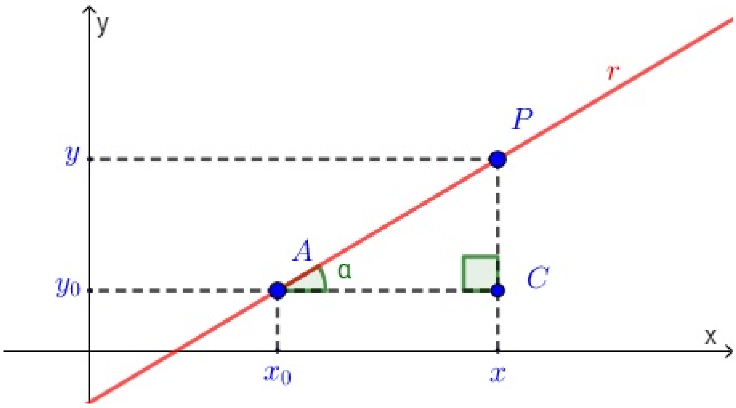
Quando $m > 0$ a reta $y = mx + n$ é inclinada para cima e quando $m < 0$ a reta é inclinada para baixo.

É possível determinar a equação de uma reta conhecendo-se um ponto $A(x_0, y_0)$ e o coeficiente angular m, como mostrado na Figura 18. Para isso considera-se um ponto $P(x, y)$ da reta diferente de A (BALESTRI, 2016, p. 161). Nesse caso,

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\overline{PC}}{\overline{AC}} \Rightarrow m = \frac{y - y_0}{x - x_0} \Rightarrow y - y_0 = m(x - x_0) \tag{3.7}$$

A equação $y - y_0 = m(x - x_0)$ é chamada **equação fundamental** da reta.

Figura 18 – Equação fundamental da reta



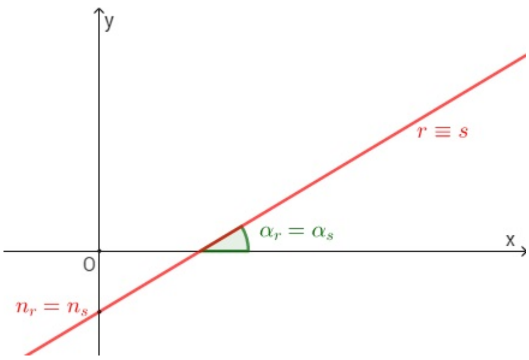
Fonte: Autoria própria

3.2.4 Posições relativas entre duas retas

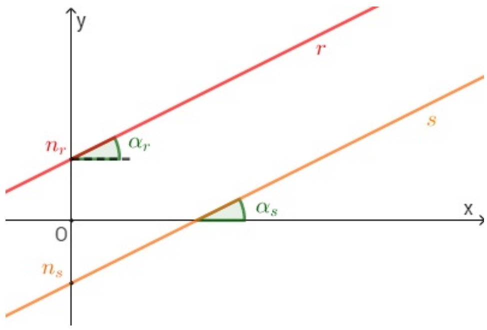
De acordo com Leonardo (2016, p. 119, 120), duas retas de um plano podem ser classificadas como paralelas ou concorrentes. As retas paralelas podem ser coincidentes ou distintas. As retas concorrentes podem ser não perpendiculares ou perpendiculares (Figura 19).

Figura 19 – Posições relativas entre duas retas

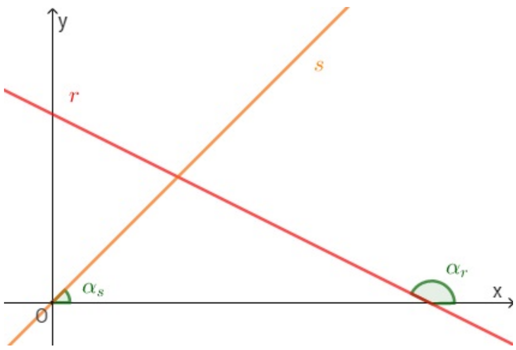
(a) retas paralelas coincidentes



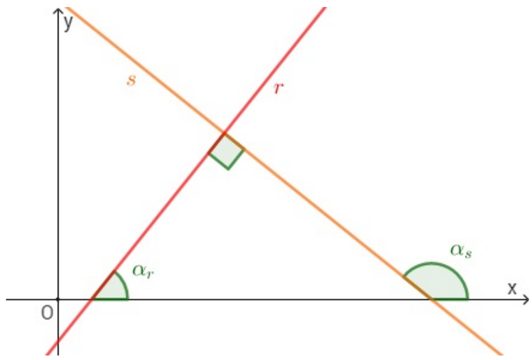
(b) retas paralelas distintas



(c) retas concorrentes



(d) retas perpendiculares



Fonte: Autoria própria

Duas retas r e s, de equações $r: y = m_r x + n_r$ e $s: y = m_s x + n_s$ e inclinações α_r e α_s, respectivamente, são paralelas quando têm a mesma direção. Para que isso aconteça, as retas devem ter a mesma inclinação ($\alpha_r = \alpha_s$). Assim, $m_r = m_s$ (condição de paralelismo). Se $n_r = n_s$ então as retas são paralelas coincidentes; se $n_r \neq n_s$ então as retas são paralelas distintas.

Para que as retas sejam concorrentes, basta que r e s tenham inclinações diferentes. A relação entre os coeficientes angulares é $m_r \neq m_s$. Desse modo, r e s concorrem em um ponto $P(x, y)$, que pode ser encontrado resolvendo-se o sistema em x e y:

$$\begin{cases} y = m_r x + n_r \\ y = m_s x + n_s \end{cases}$$

Outra observação a ser feita sobre duas retas concorrentes, é verificar se elas são perpendiculares ou não perpendiculares através da proposição 3.13:

Proposição 3.13. *Sejam $r: y = m_r x + n_r$ e $s: y = m_s x + n_s$ duas retas não verticais concorrentes em um plano. Se r e s são perpendiculares então*

$$m_r \cdot m_s = -1 \tag{3.8}$$

Demonstração. Considera-se as retas r e s da figura 19d, de equações $y = m_r x + n_r$ e $y = m_s x + n_s$, respectivamente. Como α_s é um ângulo externo do triângulo formado pelas retas e pelo eixo das abscissas, tem-se:

$$\alpha_s = \alpha_r + 90^\circ$$

Aplicando a tangente em ambos os membros e pelas relações trigonométricas:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha_s &= \operatorname{tg}(\alpha_r + 90^\circ) \\ &= \frac{\operatorname{sen}(\alpha_r + 90^\circ)}{\cos(\alpha_r + 90^\circ)} \\ &= \frac{\operatorname{sen} \alpha_r \cdot \cos 90^\circ + \operatorname{sen} 90^\circ \cdot \cos \alpha_r}{\cos \alpha_r \cdot \cos 90^\circ - \operatorname{sen} \alpha_r \cdot \operatorname{sen} 90^\circ} \\ &= \frac{\operatorname{sen} \alpha_r \cdot 0 + 1 \cdot \cos \alpha_r}{\cos \alpha_r \cdot 0 - \operatorname{sen} \alpha_r \cdot 1} \\ &= \frac{\cos \alpha_r}{-\operatorname{sen} \alpha_r} \\ &= -\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha_r} \end{aligned}$$

Segue-se que:

$$\operatorname{tg} \alpha_s \cdot \operatorname{tg} \alpha_r = -1$$

Logo,

$$m_r \cdot m_s = -1$$

■

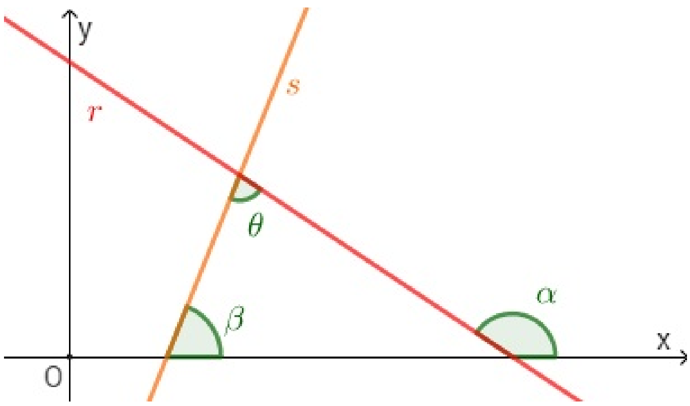
A proposição 3.13 considera que as retas r e s não são verticais para que exista a equação reduzida de ambas. Se uma reta r é vertical, de equação $x = k_1$, então todas as retas de equação $y = k_2$ são perpendiculares a r, onde $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$.

3.2.5 Ângulo entre duas retas concorrentes

Proposição 3.14. *(DANTE, 2016, p. 119) Sejam $r : y = m_r x + n_r$ e $s : y = m_s + n_s$ duas retas concorrentes e oblíquas (que intersectam não perpendicularmente) aos eixos coordenados e não perpendiculares entre si. Elas formam entre si o ângulo agudo θ, em que:*

$$\operatorname{tg}\theta = \left|\frac{m_r - m_s}{1 + m_r \cdot m_s}\right| \tag{3.9}$$

Figura 20 – Ângulo entre duas retas concorrentes



Fonte: Autoria própria

Demonstração. Sejam α e β as inclinações de r e s, respectivamente, como mostrado na Figura 20. Como α é um ângulo externo do triângulo formado pelas retas r e s e pelo eixo das abscissas, $\theta + \beta = \alpha \Rightarrow \theta = \alpha - \beta$. Aplicando-se a tangente em ambos os membros, tem-se:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}\theta &= \operatorname{tg}(\alpha - \beta) \\ &= \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta} \\ &= \frac{m_r - m_s}{1 + m_r \cdot m_s} \end{aligned}$$

Como, por definição, o ângulo θ é agudo, obtém-se:

$$\operatorname{tg}\theta = \left|\frac{m_r - m_s}{1 + m_r \cdot m_s}\right|$$

■

Observação 3.15. *Se r e s forem paralelas então*

$$m_r = m_s \Rightarrow \operatorname{tg}\theta = 0 \Rightarrow \theta = 0^\circ$$

Se r e s forem perpendiculares então

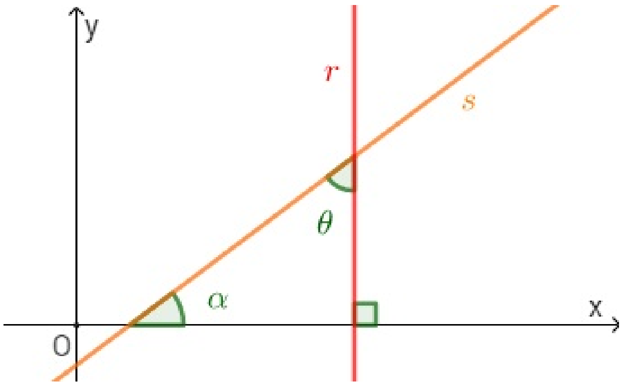
$$m_r \cdot m_s = -1 \Rightarrow \nexists \operatorname{tg}\theta \Rightarrow \theta = 90^\circ$$

A proposição 3.16 traz o caso em que uma das retas é vertical.

Proposição 3.16. *(DANTE, 2016, p. 119) Sejam $r : y = m_r x + n_r$, com $m_r \neq 0$ e $s : x = k$. O ângulo agudo formado por elas é tal que:*

$$\operatorname{tg}\theta = \left|\frac{1}{m_r}\right| \tag{3.10}$$

Figura 21 – Ângulo entre uma reta vertical e uma reta oblíqua



Fonte: Autoria própria

Demonstração. Observa-se na Figura 21 que $\theta + \alpha = 90^\circ \Rightarrow \theta = 90^\circ - \alpha$. Aplicando a tangente, obtém-se:

$$\begin{aligned}\operatorname{tg}\theta &= \operatorname{tg}(90^\circ - \alpha)\\ &= \operatorname{cotg}\alpha\\ &= \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}\\ &= \frac{1}{m_r}\end{aligned}$$

Como θ é um ângulo agudo, tem-se:

$$\operatorname{tg}\theta = \left|\frac{1}{m_r}\right|$$

∎

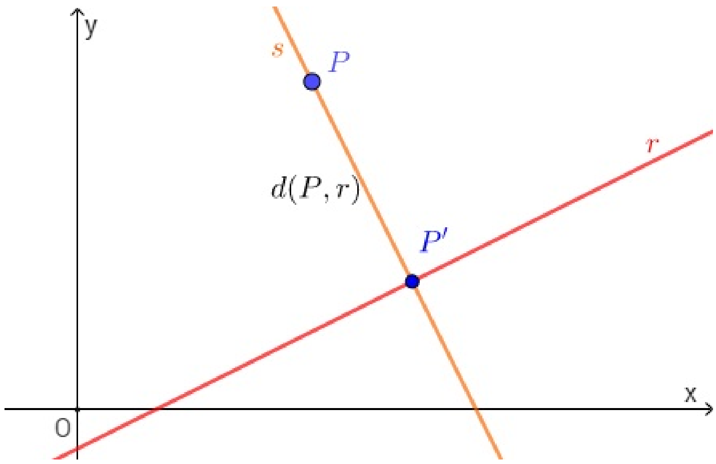
3.2.6 Distância de um ponto a uma reta

Definição 3.17. *Da geometria plana, tem-se que a distância de um ponto P a uma reta r é a medida do segmento de reta de extremidades em P e P', em que P' é a projeção ortogonal de P sobre r (DANTE, 2016, p. 112).*

Proposição 3.18. *(IEZZI et al., 2016, p. 53) Sejam r uma reta de equação $ax + by + c = 0$ e P um ponto de coordenadas (x_0, y_0). A distância entre P e r, representada por $d(P, r)$, é dada por:*

$$d(P,r) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \tag{3.11}$$

Figura 22 – Distância de um ponto a uma reta



Fonte: Autoria própria

Demonstração. A demonstração da proposição se dá em três etapas. Primeiro, encontra-se a equação da reta s, que contém P e é perpendicular a r (Figura 22). Em seguida, determina-se as coordenadas de P', projeção ortogonal de P sobre r. Por fim, calcula-se a distância entre P e P', equivalente à distância entre P e r.

1. • Pode-se escrever a equação da reta r na forma reduzida:

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$$

Como $s \perp r$, tem-se:

$$\begin{aligned} m_s &= -\frac{1}{m_r} \\ &= -\frac{1}{\left(-\frac{a}{b}\right)} \\ &= \frac{b}{a} \end{aligned}$$

- s passa por $P(x_0, y_0)$, assim:

$$s : y - y_0 = \frac{b}{a} \cdot (x - x_0)$$
$$s : bx - bx_0 = ay - ay_0$$
$$s : bx - ay + (ay_0 - bx_0) = 0$$

2. Sabe-se que $r \cap s = P'$, logo, as coordenadas de P' é dada pela solução do sistema:

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ bx - ay + (ay_0 - bx_0) = 0 \end{cases}$$

Multiplicando a primeira equação por b e a segunda por $(-a)$, obtém-se:

$$\begin{cases} abx + b^2y + bc = 0 \\ -abx + a^2y + (abx_0 - a^2y_0) = 0 \end{cases}$$

Somando as equações membro a membro:

$$(a^2 + b^2)y + abx_0 + bc - a^2y_0 = 0$$
$$y = \frac{a^2y_0 - bc - abx_0}{a^2 + b^2}$$

Agora, substitui-se o valor de y encontrado na equação $ax + by + c = 0$, e calcula-se o valor de x:

$$ax + b\left(\frac{a^2y_0 - bc - abx_0}{a^2 + b^2}\right) + c = 0$$
$$ax + \frac{a^2by_0 - b^2c - ab^2x_0 + a^2c + b^2c}{a^2 + b^2} = 0$$
$$ax + \frac{a^2by_0 - ab^2x_0 + a^2c}{a^2 + b^2} = 0$$
$$x + \frac{aby_0 - b^2x_0 + ac}{a^2 + b^2} = 0$$
$$x = \frac{b^2x_0 - ac - aby_0}{a^2 + b^2}$$

3. Calcula-se a distância entre $P(x_0, y_0)$ e $P'\left(\frac{b^2x_0 - ac - aby_0}{a^2 + b^2}, \frac{a^2y_0 - bc - abx_0}{a^2 + b^2}\right)$, equivalente a $d(P, r)$.

$$
\begin{aligned}
d(P,r) &= \sqrt{\left(\frac{b^2x_0 - ac - aby_0}{a^2+b^2} - x_0\right)^2 + \left(\frac{a^2y_0 - bc - abx_0}{a^2+b^2} - y_0\right)^2} \\
&= \sqrt{\left(\frac{b^2x_0 - ac - aby_0 - a^2x_0 - b^2x_0}{a^2+b^2}\right)^2 + \left(\frac{a^2y_0 - bc - abx_0 - a^2y_0 - b^2y_0}{a^2+b^2}\right)^2} \\
&= \sqrt{\left(\frac{-ac - aby_0 - a^2x_0}{a^2+b^2}\right)^2 + \left(\frac{-bc - abx_0 - b^2y_0}{a^2+b^2}\right)^2} \\
&= \sqrt{\left[\frac{-a\cdot(ax_0+by_0+c)}{a^2+b^2}\right]^2 + \left[\frac{-b\cdot(ax_0+by_0+c)}{a^2+b^2}\right]^2} \\
&= \sqrt{\frac{a^2(ax_0+by_0+c)^2}{(a^2+b^2)^2} + \frac{b^2(ax_0+by_0+c)^2}{(a^2+b^2)^2}} \\
&= \sqrt{\frac{(a^2+b^2)(ax_0+by_0+c)^2}{(a^2+b^2)^2}} \\
&= \sqrt{\frac{(ax_0+by_0+c)^2}{a^2+b^2}} \\
&= \frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}
\end{aligned}
$$

■

3.2.7 Inequação do 1º grau com duas variáveis

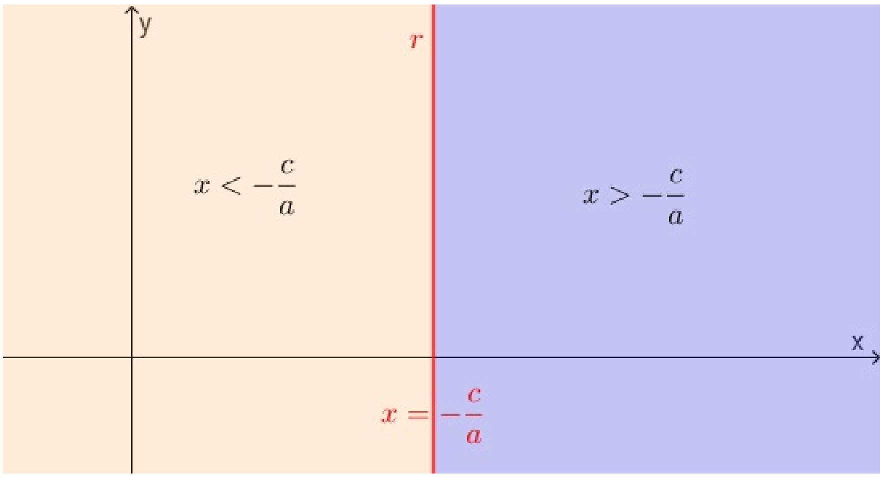
Definição 3.19. *Uma inequação do 1° grau nas variáveis reais x e y é toda inequação da forma: $ax+by+c>0$ ou $ax+by+c<0$ ou $ax+by+c\geq 0$ ou $ax+by+c\leq 0$, em que a, b e c são números reais conhecidos, com a e b não simultaneamente nulos (SMOLE; DINIZ, 2016, p. 111).*

Uma inequação do 1° grau admite infinitas soluções, ou seja, existem infinitos pontos do plano cartesiano cujas coordenadas satisfazem a inequação dada. Tomando a reta r de equação $ax+by+c=0$, tem-se que r divide o plano cartesiano em duas regiões denominadas semiplanos. É possível associar uma inequação do 1° grau a um semiplano determinado por r.

Serão considerados dois casos. No primeiro, r é perpendicular ao eixo x, ou seja, $b=0$ (Figura 23). Assim, a equação de r é dada por $x=-\dfrac{c}{a}$. Todo ponto à esquerda de r tem abscissa $x<-\dfrac{c}{a}$ e, todo ponto à direita de r tem abscissa $x>-\dfrac{c}{a}$.

O segundo caso considera r não perpendicular ao eixo x, isto é, $b\neq 0$ (Figura 24). Logo, escrevendo a equação de r na forma reduzida tem-se: $y=-\dfrac{a}{b}x-\dfrac{c}{b}$. Para qualquer ponto $A(x_A,y_A)\in r$, vale: $y_A=-\dfrac{a}{b}x_A-\dfrac{c}{b}$.

Figura 23 – Inequação do 1º grau com duas variáveis e $b = 0$

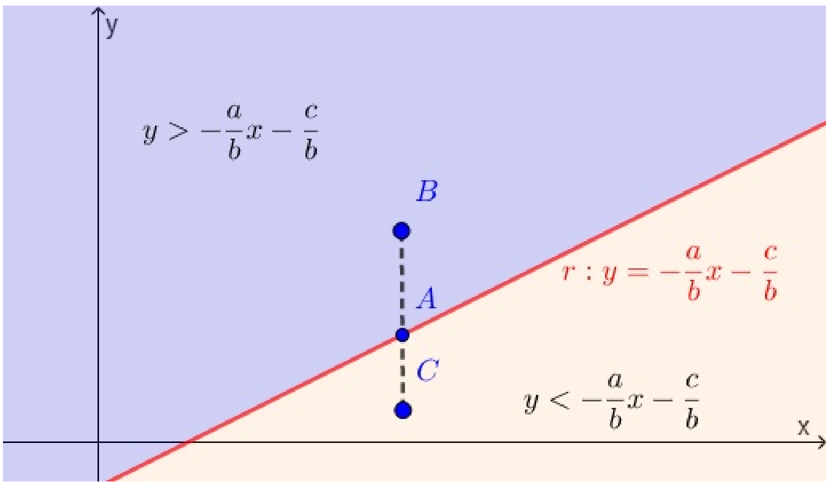


Fonte: Autoria própria

Todo ponto $B(x_B, y_B)$, com $x_B = x_A$, acima de r, tem ordenada $y_B > y_A$, ou seja, $y_B > -\frac{a}{b}x_B - \frac{c}{b}$.

Todo ponto $C(x_C, y_C)$, com $x_C = x_A$, abaixo de r, tem ordenada $y_C < y_A$, ou seja, $y_C < -\frac{a}{b}x_C - \frac{c}{b}$.

Figura 24 – Inequação do 1º grau com duas variáveis e $b \neq 0$



Fonte: Autoria própria

3.3 Estudo analítico da circunferência

3.3.1 Equação da circunferência

Definição 3.20. *Dados um ponto fixo C do plano e uma distância r, a circunferência λ é o lugar geométrico dos pontos P do plano que estão à mesma distância r de C. (LEONARDO, 2016, p. 137).*

Proposição 3.21 (Equação da circunferência)**.** *Seja $P(x, y)$ um ponto da circunferência λ, de centro $C(a, b)$ e de raio r. A equação da circunferência λ é dada por:*

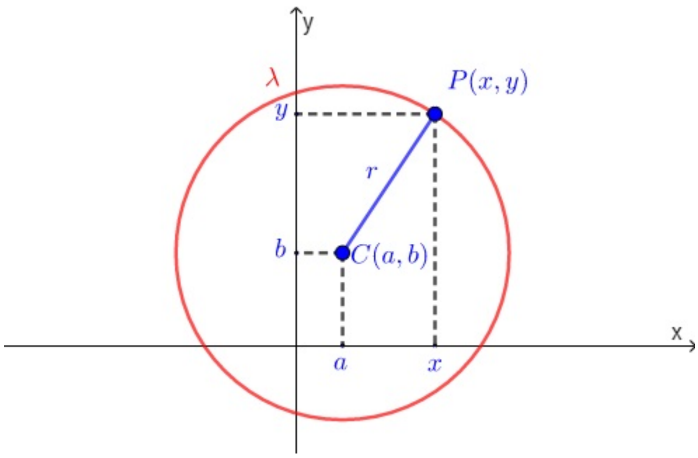
$$\lambda : (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2 \tag{3.12}$$

ou

$$\lambda : x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0 \tag{3.13}$$

(SMOLE; DINIZ, 2016, p. 124)

Figura 25 – Equação da circunferência



Fonte: Autoria própria

Demonstração. Considera-se a circunferência da Figura 25. Pela definição 3.20, a distância de P ao centro C da circunferência λ será sempre igual ao raio r. Pela Equação 3.1, a distância de P a C é dada por:

$$d(P, C) = \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} = r$$

Elevando ambos os membros ao quadrado, obtém-se:

$$\lambda : (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

Desenvolvendo os produtos notáveis e subtraindo r^2 em ambos os membros, tem-se:

$$\lambda : x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0$$

■

A Equação 3.12 é denominada **equação reduzida da circunferência** e a Equação 3.13, **equação geral da circunferência**. Dada uma equação de circunferência na forma reduzida, basta desenvolvê-la para obtê-la na forma geral. Se a equação for dada na forma geral e o objetivo for colocá-la na forma reduzida, deve-se completar quadrados. A vantagem de escrever a equação de uma circunferência na forma reduzida é a fácil identificação do seu centro e a medida do raio.

Observação 3.22. *Frequentemente trabalha-se com circunferências centradas na origem, ou seja, cujo centro tem coordenadas $C(0,0)$. Substituindo-se as coordenadas de C na Equação 3.12, obtém-se:*

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Observação 3.23. *Algumas equações da forma $(x-a)^2 + (y-b)^2 = k$ representam circunferências degeneradas. Nota-se que, se $k = 0$, apenas o ponto $C(a,b)$ satisfaz a equação. Além disso, se $k < 0$, a equação representa o conjunto vazio, pois a soma de dois quadrados nunca resulta em um número negativo.*

3.3.2 Posições relativas entre ponto e circunferência

Segundo Iezzi et al. (2016, p. 73), para uma circunferência λ de centro $C(a,b)$ e raio r e um ponto $P(x,y)$ qualquer do plano, distinto de C, pode-se determinar a posição relativa entre P e λ. Para isso, compara-se a distância entre P e C ($d(P,C)$) com r. Há três possibilidades, como ilustra a Figura 26:

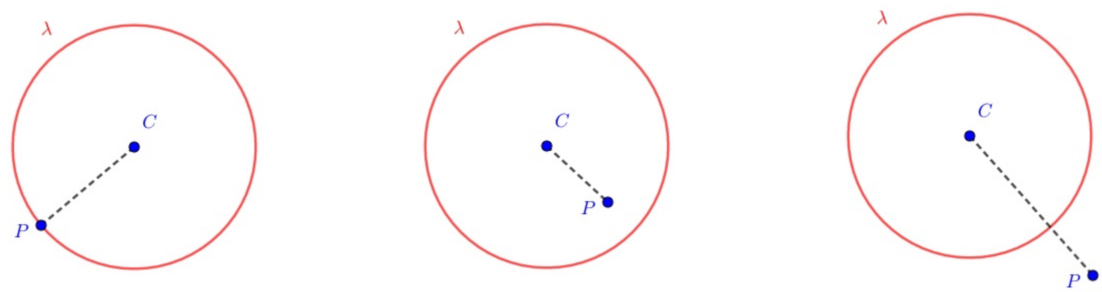
- Se $d(P,C) = r$, então P pertence à circunferência.
- Se $d(P,C) < r$, então P é interno à circunferência.
- Se $d(P,C) > r$, então P é externo à circunferência.

Figura 26 – Posições relativas entre ponto e circunferência

(a) ponto pertence à circunferência

(b) ponto interno à circunferência

(c) ponto externo à circunferência



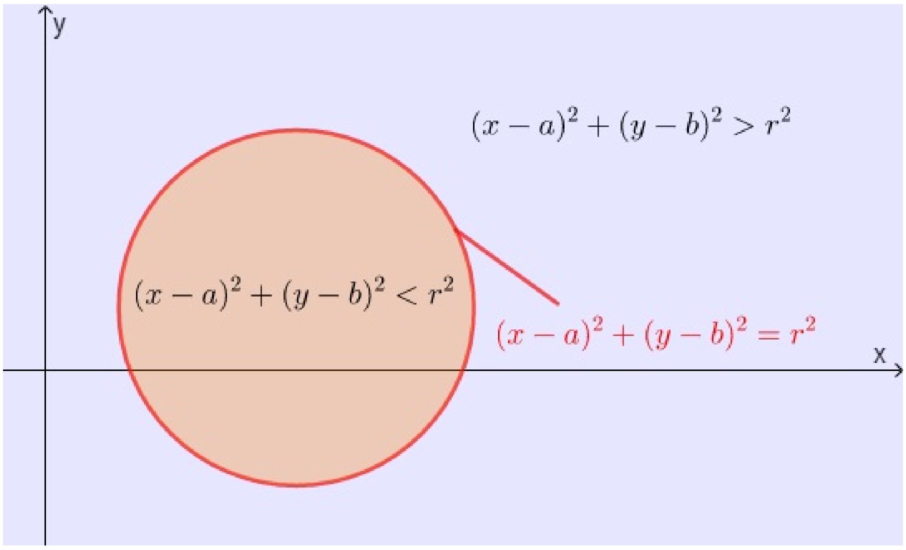
Fonte: Autoria própria

De modo geral, tem-se:

- $P \in \lambda \Leftrightarrow [d(P,C)]^2 = r^2 \Leftrightarrow (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$
- P interno a $\lambda \Leftrightarrow [d(P,C)]^2 < r^2 \Leftrightarrow (x-a)^2 + (y-b)^2 < r^2$
- P externo a $\lambda \Leftrightarrow [d(P,C)]^2 > r^2 \Leftrightarrow (x-a)^2 + (y-b)^2 > r^2$

Uma aplicação do estudo de posições relativas entre ponto e circunferência é o desenvolvimento de um método para resolver algumas inequações do 2º grau com duas incógnitas. Pode-se dizer que uma circunferência $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ determina três regiões no plano cartesiano, como mostrado na Figura 27: a região correspondente à circunferência ($(x-a)^2+(y-b)^2 = r^2$), a região correspondente ao interior da circunferência ($(x-a)^2 + (y-b)^2 < r^2$) e, por último, a região correspondente ao exterior da circunferência ($(x-a)^2 + (y-b)^2 > r^2$).

Figura 27 – Inequação do 2º grau com duas variáveis



Fonte: Autoria própria

3.3.3 Posições relativas entre reta e circunferência

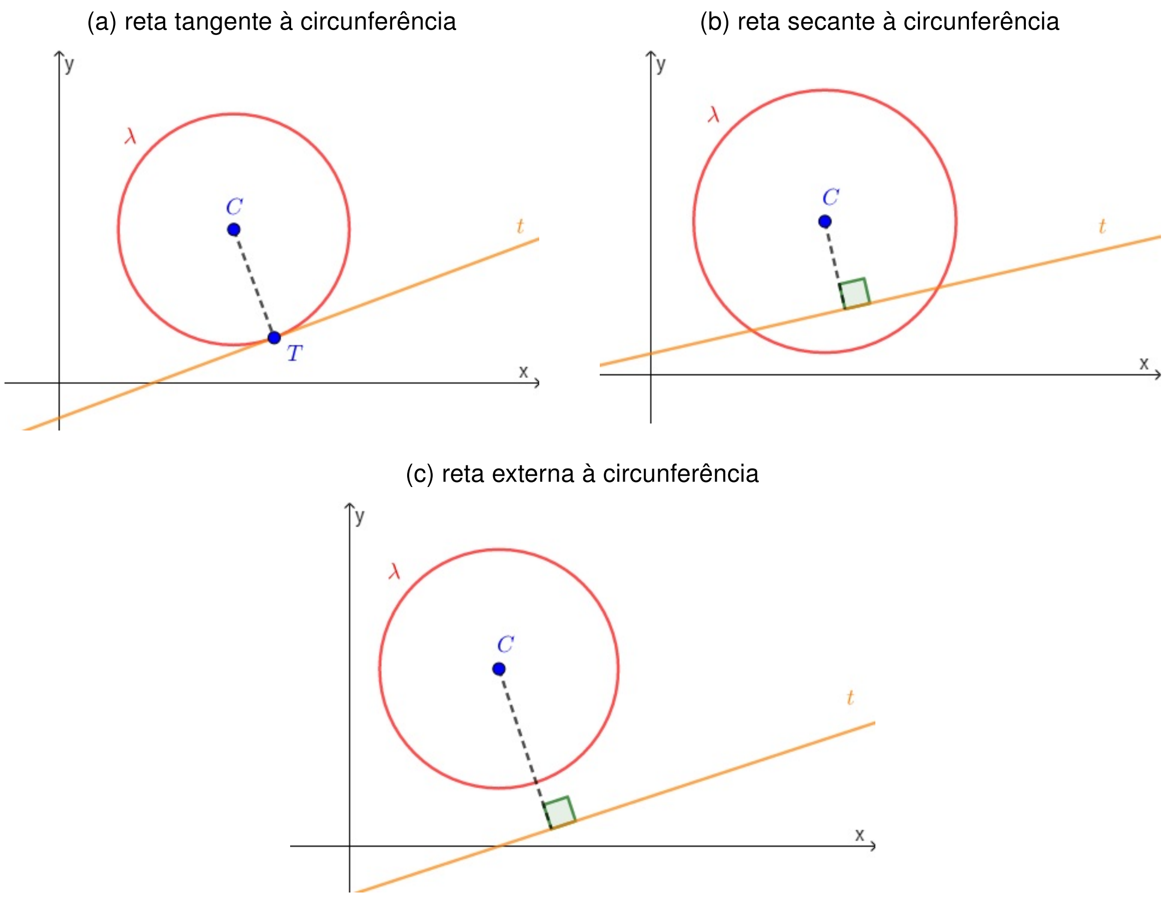
Dada uma circunferência λ, de centro $C(x_0, y_0)$ e raio de medida r, uma reta $t : ax + by + c = 0$ pode ser tangente, secante ou externa a λ (Figura 28) (SOUZA; GARCIA, 2016, p. 82). Para determinar a posição relativa entre t e λ calcula-se a a distância entre C e t, usando a Equação 3.11:

$$d(C,t) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Como resultado, tem-se:

- Se $d(C,t) = r$, então t é tangente à λ.
- Se $d(C,t) < r$, então t é secante à λ.
- Se $d(C,t) > r$, então t é externa à λ.

Figura 28 – Posições relativas entre reta e circunferência



Fonte: Autoria própria

Outra forma de determinar a posição relativa entre t e λ é encontrando seus pontos de interseção. Para isso, resolve-se o sistema de equações nas variáveis x e y:

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2 \end{cases}$$

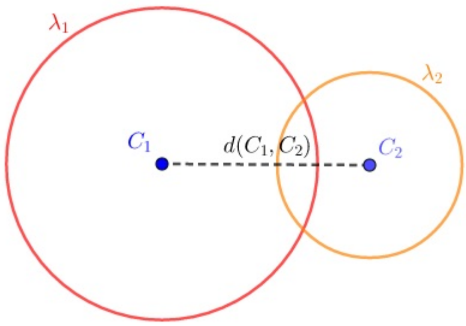
Encontrando dois pontos de interseção, t é secante à λ. Se encontrar apenas um ponto de interseção, então t é tangente à λ. Se não houver ponto de interseção, então t é externa à λ.

3.3.4 Posições relativas entre duas circunferências

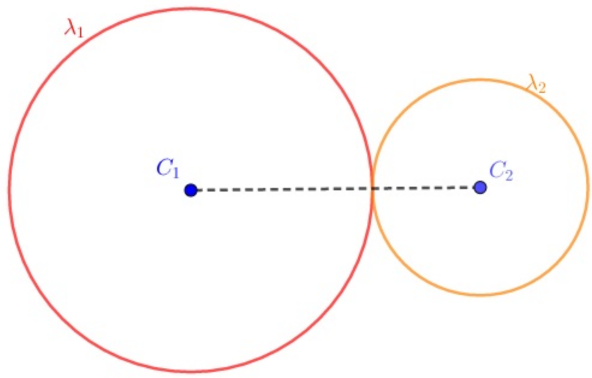
Sejam duas circunferências distintas, λ_1 e λ_2, com raios de medida r_1 e r_2 e centro C_1 e C_2, respectivamente. Essas duas circunferências podem ter dois, um ou nenhum ponto em comum. Pode-se fazer essa análise a partir da distância entre C_1 e C_2 e da medida dos raios r_1 e r_2 (BALESTRI, 2016, p. 200). De acordo com a geometria plana, são possíveis cinco casos distintos, como mostra a Figura 29:

Figura 29 – Posições relativas entre circunferências

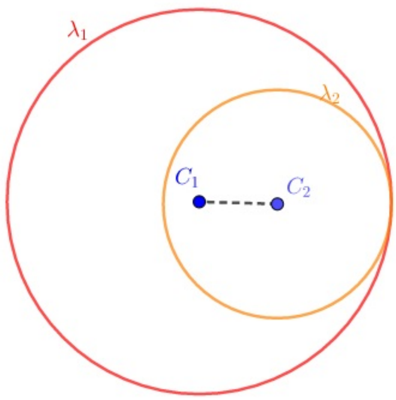
(a) circunferências secantes



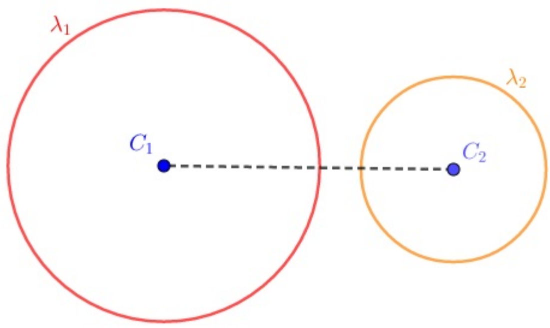
(b) circunferências tangentes externas



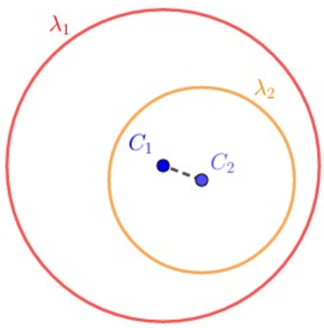
(c) circunferências tangentes internas



(d) circunferências externas



(e) circunferências internas



Fonte: Autoria própria

- λ_1 e λ_2 são secantes: possuem dois pontos comuns e $|r_1 - r_2| < d(C_1, C_2) < r_1 + r_2$.
- λ_1 e λ_2 são tangentes externas: possuem dois pontos comuns e $d(C_1, C_2) = r_1 + r_2$.
- λ_1 e λ_2 são tangentes internas: possuem dois pontos comuns e $d(C_1, C_2) = |r_1 - r_2|$.
- λ_1 e λ_2 são externas: possuem dois pontos comuns e $d(C_1, C_2) > r_1 + r_2$.
- λ_1 e λ_2 são internas: possuem dois pontos comuns e $d(C_1, C_2) < |r_1 - r_2|$.

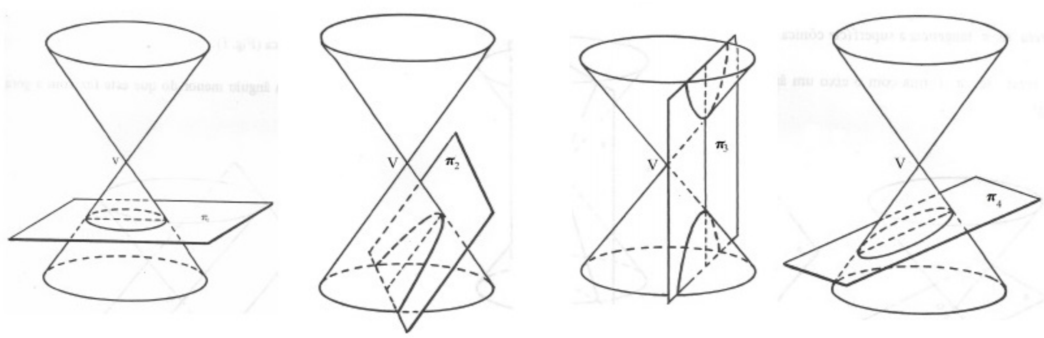
3.4 Estudo analítico das cônicas

Por volta do século III a.C., Apolônio de Perga publicou o seu trabalho mais famoso, o tratado sobre as *Cônicas*. Segundo Boyer e Merzbach (2012, p. 113), foi Apolônio que mostrou como obter a elipse, a hipérbole e a parábola por meio de seções de um mesmo tipo de cone. Para isso, considerou um cone de duas folhas (Figura 30).

Assim, há quatro casos possíveis para a interseção entre um plano e o cone de duas folhas (SOUZA; GARCIA, 2016, p. 104):

- Circunferência: obtida ao secionar o cone por um plano perpendicular ao eixo do cone.
- Parábola: obtida ao secionar o cone por um plano paralelo a uma das geratrizes.
- Hipérbole: obtida ao secionar o cone por um plano paralelo ao seu eixo.
- Elipse: obtida ao secionar uma folha do cone por um plano não perpendicular ao seu eixo e que seja concorrente a todas as suas geratrizes

Figura 30 – Seções cônicas não degeneradas



Fonte: (STEINBRUCH; WINTERLE, 1987)

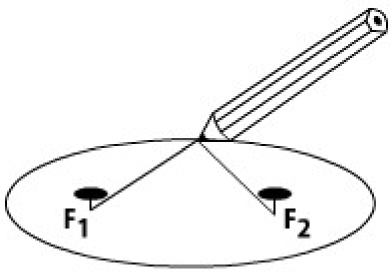
Além desses casos, há outras situações especiais que obtêm-se cônicas degeneradas, por exemplo, um ponto, uma reta, duas retas concorrentes ou o conjunto vazio.

3.4.1 Elipse

Definição 3.24. *Dados dois pontos distintos em um plano, F_1 e F_2, distantes $2c$ um do outro, define-se como elipse o lugar geométrico dos pontos P do plano cuja soma de suas distâncias à F_1 e F_2 é constante e igual a $2a$, com $2a > 2c$ (LEONARDO, 2016, p. 156).*

De acordo com a definição 3.24, uma elipse pode ser desenhada em um papel com o auxílio de um lápis, um pedaço de barbante e dois alfinetes. Primeiro, fixa-se o barbante com os dois alfinetes. O barbante deve ter uma folga para que seja possível traçar a elipse. Em seguida, deve-se deslizar o lápis encostado no barbante esticado por toda a extensão deste. A Figura 31 ilustra o procedimento.

Figura 31 – Procedimento do desenho de uma elipse



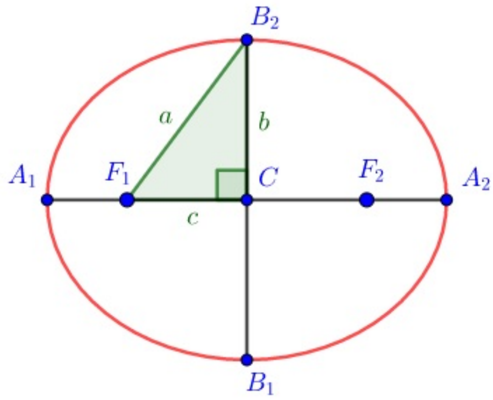
Fonte: (MARTINS; DIEHL; GRAVINA,)

Segundo Souza e Garcia (2016, p. 90), a elipse possui, representados na Figura 32, os seguintes elementos:

- focos: F_1 e F_2
- vértices: A_1, A_2, B_1 e B_2
- distância focal: $\overline{F_1F_2} = 2c$
- eixo maior: A_1A_2, de medida $\overline{A_1A_2} = 2a$.
- eixo menor: B_1B_2, de medida $\overline{B_1B_2} = 2b$.
- centro da elipse: C (ponto médio de F_1F_2, A_1A_2 e B_1B_2 e interseção dos eixos maior e menor)
- excentricidade: corresponde ao número $e = \dfrac{c}{a}$, com $0 < e < 1$.

Observação 3.25. *Quanto mais próxima de 1 a excentricidade de uma elipse, mais "achatada" é a forma desta. Quando a excentricidade se aproxima de 0, a forma da elipse se aproxima da forma de uma circunferência.*

Figura 32 – Elementos da elipse



Fonte: Autoria própria

Observação 3.26. *Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo CB_2F_1, da Figura 32, tem-se:*

$$a^2 = b^2 + c^2 \tag{3.14}$$

Proposição 3.27 (Equação da elipse com eixos paralelos aos eixos coordenados)**.** *Seja $P(x, y)$ um ponto qualquer de uma elipse de centro $C(x_0, y_0)$ e eixo maior paralelo ao eixo x ou ao eixo y. A equação dessa elipse é dada por:*

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1 \tag{3.15}$$

ou

$$\frac{(y - y_0)^2}{a^2} + \frac{(x - x_0)^2}{b^2} = 1 \tag{3.16}$$

(BALESTRI, 2016, p. 207)

A Equação 3.15 é usada quando o eixo maior é paralelo ao eixo x, e, a Equação 3.16, quando o eixo maior é paralelo ao eixo y.

Demonstração. Seja $P(x, y)$ um ponto da elipse de centro $C(x_0, y_0)$ e focos $F_1(x_0 - c, y_0)$ e $F_2(x_0 + c, y_0)$ (Figura 33a). Pela definição 3.24, tem-se:

$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a$$

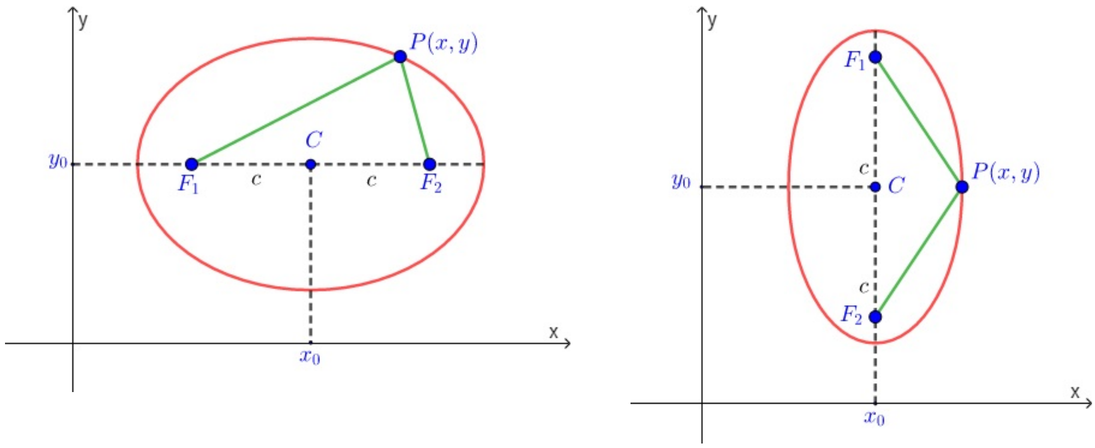
Usando a Equação 3.1 para calcular $d(P, F_1)$ e $d(P, F_2)$, obtém-se:

$$\sqrt{[x - (x_0 - c)]^2 + (y - y_0)^2} + \sqrt{[x - (x_0 + c)]^2 + (y - y_0)^2} = 2a$$
$$\sqrt{[x - x_0 + c]^2 + (y - y_0)^2} + \sqrt{[x - x_0 - c]^2 + (y - y_0)^2} = 2a$$

Figura 33 – Equação da elipse

(a) Elipse com eixo maior paralelo ao eixo x

(b) Elipse com eixo maior paralelo ao eixo y



Fonte: Autoria própria

Fazendo $x - x_0 = X$ e $y - y_0 = Y$, tem-se:

$$\begin{aligned}\sqrt{(X+c)^2+Y^2}+\sqrt{(X-c)^2+Y^2} &= 2a\\ \sqrt{(X+c)^2+y^2} &= 2a-\sqrt{(X-c)^2+Y^2}\end{aligned}$$

Elevando ambos os membros da última igualdade ao quadrado, tem-se:

$$\begin{aligned}\left[\sqrt{(X+c)^2+Y^2}\right]^2 &= \left[2a-\sqrt{(X-c)^2+Y^2}\right]^2\\ (X+c)^2+Y^2 &= 4a^2-4a\sqrt{(X-c)^2+Y^2}+(X-c)^2+Y^2\\ X^2+2cX+c^2+Y^2 &= 4a^2-4a\sqrt{(X-c)^2+Y^2}+X^2-2cX+c^2+Y^2\\ 2cX &= 4a^2-4a\sqrt{(X-c)^2+Y^2}-2cX\\ 4a\sqrt{(X-c)^2+Y^2} &= 4a^2-4cX\\ a\sqrt{(X-c)^2+Y^2} &= a^2-cX\end{aligned}$$

Novamente eleva-se os dois membros ao quadrado:

$$\begin{aligned}\left[a\sqrt{(X-c)^2+Y^2}\right]^2 &= (a^2-cX)^2\\ a^2\left[(X-c)^2+Y^2\right] &= a^4-2a^2cX+c^2X^2\\ a^2\left[X^2-2cX+c^2+Y^2\right] &= a^4-2a^2cX+c^2X^2\\ a^2X^2-2a^2cX+a^2c^2+a^2Y^2 &= a^4-2a^2cX+c^2X^2\\ a^2X^2+a^2c^2+a^2Y^2 &= a^4+c^2X^2\\ a^2X^2-c^2X^2+a^2Y^2 &= a^4-a^2c^2\\ (a^2-c^2)X^2+a^2Y^2 &= a^2(a^2-c^2)\end{aligned}$$

Mas como $a^2 = b^2 + c^2$, ou seja, $a^2 - c^2 = b^2$, segue-se que:

$$b^2X^2 + a^2Y^2 = a^2b^2$$

Como $a \neq 0$ e $b \neq 0$, então $a^2b^2 \neq 0$. Assim, é possível dividir ambos os membros por a^2b^2:

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1$$

Por fim, são feitas as mudanças $X = x - x_0$ e $Y = y - y_0$:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$$

Analogamente, considerando $P(x, y)$ um ponto da elipse de centro $C(x_0, y_0)$ e focos $F_1(x_0, y_0 - c)$ e $F_2(x_0, y_0 + c)$ (Figura 33b), mostra-se que a equação da elipse é dada por:

$$\frac{(y-y_0)^2}{a^2} + \frac{(x-x_0)^2}{b^2} = 1$$

■

Observação 3.28. *Se o centro da elipse for a origem, ou seja, $C(0, 0)$, a Equação 3.15 e a Equação 3.16 são, respectivamente, reduzidas às formas:*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{3.17}$$

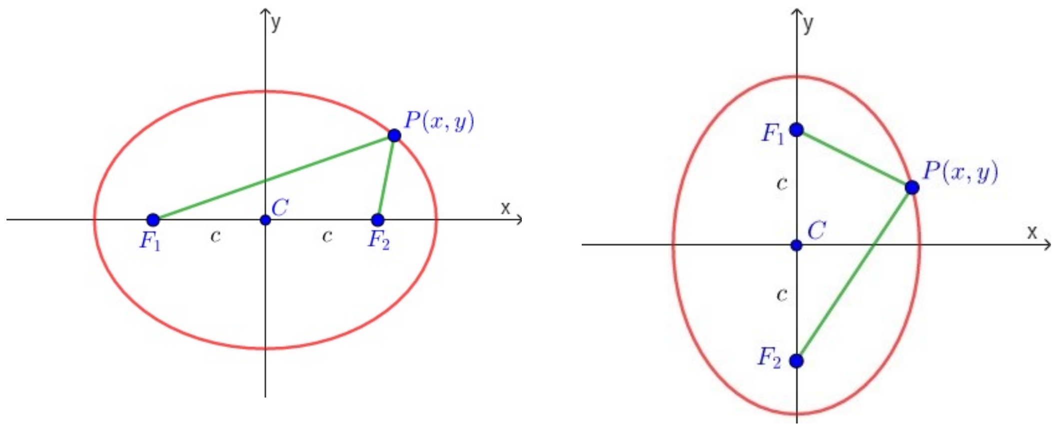
ou

$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1 \tag{3.18}$$

onde a Equação 3.17 representa uma elipse de eixo maior contido no eixo x e a Equação 3.18 representa uma elipse de eixo maior contido no eixo y, como ilustrado na Figura 34.

Figura 34 – Equação da elipse com centro na origem

(a) Elipse com eixo maior contido no eixo x (b) Elipse com eixo maior contido no eixo y



Fonte: Autoria própria

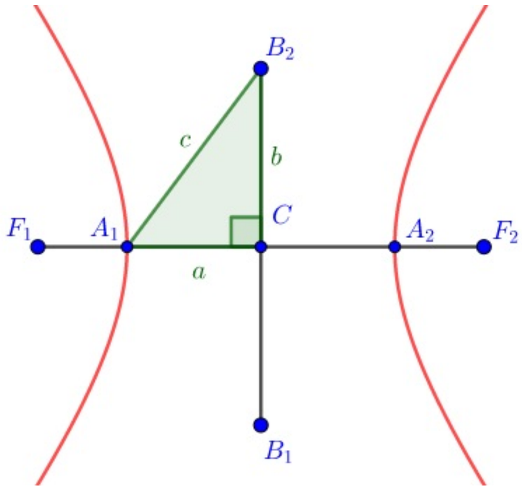
3.4.2 Hipérbole

Definição 3.29. *Dados dois pontos distintos em um plano F_1 e F_2, distantes $2c$ um do outro, define-se como hipérbole o lugar geométrico dos pontos P do plano cuja diferença, em módulo, de suas distâncias à F_1 e F_2 é constante e igual a $2a$, com $2a < 2c$ (LEONARDO, 2016, p. 163).*

Conforme Souza e Garcia (2016, p. 97), a hipérbole possui os seguintes elementos:

- focos: F_1 e F_2
- vértices: A_1, A_2, B_1 e B_2
- distância focal: $\overline{F_1F_2} = 2c$
- eixo real: A_1A_2, de medida $\overline{A_1A_2} = 2a$.
- eixo imaginário: B_1B_2, de medida $\overline{B_1B_2} = 2b$.
- centro da hipérbole: C (ponto médio de F_1F_2, A_1A_2 e B_1B_2 e interseção dos eixos maior e menor)
- excentricidade: corresponde ao número $e = \dfrac{c}{a}$, com $e > 1$.

Figura 35 – Elementos da hipérbole



Fonte: Autoria própria

Observação 3.30. *A excentricidade indica o quanto a hipérbole possui ramos mais fechados ou abertos, conforme se aproxima de 1 ou for um número tendendo ao infinito, respectivamente.*

Observação 3.31. *Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo CA_1B_2 da Figura 35, tem-se:*

$$c^2 = a^2 + b^2 \tag{3.19}$$

Proposição 3.32 (Equação da hipérbole com eixos paralelos aos eixos coordenados)**.** *Seja $P(x, y)$ um ponto qualquer de uma hipérbole de centro $C(x_0, y_0)$ e eixo real paralelo ao eixo x ou ao eixo y. A equação dessa hipérbole é dada por:*

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1 \tag{3.20}$$

ou

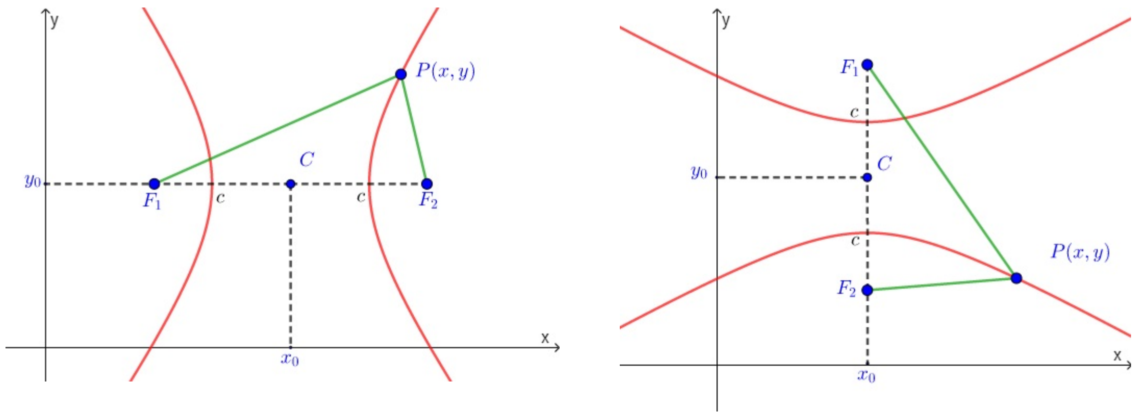
$$\frac{(y - y_0)^2}{a^2} - \frac{(x - x_0)^2}{b^2} = 1 \tag{3.21}$$

(BALESTRI, 2016, p. 213-214)

A Equação 3.20 é usada quando o eixo real é paralelo ao eixo x, e, a Equação 3.21, quando o eixo real é paralelo ao eixo y.

Figura 36 – Equação da hipérbole

(a) Hipérbole com eixo real paralelo ao eixo x (b) Hipérbole com eixo real paralelo ao eixo y



Fonte: Autoria própria

Demonstração. Seja $P(x, y)$ um ponto da hipérbole de centro $C(x_0, y_0)$ e focos $F_1(x_0 - c, y_0)$ e $F_2(x_0 + c, y_0)$ (Figura 36a). Pela Definição 3.29, tem-se:

$$|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a$$

Usando a Equação 3.1 para calcular $d(P, F_1)$ e $d(P, F_2)$ e desenvolvendo a equação, obtém-se:

$$\left|\sqrt{[x - (x_0 - c)]^2 + (y - y_0)^2} - \sqrt{[x - (x_0 + c)]^2 + (y - y_0)^2}\right| = 2a$$
$$\left|\sqrt{[x - x_0 + c]^2 + (y - y_0)^2} - \sqrt{[x - x_0 - c]^2 + (y - y_0)^2}\right| = 2a$$

Fazendo $x - x_0 = X$ e $y - y_0 = Y$, tem-se:

$$\left|\sqrt{(X+c)^2+Y^2} - \sqrt{(X-c)^2+Y^2}\right| = 2a$$

Elevando ambos os membros da última igualdade ao quadrado, tem-se:

$$\begin{aligned}
\left[\sqrt{(X+c)^2+Y^2}\right]^2 &= \left[\pm 2a + \sqrt{(X-c)^2+Y^2}\right]^2 \\
(X+c)^2+Y^2 &= 4a^2 \pm 4a\sqrt{(X-c)^2+Y^2} + (X-c)^2+Y^2 \\
X^2+2cX+c^2+Y^2 &= 4a^2 \pm 4a\sqrt{(X-c)^2+Y^2} + X^2-2cX+c^2+Y^2 \\
2cX &= 4a^2 \pm 4a\sqrt{(X-c)^2+Y^2} - 2cX \\
4cX - 4a^2 &= \pm 4a\sqrt{(X-c)^2+Y^2} \\
cX - a^2 &= \pm a\sqrt{(X-c)^2+Y^2}
\end{aligned}$$

Novamente eleva-se os dois membros ao quadrado:

$$\begin{aligned}
(cX-a^2)^2 &= \left[\pm a\sqrt{(X-c)^2+Y^2}\right]^2 \\
c^2X^2 - 2a^2cX + a^4 &= a^2\left[(X-c)^2+Y^2\right] \\
c^2X^2 - 2a^2cX + a^4 &= a^2\left[X^2-2cX+c^2+Y^2\right] \\
c^2X^2 - 2a^2cX + a^4 &= a^2X^2 - 2a^2cX + a^2c^2 + a^2Y^2 \\
c^2X^2 + a^4 &= a^2X^2 + a^2c^2 + a^2Y^2 \\
c^2X^2 - a^2X^2 - a^2Y^2 &= a^2c^2 - a^4 \\
(c^2-a^2)X^2 - a^2Y^2 &= a^2(c^2-a^2)
\end{aligned}$$

Mas como $c^2 = a^2 + b^2$, ou seja, $c^2 - a^2 = b^2$, segue-se que:

$$b^2X^2 - a^2Y^2 = a^2b^2$$

Como $a \neq 0$ e $b \neq 0$, então $a^2b^2 \neq 0$. Assim, é possível dividir ambos os membros por a^2b^2, obtendo:

$$\frac{X^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Por fim, são feitas as mudanças $X = x - x_0$ e $Y = y - y_0$:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$$

De maneira análoga, considerando $P(x,y)$ um ponto da hipérbole de centro $C(x_0,y_0)$ e focos $F_1(x_0, y_0-c)$ e $F_2(x_0, y_0+c)$, mostra-se que a equação da hipérbole é dada por:

$$\frac{(y-y_0)^2}{a^2} + \frac{(x-x_0)^2}{b^2} = 1$$

■

Observação 3.33. *Se o centro da hipérbole for a origem, ou seja, $C(0,0)$, a Equação 3.20 e a Equação 3.21 são, respectivamente, reduzidas às formas:*

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{3.22}$$

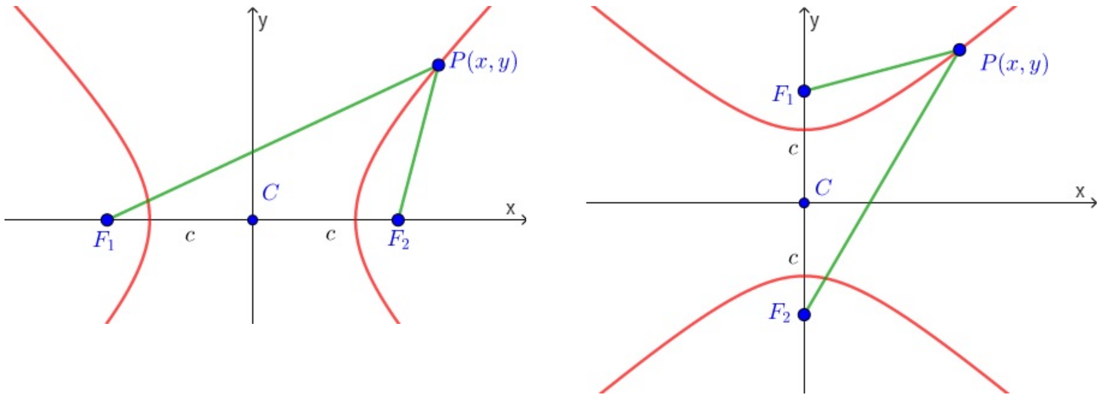
ou

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 \tag{3.23}$$

em que a Equação 3.22 representa uma elipse de eixo real contido no eixo x e a Equação 3.23 representa uma elipse de eixo real contido no eixo y, como ilustrado na Figura 37.

Figura 37 – Equação da hipérbole com centro na origem

(a) Hipérbole com eixo real contido no eixo x (b) Hipérbole com eixo real contido no eixo y



Fonte: Autoria própria

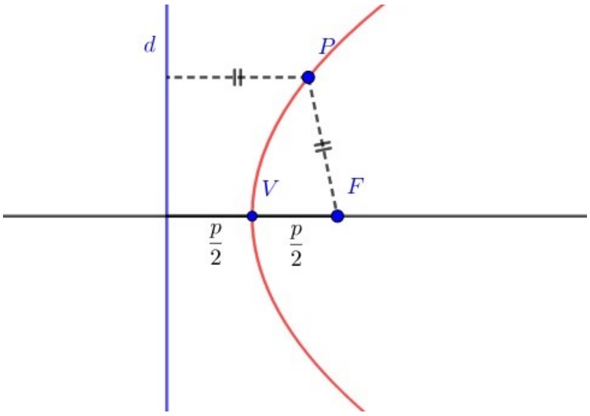
3.4.3 Parábola

Definição 3.34. *Dados uma reta r e um ponto F não pertencente a r, define-se como parábola o lugar geométrico dos pontos P do plano cuja distância à reta r é igual à distância ao ponto F. (LEONARDO, 2016, p. 160).*

De acordo com Smole e Diniz (2016, p. 150), a parábola possui os seguintes elementos (Figura 38):

- foco: F
- reta diretriz: d
- parâmetro: p, em que $p > 0$ e representa a distância entre F e d ($p = d(F, d)$)
- vértice: V
- eixo de simetria: $\overleftrightarrow{VF}$

Figura 38 – Elementos da parábola



Fonte: Autoria própria

Proposição 3.35 (Equação da parábola com reta diretriz paralela a um dos eixos coordenados)**.** *Seja $P(x,y)$ um ponto qualquer de uma parábola de vértice $V(x_V, y_V)$ e reta diretriz d paralela ao eixo x ou ao eixo y. A equação dessa parábola é dada por:*

$$(x - x_V)^2 = 2p(y - y_V) \tag{3.24}$$

se d for paralela ao eixo x e a parábola tiver concavidade voltada para cima;

$$(x - x_V)^2 = -2p(y - y_V) \tag{3.25}$$

se d for paralela ao eixo x e a parábola tiver concavidade voltada para baixo;

$$(y - y_V)^2 = 2p(x - x_V) \tag{3.26}$$

se d for paralela ao eixo y e a parábola tiver concavidade voltada à direita;

$$(y - y_V)^2 = -2p(x - x_V) \tag{3.27}$$

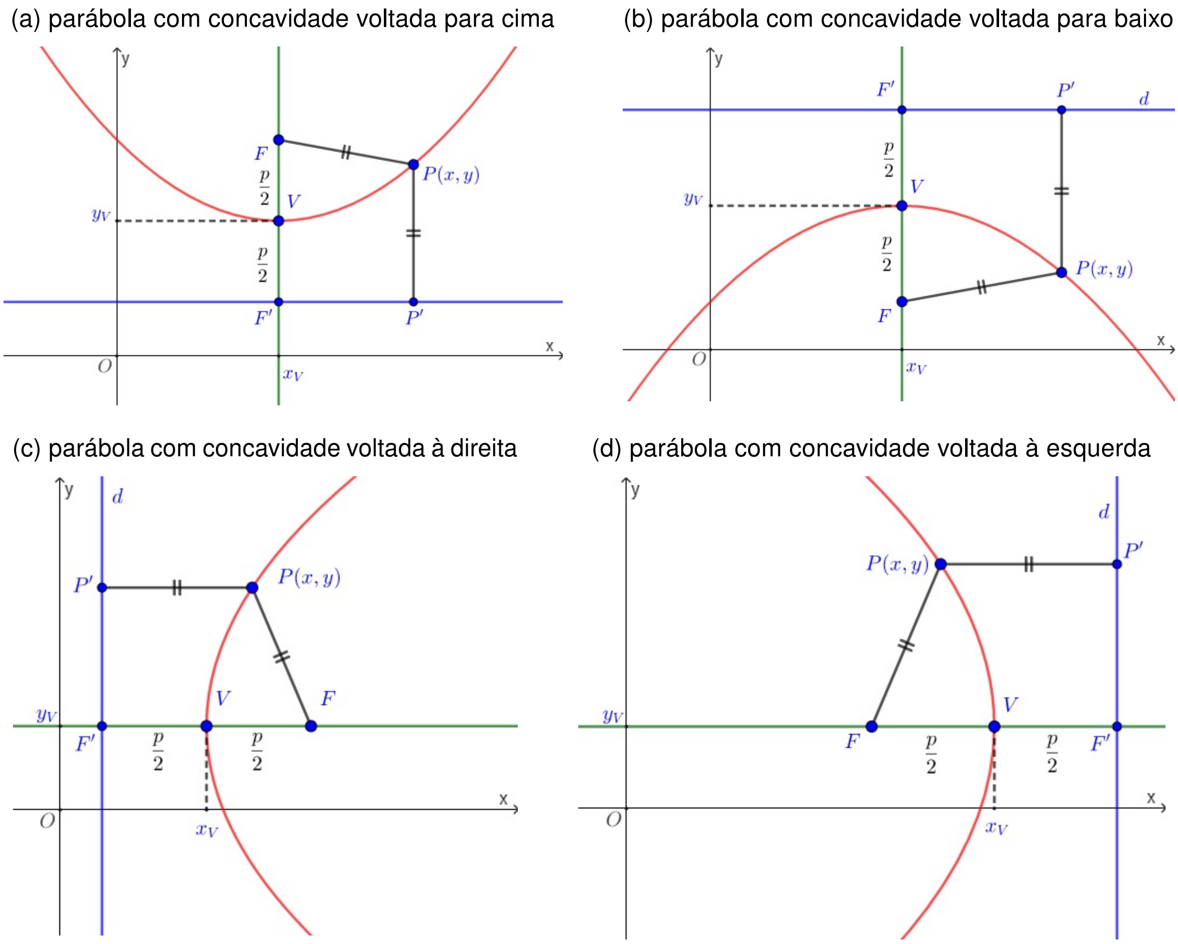
se d for paralela ao eixo y e a parábola tiver concavidade voltada à esquerda. (IEZZI et al., 2016, p. 108)

Demonstração. Aqui será demonstrada a Equação 3.26, ou seja, de uma parábola com concavidade voltada à direita, como ilustrado na Figura 39c. As demonstrações das equações 3.24, 3.25 e 3.27 são análogas.

Seja $P(x,y)$ um ponto da parábola de vértice $V(x_V, y_V)$ e foco $F\left(x_V + \dfrac{p}{2}, y_V\right)$, com concavidade voltada à direita. Pela Definição 3.34, tem-se:

$$d(P,F) = d(P,d)$$

Figura 39 – Equação da parábola



Fonte: Autoria própria

Como $d(P,d) = d(P,P')$, onde $P'\left(x_V - \dfrac{p}{2}, y\right)$ e usando a Equação 3.1, tem-se:

$$\sqrt{\left[x - \left(x_V + \frac{p}{2}\right)\right]^2 + (y - y_V)^2} = \sqrt{\left[x - \left(x_V - \frac{p}{2}\right)\right]^2 + (y - y)^2}$$

$$\sqrt{\left(x - x_V - \frac{p}{2}\right)^2 + (y - y_V)^2} = \sqrt{\left(x - x_V + \frac{p}{2}\right)^2}$$

Fazendo $x - x_V = X$ e $y - y_V = Y$ e elevando os dois membros ao quadrado, obtém-se:

$$\sqrt{\left(X - \frac{p}{2}\right)^2 + Y^2} = \sqrt{\left(X + \frac{p}{2}\right)^2}$$

$$X^2 - pX + \frac{p^2}{4} + Y^2 = X^2 + pX + \frac{p^2}{4}$$

$$Y^2 = 2pX$$

Por fim, são feitas as mudanças $X = x - x_0$ e $Y = y - y_0$:

$$(y - y_V)^2 = 2p(x - x_V)$$

■

Observação 3.36. *Se o vértice da parábola coincidir com a origem, ou seja,* $V(0,0)$*, as equações 3.24, 3.25, 3.26 e 3.27 são, respectivamente, reduzidas às formas:*

$$x^2 = 2py \tag{3.28}$$

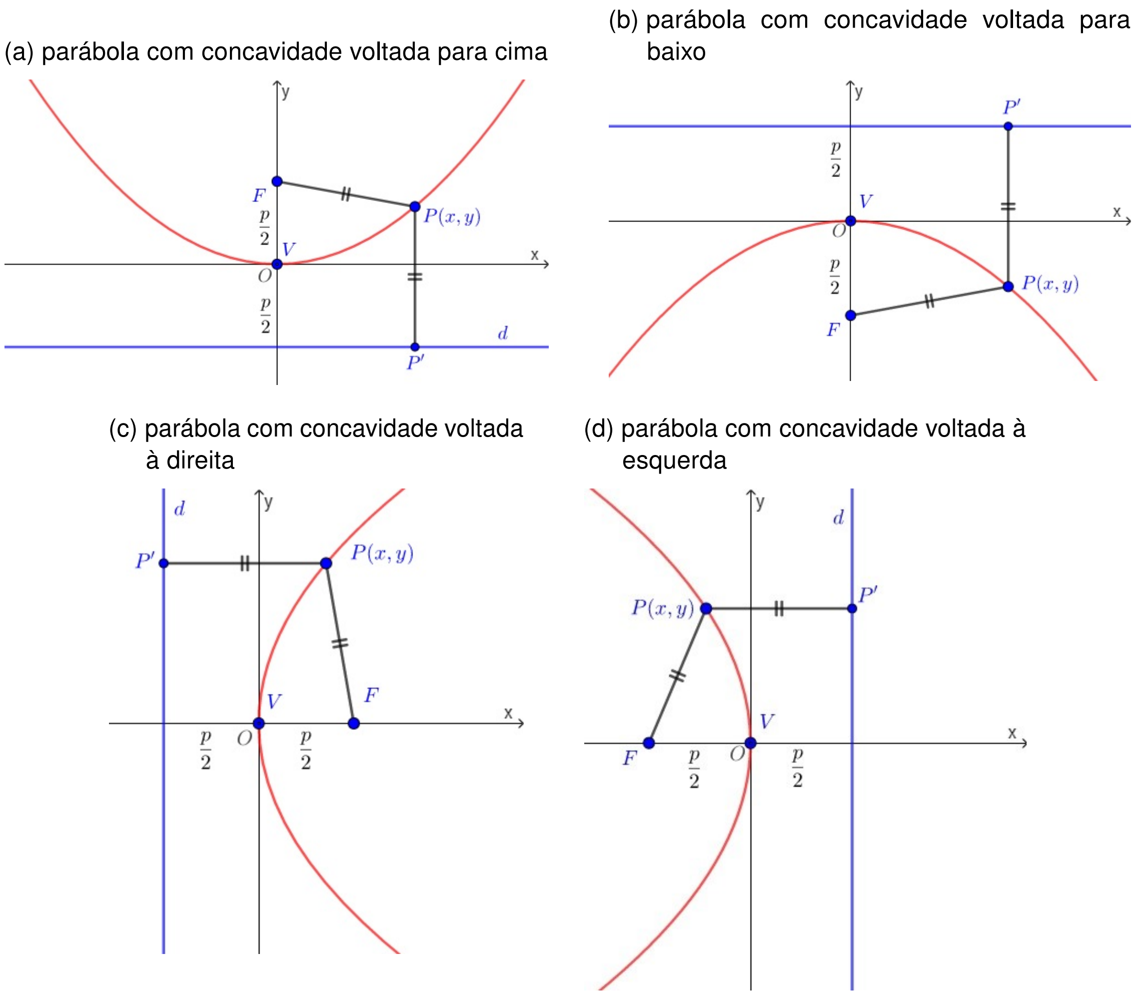
$$x^2 = -2py \tag{3.29}$$

$$y^2 = 2px \tag{3.30}$$

$$y^2 = -2px \tag{3.31}$$

em que a Equação 3.28, Equação 3.29, Equação 3.30 e Equação 3.31 representam parábolas com concavidade voltada para cima, para baixo, à direita e à esquerda, respectivamente, como ilustrado na Figura 40.

Figura 40 – Equação da parábola com vértice na origem



(a) parábola com concavidade voltada para cima

(b) parábola com concavidade voltada para baixo

(c) parábola com concavidade voltada à direita

(d) parábola com concavidade voltada à esquerda

Fonte: Autoria própria

Capítulo 4

O desenvolvimento da pesquisa

4.1 Aspectos metodológicos

A presente pesquisa tem abordagem qualitativa, tendo como foco principal o processo e o seu significado.

> Na abordagem qualitativa, a pesquisa tem o ambiente como fonte direta dos dados. O pesquisador mantém contato direto com o ambiente e o objeto de estudo em questão, necessitando de um trabalho mais intensivo de campo. Nesse caso, as questões são estudadas no ambiente em que elas se apresentam sem qualquer manipulação intencional do pesquisador. [...] Os dados coletados nessas pesquisas são descritivos, retratando o maior número possível de elementos existentes na realidade estudada. Preocupa-se muito mais com o processo do que com o produto. Na análise dos dados coletados, não há preocupação em comprovar hipóteses previamente estabelecidas, porém estas eliminam a existência de um quadro teórico que direcione a coleta, a análise e a interpretação dos dados (PRODANOV; FREITAS, 2013, p. 70).

Do ponto de vista da sua natureza, este trabalho é classificado como uma pesquisa aplicada, pois tem como objetivo gerar conhecimentos para aplicação prática no ensino da Geometria Analítica.

Em relação aos seus objetivos, esta pesquisa é classificada como exploratória. De acordo com Gil (2008a, p. 27), esse tipo de pesquisa tem a "finalidade de desenvolver, esclarecer e modificar conceitos e ideias, tendo em vista a formulação de problemas mais precisos ou hipóteses pesquisáveis para estudos posteriores".

Quanto aos procedimentos técnicos, este trabalho é relacionado como uma pesquisa de campo. Segundo Marconi e Lakatos (2003, p. 186), pesquisa de campo é "aquela utilizada com o objetivo de conseguir informações e/ou conhecimentos acerca de um problema, para o qual se procura uma resposta, ou de uma hipótese, que se queira comprovar, ou, ainda descobrir novos fenômenos ou as relações entre eles".

Os instrumentos utilizados para esta pesquisa são as Atividades de Exploração, Listas de Problemas e Testes. Esses instrumentos oferecem diversidade na coleta de dados, assim, aumentam a confiabilidade nos resultados. Além disso, a observação da aplicação da sequência didática é um importante fator na investigação de uma pesquisa qualitativa. “O estudo de campo tende a utilizar muito mais técnicas de observação do que de interrogação” (GIL, 2008a, p. 57).

4.2 Sujeitos e campo de pesquisa

Este estudo foi realizado na Escola Officina do Saber, do município de Carangola, situado na Zona da Mata de Minas Gerais, onde o pesquisador leciona a disciplina de Matemática desde 2014. A população estimada da cidade em 2018 é de 32988 habitantes (IBGE, 2018).

A Escola Officina do Saber, da rede privada, possui 20 anos de existência e oferece estudo da Educação Infantil ao Ensino Médio. A 3ª série do Ensino Médio possui, no momento da pesquisa, 26 alunos matriculados, dentre eles um aluno na condição de ouvinte. A escola conta com uma sala de informática com 20 computadores, que poderia ser utilizada nesta pesquisa. Entretanto, optou-se por utilizar a própria sala da 3ª série, que possui ar-condicionado, quadro branco e uma Smart TV, para que os alunos acompanhem o desenvolvimento das atividades realizadas com o GeoGebra.

Segundo levantamento da Folha de S.Paulo (TAKAHASHI; GAMBA; SALDANA, 2018), a respeito do desempenho dos participantes de 3º ano do Ensino Médio no ENEM de 2017, que avaliou 14124 escolas públicas e privadas, respeitando o mínimo de dez estudantes por colégio, a Escola Officina do Saber apresentou os resultados contidos na Figura 41.

Observa-se que a Escola Officina do Saber obteve um bom desempenho no Enem de 2017, visto que é um colégio do interior de Minas Gerais. Comparando os resultados da escola em questão com a média de todos os participantes do exame, a diferença é enorme. De acordo com resultados divulgados pelo INEP (2018), a nota média dos participantes por área de conhecimento foram:

- Linguagens, Códigos e suas Tecnologias: 510,2.
- Ciências Humanas e suas Tecnologias: 519,3.
- Matemática e suas Tecnologias: 518,5.
- Ciências da Natureza e suas Tecnologias: 510,6.
- Redação: 558.

Figura 41 – Resultados da Escola Officina do Saber no ENEM de 2017

Posição Brasil (provas objetivas) 1692
Posição Estado (provas objetivas) 322
Posição Brasil (redação) 872
Posição Estado (redação) 209
Estado MG
Município CARANGOLA
Escola ESCOLA OFFICINA DO SABER
Dependencia Administrativa Privada
Porte da escola (nº de alunos no 3º ano) De 31 a 60 alunos
Ciências da natureza 586,79
Ciências humanas 590,21
Linguagens 564,29
Matemática 634,38
Média provas objetivas 593,92
Média na redação 729,68

Fonte: (TAKAHASHI; GAMBA; SALDANA, 2018)

A diferença na nota de Matemática e suas Tecnologias entre a Escola Officina do Saber e a média dos estudantes foi superior a 100 pontos. Em redação, a diferença passou de 150 pontos. Ainda conforme a pesquisa da Folha, o indicador de nível socioeconômico dos alunos da 3ª série do Ensino Médio da Escola Officina do Saber de 2017 é alto.

O pesquisador leciona nessa turma desde o ano de 2015, quando estavam no 9º ano do Ensino Fundamental. Dentre os 26 alunos dessa classe, 18 já estudavam na Escola em 2015, no 9º ano; 5 alunos ingressaram em 2016, na 1ª série do Ensino Médio; e 3 ingressaram em 2017, na 2ª série. Isso faz com que o docente tenha um bom conhecimento das potencialidades e dificuldades de seus alunos. Outra característica importante desse grupo é que 18 alunos residem em Carangola e os outros 8 em cidades vizinhas.

A 3ª série do Ensino Médio na Escola Officina do Saber possui grade curricular com 42 aulas semanais. As aulas são distribuídas em 6 períodos no turno matutino, de segunda à sexta-feira, e mais 6 aulas no turno vespertino, segunda e quinta-feira. Acrescenta-se a isso 7 simulados do Enem aplicados em dois sábados durante o ano, totalizando 14 dias extras de provas. O interessante dos simulados é que os alunos recebem notas de acordo com a TRI (Teoria de Resposta ao Item), utlizada no Enem, e podem comparar suas notas com as de outros alunos que utilizam o mesmo material didático.

A pontuação distribuída anualmente é de 100 pontos, dividida em quatro bimestres de 25 pontos cada um. O aluno é aprovado se alcançar 70 pontos. Pelo regimento da escola, o professor deve distribuir, bimestralmente, 10 pontos para os simulados do Enem, 10 pontos para a avaliação bimestral e 5 pontos por participação ou atividades.

Para as aulas de Matemática, são destinados, semanalmente, 6 períodos de 50 minutos, sendo três períodos às terças-feiras e três às sextas-feiras, ambos de 7:00 h às 9:30 h. O material didático de Matemática do Ensino Médio é organizado de forma que na 1ª e 2ª série sejam estudados um grande volume de conteúdo, para que a 3ª série seja um revisional dos assuntos já estudados, acrescidos de Números Complexos, Polinômios e Geometria Analítica, estudados exclusivamente na 3ª série.

4.3 A elaboração da sequência didática

Sequência didática é "um conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de certos objetivos educacionais, que têm um princípio e um fim conhecidos tanto pelo professor como pelos alunos" (ZABALA, 1998, p. 18).

Peretti (2013, p. 6) vai além, diz que sequência didática "é uma maneira de encaixar os conteúdos a um tema e por sua vez a outro e tornando o conhecimento lógico ao trabalho pedagógico desenvolvido".

Considerando o conteúdo de Geometria Analítica abordado no Ensino Médio, foi decidido organizar os assuntos em sete módulos. A primeira aula, no dia 03 de agosto, foi destinada à instalação do GeoGebra nos notebooks dos alunos, à apresentação das ferramentas do programa e a uma breve introdução histórica, com duração de 2h30min. Cada módulo seguinte, devia ser trabalhado em dois dias, sendo três períodos de 50 minutos cada um. Porém, com o andamento da pesquisa, a distribuição das aulas em cada módulo ficou como mostra o Quadro 1. O dia 11 de setembro foi dividido entre os módulos V e VI e o dia 18 de setembro entre os módulos VI e VII.

Quadro 1 – Sequência didática

Módulo	Dias	Aula
	03 de agosto	GeoGebra e um breve histórico de GA
I	07 e 10 de agosto	Plano cartesiano e ponto
II	14 e 17 de agosto	Estudo analítico da reta I
III	21 e 24 de agosto	Estudo analítico da reta II
IV	28 e 31 de agosto	Estudo analítico da circunferência I
V	04 e 11 de setembro	Estudo analítico da circunferência II
VI	11, 14 e 18 de setembro	Elipse e hipérbole
VII	18 e 21 de setembro	Parábola

Fonte: Autoria própria

No **módulo I** foram trabalhados os seguintes assuntos: plano cartesiano e coordenadas de um ponto, bissetrizes dos quadrantes pares e ímpares, distância entre dois pontos, ponto médio de um segmento, baricentro de um triângulo, condição de alinhamento de três pontos e área de um triângulo.

O **módulo II** explorou a reta no contexto cartesiano, tratando das equações geral e reduzida de uma reta, que podem ser obtidas através da condição de alinhamento de três pontos ou da equação fundamental da reta. Outro tópico importante é como obter o ponto de interseção de duas retas concorrentes, dadas as suas equações.

No **módulo III**, foi desenvolvida a habilidade de identificar a posição relativa de duas retas dadas as suas equações, obter retas paralelas e perpendiculares dados um ponto e uma reta, calcular o ângulo formado por duas retas e a distância entre um ponto e uma reta e resolver inequações do 1º grau com duas variáveis.

No **módulo IV** estudou-se a circunferência analiticamente. O objetivo é relacionar as equações geral e reduzida da circunferência com a sua localização no plano cartesiano, como, por exemplo, localizar o centro da circunferência e descobrir a medida de seu raio. O método de completar quadrados para obter a equação reduzida, dada a equação geral de uma circunferência também deve ser destacado.

O **módulo V** é uma sequência natural do módulo anterior. Depois de estudar retas e circunferências, foram criadas condições para obter a posição relativa entre elas e entre duas circunferências. Outro assunto abordado serão as inequações do 2º grau em duas variáveis.

O **módulo VI** abordou o estudo analítico da elipse e da hipérbole. O **módulo VII** tratou sobre a parábola. Em ambos os casos serão relacionadas as equações com o objeto geométrico, como a sua forma e a localização dos seus principais elementos, além de relacionar algumas de suas medidas.

4.4 Atividades de exploração

Ainda existe bastante resistência ao uso instrutivo das tecnologias de informação e comunicação (TIC) no meio escolar. Para Rodrigues e Miranda (2013, p. 24), tal resistência se deve ao receio da evolução das TIC, que transmitem a sensação de que chegaram ao ponto de não depender da evolução intelectual e racional.

Entretanto, é possível criar atividades relacionadas às TIC capazes de desenvolver o intelectual do aluno. As Atividades de Exploração propostas nesse trabalho têm o objetivo de desafiar, motivar os alunos à exploração, à reflexão e à descoberta. Elas foram elaboradas para estimular e encorajar cada aluno a fazer conjecturas, tomar decisões e argumentar para justificar o seu raciocínio. A vantagem do uso desse tipo de atividade é que o estudante assume o protagonismo do processo educacional, sendo um ser ativo na construção do seu conhecimento.

César (2000, p. 55) busca demonstrar que o trabalho a pares contribui para o desenvolvimento sociocognitivo dos alunos e promove a apreensão de conhecimentos e a aquisição de competências matemáticas. No fragmento abaixo, o autor apresenta detalhes sobre como deve ser feito o trabalho na sala de aula:

> Os alunos devem ajudar-se mutuamente, devem formular conjecturas e testá-las, devem saber explicar aos colegas o que pensaram e como resolveram as tarefas que lhes foram propostas, devem pôr questões aos colegas que estão a explicar as resoluções que fizeram sempre que as tenham percebido. Neste novo contrato didático responder ao acaso, só para verem se acertaram, já não compensa, pois é necessário explicar como se pensou (CÉSAR, 2000, p. 55).

Nesse contexto, foram elaboradas onze Atividades de Exploração, contidas no Apêndice A deste trabalho, utilizando o *software* GeoGebra com o intuito de promover o ensino e o aprendizado da Geometria Analítica. Essas atividades foram aplicadas em duplas, com o objetivo de estimular a troca de ideias e a busca pela informação através da experimentação. O esperado era que essa experiência fosse algo marcante para os alunos, de modo que o conteúdo fosse realmente aprendido. A seguir, será feita uma breve descrição de cada atividade.

A **Atividade de Exploração 1** (Figura 42) teve como objetivo relacionar as coordenadas dos vértices $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ e $C(x_C, y_C)$ de um triângulo com as coordenadas $G(x_G, y_G)$ de seu baricentro. Nessa atividade, destaca-se a construção do baricentro do triângulo, marcando-se os pontos médios dos lados e traçando as medianas. Esperava-se que os alunos observassem que as coordenadas do baricentro são dadas pela média aritmética das coordenadas dos vértices do triângulo, ou seja:

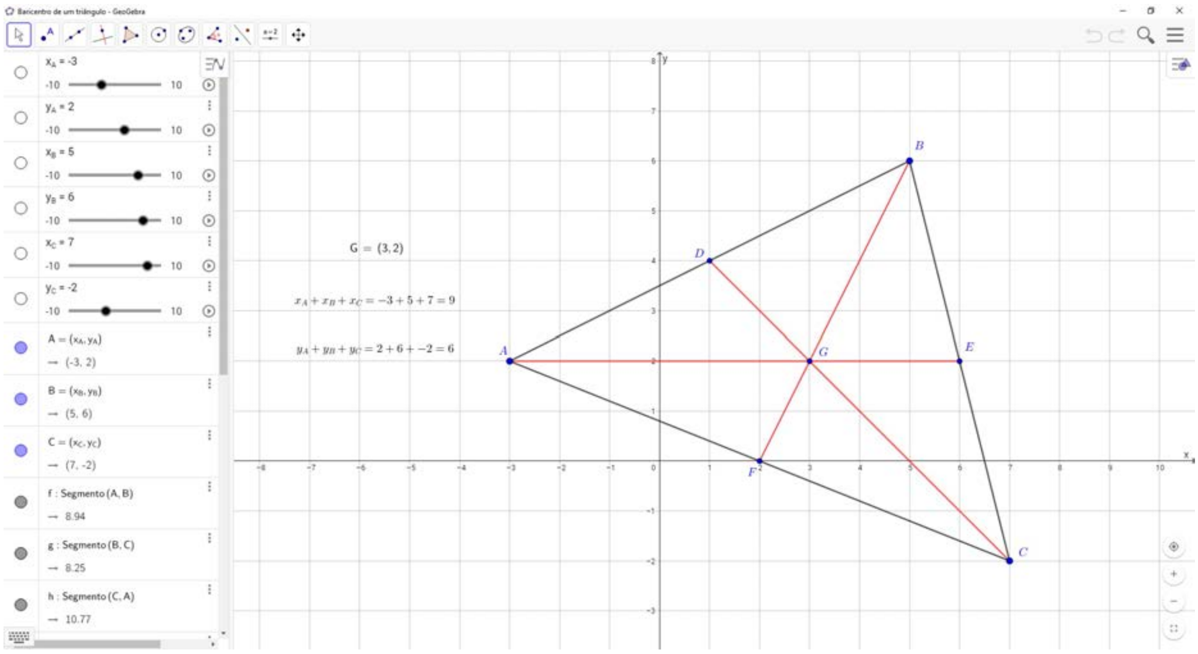
$$x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} \text{ e } y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}$$

A **Atividade de Exploração 2** (Figura 43) propôs comparar a área de um triângulo de vértices $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ e $C(x_C, y_C)$ com o determinante:

$$D = \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}$$

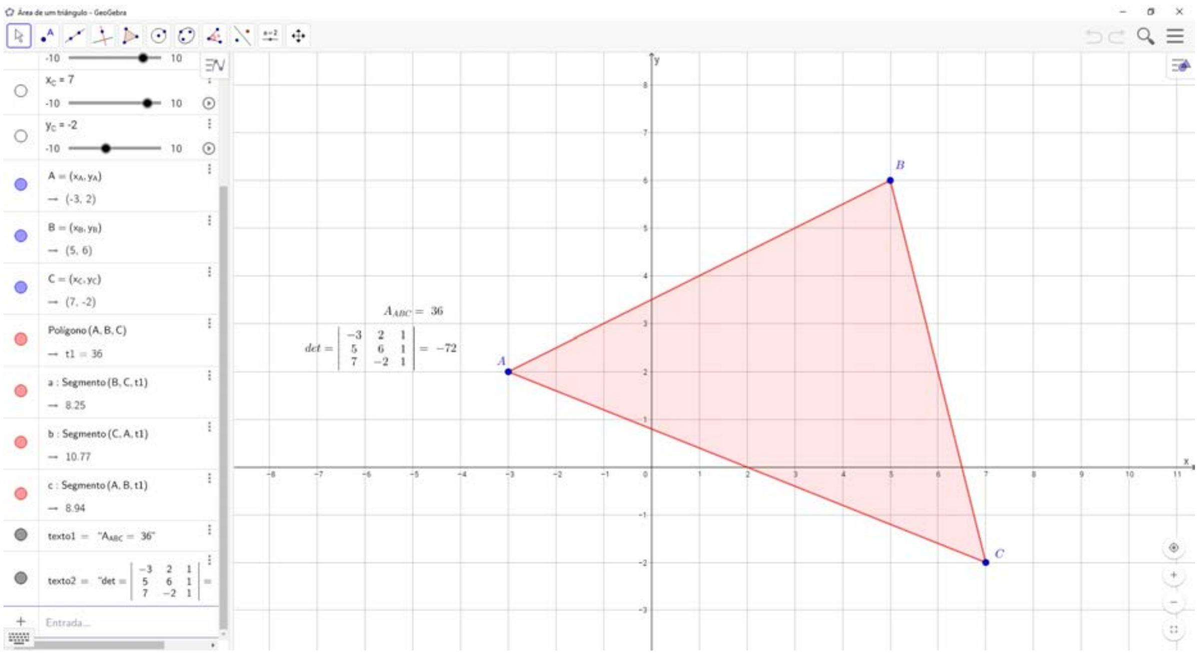
Além disso, essa atividade permitiu que fosse explorada a condição de alinhamento de três pontos no plano cartesiano. Era previsto que, nessas condições, os discentes concluíssem que a área de um triângulo é metade do módulo de D, e, quando A, B e C estão alinhados, $D = 0$.

Figura 42 – Atividade de Exploração 1



Fonte: Autoria própria

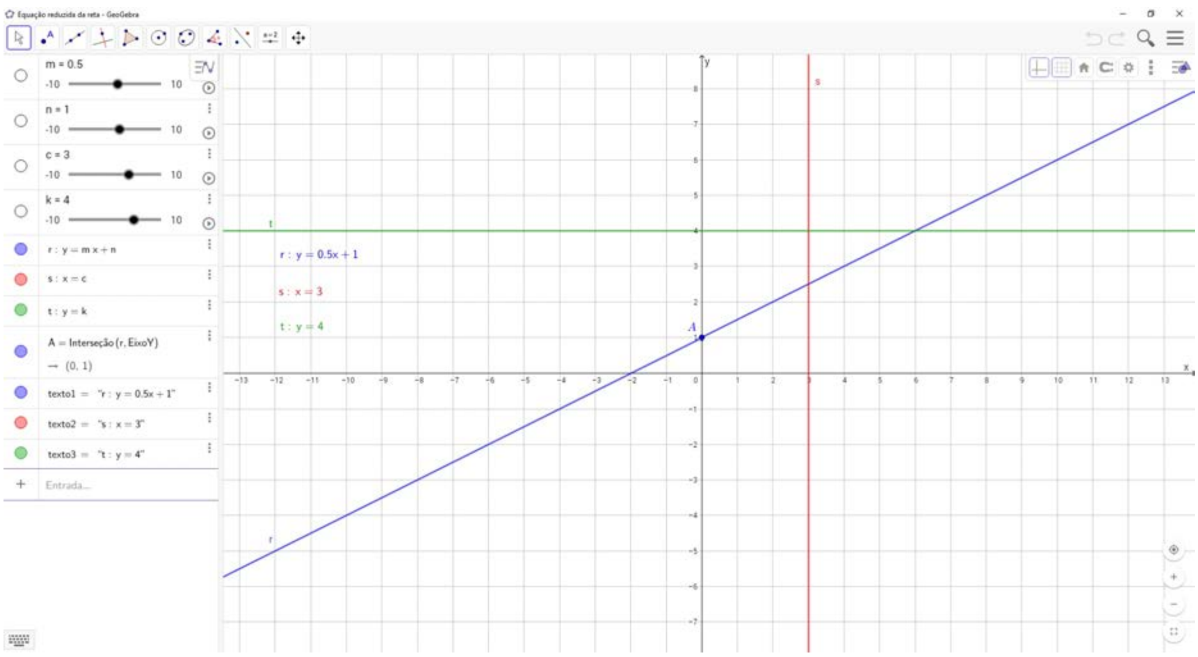
Figura 43 – Atividade de Exploração 2



Fonte: Autoria própria

A **Atividade de Exploração 3** (Figura 44) foi construída como uma ferramenta para ajudar na compreensão da posição de uma reta no plano dado a sua equação reduzida. Foram trabalhados os casos em que a reta é vertical ou horizontal separadamente do caso em que a reta é inclinada ou declinada. Os alunos deviam concluir que o coeficiente angular m da equação $y = mx + n$ da reta r altera a sua inclinação, de forma que se $m > 0$ então a reta é inclinada e se $m < 0$ então a reta é declinada; e que o coeficiente n é a ordenada do ponto de interseção da reta r com o eixo y; e as equações $x = c$ e $y = k$, com $c, k \in \mathbb{R}$, são retas verticais e horizontais, que passam pelos pontos $(c, 0)$ e $(0, k)$, respectivamente.

Figura 44 – Atividade de Exploração 3

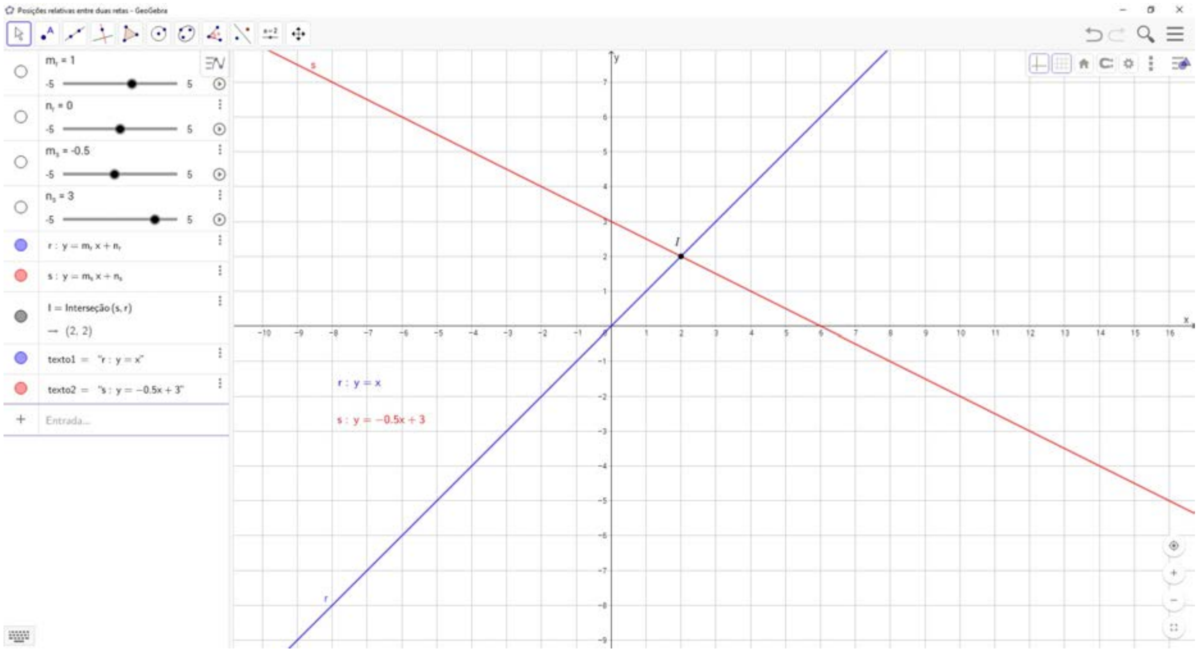


Fonte: Autoria própria

A **Atividade de Exploração 4** (Figura 45) permitiu que fossem feitas mudanças nos coeficientes das equações das retas r e s, onde $r : y = m_r x + n_r$ e $s : y = m_s x + n_s$, a fim de criar condições para que elas fossem coincidentes, paralelas ou concorrentes. Desejava-se que os alunos percebessem que se r e s forem coincidentes, então $m_r = m_S$ e $n_r = n_s$; se r e s forem paralelas, então $m_r = m_S$ e $n_r \neq n_s$; por fim, se r e s forem concorrentes, então $m_r \neq m_S$.

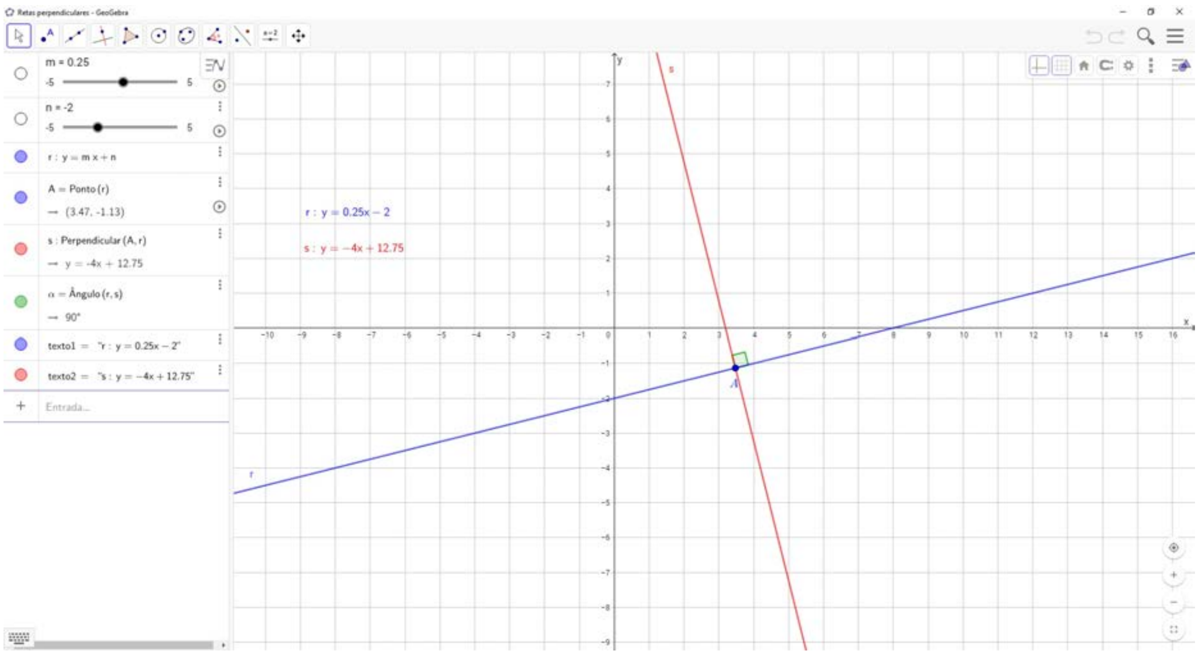
A **Atividade de Exploração 5** (Figura 46) mantinha o foco nas posições relativas entre duas retas r e s, agora com o caso delas serem perpendiculares. A diferença dessa atividade para a anterior é que a reta s foi fixada como perpendicular à r, variando de acordo com a posição de r. Desse modo, altera-se apenas os coeficientes da reta r. Esperava-se que os discentes observassem que o coeficiente linear não influencia a condição de perpendicularidade, cabendo ao coeficiente angular essa função. Comparando os coeficientes angulares de r e s, deve ser concluído que o produto deles é igual a -1.

Figura 45 – Atividade de Exploração 4



Fonte: Autoria própria

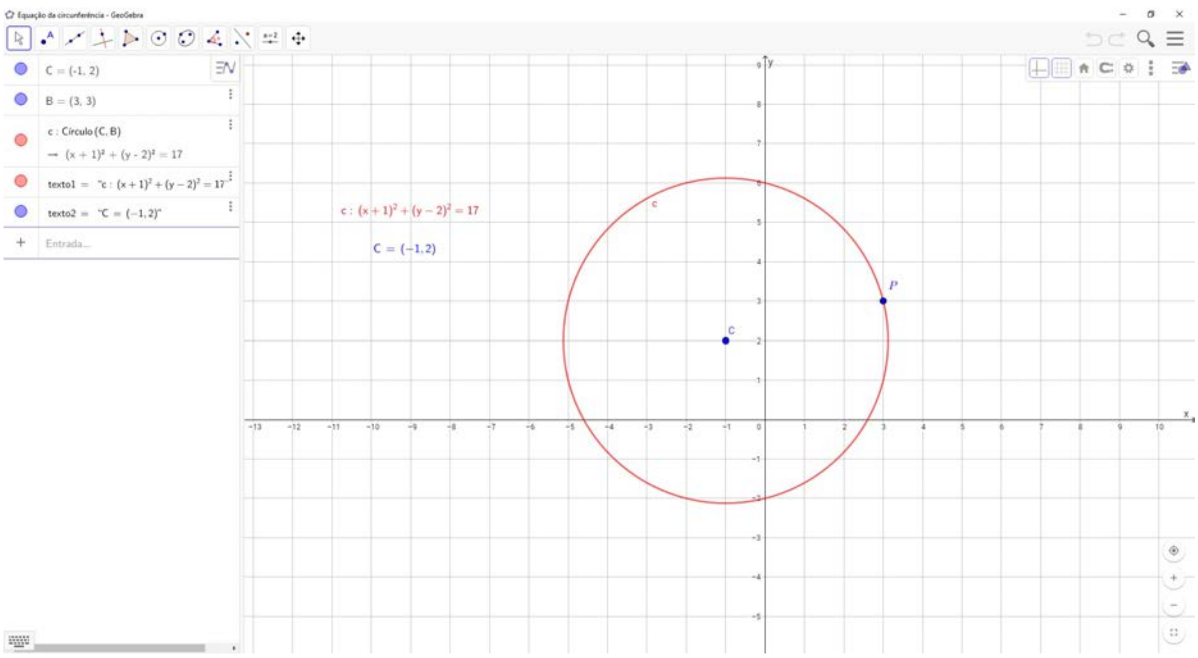
Figura 46 – Atividade de Exploração 5



Fonte: Autoria própria

A **Atividade de Exploração 6** (Figura 47) está associada à equação da circunferência. A circunferência é construída a partir de seu centro C e um ponto P que pertence a ela. Assim, o GeoGebra gera a sua equação, que é alterada conforme as localizações de C e P no plano cartesiano. Nessa atividade, deve ser perceptível que a equação da circunferência assume a forma $(x-a)^2+(y-b)^2=k$. Deslocando-se o ponto P no plano cartesiano, o único parâmetro da equação que se altera é k, de acordo com a distância entre C e P, que representa o raio da circunferência. A relação entre k e o raio r da circunferência é dada por $k=r^2$. Essa relação pode ser notada mais facilmente se o segmento de reta CP for paralelo a algum dos eixos coordenados. Deslocando-se o ponto C no plano, deve-se notar que além da também alteração do parâmetro k, devido à medida do raio, também ocorre mudanças nos parâmetros a e b, que representam as coordenadas do centro da circunferência.

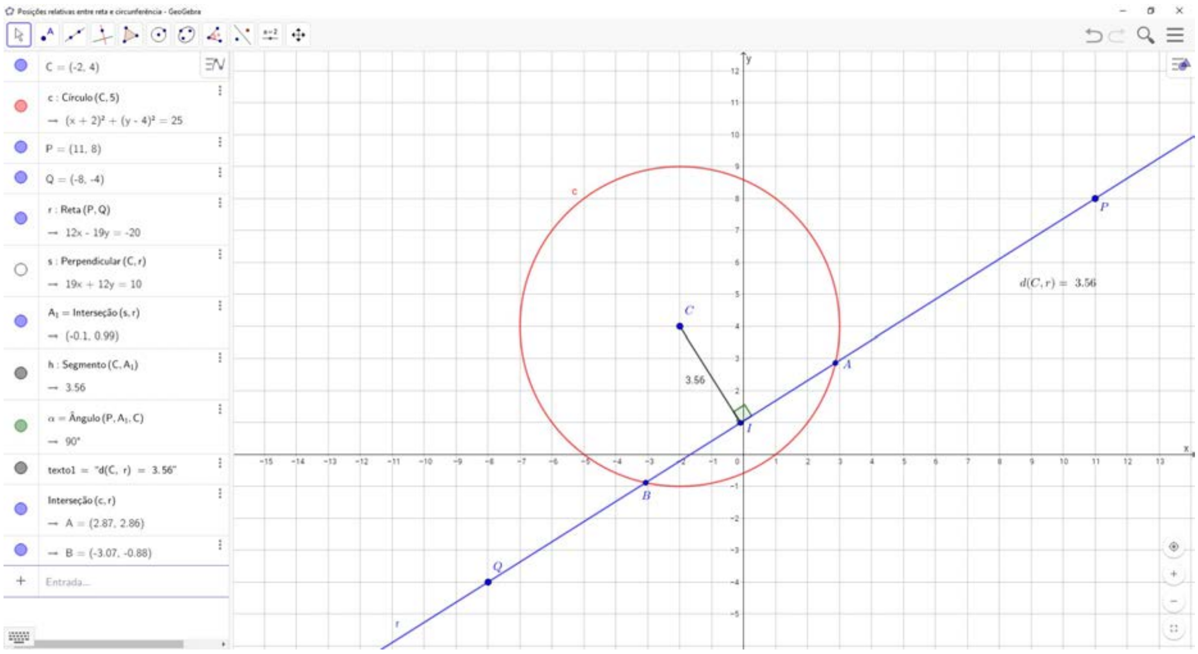
Figura 47 – Atividade de Exploração 6



Fonte: Autoria própria

A **Atividade de Exploração 7** (Figura 48) tem o objetivo de criar condições para que seja possível determinar a posição relativa entre uma reta e uma circunferência dadas as suas equações. É possível, a partir da distância do centro C da circunferência à reta r ($d(C,r)$) e do raio R da circunferência, concluir se a reta é externa, tangente ou secante à circunferência. Deve ser notado que $d(C,r)$ pode ser calculada pela fórmula da distância de um ponto à uma reta (Figura 22). Era esperado que os alunos chegassem ao seguinte resultado: se $d(C,r)>R$ então a reta é exterior à circunferência; se $d(C,r)=R$ então a reta é tangente à circunferência; se $d(C,r)<R$ então a reta é secante à circunferência. Nessa atividade, foi fixado $R=5$.

Figura 48 – Atividade de Exploração 7

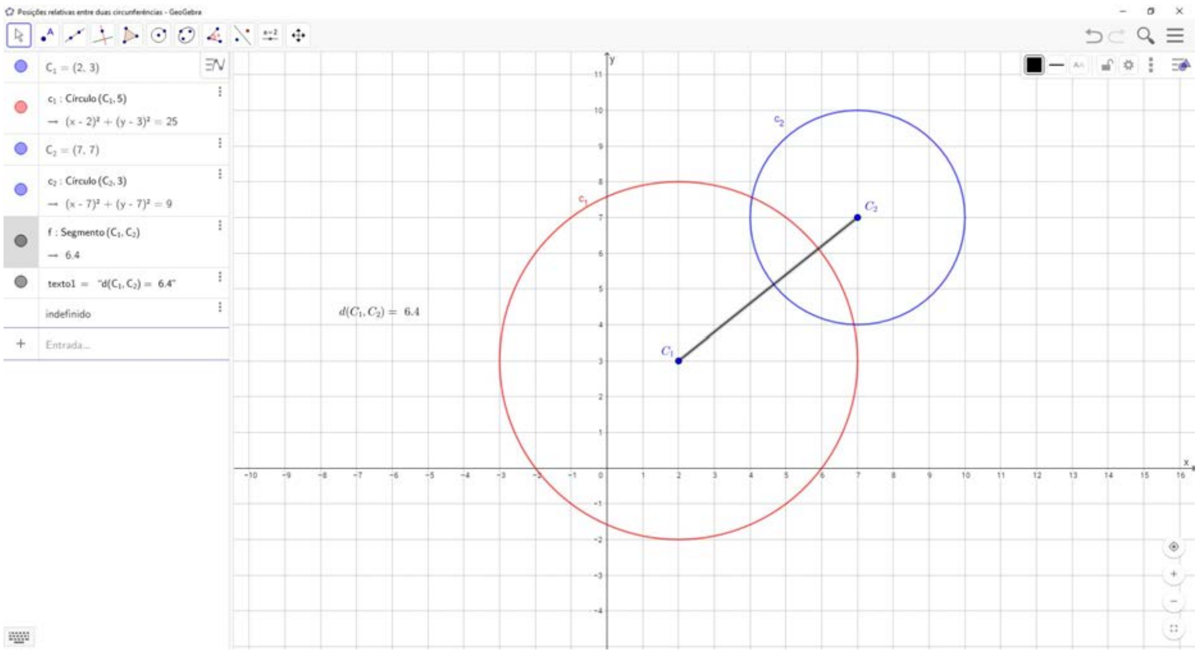


Fonte: Autoria própria

A **Atividade de Exploração 8** (Figura 49) continua tratando de posições relativas, agora entre duas circunferências. São construídas duas circunferências c_1 e c_2 de centros C_1 e C_2 e raios $r_1 = 5$ e $r_2 = 3$. As posições relativas entre as circunferências são obtidas por meio da comparação entre a distância entre C_1 e C_2 ($d(C_1, C_2)$) e as medidas dos raios r_1 e r_2. Os estudantes deveriam chegar ao seguinte resultado: as circunferências são externas se $d(C_1, C_2) > r_1 + r_2$; as circunferências são tangentes externamente se $d(C_1, C_2) = r_1 + r_2$; as circunferências são secantes se $r_1 - r_2 < d(C_1, C_2) < r_1 + r_2$; as circunferências são tangentes internamente se $d(C_1, C_2) = r_1 - r_2$; as circunferências são internas se $d(C_1, C_2) < r_1 - r_2$. Como r_1 e r_2 foram fixados em 5 e 3, respectivamente, não há necessidade de se escrever $|r_1 - r_2|$ ao invés de simplesmente $r_1 - r_2$, porém, a regra geral possui o módulo da diferença entre os raios.

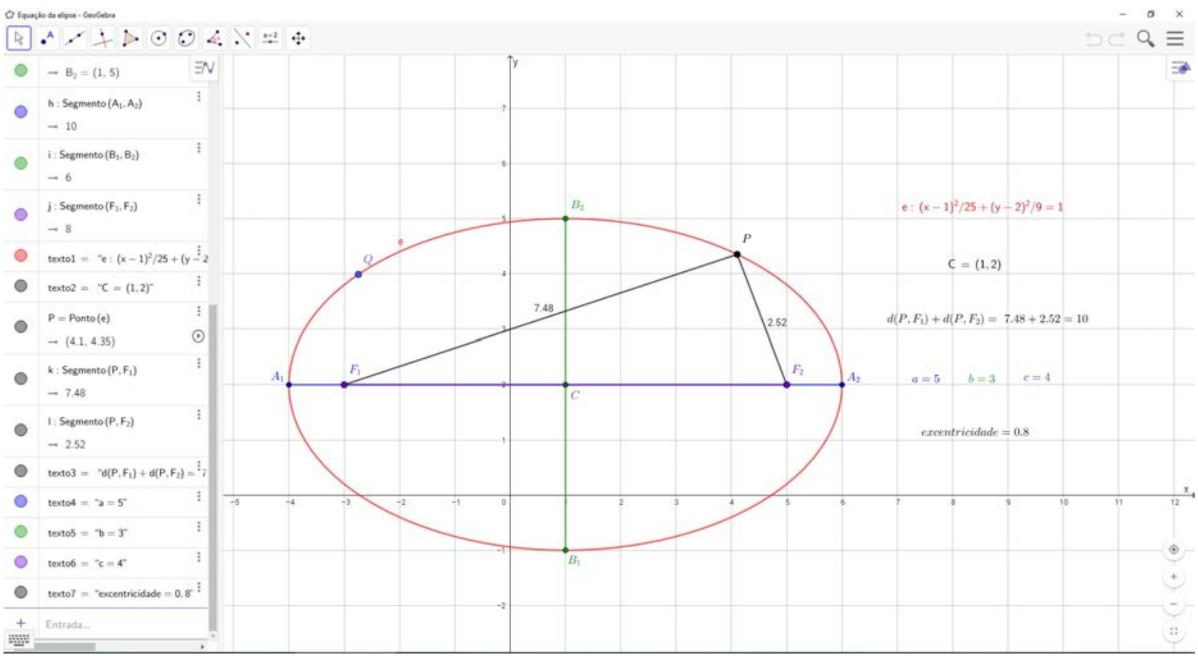
A **Atividade de Exploração 9** (Figura 50) estuda a elipse analiticamente. Uma elipse é construída a partir de seus focos F_1 e F_2 e um ponto Q que pertence a ela. A partir dessa construção, o GeoGebra gera a equação da elipse que pode ser colocada na forma reduzida. Deve-se ter claro que no Ensino Médio estuda-se elipses com eixo focal paralelo a um dos eixos cartesianos. Outros elementos importantes da elipse devem ser observados, como as coordenadas de seu centro C, seus vértices A_1, A_2, B_1 e B_2, as medidas a e b dos semieixos maior e menor e a medida c da semidistância focal. Outro tópico importante é a abordagem da elipse como lugar geométrico dos pontos P que satisfazem $d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a$, tal propriedade pode ser verificada no *softwafe* deslocando-se P sobre a cônica. Por fim, discute-se como a excentricidade da elipse altera a sua forma, deixando-a mais achatada ou arredondada, conforme se aproxima de 1 ou 0, respectivamente. Existe a possibilidade de trabalhar com a relação $a^2 = b^2 + c^2$, para isso, pode ser feito o triângulo retângulo F_1CB_2.

Figura 49 – Atividade de Exploração 8



Fonte: Autoria própria

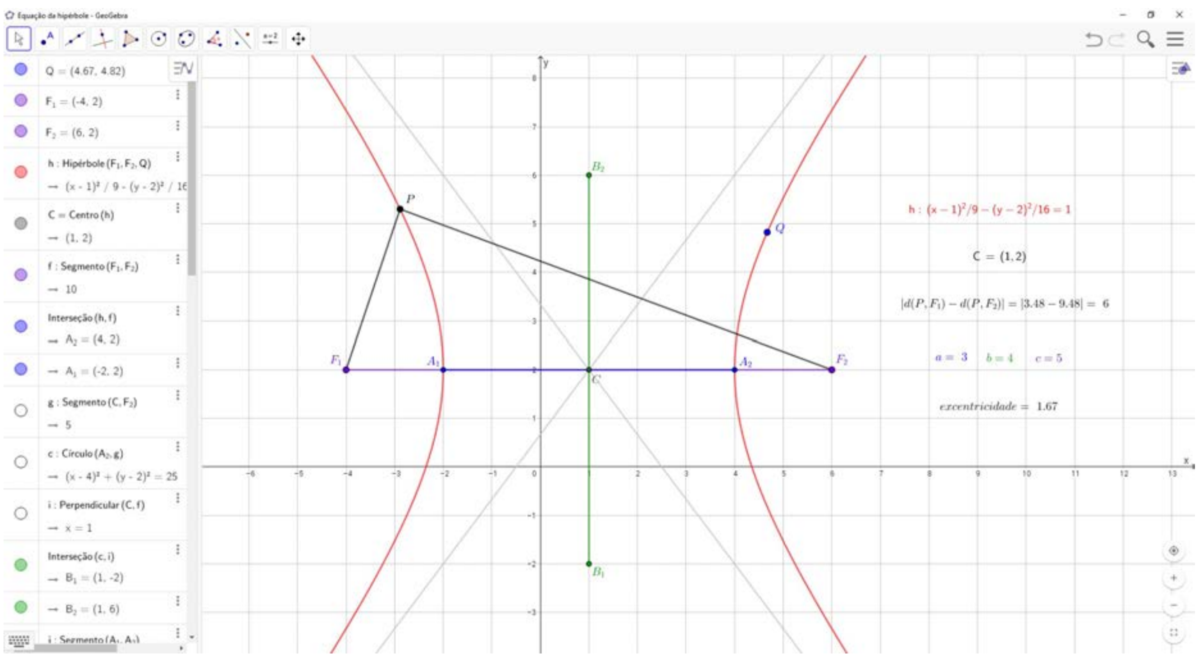
Figura 50 – Atividade de Exploração 9



Fonte: Autoria própria

A **Atividade de Exploração 10** se relaciona ao estudo analítico da hipérbole, sendo, de maneira proposital, muito semelhante à atividade anterior, para que as propriedades possam ser comparadas. Nessa atividade, tem-se uma hipérbole construída a partir de seus focos F_1 e F_2 e um ponto Q que pertence a ela. Novamente, o presente estudo restringe-se aos casos em que a hipérbole possui eixo focal paralelo a algum dos eixos cartesianos. Os elementos discutidos aqui são os mesmos da atividade anterior, sendo eles: as coordenadas do centro C, os vértices A_1, A_2, B_1 e B_2, as medidas a e b dos semieixos real e imaginário e a medida c da semidistância focal. Também é possível verificar a propriedade da hipérbole como lugar geométrico, em que dado um ponto P pertencente à cônica, tem-se: $|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a$ e explorar a forma da hipérbole de acordo com a sua excentricidade, que fica com os seus ramos mais fechados ou abertos, conforme o valor se aproxima de 1 ou tende ao infinito, respectivamente. Uma sugestão de exploração dessa atividade para quem desejar se aprofundar no assunto, que não foi abordada com os alunos neste trabalho, é a possibilidade de estudar as equações das assíntotas da hipérbole, como mostra a Figura 51 na cor cinza.

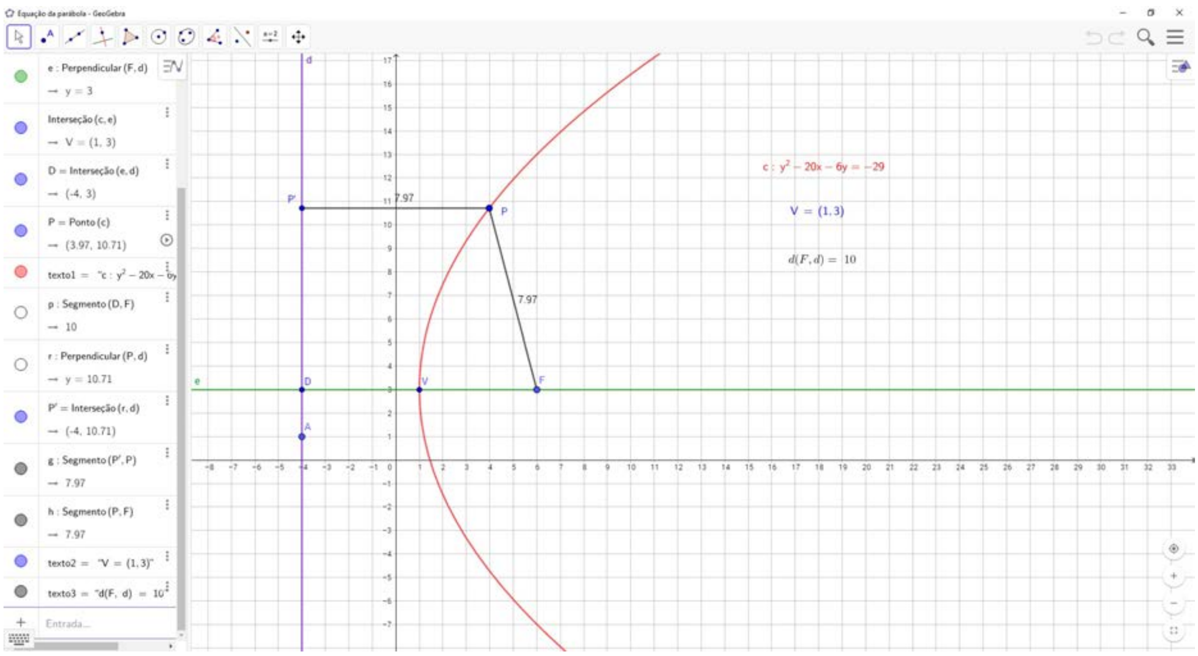
Figura 51 – Atividade de Exploração 10



Fonte: Autoria própria

A **Atividade de Exploração 11** (Figura 52) é a última e tinha como objetivo estudar analiticamente a parábola. Como parábolas com concavidade voltada para cima e para baixo já foram estudadas em função quadrática ao longo do Ensino Médio, optou-se por construir uma atividade cujas parábolas apresentadas têm concavidades voltadas à esquerda e à direita. Porém, uma atividade semelhante que abrange os outros casos também pode ser elaborada. Nessa atividade, a parábola foi construída a partir de um ponto F, que representa o foco da parábola, e uma reta diretriz d, paralela ao eixo das ordenadas. Deve-se observar que a equação da parábola tem a forma $(y - y_V)^2 = \pm 2p(x - x_V)$, onde (x_V, y_V) representa as coordenadas do vértice V e p é a distância entre o foco e a reta diretriz da parábola. O sinal $\pm$ tem relação direta com a concavidade da parábola, se a parábola tiver concavidade voltada à direita o sinal é positivo e, se a parábola tiver concavidade voltada à esquerda, negativo. Todas essas observações deverão ser feitas experimentando-se possíveis posições para o foco e para a reta diretriz da cônica. Por fim, será verificada a condição que cada ponto P da parábola é equidistante do foco F e da reta diretriz d dessa curva, ou seja, $d(P, F) = d(P, d)$.

Figura 52 – Atividade de Exploração 11



Fonte: Autoria própria

Todas as Atividades de Exploração propostas nesta pesquisa poderão ser acessadas e utilizadas a fim de produzir e disseminar conhecimento por professores e alunos. Para isso, será necessário conectar-se à internet, criar uma conta gratuita no GeoGebra e pesquisar pelo nome do autor Thiago Vital. As atividades estão nomeadas de acordo com o Quadro 2, que também expõe o módulo em que foram aplicadas.

Quadro 2 – Atividades de Exploração

Número da atividade	Nome da Atividade de Exploração	Módulo aplicado
1	Baricentro de um triângulo	I
2	Área de um triângulo	I
3	Equação reduzida da reta	II
4	Posições relativas entre duas retas	III
5	Retas perpendiculares	III
6	Equação da circunferência	IV
7	Posições relativas entre reta e circunferência	V
8	Posições relativas entre duas circunferências	V
9	Equação da elipse	VI
10	Equação da hipérbole	VI
11	Equação da parábola	VII

Fonte: Autoria própria

4.5 Listas de problemas

Um problema matemático é "qualquer situação que exija a maneira matemática de pensar e conhecimentos matemáticos para solucioná-la" (DANTE, 2000, p. 10).

Segundo os PCN, a resolução de problemas é uma importante estratégia de ensino. Os alunos

> [· · ·] aprendem a desenvolver estratégia de enfrentamento, planejando etapas, estabelecendo relações, verificando regularidades, fazendo uso dos próprios erros cometidos para buscar novas alternativas; adquirem espírito de pesquisa, aprendendo a consultar, a experimentar, a organizar dados, a sistematizar resultados, a validar soluções; desenvolvem sua capacidade de raciocínio, adquirem auto-confiança e sentido de responsabilidade; e, finalmente, ampliam sua autonomia e capacidade de comunicação e de argumentação (BRASIL, 1998, p. 52).

Dante (2000) classifica os problemas em:

- problemas padrão: não requerem estratégia para a sua resolução, bastando a aplicação direta de um ou mais algoritmos. A tarefa básica para a solução do problema é transformar a linguagem usual em linguagem matemática;
- problemas-processo ou heurísticos: exigem do aluno um tempo para montar um plano de execução, ou seja, em geral, não podem ser traduzidos diretamente para a linguagem matemática. Esse tipo de problema estimula a curiosidade, a criatividade e a exploração;

- problemas de aplicação: também conhecidos como situações-problema. Eles propõem a utilização de técnicas, conceitos e procedimentos para resolver uma situação real;
- problemas de quebra-cabeça: são problemas desafiadores. Geralmente, a sua resolução depende da percepção de um truque ou de um golpe de sorte.

Sabendo da importância da resolução de problemas na construção do conhecimento matemático, nesta etapa do trabalho, os alunos colocaram em prática os conhecimentos adquiridos nas Atividades de Exploração para resolver as Listas de Problemas contidas no Apêndice B. Os problemas selecionados são questões de diversos vestibulares e do ENEM, que tinham como objetivo preparar os estudantes para esses exames. Os itens das listas são, em sua maioria, classificados como problemas-processo ou heurísticos, já que este tipo de problema é mais comum de ser encontrado quando se trabalha com Geometria Analítica.

4.6 Testes

Ao final de cada módulo, foi aplicado um teste aos alunos, com caráter formativo. A avaliação formativa possibilita ao professor e aluno perceber progressos e dificuldades, além de fornecer indicadores sobre possíveis falhas no processo didático (MORAES, 2011). Para que os testes não sejam apenas instrumentos de contabilizar erros, o pesquisador discutirá com os alunos, ao final de cada aplicação, as diferentes maneiras de resolução das questões, as principais dificuldades encontradas e quais foram os conceitos trabalhados. O Geogebra também será utilizado como ferramenta nesta etapa, possibilitando a visualização gráfica do problema. Entretanto, como é necessário atribuir uma nota aos alunos por uma prova, ficou definido que cada um dos 7 testes teria o valor de 2 pontos. Assim, as cinco notas mais altas de um aluno seria contabilizada como a nota da avaliação bimestral. Desse modo o pesquisador não reaplicaria um teste devido a ausência do aluno. Os Testes aplicados estão no Apêndice C.

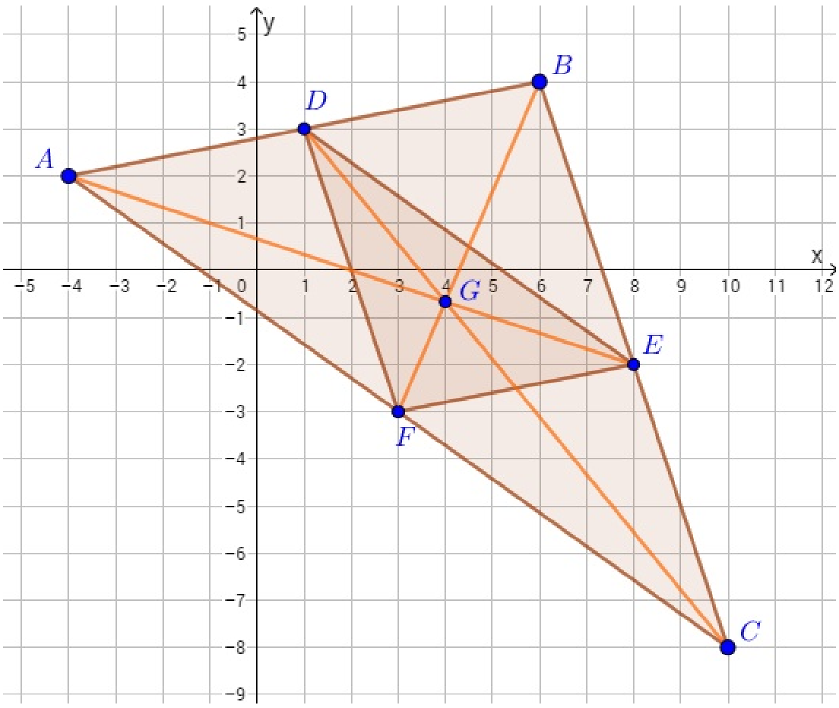
O **Teste 1** (Figura 53) é composto de uma questão dividida em quatro itens, sobre plano cartesiano e ponto. No primeiro item são dados três pontos de um plano: $A(-4, 2)$, $B(6, 4)$ e $C(10, -8)$; é pedido para encontrar a localização de D, E e F, pontos médios dos segmentos de reta AB, BC e CA. Usando a fórmula do ponto médio de um segmento Equação 3.2, obtém-se facilmente $D(1, 3)$, $E(8, -2)$ e $F(3, -3)$.

O segundo item pede a razão entre as medidas dos segmentos de reta EF e AB. Como EF é base média do triângulo ABC, de base AB, conclui-se que $\dfrac{EF}{AB} = \dfrac{1}{2}$. Porém, espera-se que os alunos calculem as medidas desses segmentos, para posteriormente encontrar a razão. Sendo assim, pela fórmula da distância entre dois pontos Equação 3.1, tem-se: $\overline{EF} = \sqrt{26}$ e $\overline{AB} = 2\sqrt{26}$; logo, $\dfrac{EF}{AB} = \dfrac{1}{2}$. Uma possibilidade de discussão dessa questão seria calcular também as razões entre $\overline{DF}$ e $\overline{BC}$ e entre $\overline{DE}$ e $\overline{AC}$, verificando que os triângulos DEF e ABC são semelhantes de razão $\frac{1}{2}$.

O próximo item compara as áreas dos triângulos DEF e ABC. Como a razão de semelhança entre os triângulos, nessa ordem, é $\frac{1}{2}$, então a razão entre as áreas é $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$. Porém, espera-se que os estudantes calculem a área de cada triângulo, e depois a razão. Usando a fórmula da área de um triângulo dadas as coordenadas de seus vértices, conclui-se que as áreas dos triângulos DEF e ABC são 16 u. a. e 64 u. a., respectivamente. Assim, a razão entre as áreas é igual a $\frac{1}{4}$. O docente, ao discutir essa questão com a turma, poderá propor uma reflexão sobre este item. Nota-se que os segmentos de reta DE, EF e FD dividem o triângulo ABC em quatro triângulos de mesma área. Isso permite que sejam criados grupos para que cada um deles calcule a área de um triângulo e observem que as áreas são iguais. A propriedade pode ser demonstrada para qualquer triângulo dividido pelos segmentos de reta cujas extremidades são os pontos médios dos seus lados.

Por fim, no último item, deve-se calcular as coordenadas do baricentro G do triângulo ABC. Através da fórmula das coordenadas do baricentro Equação 3.3, encontra-se $G\left(4, -\frac{2}{3}\right)$. Também pode ser observado que G é baricentro do triângulo DEF. A figura abaixo ilustra a questão.

Figura 53 – Teste 1



Fonte: Autoria própria

O **Teste 2** (Figura 54) é um problema dividido em quatro itens. Os dois primeiros dão condições para encontrar as equações reduzidas de duas retas r e s. A reta r passa pelo ponto $A(2,2)$ e tem coeficiente angular 2. Pela equação fundamental da reta Equação 3.7, obtém-se $r : y = 2x - 2$. A reta s passa pelos pontos $C(2,7)$ e $D(4,1)$. Para obter a sua equação, desenvolve-se:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 2 & 7 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

assim, tem-se $s : y = -3x + 13$.

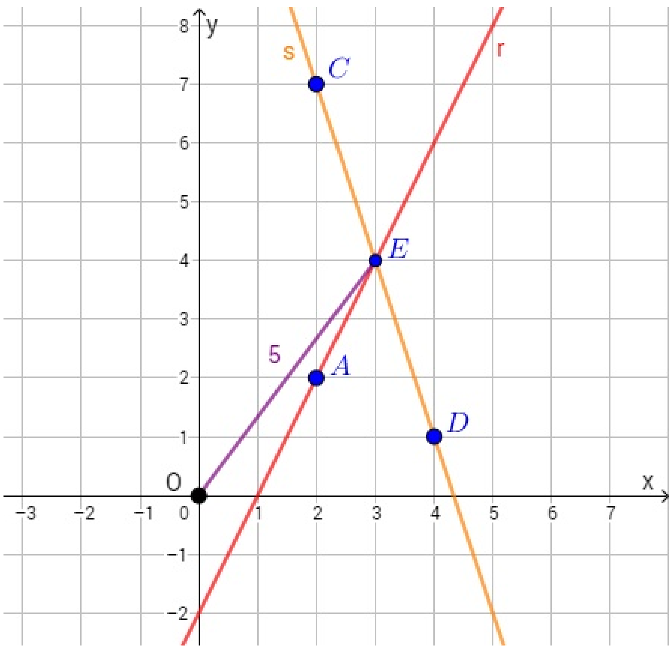
No terceiro item deve ser encontrado o ponto E, interseção entre as retas r e s. De posse das equações reduzidas dessas retas, o problema pode ser solucionado resolvendo-se o sistema:

$$\begin{cases} y = 2x - 2 \\ y = -3x + 13 \end{cases}$$

que possui solução única correspondente ao par ordenado $(3,4)$, coordenadas de E.

No quarto item, que depende dos anteriores, é pedido a distância de $E(3,4)$ à origem. Por meio da Equação 3.1, calcula-se a distância entre os dois pontos, resultando em 5 u. c.

Figura 54 – Teste 2



Fonte: Autoria própria

O **Teste 3** (Figura 55) se inicia com um item já cobrado no teste anterior. São dados dois pontos $A(0,-2)$ e $B(8,4)$ para encontrar a equação da reta r, que passa por eles. Desenvolvendo

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 8 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

obtém-se a equação da reta r, que pode ser dada na forma geral ou reduzida, pois ambas serão úteis nos próximos tópicos. As possíveis respostas são: $y = \frac{3}{4}x - 2$, $-3x+4y+8=0$ e $3x-4y-8=0$.

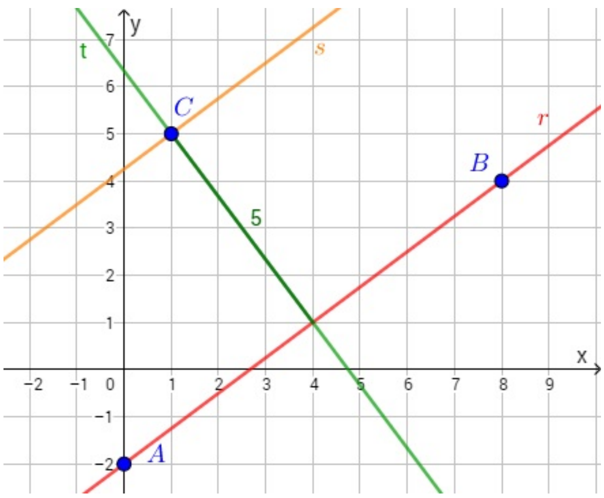
Os próximos dois itens referem-se ao estudo da posição relativa entre duas retas. É dado um ponto C de coordenadas $(1,5)$ e são pedidas as equações das retas s, paralela a r e que passa por C, e t, perpendicular a r e que também passa por C. Considerando que $r \parallel s$, tem-se a igualdade dos coeficientes angulares, logo, $m_s = \frac{3}{4}$. Como $t \perp r$, tem-se $m_r \cdot m_t = -1 \Rightarrow m_t = -\frac{4}{3}$. Conhecendo os coeficientes angulares de s e t e sabendo que ambas passam por $C(1,5)$, usa-se a equação fundamental da reta Equação 3.7 para concluir que $s : y = \frac{3}{4}x + \frac{17}{4}$ e $t : y = -\frac{4}{3}x + \frac{19}{3}$.

O quarto item é relativo à distância de um ponto a uma reta. Deve ser calculada a distância do ponto C à reta r. É importante notar que, como $r \parallel s$ e $C \in s$, tal cálculo equivale à distância entre as retas paralelas r e s. Pela Equação 3.11 (fórmula da distância de um ponto a uma reta) e considerando $r : 3x-4y-8=0$, tem-se:

$$d(C,r) = \frac{|3\cdot 1 - 4\cdot 5 - 8|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}$$

desenvolvendo a expressão conclui-se que a distância entre C e r é igual a 5 u. c.

Figura 55 – Teste 3



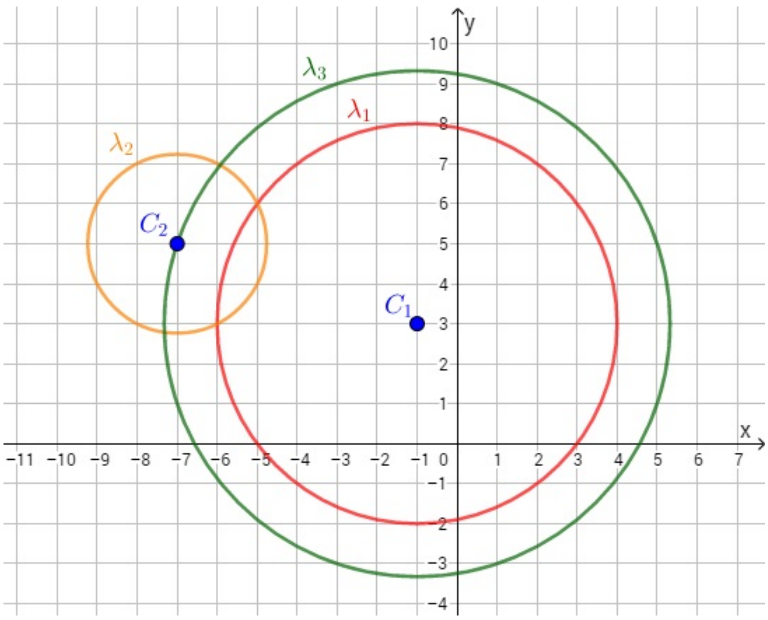
Fonte: Autoria própria

No **Teste 4** (Figura 56) são verificados os conceitos aprendidos sobre o estudo analítico da circunferência. Inicialmente, são dadas duas circunferências λ_1 e λ_2 de equações gerais $\lambda_1 : x^2 + y^2 - 2x - 6y - 15 = 0$ e $\lambda_2 : x^2 + y^2 + 14x - 10y + 69 = 0$ para convertê-las para a forma reduzida. Através do método de completar quadrados, tem-se: $\lambda_1 : (x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 25$ e $\lambda_2 : (x + 7)^2 + (y - 5)^2 = 5$.

O segundo item é uma questão de interpretação das equações reduzidas. Deve-se obter os centros das circunferências λ_1 e λ_2, que são $C_1(-1, 3)$ e $C_2(-7, 5)$, respectivamente, e as medidas dos raios de ambas, que são $r_1 = 5$ u. c. e $r_2 = \sqrt{5}$ u.c.

Por fim, deve ser considerada uma terceira circunferência λ_3, concêntrica à λ_1 e que passa pelo centro da circunferência λ_2. Para determinar a equação de λ_3 são necessárias a localização do centro C_3 e a medida do raio r_3. Os centros de λ_1 e λ_3 são coincidentes, logo, $C_3(-1, 3)$ e, a medida do raio pode ser calculada pela distância entre C_1 e C_2, pois $C_2 \in \lambda_3$. Pela fórmula da distância entre dois pontos Equação 3.1, tem-se $d(C_1, C_2) = r_3 = 2\sqrt{10}$. Portanto, $\lambda_3 : (x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 40$.

Figura 56 – Teste 4



Fonte: Autoria própria

O **Teste 5** (Figura 57) aborda posições relativas à circunferência. No primeiro item é dada a equação da circunferência $\lambda_1 : x^2 + y^2 - 10x - 4y + 20 = 0$ para encontrar a medida do raio r_1 e as coordenadas do centro C_1 de λ_1. Isso pode ser feito transformando a equação dada para a forma reduzida, através do método de completar quadrados. Desse modo, será encontrada a equação $\lambda_1 : (x - 5)^2 + (y - 2)^2 = 9$, o que permite concluir que $r_1 = 3$ e $C_1(5, 2)$.

O segundo item pede a equação geral da reta r que passa pelos pontos $A(0, 1)$

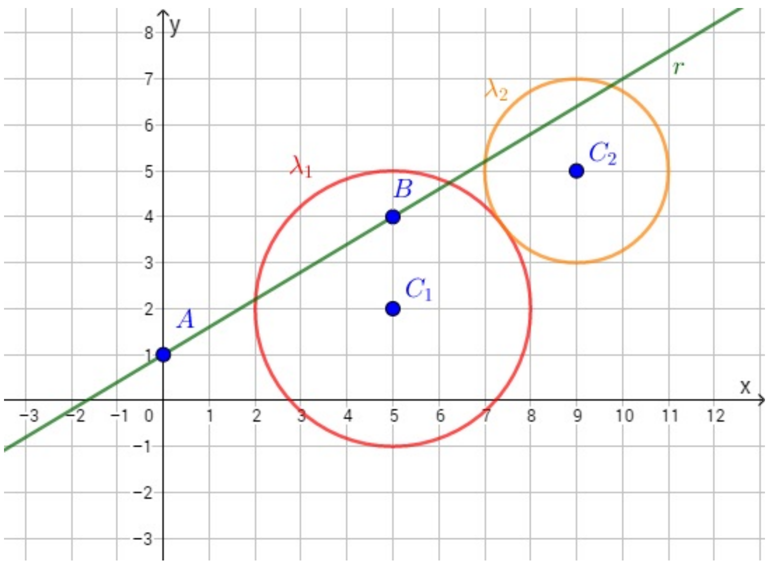
e $B(5,4)$ e a posição relativa entre r e λ_1. A equação da reta r pode ser encontrada resolvendo o determinante:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

assim, encontra-se $r: 3x - 5y + 5 = 0$. A posição relativa entre r e λ_1 pode ser encontrada calculando-se a distância entre C_1 e r, pela fórmula da distância entre um ponto e uma reta Equação 3.11. Logo, conclui-se que $d(C_1, r) = \dfrac{5\sqrt{34}}{17}$; considerando $\sqrt{34} < \sqrt{36} = 6$, é possível perceber que $d(C_1, r) < \dfrac{5 \cdot 6}{17} < 2$. Portanto, a reta r é secante à circunferência λ_1, pois $d(C_1, r) < r_1$.

O terceiro item traz uma nova circunferência λ_2 de centro $C_2(9,5)$ e raio $r_2 = 2$ e pede que seja determinada a posição relativa entre λ_1 e λ_2. Para isso, calcula-se a distância entre os centros $C_1(5,2)$ e $C_2(9,5)$ pela fórmula da distância entre dois pontos Equação 3.1 e encontra-se $d(C_1, C_2) = 5$. Comparando o resultado com as medidas dos raios $r_1 = 3$ e $r_2 = 2$, observa-se que $d(C_1, C_2) = r_1 + r_2 = 5$, o que implica que λ_1 e λ_2 são tangentes exteriormente.

Figura 57 – Teste 5



Fonte: Autoria própria

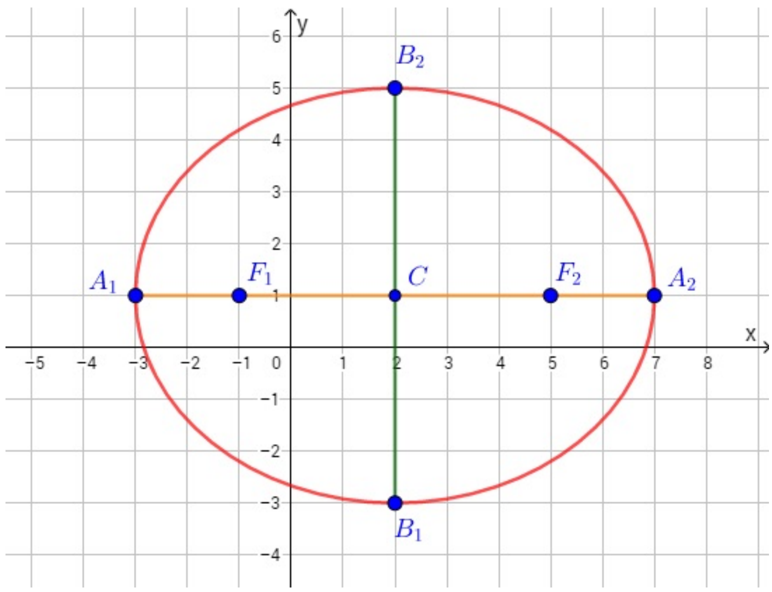
No **Teste 6** (Figura 58), referente ao módulo de estudo analítico da elipse e da hipérbole, o pesquisador optou por elaborar uma questão que aborda apenas o estudo da elipse, que é bastante semelhante ao estudo da hipérbole e mais frequente nos vestibulares. O primeiro item dá a equação geral $16x^2 + 25y^2 - 64x - 50y - 311 = 0$ de uma elipse e pede a equação reduzida dessa cônica. Completando quadrados e fazendo as possíveis simplificações, encontra-se a equação: $\dfrac{(x-2)^2}{25} + \dfrac{(y-1)^2}{16} = 1$.

O segundo item pede as coordenadas do centro C e as medidas dos eixos maior e menor. Pela equação reduzida, tem-se $C(2,1)$, $a = 5$ e $b = 4$, o que implica que o eixo maior mede 10 u. c. e o eixo menor 8 u. c.

O item seguinte demanda que seja calculado o parâmetro c para determinar a distancia focal e a excentricidade da elipse. Usando a relação $a^2 = b^2 + c^2$ Equação 3.14, tem-se $c = 3$. Logo, a distância focal mede 6 u. c. e a excentricidade vale $e = \dfrac{3}{5} = 0,6$.

No último item determina-se as coordenadas dos vértices e dos focos da elipse. Como a elipse tem eixo maior paralelo ao eixo x, para encontrar os vértices A_1 e A_2 que pertencem ao eixo maior, considera-se o centro $C(2,1)$ e soma-se e subtrai-se o valor de $a = 5$ na primeira coordenada de C, obtendo $A_1(-3,1)$ e $A_2(7,1)$. Analogamente, para encontrar B_1 e B_2, vértices que pertencem ao eixo menor, soma-se e subtrai-se $b = 4$ na segunda coordenada de C, encontrando $B_1(2,-3)$ e $B_2(2,5)$. Por fim, para encontrar os focos F_1 e F_2, que estão sobre o eixo maior, é preciso somar e subtrair $c = 3$ da abscissa de C, assim, $F_1(-1,1)$ e $F_2(5,1)$.

Figura 58 – Teste 6



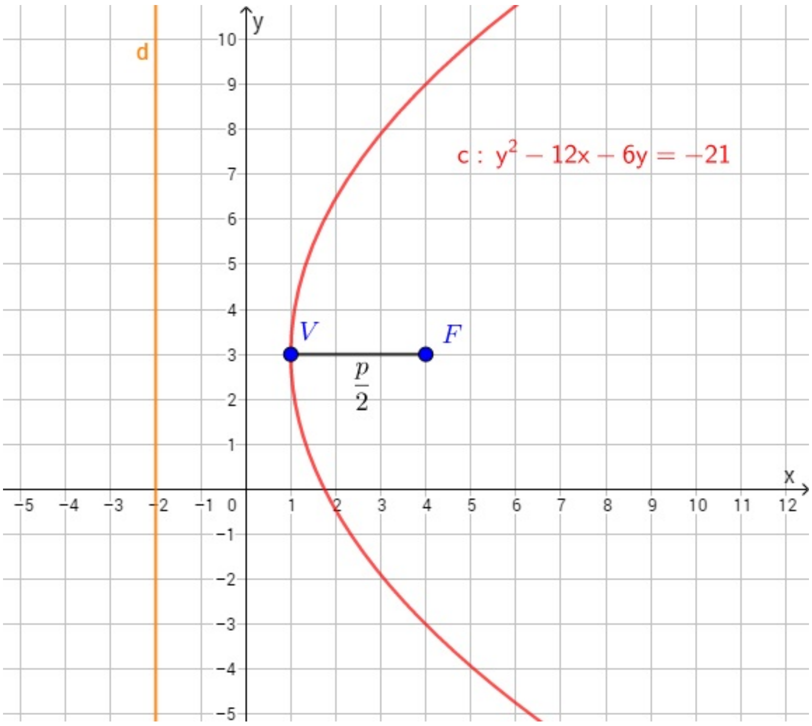
Fonte: Autoria própria

O **Teste 7** (Figura 59) traz uma parábola dados o foco $F(4,3)$ e a reta diretriz $d : x = -2$. O primeiro item pede um esboço da situação e para qual direção está voltada a concavidade da parábola, conclusão que deve ser tomada com o próprio esboço.

No segundo item devem ser determinadas as coordenadas do vértice V da parábola, que corresponde ao ponto médio entre o foco e a diretriz, e o valor do parâmetro p, que representa a distância entre o foco e a reta diretriz. Desse modo, encontra-se $V(1,3)$ e $p = 6$.

No último item devem ser encontradas as equações reduzida e geral da parábola. Como esta tem concavidade voltada à direita, sua equação é dada por $(y-y_V)^2 = 2p(x-x_V)$ Equação 3.26. Substituindo as coordenadas do vértice e o valor do parâmetro na equação, obtém-se $(y-3)^2 = 12(x-1)$ como equação reduzida da parábola, e, desenvolvendo-a, $y^2 - 6y - 12x + 21 = 0$ como equação geral.

Figura 59 – Teste 7



Fonte: Autoria própria

Capítulo 5

A aplicação da sequência didática e análise dos dados

Este capítulo contém a análise dos dados obtidos através da aplicação das Atividades de Exploração, das Listas de Problemas e dos Testes, contidos no Apêndice A, Apêndice B e Apêndice C, respectivamente. A sequência didática aqui proposta foi aplicada entre os dias 03 de agosto e 21 de setembro de 2018. Serão apresentadas de forma detalhada as aulas em que as atividades foram aplicadas, contendo o dia e a duração de cada uma delas, as dificuldades encontradas no caminho, as reações e questionamentos mais importantes dos alunos e as intervenções feitas pelo pesquisador. Para preservar a identidade dos alunos, eles foram identificados por A1, A2, A3, $\cdots$, A26, em ordem alfabética, como consta no diário do professor.

5.1 Aula preparatória

Diante da proposta de uma aula auxiliada pelo *software* GeoGebra e, como manusear o programa era uma novidade para os alunos, fez-se necessário uma aula para introduzir o conteúdo historicamente, instalar o GeoGebra Clássico 6 e apresentar as principais ferramentas que seriam utilizadas.

A aula introdutória aconteceu no dia 03 de agosto. Como a escola não oferece internet aos estudantes, o pesquisador levou o programa em um pen drive para instalá-lo nos notebooks dos 13 alunos que se disponibilizaram a levá-los durante o período que ocorreu essa pesquisa. A instalação durou cerca de 50 minutos e poderia ter sido mais rápida se dois dos computadores tivessem o Java.

Logo no início da aula, foi pedido para que os discentes sentassem-se em duplas, de acordo com as afinidades deles. Foi observado que, enquanto as últimas duplas ainda eram atendidas, as primeiras já arriscavam inserir funções no campo de entrada ou objetos geométricos na janela de gráficos. É interessante ressaltar que o aluno A15, que não estava entre os 13 que levariam o notebook, levou um tablet com o GeoGebra já instalado para também manusear o *software*. Mesmo assim, foi pedido a cada dupla que fosse revezada a função de operar o programa.

Após a instalação do GeoGebra, visando aumentar o interesse e estimular a curiosidade, o pesquisador apresentou o que é a Geometria Analítica, quando e por quem foi desenvolvida. Imediatamente, um nome chamou a atenção, o de René Descartes, que até aquele momento era reconhecido por ser muito importante na filosofia e desconhecido na matemática. A respeito de Pierre de Fermat, acharam curioso o fato de ser advogado por profissão e matemático por diversão, provocando comentários do tipo: “Um advogado brincando de matemática!” e “Assim que se divertiam antigamente?”. Esses comentários mostram que os alunos estavam atentos, interessados e à vontade para interagir com o pesquisador.

Falando um pouco mais sobre Fermat, o pesquisador apresentou o seu último teorema, de fácil compreensão e que talvez tenha sido o mais famoso da história da matemática. Ao entender o teorema e após fazer alguns testes mal-sucedidos de uma contraprova, o aluno A22 pediu ao professor que fizesse a demonstração, que obviamente não foi feita. Porém, em mais uma oportunidade foi visto que a história instiga a curiosidade e a investigação do discente.

Após abordar a história, foram apresentadas algumas ferramentas do GeoGebra, tais como: ponto, interseção de dois objetos, ponto médio ou centro, reta, segmento, reta perpendicular, reta paralela, polígono, círculo dados centro e um de seus pontos, círculo dados centro e raio, elipse, hipérbole, parábola, ângulo, controle deslizante e texto. Essas ferramentas foram apresentadas pois é através delas que se constrói as Atividades de Exploração propostas neste trabalho. Na apresentação das ferramentas elipse e hipérbole surgiram perguntas sobre o que seriam os focos, pois o programa pede que sejam selecionados dois focos e um ponto da elipse ou hipérbole. O pesquisador respondeu que os focos são pontos do plano e que as propriedades dessas cônicas seriam objeto de estudo mais adiante.

Em seguida, foi pedido aos alunos que introduzissem algumas funções no campo de entrada do GeoGebra para que aprendessem a digitar equações matemáticas. Foram sugeridas as seguintes funções: $f(x) = 0,5x+2$, $g(x) = x^2-x+6$, $h(x) = 2^x$ e $i(x) = \operatorname{sen} x$. Como essas funções já foram estudadas através do GeoGebra em outra oportunidade, o aluno A13 estava tentando deslocar a parábola formada pela função g no plano cartesiano para ver possíveis alterações na lei de formação da função. Porém, o *software* não permite a movimentação de gráficos definidos por uma lei de formação fixa. O que o aluno se lembrava vagamente, e que foi feito nessa aula, era criar controles deslizantes, a, b e c e definir uma função $f(x) = ax^2 + bx + c$, para que, alterando os valores dos parâmetros, pudesse ser observado o que acontecia com o gráfico.

Apesar do tempo gasto com a instalação e a apresentação das ferramentas do GeoGebra, a aula foi bastante produtiva. Os estudantes relembraram conceitos de funções, aprenderam a manusear o básico do GeoGebra e alguns comandos da linguagem de programação de textos LaTeX para digitar equações e ficaram curiosos sobre o que estava por vir.

5.2 Módulo I - plano cartesiano e ponto

A aula sobre plano cartesiano e ponto aconteceu no dia 07 de agosto, com duração de 3 períodos de 50 minutos. Os alunos foram dispostos em duplas, de acordo com as preferências de cada um, e estavam em posse do notebook com o GeoGebra.

O pesquisador iniciou a aula apresentando o plano cartesiano, com seus eixos e suas regiões, e definindo a localização de um ponto no plano por meio de um par ordenado de números reais (x, y). Apesar de conhecerem esses conceitos, todos os alunos se preocuparam em fazer as anotações, pedindo tempo para copiar o conteúdo antes que fosse dada a sequência.

Em seguida, foram apresentadas as bissetrizes dos quadrantes ímpares e pares e as equações que as geram no plano cartesiano: $y = x$ e $y = -x$, respectivamente. Como ainda não havia sido abordado o conceito de retas no plano, foi pedido que imaginassem as equações como funções afins, sendo que o mais importante era saber que se um ponto $P(a, b)$ pertence à bissetriz dos quadrantes ímpares então $a = b$ e, se $P(a, b)$ pertence à bissetriz dos quadrantes pares então $a = -b$.

Na sequência, para abordar a distância entre dois pontos, foram feitos dois pontos $A(3, 2)$ e $B(7, 2)$ no plano, para que o segmento de reta AB fosse paralelo ao eixo das abscissas. Foi pedido um método para calcular a distância entre A e B. Como na construção o ponto B estava à direita de A, os discentes disseram que a distância entre os pontos era calculada por $x_B - x_A = 4$. O pesquisador questionou o que aconteceria se os dois pontos fossem trocados de lugar e, foi observado que, nesse caso, $x_B - x_A = -4$. Como a distância entre dois pontos não pode ser negativa, o docente foi além, perguntando como poderia ser validada a relação. A aluna A12 respondeu que, nesse caso, em que o segmento AB é paralelo ao eixo das abscissas, a distância entre A e B seria o módulo da diferença entre x_B e x_A. De modo análogo, foi construído o raciocínio para a distância entre dois pontos quando o segmento de reta cujos extremos são esses pontos fosse paralelo ao eixo das ordenadas.

Ainda discutindo a distância entre dois pontos, foi proposto que calculassem a distância entre $A(1, 1)$ e $B(5, 4)$. Como o segmento de reta AB não era paralelo a algum dos eixos cartesianos, não seria possível utilizar o método anterior. O aluno A20 sugeriu, ao ver o esboço da situação no quadro, que fosse fechado um triângulo, que seria retângulo no ponto

$C(5,1)$, e fosse aplicado o teorema de Pitágoras. Nesse exemplo, os alunos encontraram que $d(A,B) = 5$. O pesquisador mostrou que era possível generalizar essa ideia e obter uma fórmula para calcular a distância entre dois pontos: $d(A,B) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$. Ainda foi analisado que, nessa fórmula, não havia a necessidade de se empregar o módulo, uma vez que o quadrado da diferença entre dois números sempre resulta em um valor positivo. Até esse momento o GeoGebra ainda não havia sido utilizado. No entanto, cada conceito foi construído pelos alunos através de um problema proposto pelo pesquisador.

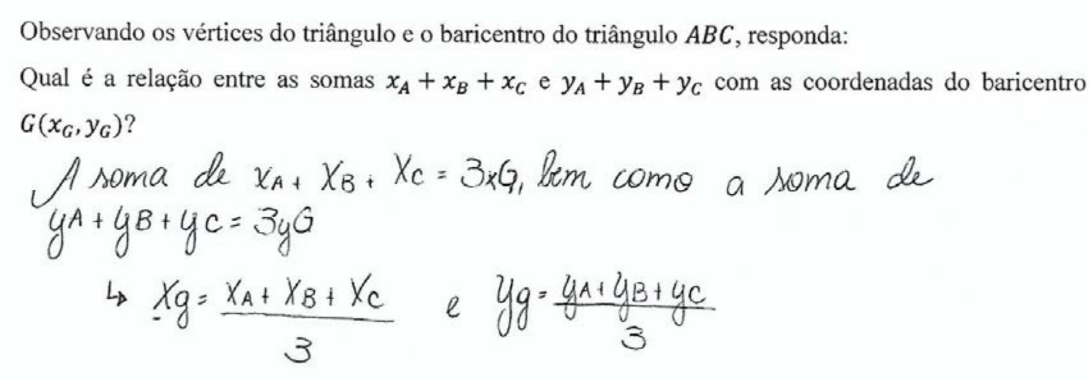
O próximo passo foi determinar as coordenadas do ponto médio de um segmento. Foram marcados dois pontos A e B no GoeGebra e, com a ferramenta ponto médio ou centro, era obtido o ponto médio M. Deslocando A e B no *software* os alunos percebiam o que acontecia com M. Foi observado que a abscissa de M estava entre as abscissas de A e B e, o mesmo ocorria com a ordenada. O pesquisador questionou qual o cálculo que poderia ser feito, conhecendo as coordenadas de A e B, para encontrar as coordenadas de M. Como nenhum aluno soube responder ao questionamento, o pesquisador disse que era através da média aritmética, parecendo depois que era óbvio. Apesar de não ter sido exigido o uso GeoGebra nesse momento, observou-se que cerca de metade das duplas repetiu a construção feita pelo pesquisador para ter autonomia na observação da propriedade.

Em seguida, distribuiu-se uma folha por dupla para a construção da Atividade de Exploração 1 (Apêndice A), que trata do baricentro de um triângulo. Antes de construir a atividade, foi levantado o questionamento sobre o que seria o baricentro de um triângulo. O aluno A15 disse que era o ponto de equilíbrio de um triângulo. A resposta não estava incorreta, mas não era a esperada pelo pesquisador, que continuou com o questionamento. A aluna A12 respondeu em forma de pergunta: “É o ponto de encontro das bissetrizes?”. O professor respondeu que o ponto de encontro das bissetrizes era o incentro. Então o aluno A13 disse que era o ponto de encontro das medianas. O pesquisador perguntou o que era mediana, e o aluno A13 respondeu que era o segmento de reta que ligava o vértice de um triângulo ao ponto médio do lado aposto a ele. O aluno A15, para confirmar a sua resposta, perguntou se o baricentro dividia a mediana na razão de 2 por 1, obtendo uma resposta positiva.

Conhecendo o que era baricentro e medianas, a Atividade de Exploração 1 poderia ser construída. Como foi a primeira atividade, o pesquisador foi solicitado diversas vezes para solucionar alguns problemas, sendo dois mais frequentes. O primeiro foi na criação dos controles deslizantes x_A, y_A, x_B, y_B, x_C e y_C, devido à maneira de digitar os índices, que é semelhante aos comandos linguagem LaTeX foi observado que os alunos tiveram dificuldades nessa adaptação. O segundo problema recorrente foi na criação dos textos, pois algumas duplas criaram o controle deslizante x_A, com o índice maiúsculo, e no texto digitaram x_a, com o índice minúsculo, o que fez com que o texto não reconhecesse o comando. Nesse caso, o pesquisador pediu para que as duplas que tiveram esse problema verificassem a estrutura do comando. Mesmo não sendo todas as duplas que tiveram problemas, a construção demandou bastante tempo.

Após a construção do Atividade de Exploração 1, a observação da relação entre os vértices do triângulo $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ e $C(x_C, y_C)$ e o baricentro $G(x_G, y_G)$ foi muito fácil, talvez pelo fato de terem visto a relação do ponto médio de um segmento a pouco tempo, que é semelhante. As respostas mais frequentes nessa atividade foram: $x_A+x_B+x_C$ é três maior do que x_G e $y_A + y_B + y_C$ é três maior do que y_G; e a própria fórmula que algumas duplas escreveram, $x_G = \dfrac{x_A + x_B + x_C}{3}$ e $y_G = \dfrac{y_A + y_B + y_C}{3}$. A Figura 60 mostra a resposta da aluna A3 e do aluno A16:

Figura 60 – Resposta da Atividade de Exploração 1 da aluna A3 e do aluno A16


Observando os vértices do triângulo e o baricentro do triângulo ABC, responda:

Qual é a relação entre as somas $x_A + x_B + x_C$ e $y_A + y_B + y_C$ com as coordenadas do baricentro $G(x_G, y_G)$?

A soma de $x_A + x_B + x_C = 3xG$, bem como a soma de $y_A + y_B + y_C = 3yG$

$\hookrightarrow Xg = \dfrac{X_A + X_B + X_C}{3}$ e $Yg = \dfrac{y_A + y_B + y_C}{3}$

Fonte: Dados da pesquisa

Dando sequência na aula, foi aplicada a Atividade de Exploração 2 (Apêndice A), sobre área de um triângulo e condição de alinhamento de três pontos. Como a construção da tarefa exigia os mesmos controles deslizantes do anterior, o docente pediu aos alunos que apagassem todos os objetos criados, exceto os controles deslizantes x_A, y_A, x_B, y_B, x_C e y_C. A construção dessa atividade era curta, sendo o texto com o determinante a parte mais trabalhosa, o que exigiu tempo e alguns atendimentos individualizados.

A atividade era composta por duas perguntas, a primeira era qual a relação entre o determinante e a área do triângulo. O pesquisador movimentava os vértices do triângulo fazendo algumas pausas para que fossem comparados os valores. Eram sugeridos vértices com coordenadas inteiras para uma observação mais fácil. As alunas A11 e A12 perceberam a relação olhando a TV, porém, consultaram o professor porque, na atividade montada por elas, a relação não era válida. Foi verificado que no comando do texto criado pelas alunas faltava uma parcela da soma para o valor do determinante, que foi corrigido após a constatação do erro. Alguns alunos disseram que viram a relação, porém em determinados momentos o determinante era negativo. Então o pesquisador perguntou de que maneira eles poderiam representar a relação sabendo que o determinante poderia ser positivo ou negativo. O aluno A22 observou que era possível considerar os dois semiplanos formados pela reta BC e, se o ponto A fosse deslocado para o outro semiplano, o determinante teria o seu sinal trocado. A segunda pergunta nessa tarefa era o que aconteceria se os pontos A, B e C ficassem alinhados. Nesse questionamento não houve interferência do pesquisador, apenas discussão entre os alunos. A Figura 61 mostra a resposta das alunas A18 e A25:

Figura 61 – Resposta da Atividade de Exploração 2 das alunas A18 e A25

Observando a área do triângulo e o valor do determinante, responda:

Qual é a relação entre a área do triângulo ABC e o determinante?

a área do Δ é o módulo do valor da metade da determinante

Ex.: det = -16

área triâng. $= \frac{|-16|}{2} = 8$

O que acontece com o determinante se os pontos A, B e C ficarem alinhados?

o determinante assim como
a área são iguais
a zero.

Fonte: Dados da pesquisa

Ao final da aula, o pesquisador distribuiu a Lista de Problemas 1 (Apêndice B) e pediu aos alunos que os resolvessem individualmente em casa, pois na próxima aula haveria o teste referente a esse módulo.

No dia 10 de agosto, com duração de cerca de 1 hora e 20 minutos, o pesquisador discutiu e resolveu com os alunos as questões que geraram dúvidas da Lista de Problemas 1. Foi observado que todos os alunos tentaram resolver os problemas em casa e estavam preocupados por não terem conseguido resolver todas as questões. Os problemas corrigidos no quadro foram os de número 1, 5, 7, 8, 10, 11 e 12.

A dificuldade em resolver a questão número 1 foi por não terem lembrado da propriedade que em um paralelogramo as diagonais interceptam-se no ponto médio. Para a questão 5, talvez tenha faltado coragem para substituir as coordenadas de A e B na fórmula da distância entre dois pontos e para montar uma equação. O empecilho para resolver o item 7 foi a organização da questão, pois o raciocínio deveria ser que, para descobrir a medida da mediana AM, seria preciso encontrar o ponto médio M de BC e depois calcular a distância entre A e M. Entretanto, a questão que exigiu um maior nível de conhecimento foi a número 12, pois era preciso calcular a área de um triângulo num mapa, dadas as coordenadas dos três vértices, utilizar a escala entre medidas para obter a escala entre as áreas e, consequentemente a área real do triângulo, e, por fim, transformar a unidade de medida de cm^2 para km^2.

Após as correções das questões, a sala foi organizada para a aplicação do Teste 1

(Apêndice C), como mostra a Figura 62, que teve duração de 50 minutos. Estavam ausentes dois alunos, portanto, foram formadas 12 duplas. O pesquisador pediu que todos os testes fossem feitos à caneta, o que deixou muitas duplas perdidas com o tempo, pois optaram por fazer tudo a lápis primeiro para depois passar a caneta. A nota média dos alunos foi de 1,58, no valor de 2 pontos e cinco duplas obtiveram nota máxima.

Figura 62 – Fotografias dos alunos participando do Teste 1

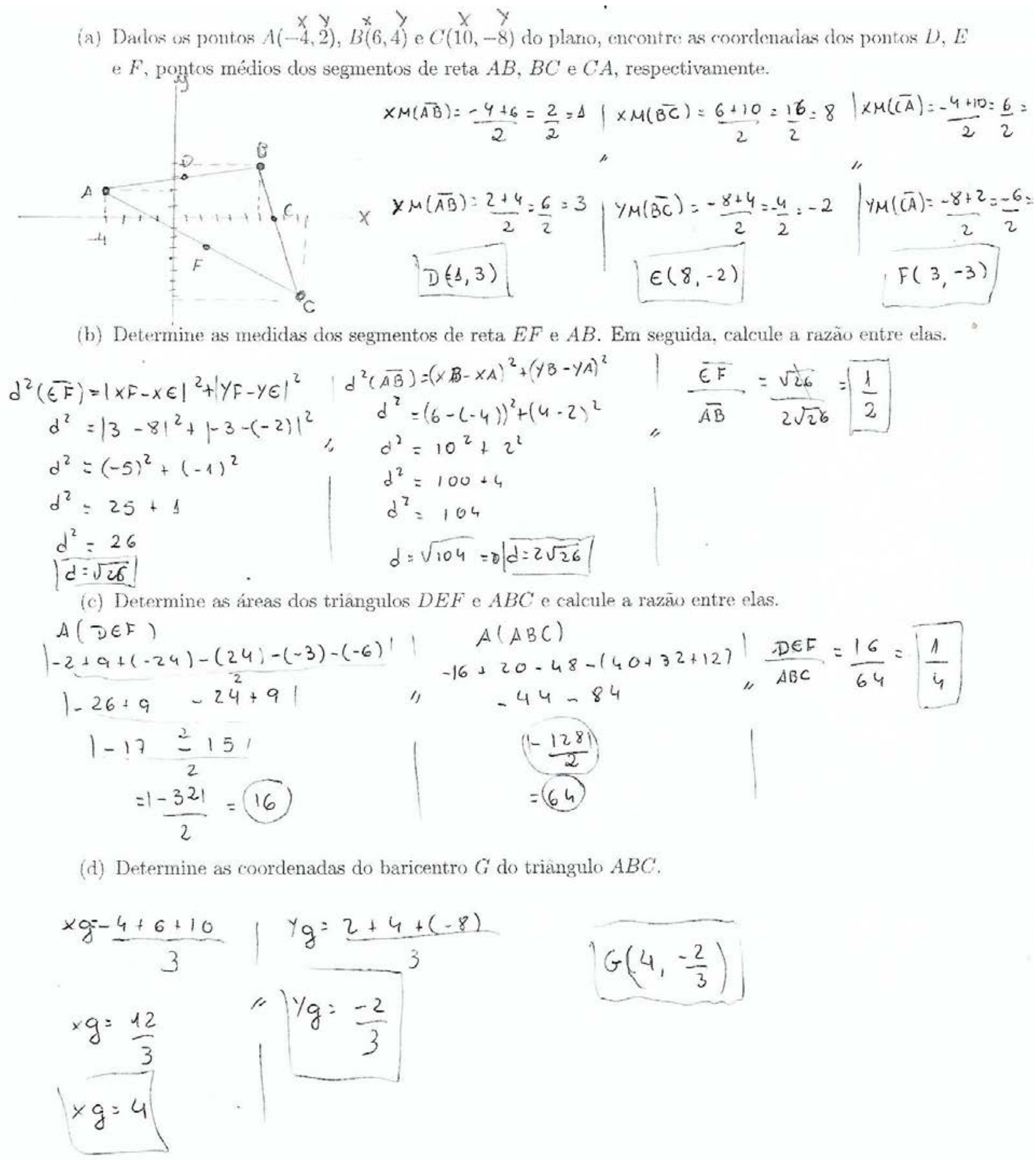
(a)

(b)

Fonte: Acervo do pesquisador

Todas as duplas acertaram o primeiro item, que era preciso calcular os pontos médios de três segmentos de reta. O segundo item teve 10 acertos, um erro e uma resposta em branco. O terceiro item teve apenas cinco acertos, ocasionado por muitos erros nos cálculos dos determinantes. O último item teve apenas um erro, pois a dupla considerou que $x_G = \dfrac{x_A + x_B + x_C}{2}$. As alunas A5 e A21 acertaram todos os itens do teste e fizeram um esboço do problema, como apresentado na Figura 63.

Figura 63 – Resposta do Teste 1 das alunas A5 e A21


(a) Dados os pontos $A(-4, 2)$, $B(6, 4)$ e $C(10, -8)$ do plano, encontre as coordenadas dos pontos D, E e F, pontos médios dos segmentos de reta AB, BC e CA, respectivamente.

$xM(\overline{AB}) = \frac{-4+6}{2} = \frac{2}{2} = 1$ | $xM(\overline{BC}) = \frac{6+10}{2} = \frac{16}{2} = 8$ | $xM(\overline{CA}) = \frac{-4+10}{2} = \frac{6}{2} =$

$yM(\overline{AB}) = \frac{2+4}{2} = \frac{6}{2} = 3$ | $yM(\overline{BC}) = \frac{-8+4}{2} = \frac{-4}{2} = -2$ | $yM(\overline{CA}) = \frac{-8+2}{2} = \frac{-6}{2}$

$\boxed{D(1,3)}$ $\boxed{E(8,-2)}$ $\boxed{F(3,-3)}$

(b) Determine as medidas dos segmentos de reta EF e AB. Em seguida, calcule a razão entre elas.

$d^2(\overline{EF}) = |x_F - x_E|^2 + |y_F - y_E|^2$
$d^2 = |3-8|^2 + |-3-(-2)|^2$
$d^2 = (-5)^2 + (-1)^2$
$d^2 = 25 + 1$
$d^2 = 26$
$\boxed{d = \sqrt{26}}$

$d^2(\overline{AB}) = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$
$d^2 = (6-(-4))^2 + (4-2)^2$
$d^2 = 10^2 + 2^2$
$d^2 = 100 + 4$
$d^2 = 104$
$d = \sqrt{104} \Rightarrow \boxed{d = 2\sqrt{26}}$

$\frac{\overline{EF}}{\overline{AB}} = \frac{\sqrt{26}}{2\sqrt{26}} = \boxed{\frac{1}{2}}$

(c) Determine as áreas dos triângulos DEF e ABC e calcule a razão entre elas.

A(DEF)
$|-2+9+(-24)-(24)-(-3)-(-6)|$ / 2
$|-26+9 \quad -24+9|$
$|-17 \quad -15|$ / 2
$= |-32|$ / 2 $= 16$

A(ABC)
$-16 + 20 - 48 - (40 + 32 + 12)$
$-44 - 84$
$|-128|$ / 2
$= 64$

$\frac{DEF}{ABC} = \frac{16}{64} = \boxed{\frac{1}{4}}$

(d) Determine as coordenadas do baricentro G do triângulo ABC.

$x_g = \frac{-4+6+10}{3}$
$x_g = \frac{12}{3}$
$\boxed{x_g = 4}$

$y_g = \frac{2+4+(-8)}{3}$
$\boxed{y_g = \frac{-2}{3}}$

$\boxed{G\left(4, \frac{-2}{3}\right)}$

Fonte: Dados da pesquisa

Após a avaliação, o aluno A22 disse que o teste foi semelhante às atividades de exploração, pois calcularam ponto médio, área e baricentro do triângulo. O aluno ainda mostrou um rascunho, que ele havia feito durante o teste com um plano cartesiano bem feito e todas as situações bem representadas, e perguntou se os quatro triângulos formados tinham a mesma área. Então o pesquisador mostrou que em qualquer triângulo os três segmentos de reta formados pelos pontos médios dos lados do polígono divide o triângulo em quatro outros de mesma área.

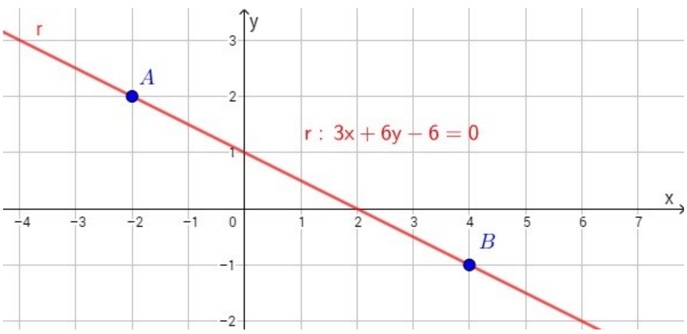
5.3 Módulo II - estudo analítico da reta I

No dia 14 de agosto foi abordado o estudo analítico da reta I, no qual seriam estudadas as equações geral e reduzida de uma reta, as formas de obtê-las e como encontrar o ponto de interseção entre duas retas. Inicialmente, a equação da reta foi definida como uma condição entre x e y para que um ponto $P(x, y)$ pertença a uma reta r. Para obter a equação de r seria necessário o conhecimento de dois pontos $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$, assim, a reta estaria bem definida. Como P, A e B pertencem à reta r, então

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Certamente tais conceitos foram muito abstratos para os alunos, fazendo com que fosse necessário dar um exemplo. Então, o pesquisador propôs que fossem marcados os pontos $A(-2, 2)$ e $B(4, -1)$ no GeoGebra e utilizassem a ferramenta reta para criar uma reta que passasse por A e B. O programa gerou a equação $3x + 6y - 6 = 0$ (ver Figura 80), porém, foi utilizada a equação na forma simplificada $x + 2y - 2 = 0$. Para entender o significado da equação foram feitos alguns testes, observando pontos da reta, tais como $(0, 1)$, $(2, 0)$ e $(6, -2)$, e verificando que eles satisfazem a equação da reta. Também foi usado um ponto fora da reta e verificado que ele não satisfaz a equação.

Figura 64 – Exemplo de equação da reta dado em sala de aula



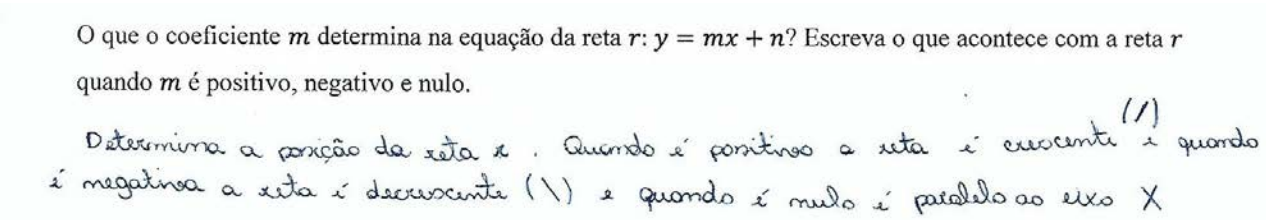
Fonte: Autoria própria

Dado o significado da equação da reta, o pesquisador mostrou que a equação poderia ser dada na forma geral, $ax + by + c = 0$, ou na forma reduzida, $y = mx + n$, bastando, para isso, isolar y na equação geral. Foi ainda mostrado que a equação da reta poderia ser obtida através da condição de alinhamento, se fossem dados dois pontos, ou pela equação fundamental da reta, $y - y_0 = m(x - x_0)$, se fossem dados um ponto $P(x_0, y_0)$ e o coeficiente angular m ou o ângulo de inclinação α, tal que $\operatorname{tg}\alpha = m$.

Dando sequência na aula, era o momento de identificar a localização da reta no plano cartesiano dada a sua equação. Foi utilizada a Atividade de Exploração 3 (Apêndice A) para essa finalidade. Os alunos construíram facilmente a atividade composta por três retas de equações: $r : y = mx + n$, $s : x = c$ e $t : y = k$. Além disso foi marcado o ponto A, interseção entre a reta r e o eixo y.

Primeiramente, a tarefa tinha o objetivo de identificar como o coeficiente m se relacionava com a posição da reta $r : y = mx + n$. Todos os alunos observaram que m alterava a inclinação da reta, sendo a resposta mais frequente que a reta era crescente, decrescente ou constante caso m fosse positivo, negativo ou nulo, respectivamente, aparentemente relembrando o estudo de função afim. A Figura 65 é referente à resposta do primeiro item das alunas A1 e A14.

Figura 65 – Resposta do primeiro item da Atividade de Exploração 3 das alunas A1 e A14


O que o coeficiente m determina na equação da reta r: $y = mx + n$? Escreva o que acontece com a reta r quando m é positivo, negativo e nulo.

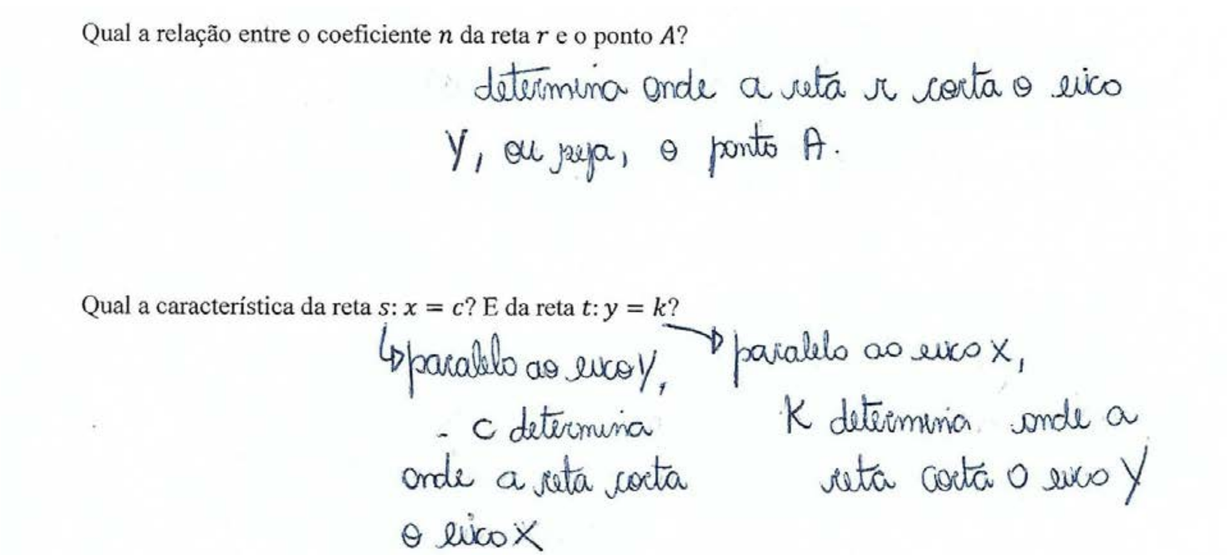
Determina a poxição da reta r. Quando é positivo a reta é crecente (/) e quando é negativa a reta é decrescente (\) e quando é nulo é paralelo ao eixo X

Fonte: Dados da pesquisa

Em relação ao coeficiente linear n da reta $r : y = mx + n$, foi observado relação direta entre ele e o ponto A, interseção de r com o eixo das ordenadas. No entanto, em cerca de metade das atividades, os alunos responderam que n alterava apenas a localização de A, movendo-o para cima ou para baixo, de acordo que o seu valor aumentava ou diminuía, respectivamente. A outra metade respondeu que n era o local que r cortava o eixo y, fazendo referência que n é a ordenada do ponto A.

No último item todas as duplas observaram que a reta $s : x = c$ era paralela ao eixo das ordenadas e $t : y = k$ era paralela ao eixo das abscissas. Entretanto, apenas três duplas observaram que a reta s, além de ser paralela ao eixo x, passava pelo ponto $(c, 0)$ e, a reta t, além de ser paralela ao eixo y, passava pelo ponto $(0, k)$. As alunas A23 e A25 observaram a propriedade, conforme a Figura 66.

Figura 66 – Resposta do segundo e terceiro item da Atividade de Exploração 3 das alunas A23 e A25



Qual a relação entre o coeficiente n da reta r e o ponto A?

determina onde a reta r corta o eixo Y, ou seja, o ponto A.

Qual a característica da reta $s: x = c$? E da reta $t: y = k$?

paralelo ao eixo Y, - c determina onde a reta corta o eixo X

paralelo ao eixo X, K determina onde a reta corta o eixo Y

Fonte: Dados da pesquisa

Depois de entregarem as repostas e olhando rapidamente algumas, o pesquisador organizou as ideias da atividade dando ênfase ao último item, pois julgou ser importante verificar se o conceito não havia sido observado pelos alunos ou se apenas a resposta estava incompleta. Foi constatado um pouco dos dois. Então foi instruído que os estudantes voltassem à atividade e fizessem pequenas pausas em diferentes valores de c e k para visualizar as propriedades.

A aula foi encerrada após a discussão da Atividade de Exploração 3. Ficaram para casa as questões da Lista de Problemas 2 (Apêndice B).

No dia 17 de agosto, foram corrigidas as questões 1, 2, 4, 7, 9, 10, 11 e 12 da Lista de Problemas 2, antes da aplicação do Teste 2. O aluno A20 disse que fez a maioria das questões através de sistemas de equações lineares de duas incógnitas e que não estava conseguindo relacionar a teoria estudada na aula anterior com os problemas propostos. O pesquisador respondeu que não havia problema em resolver as questões através de sistemas, porém, era importante conhecer e saber utilizar as propriedades discutidas na aula anterior.

Algumas questões corrigidas devem ser destacadas nesta pesquisa. A questão 4 é uma delas, pois vários alunos interpretaram que o ângulo de inclinação era de 30°, o que ocasionou um erro de sinal para o coeficiente angular. Foi discutido que, como observado na Atividade de Exploração 3, o erro poderia ter sido identificado, pois foi encontrado um coeficiente angular positivo sendo que a reta é inclinada para baixo. O pesquisador voltou à definição do ângulo de inclinação de uma reta, que nesse caso, seria o suplemento de 30°, ou seja, 150°. Depois disso, relembrou como encontrar a tangente de 150° e deu um tempo para que a turma finalizasse o problema.

Outra questão importante foi a 9, pois era um item que abordava tudo o que foi aprendido nesse módulo. Era preciso encontrar a equação de duas retas, uma dados dois pontos, e outra dados um ponto e o ângulo de inclinação. Em seguida, deveria ser encontrado o ponto de interseção entre as duas retas e, por fim, a distância entre esse ponto e a origem. Como apenas dois alunos conseguiram resolver esse problema, foi dado um tempo para os outros alunos também resolverem. O pesquisador dividiu a questão em etapas, e em cada uma delas era verificado se os alunos haviam chegado ao resultado correto.

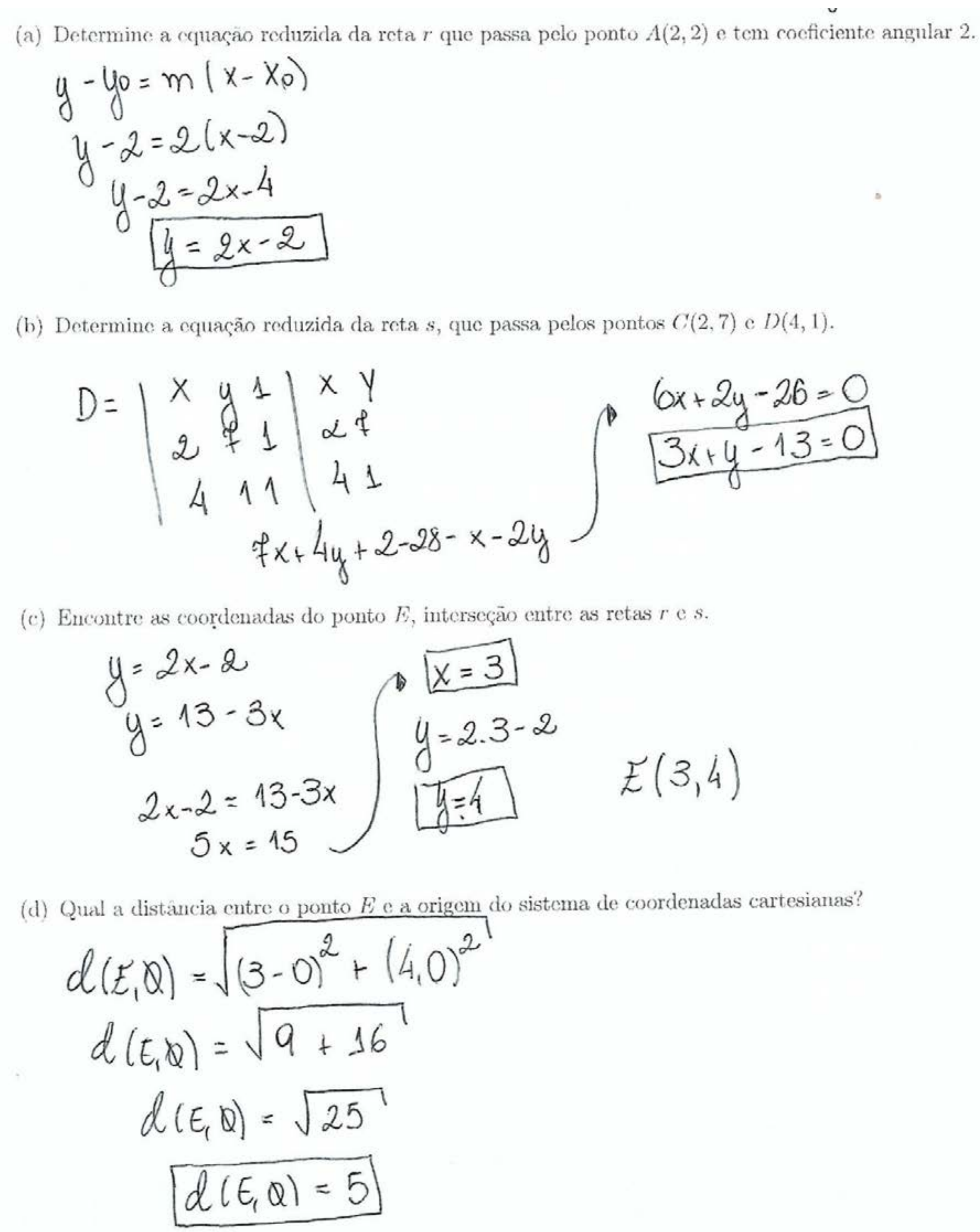
A última questão da lista também merece ser destacada, pois nenhum aluno havia conseguido resolvê-la, alegando que não sabiam por onde começar. O pesquisador esboçou o gráfico das duas retas no plano cartesiano, para que fosse possível organizar o raciocínio e definir as etapas de resolução do problema. Imediatamente, os alunos viram os pontos que deveriam determinar e o quadrilátero que seria formado. Por último, o pesquisador traçou uma diagonal do quadrilátero dividindo-o em dois triângulos. Após a organização do raciocínio, os alunos resolveram a questão.

Na sequência, aconteceu a aplicação do Teste 2 (Apêndice C) para doze duplas presentes. O primeiro item foi feito corretamente por todas elas. As equipes utilizaram a equação fundamental da reta para concluir que r tinha equação $y = 2x - 2$. Já no segundo item, duas duplas, ao chegarem em $y = \dfrac{-6x + 26}{2}$, dividiram apenas 26 por 2, obtendo $y = -6x + 13$, quando o correto seria $y = -3x + 13$, resultado encontrado pelas outras dez duplas.

O terceiro item do teste pediu o ponto de interseção entre as duas retas. Todas as duplas que encontraram corretamente as equações das retas r e s chegaram ao ponto $(3, 4)$. As outras duas equipes chegaram ao ponto $\left(\dfrac{11}{4}, \dfrac{7}{2}\right)$. No último item deveria ser calculada a distância entre o ponto de interseção das retas e a origem. Apenas uma dupla que encontrou o ponto $(3, 4)$ como interseção das retas não acertou o item, deixando-o em branco.

Pode-se considerar que essa avaliação foi muito positiva, pois 75% das equipes conseguiram nota máxima no teste, que teve como média 1,71 pontos por dupla. A Figura 67 mostra a resposta da aluna A3 e do aluno A16, que acertaram todos os itens do teste, apesar de apresentarem a equação reduzida da reta s no item (c).

Figura 67 – Resposta do Teste 2 da aluna A3 e do aluno A16



(a) Determine a equação reduzida da reta r que passa pelo ponto $A(2,2)$ e tem coeficiente angular 2.

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$
$$y - 2 = 2(x - 2)$$
$$y - 2 = 2x - 4$$
$$\boxed{y = 2x - 2}$$

(b) Determine a equação reduzida da reta s, que passa pelos pontos $C(2,7)$ e $D(4,1)$.

$$D = \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 2 & 7 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} x & y \\ 2 & 7 \\ 4 & 1 \end{matrix}$$
$$7x + 4y + 2 - 28 - x - 2y$$
$$6x + 2y - 26 = 0$$
$$\boxed{3x + y - 13 = 0}$$

(c) Encontre as coordenadas do ponto E, interseção entre as retas r e s.

$$y = 2x - 2$$
$$y = 13 - 3x$$
$$2x - 2 = 13 - 3x$$
$$5x = 15$$
$$\boxed{x = 3}$$
$$y = 2.3 - 2$$
$$\boxed{y = 4}$$
$$E(3,4)$$

(d) Qual a distância entre o ponto E e a origem do sistema de coordenadas cartesianas?

$$d(E,O) = \sqrt{(3-0)^2 + (4,0)^2}$$
$$d(E,O) = \sqrt{9 + 16}$$
$$d(E,O) = \sqrt{25}$$
$$\boxed{d(E,O) = 5}$$

Fonte: Dados da pesquisa

5.4 Módulo III - estudo analítico da reta II

O módulo III começou a ser trabalhado no dia 21 de agosto. A primeira ideia a ser desenvolvida foi a de posições relativas entre retas. Para isso, foi utilizada a Atividade de Exploração 4 (Apêndice A). A tarefa foi construída sem dificuldade pelos alunos, que nessa etapa da pesquisa já estavam acostumados a digitar índices com os comandos do programa.

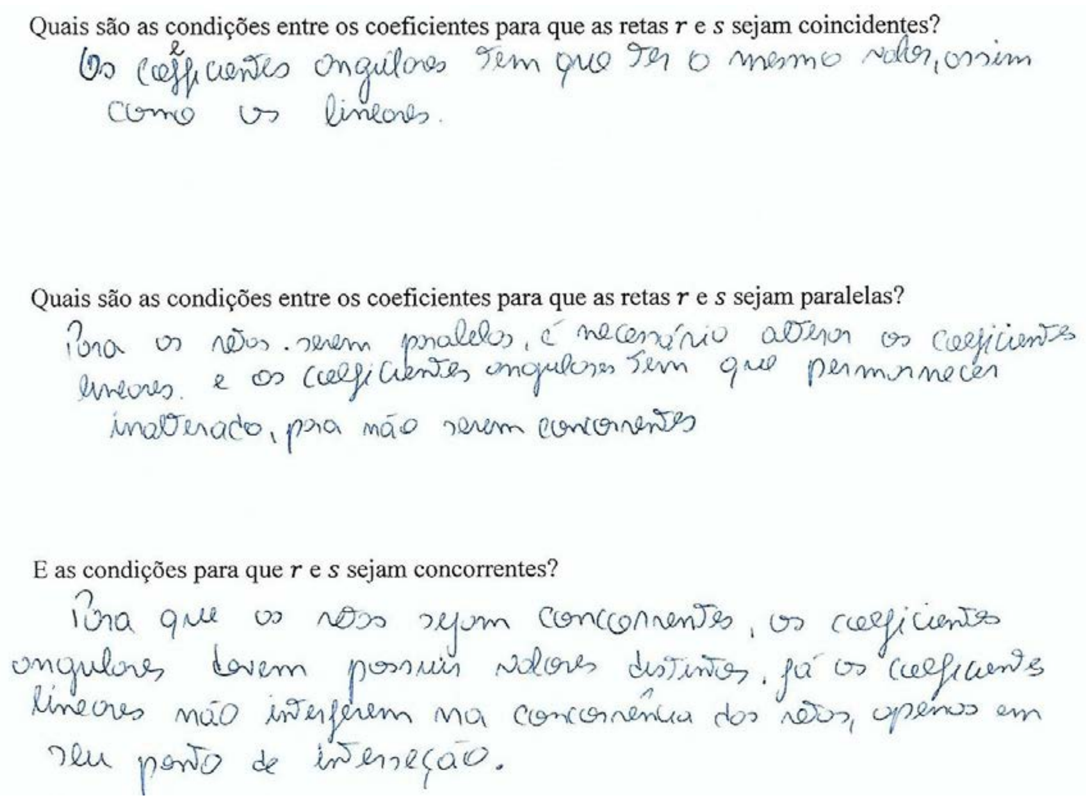
A atividade tinha a finalidade de explorar o GeoGebra para encontrar condições entre os coeficientes angulares e lineares das retas $r : y = m_r x + n_r$ e $s : y = m_s x + n_s$, de modo que as retas fossem coincidentes, paralelas ou concorrentes. Os alunos não entenderam a princípio o que seriam essas condições, por isso não sabiam o que deveria ser observado. O pesquisador então pediu que as retas fossem colocadas em diferentes posições, alterando-se os controles deslizantes m_r, n_r, m_s e n_s no GeoGebra, para que pudesse ser observada a relação entre os coeficientes (Figura 68).

Figura 68 – Participação dos alunos na Atividade de Exploração 4

Fonte: Acervo do pesquisador

As condições encontradas para as retas coincidentes de todas as equipes estavam corretas. Em relação às retas paralelas, duas duplas escreveram apenas que os coeficientes angulares deveriam ser iguais, deixando de observar que os coeficientes lineares deveriam ser, necessariamente, diferentes. A respeito das retas concorrentes, duas duplas não conseguiram observar a condição necessária e outras duas duplas escreveram que os coeficientes angulares deveriam ser diferentes e os lineares iguais. Porém, os coeficientes lineares não mudam a posição relativa entre r e s se $m_r \neq m_s$, apenas indicam que as retas são concorrentes e que o ponto de interseção entre elas pertence ao eixo das ordenadas. É possível observar na Figura 69 a resposta do aluno A10 e da aluna A17, que concluíram, no item (c), que os coeficientes lineares no caso das retas perpendiculares alteravam apenas o ponto de interseção entre as retas.

Figura 69 – Resposta da Atividade de Exploração 4 do aluno A10 e da aluna A17


Quais são as condições entre os coeficientes para que as retas r e s sejam coincidentes?

Os coeficientes angulares tem que ter o mesmo valor, assim como os lineares.

Quais são as condições entre os coeficientes para que as retas r e s sejam paralelas?

Para as retas serem paralelas, é necessário alterar os coeficientes lineares e os coeficientes angulares tem que permanecer inalterado, para não serem concorrentes

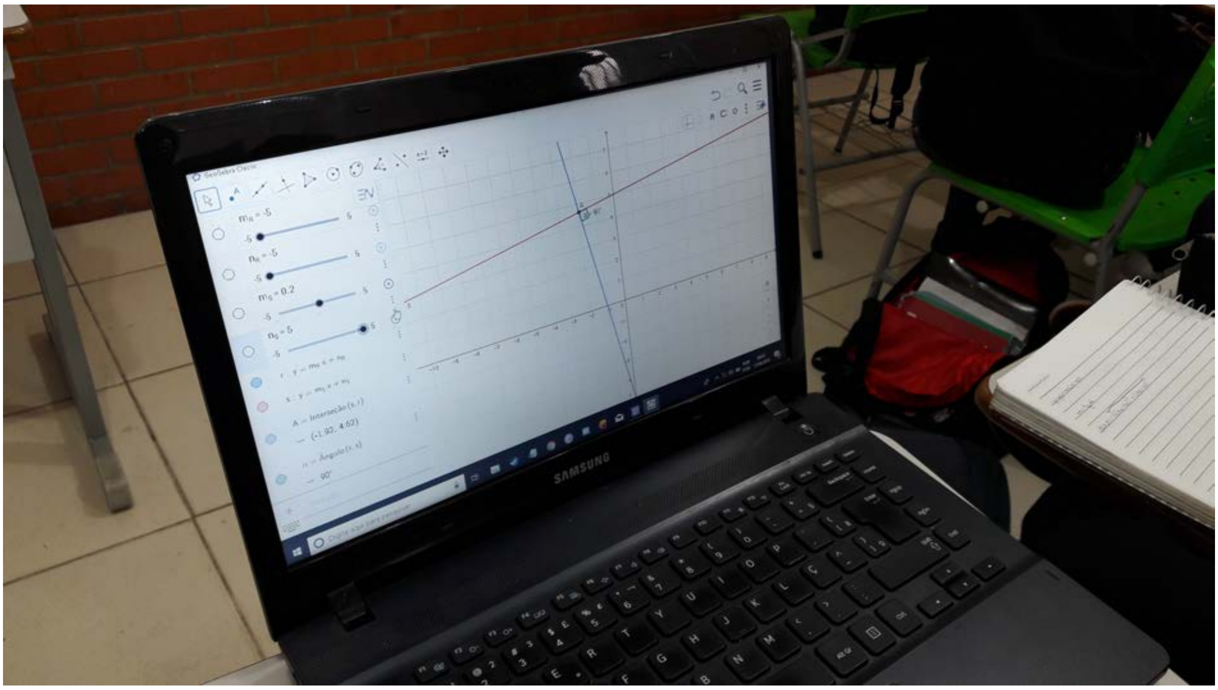
E as condições para que r e s sejam concorrentes?

Para que as retas sejam concorrentes, os coeficientes angulares devem possuir valores distintos, já os coeficientes lineares não interferem na concorrência das retas, apenas em seu ponto de interseção.

Fonte: Dados da pesquisa

Os alunos A8 e A22 perguntaram sobre as retas perpendiculares, se existia alguma condição. O pesquisador respondeu que sim e que a Atividade de Exploração 5 facilitaria a visualização da condição, mas, com um pouco mais de trabalho, também seria possível observar a relação na Atividade de Exploração 4. Os alunos se sentiram desafiados, marcaram o ângulo entre as retas r e s, mostrando afinidade com o GeoGebra, fixaram $m_r = -5$ e alteraram apenas o valor do controle deslizante m_s, até que as retas formassem um ângulo reto. Assim, observaram que $m_r = -5$ e $m_s = 0,2$ deixavam r e s perpendiculares, como consta na Figura 70. No entanto, ainda não haviam percebido a relação. O pesquisador pediu que encontrassem outros valores. Como não estavam conseguindo, foi sugerido fixar $m_r = 1$, dessa maneira conseguiram encontrar $m_s = -1$. O pesquisador perguntou o que poderia ser observado entre -5 e $0,2$ e entre 1 e -1. O aluno A22 percebeu que o produto entre esses valores era igual a -1 e perguntou se essa era a regra. Foi sugerido que ele encontrasse outros valores para confirmar a hipótese.

Figura 70 – Descoberta dos alunos A8 e A22 na Atividade de Exploração 4

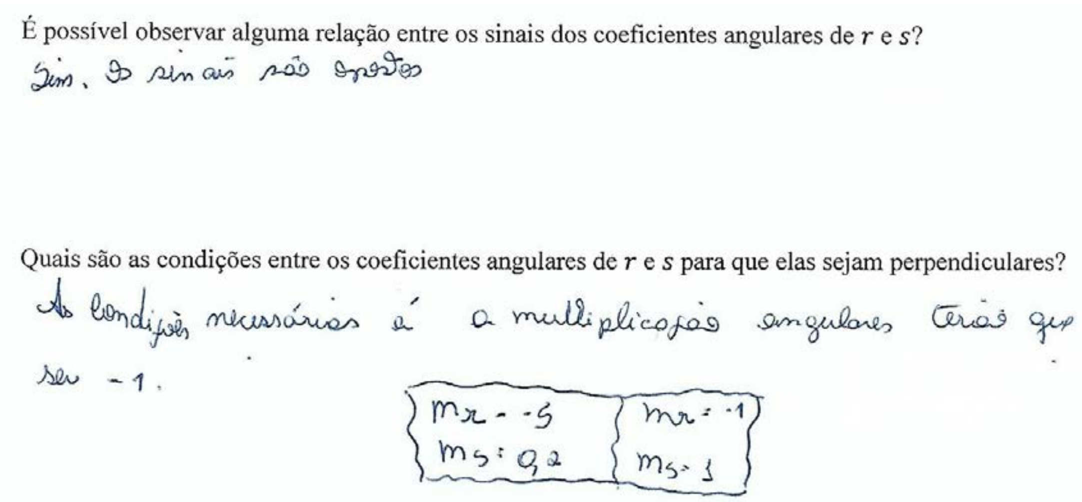


Fonte: Acervo do pesquisador

A Atividade de Exploração 5 (Apêndice A) foi aplicada em seguida para encontrar as condições necessárias entre os coeficientes de duas retas para serem perpendiculares. Foram construídas as retas r, de equação $y = mx + n$, e s, fixada como perpendicular à reta r em um ponto A. A primeira observação a ser feita era que o coeficiente linear não alterava o ângulo formado pelas duas retas, ele modificava apenas o ponto de interseção entre elas. Movendo o coeficiente angular de r, era possível compará-lo com o coeficiente angular de s e perceber que eles tinham sinais opostos. Todas as duplas conseguiram verificar a propriedade.

A situação mais difícil a ser observada era que o produto dos coeficientes angulares é igual a -1. O pesquisador pediu aos alunos que já haviam observado a relação na tarefa anterior que não dessem a resposta aos outros. Foi sugerido que fosse fixado valores inteiros para o coeficiente angular da reta r para facilitar a observação. O docente fez a experiência junto com a turma e anotou no quadro alguns valores observados de m_r e m_s, como -5 e $0,2$, -4 e $0,25$, -2 e $0,5$, -1 e 1. A partir daí, o problema seria encontrar uma relação entre esses pares de valores. Metade das duplas conseguiram observar a condição de perpendicularidade nesse momento, entre elas, a dupla formada pelos alunos A13 e A15, que inclusive deram exemplos de pares de coeficientes angulares que satisfaziam a relação, como mostra a Figura 71. Para a outra metade, foi sugerido que fossem feitas operações simples entre os pares de valores, como adição, subtração, multiplicação e divisão. Ao final da atividade, todos os alunos descobriram a relação.

Figura 71 – Resposta da Atividade de Exploração 5 dos alunos A13 e A15


É possível observar alguma relação entre os sinais dos coeficientes angulares de r e s?

Sim. Os sinais são opostos

Quais são as condições entre os coeficientes angulares de r e s para que elas sejam perpendiculares?

As condições necessárias é a multiplicação angulares terão que ser -1.

$m_r = -5$, $m_s = 0,2$ | $m_r = -1$, $m_s = 1$

Fonte: Dados da pesquisa

A aluna A12 observou na Atividade de Exploração 5 que quando $m_r = 3$, tem-se $m_s = -0,33$, e questionou o pesquisador se mesmo com essa situação era possível afirmar que $mr \cdot m_s = -1$. O pesquisador respondeu que o GeoGebra estava programado para aproximar os valores em duas casas decimais, sendo assim, o valor correto de m_s é $-\dfrac{1}{3}$. A relação de perpendicularidade foi demonstrada após a aplicação da atividade.

Outras fórmulas foram demonstradas e estudadas nesse dia de forma expositiva e dialogada, como as duas fórmulas de um ângulo formado por duas retas, sendo os desenvolvimentos das mesmas feito com a participação ativa dos alunos. Ainda foi estudado a distância entre um ponto e uma reta, sendo esta última fórmula não demonstrada. Além disso, foi dado um exemplo de inequação do 1º grau com duas variáveis para fechar o conteúdo do módulo.

Como ainda restavam 20 minutos para o término da aula, os estudantes começaram a resolver a Lista de Problemas 3 (Apêndice B) em sala. Um fato curioso chamou a atenção na primeira questão da lista. Foram dadas as retas $r : mx + y - 3 = 0$ e $s : 3x + y + k = 0$ para encontrarem valores de m e k para que as retas fossem coincidentes, paralelas e concorrentes. Era esperado que as equações fossem escritas na forma reduzida e então fossem discutidas as posições. A aluna A14, que possui muita dificuldade em Matemática, criou controles deslizantes m e k no GeoGebra e digitou as equações dadas na questão no campo de entrada do *software*. Alterando os valores de m e k a aluna chegou ao resultado correto da questão. Entretanto, o pesquisador interviu no método de resolução da aluna, questionando-a como ela resolveria a questão sem o GeoGebra. Como a aluna não soube responder, o pesquisador ajudou-a com a organização das equações e a discussão dos parâmetros com base nas condições estudadas.

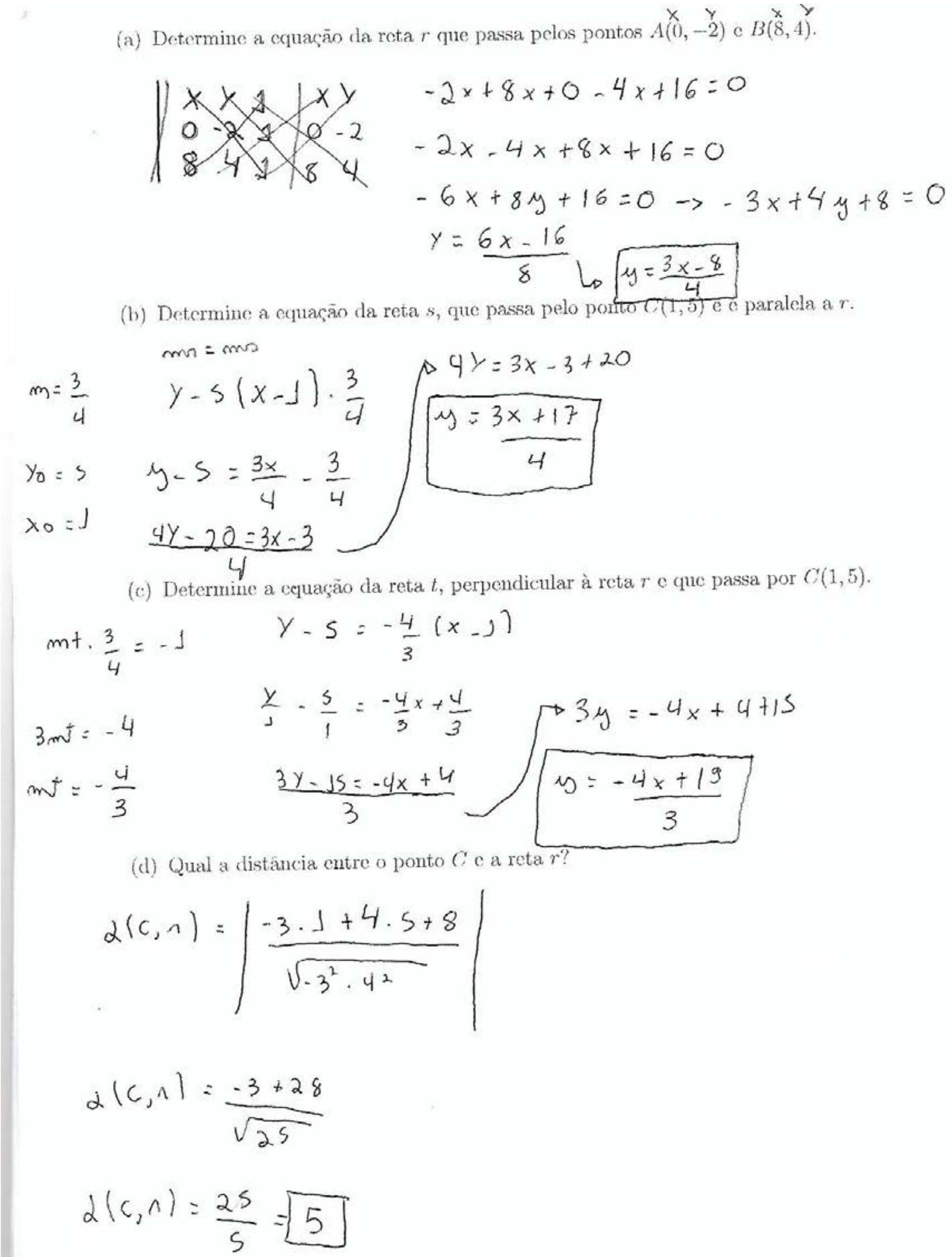
No dia 24 de agosto, com duração de cerca de 1 hora e meia, foram corrigidas todas as questões da Lista de Problemas 3 no quadro. O pesquisador observou que não havia questões simples na lista que não necessitassem de correção. O docente mostrou que a maioria das questões apresentava uma reta e um ponto fora dela e pedia uma reta paralela ou perpendicular à reta dada que passava pelo ponto dado. Foi relembrado que para determinar a equação de uma reta era preciso ter dois pontos ou um ponto e o coeficiente angular da reta, e que este poderia ser encontrado com base na última aula. Nem sempre as questões deixavam explícitos os conceitos sobre paralelismo ou perpendicularidade, os conceitos estavam subentendidos quando era mencionado que as retas não se interceptavam, ou era pedido a equação da reta que contém a altura do triângulo ou ainda a mediatriz de um segmento.

A última questão da lista ganhou importância para os alunos, pois era um item do Enem. Era preciso obter quatro inequações que delimitavam um quadrilátero no plano cartesiano. Os discentes estavam encontrando a equação geral da reta e colocando os sinais $\leq$ ou $\geq$, dependendo da região procurada, o que causou vários erros. Foi instruído que os sinais $\leq$ ou $\geq$ fossem colocados quando a equação fosse apresentada na forma reduzida, para só depois serem colocadas na geral.

Em seguida, o Teste 3 (Apêndice C) foi aplicado com duração de 50 minutos e a presença de 25 alunos, tendo um deles feito o teste individualmente e os demais divididos em doze duplas. Era fundamental que o primeiro item estivesse correto para a sequência do teste, pois os demais dependiam dele. Como não foi determinado a forma que deveria estar a equação da reta r, pois seriam usadas as equações nas formas geral e reduzida, foram obtidas diferentes respostas. Duas duplas obtiveram a equação $y = \dfrac{6x-16}{8}$, que foi aceita na correção. Outras duas duplas deixaram a equação na forma geral, sendo uma $3x - 4y - 8 = 0$ e outra $-3x + 4y + 8 = 0$. Quatro duplas apresentaram a equação $y = \dfrac{3x}{4} - 2$ e três a equação $y = \dfrac{3x-8}{4}$ como resposta. Duas duplas não chegaram a qualquer uma dessas equações. Uma delas teve um erro de sinal, o que resultou em erros nos outros itens, e a outra deixou a equação na forma $8y = 6x - 16$, e nos itens seguintes usou $m_r = 6$.

Duas equipes tiveram erros de sinais e nove acertaram o segundo item, encontrando a equação $y = \dfrac{3}{4}x + \dfrac{17}{4}$ para a reta s. No terceiro item, seis duplas obtiveram $t : y = -\dfrac{4}{3}x + \dfrac{19}{3}$, as outras se perderam na resolução e não conseguiram resolvê-la. Em seis testes, o último item estava correto e em outros dois, houve erro de atenção, sendo um deles no momento de copiar os coeficientes da equação de r para a fórmula, e outro em que os coeficientes a e b da equação geral da reta r foram trocados na fórmula da distância entre um ponto e uma reta. As alunas A5 e A21 obtiveram nota máxima no teste, como mostra a Figura 72.

Figura 72 – Resposta do Teste 3 das alunas A5 e A21



(a) Determine a equação da reta r que passa pelos pontos $A(0,-2)$ e $B(8,4)$.

$-2x+8x+0-4x+16=0$

$-2x-4x+8x+16=0$

$-6x+8y+16=0 \to -3x+4y+8=0$

$y=\frac{6x-16}{8} \to \boxed{y=\frac{3x-8}{4}}$

(b) Determine a equação da reta s, que passa pelo ponto $C(1,5)$ e é paralela a r.

$m_r = m_s$

$m=\frac{3}{4}$ $\quad y-5(x-1)\cdot\frac{3}{4}$

$y_0=5$ $\quad y-5=\frac{3x}{4}-\frac{3}{4}$

$x_0=1$ $\quad \frac{4y-20=3x-3}{4}$

$4y=3x-3+20$

$\boxed{y=\frac{3x+17}{4}}$

(c) Determine a equação da reta t, perpendicular à reta r e que passa por $C(1,5)$.

$m_t\cdot\frac{3}{4}=-1$ $\quad y-5=-\frac{4}{3}(x-1)$

$3m_t=-4$ $\quad \frac{y}{1}-\frac{5}{1}=-\frac{4}{3}x+\frac{4}{3}$

$m_t=-\frac{4}{3}$ $\quad \frac{3y-15=-4x+4}{3}$

$3y=-4x+4+15$

$\boxed{y=\frac{-4x+19}{3}}$

(d) Qual a distância entre o ponto C e a reta r?

$d(c,r)=\left|\frac{-3\cdot1+4\cdot5+8}{\sqrt{-3^2\cdot4^2}}\right|$

$d(c,r)=\frac{-3+28}{\sqrt{25}}$

$d(c,r)=\frac{25}{5}=\boxed{5}$

Fonte: Dados da pesquisa

A nota média dessa avaliação foi de 1,19 pontos. A média baixa nesse teste, próxima de 60% de aproveitamento, pode ser atribuída à falta de atenção no emprego dos sinais e da estrutura do teste, que é composto por uma única questão, cabendo uma avaliação qualitativa mais profunda do processo de resolução dos itens.

5.5 Módulo IV - estudo analítico da circunferência I

No dia 28 de agosto, dando início ao módulo IV, que trata do estudo analítico da circunferência, a aula foi iniciada com a definição de circunferência e, em seguida, foi distribuída a folha com a Atividade de Exploração 6 (Apêndice A), sobre equação reduzida da circunferência.

A atividade foi construída rapidamente pelos alunos. Entretanto, durante o processo, o aluno A20 percebeu um problema na sua construção, pois marcou o centro C da circunferência sobre o eixo das abscissas. Com isso, só era possível deslocar C sobre o eixo x. O pesquisador instruiu que fosse utilizada a ferramenta desvincular objeto para que o ponto C ficasse livre para ser deslocado por todo o plano.

Nessa tarefa, foi construída uma circunferência no plano cartesiano com centro C que passava por P, gerando uma equação da forma $(x-a)^2+(y-b)^2=k$, com $a, b, k \in \mathbb{R}$ e $k > 0$. O primeiro questionamento foi a respeito da localização do ponto P, se ela altera os valores dos parâmetros a, b e k, e de que forma altera. Todos os alunos perceberam que P influenciava somente no valor de k, porém, poucas duplas associaram a definição de circunferência com a maneira que P alterava o valor de k. O pesquisador sugeriu que P fosse colocado de forma que o segmento CP fosse paralelo ao eixo das abscissas. Na sequência, pediu que colocassem P a uma unidade de C, depois a duas unidades, a três, ou seja, alterando a medida do raio, e fazendo que fosse observado que k assumia os valores de 1, 4 e 9, respectivamente. Desse modo, todos os alunos conseguiram obter uma resposta. A aluna A7 respondeu ao primeiro item através da sugestão, como se observa na Figura 73, onde a aluna usou os quadradinhos do plano cartesiano como unidade de medida. Ainda foi pedido que P fosse colocado de modo que o segmento CP deixasse de ser paralelo ao eixo das abscissas, e pelo teorema de Pitágoras, fosse verificada a propriedade.

Figura 73 – Resposta do primeiro item da Atividade de Exploração 6 do aluno A6 e da aluna A7

Deslocando apenas o ponto P no plano cartesiano, nota-se uma mudança na equação da circunferência.

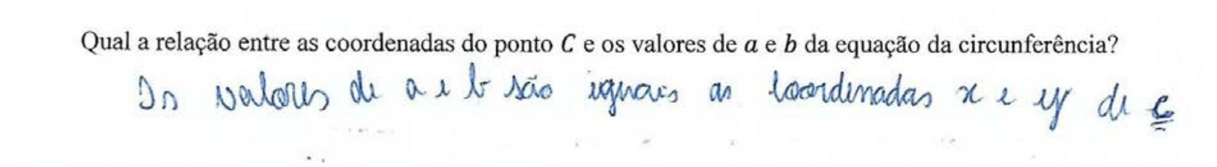
O ponto P altera os valores dos parâmetros a e b? E do parâmetro k? De que forma?

Não, Sim; porque a medida da distancia dos quadradinhos é o ~~dobro~~ quadrado dos resultados. (se for 2 quadrados o resultado será 4.)

Fonte: Dados da pesquisa

A segunda pergunta visava estabelecer relações entre as coordenadas de C e os valores de a e b. Das treze duplas, uma se confundiu com os sinais e respondeu que a e b eram os opostos da abscissa e da ordenada de C, respectivamente. Outra dupla escreveu que a e b equivalem aos módulos das coordenadas de C, ou seja, também tiveram dificuldades com os sinais. As onze duplas restantes responderam corretamente a questão. A Figura 74 exibe a resposta desse item das alunas A2 e A24.

Figura 74 – Resposta do segundo item da Atividade de Exploração 6 das alunas A2 e A24



Fonte: Dados da pesquisa

Enquanto as últimas duplas terminavam de responder a questão da Atividade de Exploração, foi possível perceber a vantagem de se trabalhar em duplas através dos alunos A9 e A20, quando este estava mostrando o significado da equação da circunferência para o amigo, substituindo as coordenadas de um ponto que pertencia à circunferência na equação e mostrando que a igualdade era satisfeita.

Após a aplicação da Atividade de Exploração, o pesquisador organizou as ideias, demonstrou que a equação reduzida de uma circunferência é dada por $(x-a)^2+(y-b)^2 = r^2$, onde (a, b) são as coordenadas do centro C e r é a medida do raio da circunferência. Em seguida, mostrou que desenvolvendo a equação reduzida, era possível chegar a uma outra equação, a geral. Como exemplo, foi fixado, no GeoGebra, $C(-1, 2)$ e $P(2, 3)$. O GeoGebra gerou a equação $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 10$. Desenvolvendo a equação, foi obtido $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 5 = 0$.

O aluno A9 questionou como seria feito se a equação fosse dada na forma geral para obtê-la na forma reduzida. Esse seria o próximo exemplo do professor, que destacou a importância desse exercício para conhecer a localização do centro e a medida do raio da circunferência, que dificilmente são vistos na equação geral. Então, foi ensinado o método de completar quadrados, dando como exemplo a própria equação $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 5 = 0$. Como era algo novo, os próprios alunos pediram que fosse elaborado mais um exercício para que, dessa vez, fosse dado uma oportunidade para eles tentarem encontrar a equação reduzida. Esse último exercício ainda foi usado para encontrar as interseções de uma circunferência com os eixos coordenados, caso existissem.

No dia 31 de agosto, antes de começar a aula, a aluna A25 levou uma dúvida interessante para a aula. Ela encontrou uma questão que relacionava sistemas de equações lineares 2×2 e posições relativas entre retas. O pesquisador voltou ao conteúdo do módulo

III, sobre posições relativas entre retas, e mostrou que sistemas lineares possíveis e indeterminados, impossíveis, e possíveis e determinados, correspondiam a retas coincidentes, paralelas e concorrentes no plano, respectivamente.

Após a abordagem de sistemas lineares, foi iniciada a correção de questões da Lista de Problemas 4 (Apêndice B). Algumas delas não foram resolvidas por parte dos alunos devido a dúvidas simples, como ordenada máxima (questão 5), circunferências concêntricas (questões 7 e 8) e como descobrir a medida do raio de uma circunferência circunscrita a um quadrado (questão 6).

Um erro muito comum deve ser destacado na questão 12 da lista. Os alunos sabiam que a equação de uma circunferência não representa uma função, porém, a questão pedia a função representada por uma semicircunferência, e durante a resolução não foi considerado o passo: $y^2 = 4 - x^2 \Rightarrow y = \pm\sqrt{4 - x^2}$, uma vez que não colocaram o sinal $\pm$. Por isso, ao final da resolução, não analisaram que o sinal correto da função seria o negativo.

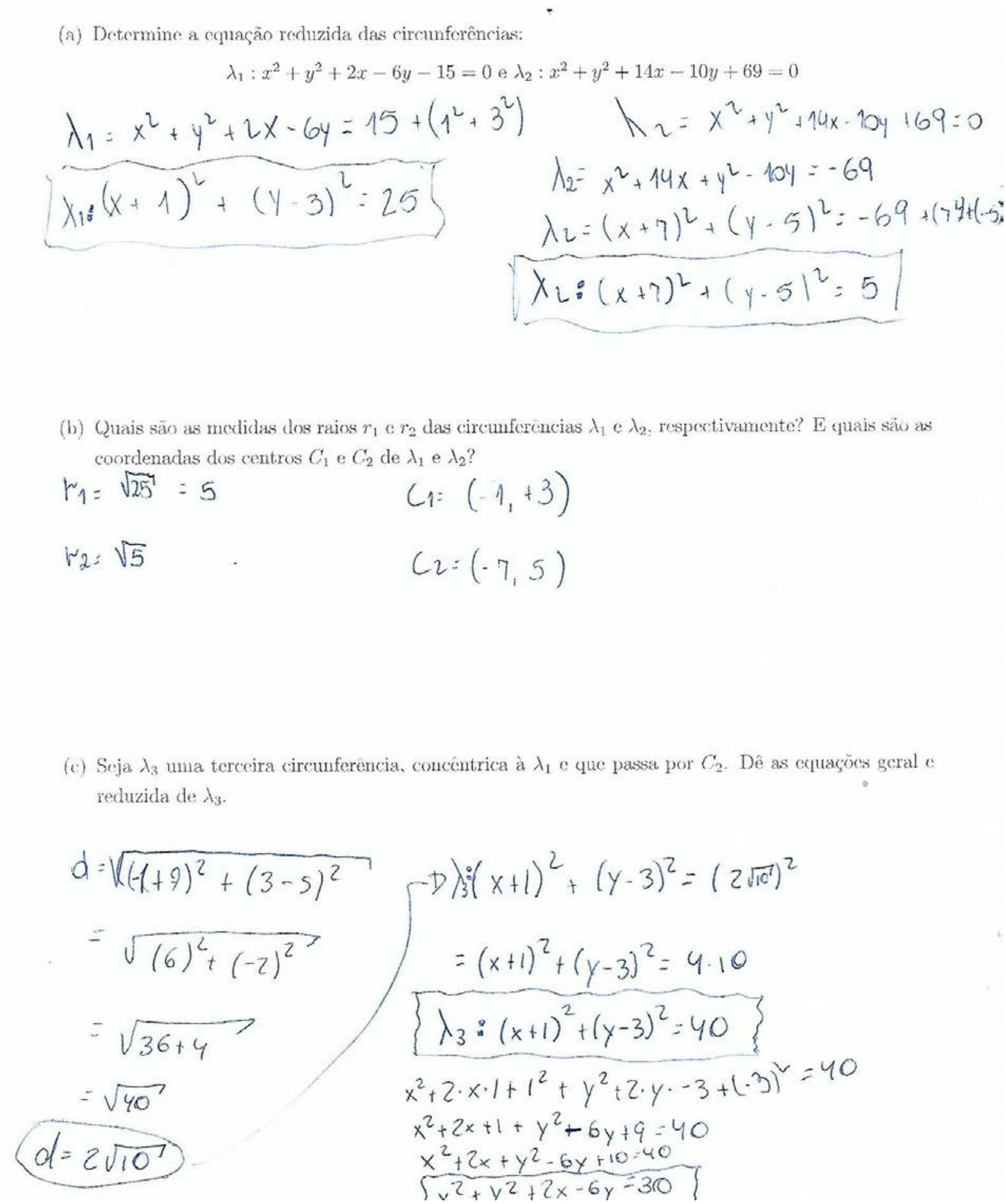
Depois da correção dos problemas e discussão dos principais conceitos abordados no módulo IV, foi aplicado o Teste 4 (Apêndice C). Doze duplas fizeram o teste, que teve nota média de 1,5 pontos por dupla.

O primeiro item do teste apresentava a equação geral de duas circunferências, $\lambda_1 : x^2 + y^2 + 2x - 6y - 15 = 0$ e $\lambda_2 : x^2 + y^2 + 14x - 10y + 69 = 0$, para obtê-la na forma reduzida. Apenas uma dupla errou a questão. Os alunos A10 e A17 não compreenderam corretamente o método de completar quadrados e escreveram as duas equações reduzidas utilizando o quadrado da diferença de dois termos, obtendo $\lambda_1 : (x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 25$ e $\lambda_2 : (x-7)^2+(y-5)^2 = 5$, em vez de $\lambda_1 : (x+1)^2+(y-3)^2 = 25$ e $\lambda_2 : (x+7)^2+(y-5)^2 = 5$. As onze duplas que encontraram as equações reduzidas também acertaram o segundo item, que era determinar as coordenadas do centro e a medida do raio de cada circunferência.

No último item deveria ser encontrada a equação da circunferência λ_3, concêntrica a λ_1 e que passava pelo centro de λ_2. Como as coordenadas do centro de λ_3 estava determinada, faltava calcular a medida do raio. Uma dupla tentou usar a fórmula de distância entre ponto e reta para calcular a medida do raio, e outra, apesar de encontrar o valor corretamente, não soube utilizá-lo para formar a equação. Quatro equipes encontraram a equação reduzida $\lambda_3 : (x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 40$, mas duas desenvolveram o primeiro membro e igualaram o resultado a zero e duas erraram o desenvolvimento do produto notável, resultando em erro da equação geral obtida. As outras cinco duplas acertaram o item e tiveram nota máxima no teste. A Figura 75 apresenta a resolução dos alunos A9 e A20.

Ao final do teste, restando 20 minutos de aula, a questão foi discutida com o uso do GeoGebra. Alguns alunos, percebendo que não obtiveram a equação geral de λ_3, pediram para ver o erro que tinham cometido e lamentaram a falta de atenção. De maneira geral, a avaliação teve resultados positivos, grande parte dos alunos estavam preparados para o próximo módulo. Os membros da dupla que não souberam completar quadrados disseram que não estudaram para o teste por falta de tempo. Foi aconselhado estudar o método de completar quadrados e em caso de dúvidas procurar o pesquisador na aula seguinte.

Figura 75 – Resposta do Teste 4 dos alunos A9 e A20



(a) Determine a equação reduzida das circunferências:

$$\lambda_1 : x^2 + y^2 + 2x - 6y - 15 = 0 \text{ e } \lambda_2 : x^2 + y^2 + 14x - 10y + 69 = 0$$

$\lambda_1 = x^2 + y^2 + 2x - 6y = 15 + (1^2 + 3^2)$

$\boxed{\lambda_1 : (x+1)^2 + (y-3)^2 = 25}$

$\lambda_2 = x^2 + y^2 + 14x - 10y + 69 = 0$

$\lambda_2 = x^2 + 14x + y^2 - 10y = -69$

$\lambda_2 = (x+7)^2 + (y-5)^2 = -69 + (7^2) + (-5^2)$

$\boxed{\lambda_2 : (x+7)^2 + (y-5)^2 = 5}$

(b) Quais são as medidas dos raios r_1 e r_2 das circunferências λ_1 e λ_2, respectivamente? E quais são as coordenadas dos centros C_1 e C_2 de λ_1 e λ_2?

$r_1 = \sqrt{25} = 5$ $\quad C_1 = (-1, +3)$

$r_2 = \sqrt{5}$ $\quad C_2 = (-7, 5)$

(c) Seja λ_3 uma terceira circunferência, concêntrica à λ_1 e que passa por C_2. Dê as equações geral e reduzida de λ_3.

$d = \sqrt{(-1+7)^2 + (3-5)^2}$

$= \sqrt{(6)^2 + (-2)^2}$

$= \sqrt{36+4}$

$= \sqrt{40}$

$d = 2\sqrt{10}$

$\Rightarrow \lambda_3 : (x+1)^2 + (y-3)^2 = (2\sqrt{10})^2$

$= (x+1)^2 + (y-3)^2 = 4 \cdot 10$

$\boxed{\lambda_3 : (x+1)^2 + (y-3)^2 = 40}$

$x^2 + 2 \cdot x \cdot 1 + 1^2 + y^2 + 2 \cdot y \cdot -3 + (-3)^2 = 40$

$x^2 + 2x + 1 + y^2 - 6y + 9 = 40$

$x^2 + 2x + y^2 - 6y + 10 = 40$

$\boxed{x^2 + y^2 + 2x - 6y = 30}$

Fonte: Dados da pesquisa

5.6 Módulo V - estudo analítico da circunferência II

O módulo V, sobre o estudo analítico da circunferência II, foi iniciado dia 04 de setembro. Nesse módulo, foram trabalhadas as inequações do 2º grau com duas variáveis e posições relativas entre reta e circunferência e entre duas circunferências.

O primeiro tópico a ser discutido foi o de inequações do 2º grau com duas variáveis, o qual foi feito de forma expositiva. Os alunos já estavam organizados em dupla e de posse do GeoGebra nesse momento. Foi exposto que inequações do 2º grau com duas incógnitas representava regiões no plano cartesiano relacionadas à equação de uma circunferência, podendo a região ser no interior ou exterior da circunferência, dependendo do sinal de desigualdade empregado. O aluno A9, curioso para verificar se o GeoGebra exibia a região, deu entrada na inequação $(x-2)^2+(y+3)^2 \geq 9$, que foi utilizada como exemplo pelo professor, e chamou-o para mostrar o resultado. Aproveitando a oportunidade, as outras duplas também fizeram o experimento.

Logo após, foi aplicada a Atividade de Exploração 7 (Apêndice A) para tratar de posições relativas entre reta e circunferência. A construção da atividade foi feita, passo a passo, com a orientação do pesquisador. O objetivo era comparar a distância do centro C da circunferência λ à reta r com o raio R, fixado em $R = 5$. Além disso, o pesquisador pediu aos alunos que colocassem na folha de respostas uma maneira de determinar a distância entre C e r. Onze das doze duplas presentes observaram e escreveram corretamente as relações, como mostra a Figura 76, com as respostas das alunas A2 e A24. Os alunos A13 e A15 interpretaram mal a atividade, confundindo inequações do 2º grau com duas variáveis e posições relativas entre reta e circunferência.

Figura 76 – Resposta da Atividade de Exploração 7 das alunas A2 e A24

Externa à circunferência:

R: A distância é maior que o raio

Tangente à circunferência:

R: A distância é igual ao raio

Secante à circunferência:

R: Distância menor que o raio

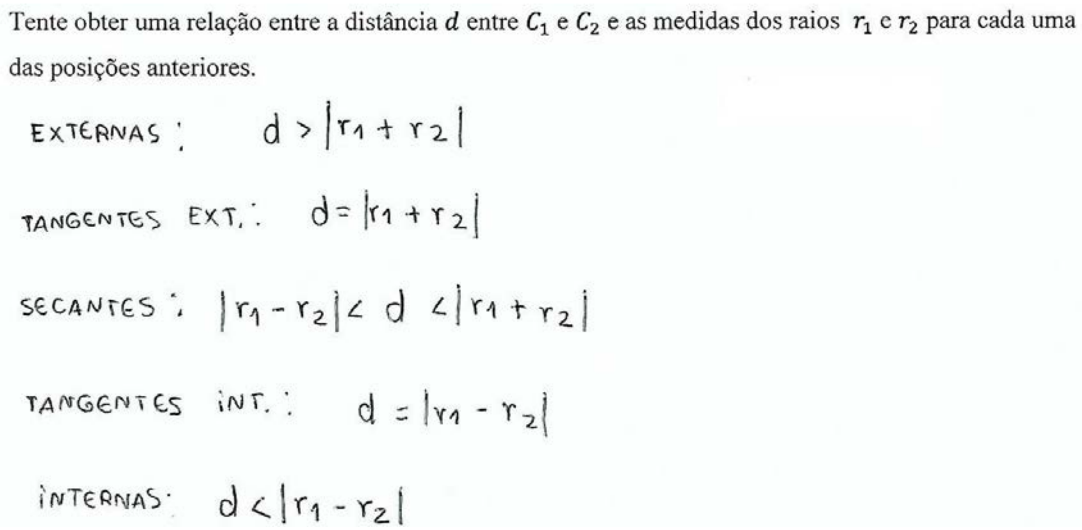
OBS: A distância do ponto C até a reta R, sabendo a equação da reta e o ponto C, é calculada por $\left|\dfrac{a.x_0+b.y_0+c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|$

Fonte: Dados da pesquisa

A Atividade de Exploração 8 (Apêndice A) foi aplicada em seguida para estudar as posições relativas entre duas circunferências. A construção da tarefa relacionava as circunferências λ_1 e λ_2, de centros C_1 e C_2 e raios $r_1 = 5$ e $r_2 = 3$, respectivamente. Para determinar a posição relativa seria preciso comparar a distância entre C_1 e C_2 com as medidas r_1 e r_2. Apenas os alunos A19 e A26 não compreenderam as condições para que as circunferências fossem externas, tangentes externamente, secantes, tangentes internamente e internas. As demais duplas entenderam corretamente, porém, como $r_1 > r_2$ nessa tarefa, as respostas não estavam representadas como $|r_1 - r_2|$, mas como $r_1 - r_2$.

As alunas A11 e A12, as primeiras a terminarem de responder a atividade, perguntaram se a relação estava correta. O pesquisador disse que havia um detalhe na relação, mas que nessa atividade como r_1 era maior do que r_2, não seria possível exigir esse detalhe. A aluna A12 refletiu sobre a situação e, em voz baixa, perguntou ao pesquisador se o que faltava era o módulo, que confirmou a observação feita por ela. A aluna pediu a folha de respostas para que pudesse acrescentar o módulo, o qual foi colocado na diferença e também na soma dos raios, conforme a Figura 77.

Figura 77 – Resposta da Atividade de Exploração 8 das alunas A11 e A12


Tente obter uma relação entre a distância d entre C_1 e C_2 e as medidas dos raios r_1 e r_2 para cada uma das posições anteriores.

EXTERNAS: $d > |r_1 + r_2|$

TANGENTES EXT.: $d = |r_1 + r_2|$

SECANTES: $|r_1 - r_2| < d < |r_1 + r_2|$

TANGENTES INT.: $d = |r_1 - r_2|$

INTERNAS: $d < |r_1 - r_2|$

Fonte: Dados da pesquisa

A aluna A2 também solicitou a presença do pesquisador durante a atividade para verificar se a condição para as circunferências serem secantes era que a distância entre os centros deveria ser menor do que 8, ou seja, menor do que $r_1 + r_2$. Em parte, a observação estava certa, só que faltava observar que para λ_1 e λ_2 serem secantes havia um limite inferior para a distância entre os centros. O pesquisador sugeriu que a aluna verificasse se existia um mínimo para a medida da distância entre C_1 e C_2. Após a intervenção, a aluna compreendeu corretamente a relação.

A aluna A7, inicialmente, também teve um erro na resposta. Ela observou que para as circunferências serem internas a distância entre os centros deveria ser zero, ou seja, eles deveriam ser coincidentes. Para estimular o raciocínio da aluna, o pesquisador questionou se aquela era a única forma de λ_1 e λ_2 serem internas, o que foi negado pela aluna após algumas experiências no GeoGebra. Ela perguntou qual seria a relação. Mais uma vez, foi sugerido que essa resposta fosse encontrada na Atividade de Exploração. Ao final do tempo, a aluna conseguiu observar que o limite superior para as circunferências serem internas era $r_1 - r_2$.

Restando cerca de 40 minutos para o término da aula, a Lista de Problemas 5 (Apêndice B) foi distribuída aos alunos para que começassem a resolvê-los, com o auxílio do pesquisador quando solicitado.

No dia 11 de setembro, poucas dúvidas da Lista de Problemas 5 foram tiradas na aula, devido ao início das atividades na aula anterior. As questões 7 e 8 foram bastante discutidas devido ao método de resolução que foi aplicado por alguns alunos. Eles resolveram as questões esboçando o gráfico das circunferências, assim, determinavam a posição relativa entre elas pelo gráfico. O ponto negativo desse método é que o esboço do problema não permitia concluir com precisão a posição relativa entre os objetos, principalmente no caso das circunferências tangentes, que poderiam aparentar serem secantes ou externas.

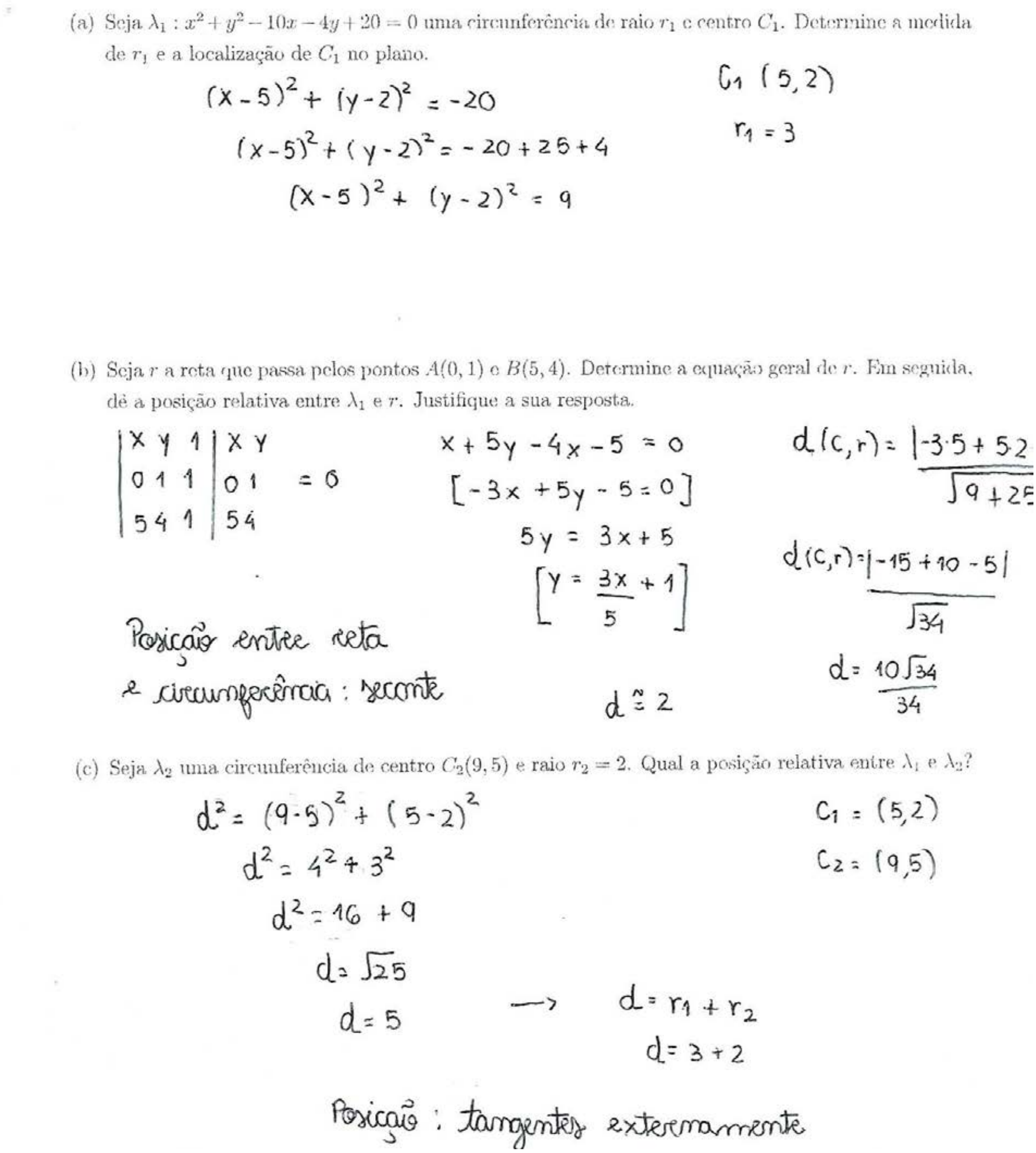
A questão 7 apresentava as equações de duas circunferências: $x^2+y^2-4x-2y+1=0$ e $x^2+y^2-4x-2y-4=0$. Como as circunferências são concêntricas e as medidas dos raios são diferentes, foi concluído que elas eram internas, portanto, não se interceptavam. Na questão 8, os alunos esboçaram o gráfico de $x^2+y^2+8x+6y=0$ e $x^2+y^2-16x-12y=0$. Como essas circunferências são tangentes externamente, uma pequena diferença no esboço do gráfico levou alguns alunos a concluir que elas eram secantes, e outros, que eram externas. Mediante esse erro, o pesquisador tratou de lembrar o que foi observado na Atividade de Exploração 8.

Após as correções, foi iniciado o Teste 5 (Apêndice C). Todos os alunos estavam presentes. Uma dupla não soube resolver o primeiro item do teste e, consequentemente, deixou os itens restantes em branco. Todas as outras equipes conseguiram obter a equação reduzida da circunferência $(x-5)^2+(y-2)^2=9$, o que permitiu concluir que o centro da circunferência tinha coordenadas $C(5,2)$ e o raio media $r=3$.

Das doze duplas que resolveram o primeiro item, uma deixou os itens seguintes em branco. os alunos ficaram bastante inseguros no segundo item. A distância entre a reta e a circunferência encontrada deveria ser $\frac{10\sqrt{34}}{34}$, simplificando, obter-se-ia $\frac{5\sqrt{34}}{17}$. Os alunos perguntaram ao professor se nesse item a resposta era “estranha”, provavelmente pelo aparecimento da raiz quadrada de 34. Isso fez com que os estudantes voltassem no início da resolução para procurar um possível erro. Para ajudar, o pesquisador respondeu que seria normal encontrar uma medida composta de uma raiz quadrada, pois na fórmula da distância entre ponto e reta aparece esse radical. Então, foi sugerido a utilização de uma aproximação para a raiz quadrada encontrada, para ter um valor próximo da distância de C à reta r. Com a sugestão e mais confiança na resposta, dez duplas acertaram o item.

O último item também foi feito corretamente por dez equipes. No final, oito duplas acertaram todos os itens do teste, cuja pontuação média foi 1,54. A Figura 78 mostra a resolução feita corretamente pelas alunas A11 e A12.

Figura 78 – Resposta do Teste 5 das alunas A11 e A12



(a) Seja $\lambda_1 : x^2 + y^2 - 10x - 4y + 20 = 0$ uma circunferência de raio r_1 e centro C_1. Determine a medida de r_1 e a localização de C_1 no plano.

$(x-5)^2 + (y-2)^2 = -20$

$(x-5)^2 + (y-2)^2 = -20 + 25 + 4$

$(x-5)^2 + (y-2)^2 = 9$

$C_1 \ (5,2)$

$r_1 = 3$

(b) Seja r a reta que passa pelos pontos $A(0,1)$ e $B(5,4)$. Determine a equação geral de r. Em seguida, dê a posição relativa entre λ_1 e r. Justifique a sua resposta.

$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 1 \end{vmatrix}\begin{matrix} x & y \\ 0 & 1 \\ 5 & 4 \end{matrix} = 0$

$x + 5y - 4x - 5 = 0$

$[-3x + 5y - 5 = 0]$

$5y = 3x + 5$

$\left[y = \frac{3x}{5} + 1\right]$

$d(c,r) = \frac{|-3 \cdot 5 + 5 \cdot 2}{\sqrt{9+25}}$

$d(c,r) = \frac{|-15 + 10 - 5|}{\sqrt{34}}$

$d = \frac{10\sqrt{34}}{34}$

$d \cong 2$

Posição entre reta e circunferência : secante

(c) Seja λ_2 uma circunferência de centro $C_2(9,5)$ e raio $r_2 = 2$. Qual a posição relativa entre λ_1 e λ_2?

$d^2 = (9-5)^2 + (5-2)^2$

$d^2 = 4^2 + 3^2$

$d^2 = 16 + 9$

$d = \sqrt{25}$

$d = 5 \longrightarrow d = r_1 + r_2$

$d = 3 + 2$

$C_1 = (5,2)$

$C_2 = (9,5)$

Posição : tangentes externamente

Fonte: Dados da pesquisa

5.7 Módulo VI - estudo analítico da elipse e da hipérbole

O módulo VI teve seu início ainda no último período do dia 11 de setembro, devido ao tempo que restou de aula após o Teste 5. Inicialmente, foram definidas as seções cônicas que seriam estudadas, sendo mostrada cada uma como a interseção de um plano com um cone de duas folhas. Nesse dia foi aplicada a Atividade de Exploração 9, relativa ao estudo analítico da elipse.

Como a elipse possui muitos elementos e é um objeto que os alunos não estavam familiarizados da mesma forma que os casos da reta e da circunferência, o tempo gasto para aplicar essa tarefa foi de 50 minutos. A cada comando feito no GeoGebra, o pesquisador passava de mesa em mesa para verificar se todos os alunos estavam acompanhando a construção da atividade.

Antes de responder as questões, foram apresentados os elementos da elipse, tais como focos, vértices, centro, eixos e semieixos maior e menor, distância e semidistância focal e excentricidade. O estudo analítico da elipse foi delimitado aos casos em que a cônica tinha eixo focal paralelo ao eixo das abscissas ou ao eixo das ordenadas. E, por fim, foi mostrado no GeoGebra que a equação da elipse assumia a forma $\dfrac{(x-x_0)^2}{k_1}+\dfrac{(y-y_0)^2}{k_2}=1$, onde as constantes k_1 e k_2 eram positivas, em qualquer posição que a cônica fosse estudada.

O primeiro item da Atividade de Exploração questionava a influência das coordenadas do centro C da elipse sobre a sua equação. Todos os alunos perceberam com facilidade que C alterava os valores de x_0 e y_0, até mesmo pela semelhança com o estudo da circunferência feito nas aulas anteriores. Porém, uma dupla se confundiu com os sinais e escreveu que as coordenadas de C eram $(-x_0, -y_0)$. Outro ponto a se destacar, é que três equipes ainda escreveram que as coordenadas de C eram dadas pela média aritméticas das coordenas dos focos.

No segundo item, deveria ser encontrada a relação entre $d(P,F_1)+d(P,F_2)$, onde P representa um ponto da elipse e F_1 e F_2 são seus focos, e algum valor de semieixo, que não foi revelado. Inicialmente, foi mostrado que independente do ponto P da elipse, $d(P,F_1)+d(P,F_2)$ representava uma constante, que variava de elipse para elipse. Inicialmente, os estudantes não estavam entendendo o que deveriam procurar. O pesquisador exibiu a atividade na TV e fixou $d(P,F_1)+d(P,F_2)$ como um número inteiro, e pediu que os alunos observassem os valores de a e b. Desse modo, as duplas observaram que em cada situação $d(P,F_1)+d(P,F_2)=2a$.

O terceiro item visava relacionar as constantes k_1 e k_2 com os semieixos maior e menor, a e b, respectivamente. Foi utilizada como base a elipse cuja distância focal era paralela ao eixo das abscissas. Para facilitar a observação, foram fixados valores inteiros para o semieixo maior e depois para o semieixo menor.

O último item discute como a excentricidade da elipse altera a sua forma. Como não havia a possibilidade de alterar o valor da excentricidade diretamente e observar o comportamento da elipse, foi sugerido que para aumentar a excentricidade os alunos aumentassem a distância entre os focos e, para diminuir a excentricidade, aproximassem os focos. Todas as equipes perceberam que a excentricidade assume valores no intervalo $]0,1[$, deixando a elipse mais próxima de uma circunferência ou mais achatada quando se aproxima de 0 ou 1, respectivamente. Ao final da atividade, as informações observadas foram organizadas no quadro pelo pesquisador, que também mostrou no GeoGebra a relação $a^2 = b^2 + c^2$, destacando o triângulo retângulo formado. A Figura 79 refere-se às observações feitas pelas alunas A5 e A21.

Figura 79 – Resposta da Atividade de Exploração 9 das alunas A5 e A21

a) Os pontos F_1 e F_2 definem o centro C da elipse. Qual a influência das coordenadas de C sobre a equação da elipse? As coordenadas x e y de C definem, respectivamen X_0 e Y_0 da equação

b) Note que $d(P,F_1) + d(P,F_2)$ é sempre igual a uma constante. É possível perceber alguma relação entre essa constante e alguma medida de semieixo? $d(P,F_1)+d(P,F_2)$ vale o dobro da medida do semieixo a (A_1, A_2)

c) Qual a relação entre as medidas dos semieixos maior e menor e as constantes k_1 e k_2 da equação? k_1 equivale ao quadrado do semieixo a (A_1, A_2) e k_2 equivale ao quadrado do semieixo b (B_1, B_2)

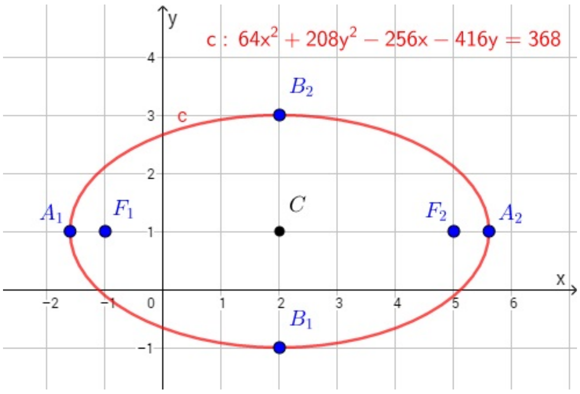
d) Mova F_1 e F_2 e perceba que a excentricidade da elipse varia entre dois valores, quais são eles? A elipse se aproxima de uma circunferência ou fica mais achatada dependendo do valor da excentricidade. Qual a relação entre a excentricidade e a forma da elipse?

Ae excentricidade varia entre os valores 0 e 1. Quanto mais próximo de 0 o valor, mais próxima a uma circunferência. Quanto mais próximo de 1 o valor, mais achatada.

Fonte: Dados da pesquisa

No dia 14 de setembro, a aula foi inciada com a demonstração da equação da elipse e revisão das propriedades. Em seguida, foi dado um exemplo para fixar as ideias. Foi fornecida a equação $64x^2 + 208y^2 - 256x - 416y - 368 = 0$ de uma elipse para que ela fosse esboçada no plano cartesiano. Através desse exemplo, foi possível obter a equação reduzida da elipse, e assim, localizar o centro, os focos e os vértices dessa cônica, bem como as medidas dos eixos maior e menor e a distância focal. Esse exemplo é semelhante ao Teste 6, que seria aplicado na aula seguinte.

Figura 80 – Exemplo de equação da elipse dado em sala de aula

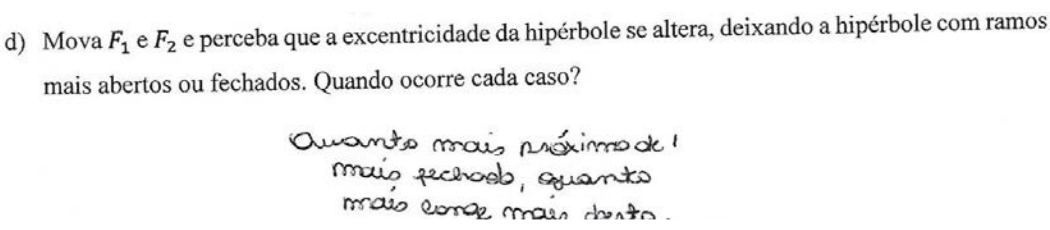


Fonte: Autoria própria

Em seguida, foi aplicada a Atividade de Exploração 10 (Apêndice A), sobre equação da hipérbole. Como a atividade era semelhante à de elipse, e os três primeiros itens eram idênticos, não houve dificuldades na construção da atividade e na resposta dos itens. Essa semelhança permitiu que os alunos verificassem semelhanças e diferenças desses objetos.

O último item da tarefa discutia como a excentricidade da hipérbole alterava a sua forma, deixando seus ramos mais abertos ou fechados. A primeira discussão foi sobre os possíveis valores que a excentricidade poderia assumir. O GeoGebra indicou, quando os ramos estavam bastante fechados, a excentricidade valendo 1 e, quando estavam bem abertos, a excentricidade era maior do que 100 e sempre era possível aumentar esse valor, porém era preciso utilizar a ferramenta zoom e mesmo assim, dificilmente a excentricidade passava de 200. Ou seja, o GeoGebra não era capaz de mostrar que a excentricidade poderia ser aumentada ilimitadamente conforme desejasse. Então, pela atividade, é compreensível que os alunos entendessem que a excentricidade assumia 1 como o seu valor mínimo e não conseguissem verificar que esse valor tendia ao infinito. Assim, nenhum aluno respondeu que a excentricidade assume valores no intervalo $]1, +\infty[$, mas responderam que os ramos ficariam mais fechados quando a excentricidade ficava próxima de 1 e mais abertos quando esse valor se afastava de 1. A Figura 81 mostra a resposta do aluno A6 e da aluna A7.

Figura 81 – Resposta do item (d) da Atividade de Exploração 10 do aluno A6 e da aluna A7


d) Mova F_1 e F_2 e perceba que a excentricidade da hipérbole se altera, deixando a hipérbole com ramos mais abertos ou fechados. Quando ocorre cada caso?

Quanto mais próximo de 1
mais fechado, quanto
mais longe mais aberto.

Fonte: Dados da pesquisa

Logo depois de aplicar a Atividade de Exploração sobre hipérbole, o pesquisador organizou as ideias no quadro, fazendo um paralelo entre elipse e hipérbole e organizando as suas equações de acordo com a posição da distância focal. Em seguida, a Lista de Problemas 6 (Apêndice B) foi distribuída para que fossem resolvidos ainda nessa aula. Os alunos participaram da atividade dispostos em duplas e foi instruído que fossem feitos os esboços dos gráficos para ajudar na resolução.

Algumas resoluções de questões foram importantes para compreender o conteúdo em sua totalidade. Os alunos estavam, na questão 3, passando a equação $9x^2+4y^2+18x-8y-23=0$ para a forma reduzida, para depois encontrar k de modo que o ponto $A(-2,k)$ pertencesse à elipse. O pesquisador deixou que a resolução fosse feita desse modo para avaliar se o processo de transformar a equação geral para a reduzida estava sendo feito corretamente, mas depois mostrou que seria mais simples substituir as coordenadas de A diretamente na equação geral.

Na questão 5, os estudantes estavam tentando encontrar as coordenadas de $B(-5,y)$ para depois calcular o perímetro do triângulo BF_1F_2. Porém, como o ponto $A(10,0)$ pertencia à elipse, deveria ser observado que $d(A,F_1)+d(A,F_2)=d(B,F_1)+d(B,F_2)$, facilitando o cálculo do perímetro.

Na questão 6 foi dada a equação $x^2+16y^2=4$ para encontrar a distância focal. A equação foi dividida por 4, obtendo $\frac{x^2}{4}+4y^2=1$. Nessa parte os alunos não conseguiram desenvolver mais o raciocínio, pois não esperavam o coeficiente 4 de y^2. O pesquisador precisou intervir e mostrar que a equação obtida poderia ser representada por $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{\frac{1}{4}}=1$, ficando mais fácil de encontrar os valores dos semieixos maior e menor.

Ao final da aula, foi possível observar que poucas duplas terminaram de responder todas as questões, mas estavam satisfeitos com o próprio desempenho, pois compreenderam um conteúdo aparentemente difícil e avaliaram como fácil a questão 8, que caiu no Enem de 2015.

No dia 18 de setembro, como não havia dúvidas nos problemas, foi aplicado o Teste 6 (Apêndice C) logo no início da aula. O resultado do teste foi muito bom, com nove duplas obtendo nota 2, uma com 1,5, um aluno que fez sozinho e tirou 1, e uma única dupla que errou todos os itens. Essa última dupla, formada pelos alunos A13 e A15, copiaram de forma diferente a equação de uma linha para outra, obtendo uma equação que não representava o caso. Além disso, no segundo item, ao invés de colocarem as medidas dos eixos maior e menor, colocaram as medidas dos semieixos maior e menor. Das duplas que tiveram aproveitamento máximo no teste, seis fizeram o esboço da elipse, como mostra a Figura 82, resposta das alunas A23 e A25.

Figura 82 – Resposta do Teste 6 das alunas A23 e A25

(a) Considere uma elipse de equação $16x^2 + 25y^2 - 64x - 50y - 311 = 0$. Dê a equação dessa elipse na forma reduzida.

$$16x^2 - 64x + 25y^2 - 50y = 311$$
$$16(x^2 - 4x) + 25(y^2 - 2y) = 311 + 16.4 + 25.1$$
$$\frac{16(x-2)^2}{400} + \frac{25(y-1)^2}{400} = \frac{311 + 64 + 25}{400}$$
$$\frac{(x-2)^2}{25} + \frac{(y-1)^2}{16} = 1$$

(b) Determine as coordenadas do centro C da elipse e as medidas dos eixos maior e menor.

$C(2,1)$

$a^2 = 25$

$a = 5$

$b^2 = 16$

$b = 4$

eixo maior $= 2a = 2.5 = 10$

eixo menor $= 2b = 2.4 = 8$

(c) Determine a distância focal da elipse e sua excentricidade.

$a^2 = b^2 + c^2$

$5^2 = 4^2 + c^2$

$25 - 16 = c^2$

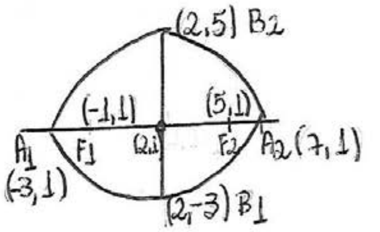
$c = 3$

distância focal $= 2c = 2.3 = 6$

$e = \frac{c}{a}$

$e = \frac{6}{5} = 1,2$

(d) Quais são as coordenadas dos vértices A_1, A_2, B_1 e B_2 da elipse? E as coordenadas dos focos F_1 e F_2?



Fonte: Dados da pesquisa

5.8 Módulo VII - estudo analítico da parábola

Restando dois períodos de 50 minutos de aula no dia 18 de setembro, foi iniciado o último módulo, que estuda analiticamente a parábola.

A parábola foi apresentada de forma um pouco diferente da função quadrática, já conhecida pelos estudantes. Foram apresentados, além dos já conhecidos vértice e eixo da parábola, o foco e a reta diretriz. Também foi mostrada a propriedade refletora da parábola, com dois exemplos práticos de aplicação. A abordagem da parábola nesse estudo diferencia-se do estudo de funções pois a parábola pode ter seu eixo paralelo ao eixo das ordenadas, como nas funções, com a concavidade voltada para cima ou para baixo, ou pode ter seu eixo paralelo ao eixo das abscissas, com a concavidade voltada à esquerda ou à direita.

Diante dessa nova possibilidade de estudo da parábola, foi aplicada a Atividade de Exploração 11 (Apêndice A), com a finalidade de estudar analiticamente parábolas com concavidades voltadas à esquerda ou à direita. Uma atividade análoga poderia ser construída para parábolas com concavidade voltada para cima ou para baixo. Porém, nessa aula, estes últimos casos foram concluídos apenas pela observação dos primeiros, que são semelhantes.

Os alunos levaram em torno de 20 minutos para construir a tarefa com o auxílio do pesquisador. Era possível movimentar o foco F e a reta diretriz d, fixada em posição vertical, através do ponto A. Com isso, a parábola tinha sua forma alterada, e junto a ela, a sua equação, na forma: $(y - y_0)^2 = k(x - x_0)$.

Os itens da atividade questionavam qual ponto era representado por (x_0, y_0), qual a relação entre o sinal de k e a concavidade da parábola, qual a relação entre k e a distância entre o foco F e a reta diretriz d, e, por último, qual a propriedade dos pontos que pertencem à parábola. Todos os alunos observaram corretamente as propriedades, apenas uma fala de um dos alunos precisou ser corrigida. No primeiro item, o aluno A15, conversando com o aluno A13, disse que (x_0, y_0) representava o centro da parábola. O pesquisador pediu ao aluno A13 que observasse quais foram os elementos dados, visto que a parábola não possui centro, como as outras cônicas. O aluno A20 respondeu aos itens sozinho, como mostra a Figura 83.

Após a aplicação da atividade, o pesquisador organizou as informações no quadro, chamou k de $2p$, como foi observado na tarefa, onde p representa a distância entre o foco F e a reta diretriz d, e mostrou no GeoGebra que parábolas com concavidades voltadas para cima e para baixo tinham equações na forma $(x - x_0)^2 = 2p(y - y_0)$. Para facilitar a memorização da equação, foi pedido para associar o quadrado de x com concavidades voltadas para cima e para baixo, relembrando a função $y = x^2$. Caso contrário, a equação contém o quadrado de y.

Figura 83 – Resposta da Atividade de Exploração 11 do aluno A20

a) Os valores x_0 e y_0 correspondem às coordenadas de qual ponto?

Xo e yo correspondem às coordenadas de V (vértice)

b) O que se observa em relação ao sinal de k e a concavidade da parábola?

Se a concavidade for para a esquerda K<0
Caso seja para a direita K>0

c) Qual a relação entre o valor de k e $d(F, d)$.

K = 2d(d, F)

d) Qual a propriedade que os pontos que pertencem à parábola satisfazem?

Do foco ao ponto é a mesma distância entre o ponto e a diretriz

Fonte: Dados da pesquisa

Em seguida, foi entregue a Lista de Problemas 7 (Apêndice B), para que fosse iniciada nos 40 minutos restantes de aula. Logo na primeira questão, que foi dada a equação $9x^2 + 4y^2 - 18x - 8y - 23 = 0$ para identificar o objeto que ela representa no plano cartesiano, um grupo de alunos já deram um palpite que seria uma parábola, pois a questão foi colocada em uma lista referente à parábolas. O pesquisador disse que não representava uma parábola e justificou a escolha da questão para a lista, pois somente ao final do estudo de Geometria Analítica, diante de todas as possibilidades apresentadas, eles seriam capazes de identificar qualquer objeto. Depois, sugeriu que a equação fosse colocada na forma reduzida para obter uma resposta coerente.

As questões 2 e 3 continuaram com a ideia da questão anterior, deram três equações cada uma para identificar se representavam uma reta, circunferência, elipse, hipérbole ou parábola cada uma. Após essas questões, o aluno A22 tentou criar uma regra para identificar o objeto representado por uma equação geral do segundo grau. Outros estudantes pararam de resolver os problemas para ajudar na construção do raciocínio. As conclusões tomadas por eles foi que se os expoentes de x e y são iguais a 1, a equação representa uma reta; se a equação apresentasse x^2 e y^2 com coeficiente 1, representa então uma circunferência; se os coeficientes de x^2 e y^2 forem diferentes, mas tiverem o mesmo sinal, tem-se uma elipse; se os coeficientes de x^2 e y^2 forem diferentes e tiverem sinais opostos, tem-se uma hipérbole; por último, a parábola tem em sua equação apenas uma variável elevada ao quadrado.

No dia 21 de setembro, com duração de 50 minutos, foram corrigidas as questões 6, 8, 9, 10 e 11 da Lista de Problemas 7. Muitas delas foram feitas incorretamente por considerar que o parâmetro p representa a distância entre vértice e foco ou entre vértice e diretriz, ao invés de considerar que p representa a distância entre foco e diretriz.

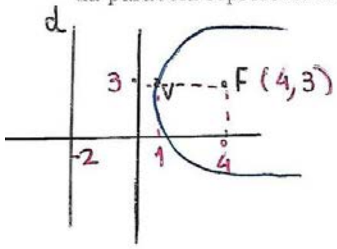
Na sequência foi aplicado o Teste 7 (Apêndice C), com a presença de nove duplas. O primeiro item do teste foi feito corretamente por todas as equipes, que representaram bem foco, vértice e diretriz da parábola, que tem concavidade voltada à direita. No segundo item, todas as duplas conseguiram localizar o vértice da parábola, entretanto, quanto ao valor do parâmetro p, houve equívocos por parte de cinco duplas, que assim como nos problemas, consideraram que p representava a distância entre vértice e foco ou vértice e reta diretriz, e encontraram $p = 3$ ao invés de $p = 6$. Estas cinco duplas tiveram pontuação de 1 ponto no teste. Das quatro duplas restantes, uma errou o item, encontrando $p = 4$ e três acertaram.

O último item foi feito por todas as equipes, o que mostrou que os alunos sabiam encontrar a equação de uma parábola. No entanto, apenas as três duplas que encontraram $p = 6$ determinaram corretamente a equação reduzida da parábola, e dessas, duas obtiveram a equação geral da parábola corretamente. A outra equipe apresentou a equação da parábola apenas na forma reduzida. As alunas A11 e A12 formaram uma das duplas que acertaram os itens do teste (Figura 84).

A nota média do teste foi de 1,22 pontos por dupla, a mais baixa entre todas as avaliações. Mesmo assim, o desempenho foi superior a 60%. Aparentemente, os estudantes não se prepararam como nos outros testes, talvez contando com as notas anteriores. Ou então, apenas confundiram o valor do parâmetro, mostrando que o aprendizado nesse caso não foi o ideal. O pesquisador ainda corrigiu o último teste no quadro, mostrando que o erro mais comum foi em relação ao valor do parâmetro.

Figura 84 – Resposta do Teste 7 das alunas A11 e A12

(a) Considere uma parábola de foco $F(4,3)$ e reta diretriz $d : x = -2$. A parábola tem concavidade voltada para cima, para baixo, à esquerda ou à direita? Justifique sua resposta fazendo um esboço da parábola representando seu foco e a reta diretriz.



[Concavidade para direita]

(b) Determine as coordenadas do vértice V e o valor do parâmetro p da parábola.

[V (1,3)]

[p=6]

(c) Determine as equações reduzida e geral da parábola.

$(y-3)^2 = 2\cdot 6\,(x-1)$

$[(y-3)^2 = 12\,(x-1)]$

$y^2 - 6y + 9 = 12x - 12$

$[y^2 - 6y - 12x + 21 = 0]$

Fonte: Dados da pesquisa

Capítulo 6

Considerações Finais

Esta pesquisa foi desenvolvida a partir da dificuldade de se promover um ensino efetivo da Geometria Analítica para alunos da 3ª série do Ensino Médio. As considerações finais estão fundamentadas nas observações resultantes da aplicação da sequência didática e nos instrumentos utilizados nesta pesquisa: as Atividades de Exploração, as Listas de Problemas e os Testes.

O desempenho dos estudantes na construção do conhecimento em cada Atividade de Exploração, assim como a aplicação desse conhecimento nos problemas propostos e nos testes, respondem afirmativamente ao problema investigado na pesquisa: "O uso do GeoGebra pode facilitar o processo de ensino-aprendizagem da Geometria Analítica para alunos da 3ª série do ensino médio?". De fato, como resultado, foi obtido um comprometimento maior dos alunos nas interações em sala de aula e um ótimo aproveitamento nas avaliações, sendo possível verificar a habilidade em esboçar gráficos e resolver problemas.

Durante o trabalho, foi possível observar a participação efetiva dos alunos, que experimentaram relações, conjecturaram propriedades, formularam hipóteses, previram resultados, resolveram problemas de Geometria Analítica, esboçaram gráficos de retas, circunferências, elipses, hipérboles e parábolas nos problemas e nos testes, e identificaram limitações do GeoGebra com o auxílio do professor. A organização do trabalho em duplas também contribuiu para que o resultado fosse alcançado. Houve troca de experiências, ajuda com dificuldades, discussão de métodos de resolução de problemas e defesa de ponto de vista.

Diante dos resultados obtidos, espera-se que novos professores utilizem as TIC no ensino da Matemática, especificamente, que utilizem o GeoGebra no ensino da Geometria Analítica como um recurso tecnológico que poderá auxiliá-los em suas práticas pedagógicas. Tal uso se mostrou bastante útil no processo de ensino-aprendizagem, fazendo com que os alunos assumissem o papel central, construindo o próprio conhecimento, sempre supervisionado pelo professor. O GeoGebra permitiu que se ganhasse tempo nas construções de gráficos, possibilitou a comparação de vários deles em um mesmo plano cartesiano e viabilizou mudanças simultâneas em objetos geométricos e equações, a fim de observar a relação entre parâmetros e formas, com precisão nos gráficos e qualidade superior à alcançada quando os esboços são feitos no quadro.

No entanto, um aspecto a ser melhorado na aplicação da sequência didática proposta nesta pesquisa é a construção das atividades. Todas as Atividades de Exploração foram construídas pelos alunos, o que demandou bastante tempo e surgiram erros que precisaram ser corrigidos. Caso o professor deseje, as Atividades de Exploração poderão ser acessadas diretamente pelo GeoGebra. Para isso, será necessário conectar-se à internet, criar uma conta gratuita no GeoGebra e pesquisar pelo nome do autor Thiago Vital.

Como o resultado desta pesquisa foi positivo, deixa-se como sugestão para uma futura continuação do trabalho a criação de novas Atividades de Exploração, através do GeoGebra, que contemplem outros tópicos da Geometria Analítica que não foram tratados nesta dissertação, como o estudo de vetores, curvas e quádricas. Além disso, o GeoGebra também pode ser testado como facilitador de aprendizagem no estudo de funções, de modo bastante similar ao que foi feito nesta pesquisa.

Referências

ALMEIDA, M. E. B. *Informática e formação de professores*. 1. ed. Brasília: Ministério da Educação, 2000. v. 2. Disponível em: <http://www.intaead.com.br/ebooks1/livros/pedagogia/27.Inform%E1tica%20e%20a%20Forma%E7%E3o%20de%20Professores.pdf>. Acesso em: 19 nov. 2018. Citado 2 vezes nas páginas 26 e 27.

BALESTRI, R. *Matemática: interação e tecnologia*. 2. ed. São Paulo: Leya, 2016. v. 3. Citado 7 vezes nas páginas 34, 35, 42, 43, 56, 59 e 63.

BORBA, M. D. C. *Softwares* e internet na sala de aula de matemática. In: *X Encontro Nacional de Educação Matemática*. [s.n.], 2010. Disponível em: <http://www.rc.unesp.br/gpimem/downloads/artigos/borba/marceloxenen.PDF>. Acesso em: 19 nov. 2018. Citado na página 25.

BORBA, M. D. C.; PENTEADO, M. G. *Informática e Educação Matemática*. 3. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2007. Citado na página 25.

BOYER, C. B.; MERZBACH, U. C. *História da Matemática*. 3. ed. São Paulo: Edgard Blücher, 2012. Citado 5 vezes nas páginas 21, 22, 23, 24 e 57.

BRASIL. *Parâmetros Curriculares Nacionais (Ensino Médio) - parte III*. Brasília, DF, 1998. Citado 4 vezes nas páginas 16, 17, 20 e 83.

CARDOSO, C. E. *Uma proposta para o ensino de geometria analítica através da resolução de problemas e do uso do geogebra*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de São Carlos, 2016. Disponível em: <https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=94238>. Acesso em: 19 nov. 2018. Citado na página 18.

CARVALHO, J. B. P. D.; ROQUE, T. M. *Tópicos de História da Matemática*. 1. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012. Citado na página 23.

CÉSAR, M. Interações sociais e matemática: ventos de mudança nas práticas de sala de aula. In: MONTEIRO, C. (Ed.). *Interações na aula de matemática*. Lisboa: SPCE - Seção Educação Matemática, 2000. p. 47–84. Citado na página 74.

D'AMBROSIO, B. S. Como ensinar matemática hoje? In: *Temas e Debates*. Brasília: SBEM, 1989. p. 15–19. Disponível em: <https://edisciplinas.usp.br/pluginfile.php/1953133/mod_resource/content/1/%5B1989%5D%20DAMBROSIO%2C%20B%20-%20Como%20Ensinar%20Matem%C3%A1tica%20Hoje.pdf>. Acesso em: 19 nov. 2018. Citado na página 16.

D'AMBRÓSIO, U. A história da matemática: questões historiográficas e políticas e reflexos na educação matemática. *Concepções & Perspectivas*, 1999. Disponível em: <cattai.mat.br/site/files/ensino/uneb/pfreire/docs/HistoriaDaMatematica/Ubiratan_DAmbrosio_doistextos.pdf>. Acesso em: 19 nov. 2018. Citado na página 20.

D'AMBRÓSIO, U. *Etnomatemática: Elo entre as tradições e a modernidade*. 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2002. Citado na página 26.

DANTE, L. R. *Didática da resolução de problemas da matemática*. São Paulo: Ática, 2000. ISBN 85 08 03219 6. Citado na página 83.

DANTE, L. R. *Matemática: contexto & aplicações*. 3. ed. São Paulo: Ática, 2016. v. 3. Citado 4 vezes nas páginas 22, 46, 47 e 48.

DELGADO, J.; FRENSEL, K.; CRISSAFF, L. *Geometria analítica*. 1. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013. Citado na página 29.

EVES, H. *Introdução à história da matemática*. 5. ed. Campinas: UNICAMP, 2011. Citado 3 vezes nas páginas 21, 22 e 23.

FERREIRA, R. C. Ensinando matemática com o geogebra. *Enciclopédia Biosfera, Centro Científico Conhecer*, v. 6, n. 10, p. 1–17, 2010. Disponível em: <http://www.conhecer.org.br/enciclop/2010b/ensinando.pdf>. Acesso em: 19 nov. 2018. Citado na página 27.

GIL, A. C. *Métodos e técnicas de pesquisa social*. 6. ed. São Paulo: Atlas, 2008. Citado 2 vezes nas páginas 69 e 70.

GIL, K. H. *Reflexões sobre as dificuldades dos alunos na aprendizagem da álgebra*. Dissertação (mathesis) — PUCRS, Porto Alegre, 2008. Disponível em: <http://repositorio.pucrs.br/dspace/bitstream/10923/2962/1/000401324-Texto%2BCompleto-0.pdf>. Acesso em: 19 nov. 2018. Citado na página 17.

HOHENWARTER, M.; HOHENWARTER, J. *Ajuda GeoGebra*. [S.l.], 2009. Disponível em: <https://static.geogebra.org/help/docupt_PT.pdf>. Acesso em: 19 nov. 2018. Citado na página 28.

IBGE. Dados do muncípio de Carangola. 2018. Disponível em: <https://cidades.ibge.gov.br/brasil/mg/carangola>. Acesso em: 19 nov. 2018. Citado na página 70.

IEZZI, G. et al. *Matemática: ciência e aplicações*. 9. ed. São Paulo: Saraiva, 2016. v. 3. Citado 5 vezes nas páginas 31, 40, 48, 53 e 66.

INEP. Resultados do enem 2017. 2018. Disponível em: <http://portal.inep.gov.br/artigo/-/asset_publisher/B4AQV9zFY7Bv/content/inep-mec-divulgam-resultados-do-enem-2017-e-anunciam-calendario-do-exame-em-2018/21206>. Acesso em: 19 nov. 2018. Citado na página 70.

KENSKI, V. M. Novas tecnologias, o redimensionamento do espaço e do tempo e os impactos no trabalho docente. *Informática Educativa*, v. 12, n. 1, p. 35–52, 1999. Disponível em: <http://rie.uniandes.edu.co/LinkClick.aspx?fileticket=I5i2Ooddpys%3D&tabid=439&mid=1385&forcedownload=true=%3C!--3.%20Art%20VK%20Vol%2012-1.pdf--%3E%3Ca%20href=%22/LinkClick.aspx?fileticket=I5i2Ooddpys%3D&tabid=439&mid=1385&forcedownload=true%22%20%20target=%22_blank%22%3E3.%20Art%20VK%20Vol%2012-1.pdf%3C/a%3E>. Acesso em: 19 nov. 2018. Citado na página 26.

LEONARDO, F. M. D. (Ed.). *Conexões com a matemática*. 3. ed. São Paulo: Moderna, 2016. v. 3. Citado 6 vezes nas páginas 30, 44, 52, 58, 62 e 65.

LIMA, E. L. *Geometria analítica e álgebra linear*. 2. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2015. Citado 2 vezes nas páginas 29 e 42.

MARCONI, M. A.; LAKATOS, E. M. *Fundamentos de metodologia científica*. 5. ed. São Paulo: Atlas, 2003. Citado na página 69.

MARTINS, E. F.; DIEHL, N. M. L.; GRAVINA, M. A. *Nem tudo que parece uma elipse, é uma elipse*. Porto Alegre. Disponível em: <www2.mat.ufrgs.br/edumatec/atividades_diversas/Elipse/index.html>. Acesso em: 19 nov. 2018. Citado na página 58.

MOL, R. S. *Introdução à história da matemática*. Belo Horizonte: CAED-UFMG, 2013. Disponível em: <http://www.mat.ufmg.br/ead/acervo/livros/introducao_a_historia_da_matematica.pdf>. Acesso em: 19 nov. 2018. Citado na página 24.

MORAES, C. F. *Geometria analítica: explorando conceitos do ensino médio com o uso de animações no GeoGebra*. Dissertação (mathesis) — Universidade Federal do Rio Grande - FURG, Rio Grande, jul. 2016. Disponível em: <https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=94228>. Acesso em: 19 nov. 2018. Citado na página 18.

MORAES, D. A. F. Prova: instrumento avaliativo a serviço da regulação do ensino e da aprendizagem. *Estudos em avaliação educacional*, v. 22, n. 49, p. 233–258, 2011. Disponível em: <www.fcc.org.br/pesquisa/publicacoes/eae/arquivos/1636/1636.pdf>. Acesso em: 19 nov. 2018. Citado na página 84.

MORAN, J. M. Mudar a forma de ensinar e de aprender. *Revista Interações*, v. 5, p. 57–72, 2000. Disponível em: <http://www.eca.usp.br/prof/moran/site/textos/tecnologias_eduacacao/uber.pdf>. Acesso em: 19 nov. 2018. Citado na página 26.

MORAN, J. M. Os novos espaços de atuação do professor com as tecnologias. *Revista Diálogo Educacional*, v. 4, n. 12, p. 13–21, 2004. Disponível em: <http://www.pucrs.br/ciencias/viali/tic_literatura/artigos/tic_professores/189117821002.pdf>. Acesso em: 19 nov. 2018. Citado 2 vezes nas páginas 26 e 27.

PAVANELLO, R. M. O abandono do ensino da geometria no Brasil: causas e consequências. *Zetetiké*, n. 1, p. 7–17, 1993. Disponível em: <https://periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index.php/zetetike/article/viewFile/8646822/13724>. Acesso em: 19 nov. 2018. Citado na página 17.

PERETTI, L. Sequência didática na matemática. *Revista de Educação do IDEAU*, v. 8, n. 17, 2013. ISSN 1809-6220. Disponível em: <https://www.ideau.com.br/getulio/restrito/upload/revistasartigos/31_1.pdf>. Acesso em: 19 nov. 2018. Citado na página 72.

PRODANOV, C. C.; FREITAS, E. C. *Metodologia do trabalho científico: métodos e técnicas da pesquisa e do trabalho acadêmico*. 2. ed. Novo Hamburgo: Universidade Feevale, 2013. Disponível em: <http://www.feevale.br/Comum/midias/8807f05a-14d0-4d5b-b1ad-1538f3aef538/E-book%20Metodologia%20do%20Trabalho%20Cientifico.pdf>. Acesso em: 19 nov. 2018. Citado na página 69.

RAMOS, M. D. C. P. *Da álgebra geométrica grega à geometria analítica de Descartes e de Fermat*. Dissertação (mathesis) — Faculdade de Ciências da Universidade do Porto, Porto, 2013. Disponível em: <https://repositorio-aberto.up.pt/bitstream/10216/70070/2/24533.pdf>. Acesso em: 19 nov. 2018. Citado 2 vezes nas páginas 23 e 24.

RODRIGUES, P. J.; MIRANDA, G. L. Ambientes pessoais de aprendizagem: concepções e práticas. *Revista Latinoamericana de Tecnologia Educativa*, v. 12, p. 23–34, 2013. ISSN 1695-288X. Citado na página 73.

SMOLE, K. S.; DINIZ, M. I. *Matemática para compreender o mundo 3*. 1. ed. São Paulo: Saraiva, 2016. v. 3. Citado 7 vezes nas páginas 21, 39, 40, 41, 50, 52 e 65.

SOUSA, A. C. *Atividades interativas com o GeoGebra: uma abordagem introdutória ao estudo de geometria analítica*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Ceará, Juazeiro do Norte, 2014. Disponível em: <https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=28>. Acesso em: 19 nov. 2018. Citado na página 18.

SOUZA, J. R. D.; GARCIA, J. D. S. R. *Contato matemática*. 1. ed. São Paulo: FTD, 2016. v. 3. Citado 6 vezes nas páginas 32, 37, 54, 57, 58 e 62.

STEINBRUCH, A.; WINTERLE, P. *Geometria analítica*. 2. ed. São Paulo: Pearson Makron Books, 1987. Citado na página 57.

TAKAHASHI, F.; GAMBA, E.; SALDANA, P. Veja o desempenho da sua escola no Enem 2017. *Folha de S. Paulo*, 2018. Disponível em: <https://www1.folha.uol.com.br/educacao/2018/06/veja-o-desempenho-da-sua-escola-no-enem-2017.shtml>. Acesso em: 19 nov. 2018. Citado 2 vezes nas páginas 70 e 71.

VALENTE, J. A. *Computadores e conhecimento: repensando a educação*. 2. ed. Campinas: UNICAMP, 1998. Citado 2 vezes nas páginas 25 e 27.

VAZ, D. A. D. F. A matemática e a filosofia de René Descartes. 2010. Disponível em: <www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/2010/artigos_teses/FILOSOFIA/Artigos/Duelci.pdf>. Acesso em: 19 nov. 2018. Citado 2 vezes nas páginas 21 e 23.

ZABALA, A. *A prática educativa: como ensinar*. Porto Alegre: Artmed, 1998. Citado na página 72.

Apêndices

APÊNDICE A

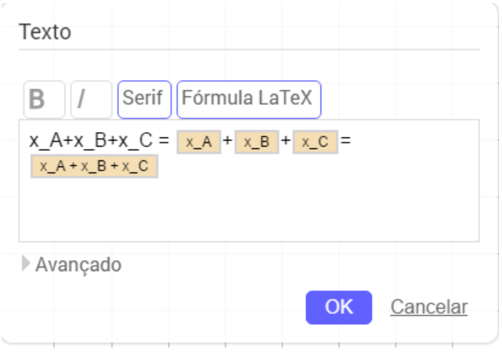
Atividades de Exploração

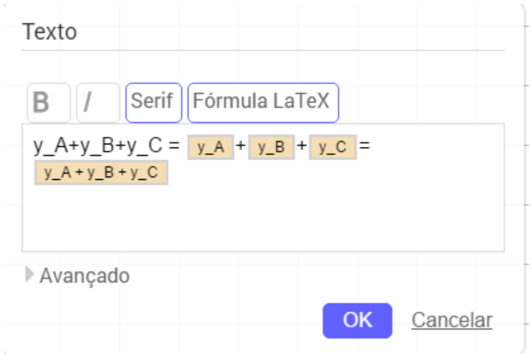
ATIVIDADE DE EXPLORAÇÃO 1 – BARICENTRO DE UM TRIÂNGULO

Alunos:

Usando o GeoGebra, faça o que se pede:

- Crie controles deslizantes x_A, y_A, x_B, y_B, x_C, y_C, variando de -10 a 10.
- Crie os pontos $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ e $C(x_C, y_C)$.
- Trace os segmentos de reta AB, BC e CA.
- Marque D, E e F, pontos médios de AB, BC e CA, respectivamente.
- Trace as medianas AE, BF e CD.
- Marque o ponto G, interseção das três medianas e baricentro do triângulo ABC.
- Crie os textos:





- Movendo os pontos $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ e $C(x_C, y_C)$ no plano cartesiano, alteram-se as coordenadas do baricentro.

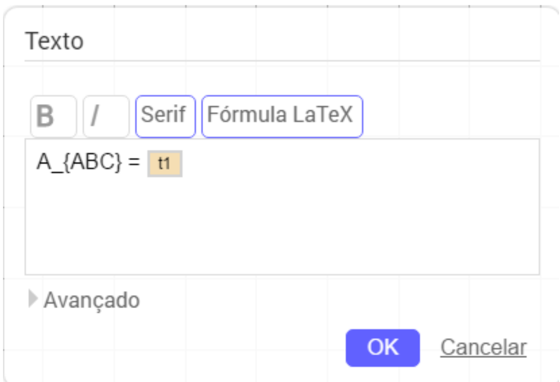
  Observando os vértices do triângulo e o baricentro do triângulo ABC, responda:
  Qual é a relação entre as somas $x_A + x_B + x_C$ e $y_A + y_B + y_C$ com as coordenadas do baricentro $G(x_G, y_G)$?

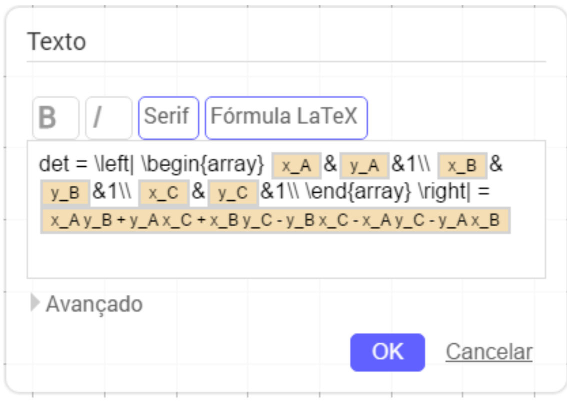
ATIVIDADE DE EXPLORAÇÃO 2 – ÁREA DE UM TRIÂNGULO

Alunos:

Usando o GeoGebra, faça o que se pede:

- Crie controles deslizantes x_A, y_A, x_B, y_B, x_C, y_C, variando de -10 a 10.
- Crie os pontos $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ e $C(x_C, y_C)$.
- Crie o polígono ABC.
- Crie os textos:





O primeiro texto gera a área do triângulo ABC e o segundo gera o determinante:

$$det = \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}$$

- Movendo os pontos $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ e $C(x_C, y_C)$ no plano cartesiano, altera-se a área do triângulo ABC e o valor do determinante criado.

Observando a área do triângulo e o valor do determinante, responda:

Qual é a relação entre a área do triângulo ABC e o determinante?

O que acontece com o determinante se os pontos A, B e C ficarem alinhados?

ATIVIDADE DE EXPLORAÇÃO 3 – EQUAÇÃO REDUZIDA DA RETA

Alunos:

Usando o GeoGebra, faça o que se pede:

- Crie controles deslizantes m, n, c e k, variando de -10 a 10.
- No campo de entrada, digite as equações das retas r, s e t, dadas, respectivamente, por:

$$y = mx + n$$
$$x = c$$
$$y = k$$

- Crie o ponto A, interseção entre a reta r: $y = mx + n$ e o eixo y.
- Crie textos com as equações das retas r, s e t.
- Mova os controles deslizantes m, n, c e k para observar o que acontece com as retas r, s e t. Em seguida responda:

O que o coeficiente m determina na equação da reta r: $y = mx + n$? Escreva o que acontece com a reta r quando m é positivo, negativo e nulo.

Qual a relação entre o coeficiente n da reta r e o ponto A?

Qual a característica da reta s: $x = c$? E da reta t: $y = k$?

ATIVIDADE DE EXPLORAÇÃO 4 – POSIÇÕES RELATIVAS ENTRE DUAS RETAS

Alunos:

Usando o GeoGebra, faça o que se pede:

- Crie controles deslizantes m_r, n_r, m_s e n_s, variando de -5 a 5.
- No campo de entrada, digite as equações das retas r e s, dadas, respectivamente, por:

$$r\colon\ y = m_r x + n_r$$

$$s\colon\ y = m_s x + n_s$$

- Crie o ponto I, interseção entre as retas $r\colon\ y = m_r x + n_r$ e $s\colon\ y = m_s x + n_s$.
- Mova os controles deslizantes m_r, n_r, m_s e n_s para observar o que acontece com as retas r e s. Em seguida, responda:

Quais são as condições entre os coeficientes para que as retas r e s sejam coincidentes?

Quais são as condições entre os coeficientes para que as retas r e s sejam paralelas?

E as condições para que r e s sejam concorrentes?

ATIVIDADE DE EXPLORAÇÃO 5 – RETAS PERPENDICULARES

Alunos:

Usando o GeoGebra, faça o que se pede:

- Crie controles deslizantes m e n.
- Crie uma reta r definida por r: $y = mx + n$.
- Crie um ponto A que pertence à r.
- Crie uma reta s, perpendicular a r e que passa por A
- Marque o ângulo formado pelas retas r e s.
- Coloque a equação da reta s na forma reduzida.
- Movendo os coeficientes m e n, move-se também as retas r e s, que continuam perpendiculares.

É possível observar alguma relação entre os sinais dos coeficientes angulares de r e s?

Quais são as condições entre os coeficientes angulares de r e s para que elas sejam perpendiculares?

ATIVIDADE DE EXPLORAÇÃO 6 – EQUAÇÃO DA CIRCUNFERÊNCIA

Alunos:

Usando o GeoGebra, faça o que se pede:

- Crie dois pontos C e P quaisquer.
- Crie uma circunferência c de centro C que passa por P.
- Crie um texto com a equação da circunferência.
- Note que a circunferência possui equação $(x-a)^2+(y-b)^2=k$.
- Movendo os pontos C e P no plano cartesiano, altera-se a equação da circunferência.

Deslocando apenas o ponto P no plano cartesiano, nota-se uma mudança na equação da circunferência. O ponto P altera os valores dos parâmetros a e b? E do parâmetro k? De que forma?

Qual a relação entre as coordenadas do ponto C e os valores de a e b da equação da circunferência?

ATIVIDADE DE EXPLORAÇÃO 7 – POSIÇÕES RELATIVAS ENTRE RETA E CIRCUNFERÊNCIA

Alunos:

Usando o GeoGebra, faça o que se pede:

- Crie uma circunferência dado o centro C e raio de medida $R = 5$.
- Crie uma reta r definida por dois pontos P e Q.
- Crie uma reta s que passa por C e é perpendicular a r.
- Crie o ponto de interseção I entre r e s.
- Crie o segmento de reta CI e deixe de exibir a reta s.
- Crie um texto com a medida do segmento CI, que representa a distância do ponto C à reta r.
- Crie o ângulo $P\hat{I}C$.
- Crie a interseção entre a circunferência e a reta r.

Mova a reta e a circunferência de modo que altere a posição relativa entre elas. Qual a relação entre a distância $d(C, r)$ e a medida do raio R para que a reta seja:

Externa à circunferência:

Tangente à circunferência:

Secante à circunferência:

ATIVIDADE DE EXPLORAÇÃO 8 – POSIÇÕES RELATIVAS ENTRE DUAS CIRCUNFERÊNCIAS

Alunos:

Usando o GeoGebra, faça o que se pede:

- Crie uma circunferência dado o centro C_1 e raio de medida $r_1 = 5$ e uma circunferência de centro C_2 e raio de medida $r_2 = 3$.
- Crie o segmento de reta C_1C_2 e um texto com a medida desse segmento.

Movendo os pontos C_1 e C_2, altera-se a posição relativa entre as duas circunferências e a distância (d) entre C_1 e C_2. Dê os possíveis valores de d para que as circunferências sejam:

Externas:

Tangentes externamente:

Secantes:

Tangentes internamente:

Internas:

Tente obter uma relação entre a distância d entre C_1 e C_2 e as medidas dos raios r_1 e r_2 para cada uma das posições anteriores.

ATIVIDADE DE EXPLORAÇÃO 9 – EQUAÇÃO DA ELIPSE

Alunos:

Usando o GeoGebra, faça o que se pede:

- Crie uma elipse de focos F_1 e F_2 que passa pelo ponto Q. Marque o centro C da elipse.
- Trace a reta r que passa pelos focos e marque os pontos A_1 e A_2, interseção de r com a elipse.
- Trace a reta s, que passa por C e é perpendicular a r. Em seguida, marque os pontos B_1 e B_2, interseção de s com a elipse.
- Oculte as retas r e s e crie os segmentos de reta A_1A_2, B_1B_2 e F_1F_2.
- Crie um ponto P que pertence à elipse. Construa os segmentos de reta PF_1 e PF_2.
- Crie textos com: a equação da elipse, o centro da elipse, a soma das distâncias $d(P,F_1) + d(P,F_2)$, as medidas do semieixo maior, semieixo menor e semidistância focal, e a excentricidade (c/a).

  Movendo os pontos F_1, F_2 e Q, muda-se a posição da elipse e sua equação, que tem a forma:

$$\frac{(x-x_0)^2}{k_1}+\frac{(y-y_0)^2}{k_2}=1, \text{com } k_1, k_2 > 0.$$

a) Os pontos F_1 e F_2 definem o centro C da elipse. Qual a influência das coordenadas de C sobre a equação da elipse?

b) Note que $d(P,F_1) + d(P,F_2)$ é sempre igual a uma constante. É possível perceber alguma relação entre essa constante e alguma medida de semieixo?

c) Qual a relação entre as medidas dos semieixos maior e menor e as constantes k_1 e k_2?

d) Mova F_1 e F_2 e perceba que a excentricidade da elipse varia entre dois valores, quais são eles? A elipse se aproxima de uma circunferência ou fica mais achatada dependendo do valor da excentricidade. Qual a relação entre a excentricidade e a forma da elipse?

ATIVIDADE DE EXPLORAÇÃO 10 – EQUAÇÃO DA HIPÉRBOLE

Alunos:

Usando o GeoGebra, faça o que se pede:

- Crie uma hipérbole de focos F_1 e F_2 passando pelo ponto Q. Marque o centro C da hipérbole.
- Trace o segmento de reta F_1F_2 e marque os pontos A_1 e A_2, interseção de F_1F_2 com a hipérbole.
- Crie o segmento de reta CF_2. Em seguida, construa uma circunferência de centro em F_2 e raio com a mesma medida do segmento CF_2.
- Crie uma reta perpendicular ao segmento de reta F_1F_2 que passa por C. Logo após, marque B_1 e B_2, interseção da reta com a circunferência. Oculte a reta e a circunferência.
- Crie os segmentos de reta A_1A_2 e B_1B_2.
- Crie um ponto P que pertence à hipérbole. Construa os segmentos de reta PF_1 e PF_2.
- Crie textos com: a equação da elipse, o centro da elipse, o módulo da diferença das distâncias $|d(P,F_1) - d(P,F_2)|$, as medidas do semieixo maior, semieixo menor e semidistância focal, e a excentricidade (c/a).

  Movendo os pontos F_1, F_2 e Q, muda-se a posição da hipérbole e sua equação:

$$\frac{(x-x_0)^2}{k_1} - \frac{(y-y_0)^2}{k_2} = 1 \text{ ou } \frac{(y-y_0)^2}{k_1} - \frac{(x-x_0)^2}{k_2} = 1, \text{com } k_1, k_2 > 0.$$

a) Os pontos F_1 e F_2 definem o centro C da hipérbole. Qual a influência das coordenadas de C sobre a equação da hipérbole?

b) Note que $|d(P,F_1) - d(P,F_2)|$ é sempre igual a uma constante. É possível perceber alguma relação entre essa constante e alguma medida de semieixo?

c) Qual a relação entre as medidas dos semieixos maior e menor e as constantes k_1 e k_2 da equação?

d) Mova F_1 e F_2 e perceba que a excentricidade da hipérbole se altera, deixando a hipérbole com ramos mais abertos ou fechados. Quando ocorre cada caso?

ATIVIDADE DE EXPLORAÇÃO 11 – EQUAÇÃO DA PARÁBOLA

Alunos:

Usando o GeoGebra, faça o que se pede:

- Crie um ponto A no plano e uma reta d que passa por A e é perpendicular ao eixo x.
- Crie um ponto F fora de d. Em seguida, crie uma parábola de foco F e diretriz d.
- Crie uma reta e perpendicular a d e que passa por F. Marque o ponto D (interseção entre d e e) e o vértice V (interseção entre a parábola e e).
- Crie o segmento de reta DF e um texto para $d(F, d)$ (distância entre o foco e a diretriz), equivalente à medida do segmento DF.
- Marque um ponto P sobre a parábola. Em seguida, crie uma reta r perpendicular a d que passa por P. Chame de P' o ponto de interseção entre d e r.
- Crie os segmentos de reta PF e PP' (que representa a distância entre P e d).
- Crie um texto com a equação da parábola e um texto com as coordenadas do vértice.

Movendo os pontos A e F, muda-se a posição da parábola e sua equação, que tem a forma:

$$(y - y_0)^2 = k(x - x_0)$$

a) Os valores x_0 e y_0 correspondem às coordenadas de qual ponto?

b) O que se observa em relação ao sinal de k e a concavidade da parábola?

c) Qual a relação entre o valor de k e $d(F, d)$.

d) Qual a propriedade que os pontos que pertencem à parábola satisfazem?

APÊNDICE B

Listas de Problemas

LISTA 1 – PLANO CARTESIANO E PONTO

1. (FGV-SP) Em um paralelogramo, as coordenadas de três vértices consecutivos são, respectivamente, $(1,4)$, $(-2,6)$ e $(0,8)$. A soma das coordenadas do quarto vértice é:
   A) 8
   B) 9
   C) 10
   D) 11
   E) 12

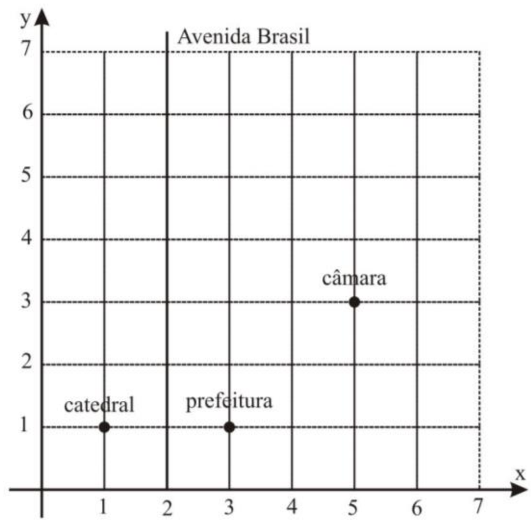
2. (UFMG) A área de um quadrado que tem $A(4,8)$ e $D(-2,2)$ como vértices opostos é:
   A) 36
   B) 20
   C) 18
   D) 16
   E) 12

3. (FEI-SP) Os pontos X, Y e Z possuem, respectivamente, as seguintes coordenadas no plano cartesiano: $(0,0)$, $(m,8)$, $(n,n+3)$. Se Z é o ponto médio do segmento $\overline{XY}$, então:
   A) $m=2$
   B) $m=1$
   C) $n=3$
   D) $m=5$
   E) $n=2$

4. (UFOP-MG) O baricentro de um triângulo é o ponto de encontro de suas medianas. Sendo assim, as coordenadas cartesianas do baricentro do triângulo de vértices $(2,2)$, $(-4,-2)$ e $(2,-4)$ são:
   A) $\left(0,-\frac{4}{3}\right)$
   B) $\left(0,-\frac{5}{4}\right)$
   C) $\left(0,-\frac{3}{4}\right)$
   D) $\left(\frac{1}{2},-\frac{3}{2}\right)$

5. (UFMG) A distância entre os pontos $A(2a, -3a)$ e $B(3, 2)$ é $\sqrt{26}$. Pode-se afirmar que os possíveis valores de a são:
   A) $-\sqrt{2}$ e $\sqrt{2}$
   B) $1 - \sqrt{2}$ e $1 + \sqrt{2}$
   C) -1 e 1
   D) -2 e 2
   E) -3 e 2

6. (Unicamp-SP) A figura abaixo apresenta parte do mapa de uma cidade, no qual estão identificadas a catedral, a prefeitura e a câmara de vereadores. Observe que o quadriculado não representa os quarteirões da cidade, servindo apenas para a localização dos pontos e retas no plano cartesiano. Nessa cidade, a Avenida Brasil é formada pelos pontos equidistantes da catedral e da prefeitura, enquanto a Avenida Juscelino Kubitschek (não mostrada no mapa) é formada pelos pontos equidistantes da prefeitura e da câmara de vereadores.



Sabendo que a distância real entre a catedral e a prefeitura é de 500 m, podemos concluir que a distância real, em linha reta, entre a catedral e a câmara de vereadores é de
   A) 1500 m.
   B) $500\sqrt{5}$ m.
   C) $100\sqrt{2}$ m.
   D) $\left(500 + 500\sqrt{2}\right)$ m.

7. (UCDB-MS) Um triângulo tem vértices $A(15, 10)$, $B(6, 0)$, $C(0, 10)$. Então, a mediana $\overline{AM}$ mede:

A) 10 u.c.

B) 12 u.c.

C) 11 u.c.

D) 13 u.c.

E) 9 u.c.

8. (PUC Rio) Os pontos $A(3, 1)$, $B(4, -2)$ e $C(x, 7)$ são colineares. O valor de x é igual a:

A) 1

B) 2

C) 5

D) 6

E) 7

9. (UFOP-MG) A reta r contém os pontos $(-1, -3)$ e $(2, 3)$. O valor de m, de modo que o ponto $(m, 7)$ pertença a r, é:

A) 1

B) 2

C) 3

D) 4

10. (UFU-MG) Considere, no plano cartesiano de origem O, um triângulo cujos vértices A, B e C têm coordenadas $(-1, 0)$, $(0, 4)$ e $(2, 0)$, respectivamente. Se M e N são os pontos médios de $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$, respectivamente, a área do triângulo OMN será igual a:

A) $\frac{5}{3}$ u.a.

B) $\frac{8}{5}$ u.a.

C) 1 u.a.

D) $\frac{3}{2}$ u.a.

11. (UFG-GO) Para media a área de uma fazenda de forma triangular, um agrimensor, utilizando um sistema de localização por satélite, encontrou como vértices desse triângulo os pontos $A(2, 1)$, $B(3, 5)$ e $C(7, 4)$ do plano cartesiano, com as medidas em km. A área dessa fazenda, em km², é de:

A) $\frac{17}{2}$

B) 17

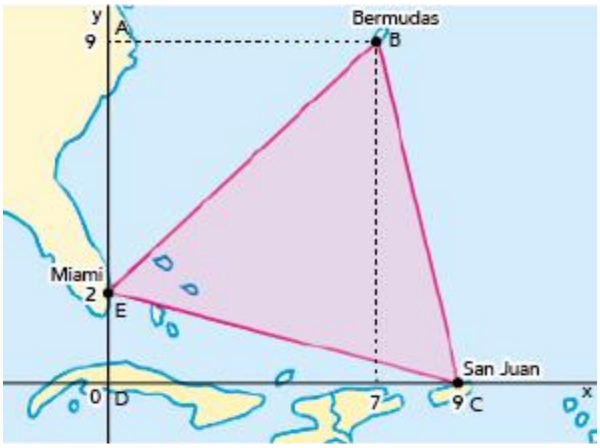
C) $2\sqrt{17}$

D) $4\sqrt{17}$

E) $\frac{\sqrt{17}}{2}$

12. (UERJ) Na região conhecida como Triângulo das Bermudas, localizada no Oceano Atlântico, é possível formar um triângulo com um vértice sobre a cidade porto-riquenha de San Juan, outro sobre a cidade estadunidense de Miami e o terceiro sobre as ilhas de Bermudas.

A figura a seguir mostra um sistema de coordenadas cartesianas ortogonais, com os vértices do triângulo devidamente representados. A escala utilizada é $1 : 17\,000\,000$, e cada unidade nos eixos cartesianos equivale ao comprimento de 1 cm.



Calcule, em km², a área do Triângulo das Bermudas, conforme a representação plana da figura.

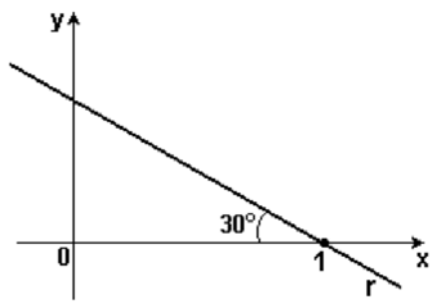
LISTA 2 – ESTUDO ANALÍTICO DA RETA

1. (UFMG) A reta $y = ax + 1$ intercepta a bissetriz do primeiro quadrante num ponto de abscissa -4. O valor de a é:
   A) $-\frac{3}{4}$
   B) $-\frac{1}{4}$
   C) $\frac{1}{4}$
   D) $\frac{3}{4}$
   E) $\frac{5}{4}$

2. (UFMG) O ponto $P\left(\frac{1}{2}, b\right)$ pertence à curva $y = \left(\frac{1}{16}\right)^x$. A equação da reta que passa por P e tem coeficiente angular 2 é:
   A) $2x - y = 0$
   B) $2x + y = 0$
   C) $8x - 4y - 3 = 0$
   D) $4x - 2y - 1 = 0$
   E) $8x - 4y - 5 = 0$

3. (Unaerp-SP) A equação, no plano, $x - 3 = 0$, representa:
   A) Um ponto do eixo das abcissas
   B) Uma reta perpendicular ao eixo das ordenadas
   C) Uma reta perpendicular à reta $x + y = 0$
   D) Uma reta concorrente à reta $x + y = 0$
   E) Uma reta paralela à reta $y - 3 = 0$

4. (UFRS) Considere a figura a seguir. Uma equação cartesiana da reta r é



A) $y = \frac{\sqrt{3}}{3} - x$

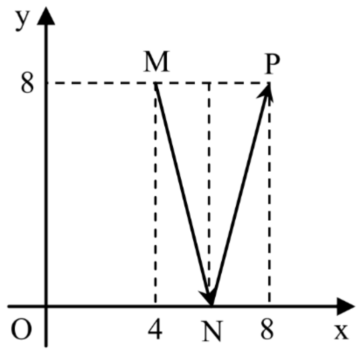
B) $y = \frac{\sqrt{3}}{3}(1 - x)$

C) $y = 1 - \sqrt{3}x$

D) $y = \sqrt{3}(1 - x)$

E) $y = \sqrt{3}(x - 1)$

5. (Unimontes-MG) Um raio luminoso, emitido por uma lanterna localizada no ponto $M(4\ ,8)$, reflete-se em $N(6, 0)$. A equação da semirreta r, da trajetória do raio refletido, é:



A) $y + 4x - 24 = 0$

B) $y - 4x - 24 = 0$

C) $y - 4x + 24 = 0$

D) $y + 4x + 24 = 0$

6. (Cesgranrio) Se $(x, y) = (a, b)$ é a interseção das retas $x + 2y = 5$ e $2x - y = 10$, então $a + b$ vale:

A) 3

B) 4

C) 5

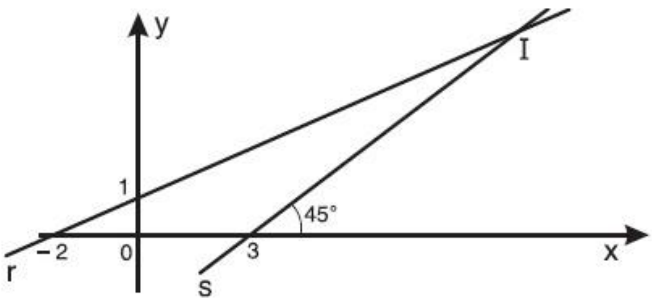
D) 10

E) 15

7. (Mackenzie-SP) A distância do ponto de interseção das retas $2x - 3y + 26 = 0$ e $5x + 2y - 49 = 0$ à origem é:
   A) 13
   B) 23
   C) 15
   D) 18
   E) 17

8. (FGV-MG) A equação da reta que passa pela origem e pela interseção das retas $2x + y - 6 = 0$ e $x - 3y + 11 = 0$ tem a seguinte equação:
   A) $y = 2x$
   B) $y = 3x$
   C) $y = 4x$
   D) $y = 5x$
   E) $y = 6x$

9. (PUC-SP) Suponha que no plano cartesiano mostrado na figura a seguir, em que a unidade de medida nos eixos coordenados é o quilômetro, as retas r e s representam os trajetos percorridos por dois navios, N_1 e N_2, antes de ambos atracarem em uma ilha, localizada no ponto I.



   Considerando que, no momento em que N_1 e N_2 se encontravam atracados em I, um terceiro navio, N_3, foi localizado no ponto de coordenadas $(26, 29)$, a quantos quilômetros N_3 distava de I?
   A) 28
   B) 30
   C) 34
   D) 36
   E) 40

10. (UECE) O perímetro do triângulo formado pelas interseções das retas $x + y - 6 = 0$, $x = 1$ e $y = 1$ é igual a:

A) $2(1 + \sqrt{2})$

B) $4(2 + \sqrt{2})$

C) $4(1 + \sqrt{2})$

D) $2(1 + \sqrt{2})$

11. (UFMG) A área do triângulo limitado pelas retas $4x + 5y - 20 = 0$, $y = 0$ e $x = 0$ é:

A) 4

B) 5

C) 10

D) 16

E) 20

12. (Mackenzie-SP) Os gráficos de $y = x + 2$ e $x + y = 6$ definem, com os eixos, no primeiro quadrante, um quadrilátero de área:

A) 12

B) 16

C) 10

D) 8

E) 14

LISTA 3 – POSIÇÕES RELATIVAS, DISTÂNCIA DE PONTO À RETA, ÂNGULO FORMADO POR DUAS RETAS E INEQUAÇÕES DO 1º GRAU EM DUAS VARIÁVEIS

1. (Mackenzie-SP) Conhecidas as equações das retas $r: mx + y - 3 = 0$ e $s: 3x + y + k = 0$, podemos afirmar que r e s são retas:
   A) palalelas, se $m = 3$ e $k = -3$.
   B) coincidentes, se $m = 3$ e $k \neq -3$.
   C) concorrentes, se $m \neq 3$ e $k \in R$.
   D) concorrentes, se $k = -3$ e $m \in R$.
   E) palalelas, se $m = 3$ e $k \in R$.

2. (UFMG) Seja a reta r de equação $2x - 3y - 5 = 0$. A equação da reta s, paralela a r, que contém $P(1, -2)$, é:
   A) $2x - 3y - 1 = 0$
   B) $2x - 3y - 8 = 0$
   C) $3x - 2y - 7 = 0$
   D) $3x + 2y + 1 = 0$
   E) $2x + 3y + 4 = 0$

3. (UFMG) A reta r passa pelo ponto $(16, 11)$ e não intercepta a reta de equação $y = \frac{x}{2} - 5$. Considerando-se os seguintes pontos, o único que pertence à reta r é:
   A) $(7, 6)$
   B) $\left(7, \frac{13}{2}\right)$
   C) $(7, 7)$
   D) $\left(7, \frac{15}{2}\right)$

4. (FUVEST-SP) As retas r e s são perpendiculares e interceptam-se no ponto $(2, 4)$. A reta s passa pelo ponto $(0, 5)$. Uma equação da reta r é:
   A) $2y + x = 10$
   B) $y = x + 2$
   C) $2y - x = 6$
   D) $2x + y = 8$
   E) $y = 2x$

5. (UFPE) Considere o triângulo de vértices $A(1,1)$, $B(3,2)$ e $C(2,3)$. A equação da reta que contém a altura desse triângulo relativa ao lado $\overline{AC}$ é dada por:
   A) $x - 2y = 7$
   B) $2x + 2y = -7$
   C) $2y - x = 7$
   D) $x + 2y = 7$
   E) $x + 2y = -7$

6. (FUVEST-SP) São dados os pontos $A(1,1)$ e $B(9,3)$. A mediatriz do segmento $\overline{AB}$ encontra o eixo dos y no ponto de ordenada igual a:
   A) 20
   B) 21
   C) 22
   D) 23
   E) 24

7. (Mackenzie-SP) A distância da reta determinada pelos pontos $A(1,4)$ e $B(5,2)$ à origem é:
   A) 9
   B) 5
   C) $\frac{9}{5}$
   D) $\frac{81}{5}$
   E) $\frac{9\sqrt{5}}{5}$

8. (UFMG) A distância entre as retas de equações $y = \sqrt{3}x$ e $y = \sqrt{3}x + 2$ é:
   A) $\sqrt{3}$
   B) $2\sqrt{3}$
   C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
   D) 1
   E) 2

9. Determine a medida do ângulo agudo θ formado pelas retas de equações:

$$r: 9\sqrt{3}x - 27y + 81 = 0$$

$$s: 2\sqrt{3}x - 2y - 3 = 0$$

10. (UFMG) O ângulo agudo formado pelas retas de equações $x = 0$ e $\sqrt{3}x + y - 1 = 0$ mede:

A) $15°$

B) $22°\,30'$

C) $30°$

D) $37°\,30'$

E) $45°$

11. (PUC Minas) Considere a região do plano cartesiano formada pelos pontos cujas coordenadas satisfazem ao sistema:

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 2 \\ y \geq x \\ y \leq 2x + 2 \end{cases}$$

Tomando-se o metro como como unidade de medida nos eixos coordenados, essa região é um trapézio com 2 m de altura e área igual a A metros quadrados. Então, o valor de A é:

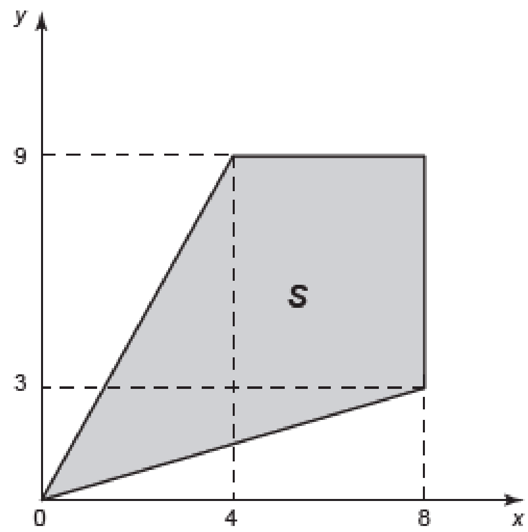
A) 3

B) 4

C) 5

D) 6

12. (Enem 2016) Uma região de uma fábrica deve ser isolada, pois nela os empregados ficam expostos a riscos de acidentes. Essa região está representada pela porção de cor cinza (quadrilátero de área S) na figura.



Para que os funcionários sejam orientados sobre a localização da área isolada, cartazes informativos serão afixados por toda a fábrica. Para confeccioná-los, um programador utilizará um *software* que permite desenhar essa região a partir de um conjunto de desigualdades algébricas.

As desigualdades que devem ser utilizadas no referido *software*, para o desenho da região de isolamento, são

A) $3y - x \leq 0$; $2y - x \geq 0$; $y \leq 8$; $x \leq 9$

B) $3y - x \leq 0$; $2y - x \geq 0$; $y \leq 9$; $x \leq 8$

C) $3y - x \geq 0$; $2y - x \leq 0$; $y \leq 9$; $x \leq 8$

D) $4y - 9x \leq 0$; $8y - 3x \geq 0$; $y \leq 8$; $x \leq 9$

E) $4y - 9x \leq 0$; $8y - 3x \geq 0$; $y \leq 9$; $x \leq 8$

LISTA 4 – ESTUDO ANALÍTICO DA CIRCUNFERÊNCIA

1. (UFPA) Uma circunferência tem centro no ponto $C(2,-1)$ e raio igual a $\sqrt{2}$. Qual é a equação dessa circunferência?
   A) $(x-2)^2+(y+1)^2=\sqrt{2}$
   B) $(x-2)^2+(y+1)^2=2$
   C) $(x+1)^2+(y-2)^2=\sqrt{2}$
   D) $(x+2)^2+(y+1)^2=2$
   E) $(x-2)^2+(y-1)^2=\sqrt{2}$

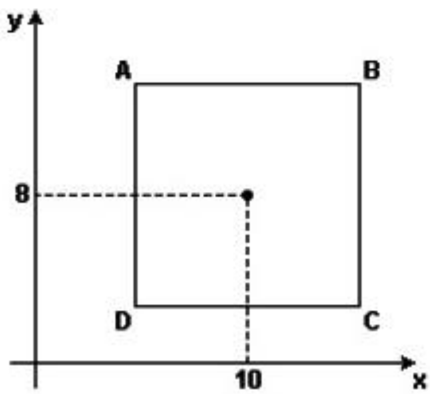
2. (UDESC) Para que a equação $x^2+y^2-4x+8y+k=0$ represente uma circunferência, devemos ter:
   A) $k<20$
   B) $k>13$
   C) $k<12$
   D) $k>12$
   E) $k<10$

3. (UFRGS-RS) A equação $x^2+y^2+4x-6y+m=0$ representa um círculo se, e somente se,
   A) $m>0$.
   B) $m<0$.
   C) $m>13$.
   D) $m>-13$.
   E) $m<13$.

4. (FGV-SP) Dada a circunferência de equação $x^2+y^2-6x-10y+30=0$, seja P seu ponto de ordenada máxima. A soma das coordenadas de P é:
   A) 10
   B) 10,5
   C) 11
   D) 11,5
   E) 1

5. (UFSM-RS) A massa utilizada para fazer pastéis folheados, depois de esticada, é recortada em círculos (discos) de igual tamanho. Sabendo que a equação matemática da circunferência que limita o círculo é $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 36 = 0$ e adotando $\pi = 3{,}14$, o diâmetro de cada disco e a área da massa utilizada para confeccionar cada pastel são, respectivamente,
   A) 7 e 113,04.
   B) 7 e 153,86.
   C) 12 e 113,04.
   D) 14 e 113,04.
   E) 14 e 153,86.

6. (UFSM-RS) A equipe de arquitetos e decoradores que fez o projeto de um shopping deseja circunscrever uma circunferência ao quadrado maior Q_1, que possui lado de 10 m. Se as coordenadas do centro da circunferência forem dadas pelo ponto $(10, 8)$ e se forem usadas as parede da porta de entrada x e a lateral esquerda y como eixos coordenados referencias, a equação da circunferência será:



   A) $x^2 + y^2 - 20x - 16y + 139 = 0$
   B) $x^2 + y^2 - 20x - 16y + 64 = 0$
   C) $x^2 + y^2 - 20x - 16y + 114 = 0$
   D) $x^2 + y^2 - 20x - 16y - 36 = 0$
   E) $x^2 + y^2 - 16x - 20y + 139 = 0$

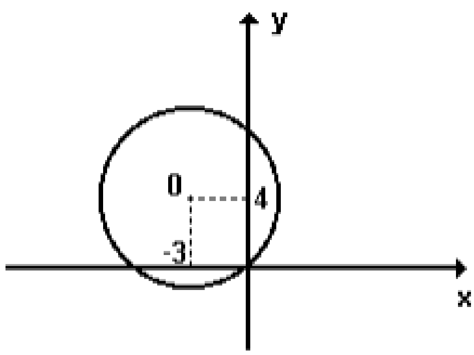
7. (UFPA) Qual a equação da circunferência de raio 2 que é concêntrica à circunferência $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 4 = 0$?
   A) $(x-2)^2 + (y+1)^2 = \sqrt{2}$
   B) $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 2$
   C) $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 4$
   D) $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 4$
   E) $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 4$

8. (FGV-SP) Dado o ponto $P(5, 4)$ e a circunferência de equação $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 20 = 0$, a equação da circunferência concêntrica com a circunferência dada e que passa por P é:
   A) $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 20 = 0$
   B) $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 21 = 0$
   C) $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 22 = 0$
   D) $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 23 = 0$
   E) $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 24 = 0$

9. (Fatec-SP) Sejam O a origem do sistema de eixos cartesianos e A o centro da circunferência de equação $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 = 0$. A equação da reta que passa pelos pontos A e O é:
   A) $y = 2x + 1$
   B) $y = 2x - 1$
   C) $y = \frac{x}{2}$
   D) $y = 2x$
   E) $y = x$

10. (UEL-PR) São dados: uma circunferência de centro $C = \left(\frac{3}{2}, 1\right)$; um ponto $T = \left(\frac{3}{2}, -1\right)$ que pertence à circunferência. A equação da circunferência dada é:
   A) $4x^2 + 4y^2 - 12x - 8y - 3 = 0$
   B) $4x^2 + 4y^2 - 12x - 8y - 4 = 0$
   C) $3x^2 + y^2 - 6x - 4y - 2 = 0$
   D) $3x^2 + y^2 - 6x - 4y - 4 = 0$
   E) $x^2 + y^2 - \frac{3}{2}x - y = 0$

11. (Cesgranrio)



A equação da circunferência cuja representação cartesiana está indicada pela figura anterior é:

A) $x^2 + y^2 - 3x - 4y = 0$

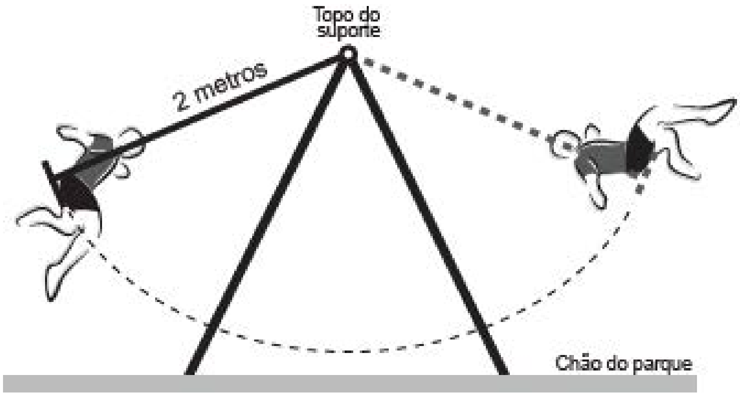
B) $x^2 + y^2 + 6x + 8y = 0$

C) $x^2 + y^2 + 6x - 8y = 0$

D) $x^2 + y^2 + 8x - 6y = 0$

E) $x^2 + y^2 - 8x + 6y = 0$

12. (Enem 2014) A figura mostra uma criança brincando em um balanço no parque. A corda que prende o assento do balanço ao topo do suporte mede 2 metros. A criança toma cuidado para não sofrer um acidente, então se balança de modo que a corda não chegue a alcançar a posição horizontal.



Na figura, considere o plano cartesiano que contém a trajetória do assento do balanço, no qual a origem está localizada no topo do suporte do balanço, o eixo X é paralelo ao chão do parque, e o eixo Y tem orientação positiva para cima.

A curva determinada pela trajetória do assento do balanço é parte do gráfico da função:

A) $f(x) = -\sqrt{2 - x^2}$

B) $f(x) = \sqrt{2 - x^2}$

C) $f(x) = x^2 - 2$

D) $f(x) = -\sqrt{4 - x^2}$

E) $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$

LISTA 5 – POSIÇÕES RELATIVAS À CIRCUNFERÊNCIA E INEQUAÇÕES DO 2º GRAU EM DUAS VARIÁVEIS

1. (UFAL) As sentenças abaixo referem-se à circunferência C, de equação $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 4 = 0$. Assinale V para as sentenças verdadeiras e F para as falsas.
   ( ) O ponto $(-2, 2)$ pertence ao exterior de C.
   ( ) O ponto $(1, 6)$ pertence ao exterior de C.
   ( ) O ponto $(-1, -1)$ pertence a C.
   ( ) O ponto $(-5, 0)$ pertence ao interior de C.
   ( ) O ponto $(0, 1)$ pertence ao exterior de C.

2. (UFPE) Assinale a alternativa que corresponde à equação de circunferência cujo raio mede 2 e que tangencia os dois semieixos positivos.
   A) $x^2 + y^2 - 4x - 4y + 4 = 0$
   B) $5x^2 + 5y^2 - 80x - 80y + 320 = 0$
   C) $x^2 + y^2 - 4x - 4y + 8 = 0$
   D) $2x^2 + 2y^2 + 3x - 3y + 7 = 0$
   E) $x^2 + y^2 + 8 = 0$

3. (UEL-PR) Seja P um ponto do eixo das ordenadas pertencente à reta de equação $2x - 3y - 6 = 0$. A equação da circunferência de centro em P e tangente ao eixo das abscissas é:
   A) $x^2 + y^2 = 4$
   B) $x^2 + y^2 + 4x = 0$
   C) $x^2 + y^2 + 4y = 0$
   D) $x^2 + y^2 - 4x = 0$
   E) $x^2 + y^2 - 4y = 0$

4. (PUC-SP) A circunferência com centro na origem e tangente à reta $3x + 4y = 10$ tem equação:
   A) $x^2 + y^2 = 1$
   B) $x^2 + y^2 = 2$
   C) $x^2 + y^2 = 3$
   D) $x^2 + y^2 = 4$
   E) $x^2 + y^2 = 5$

5. (UNESP) Seja $S = \{(x, y) \in R^2 : x^2 + y^2 \leq 16 \; e \; x^2 + (y-1)^2 \geq 9\}$ uma região do plano. A área de S é:
   A) 5
   B) 7
   C) 5π
   D) 7π
   E) $7\pi^2$

6. (UFCE) O número de pontos na interseção dos subconjuntos do plano cartesiano
$$r = \{(x, y) \in R^2;\ -x + y + 1 = 0\}$$
$$c = \{(x, y) \in R^2; x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1 = 0\}$$
   é:
   A) 0
   B) 1
   C) 2
   D) 3
   E) 4

7. (UFJF-MG) Considere as circunferências C_1 e C_2 de equações $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1 = 0$ e $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 4 = 0$, respectivamente. É correto afirmar que
   A) C_1 é tangente ao eixo das abscissas.
   B) C_1 e C_2 se interceptam em um único ponto.
   C) C_1 e C_2 se interceptam em dois pontos.
   D) C_1 e C_2 não se interceptam.

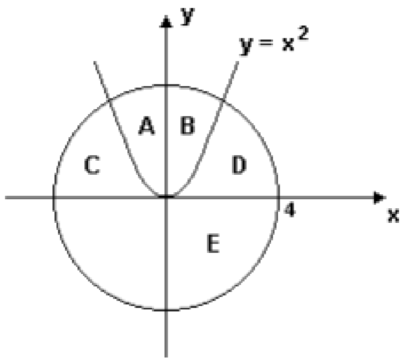
8. (Cesgranrio) As circunferências $x^2 + y^2 + 8x + 6y = 0$ e $x^2 + y^2 - 16x - 12y = 0$ são:
   A) exteriores
   B) secantes
   C) tangentes internamente
   D) tangentes externamente
   E) concêntricas

9. (Unifesp) A região do plano cartesiano, determinada simultaneamente pelas três condições:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 16 \\ y \geq x^2 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

é aquela, na figura, indicada com a letra

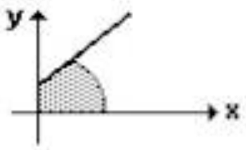
A) A.
B) B.
C) C.
D) D.
E) E.



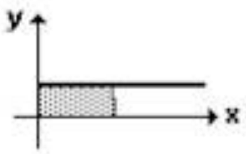
10. (UFCE) A equação da circunferência com centro no ponto $(2, 3)$ e tangente à reta de equação $x + 2y - 3 = 0$ é:
A) $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 13$
B) $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 13$
C) $x^2 + y^2 = 13$
D) $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 5$
E) $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 5$

11. (FUVEST-SP) Das regiões hachuradas na sequência, a que melhor representa o conjunto dos pontos (x, y), do plano cartesiano, satisfazendo ao conjunto de desigualdades $x \geq 0$; $y \geq 0$; $x - y + 1 \geq 0$; $x^2 + y^2 \leq 9$, é:

a)

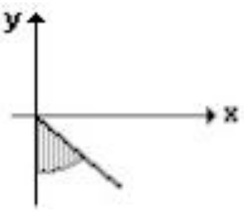


b)

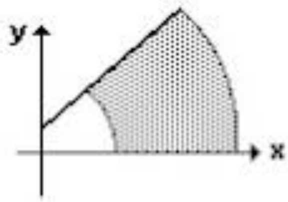


c)

d)

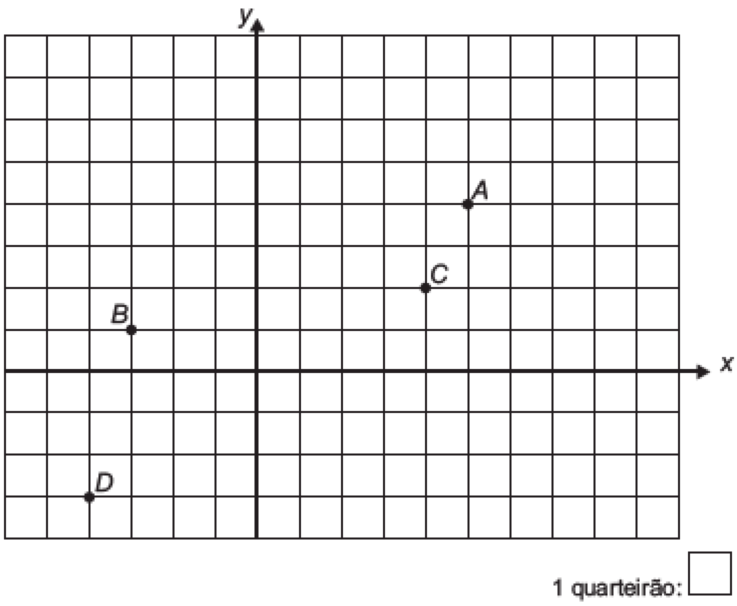


e)



12. (Enem 2015) Considere que os quarteirões de um bairro tenham sido desenhados no sistema cartesiano, sendo a origem o cruzamento das duas ruas mais movimentadas desse bairro. Nesse desenho, as ruas têm suas larguras desconsideradas e todos os quarteirões são quadrados de mesma área e a medida de seu lado é a unidade do sistema.

A seguir há uma representação dessa situação, em que os pontos A, B, C e D representam estabelecimentos comerciais desse bairro.



Suponha que uma rádio comunitária, de fraco sinal, garante área de cobertura para todo estabelecimento que se encontre num ponto cujas coordenadas satisfaçam à inequação: $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 31 \leq 0$

A fim de avaliar a qualidade do sinal, e proporcionar uma futura melhora, a assistência técnica da rádio realizou uma inspeção para saber quais estabelecimentos estavam dentro da área de cobertura, pois estes conseguem ouvir a rádio enquanto os outros não.

Os estabelecimentos que conseguem ouvir a rádio são apenas

A) A e C.

B) B e C.

C) B e D.

D) A, B e C.

E) B, C e D.

LISTA 6 – ESTUDO ANALÍTICO DA ELIPSE E DA HIPÉRBOLE

1. (UNESP) A equação da elipse de focos $F_1 = (-2, 0)$, $F_2 = (2, 0)$ e eixo maior igual a 6 é dada por:

A) $\frac{x^2}{10} + \frac{y^2}{20} = 1$

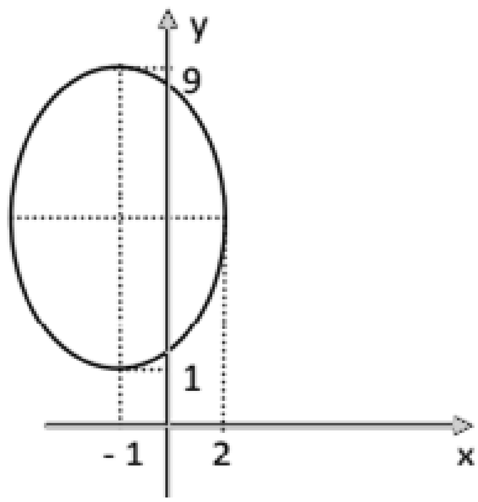
B) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$

C) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{15} = 1$

D) $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{15} = 1$

E) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{25} = 1$

2. (AFA-SP) A equação reduzida da cônica, representada no gráfico a seguir, é:



A) $\frac{(x-4)^2}{9} + \frac{(y-3)^2}{16} = 1$

B) $\frac{(x-5)^2}{9} + \frac{(y+1)^2}{16} = 1$

C) $\frac{(x+1)^2}{16} + \frac{(y-5)^2}{9} = 1$

D) $\frac{(x+1)^2}{9} + \frac{(y-5)^2}{16} = 1$

3. (Unicamp-SP) Os valores de $k \in R$, para que o ponto $A(-2, k)$ pertença à elipse $9x^2 + 4y^2 + 18x - 8y - 23 = 0$ são:

A) $k = 1 \pm \frac{3\sqrt{3}}{2}$

B) $k = 2 \pm \frac{3\sqrt{3}}{2}$

C) $k = 3 \pm \frac{3\sqrt{3}}{2}$

D) $k = 4 \pm \frac{3\sqrt{3}}{2}$

E) $k = -1 \pm \frac{3\sqrt{3}}{2}$

4. (UNIRIO-RJ) A área do triângulo PF_1F_2, em que $P(2, -8)$ e F_1 e F_2 são os focos da elipse de equação $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$, é igual a:

A) 8
B) 20
C) 64
D) 16
E) 32

5. (AFA-SP) Se $A(10, 0)$ e $B(-5, y)$ são pontos de uma elipse cujos focos são $F_1(-8, 0)$ e $F_2(8, 0)$, então o perímetro do triângulo BF_1F_2 mede:

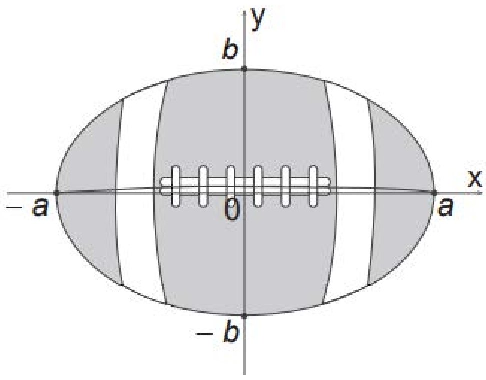
A) 24
B) 26
C) 36
D) 38

6. (AFA-SP) A distância focal da elipse $x^2 + 16y^2 = 4$ é:

A) 1
B) 3
C) $\sqrt{15}$
D) $\sqrt{20}$

7. (Cesesp-PE) Dada a elipse de equação $25x^2 + 9y^2 - 90y = 0$, assinale a alternativa que nos indica corretamente as coordenadas do centro, dos focos, as medidas do eixo maior e menor e a distância focal, respectivamente.
   A) $C(0,0)$, $F_1(0,-4)$, $F_2(0,4)$, 10, 6, 8
   B) $C(0,5)$, $F_1(0,1)$, $F_2(0,5)$, 4, 8, 6
   C) $C(3,0)$, $F_1(1,0)$, $F_2(5,0)$, 10, 6, 3
   D) $C(5,0)$, $F_1(1,0)$, $F_2(9,0)$, 6, 8, 10
   E) $C(0,5)$, $F_1(0,1)$, $F_2(0,9)$, 10, 6, 8

8. (Enem 2015) A figura representa a vista superior de uma bola de futebol americano, cuja forma é um elipsoide obtido pela rotação de uma elipse em torno do eixo das abscissas. Os valores a e b são, respectivamente, a metade do seu comprimento horizontal e a metade do seu comprimento vertical. Para essa bola, a diferença entre os comprimentos horizontal e vertical é igual à metade do comprimento vertical.



   Considere que o volume aproximado dessa bola é dado por $V = 4ab^2$. O volume dessa bola, em função apenas de b, é dado por
   A) $8b^3$
   B) $6b^3$
   C) $5b^3$
   D) $4b^3$
   E) $2b^3$

9. (UFPI) O gráfico de equação $x^2 - y^2 = 4$ representa uma hipérbole. Os focos dessa hipérbole são:

A) $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ e $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$

B) $(2, 0)$ e $(-2, 0)$

C) $(2\sqrt{2}, 0)$ e $(-2\sqrt{2}, 0)$

D) $(0, \sqrt{2})$ e $(0, -\sqrt{2})$

E) $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ e $\left(0, -\frac{1}{2}\right)$

10. (Cesgranrio) Os vértices imaginários da hipérbole de equação

$$\frac{(x-1)^2}{4} - (y-1)^2 = 1$$

são:

A) $(2, 1)$ e $(2, 3)$

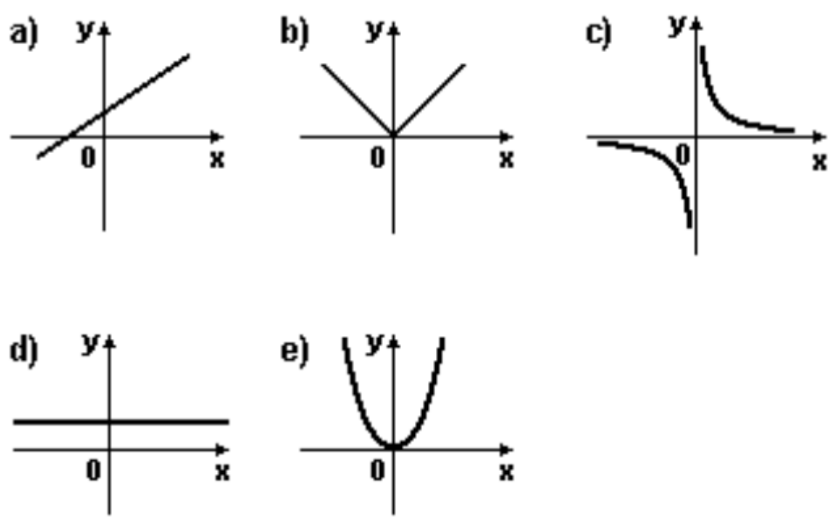
B) $(2, 0)$ e $(2, 2)$

C) $(2, 0)$ e $(1, 2)$

D) $(1, 1)$ e $(1, 2)$

E) $(1, 0)$ e $(1, 2)$

11. (UFRS) O produto de duas variáveis reais, x e y, é uma constante. Portanto, dentre os gráficos abaixo, o único que pode representar essa relação é:



LISTA 7 – ESTUDO ANALÍTICO DA PARÁBOLA

1. A equação $9x^2 + 4y^2 - 18x - 8y - 23 = 0$ representa uma
   A) circunferência.
   B) hipérbole.
   C) parábola.
   D) elipse.
   E) reta.

2. (UFF-RJ) As equações $y - 2x = 0$, $y + x^2 = 0$ e $y^2 - x^2 + 1 = 0$ representam no plano, respectivamente:
   A) uma reta, uma hipérbole e uma parábola
   B) uma parábola, uma hipérbole e uma reta
   C) uma reta, uma parábola e uma elipse
   D) uma elipse, uma parábola e uma hipérbole
   E) uma reta, uma parábola e uma hipérbole

3. (Unirio) As equações $x^2 - 9y^2 - 6x - 18y - 9 = 0$, $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$ e $x^2 - 4x - 4y + 8 = 0$ representam, respectivamente, uma:
   A) hipérbole, uma elipse e uma parábola.
   B) hipérbole, uma circunferência e uma reta.
   C) hipérbole, uma circunferência e uma parábola.
   D) elipse, uma circunferência e uma parábola.
   E) elipse, uma circunferência e uma reta

4. . (UFPE) Considere dois pontos distintos A e B de um plano. O lugar geométrico dos pontos P deste plano tal que a soma das distâncias de P aos pontos A e B é constante, é uma curva denominada:
   A) circunferência
   B) parábola
   C) hipérbole
   D) elipse
   E) reta

5. (UFJF-MG) Considere as afirmativas:

    I. As retas de equações $3x - 2y - 5 = 0$ e $3x - 2y = 0$ são paralelas;

    II. A equação $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{2} = 1$ representa uma hipérbole;

    III. A equação $4y = x^2$ representa uma parábola.

    Assinale a alternativa correta:

    A) Todas são verdadeiras.

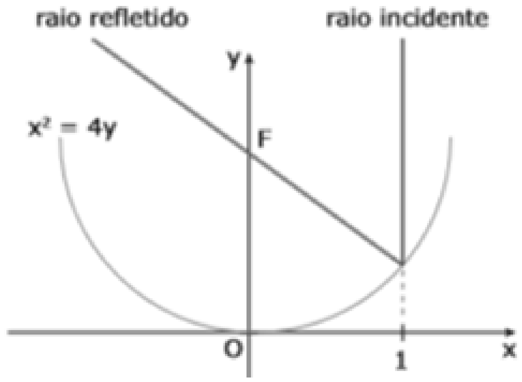
    B) Apenas II é falsa.

    C) I e II são falsas.

    D) II e III são verdadeiras.

    E) Todas são falsas.

6. (Unimontes-MG) É um fato bem conhecido que, em um espelho parabólico convexo, todo raio incidente, paralelo ao eixo de simetria, é refletido, passando pelo foco. Um raio incide em uma parábola de equação $x^2 = 4y$, paralelamente ao eixo dos y, conforme o desenho.



    A equação da reta suporte do raio refletido é:

    A) $-3y + 4x + 4 = 0$

    B) $4x - 3y - 4 = 0$

    C) $3x + 4y - 4 = 0$

    D) $-4x - 3y - 4 = 0$

7. (UFF-RJ) Uma reta r é paralela ao eixo x e contém a interseção das parábolas $y = (x-1)^2$ e $y = (x-5)^2$. A equação de r é:
A) $x = 3$
B) $y = 4$
C) $y = 3x$
D) $x = 4y$
E) $y = \frac{x}{3}$

8. (Unicamp-SP) Assinale a única alternativa que corresponde à equação da parábola que tem por foco o ponto $F(3, 0)$ e por diretriz a reta $x + 3 = 0$.
A) $y - 12x^2 = 0$
B) $y^2 - 12x = 0$
C) $y^2 - 9x = 0$
D) $y - 9x^2 = 0$
E) $y^2 + 12x = 0$

9. (UFPE) Um determinado fio é constituído de um material que, quando preso a dois pontos distantes um do outro de 20 m e ambos a 13 m do solo, toma a forma de uma parábola, estando o ponto mais baixo do fio a 3 m do solo. Assinale a alternativa que corresponde à parábola no sistema de coordenadas cartesianas xOy, em que o eixo Oy contém o ponto mais baixo do fio e o eixo Ox está sobre o solo.
A) $y = x^2 + x + 3$
B) $10y = -x^2 + 30$
C) $y = x^2 + 30$
D) $5y = x^2 + 15$
E) $10y = x^2 + 30$

10. (EN-RJ) A equação da parábola, cujo foco é o ponto $(1, 4)$ e cuja diretriz é a reta $y = 3$, é:

A) $y = x^2 - 2x + 4$

B) $y = -x^2 + x - 8$

C) $y = \frac{x^2}{2} - x + 4$

D) $y = \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} + 2$

E) $x = y^2 - y + 4$

11. (AFA-SP) O parâmetro da parábola que passa pelo ponto $P(6, 2)$ e cujo vértice $V(3, 0)$ é o seu ponto de tangência com o eixo das abscissas é:

A) $\frac{9}{5}$

B) $\frac{9}{4}$

C) 3

D) $\frac{9}{2}$

APÊNDICE C

Testes

TESTE 1 - 10/08/2018

Alunos: ....

(a) Dados os pontos $A(-4, 2)$, $B(6, 4)$ e $C(10, -8)$ do plano, encontre as coordenadas dos pontos D, E e F, pontos médios dos segmentos de reta AB, BC e CA, respectivamente.

(b) Determine as medidas dos segmentos de reta EF e AB. Em seguida, calcule a razão entre elas.

(c) Determine as áreas dos triângulos DEF e ABC e calcule a razão entre elas.

(d) Determine as coordenadas do baricentro G do triângulo ABC.

TESTE 2 - 17/08/2018

Alunos: ....

(a) Determine a equação reduzida da reta r que passa pelo ponto $A(2,2)$ e tem coeficiente angular 2.

(b) Determine a equação reduzida da reta s, que passa pelos pontos $C(2,7)$ e $D(4,1)$.

(c) Encontre as coordenadas do ponto E, interseção entre as retas r e s.

(d) Qual a distância entre o ponto E e a origem do sistema de coordenadas cartesianas?

TESTE 3 - 24/08/2018

Alunos: ....

(a) Determine a equação da reta r que passa pelos pontos $A(0, -2)$ e $B(8, 4)$.

(b) Determine a equação da reta s, que passa pelo ponto $C(1, 5)$ e é paralela a r.

(c) Determine a equação da reta t, perpendicular à reta r e que passa por $C(1, 5)$.

(d) Qual a distância entre o ponto C e a reta r?

TESTE 4 - 31/08/2018

Alunos: ....

(a) Determine a equação reduzida das circunferências:

$$\lambda_1 : x^2 + y^2 + 2x - 6y - 15 = 0 \text{ e } \lambda_2 : x^2 + y^2 + 14x - 10y + 69 = 0$$

(b) Quais são as medidas dos raios r_1 e r_2 das circunferências λ_1 e λ_2, respectivamente? E quais são as coordenadas dos centros C_1 e C_2 de λ_1 e λ_2?

(c) Seja λ_3 uma terceira circunferência, concêntrica à λ_1 e que passa por C_2. Dê as equações geral e reduzida de λ_3.

TESTE 5 - 11/09/2018

Alunos: ....

(a) Seja $\lambda_1 : x^2 + y^2 - 10x - 4y + 20 = 0$ uma circunferência de raio r_1 e centro C_1. Determine a medida de r_1 e a localização de C_1 no plano.

(b) Seja r a reta que passa pelos pontos $A(0,1)$ e $B(5,4)$. Determine a equação geral de r. Em seguida, dê a posição relativa entre λ_1 e r. Justifique a sua resposta.

(c) Seja λ_2 uma circunferência de centro $C_2(9,5)$ e raio $r_2 = 2$. Qual a posição relativa entre λ_1 e λ_2?

TESTE 6 - 18/09/2018

Alunos: ....

(a) Considere uma elipse de equação $16x^2 + 25y^2 - 64x - 50y - 311 = 0$. Dê a equação dessa elipse na forma reduzida.

(b) Determine as coordenadas do centro C da elipse e as medidas dos eixos maior e menor.

(c) Determine a distância focal da elipse e sua excentricidade.

(d) Quais são as coordenadas dos vértices A_1, A_2, B_1 e B_2 da elipse? E as coordenadas dos focos F_1 e F_2?

TESTE 7 - 21/09/2018

Alunos: ....

(a) Considere uma parábola de foco $F(4,3)$ e reta diretriz $d : x = -2$. A parábola tem concavidade voltada para cima, para baixo, à esquerda ou à direita? Justifique sua resposta fazendo um esboço da parábola representando seu foco e a reta diretriz.

(b) Determine as coordenadas do vértice V e o valor do parâmetro p da parábola.

(c) Determine as equações reduzida e geral da parábola.