UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL
CAMPUS DE TRÊS LAGOAS
PROFMAT - MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA

CARLOS ALBERTO ZONTA

O Princípio da Casa dos Pombos aplicado ao ensino de Matemática com a metodologia ativa de aula invertida

Três Lagoas

2019

CARLOS ALBERTO ZONTA

O Princípio da Casa dos Pombos aplicado ao ensino de matemática com a metodologia ativa de aula invertida

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Rede Nacional – PROFMAT, da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campus de Três Lagoas, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Fernando Pereira de Souza

Três Lagoas

2019

ZONTA, Carlos Alberto. **O Princípio da Casa dos Pombos aplicado ao ensino de matemática com a metodologia ativa de aula invertida.** 2019. 66 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campus de Três Lagoas, Três Lagoas, 2019.

Aprovado em: 14/03/2019

Banca Examinadora

Prof. Dr. Fernando Pereira de Souza
(Orientador)
UFMS/CPTL

Prof. Dr. Antonio Carlos Tamarozzi
UFMS/CPTL

João Paulo Bressan
Prof. Dr. João Paulo Bressan
UFMS/CPTL

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus por ter me ajudado nesta jornada.

À minha esposa e ao meu filho, pelo apoio, carinho e compreensão da minha dedicação ao Mestrado.

À minha sobrinha Luciane Sato, pela ajuda na preparação das atividades.

Aos amigos do curso de Mestrado, em especial aos meus parceiros de viagem Panda, Ângela, Cidinha e Giovanna. Juntos dividimos nossas angústias e conquistas.

Aos meus alunos, que participaram e colaboraram na realização das atividades deste projeto.

Aos professores Mônica e Francisco, por me cederem algumas aulas para que eu pudesse apresentar o meu conteúdo e que colaboraram com a pesquisa do meu trabalho, aplicando avaliações em suas salas.

À equipe gestora das escolas estaduais Prof. Nilce Maia Souto Melo, José Candido e Manoel Bento da Cruz, por acreditar que o meu trabalho pudesse contribuir com a formação de seus alunos

Gostaria de agradecer também aos professores da UFMS, Campus de Três Lagoas, por todo o meu crescimento na área da matemática, em especial ao meu orientador, professor doutor Fernando Pereira Souza, que contribuiu muito para minha formação.

RESUMO

ZONTA, Carlos Alberto. **O Princípio da Casa dos Pombos aplicado ao ensino de matemática com a metodologia ativa de aula invertida.** 2019. 66 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campus de Três Lagoas, Três Lagoas, 2019.

Para vivenciar a teoria apresentada, o autor deste trabalho realizou uma pesquisa com quatorze salas de aulas do segundo e terceiro anos do ensino médio, em três escolas Públicas de Araçatuba-SP. Utilizou para a pesquisa o conceito matemático do Princípio da Casa dos Pombos ou Princípio das Gavetas de Dirichlet e comparou os métodos sala de aula invertida e tradicional de ensino. No período de três meses, os estudantes do método aula invertida foram submetidos a duas etapas: Virtual, com vídeo aulas e interação online entre alunos; presencial, com discussões e exercícios. Os alunos do método tradicional tiveram aulas expositivas sobre o princípio abordado, com listas de exercícios resolvidas em grupos de estudo supervisionados pelo professor. O objetivo foi comparar os métodos abordados e para isso realizou-se duas avaliações com um período de dois meses entre elas e analisaram-se estatisticamente os resultados. A proposta do autor era mostrar que ao usar a metodologia ativa de aula invertida o docente pode trabalhar mais as dificuldades dos alunos ao invés de apresentar o conteúdo, tornando a aula mais dialogada, atividades mais práticas, porém, nas avaliações as turmas não apresentaram mais sucesso em um ou outro modelo.

Palavras-chave: Princípio de Dirichlet; Ensino de Matemática; Aula Invertida.

ABSTRACT

ZONTA, Carlos Alberto. The Pigeonhole Principle applied to the teaching of mathematics with the active methodology of inverted class. 2019. 66 f. Dissertation (Master in Mathematics) - Federal University of Mato Grosso do Sul, Campus of Três Lagoas, Três Lagoas, 2019.

In order to apply the presented theory, the author of this work carried out a research with fourteen classrooms of the second and third grade of high school, in three public schools of Araçatuba-SP. He used for the research the mathematical concept of the Pigeonhole Principle or Principle of the drawers of Dirichlet and compared the inverted classroom and traditional methods of teaching. In a three-month period, the students of the inverted classroom method were submitted to two steps: Virtual, with video lessons and online interaction among students; with discussions and exercises. The students of the traditional method had lectures about the principle addressed, solving lists of exercises in study groups supervised by the teacher. The objective was to compare the designated methods and for this two evaluations were carried out with a period of two months between them and the results were statistically analyzed. The author's purpose was to show that when using the active methodology of inverted class, the teacher can focus at students' difficulties instead of presenting the content so the classes become more interactive with more dialogue and more practical activities. However, according to the evaluations the classes did not show more success in either model.

Keywords: Principle of Dirichlet; Mathematics Teaching; Inverted Classroom.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE GRÁFICOS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

A educação é um direito de todos, garantida pela Constituição e defendida por todos como uma premissa para o exercício da cidadania. No Brasil, em sua trajetória histórica, a educação foi praticamente determinada pelos padres da Companhia de Jesus desde o descobrimento. Conforme Rosa (2007, p. 19),

> [...] até meados do século XIX, praticamente, não existiu preocupação com a educação popular no país. Exceto pela experiência dos jesuítas na educação e evangelização dos indígenas em suas missões, a educação esteve voltada apenas para prover a escolarização das camadas dominantes, ou seja, o ensino dos filhos dos primeiros colonos e imigrantes europeus que aqui se estabeleceram naquele primeiro momento da colonização.

Hoje, mais de cinco século após seu descobrimento, o Brasil possui diversas propostas de reestruturação de seu sistema de ensino e de seus componentes curriculares em seu histórico. O ensino majoritário das humanidades clássicas foi substituído por grades curriculares mais homogêneas, em que diversas áreas do conhecimento são priorizadas para a formação integral do cidadão durante as diferentes etapas do ensino básico.

Assim, atualmente a educação no Brasil segue as orientações estabelecidas nas Diretrizes Curriculares Nacionais (DCN), embasadas na Constituição Federal e na Lei de Diretrizes e Bases da Educação (LDB), que tem por finalidade no ensino médio de consolidação e aprofundamento dos conhecimentos adquiridos no ensino fundamental. Ainda, são documentos norteadores os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), nos quais é apresentada a cronologia dos conteúdos a serem ensinados pelas escolas nos ensinos básico e médio.

O tema deste estudo está inserido no contexto de ensino da Matemática. Inserida na subárea “Ciências da Natureza e Matemática” das grandes áreas curriculares apresentadas nos PCNs, a matemática desempenha importante papel na formação do aluno, visto que “permite resolver problemas da vida cotidiana, tem muitas aplicações no mundo do trabalho e funciona como instrumento essencial para a construção de conhecimentos em outras áreas curriculares.” (BRASIL, 1997, p. 15).

Além disso, o ensino da matemática influencia a formação de capacidades intelectuais, na estruturação do pensamento e na agilização do raciocínio dedutivo do aluno, o que evidencia ainda mais a necessidade de práticas educativas que privilegiem o aprendizado (BRASIL, 1997).

Para este estudo foi feita uma escolha no contexto da matemática, focando no estudo da análise combinatória, ramo da matemática que analisa estruturas e relações discretas e é um conteúdo apresentado no 2º ano do ensino médio, o qual inúmeros alunos têm dificuldade para aprender (MORGADO, 1991).

A análise combinatória é uma técnica para resolução de problemas de contagem, sendo possível determinar o número de permutações, combinações e arranjos possíveis baseados no Princípio Fundamental da Contagem.

Para o entendimento da análise combinatória é necessário que o aluno se aproprie de um tipo específico de pensamento denominado raciocínio combinatório. Este, por sua vez, permite uma melhor compreensão de fenômenos do cotidiano, na natureza e nas possibilidades que terão para a resolução de problemas reais, como descrito nos PCNs do Ensino Médio:

> As habilidades de descrever e analisar um grande número de dados, realizar inferências e fazer predições com base numa amostra de população, aplicada as ideias de probabilidade e combinatória a fenômenos naturais e do cotidiano são aplicações da Matemática em questões do mundo real que tiveram um crescimento muito grande e se tornaram bastante complexas.(BRASIL, 2000, p. 44).

Técnicas e raciocínios estatístico e probabilístico são instrumentos tanto das Ciências da Natureza quanto das Ciências Humanas. Isto evidencia a importância de uma cuidadosa abordagem dos conteúdos de contagem, estatística e probabilidade no Ensino Médio, ampliando a interface entre o aprendizado da Matemática e das demais ciências e áreas (BRASIL, 2000).

Alguns resultados e métodos de prova na matemática tornam-se atraentes porque exploram relações entre conjuntos finitos e são expressos em uma linguagem coloquial (LIMA; FALKEMBACH; TAROUCO, 2014).

De forma ainda mais específica, este estudo abordou o Princípio das Gavetas ou o Princípio da Casa dos Pombos, proposto pelo matemático alemão *Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet*, em 1834. O teorema é frequentemente utilizado por todos de forma intuitiva e, se bem analisado, torna-se um método eficaz para a resolução de problemas.

Este princípio pode ser enunciado, de maneira simples, da seguinte forma: se temos n + 1 pombos para serem colocados em n casas, então uma casa conterá, pelo menos, 2 pombos.

Os professores nem sempre abordam este princípio com seus alunos no ensino médio e estes, muitas vezes, são privados de desenvolver uma das capacidades de resolução de problemas por não conhecerem a regra.

A utilização de recursos tecnológicos inovadores facilita a compreensão, uma vez que são utilizadas metodologias de ensino diferentes das tradicionais, estando mais próximas da realidade da nova geração de estudantes. Assim, procurando melhorar os processos de construção do conhecimento de nossos alunos, buscamos novos métodos e ensino.

Há consenso entre educadores e estudiosos da área que a metodologia tradicional expositiva não leva a resultados satisfatórios. Aquela aula tradicional, por meio da qual somente o professor fala e os alunos apenas ouvem e, eventualmente fazem perguntas, mostrou-se cansativa, desmotivadora, pouco capaz de identificar grandes qualidades e deficiências de cada educando, entre vários outros problemas (CARTA CAPITAL, 2017).

Assim, novas metodologias emergem num contexto de grandes avanços tecnológicos. Graças ao advento da internet, a informação pode ser acessada de qualquer lugar, a qualquer hora, o que impulsiona a propagação de metodologias assistidas por tecnologias, como a proposta da sala de aula invertida.

A aula invertida (*Flipped classrom*) é um método utilizado em algumas das mais respeitadas universidades do mundo, inclusive no Brasil, há um bom tempo (CARTA CAPITAL, 2017).

A aula invertida, como o próprio nome indica, consiste em inverter o processo de aprendizagem, incentivando a discussão do que foi objeto de reflexão antes da exposição do professor. Dessa forma, há uma inversão do modelo tradicional de ensino, em que as tarefas que eram destinadas à lição de casa tornam-se materiais de aprendizagem ativa em sala de aula, fazendo com que os alunos estudem antes das aulas, chegando à elas informados do conteúdo que será exposto pelo professor. Os alunos recebem indicações de livros, filmes, *sites*, entre outros, para estudo prévio e preparação para aula (FUNDAÇÃO GETÚLIO VARGAS, 2015).

Esse método tem sido usado no Brasil por professores da Universidade de São Paulo (USP), Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUCSP), dentre outras.

Nos anos iniciais, o programa de mestrado PROFMAT era baseado na metodologia da aula invertida, na qual os alunos tinham que assistir a videoaulas antes das aulas expositivas ministradas pelos professores do programa. Há relatos de escolas nas quais o desempenho dos alunos melhorou muito com o uso do método.

O objetivo principal da sala invertida é proporcionar ao aluno o acesso prévio ao conteúdo abordado, e incentivar a discussão do que foi objeto de reflexão antes da exposição aos demais colegas e professor. Dessa forma, há uma inversão do modelo tradicional de ensino, em que tarefas que eram destinadas à lição de casa tornam-se materiais de aprendizagem ativa em sala de aula (FUNDAÇÃO GETÚLIO VARGAS, 2015).

Com base no exposto, este trabalho teve objetivo de comparar metodologias distintas para abordagem do conteúdo de análise combinatória, a saber, o teorema do Princípio da Casa dos Pombos. Usando a metodologia convencional e a sala invertida, com vistas a inferir sobre a eficácia da aprendizagem do raciocínio matemático em diferentes situações de aprendizagem.

A escolha do tema justifica-se por se tratar de um princípio extremamente elementar, assim a sua aplicação em sala de aula torna-se mais fácil, pelo menos num primeiro momento. O princípio é útil na resolução de problemas que, pelo menos à primeira vista, não são imediatos. Para aplicá-lo devemos identificar quem são os pombos e quem são as casas.

Para a realização da proposta foi feita uma divisão capitular na qual apresenta, no primeiro capítulo, uma breve explanação sobre o princípio da casa dos pombos, as demonstrações do princípio e exemplos de aplicação.

No capítulo 2, intitulado “A importância do ensino da matemática”, destaca-se que a importância de saber matemática está atrelada a todas as áreas do conhecimento humano. A compreensão desta matéria é importante não apenas na vida escolar, mas ajuda a resolver problemas do nosso cotidiano.

No terceiro capítulo é apresentado um breve estudo sobre metodologias inovadoras em sala de aula, com enfoque na sala de aula invertida. Em geral o ensino de matemática usa a metodologia clássica, na qual os alunos aprendem fazendo baterias de exercícios. Entretanto, devido ao fato de que hoje os jovens são mais abertos ao uso de novas tecnologias, a proposta da sala invertida permite ao aluno tornar-se protagonista do seu processo de aprendizagem, fazendo isso a partir e uma aprendizagem colaborativa, utilizando as redes sociais para trabalhar os conteúdos em sala e aula.

O quarto capítulo é dedicado à apresentação da pesquisa de campo. Foram aplicadas aulas utilizando métodos de estudos diferentes: método tradicional e método de aula invertida. Foram aplicadas avaliações com o objetivo de comparar os métodos utilizados na pesquisa. Os resultados e discussões da pesquisa são apesentados no capítulo 5.

O sexto e último capítulo é dedicado à apresentação das conclusões e considerações finais, obtidas a partir da análise comparativa entre as metodologias adotadas.

CAPÍTULO 1: PRINCÍPIO DA CASA DOS POMBOS

Para compreender o princípio da casa dos pombos apresenta-se, primeiramente, um breve estudo de seu idealizador, Dirichlet, um grande matemático alemão do século XIX. Depois, a ilustração e demonstração matemática do teorema, finalizando com exemplos de aplicação.

1.1 DIRICHLET

Nascido em Düren, Alemanha, Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet foi considerado um matemático de grande expressão em sua época. Recebeu uma parte da educação na Alemanha e outra na França, junto com grandes matemáticos, como Biot, Fourier, Francoeur, Hachette, Laplace, Lacroix, Legendre e Poisson, que promoveram seu interesse pela produção de conhecimento matemático. A Lei da Reciprocidade, a Teoria dos Números, a Equações Diferenciais parciais elípticas e a Teoria da Casa dos Pombos, dentre outras contribuições, são creditadas a Dirichlet (VIEIRA, 2015)

Dirichlet e o matemático alemão Jacobi eram muito próximos, a ponto de um exercer influência sobre o outro nas pesquisas acerca das teorias sobre números. Dirichlet possuía extremo apreço pelas obras de Gauss, e se aprofundou bastante sobre o livro “Disquisitones Arithmeticae” de Gauss. Sua primeira publicação abordou o “Último Teorema de Fermat”, hoje provada pelo matemático britânico Andrew Wiles, teorema este que afirmava que para $n > 2$, a equação $x^n + y^n = z^n$ não possuiria soluções completas, exceto a solução trivial, com x, y ou $z = 0$. Dirichlet formulou uma prova parcial para $n = 5$, posteriormente completada por Adrien-Marie Legendre, e quase ao mesmo tempo Dirichlet também completou sua própria demonstração. Tempos depois, ele também forneceu uma prova completa para a hipótese de $n = 14$ (AGUIAR, 2013).

Dirichlet era considerado um aluno excepcionalmente atencioso e bem-comportado, interessava-se por História, assim como por Matemática. Como professor, era considerado excelente, sempre se expressando com grande clareza. Ele raramente falava nas reuniões e, nos últimos anos de vida, estava relutante em fazer aparições públicas. Alguns matemáticos notáveis, como Gotthold Eisenstein, Leopold Kronecker e Rudolf Lipschitz, foram seus alunos (AGUIAR, 2013).

1.2 ILUSTRAÇÃO E DEMONSTRAÇÃO DO PRINCÍPIO DA CASA DOS POMBOS

O Princípio da Casa dos Pombos, também conhecido como princípio das gavetas, é um dos métodos de demonstração mais utilizados em competições de matemática. É, ainda, conhecido em alguns países (na Rússia, por exemplo) como Princípio de Dirichlet em homenagem ao matemático Lejeune Dirichlet, o primeiro matemático a usar este método para resolver problemas não triviais (OLIMPÍADAS DE MATEMÁTICA, 2018).

De acordo com Paiva e Veloso (2016, p. 1) "se distribuirmos *n* objetos em *m* gavetas com $n > m$, então pelo menos uma gaveta terá mais que um objeto".

Para demonstrar este enunciado, podemos fazer uma simples contagem dos pombos distribuídos em suas casas. Suponha-se que em cada casa não tenha mais do que um pombo, então contando todos os pombos distribuídos nas $(n-1)$ casas, teremos ao todo $(n-1)$ pombos, o que contradiz a hipótese de termos n pombos a serem colocados nas $(n-1)$ casas. Logo, uma delas conterá pelo menos dois pombos.

Uma atividade lúdica para a ilustração do teorema é a dança das cadeiras (Figura 1) que consiste numa roda de cadeiras e outra de pessoas, sendo que o número de assentos deve ser sempre um a menos em relação aos indivíduos participantes.

Coloca-se uma música para tocar enquanto as pessoas circulam em volta das cadeiras e quando a música parar, todos devem sentar em alguma cadeira. Quem não conseguir sentar, é eliminado e tira-se mais uma cadeira. Ganha quem se sentar na última cadeira.

Figura 1 – Dança das cadeiras

Fonte: Demonstre (2018)

Outro exemplo para ilustrar o teorema: dado um conjunto de 13 pessoas, pelo menos duas delas fazem aniversário no mesmo mês. Para chegar a esse resultado consideramos as casas como sendo os possíveis meses que uma pessoa possa fazer aniversário e os pombos as pessoas. Assim são 12 casas e 13 pombos, logo pelo princípio das casas dos pombos, pelo menos 2 pessoas deverão ocupar a mesma casa, ou seja, um dos meses terá pelo menos 2 aniversariantes. Assim, temos: se m pombos devem ser postos em n casas, e se m > n, então pelo menos uma casa irá conter mais de um pombo (ABDALLA, 2014)

Para confirmar este resultado por indução matemática sobre o número n de casas considera-se que, para n = 1, o resultado é obvio, pois se temos mais de um pombo e uma só casa, temos que acomodar, nesta casa, mais de um pombo. Suponha então o resultado válido para certo número n de casas. Consideremos a situação de n+1 casas e m > n+1 pombos. Queremos mostrar que o resultado vale também neste caso.

Depois de acomodar todos os pombos nas n+1 casas, escolhemos uma casa ao acaso. Se nesta casa há mais de um pombo, a nossa asserção está provada. Se nesta casa não existe nenhum pombo, nas n casas restantes estão acomodados m > n+1 > n pombos, o que, pela hipótese de indução, acarreta que em uma das casas há mais de um pombo. Se na casa escolhida há um pombo, então, nas n casas restantes, estão distribuídos m - 1 > n pombos, o que, novamente, pela hipótese de indução, acarreta que em uma das casas há mais de um pombo.

Conforme Abdalla (2014), matematicamente falando, isso quer dizer que, se o número de elementos de um conjunto finito A é maior do que o número de elementos de um outro conjunto B, então uma função de A em B não pode ser injetiva. Uma função diz-se é injetiva (ou injetora), se e somente se quaisquer que sejam x_1 e x_2, pertencentes ao domínio da função, x_1 é diferente de x_2 implica que f(x_1) é diferente de f(x_2), ou seja, todas as imagens devem ser diferentes.

Embora se trate de uma evidência extremamente elementar, o princípio é útil para resolver problemas que, pelo menos à primeira vista, não são imediatos. Para aplicá-lo, devemos identificar, na situação dada, quem faz o papel dos pombos e quem faz o papel das casas.

Sejam n gavetas e r um inteiro positivo dado. Coloquemos a_1 objetos na primeira gaveta a_2 objetos na segunda, e assim sucessivamente, até a_n objetos na n-ésima, gaveta. Então, se a média (a_1 + a_2 + ... + a_n) / n for maior do que r – 1, uma das n gavetas conterá pelo menos r objetos.

Demonstração: A demonstração deste fato é bem simples. Se todos os a_i forem menores do que r. então

a_1 ≤ r – 1

a_2 ≤ r – 1

: :

a_n ≤ r – 1

Logo a_1 + a_2 + ... + a_n) ≤ $nr - n = n\,(r-1)$

donde (a_1 + a_2 + ... + a_n) / n ≤ n ≤ r – 1, o que é uma contradição.

Observação: Este teorema pode ser apresentado sem nenhuma referência a objetos e gavetas, mas tão somente como uma propriedade simples da média: se média dos números naturais a_1, a_2, ..., a_n for maior do que r – 1, então um dos a_i deverá ser maior do que ou igual a r.

O princípio da casa dos pombos pode ser deduzido deste último teorema. Com efeito, se tivermos n objetos para distribuir entre $(\,n-1)$ gavetas, então a média $\frac{n}{n-1}$ certamente será maior do que 1. Logo, fazendo r = 2 teremos que uma das gavetas deve conter pelo menos 2 objetos.

O teorema que acabamos de apresentar pode ser usado para demonstrar o seguinte resultado.

Exemplo 1: São dados dois discos, A e B, cada um deles dividido em 200 setores iguais. Os setores dos discos são pintados de brancos ou de preto. Sabe-se que no disco A há 100 setores brancos e 100 pretos, em ordem desconhecida. O número de setores brancos de B é arbitrário e desconhecido por nós.

Coloquemos o disco A sobre o disco B de modo que cada setor de A fique exatamente sobre um setor de B (obs.: sempre que dissermos que o disco A foi colocado sobre o disco B, fica convencionado que há esta coincidência de setores).

É então possível escolher a posição de A de maneira que existam pelo menos 100 setores de A que tenham a mesma cor que os correspondentes setores de B.

Solução: Coloque A sobre B. Seja a_1 *o número de setores sobrepostos com cores coincidentes.*

Mantendo B fixo, gire A de um setor (ou seja, de um ângulo de 2π/200rd) no sentido dos ponteiros do relógio. Seja então a_2 o número de setores sobrepostos coincidentes.

Continue com este processo, girando A sempre de 2π/200rd no sentido dos ponteiros dos relógios e obtendo a_3, a_4, ..., a_{200}.

É então verdade que o número total de coincidências é:

$a_1 + a_2 + ... + a_{200} = 200 \times 100 = 2 \times 100^2$

Com efeito, fixado um setor do disco B, (preto, por exemplo), como o disco A tem exatamente 100 setores pretos, haverá 100 posições em que este setor B terá a mesma cor que o setor correspondente de A. Assim, o número total de coincidências será o número de setores de B (200) vezes 100 (o número de setores vezes o número de coincidências por setor).

Então, pelo teorema, temos:

$(a_1 + a_2 + ... + a_{200}) / 200 = 100 > 100 - 1$ *(neste caso r = 100)*

Logo, pelo menos um dos a_i deve ser igual a ou maior do que 100, ou seja, para uma das posições o número de coincidências é de pelo menos 100.

Exemplo 2: em um pomar há 1000 árvores. Sabendo que não há árvores com mais que 800 frutos, mostrar que no pomar há árvores com a mesma quantidades e frutos.

Solução: Dada pelo princípio das casas dos pombos, é que temos como casa o número de frutos e de pombos o número e árvores, logo como o número de pombos é maior que o número de casas, necessariamente 2 pombos deverão ocupar a mesma casa.

Exemplo 3: Se tivermos um grupo de 13 pessoas, então, com certeza, duas delas faz aniversário no mesmo mês e, se o grupo aumentar para 32, pode afirmar também que existem no mínimo duas pessoas que fazem aniversário no mesmo dia.

Solução: Pelo princípio da casa dos pombos, podemos considerar como os pombos o número de pessoas e como as casas o número de meses do ano, logo como temos 13 pombos e 12 casas, pelo menos 1 casa receberá mais de um pombo. Como o mesmo argumento pode considerar como pombos o número de pessoas e como casas o número máximo de dias de um mês. Logo como temos 31 casas e 32 *pombos, necessariamente pelo PCP dois ou mais pombos deverão ocupar a mesma casa.*

Exemplo 4: Em um restaurante, há 16 amigos sentados em torno de uma mesa circular para uma confraternização. Um garçom serve a cada um deles, sem perguntar a sua preferência, um suco. Alguns desses sucos são de laranja e outros de abacaxi. Sabendo que oito desses amigos preferem suco de laranja e outros oito preferem de abacaxi, mostre que, sem mexer nos amigos e fazendo apenas rotações na mesa (por exemplo, sentido horário), é possível fazer com que pelo menos 8 amigos tenham suas preferências respeitadas.

Solução: A mesa pode assumir 16 posições diferentes. Seja a_i, i *= 1, 2,..., 16, o número de amigos cuja preferência é atendida com a mesa na posição* i*. Portanto, temos:*

- Pombos: O número total de preferências atendidas pela mesa em cada posição i, (a_1 +a_2 + ... + a_{16});
- Casas: As 16 posições distintas que a mesa pode assumir;
- Regras: Cada número de amigos cuja preferência é atendida está associado com a mesa na posição i.

Mas cada suco é colocado sucessivamente, em frente a cada um dos amigos e sabemos que existem exatamente 8 amigos que preferem cada sabor, ou seja, cada suco atende a exatamente 8 amigos. Visto que o garçom serviu 16 sucos, podemos concluir que o total de preferências atendidas será 128. Assim, temos:

$$a_1 + a_2 + \dots + a_{16} = 128 \rightarrow \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_{16}}{16} = 8$$

Logo, pelo Princípio da Casa dos Pombos, podemos concluir que pelo menos um a_i, i= 1, 2,..., 16, será igual a oito, no mínimo. Ou seja, há uma determinada posição da mesa em que pelo menos oito dos amigos terão suas preferências atendidas. (PAIVA; VELOSO, 2016)

Exemplo 5: A média de idade do elenco dos 23 jogadores da Seleção Brasileira de futebol campeã da Copa das Confederações, realizada no Brasil, no ano 2013, era de 26 anos. O que se pode dizer da idade do atleta mais velho do time?

Como temos 23 atletas, podemos ter no máximo n = 23 idades diferentes (gavetas). Sabemos que a média de idade da seleção é 26 anos. Portanto:

- Objetos: Cada um dos 23 atletas;
- Gavetas: As 23 possíveis idades;
- Regra: Cada atleta está associada a sua idade.

$(a_1 + a_2 + ... + a_{23}) / 23 = 26$

Assim, pela consequência do Princípio da casa dos Pombos, existe pelo menos um atleta, a_i com i = 1, 2,..., 23, que possui idade de pelo menos 26 anos.

(PAIVA; VELOSO, 2016)

Exemplo 6: Mostre que em um conjunto de sete inteiros, não necessariamente consecutivos, existem pelo menos dois que possuem o mesmo resto quando divididos por seis.

Sabemos que: $b = a\,.\,q + r,$ com $0 \leq r < a$.

Sejam os sete números: $\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7\}$, não necessariamente consecutivos. Ao dividi-los por seis, os possíveis restos são da forma {0, 1, 2, 3, 4, 5}.

- Objetos: Os sete números;
- Gavetas: Os seis possíveis restos;
- Regra: Cada número está associado a seu resto.

Pelo Princípio da Casa dos Pombos, ao dividirmos os sete números por seis, teremos pelo menos dois números com o mesmo resto.

(PAIVA; VELOSO, 2016)

CAPÍTULO 2: A IMPORTÂNCIA DO ENSINO DA MATEMÁTICA

Este capítulo aborda a importância da matemática no cotidiano do aluno, onde esta é de suma importância não só na resolução de problemas matemáticos no contexto da educação formal, mas também naqueles relacionados ao dia a dia das pessoas. Destaca-se ainda o papel do professor de matemática, que tem a função de incentivar as novas gerações na busca por este conhecimento.

2.1 A MATEMÁTICA COMO MEIO DE FORMAÇÃO DO CIDADÃO

A educação formal tem como objetivo formar cidadãos críticos, conscientes de seu papel na sociedade e detentores do conhecimento necessário para levá-los á exercício da cidadania e participação dos processos produtivos. Formar cidadãos e trabalhadores qualificados, mas para isso, deve ofertar uma formação de qualidade. Nesse sentido, os órgãos competentes elaboram políticas e documentos norteadores para que os objetivos da educação sejam atingidos.

Assim, a escola busca oferecer os saberes necessários para a construção do conhecimento dos indivíduos, de modo a torná-los autônomos no exercício da cidadania. História, geografia, ciências da natureza, matemática, português, dentre outros componentes; fazem parte dos conteúdos que a escola deve transmitir, de forma dialógica a seus educandos.

Dentre as disciplinas lecionadas nas Instituições de Ensino, a Matemática é uma das mais importantes pelo fato de ajudar a formar o raciocínio lógico e dedutivo do cidadão. Com base nisso, o aluno será capaz de pensar na matemática em seu aspecto científico, como por exemplo, ser capaz de resolver problemas, pensar em valores numéricos, usando assim suas técnicas e fórmulas e também no aspecto social da matemática, que ajuda o aluno a ser ver no mundo, compreender a realidade em que vive e se tornar ativo na sociedade em que está inserido.

A argumentação também faz-se necessária à prática do professor que se preocupa com a formação de alunos críticos. O aluno precisa ser capaz de argumentar e sustentar suas opiniões e ideias, para que possa participar conscientemente da tomada de decisões (ALTENHOFEN, 2008).

Como pontuado por Vygotsky (1989 apud MACIEL, 2009, p. 19),

> Mesmo nos estágios mais primitivos do desenvolvimento histórico os seres humanos foram além dos limites das funções psicológicas impostas pela natureza, evoluindo para uma organização nova, culturalmente elaborada, de seu comportamento.

Altenhofen (2008, p. 26-27) pondera que:

> Ao ter consciência e tomar decisões, o aluno passa a existir também e essa existência é histórica. E é essa ação transformadora da realidade que faz com que sejam seres com suas próprias concepções e valores, ou seja, com sua própria cultura. Assim, acredito que é também esse processo, que o torna cidadão competente e crítico, com capacidade de participação consciente num processo democrático, que pode acontecer tanto na sala de aula, quanto em outros espaços.

Assim sendo, com base nas proposições supramencionadas, Maciel (2009) conclui que a prática educativa está fortemente vinculada à formação do cidadão, e a escola é um local no qual se faz o uso da cidadania diariamente. Indivíduos dotados de conhecimento são capazes de evoluir culturalmente, tornando-se cidadãos aptos e preparados para as mudanças da sociedade. De fato, o desenvolvimento da autonomia, da criticidade e da cooperação é fundamental para viver em um mundo em constante evolução.

Aprender matemática implica dominar também aspectos da linguagem e da interpretação de texto, pois os problemas matemáticos são expressos não só por números e símbolos, mas também por textos, o que requer do aluno a habilidade de compreender e interpretar para poder chegar ao resultado correto.

Os PCNs pontuam que:

> As necessidades cotidianas fazem com que os alunos desenvolvam uma inteligência essencialmente prática, que permite reconhecer problemas, buscar e selecionar informações, tomar decisões e, portanto, desenvolver uma ampla capacidade para lidar com a atividade matemática. Quando essa capacidade é potencializada pela escola, a aprendizagem apresenta melhor resultado. (BRASIL, 1997, p. 29).

Sendo assim, a escola é colocada como um local privilegiado para que os saberes matemáticos sejam potencializados para uma prática cotidiana, que leve o aluno a compreender essa ciência a partir da sua realidade, de maneira funcional.

Muitas vezes a matemática é vista como algo difícil porque o aluno não consegue relacioná-la com sua realidade, daí a importância de práticas educativas que privilegiem o estudo de conteúdos de forma contextualizada, já que

> [...] o estabelecimento de relações é tão importante quanto a exploração dos conteúdos matemáticos, pois, abordados de forma isolada, os conteúdos podem acabar representando muito pouco para a formação do aluno, particularmente para a formação da cidadania. (BRASIL, 1997, p.29).

Diante do exposto, evidencia-se a importância do papel do professor de matemática, tema este discutido na próxima seção.

2.2 O PAPEL DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA

A matemática é vista como uma disciplina difícil, que pode provocar medo e angústia em muitos alunos. Isso porque a matemática é sequencial e, se o aluno não aprender determinado assunto, dificilmente dará sequência em seu aprendizado nos próximos anos, assim “a matemática se torna a grande vilã no contexto escolar” (RAMOS, 2017, p. 215).

O autor supracitado afirma que:

> Por mais que se invista na equipagem das escolas, ou seja, em tecnologias avançadas e todos os outros recursos usáveis na educação, não se pode negar a importância do professor em sala de aula. Sendo ele (o professor), um grande agente do processo educacional, um mediador de conhecimento, sua formação é um fator fundamental para esse processo. Não apenas a graduação universitária ou a pós-graduação, mas a formação continuada, ampla, as atualizações e os aperfeiçoamentos. (RAMOS, 2017, p. 215).

Um aspecto importante destacado nos PCNs de matemática refere-se à importância do conhecimento que o professor deve ter da história dos conceitos matemáticos, pois tais conhecimentos agregam elementos que permitem mostrar aos alunos a matemática como “ciência que não trata de verdades eternas, infalíveis e imutáveis, mas como ciência dinâmica, sempre aberta à incorporação de novos conhecimentos.” (BRASIL, 1997, p. 30).

Assim, é importante que o professor de matemática, além dos saberes inerentes à área de escolha, seja capaz de ministrar suas aulas de forma atrativa, instigante e motivadora, levando seus alunos a questionamentos e posicionamentos críticos. É necessário que novas abordagens sejam adotadas, pois como já mencionado, metodologias expositivas não têm demonstrado efetividade.

Em seu estudo, Soares (2004) relata que o professor de matemática deve adotar novas posturas metodológicas. Entretanto, somente poderão ser assumidas se houver uma definição clara sobre a função que a matemática desempenha no currículo escolar. Ela não pode ser vista como uma obrigatoriedade do currículo, mas como um saber necessário para o exercício da cidadania, com aplicações práticas e contextualizadas.

Outra questão apontada pela autora é a percepção que o professor tem sobre o conhecimento matemático e as interações que é capaz de estabelecer com esse conhecimento. “A sua utilização como ferramenta para a construção da cidadania vai depender da sua capacidade em tratá-lo como um conhecimento articulado aos outros campos do saber e historicamente situado.” (SOARES, 2004, p.2).

Para Ramos (2017) é evidente que a resolução de um problema deve constituir um momento especial de interação e diálogo, tendo o professor como moderador, cabendo-lhe acolher as respostas, formular novas perguntas e ainda estimular o compartilhamento das diversas estratégias apresentadas para a obtenção de um resultado.

Ramos (2017, p. 215) destaca ainda que:

> [...] é imperioso viver o processo de ensino-aprendizagem da Matemática em diálogo com os alunos e não para os alunos. O professor deve ser um provocador de diálogos, que os reforça e que harmoniza as propostas de solução, não deixando isolados os saberes científicos. [...] o professor tem a necessidade deixar o aluno raciocinar, e expor livremente seus pensamentos, assim provocar uma sistematização de novos aprendizados matemáticos.

Nos PCNs de Matemática para o Ensino Médio é destacado que, ao selecionar as atividades propostas, o professor deve atentar-se à necessidade da manutenção de um espaço para a diversidade de opiniões, de ritmos de aprendizagem e outras diferenças pessoais, porém mantendo o aspecto desafiador das atividades, que deve estar presente todo o tempo, permitindo o engajamento e a continuidade dos alunos no processo de aprendizagem (BRASIL, 2000).

Dessa forma, destaca-se que o papel do professor de problematizar e permitir que os alunos pensem por si mesmos, identificando seus próprios erros e persistindo, é determinante para o desenvolvimento das competências e o aprendizado dos conteúdos propostos (BRASIL, 2000).

É evidente, diante do exposto, que o professor tem um papel determinante na mudança e na inovação do processo educativo, de modo que se faz necessário "considerar a importância de ser educador e sentir a responsabilidade do sucesso do aluno na aprendizagem da disciplina." (RAMOS, 2017, p. 215).

Verifica-se que o professor é fundamental no processo de formação de competências e habilidades no tocante não só à matemática, mas a todas as disciplinas e conteúdos ministrados na escola. O professor deve ter consciência da importância de seu papel enquanto formador de cidadãos, e não deve limitar-se a transmitir conteúdos, mas deve preocupar-se em construir conhecimento junto com seus alunos de modo que estes se apropriem dos saberes e competências necessários ao exercício pleno da cidadania, com ética e criticidade.

Considerando que o fazer docente está intimamente relacionado à metodologia adotada, no próximo capítulo são apresentados alguns conceitos relacionados a metodologias inovadoras em sala de aula, com foco na sala invertida, que foi objeto de estudo desta pesquisa.

CAPÍTULO 3: METODOLOGIAS INOVADORAS EM SALA DE AULA

Neste capítulo apresentam-se algumas metodologias inovadoras em sala de aula, destacando-se a sala de aula invertida, uma proposta que busca proporcionar um melhor aprendizado aos alunos utilizando os recursos tecnológicos disponíveis de modo a tornar a aprendizagem mais significativa.

3.1 INOVANDO O ENSINO E APRENDIZAGEM

De acordo com Moran (2015) é possível realizar mudanças no sistema de ensino e aprendizagem de forma progressivas na direção da personalização, colaboração e autonomia, o que não se pode mais conceber é a manutenção do modelo tradicional de educação e achar que com poucos ajustes dará certo.

Para o autor supracitado "os ajustes necessários – mesmo progressivos – são profundos, porque são do foco: aluno ativo e não passivo, envolvimento profundo e não burocrático, professor orientador e não transmissor." (MORAN, 2015, p. 22).

Braga (2018) afirmam que no meio educacional, a palavra mudança tem sido uma constante nos discursos de especialista da área. "Metodologias ativas, inovação, competências, novas tecnologias, tudo para se fazer diferente do que se fazia no passado." (BRAGA, 2018, p. ix).

Os autores explicam que, embora a metodologia tradicional ainda se faça presente, é desejável que seja alternada com metodologias mais ativas, nas quais os alunos são protagonistas de seu próprio aprendizado. "A aula expositiva é um elemento necessário no contexto educacional, mas deve ser complementar e secundária no processo de aprendizagem." (BRAGA, 2018, p. ix).

Conforme Moran (2015) muitas escolas e professores preferem manter os modelos de aulas prontas, com roteiros previamente definidos, que, dependendo da qualidade desses materiais, das atividades de pesquisa e projetos planejados e da forma de implementá-los podem ser úteis, desde que não sejam executados mecanicamente.

> Um bom professor pode enriquecer materiais prontos com metodologias ativas: pesquisa, aula invertida, integração sala de aula e atividades online, projetos integradores e jogos. De qualquer forma esses modelos precisam também evoluir para incorporar propostas

> mais centradas no aluno, na colaboração e personalização. (MORAN, 2015, p. 23).

Em escolas com menos recursos é possível propor projetos significativos e relevantes para os alunos, ligados à comunidade, utilizando tecnologias simples como o celular, por exemplo, e buscando o apoio de espaços mais conectados na cidade. Embora ter boa infraestrutura e recursos traga muitas possibilidades de integrar presencial e *online*, existem muitos professores que conseguem realizar atividades estimulantes, em ambientes tecnológicos mínimos (MORAN, 2015).

Para aquelas instituições que possuem mais recursos Moran (2015, p. 23) sugere que elas podem:

> [...] fazer uma integração maior entre a sala de aula, os espaços da escola e do bairro e os espaços virtuais de aprendizagem. Podem disponibilizar as informações básicas de cada assunto, atividade ou projeto num ambiente virtual (*Moodle, Desire2Learn*, *Edmodo* e outros) e fazer atividades com alguns tablets, celulares ou ultrabooks dentro e fora da sala de aula, desenvolvendo narrativas “expansivas”, que se conectam com a vida no entorno, com outros grupos, com seus interesses profundos.

O uso de metodologias ativas pressupõe um papel do professor mais como um curador ou orientador. Segundo Moran (2015), é curador porque escolhe o que é relevante entre tanta informação disponível e ajuda os alunos a encontrem sentido no mosaico de materiais e atividades disponíveis. Curador também no sentido de cuidador: ele cuida de cada um, dá apoio, acolhe, estimula, valoriza, orienta e inspira.

Assim, Moran (2015) aponta algumas das características esperadas do professor que se vale das metodologias ativas:

- é capaz de orientar a classe, os grupos e a cada aluno;
- tem que ser competente intelectualmente, afetivamente e gerencialmente (gestor de aprendizagens múltiplas e complexas);
- deve ser um profissional melhor preparado, remunerado e valorizado (o que não acontece na maioria das instituições educacionais).

Professores com esse perfil devem ainda dominar as tecnologias, pois estas facilitam o manejo de informações relevantes. Elas permitem o registro, a visibilização do processo de aprendizagem de cada um e de todos os envolvidos, mapeiam os progressos, apontam as dificuldades, podem prever alguns caminhos para os que têm dificuldades específicas, facilitam múltiplas formas de comunicação horizontal, em redes, em grupos, individualizada. Além disso, facilita o compartilhamento, a coautoria, a publicação, produção e divulgação de narrativas diferentes (MORAN, 2015).

Como pode ser evidenciado, as metodologias ativas colocam o aluno como protagonista, como sujeito ativo de seu aprendizado e não mais como mero expectador de uma aula na qual o professor apresenta os conteúdos de forma positiva. Dentre as inúmeras possibilidades e alternativas para a aplicação de uma metodologia ativa destaca-se, para este estudo, a sala de aula invertida, apresentada na próxima seção.

3.2 A SALA DE AULA INVERTIDA

A metodologia da sala de aula invertida, da tradução de *flipped classroom*, é uma metodologia onde os papéis em sala de aula se invertem: a tarefa de casa é feita na escola e a exploração dos conteúdos é feita em casa.

Essa metodologia parte do pressuposto de que os momentos em sala de aula podem ser mais bem aproveitados se forem usados para esclarecer dúvidas e desenvolver os conteúdos mais difíceis. A parte mais fácil pode ser feita em casa: uma leitura de texto, assistir a um filme, o acesso a vídeos sobre o conteúdo a ser trabalhado, produzidos ou indicados pelo professor.

Valente (2014, p. 85-86), citando Educause (2012) explica que:

> A sala de aula invertida é uma modalidade de e-learning (aprendizagem eletônica) na qual o conteúdo e as instruções são estudados on-line antes de o aluno frequentar a sala de aula, que agora passa a ser o local para trabalhar os conteúdos já estudados, realizando atividades práticas como resolução de problemas e projetos, discussão em grupo, laboratórios etc. A inversão ocorre uma vez que no ensino tradicional a sala de aula serve para o professor transmitir informação para o aluno que, após a aula, deve estudar o material que foi transmitido e realizar alguma atividade de avaliação para mostrar que esse material foi assimilado. Na

> abordagem da sala de aula invertida, o aluno estuda antes da aula e a aula se torna o lugar de aprendizagem ativa, onde há perguntas, discussões e atividades práticas. O professor trabalha as dificuldades dos alunos, ao invés de apresentações sobre o conteúdo da disciplina.

Valente (2014) relata que o tipo de material ou atividades que o aluno realiza *online* e na sala de aula podem variar conforme a proposta que será implantada, criando diferentes possibilidades para essa abordagem pedagógica, e, de acordo com o relatório *Flipped Classroom Field Guide,* as regras básicas para inverter a sala de aula são:

a) as atividades em sala de aula envolvem uma quantidade significativa de questionamento, resolução de problemas e de outras atividades de aprendizagem ativa, obrigando o aluno a recuperar, aplicar e ampliar o material aprendido *online*;
b) os alunos recebem *feedback* imediatamente após a realização das atividades presenciais;
c) os alunos são incentivados a participar das atividades on-line e das presenciais, sendo que elas são computadas na avaliação formal do aluno, ou seja, valem nota;
d) tanto o material a ser utilizado *online* quanto os ambientes de aprendizagem em sala de aula são altamente estruturados e bem planejados.

Para o uso dessa metodologia é necessário considerar alguns aspectos relacionados à possibilidade de acesso prévio ao conteúdo proposto, pois nem todos os alunos podem possuir os recursos e meios necessários para isso.

3.3 COMO IMPLANTAR A ABORDAGEM DA SALA DE AULA INVERTIDA

Moran (2015, p. 27) explica que no modelo da sala invertida é necessário “dar menos aulas” e disponibilizar o conteúdo fundamental na internet, elaborar alguns roteiros de aula em que os alunos leiam antes os materiais básicos e realizem atividades mais ricas em sala de aula com a supervisão dos professores.

> Misturando vídeos e materiais nos ambientes virtuais com atividades de aprofundamento nos espaços físicos (salas) ampliamos o conceito de sala de aula: Invertemos a lógica tradicional de que o professor ensine antes na aula e o aluno tente aplicar depois em casa o que aprendeu em aula, para que, primeiro, o aluno caminhe sozinho (vídeos, leituras, atividades) e depois em sala de aula desenvolva os conhecimentos que ainda precisa no contato com colegas e com a orientação do professor ou professores mais experientes. (MORAN, 2015, p. 27).

Os professores podem organizar com seus alunos ao menos um projeto importante na disciplina, que integre os principais assuntos da matéria e que utilize pesquisa, entrevistas, narrativas e jogos como parte importante do processo. Entretanto, é necessário que os projetos estejam ligados à vida dos alunos, às suas motivações profundas, que o professor saiba gerenciar essas atividades, envolvendo-os e negociando com eles as melhores formas de realizar o projeto, valorizando cada etapa e principalmente a apresentação e a publicação dos resultados para o grupo (MORAN, 2015).

Segundo esclarece Valente (2014) muitos professores podem estar usando estratégias de ensino com alguma semelhança com a proposta da sala de aula invertida.

> Os professores podem iniciar com o básico sobre a inversão da sala de aula, e à medida que vão adquirindo experiência passam a usar a aprendizagem baseada em projeto ou na investigação e, com isso, vão se reinventando, criando cada vez mais estratégias centradas nos estudantes ou centradas na aprendizagem, ao invés das aulas expositivas que costumavam ministrar. (VALENTE, 2014, p. 90).

Conforme esclarece o autor supracitado os aspectos fundamentais da implantação da sala de aula invertida são a produção de material para o aluno trabalhar *online* e o planejamento das atividades a serem realizadas na sala de aula presencial. “

“A ideia não é substituir a aula presencial por vídeos, pois os alunos reclamam do fato da aula expositiva ser ‘chata’ e essa mesma aula transformada em vídeo pode ficar mais chata ainda.” (VALENTE, 2014, p. 90).

Para que o professor possa avaliar se houve uma absorção dos conteúdos pelo aluno Valente (2014) sugere que o estudante realize um teste, elaborado preferencialmente na própria plataforma *online*, de modo que possa avaliar sua aprendizagem. Quando se tem os resultados dessa avaliação registrados na plataforma, o professor tem a possibilidade de acessá-los e conhecer quais foram os pontos críticos do material estudado para serem retomados em sala de aula.

Sobre o planejamento das atividades presenciais em sala de aula, o mais importante é o professor explicitar os objetivos a serem atingidos com sua disciplina, e propor atividades que sejam coerentes e que auxiliam os alunos no processo de construção do conhecimento (VALENTE, 2014).

É importante ressaltar que a sala de aula presencial assume relevante papel nessa abordagem pedagógica devido ao fato do professor estar observando e participando das atividades o que, conforme Valente (2014), contribuem para o processo de significação das informações que os alunos adquiriram estudando *online*.

Entretanto, para se atingir resultados satisfatórios o professor deve sempre dar o *feedback* aos seus alunos e fazer os ajustes necessários para uma aula reflexiva e efetivamente construir conhecimentos de forma coletiva, porém com o aluno como sujeito ativo do processo.

3.4 MOTIVOS PARA INVERTER A SALA DE AULA

De acordo com Valente (2014) existem inúmeras razões para se inverter uma sala de aula e que podem ser classificadas em dois conjuntos: um, com base em argumentos teóricos; outro, com base em resultados de estudos que indicam o sucesso educacional dessa abordagem.

Embora existam muitos estudos que comprovem a eficácia do método, existem autores que ainda não estão convencidos que essa abordagem é a solução para os problemas como evasão e repetência enfrentados pela educação nos variados níveis (VALENTE, 2014).

Contudo, Valente (2014) afirma que o fato de o aluno ter contato com o material instrucional antes da aula apresenta diversos pontos positivos:

> [...] o aluno pode trabalhar com esse material no seu ritmo e tentar desenvolver o máximo de compreensão possível. Os vídeos gravados têm sido os mais utilizados pelo fato de o aluno poder assisti-los quantas vezes for necessário e dedicar mais atenção aos conteúdos que apresentam maior dificuldade. [...] se o material é navegável, com uso de recursos tecnológicos, como animação, simulação, laboratório virtual etc. ele pode aprofundar ainda mais seus conhecimentos. (VALENTE, 2014, p. 92).

Além disso, Valente (2014) destaca que o estudante é incentivado a se preparar para a aula, realizando tarefas ou a autoavaliação que, em geral, fazem parte das atividades *online*, o que proporciona ao aluno a oportunidade de entender o que precisa ser mais bem assimilado, captar as dúvidas que podem ser esclarecidas em sala de aula e planejar como aproveitar o momento presencial, com os colegas e com o professor.

Ainda, o resultado da autoavaliação é uma indicação do nível de preparo do aluno, pois ela sinaliza ao professor os temas que apresentaram maior dificuldade e que devem ser trabalhados em sala de aula. Com base nesse resultado o professor pode customizar as atividades da sala de aula de acordo com as necessidades dos alunos. Até mesmo o próprio aluno pode ser capaz de identificar áreas nas quais ele precisa de ajuda, de acordo com as deficiências observadas (VALENTE, 2014).

Valente (2014, p. 92) pontua ainda que “se o aluno se preparou antes do encontro presencial, o tempo da aula pode ser dedicado ao aprofundamento da sua compreensão sobre o conhecimento adquirido, tendo a chance de recuperá-lo, aplicá-lo e com isso, construir novos conhecimentos”.

Essa é uma importante fase do processo de aprendizagem, e que no ensino tradicional o aluno realiza após a aula, e sem o apoio dos colegas e do professor. Na sala de aula invertida esse apoio acontece no momento em que o aluno mais necessita, ou seja, *just in time* (BRANSFORD; BROWN; COCKING, 2000 apud VALENTE, 2014)

A sala de aula invertida não tem como proposta substituir as aulas presenciais, pois as atividades em sala de aula incentivam as trocas sociais entre colegas e essa colaboração, a interação do aluno com o professor são aspectos fundamentais do processo de ensino e aprendizagem, o que muitas vezes a sala de aula tradicional não incentiva (VALENTE, 2014).

Importante ainda é frisar que o sucesso da proposta exige a participação dos alunos, pois se não se empenharem no acesso aos vídeos e textos divulgados e planejados para as aulas não terão condições de acompanhar os alunos que se preparam. Assim, é necessário, no processo de implantação, conscientizar os alunos da importância da participação extraclasse para que os objetivos sejam atingidos.

CAPÍTULO 4: A PESQUISA

Este capítulo apresenta o histórico das escolas nas quais a aplicação prática da pesquisa foi desenvolvida. O desenvolvimento do conteúdo e as avaliações.

4.1 HISTÓRICO DAS ESCOLAS

O presente trabalho foi desenvolvido após pesquisa bibliográfica e aplicação das metodologias em três Unidades Escolares da Rede Pública Estadual de São Paulo na cidade de Araçatuba.

4.1.1 Escola Estadual Prof.ª Nilce Maia Souto Melo

A professora Nilce Maia Souto Melo (Figura 2), que dá nome à escola, nasceu no dia 21 de maio de 1938, na cidade de José Bonifácio, no estado de São Paulo. Morreu no dia 02 de janeiro de 1973, com 34 anos de idade. Começou seus estudos na cidade de Lins, onde se formou professora primária. Foi para Araçatuba onde fez dois cursos no Instituto de Educação Manoel Bento da Cruz, diplomando-se em 1970.

Figura 2 – Professora Nilce

Fonte: Arquivo pessoal (2018)

Foi professora até o ano de 1968, quando foi nomeada diretora, na cidade de Braúna. Em 06 de março de 1972 tomou posse como diretora desta escola, antes chamado Grupo Escolar da Polícia Mirim. Dedicou-se bastante para conseguir melhorar as condições desta escola, além do carinho e amizade de todos os docentes, discentes e funcionários.

Em 1975, por meio de um decreto do governo do estado de São Paulo, esta escola passou a ser chamada E.E.P.G. “Prof.ª Nilce Maia Souto Melo” para homenageá-la por todo trabalho dedicado à essa Unidade Escolar. A Figura 3 apresenta uma imagem da escola.

Figura 3 – Escola Estadual Professora Nilce Maia Solto Melo

Fonte: Arquivo pessoal (2018)

A escola localiza-se na Rua Honduras, número 22, na Vila Industrial, em Araçatuba. É uma escola estadual, possui 18 computadores com acesso internet banda larga. O ensino médio possui 228 alunos matriculados.

4.1.2 Escola Estadual José Candido

No dia 25 de maio de 1935, era instalado o 2º Grupo Escolar de Araçatuba, num sobrado da rua Nove de Julho. Eram poucas classes, poucos professores, quase nenhum funcionário.

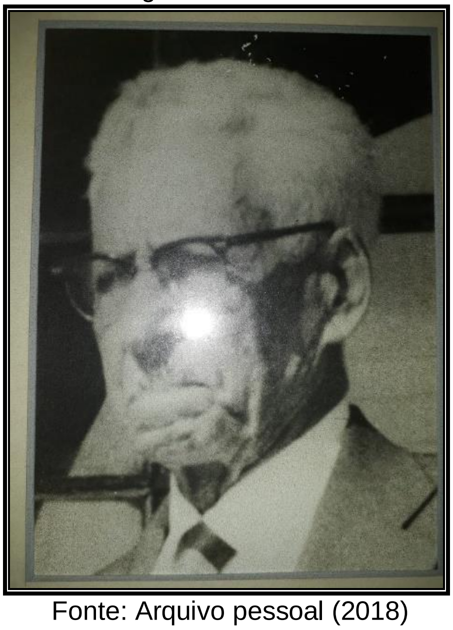
Esta casa de ensino seria mais tarde o Grupo Escolar “José Candido” que na época de sua fundação tinha como diretor o saudoso professor João Evangelista Costa.

A matrícula no ano da instalação foi de 463 alunos, formando-se 11 classes. O número de alunos foi crescendo consequentemente, aumentando o número de classes. De maio de 1937 a novembro de 1939 passou a funcionar no antigo Ginásio do Estado, cujo prédio foi demolido para dar lugar ao majestoso Instituto de Educação Manoel Bento da Cruz.

Mudou-se então para o prédio da faculdade de Comércio D. Pedro II, onde funcionou de fevereiro a dezembro de 1940. Mais uma vez ainda, o antigo 2º Grupo Escolar, muda-se antes de encontrar o seu lugar definitivo e passa a funcionar no prédio da Escola Japonesa, na rua Tietê, onde permanece, de janeiro de 1941 a julho de 1947.

Foi então que por decreto, em de 16 de fevereiro 1947, passou a denominar-se “José Cândido” em homenagem ao senhor José Cândido Teixeira (Figura 4), que nos primórdios de Araçatuba, muito contribuiu para o apaziguamento dos caingangues, índios que vinham causando sérios transtornos e graves dificuldades no povoamento dos sertões nordestinos.

Figura 4 – José Cândido



Fonte: Arquivo pessoal (2018)

No dia 13 de agosto de 1947 foi inaugurado solenemente o imponente prédio, pelo Governador do Estado Dr. Adhemar Pereira de Barros, à Rua Rintaro

Takahashi (antiga rua Tietê) nº 250. Junto ao estabelecimento, funcionavam: Serviço Dentário Escolar, Museu Numismático, Museu do Índio, Quadra de Esportes, Merenda Escolar. A Figura 5 mostra uma imagem da fachada da escola na atualidade.

Figura 5 – Fachada da escola José Cândido

Fonte: Arquivo pessoal (2018)

A Escola Estadual Prof. José Cândido está localizada na rua Rintaro Takahashi nº 250. A escola possui 20 computadores com acesso internet banda larga. O ensino médio possui 118 alunos matriculados na Educação de jovens e adultos.

4.1.3 Escola Estadual Manoel Bento da Cruz

Em 1930, João Arruda Brasil, o então prefeito da cidade de Araçatuba, idealizou a construção de um ginásio, modo como antigamente eram chamadas as escolas de tinha o 2º grau. Montou então uma comissão de pessoas engajadas com o crescimento de cidade e cientes de que a educação é primordial para a formação da cidadania.

Surge assim, o Ginásio Municipal de Araçatuba, oficialmente criado no dia 24 de março de 1934. Várias mudanças políticas e educacionais aconteceram desde então, fazendo com que a escola tivesse seu nome alterado por diversas vezes:

- 1938: Ginásio do Estado em 1938;
- 1941: Escola Normal de Araçatuba;
- 1944: Colégio Estadual e Escola Normal;
- 1957: Instituto de Educação Manoel Bento da Cruz (IE);
- 1976: Escola Estadual de Primeiro e Segundo Grau Manoel Bento do Cruz;
- 1986: Escola Estadual Manoel Bento da Cruz (Figura 6), como é denominado até hoje, porém nunca deixou de ser chamado carinhosamente pelo apelido de I.E.

Figura 6 – Fachada da EE Manoel Bento da Cruz

Fonte: Arquivo pessoal (2018)

Manoel Bento da Cruz (Figura 7) foi prefeito de Penápolis/SP, de Bauru/SP e foi fundador de diversas cidades na região noroeste, sendo conhecido como o plantador de cidades.

Figura 7 – Manoel Bento da Cruz

Fonte: Folha da Região (2000)

Atualmente a escola está localizada à rua Carlos Gomes, no bairro Higienópolis, fazendo parte da diretoria de ensino de Araçatuba, na cidade de Araçatuba, estado de São Paulo. Possui 23 computadores para uso dos alunos com acesso internet banda larga. O ensino médio possui 726 alunos matriculados no curso regular nos períodos matutino e noturno.

4.2 APLICAÇÕES DO CONTEÚDO PRINCÍPIO DA CASA DOS POMBOS

As próximas seções descrevem as aplicações do estudo em cada escola, especificando detalhes do processo.

4.2.1 Escola Estadual Prof.ª Nilce Maia Souto Melo

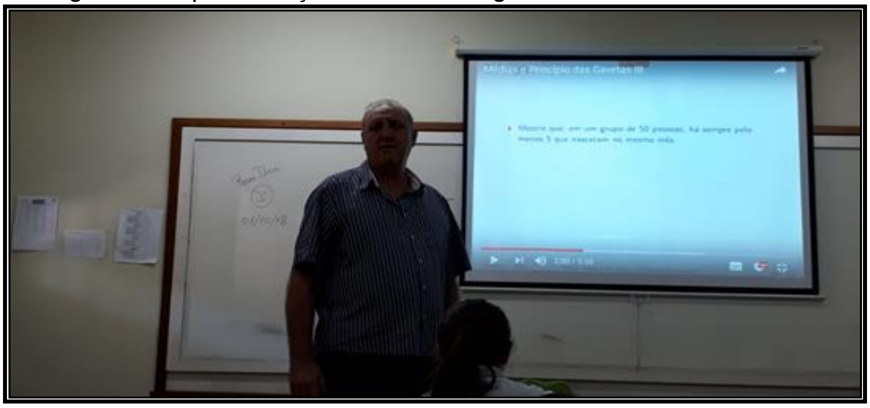
Nesta escola foi aplicado o estudo nas salas de aula do 2º A, 2º B, 3º A e 3º B do ensino médio. Foi aplicado o método de Sala de aula invertida nas séries 2º A e 3º A, e o método tradicional nas séries 2º B e 3º B.

No período de aplicação das aulas, a diretora deu total apoio e a professora da disciplina contribuiu também aplicando as avaliações.

4.2.2 Escola Estadual José Candido

Nesta unidade a pesquisa foi aplicada nas salas de aula do Ensino de Jovens e Adultos, no 2º TA, 2º TB, 3º TA e 3º TB do ensino médio. A Figura 8 mostra um momento da apresentação para os alunos da proposta da sala de aula invertida

Figura 8 – Apresentação da metodologia da sala de aula invertida



Fonte: Arquivo pessoal (2018)

O método de Sala de aula invertida foi aplicado nas séries 2º TA e 3º TA e o método tradicional nas séries 2º TB e 3º TB. No período de aplicação das aulas e das avaliações, a diretora deu total apoio.

4.2.3 Escola Estadual Manoel Bento da Cruz

Nesta escola a pesquisa foi aplicada às salas 2º D, 2º E, 2º F, 3º A, 3º D e 3º E do ensino médio. A Figura 9 apresenta um dos momentos de introdução à metodologia da sala de aula invertida e a Figura 10 apresenta o momento de resolução de exercícios utilizando o método tradicional.

Figura 9 – Apresentação da metodologia da sala de aula invertida

Fonte: Arquivo pessoal (2018)

Figura 10 – Resolução de exercícios utilizando o método tradicional

Fonte: Arquivo pessoal (2018)

Nessa unidade escolar recebi apoio do vice-diretor, do coordenador e do professor da disciplina, que aplicou as aulas e as avaliações. Utilizou o método de sala de aula invertida nas séries 2º D, 2º E e 3º A e o método tradicional nas séries 2º F, 3º D e 3º E.

4.3 METODOLOGIAS

Foram aplicadas duas aulas para cada turma, utilizando a metodologia da aula invertida e a metodologia de aula tradicional.

A caraterização das turmas foi a seguinte:

a) Turma Aula invertida

- Escola Nilce Maia Souto Melo

  - 2º A: 39 alunos
  - 3º A: 42 alunos

- Escola Manoel Bento da Cruz
  - 2º D: 35 alunos
  - 2º E: 32 alunos
  - 3º A: 38 alunos

- Escola José Cândido
  - 2º TA: 37 alunos
  - 3º TA: 38 alunos

O total de alunos participantes da pesquisa inscritos na turma sala de aula invertida foi de 261.

b) Turma Tradicional

- Escola Nilce Maia Souto Melo
  - 2º B: 40 alunos
  - 3º B: 41 alunos

- Escola Manoel Bento da Cruz
  - 2º F: 45 alunos
  - 3º D: 38 alunos
  - 3º E: 41 alunos

- Escola José Cândido
  - 2º TB: 36 alunos
  - 3º TB: 39 alunos

O total de alunos participantes da pesquisa inscritos na turma metodologia tradicional foi de 280.

4.4 AULAS

Aula 1: Método tradicional

Dividimos a aula em 3 momentos, o primeiro com 15 minutos de duração, foi a apresentação do princípio da casa dos pombos e a exemplificação de 3 exercícios, momento em que também foram tiradas as dúvidas dos alunos. A Figura 11 apresenta o momento da resolução de exercícios em grupo pelo método tradicional.

Figura 11 – Resolução de exercícios em grupo

Fonte: Arquivo pessoal (2018)

No segundo momento, que durou em média de 20 minutos, os alunos receberam uma lista com 5 exercícios para resolver em pequenos grupos de 2 a 4 alunos. No terceiro momento, de 15 minutos e finalizando, foi feita a correção e comentários da lista com o objetivo de sanar as dúvidas dos alunos, totalizando assim os 50 minutos da aula.

Aula 1: Método sala invertida

Para esse método, primeiramente foi apresentado a metodologia aula invertida. Para isso os alunos assistiram uma videoaula do programa Conexão do canal Futura, apresentado por Lisia Palombini e os entrevistados Prof. Dr. Gabriel Elmôr e Prof. Dr. Andrea Ramal, apresentando aos alunos a metodologia. Num segundo momento foram para a sala de informática e podia navegar pelas videoaulas sobre o princípio da casa dos pombos, o professor orientava os alunos e tirava as dúvidas quando solicitado. Foi sugerido como lição de casa que fizessem uma pesquisa baseando-se na mesma lista de exercícios da aula tradicional. A Figura 12 mostra o momento da apresentação da sala de aula invertida.

Figura 12 – Apresentação da metodologia da sala de aula invertida

Fonte: Arquivo pessoal (2018)

Os exercícios propostos foram:

1) Estão reunidas 25 pessoas para uma assembleia. Das afirmações a seguir, referentes às pessoas reunidas, a única que podemos afirmar ser necessariamente verdadeiras é:

a) pelo menos uma delas tem altura superior a 1,90 m.
b) pelo menos duas delas são do sexo feminino.
c) pelo menos três delas fazem aniversário no mesmo mês.
d) pelo menos uma delas nasceu num dia par.
e) pelo menos uma delas nasceu em janeiro ou fevereiro.

Solução: *Considerando como pombos o número de pessoas e as casas como os possíveis meses, podemos colocar 2 pombos em cada casa totalizando 24 pombos. Como temos 25 pessoas ao menos 3 pessoas deverão ocupar o mesmo mês. Concluímos assim que pelo menos três delas faz aniversário no mesmo mês.*

2) Considerando-se um texto contém 100 palavras, é válido afirmar-se que:
a) todas as letras do alfabeto foram utilizadas
b) há palavras repetidas

c) pelo menos uma letra foi utilizada mais do que 3 vezes

d) uma das letras do alfabeto não foi utilizada

e) não há palavras repetidas

Solução*: Considerando como pombos o número de palavras com pelo menos uma letra, sabendo que são 26 letras e as casas o total de palavras, podemos repetir 3 vezes cada letra totalizando 78 letras. Como temos 100 palavras necessariamente 1 das letras terá que ser utilizada mais e 3 vezes.*

3) Num condomínio, moram 21 famílias, todas com pelo menos um filho. Nenhuma das famílias tem mais do que 5 filhos. Nessas condições, é correto afirmar que:

a) existe neste prédio pelo menos uma família com um único filho.

b) existem neste prédio pelo menos duas famílias com exatamente 2 filhos.

c) o número médio de filhos por família neste prédio é igual a 4.

d) existem neste prédio famílias com diferentes números de filhos.

e) pelo menos cinco famílias deste prédio têm o mesmo número de filhos.

Solução: *Considerando como pombos o número de filhos e as casas como as famílias. Como temos no máximo 5 filhos para distribuir nas 21 família, pelo princípio das casas dos pombos, ao menos 5 famílias terão o mesmo número de filhos.*

4) Uma caixa contém 10 bolas verdes, 10 bolas amarelas, 10 bolas azuis e 10 bolas vermelhas. Joãozinho quer retirar uma certa quantidade de bolas dessa caixa, sem olhar, para ter certeza de que, entre elas, haja um grupo de7 bolas com 3 cores diferentes, sendo três bolas de uma cor, duas bolas de uma segunda cor e duas bolas de uma terceira. Qual é o número mínimo de bolas que Joãozinho deve retirar da caixa?

a) 11

b) 14

c) 21

d) 22

e) 23

Solução: *Para garantir duas cores diferentes, ele terá que retirar da caixa 11 bolas. Assim para retirar três cores diferentes, ele terá que retirar 21 bolas. Porém ele quer que seja três bolas de uma cor, duas bolas de uma segunda cor e duas bolas de uma terceira terá que retirar mais 2 bolas para obter o resultado desejado. Portanto 23 bolas.*

5) Um agricultor tem 4 caixas para guardar maçãs. Ele quer que, pelo menos uma das caixas tenha, no mínimo, 3 maçãs. Quantas maçãs ele deve ter para garantir isso?

Solução*: Para que uma das caixas tenha 3 maçãs, precisa de pelo menos 3 maçãs e depender da sorte, se elas forem colocadas na mesma caixa. Mas para não depender da sorte, 9 maçãs garantem que pelo menos 1 das caixas terá 3 maçãs.*

Aula 2: Método tradicional

Num primeiro momento, com duração de aproximadamente 30 minutos, os alunos foram divididos em grupos de 3 a 5 alunos para a resolução de uma lista com 5 exercícios. Neste momento, o professor percorria a sala tirando dúvidas e auxiliando nas resoluções.

Num segundo momento foi feita a correção da lista na lousa para tirar dúvidas, conforme apresentado na Figura 13.

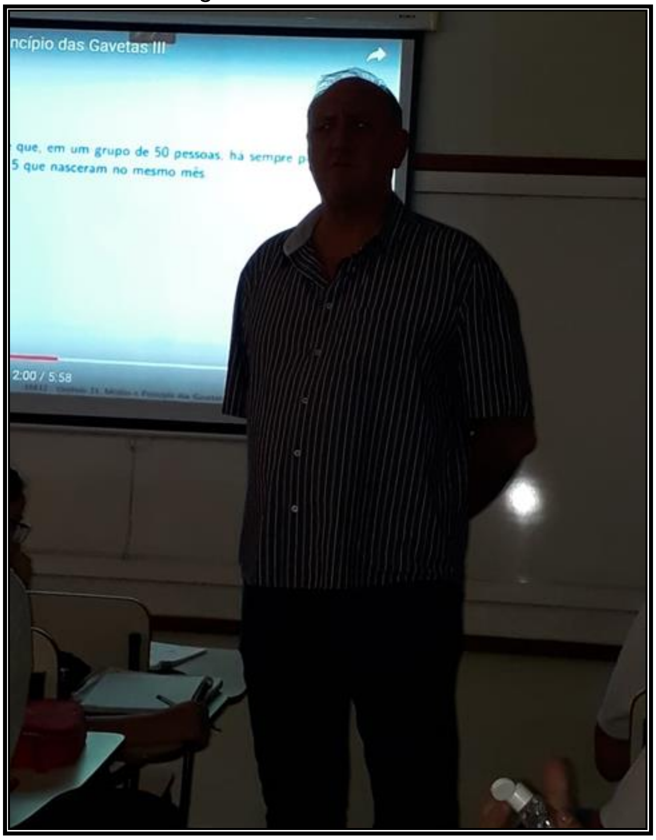
Figura 13 – Momento de resolução dos exercícios propostos

Fonte: Arquivo pessoal (2018)

Aula 2: Método sala invertida

Novamente os alunos foram para a sala de informática e podiam navegar pelas videoaulas sobre o princípio da casa dos pombos. O professor orientava os alunos e tirava as dúvidas quando solicitado, conforme mostra a Figura 14.

Figura 14 – Aula invertida



Fonte: Arquivo pessoal (2018)

Exercícios

1) Quantas pessoas, no mínimo, devem morar numa casa com n quartos para garantirmos que pelo menos duas dormem num mesmo quarto?

Solução: *pelo PCP temos que quem faz o papel de pombos são as pessoas e o papel de casas é a quantidade de quartos. Logo, para que pelo menos duas durmam no mesmo quarto são necessárias n + 1 pessoa.*

2) Um prédio possui 20 apartamentos. Qual o mínimo de cartas que Jaiminho, o carteiro, deverá entregar a fim de que um apartamento receba 5 cartas?

Solução: *Pelo PCP temos que as cartas são os pombos e os apartamentos as casas. Logo colocando 4 cartas em cada apartamento, totalizamos 80 cartas. Assim entregando mais uma, ao menos 1 apartamento receberá 5 cartas.*

3) Em uma caixa há 12 bolas do mesmo tamanho: 3 brancas, 4 vermelhas e 5 pretas. Quantas bolas, no mínimo, uma pessoa no escuro tem que retirar para ter a certeza que uma delas é branca?
Solução*: Para a solução desse tipo de problema devemos pensar como um azarado, ou seja, na caixa só restariam bolas brancas. Assim, a pessoa retiraria 4 vermelhas mais 5 pretas, sobrando as brancas na caixa. Logo a próxima necessariamente será branca, portanto 10 bolas.*

4) Quantos estudantes deve ter numa turma para garantir que dois estudantes dessa turma tenham a mesma nota no exame final, sabendo que a nota varia de 0 a 100?
Solução: *De 0 a 100 temos 101 números, pelo PCP as notas são os pombos e os estudantes são as casas. Logo para garantir que dois estudantes tenham a mesma nota necessitaria de 102 estudantes.*

5) Em uma gaveta há 12 meias bancas e 12 meias petas. Quantas meias devemos retirar ao acaso para termos certeza que obteremos um par de meias da mesma cor?
Solução: *Pelo PCP nomeamos de pombos a quantidade de meias e de casas as cores. Assim, para ter duas meias da mesma cor necessita de retirar 3 meias.*

CAPÍTULO 5: RESULTADOS

A primeira avaliação foi aplicada no período de 27/08/2018 a 05/09/2018. Na turma A, 244 alunos realizaram a primeira avaliação e o número de acertos de cada questão ficou distribuído conforme apresentado na Tabela 1.

Tabela 1 – Quantidade e porcentagem de acertos por questão da primeira avaliação – Turma Sala Invertida

Questões	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Médias
Acertos	116	98	26	25	20	31	53	12	61	79	52,1
Porcentagem	47,5	40,2	10,7	10,2	8,2	12,7	21,7	4,9	25,0	32,4	21,35

Fonte: Elaborado pelo autor (2018)

Na turma B, 263 alunos realizaram a primeira avaliação e o número de acertos de cada turma ficou distribuído conforme apresentado na Tabela 2.

Tabela 2 – Quantidades e porcentagem de acertos por questão da primeira avaliação – Turma Tradicional

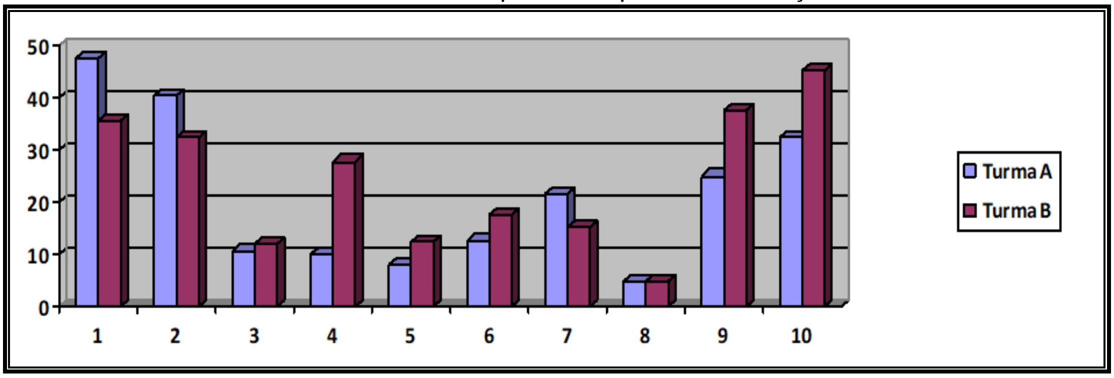
Questões	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Médias
Acertos	93	85	32	73	33	46	40	13	99	118	63,2
Porcentagem	35,4	32,3	12,2	27,8	12,5	17,5	15,2	4,9	37,6	44,9	24,03

Fonte: Elaborado pelo autor (2018)

Analisando a média da porcentagem de acertos da tabela 1 e 2, podemos verificar que, a turma Tradicional levou uma pequena vantagem sobre a turma Sala Invertida.

No Gráfico 1 é apresentado o desempenho da primeira avaliação, sendo denominada turma A, a metodologia sala de aula invertida e turma B a metodologia tradicional.

Gráfico 1 – Desempenho da primeira avaliação



Fonte: Elaborado pelo autor (2018)

A Figura 15 e 16 apresenta imagens da primeira avaliação com a turma do 2º ano A da Escola Nilce Maia.

Figura 15 – Primeira avaliação 2º A – Nilce Maia

Fonte: Arquivo pessoal (2018)

Figura 16 – Primeira avaliação, 2º A – Nilce Maia

Fonte: Arquivo pessoal (2018)

A Figura 17 apresenta imagens da primeira avaliação com a turma do 2º ano F da escola Manoel Bento da Cruz.

Figura 17 – Primeira avaliação, 2º F – Manoel Bento da Cruz

Fonte: Arquivo pessoal (2018)

A segunda avaliação foi aplicada no período de 22/11/2018 a 27/11/2018. Na turma Sala de Aula Invertida, 237 alunos realizaram a segunda avaliação e foram desconsideradas 4 avaliações, pois os alunos não se aplicaram em fazê-las. Portanto, foram consideradas 233 avaliações e o número de acertos da referida turma ficou distribuído conforme apresenta a Tabela 3.

Tabela 3 – Quantidades e porcentagem de acertos por questão da segunda avaliação – Turma Sala Invertidas

Questões	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Médias
Acertos	140	129	126	81	29	52	74	130	118	87,9
Porcentagem	59,1	54,4	53,2	34,2	12,2	21,9	31,2	54,9	49,8	37,09

Fonte: Elaborado pelo autor (2018)

Na turma Aula Tradicional, 268 alunos realizaram a segunda avaliação e o número de acertos de cada turma ficou distribuído conforme apresenta a Tabela 4.

Tabela 4 – Quantidades e porcentagem de acertos por questão da segunda avaliação – Turma Tradicional

Questões	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Médias
Acertos	186	192	176	72	44	242	120	188	172	139,2
Porcentagem	69,4	71,6	65,7	26,9	16,4	90,3	44,8	62,7	64,2	51,2

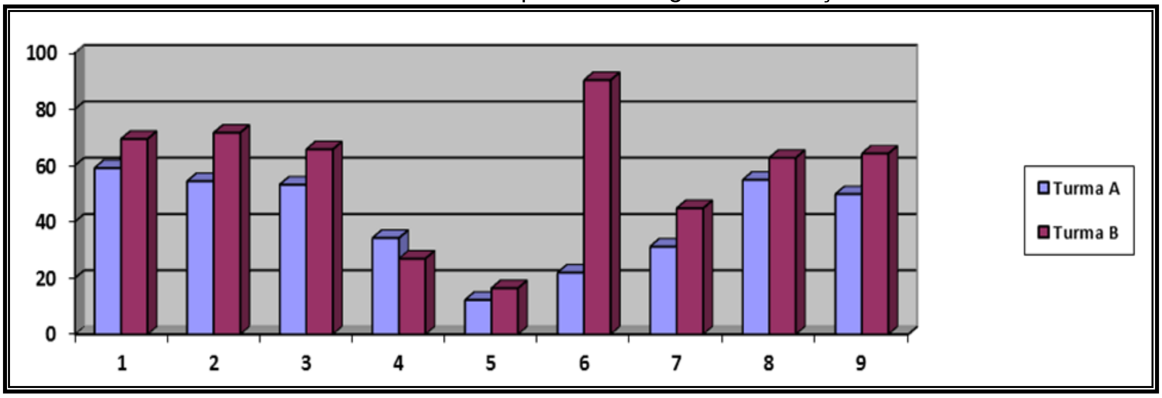
Fonte: Elaborado pelo autor (2018)

Na segunda avaliação, podemos verificar pelas médias que a sala de aula tradicional foi bem melhor do que a Sala Invertida.

Outro fato que chamou a atenção foi que na segunda avaliação os alunos foram bem melhor em comparação à primeira, tanto na sala Tradicional, quanto na Sala Invertida.

No Gráfico 2 é apresentado o desempenho da segunda avaliação, sendo denominada turma A, a metodologia sala de aula invertida e turma B a metodologia tradicional.

Gráfico 2 – Desempenho da segunda avaliação



Fonte: Elaborado pelo autor (2018)

A Figura 18 apresenta imagens da segunda avaliação com a turma do 3º ano B da escola Nilce Maia.

Figura 18 – Segunda avaliação, 3º B - Nilce Maia

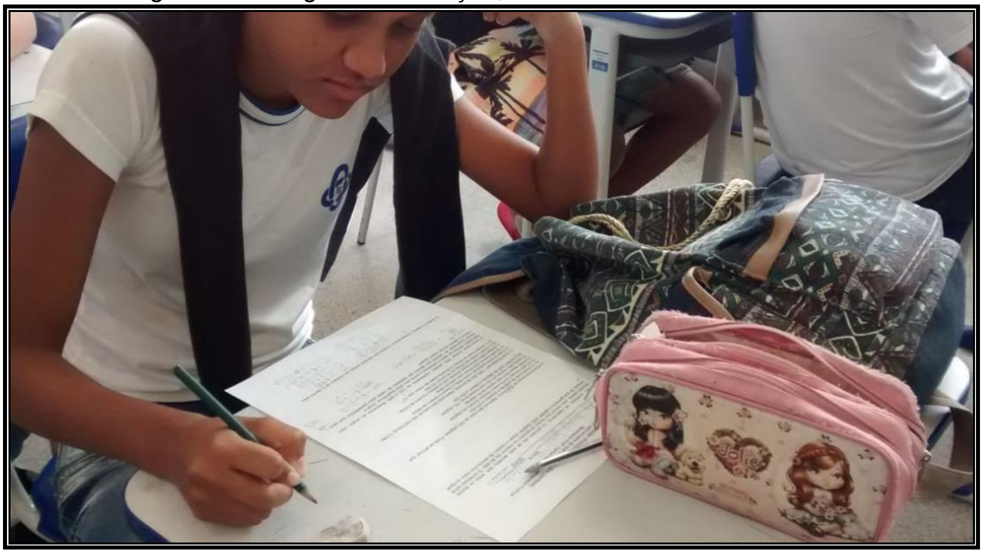
Fonte: Arquivo pessoal (2018)

As Figura 19 e 20 apresentam imagens da segunda avaliação com a turma do 3º ano A da escola Manoel Bento da Cruz.

Figura 19 – Segunda avaliação, 3º A – Manoel Bento da Cruz

Fonte: Arquivo pessoal (2018)

Figura 20 – Segunda avaliação, 3º A – Manoel Bento da Cruz



Fonte: Arquivo pessoal (2018)

Após aplicar as avaliações, destacamos a questão número 6 da segunda avaliação, visto que 90,3% dos alunos instruídos pelo método tradicional acertaram a questão, e apenas 21,9% dos alunos direcionados pelo método sala de aula invertida obtiveram êxito em sua resposta.

As demais questões mantiveram um equilíbrio entre as quantidades de acertos e erros, tanto na turma A quanto na turma B. Observamos também que, na primeira avaliação os alunos do método aula invertida tiveram resultados superiores em 3 das 10 questões, já na segunda avaliação em apenas 1 das 9 questões aplicadas.

CAPÍTULO 6: CONCLUSÃO

No início do trabalho, o desejo era utilizar o Princípio da Casa dos Pombos como conteúdo e comparar a metodologia sala de aula invertida com a metodologia tradicional, com o objetivo de saber se a aplicação da metodologia da sala de aula invertida facilitaria o aprendizado do assunto abordado, dado o fato da sala de aula invertida estar sendo apontada como possibilidade promissora de renovação do ensino.

Entre as dificuldades encontradas na metodologia sala de aula invertida, podemos destacar o envolvimento dos alunos nas aulas e provas, muitos não se importavam em participar das aulas e outros não se preocuparam na resolução das questões. Utilizaram o tempo de prova para desenhar na folha e não fizeram as resoluções.

Outra dificuldade encontrada foi o fato de que algumas das salas que foi aplicado o método sala invertida estavam passando por uma grande dificuldade matemática, pois no corrente ano não tiveram professor dessa disciplina e isso dificultou muito a resolução dos problemas.

O conjunto de dados coletados é pequeno, portanto, não muito representativo de uma verdade universal.

Necessitaríamos de um estudo com maior número de alunos e de um tempo maior de aplicação. Assim, teríamos um número mais amplo de dados, trazendo o embasamento necessário para uma conclusão adequada em relação a diferença entre o método da sala de aula invertida e o método tradicional de ensino.

Embora o método sala invertida tenha ficado estatisticamente com números abaixo do método tradicional, não podemos desconsiderar que este possa ser utilizado pelos professores com o objetivo de tornar as aulas mais atraentes e diversificadas.

O resultado da pesquisa mostra apenas uma perspectiva dos métodos utilizados, necessitando de outros estudos mais aprofundados para a comprovação de sua eficácia e uma melhor conclusão sobre os resultados.

O professor, como facilitador do aprendizado, é quem deve escolher as metodologias e as ferramentas que melhor se aplicam a seus alunos, de acordo com suas necessidades e condições.

REFERÊNCIAS

ABDALLA, Samuel Liló. **Raciocínio lógico e informática.** São Paulo: Saraiva, 2014.

AGUIAR, Thiago Pinheiro de. **Princípio da casa dos pombos**: uma abordagem diferenciada com objetos de aprendizagem. 2013. 57 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal do Ceará, Centro De Ciências, Fortaleza, 2013. Disponível em: <https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=35146>. Acesso em 23 fev. 2019.

ALTENHOFEN, Marcele Elisa. **Atividades contextualizadas nas aulas de matemática para a formação de um cidadão crítico**. 2008, 108 f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática) - Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2008. Disponível em: <http://tede2.pucrs.br/tede2/bitstream/tede/3332/1/403145.pdf>. Acesso em: 22 fev. 2019.

BRAGA, Ryon. Apresentação. In: CAMARGO, Fausto; DAROS, Thuinie. **A sala de aula inovadora:** estratégias pedagógicas para fomentar o aprendizado ativo. Porto Alegre: Penso, 2018. p. ix-xi.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais:** matemática. Brasília: MEC/SEF, 1997.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais Ensino Médio:** Parte III: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: MEC, 2000. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf>. Acesso em: 23 fev. 2019.

CARTA CAPITAL. **Aulas invertidas são muito mais eficientes e inclusivas.** [2017]. Disponível em: <https://www.cartacapital.com.br/vanguardas-do-conhecimento-2/aulas-invertidas-sao-muito-mais-eficientes/amp/#top>. Acesso em 23 fev. 2019.

DEMONSTRE. **Dança das cadeiras.** 2018. [Imagem em formato JPEG]. Disponível em: <https://demonstre.com/wp-content/uploads/2018/10/dan%C3%A7a-das-cadeiras.jpg>. Acesso em: 22 fev. 2019.

FOLHA DA REGIÃO. **Memória:** Manoel Bento da Cruz. 7 dez. 2000. *Online.* [Imagem em formato JPEG]. Disponível em: <http://jornalvirtual.folhadaregiao.com.br/arquivo/2000/12/07/7-cad4.jpg>. Aceso em: 23 fev. 2019.

FUNDAÇÃO GETÚLIO VARGAS. Sala de aula invertida. **Ei! Ensino Inovativo**, v. esp., p. 14-17, 2015. Disponível em: <http://bibliotecadigital.fgv.br/ojs/index.php/ei/article/view/57632/56174>. Acesso em 23 fev. 2019.

GOMES, M.L.M. **A História do Ensino da Matemática:** uma introdução. Belo Horizonte: CAED-UFMG. 68 p. 2013. Disponível em:

<http://www.mat.ufmg.br/ead/acervo/livros/historia_do_ensino_da_matematica_CORRIGIDO_13MAR2013.pdf>. Acesso em 15 ago. 2018.

LIMA, Patrícia R.B.; FALKEMBACH, Gilse A. M.; TAROUCO, Liane R. M. Contextos de aprendizagem do m-learning. In: TAROUCO, Liane et al (org.). **Objetos de aprendizagem:** teoria e prática. Porto Alegre, 2014. p. 431-447.

MACIEL, Mariana de Vargas. **A importância do ensino da matemática na formação do cidadão.** 2009. 37 f. Monografia (Licenciatura em Matemática) - Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras, Uruguaiana, 2009. Disponível em: <http://revistaseletronicas.pucrs.br/ojs/index.php/graduacao/article/view/6058/4359>. Acesso em: 22 fev. 2019.

MORAN, José. **Mudando a educação com metodologias ativas.** 2015. Disponível em: <http://www2.eca.usp.br/moran/wp-content/uploads/2013/12/mudando_moran.pdf>. Acesso em: 23 fev. 2019.

MORGADO, Augusto Cezar et al. **Análise combinatória e probabilidade.** São Paulo: SBM, 1991.

OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA. **Princípio da Casa dos Pombos.** 2018. Disponível em: <https://www.obm.org.br/content/uploads/2018/01/Combinatoria_casa_pombos.pdf>. Acesso em: 22 fev. 2019.

PAIVA, Vinícius Barbosa de; VELOSO, Marcelo Oliveira. Sobre pombos e gavetas. **Rev.de Matemática de Ouro Preto**, v. 1, n. 1, 2016. Disponível em: <https://periodicos.ufop.br/pp/index.php/rmat/article/view/166/367>. Acesso em: 03 abr. 2019.

RAMOS, Taurino Costa. A importância da matemática na vida cotidiana dos alunos do ensino fundamental. **Cairu em Revista,** ano 6, n. 9, p. 201-218, jan./fev. 2017. Disponível em: <https://www.cairu.br/revista/arquivos/artigos/20171/11_IMPORTANCIA_MATEMATICA.pdf>. Acesso em: 23 fev. 2019.

ROSA, Beatriz de Castro. **Educação para a cidadania:** uma exigência constitucional para a efetivação da democracia no Brasil. 2007. 209 f. Dissertação (Mestrado em Direito Constitucional) – Universidade de Fortaleza, Fortaleza, 2007. Disponível em: <http://www.dominiopublico.gov.br/download/teste/arqs/cp041472.pdf>. Acesso em: 22 fev. 2019.

SOARES, Marlene Aparecida. Professor de matemática: um educador a serviço da construção da cidadania. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 8. **[Anais eletrônicos...]** Recife, 15 a 18 jul. 2004. Disponível em: <http://www.sbem.com.br/files/viii/pdf/07/CC07289049853.pdf>. Acesso em: 23 fev. 2019.

VALENTE, José Armando. Blended learning e as mudanças no ensino superior: a proposta da sala de aula invertida. **Educ. rev.**, Curitiba, n. spe4, p. 79-97, 2014. Disponível em: <http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0104-40602014000800079&lng=en&nrm=iso>. Acesso em: 23 fev. 2019. DOI: http://dx.doi.org/10.1590/0104-4060.38645.

VIEIRA, Eziel. **Biografia de Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet.** 2015. Disponível em: <http://biografiaecuriosidade.blogspot.com/2015/12/biografia-de-johann-peter-gustav-lejeune-dirichlet.html>. Acesso em 23 fev. 2019.

APÊNDICE A – 1ª AVALIAÇÃO

1) Os 20 candidatos aprovados em um concurso do Tribunal de Justiça serão colocados em 10 gabinetes de desembargadores. Se cada gabinete receber pelo menos um dos candidatos aprovados e cada um deles só puder ser lotado em um único gabinete, pode-se afirmar que:

a) pelo menos um dos gabinetes receberá dois dos candidatos aprovados.
b) nenhum gabinete receberá mais de dois candidatos aprovados.
c) cada gabinete receberá dois candidatos aprovados.
d) pelo menos um dos gabinetes receberá dois ou mais candidatos aprovados.
e) haverá gabinetes que receberão, cada um, apenas um dos candidatos aprovados.

Solução: *Pelo menos um dos gabinetes receberá dois ou mais candidatos. Pelo princípio da casa dos pombos, temos como pombos os candidatos e como casas os gabinetes, como há mais pombos do que candidatos, necessariamente um dos gabinetes receberá dois ou mais candidatos.*

2) Um grupo de 6 estagiários foi designado para rever 50 processos e cada processo deveria ser revisto por apenas um dos estagiários. No final do trabalho, todos os estagiários trabalharam e todos os processos foram revistos. E correto afirmar que:

a) um dos estagiários reviu 10 processos;
b) todos os estagiários reviram, cada um pelos menos 5 processos;
c) um dos estagiários só reviu 2 processos;
d) quatro estagiários reviram 7 processos e dois estagiários reviram 6 processos;
e) pelo menos um dos estagiários reviu 9 processos ou mais.

Solução: *Sabemos que 6 estagiários trabalharão em 50 processos. Sabemos ainda que cada processo foi revisto por apenas um dos estagiários. Como todos os* *estagiários trabalharam, cada estagiário reviu pelo menos um processo. Logo, pelo princípio da casa dos pombos, fazendo o papel dos pombos a quantidade de processo e o papel das casas o número de estagiários temos que pelo menos uma das casas receberá 9 pombos ou mais.*

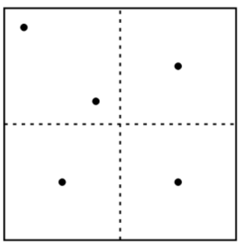
3) Quantas pessoas, no mínimo, devem morar numa casa com n quartos para garantirmos que pelo menos duas dormem num mesmo quarto?

Solução: *Denominando a quantidade quartos por n e utilizando o PCP, fazendo o papel de pombos o número e pessoas e o papel de casa a quantidade de quartos, concluímos que teríamos que ter n + 1 pessoa.*

4) Uma prova de concurso possui 10 questões de múltipla escolha, com cinco alternativas cada. Qual é o menor número de candidatos para o qual podemos garantir que pelo menos 3 deles preencheram o cartão resposta com exatamente as mesmas respostas para todas as questões?

Solução: *Fazendo o papel de pombos os alunos e o papel de casas as possíveis provas, e sabendo que as provas podem ser preenchidas de 510 maneiras diferentes. Logo pelo PCP só podemos garantir que teremos cartões com a mesma resposta se houver* 5^{10}*+1 candidatos e para garantir ao menos três candidatos teríamos que ter* 5^{10}*. 2 +1 candidatos.*

5) Escolhem-se 5 pontos ao acaso sobre a superfície de um quadrado de lado 2. Mostre que pelo menos um dos segmentos que eles determinam tem comprimento menor ou igual a $\sqrt{2}$.



Solução*: Pelo princípio da casa dos pombos temos como pombos os pontos, a chave da resolução está na identificação das casas. Devemos substituir o quadrado de lado 2 em quatro quadrados de lado1. Assim a maior distância entre dois pontos desse novo quadrado será a sua diagonal que mede exatamente* $\sqrt{2}$*. Portanto dado*

5 pontos, pelo menos 2 estarão em uma mesma “casa” e assim, determinam um segmento de comprimento menor ou igual a $\sqrt{2}$*.*

6) Sabendo que 21 alunos colheram 200 laranjas, prove que pelo menos dois deles colheram a mesma quantidade de laranjas.

Solução: *Note que se montamos uma sequência de alunos e estes colhem uma quantidade diferente de laranja a começar por um dos alunos que não colheu, depois outro colheu uma, depois duas e assim sucessivamente, teremos uma PA com o primeiro elemento zero e de razão um e somando 20 primeiros elementos dessa PA teremos 190 laranjas. Assim fica evidente que o próximo aluno só poderá colher no máximo 10 laranjas, repetindo um número já existente.*

7) Guilherme teve os olhos vendados e com uma caneta fez 50 pontos numa cartolina quadrada com lado igual a 70 cm. Mostre que existem dois pontos cuja distância é inferior a 15 cm.

Solução: *A ideia aqui é dividir a cartolina em 49 quadrados iguais de lado 10 cm cada, segue que pelo PCP há pelo menos dois pontos que pertencem ao mesmo quadrado, pois a distância máxima é igual a diagonal do quarado de lado 10, que é igual a* $\sqrt{200} < \sqrt{225}$ *= 15.*

8) Dadas 6 pessoas numa festa, prove que existem 3 pessoas que se conhecem mutuamente ou 3 pessoas que não se conhecem mutuamente. Suponha que a relação de conhecer é simétrico.

Solução: Fixando numa dessas 6 pessoas, logo a pessoa fixada conhece ou não conhece 3 das outras 5 pessoas restante. Assim temos dois casos:

- Se a pessoa fixada conhece três das outras 5 pessoas e duas dessas três se conhecem, acabou. Caso contrário as três não se conhecem mutuamente e também está provado.
- Se a pessoa fixada não conhece três das outras 5 pessoas e duas dessas não se conhecem, acabou. Caso contrário as três se conhecem mutuamente e também está provado.

9) Prove que dados cinco pontos distintos sobre a esfera, existe um hemisfério fechado que contém pelo menos quatro pontos.

Solução: *Escolhendo dois desses pontos. Sabemos que existe um único círculo máximo C (equador) que passa por esses pontos. Se esses círculos tiverem mais dois ou três pontos, acabou o problema. Caso esse círculo tenha só mais um ponto, então pelo menos um os outros dois pontos estarão em um dos hemisférios fechados determinados por C. Caso não tenha nenhum ponto sobre C além os dois iniciais, temos que haverá pelo menos dois pontos em um dos hemisférios fechados determinados por C e isso finaliza o problema.*

10) Em uma caixa há 12 bolas do mesmo tamanho: 3 brancas, 4 vermelhas e 5 pretas. Quantas bolas uma pessoa no escuro tem que retirar para ter a certeza que uma delas é branca?

Solução: *Para garantir que uma das bolas seja branca, a pior hipótese seria retirar todas as bolas de cores diferente da branca e por última a bola branca. Assim deveria tirar 4 vermelhas e mais as 5 pretas totalizando 9 bolas e próxima necessariamente teria que ser branca. Portanto 10 bolas.*

APÊNDICE B – 2ª AVALIAÇÃO

1) O professor Epaminondas, no primeiro dia de aula, apostou que, entre os alunos daquela classe, pelo menos dois fariam aniversário no mesmo dia do mês. O professor tinha certeza de que ganharia a aposta, pois naquela classe o número de alunos era maior ou igual a:

Solução: *Aplicando o princípio da casa dos pombos temos como pombos o número de alunos e como casas o total de dias de um mês. Logo como no máximo temos 31 no mês teríamos que ter 32 alunos no mínimo.*

2) Numa biblioteca há 2500 livros. Nenhum tem mais de 500 páginas. Pode-se afirmar que:

a) o número total de páginas é superior a 500.000
b) há pelo menos 3 livros com o mesmo número de páginas
c) existe algum livro com menos de 50 páginas
d) existe pelo menos um livro com exatamente 152 páginas
e) o número total de páginas é inferior a 900.000

Solução: *Se cada livro tiver o número de páginas diferentes, teremos: numerando os livros de 1 ao 2500 e sabendo que o número de páginas é no máximo 500. Pelo PCP temos como pombos o número de páginas e como casa a quantidade de livros, logo no mínimo 5 livros terão necessariamente o mesmo número de páginas. O qual torna-se verdade a letra B.*

3) Uma floresta tem 1.000.000 de árvores. Nenhuma tem mais de 300.000 folhas. Então:

a) duas árvores quaisquer nunca terão o mesmo número de folhas
b) há pelo menos uma árvore com uma só folha
c) existem pelo menos duas árvores com o mesmo número de folhas
d) o número médio de folhas por árvore é 150.000
e) o número total de folhas na floresta pode ser maior que 10^{12}

Solução: *Pelo PCP temos como pombos o número de folhas e como casas o número de árvores. Logo como há mais árvores do que folhas, necessariamente haverá arvores com o mesmo número de folhas. Como temos 1000000 árvores com no máximo 300000 folhas, existem pelo menos 4 árvores com o mesmo número de folhas, o que torna a alternativa C verdadeira.*

4) Uma caixa contém 900 cartões, numerados de 100 a 999. Retiramos ao acaso (sem reposição) cartões da caixa e anotamos a soma dos seus algarismos. Qual a menor quantidade de cartões que devem ser retirados da caixa para garantirmos que pelo menos 3 destas somas sejam iguais?

Solução: *Dentre os números de três algarismos presentes na urna vemos que a soma de seus algarismos irá variar e 1 até 27. Porém a soma 1 e 27 só ocorrerá com os números 100 e 999. Portanto os outros 898 números terão a soma de seus algarismos entre 2 e 26, totalizando 25 opções. Assim, a pior das hipótese, retiramos um cartão com soma igual a 1, um cartão com soma igual a 27 e dois cartões de cada uma das somas de 2 e 26, ou seja, com estes 52 cartões temos a pior situação que podemos considerar em que não teremos 3 cartões com a mesma soma. Mas, ao pegar mais um com certeza este terá a soma igual a um que já pegamos. Portanto, a menor quantidade de cartões é igual a 53.*

5) Dados 5 inteiros consecutivos, mostre que sempre existe um múltiplo de 5 dentre eles.

Solução: *Para um número ser múltiplo de 5 ele deve terminar em 0 ou 5, logo quando pegamos 5 números inteiros consecutivos, necessariamente um deles terminará em 0 ou 5.*

6) Uma prova de concurso possui 10 questões de múltipla escolha, com cinco alternativas cada. Qual é o menor número de candidatos para o qual podemos garantir que pelo menos dois deles deram exatamente as mesmas respostas para todas as questões?

Solução: *Neste caso, os pombos são os alunos e as casas são as possíveis provas por ser preenchidas de* 5^{10} *= 9765625 modos. Logo, só se pode ter certeza de que dois candidatos fornecem exatamente as mesmas respostas se houver pelo menos 9765626 candidatos.*

7) Numa gaveta há 6 meias pretas e 6 meias brancas. Qual é o número mínimo de meias a se retirar (no escuro) para garantir que:

a) As meias retiradas contenham um par da mesma cor?
Solução: *Pelo PCP temos como pombos as meias e como casa as cores, portanto, para que tenhamos um par da mesma cor com duas cores diferentes, basta retirar 3 meias que o problema estará resolvido.*

b) As meias retiradas contenham um par de cor branca?
Solução: *Aqui devemos analisar uma situação onde só restam as meias brancas. Portanto, devemos retirar todas as meias pretas mais o par de brancas. Logo são 6 pretas mais 2 brancas totalizando 8 meias.*

8) (VUNESP - 2013) Para a preparação de eventos e festividades na Fundação CASA, organizam-se reuniões. Sobre uma dessas reuniões, contendo 15 pessoas, é correto afirmar que, necessariamente, há:

(A) duas mulheres.
(B) mais de cinco homens.
(C) duas pessoas com a mesma idade.
(D) pessoas que aniversariam no mesmo mês.
(E) pessoas com o mesmo número de fios de cabelo.

Solução: *Utilizando o PCP neste exercício, temos que quem faz o papel de pombos são as pessoas e quem faz o papel das casas são os meses o ano. Logo como temos 15 pessoas e apenas 12 meses, pelo menos 2 pessoas nasceram no mesmo mês.*

9) Uma cidade é dividida em quatro regiões, existindo 25 indústrias em cada região. A prefeitura fará uma fiscalização de n dessas indústrias, escolhidas por sorteio. O

menor valor de n para que sejam sorteadas, necessariamente, pelo menos uma indústria de cada região é?

Solução: *Devemos pensar sempre no pior cenário possível de sorteio que seria de em 75 sorteios saírem todas as indústrias de apenas 3 regiões. Assim o (n) será aa por: 25 + 25 + 25 + 1 = 76 ou seja, necessitaria de 76 indústrias para garantir pelo menos uma de cada região.*