



UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO  
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA TERRA  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA



---

# Probabilidade e simulações em planilhas eletrônicas

**Edinei Jesus Teixeira de Paula**

Mestrado Profissional em Matemática: PROFMAT/SBM

Orientador: **Prof. Dr. Moiseis dos Santos Ceconello**

Trabalho financiado pela Capes

Cuiabá - MT

Março de 2013

# Probabilidade e simulações em planilhas eletrônicas

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação devidamente corrigida e defendida por Edinei Jesus Teixeira de Paula e aprovada pela comissão julgadora.

Cuiabá, 16 de março de 2013.

Prof. Dr. Moiseis dos Santos Cecconello  
Orientador

## **Banca examinadora:**

Prof. Dr. Moiseis dos Santos Cecconello  
(UFMT)

Profa. Dra. Vera Lúcia Martins Sandanielo  
(UFMT)

Prof. Dr. Jefferson Cruz dos Santos Leite (UFPI)

Dissertação apresentada ao curso de Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT da Universidade Federal de Mato Grosso, como requisito parcial para obtenção do título de **Mestre em Matemática**.

### **Dados Internacionais de Catalogação na Fonte.**

T266p Teixeira de Paula, Edinei Jesus.  
Probabilidade e Simulações em Planilhas Eletrônicas /  
Edinei Jesus Teixeira de Paula. -- 2013  
74 f. : il. color. ; 30 cm.

Orientador: Moiseis dos Santos Cecconello.  
Dissertação (mestrado profissional) - Universidade  
Federal de Mato Grosso, Instituto de Ciências Exatas e da  
Terra, Programa de Pós-Graduação em Matemática,  
Cuiabá, 2013.  
Inclui bibliografia.

1. Probabilidade. 2. Planilhas Eletrônicas. 3. Ensino de  
Matemática. I. Título.

Ficha catalográfica elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo(a)  
autor(a).

**Permitida a reprodução parcial ou total, desde que citada a fonte.**

Dissertação de Mestrado defendida em 16 de março de 2013 e aprovada pela  
banca examinadora composta pelos Professores Doutores

---

Prof. Dr. Moiseis dos Santos Cecconello

---

Profa. Dra. Vera Lúcia Martins Sandanielo

---

Prof. Dr. Jefferson Cruz dos Santos Leite

*A minha esposa Anaiara, pelo amor, e  
compreensão durante toda a realização  
deste trabalho, a minha irmã Edinéia  
pelo companheirismo e as duas pessoas  
a quem devo minha vida e todas as  
minhas realizações, meus pais Édio e  
Izaura.*

# Agradecimentos

À Deus pela vida e por ter me dado sabedoria para a realização deste trabalho.  
À meu orientador, professor Doutor Dr. Moiseis dos Santos Cecconello, pela paciência, dedicação, apoio e competência. Sua contribuição foi essencial para a realização deste trabalho.

À todos os professores e tutoras do Mestrado Profissional em Matemática da UFMT, que com seus ensinamentos deram contribuições significativa para a minha formação.

À meus pais, Édio e Izaura, que me ensinaram a viver com dignidade, que iluminaram os meus caminhos com afeto e dedicação, e que são a minha maior inspiração matemática.

Ao minha esposa Anaiara pelo amor, carinho e paciência durante estes dois anos.

Ao minha irmã Edinéia pelo incentivo, apoio e companheirismo em todos os momentos.

A todos colegas de mestrado, por dividir conosco todas as angústias e alegrias nestes dois anos.

Aos funcionários da escola 13 de Maio.

À minha amiga e colega de trabalho professora Inês Nardeli e família pelo apoio.

Muito obrigado a todos.

# Resumo

O objetivo deste trabalho é apresentar uma metodologia diferenciada no ensino de probabilidade, explorando ideias intuitivas de probabilidade aliada a ferramentas computacionais que possibilite usar planilhas eletrônicas no ensino da probabilidade no ensino médio. Mostrar como estas ideias e ferramentas podem contribuir para obter soluções de problemas como: estimar a frequência de caras no lançamento de uma moeda, o valor esperado em um determinado jogo ou aposta, a área de figuras planas, o volume de sólidos, a chance de um time ser campeão em um torneio. Para isso, faremos varias simulações de experimentos aleatórios e analisaremos como ele se comporta depois de varias repetições. Com o intuito de facilitar o trabalho faremos uso de planilhas eletrônicas, com as quais se consegue realizar um grande número de simulações em pouco tempo. Feito desta forma acreditamos que o ensino da probabilidade seja mais interessante e moderno.

**Palavras chave:** Probabilidade; Planilhas eletrônicas; Ensino de Matemática.

# Abstract

The objective of this work is to present a different methodology in the teaching of probability, exploring intuitive ideas of probability combined with computational tools that enable use spreadsheets in the teaching of probability in high school. Show how these tools can contribute ideas and solutions for problems such as estimating the frequency of heads in a coin toss, the expected value in a certain game or bet, the area of plane figures, volumes of solids, the chance of be a team champion in a tournament. To do so, we simulated several random experiments and analyze how it behaves after several repetitions. In order to facilitate the work we will make use of spreadsheets, with which it can perform a large number of simulations in a short time. This way, we believe that the teaching of probability is more interesting and modern.

**Keywords:** Probability; Spreadsheets; Mathematics Teaching.



# Sumário

<b>Introdução</b>	<b>12</b>
<b>1 Probabilidade</b>	<b>14</b>
1.1 Teoria da Probabilidade . . . . .	14
1.1.1 Espaço Amostral . . . . .	15
1.1.2 Evento . . . . .	16
1.1.3 Probabilidade . . . . .	18
1.2 Probabilidade condicional . . . . .	31
1.3 Variável aleatória, valor esperado e variância . . . . .	36
1.3.1 Algumas variáveis aleatórias especiais. . . . .	40
1.4 Área e probabilidade . . . . .	42
<b>2 Lei dos Grandes Números e simulações</b>	<b>45</b>
2.1 Introdução . . . . .	45
2.2 Moedas e frequências relativas . . . . .	46
2.2.1 Simulação do lançamento de moedas . . . . .	46
2.3 A Lei dos Grandes Números . . . . .	50
<b>3 Simulação em planilhas eletrônicas</b>	<b>54</b>
3.1 Introdução . . . . .	54
3.2 Lançamento de dados . . . . .	54
3.3 Simulação de provas . . . . .	56
3.4 Valor esperado de uma variável aleatória . . . . .	58
3.5 Áreas e volumes . . . . .	61
3.5.1 Volume de sólidos . . . . .	70
3.6 Probabilidade em jogos de futebol . . . . .	72



# Lista de Figuras

1.1	Árvore de possibilidades para o problema. . . . .	30
1.2	Diagrama de Venn para os eventos $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ . . . . .	32
2.1	Simulações do lançamento de 10 moedas. . . . .	48
2.2	Simulações do lançamento de 500 moedas. . . . .	48
2.3	Simulações do lançamento de 1000 moedas. . . . .	48
2.4	Histograma para 700 simulações de $M_{100}$ . . . . .	49
2.5	Histograma para 700 simulações de $M_{10000}$ . . . . .	50
3.1	Simulações na realização de 800 realizações da variável $X_i$ . . . . .	55
3.2	Histograma para 500 simulações da variável aleatória $M_{20000}$ . . . . .	55
3.3	Distribuição de probabilidade da variável $S$ . . . . .	57
3.4	Simulações de $E(X_n)$ . . . . .	60
3.5	Simulações de $E(X_n)$ . . . . .	60
3.6	Histograma de $E(X_n)$ para 200 simulações com $n = 5000$ . . . . .	61
3.7	Representação gráfica do espaço amostral $R$ e do evento $F$ . . . . .	62
3.8	Representação gráfica da região de interesse. . . . .	63
3.9	Estimativas $M_n(F)$ para $n \leq 500$ . . . . .	64
3.10	Estimativas $M_n(F)$ para $n \leq 5000$ . . . . .	64
3.11	Histograma de observação da variável $M_n(F)$ . . . . .	64
3.12	Representação gráfica da região de interesse. . . . .	65
3.13	Estimativas $M_n(F)$ para $n \leq 5000$ . . . . .	66
3.14	Representação gráfica da região de interesse. . . . .	67
3.15	Estimativas $M_n(F)$ para $n \leq 5000$ . . . . .	68
3.16	Histograma de observação da variável $M_n(F)$ . . . . .	68
3.17	Representação gráfica da região de interesse. . . . .	69

3.18 Estimativas $M_n(F)$ para $n \leq 10000$ . . . . .	70
3.19 Estimativas $M_n(F)$ para $n \leq 10000$ . . . . .	71
3.20 Estimativas $M_n(F)$ para $n \leq 10000$ . . . . .	72
3.21 Simulação da frequência relativa para 5000 repetições. . . . .	74

# Introdução

Embora conste como um dos temas a ser abordado pelos Parâmetros Curriculares Nacionais, o ensino de probabilidade nas escolas de ensino básico é frequentemente negligenciado ou, na melhor das hipóteses, abordado de forma bem superficial, sem levar em conta as soluções que esta valiosa teoria tem para contribuir em situações do cotidiano. Como argumento a favor do que acabou de ser dito, podemos verificar a grande maioria dos livros didáticos adotados em nossas escolas. A maioria dos exemplos e atividades propostas em tais referências estão relacionados com lançamentos de moedas, dados ou cartas de baralho e similares.

Podemos levantar diversas hipóteses de quais motivos levam ao negligenciamento no ensino de probabilidade das escolas. Um destes tais motivos, possivelmente, é a dificuldade inerente ao conteúdo, pois o mesmo exige o conhecimento de problemas envolvendo contagem além da interpretação aguçada para estabelecer os espaços amostrais e eventos de interesse. Nos parece não haver dúvida de que a dificuldade inerente ao estudo das probabilidades aliado os problemas com pouco apelo motivacional proposto nos livros didáticos levam alunos e professores a darem pouca importância para esta tão importante área da matemática presente na vida de cada indivíduo da sociedade moderna.

Nosso objetivo neste trabalho não é abordar os aspectos educacionais da conteúdo. Não faremos nenhuma análise para determinar os problemas relacionados ao ensino de probabilidade na educação básica. Temos como principal objetivo nesta dissertação apresentar uma abordagem alternativa ao ensino de probabilidades, explorando ideias intuitivas aliadas as ferramentas computacionais. Pretendemos mostrar como tais ideias podem contribuir para obtemos soluções de problemas como a estimativa de áreas de figuras planas, volumes de sólidos, estimativas de probabilidade de um determinado equipe ser campeã de um torneio de futebol quando ainda faltam algumas rodadas para o seu fim.

Para atingirmos o objetivo proposto, organizamos este trabalho como segue.

No primeiro capítulo apresentaremos a teoria da probabilidade, suas definições e como usá-la para resolver problemas. Apresentamos ainda os importantes conceitos de variáveis aleatórias, valor esperado e variância bem como uma definição axiomática de área e sua relação com o conceito de probabilidade.

O segundo capítulo apresentamos um dos principais resultados recorrentes da teoria da probabilidades - a Lei dos Grandes Números de Bernoulli - que servirá como suporte teórico para as atividades propostas no trabalho.

O terceiro capítulo será dedicado aos problemas em que a teoria das probabilidades será a ferramenta adotada para a busca da solução. É o principal capítulo deste trabalho pois vamos mostrar como soluções de problemas como a estimativa de áreas de figuras planas, volumes de sólidos, estimativas de probabilidades de um determinado time ser campeão de um torneio de futebol podem ser obtidas por meio de uma ferramenta acessível a boa parte dos alunos e professores - as planilhas eletrônicas.

Esperamos que os colegas professores tenham este trabalho como um material de apoio e/ou complementar para auxiliar tanto nas aulas em sala, quanto para um aprimoramento pessoal, pois foi construído com muita dedicação e buscando meios alternativos para explicar conteúdos que os abordados pelos livros didáticos tradicionais.

# Capítulo 1

## Probabilidade

Muitas decisões que tomamos em nossas vidas dependem de certas perguntas cujas respostas estão relacionadas com experimentos aleatórios. Dessa forma, por não poderem ser previstas com exatidão o resultado em determinadas situações, devido a sua natureza aleatória, é que são estudados métodos para determinar as quais desses resultados são menos ou mais prováveis de ocorrerem, isto é, as *chances* de um resultado ocorrer. O estudo e desenvolvimento de técnicas matemáticas para a análise de experimentos ou fenômenos aleatórios é o ramo da matemática denominado *Teoria da Probabilidade*.

Neste capítulo, abordaremos os principais conceitos necessários para o entendimento do que vai ser apresentado nos capítulos posteriores deste trabalho. Os conceitos apresentados aqui podem ser encontrados em referências como [4], [6], [7] e [9].

### 1.1 Teoria da Probabilidade

Por muitas vezes nos deparamos com situações em que os resultados de uma mesma ação podem se apresentar de formas diferentes. Por exemplo, ao lançarmos uma moeda várias vezes, sob condições idênticas, percebemos que em alguns desses lançamentos o resultado será cara, e em outros, será coroa, sendo impossível fazer uma previsão exata do próximo resultado. Tais resultados são ditos *aleatórios*.

Diz-se que experimentos *aleatórios* são aqueles que, mesmo quando repetidos por diversas vezes em condições idênticas produzem resultados diferentes, ou seja, estão sujeitos às leis do acaso. Experimentos que repetidos sob as mesmas condições e que reproduzem resultados essencialmente idênticos são chamados de experimentos *determinísticos*

([5]).

São exemplos de experimentos aleatórios as seguintes situações:

- Tempo de espera na fila de um banco;
- Horário em que irá começar a chover;
- O resultado da face voltada para cima no lançamento de uma moeda;
- Número de ganhadores na Mega Sena;
- Resultado de um jogo de roleta ou dados;

A Teoria da Probabilidade é composta por três conceitos fundamentais: *espaço amostral*, *evento* e *função de probabilidade* ([8]).

### 1.1.1 Espaço Amostral

Em um fenômeno aleatório, isto é, sujeito às leis do acaso, o conjunto formado por todos os resultados possíveis de ocorrer é chamado de *espaço amostral*. Denota-se por  $\Omega$  o espaço amostral e por  $\#(\Omega)$  o número de elementos desse espaço amostral.

Vejamos alguns exemplos:

1. Num exame laboratorial para saber se uma pessoa é portadora de uma determinada doença os resultados possíveis são positivo ou negativos, logo  $\Omega = \{\text{positivo}, \text{negativo}\}$ , assim  $\#(\Omega) = 2$ ;
2. Ao se observar o resultado de um jogo de futebol entre as equipes  $A$  e  $B$ , temos o seguinte espaço amostral  $\Omega = \{\text{vitória da equipe } A, \text{empate}, \text{vitória da equipe } B\}$ ,  $\#(\Omega) = 3$ ;
3. No lançamento de um dado, os resultados possíveis de serem observados em sua face voltada para cima são os números 1, 2, 3, 4, 5 e 6, logo  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ , assim, temos  $\#(\Omega) = 6$ ;
4. No lançamento de duas moedas, tem-se o seguinte espaço amostral  $\Omega = \{(k, k), (k, c), (c, k), (c, c)\}$ , onde "k" significa que a face voltada para cima é cara e "c" significa coroa Assim, temos que  $\#(\Omega) = 4$ .



5. Resultados possíveis no sorteio da Mega-Sena. Neste caso, o número de elementos do espaço amostral é muito grande, por isso descreveremos apenas alguns deles:  $\Omega = \{(1, 2, 3, 4, 5, 6), (1, 2, 3, 4, 5, 7), \dots, (15, 18, 23, 24, 25, 26), \dots, (23, 45, 55, 57, 58, 60), \dots, (55, 56, 57, 58, 59, 60)\}$ . Usando métodos de contagem obtemos facilmente que  $\#(\Omega) = C_{60}^6 = 50063860$ ;
6. Número de resultados possíveis para as oito últimas rodadas do campeonato brasileiro de futebol. Levando-se em conta somente o resultado de cada jogo {vitória de um, de outro, ou empate} em uma rodada são  $3^{10}$  os cenários imagináveis, assim em 8 rodadas temos que  $\#(\Omega) = 3^{80}$ ;

Também observamos que há experimentos aleatórios nos quais não é possível contar o número de elementos do seu espaço amostral. Seus elementos são comumente considerados como intervalos. Segue abaixo alguns exemplos e seus respectivos espaços amostrais.

1. Medida da altura de uma pessoa,  $\Omega = (0, \infty)$ ;
2. Tempo de espera em uma fila,  $\Omega = [0, \infty)$ ;
3. Medida da massa de um corpo,  $\Omega = (0, \infty)$ ;
4. Distância percorrida por um projétil ao ser lançado por uma arma de fogo,  $\Omega = [0, \infty)$ .

### 1.1.2 Evento

Qualquer subconjunto do espaço amostral é denominado *evento*.

Dentre os eventos a considerar, devemos incluir:

- **Evento Certo** - é aquele que coincide com espaço amostral. Assim temos que, no lançamento de um dado numerado de 1 a 6, observar em sua face voltada para cima um número menor que 7 é um evento certo.
- **Evento Impossível** - é aquele representado por um conjunto vazio. Assim, no lançamento de um dado numerado de 1 a 6, observar em sua face superior um número maior que 6 é um evento impossível.

- **Evento Elementar** - é aquele formado por um único elemento do espaço amostral.

Designaremos por uma letra maiúscula do nosso alfabeto os eventos relativos a cada espaço amostral. Vejamos alguns exemplos:

1. No lançamento de uma moeda, temos o espaço amostral  $\Omega = \{k, c\}$ .

Assim, podemos ter:

Evento  $\mathcal{A}$ : “sair cara”  $\rightarrow \mathcal{A} = \{k\}$

Evento  $\mathcal{B}$ : “sair coroa”  $\rightarrow \mathcal{B} = \{c\}$

2. No nascimento de duas crianças, temos que espaço amostral é:

$\Omega = \{(m, m), (m, f), (f, m), (f, f)\}$ , onde denotamos “masculino” por  $m$  e “feminino” por  $f$ .

Assim podemos ter:

- Evento  $\mathcal{A}$ : “nascer duas crianças do sexo masculino”  $\rightarrow \mathcal{A} = \{(m, m)\}$ ;
- Evento  $\mathcal{B}$ : “nascer pelo menos uma criança do sexo feminino”  $\rightarrow \mathcal{B} = \{(m, f), (f, m), (f, f)\}$ ;
- Evento  $\mathcal{C}$ : “nascer crianças do mesmo sexo”  $\rightarrow \mathcal{C} = \{(m, m), (f, f)\}$ ;

3. Ao medir a altura exata de uma pessoa, temos, entre outros, os eventos:

- Evento  $\mathcal{A}$ :  $\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right[$  metros;
- Evento  $\mathcal{B}$ :  $\left[\frac{1}{3}, \frac{9}{4}\right[$  metros;
- Evento  $\mathcal{C}$ :  $[1, 2[$  metros.

4. Ao medir o tempo exato de espera em uma fila, temos, entre outros, os eventos.

- Evento  $\mathcal{A}$ :  $\left[\frac{1}{2}, 1\right[$  horas;
- Evento  $\mathcal{B}$ :  $[2, 3[$  horas.

### 1.1.3 Probabilidade

O terceiro conceito fundamental no estudo de experimentos aleatórios é o de *probabilidade*, isto é, a *medida da chance* de um determinado evento ocorrer. Ao longo da história, o conceito de probabilidade sofreu modificações, do ponto de vista de sua definição formal, com o objetivo de tornar a teoria da probabilidade mais precisa e mais abrangente possível.

Aqui, vamos apresentar as três formas em que podemos *medir a chance*, ou atribuir *probabilidade*, de um determinado evento ocorrer.

#### 1.1.3.1 Definição Clássica de Probabilidade ou Probabilidade de Laplace

Vamos considerar aqui que o espaço amostral seja finito, isto é,  $\Omega = \{r_1, r_2, r_3, r_4, \dots, r_n\}$  em que  $r_i$ , para  $i = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ , representa os possíveis resultados de um experimento aleatório. Além disso, admite-se que temos uma *boa razão* para considerarmos que todos os resultados sejam igualmente possíveis de acontecer, ou seja, todos os eventos tem a mesma *chance* de ocorrer. Neste caso, a probabilidade de um evento  $\mathcal{A}$  ocorrer é definido pela expressão:

$$p(\mathcal{A}) = \frac{\#(\mathcal{A})}{\#(\Omega)}$$

no qual  $\#(\mathcal{A})$  é o número de elementos que compõem o evento  $\mathcal{A}$ .

A definição clássica de probabilidade se refere a subconjuntos unitários equiprováveis. Laplace referia-se aos elementos de  $\mathcal{A}$  (ou elementos que compõem  $\mathcal{A}$ ) como casos favoráveis e os elementos do espaço amostral eram chamados casos possíveis ([2]). Dessa forma, define-se:

$$p(\mathcal{A}) = \frac{\text{número de casos favoráveis}}{\text{número de casos possíveis}}$$

Como o evento  $\mathcal{A}$  é um subconjunto de  $\Omega$ , então segue diretamente da definição que:

1.  $0 \leq p(\mathcal{A}) \leq 1$ , para todo evento  $\mathcal{A}$ , ou seja, a probabilidade de um evento  $\mathcal{A}$  pode assumir valores que pertencem ao intervalo  $[0, 1]$ ;

2.  $p(\Omega) = 1$ , ou seja, a probabilidade do evento certo  $\Omega$ , é igual a 1;
3.  $p(\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) = p(\mathcal{A}) + p(\mathcal{B})$ , ou seja, a probabilidade da união de dois eventos é a soma das probabilidades desses eventos, quando esses são eventos mutuamente exclusivos.

Muitos problemas simples, e até mesmo alguns mais elaborados, podem ser resolvidos por meio deste conceito clássico de probabilidade. Em geral o número de elementos do espaço amostral desses problemas são determinados por meio de técnicas de contagem. Vejamos alguns exemplos

**Exemplo:** Suponha que desejamos determinar a probabilidade de se obter um número par no lançamento de um dado. Vamos admitir previamente que os eventos são equiprováveis, ou seja, todas as faces têm a mesma probabilidade de acontecer. Assim o espaço amostral é o conjunto  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \Rightarrow \#(\Omega) = 6$  e o evento desejado é o conjunto  $\mathcal{A} = \{2, 4, 6\} \Rightarrow \#(\mathcal{A}) = 3$  Pela definição clássica de probabilidade, temos:

$$p(\mathcal{A}) = \frac{\#(\mathcal{A})}{\#(\Omega)} \Rightarrow p(\mathcal{A}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

**Exemplo** Em uma sala há 20 alunos, dos quais dois são irmãos gêmeos. Se quatro alunos serão escolhidos ao acaso para apresentarem um trabalho, qual a probabilidade de os dois irmãos gêmeos estarem entre os escolhidos? Seja  $\Omega$  o espaço amostral e  $\mathcal{A}$  o evento “escolher os quatro alunos de modo que os gêmeos façam parte desta escolha”, teremos:

- Para os casos possíveis temos: os  $C_{20}^4$  modos de escolher 4 alunos entre os 20, ou seja,  $\#(\Omega) = C_{20}^4$ ;
- Para os casos favoráveis temos:  $C_{18}^2$  modos de escolher 2 alunos entre os 18 restantes, uma vez que os gêmeos já fazem parte dos escolhidos, assim temos que  $\#(\mathcal{A}) = C_{18}^2$ .

Assim a probabilidade procurada é:

$$p(\mathcal{A}) = \frac{C_{18}^2}{C_{20}^4} = \frac{3}{95}$$

Algumas críticas podem ser feitas à definição clássica de probabilidade:

- Considera-se na definição apenas os casos em que o espaço amostral possui um número finito de elementos;

- Admiti-se também, como hipótese, que os eventos unitários do espaço amostral sejam igualmente prováveis de ocorrer. Mas a ideia de *igualmente provável* é equivalente a dizer com *probabilidade igual*, de modo que estamos usando o conceito de probabilidade em sua própria definição;
- A *boa razão* para admitir resultados igualmente prováveis esta, em geral, relacionada com algum problema em que desejamos resolver por meio do estudo de probabilidade.

### 1.1.3.2 Definição frequentista

Na prática nem sempre é possível determinar a probabilidade de um evento, por exemplo: Qual seria a probabilidade de um pneu furar nos primeiros mil quilômetros? Qual a probabilidade de seu time ser campeão? Qual a probabilidade de uma pessoa ser atingida por um raio? Estas respostas não podem ser encontradas pela definição clássica, tudo o que se pode fazer é observar com que frequência esses fatos acontecem, sob as mesmas condições teóricas, com um número suficientemente grande de observações, podemos obter uma boa estimativa dessas probabilidades.

Consideremos um experimento aleatório e  $\mathcal{A}$  um evento de um espaço amostral associado ao experimento. Suponha que sob as mesmas condições teóricas, sejam realizados  $n$  ensaios independentes do experimento aleatório em questão e seja  $\#\mathcal{A}$  o número de vezes que o evento ocorre nas  $n$  realizações. A frequência relativa de ocorrência do evento  $\mathcal{A}$  é definida por:

$$fr(\mathcal{A}) = \frac{\text{número de vezes que } \mathcal{A} \text{ ocorreu}}{n}$$

e a *probabilidade* do evento  $\mathcal{A}$  é definida como sendo o limite da frequência relativa quando o número de vezes em que o experimento é realizado tende ao infinito, ou seja,

$$p(\mathcal{A}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} fr(\mathcal{A})$$

Assim como no caso da definição clássica também temos que:

1.  $0 \leq p(\mathcal{A}) \leq 1$ , para todo evento  $\mathcal{A}$ ;
2.  $p(\Omega) = 1$ ;

3.  $p(\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) = p(\mathcal{A}) + p(\mathcal{B})$ , quando  $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \emptyset$ , ou seja,  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{B}$  são eventos mutuamente exclusivos.

Algumas observações sobre a definição frequentista merecem ser destacadas:

- Frequência relativa e probabilidade não são sinônimos. A frequência relativa de um evento é um valor associado a um fato no passado (o evento foi realizado), enquanto que probabilidade é um valor relativo a um fato no futuro (o evento ainda não se realizou).
- Na prática, é impossível realizar um número infinito de vezes o experimento aleatório. Assim, a probabilidade é estimada usando um número suficientemente grande de realizações do experimento em análise.
- A expressão *suficientemente grande* é vaga e não tem significado preciso. Quantas vezes deve-se repetir o experimento: 500, 1000, 1000000? Essa quantidade de ensaios é fixa de experimento para experimento? Além disso, não temos garantia de que a frequência relativa vai convergir para um número do intervalo  $[0, 1]$ , que representa a probabilidade de um determinado evento acontecer.

### 1.1.3.3 Definição axiomática de probabilidade

As definições apresentadas anteriormente têm o apelo da intuição e permanecem sendo usadas para resolver inúmeros problemas. Entretanto, elas não são suficientes para uma formulação matemática mais rigorosa da probabilidade. Com o intuito de resolver os problemas apresentados pela definição clássica e frequentista de probabilidade, o matemático russo Andrei Nikolayevich Kolmogorov, por volta de 1930, estabeleceu as condições que uma probabilidade deve satisfazer.

Primeiramente, vamos considerar que o conjunto  $\mathcal{A}$ , formados por eventos  $\mathcal{A}$  de um espaço amostral  $\Omega$  satisfaça as seguintes condições:

$C_1$  - Se  $\mathcal{A}$  é um evento então  $\mathcal{A}^c$ , que é o evento complementar de  $\mathcal{A}$ , também será um evento;

$C_2$  -  $\Omega$  é um evento;

$C_3$  - Se  $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3, \dots$  são eventos, então  $\bigcup_{i=1}^{\infty} \mathcal{A}_i, \forall i \in \mathbb{N}$ , também é um evento.

Como estas condições impostas, uma probabilidade é uma função  $p : A \rightarrow \mathbb{R}$  que deve satisfazer:

**Axioma 1:** A probabilidade de qualquer evento  $\mathcal{A}$  é um número não negativo menor ou igual a 1, ou seja,  $0 \leq p(\mathcal{A}) \leq 1, \forall \mathcal{A} \in A$

**Axioma 2:** A probabilidade do evento certo é igual a 1, ou seja,  $p(\Omega) = 1$

**Axioma 3:** Se  $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3, \dots$  são eventos disjuntos, então a probabilidade da união destes eventos é a soma das probabilidades de cada um deles, isto é  $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3, \dots \in \mathbf{A}$  e  $\mathcal{A}_i \cap \mathcal{A}_j = \emptyset, i \neq j$

$$p\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} \mathcal{A}_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} p(\mathcal{A}_i)$$

Algumas propriedades seguem diretamente da definição de probabilidade

**Propriedades.** Sejam o conjunto  $A$ , formados por eventos  $\mathcal{A}$  de um espaço amostral  $\Omega$  e  $p : A \rightarrow \mathbb{R}$  uma probabilidade definida em  $A$ . Então:

1. A probabilidade de ocorrer o evento  $\emptyset$  é nula, isto é,  $p(\emptyset) = 0$ ;
2. Se  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{A}^C$  são eventos complementares então:  $p(\mathcal{A}^C) = 1 - p(\mathcal{A})$ ;
3. A probabilidade da diferença entre dois eventos é dada por:

$$p(\mathcal{A} - \mathcal{B}) = p(\mathcal{A}) - p(\mathcal{A} \cap \mathcal{B})$$

4. A probabilidade de ocorrer a união de dois conjuntos é dada por:

$$p(\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) = p(\mathcal{A}) + p(\mathcal{B}) - p(\mathcal{A} \cap \mathcal{B}), \text{ onde } \mathcal{A} \cap \mathcal{B} \neq \emptyset$$

5. A probabilidade da união de três eventos é dada por:

$$p(\mathcal{A} \cup \mathcal{B} \cup \mathcal{C}) = p(\mathcal{A}) + p(\mathcal{B}) + p(\mathcal{C}) - p(\mathcal{A} \cap \mathcal{B}) - p(\mathcal{A} \cap \mathcal{C}) - p(\mathcal{B} \cap \mathcal{C}) + p(\mathcal{A} \cap \mathcal{B} \cap \mathcal{C})$$

6. Se um evento  $\mathcal{A}$  possui menos elementos do que o evento  $\mathcal{B}$ , então, a probabilidade de ocorrer o evento  $\mathcal{A}$  é no máximo igual a probabilidade de ocorrer o evento  $\mathcal{B}$ , ou seja, se  $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$  então  $p(\mathcal{A}) \leq p(\mathcal{B})$ .

### Demonstrações.

1. Seja  $\mathcal{A} \in \mathcal{A}$ . Sabemos que  $\mathcal{A}$  e  $\emptyset$  são mutuamente excludente, isto é,  $\mathcal{A} \cap \emptyset = \emptyset$ . Assim temos, pelo terceiro axioma de probabilidade, temos:

$$p(\mathcal{A}) = p(\mathcal{A} \cup \emptyset) = p(\mathcal{A}) + p(\emptyset),$$

de modo que

$$p(\emptyset) = p(\mathcal{A}) - p(\mathcal{A}) = 0$$

2. Temos que  $\mathcal{A} \cap \mathcal{A}^C = \emptyset$  e  $\mathcal{A} \cup \mathcal{A}^C = \Omega$ . Dos axiomas 2 e 3 temos que:

$$p(\mathcal{A}) + p(\mathcal{A}^C) = p(\mathcal{A} \cup \mathcal{A}^C) = p(\Omega) = 1,$$

e assim

$$p(\mathcal{A}^C) = 1 - p(\mathcal{A}).$$

3. Seja  $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ . Temos que  $p(\mathcal{A}) = p[(\mathcal{A} - \mathcal{B}) \cup (\mathcal{A} \cap \mathcal{B})] = p(\mathcal{A} - \mathcal{B}) + p(\mathcal{A} \cap \mathcal{B})$ , pois  $(\mathcal{A} - \mathcal{B}) \cap (\mathcal{A} \cap \mathcal{B}) = \emptyset$ . Daí concluímos que

$$p(\mathcal{A} - \mathcal{B}) = p(\mathcal{A}) - p(\mathcal{A} \cap \mathcal{B}).$$

4. Como  $\mathcal{A} \cup \mathcal{B} = (\mathcal{A} - \mathcal{B}) \cup \mathcal{B}$  então  $p(\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) = p(\mathcal{A} - \mathcal{B}) + p(\mathcal{B})$  uma vez que



$(\mathcal{A} - \mathcal{B}) \cap \mathcal{B} = \emptyset$ . Usando o item anterior, temos

$$p(\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) = p(\mathcal{A}) + p(\mathcal{B}) - p(\mathcal{A} \cap \mathcal{B})$$

no qual  $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} \neq \emptyset$ .

5. Para a demonstração desta propriedade basta considerar  $\mathcal{B} \cup \mathcal{C} = \mathcal{D}$  e aplica a propriedade anterior duas vezes.
6. Seja  $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$  de modo que  $\mathcal{B} \cap \mathcal{A} = \mathcal{A}$ . Usando a propriedade 3, temos que  $p(\mathcal{B} - \mathcal{A}) = p(\mathcal{B}) - p(\mathcal{B} \cap \mathcal{A})$  do qual segue que

$$p(\mathcal{B} - \mathcal{A}) = p(\mathcal{B}) - p(\mathcal{A}).$$

Como  $p(\mathcal{B} - \mathcal{A}) \geq 0$ , temos que  $p(\mathcal{A}) \leq p(\mathcal{B})$ . ■

#### 1.1.3.4 Probabilidade em espaços amostrais finitos

Seja  $\Omega = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_r\}$  o espaço amostral finito de um experimento aleatório. Considerando o evento elementar  $\{a_i\}$ , para  $i \in \{1, 2, 3, \dots, r\}$ , de acordo com a definição axiomática, devemos associar a cada um desses eventos um número real  $p(a_i)$ , ou simplesmente  $p_i$ , que satisfaz as seguintes propriedades:

- $0 \leq p_i \leq 1$ , para  $i \in \{1, 2, 3, \dots, r\}$ ;
- $\sum_{i=1}^r p_i = 1$ , isto é,  $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + \dots + p_r = 1$

Como exemplo, considere o experimento que consiste em lançar um dado e verificar sua face. Neste caso, temos  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ . Assim, uma das distribuições de probabilidade para os eventos elementares do nosso espaço amostral é:

$x_i$	1	2	3	4	5	6
$p(x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{15}$

Observe que, com esta escolha, todos os axiomas de probabilidade são satisfeitos, uma vez que:

- $p(1) + p(2) + p(3) + p(4) + p(5) + p(6) = 1$ ;
- $0 \leq p(1), p(2), p(3), p(4), p(5), p(6) \leq 1$ ;
- $p(\Omega) = 1$

No entanto, esta distribuição, não é apropriada do ponto vista prático, pois, não temos nenhum argumento *satisfatório* para associarmos probabilidades diferentes para os possíveis resultados do deste experimento. Neste caso, podemos atribuir probabilidade de duas maneiras diferentes:

1. Essa associação pode ser feita de modo que  $p_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ ) seja suficientemente próximo da frequência relativa do evento  $\{a_i\}$ , quando o experimento é repetido um número suficientemente grande de vezes.
2. Por meio do argumento de que nenhuma face é melhor que a outra, logo, não há nenhuma razão pela qual devemos atribuir uma probabilidade maior para uma ou para outra face. Assim, podemos associar um valor igual para cada um dos resultados, obtendo com isso um modelo probabilístico equiprovável (*principio da democracia matemática*).

Da segunda condição, devemos definir  $p_i = p(i)$  com ( $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ ), tomando  $p_i = \frac{1}{6}$ . A função  $p$  assim definida satisfaz as condições de uma função de probabilidade na visão axiomática proposta por Kolmogorov.

Do ponto de vista de teoria matemática, a visão axiomática de probabilidade não apresenta nenhum problema. No entanto, quando deseja-se aplicar tal teoria na modelagem de fenômenos do cotidiano, nos deparamos com o problema de qual valor atribuir para a probabilidade de um evento de modo que esse modelo reflita o fenômeno modelado.

Vejam os a seguir alguns exemplos de aplicações da teoria de probabilidades. Tais exemplos são interpretações de exemplos clássicos apresentados na literatura específica ([4], [6], [7], [9] e [3]).

### 1.1.3.5 Alguns exemplos de aplicação

**Exemplo:** Suponha que em um dia dez peixes são capturados em um lago, marcados e colocados novamente no lago. Alguns dias depois, vinte peixes são capturados do mesmo

lago e constata-se que dois desses peixes haviam sido marcados anteriormente. Deseja-se então saber:

1. Se o lago possui  $N$  peixes, qual é a probabilidade de, capturando vinte peixes, encontrar dois peixes marcados?
2. Para que valor de  $N$  essa probabilidade é máxima?

Vejamos como podemos aplicar a teoria desenvolvida anteriormente.

1. Para responder o primeiro questionamento, observe que há  $\binom{N}{20}$  modos possíveis de capturar vinte peixes, que são os modos de se formar subconjuntos de vinte elementos retirados de um conjunto de  $N$  elementos distintos. Para captura vinte peixes, dos quais dois estão marcados, devem ser capturados dois dos dez peixes já marcados, o que pode ser feito de  $\binom{10}{2}$  modos, os outros 18 devem ser capturados dentre restante de peixes que há no lago, os não marcados, ou seja, dentre os  $N - 10$  peixes, o que pode ser feito de  $\binom{N - 10}{18}$  modos. Assim, chamando de  $\mathcal{A}_N$  o evento de capturar dois peixes já marcados, tendo  $N$  peixes no lago, temos:

$$p(\mathcal{A}_N) = \frac{\binom{10}{2} \binom{N - 10}{18}}{\binom{N}{20}}.$$

2. Como  $p(\mathcal{A}_N) = \frac{\binom{10}{2} \binom{N - 10}{18}}{\binom{N}{20}}$ , desejemos que  $p(\mathcal{A}_N)$  seja máximo. Assim considere o evento  $\mathcal{A}_{N+1}$ , pegar dois peixes já marcados, tendo  $(N + 1)$  peixes no lago de modo que

$$p(\mathcal{A}_{N+1}) = \frac{\binom{10}{2} \binom{N + 1 - 10}{18}}{\binom{N + 1}{20}}.$$

Agora, basta analisar para quais valores de  $N$  temos  $p(\mathcal{A}_{N+1}) \geq p(\mathcal{A}_N)$ , ou seja, até quando que  $p(\mathcal{A}_N)$  crescente. Como  $p(\mathcal{A}_{N+1}) \geq p(\mathcal{A}_N)$  implica em  $p(\mathcal{A}_{N+1}) -$

$p(\mathcal{A}_N) \geq 0$ , então,

$$\frac{\binom{10}{2} \binom{N-9}{18}}{\binom{N+1}{20}} - \frac{\binom{10}{2} \binom{N-10}{18}}{\binom{N}{20}} \geq 0$$

de onde vem que

$$\frac{\binom{10}{2}}{\binom{N}{20} \binom{N+1}{20}} \left[ \binom{N}{20} \binom{N-9}{18} - \binom{N+1}{20} \binom{N-10}{18} \right] \geq 0$$

ou ainda

$$\left[ \binom{N}{20} \binom{N-9}{18} - \binom{N+1}{20} \binom{N-10}{18} \right] \geq 0.$$

Manipulando as expressões entre colchetes e colocando os fatores comuns em evidência podemos concluir que

$$\frac{(N-9)}{(N-27)} - \frac{(N+1)}{(N-19)} \geq 0$$

ou equivalentemente

$$\frac{(N-9)}{(N-27)} \geq \frac{(N+1)}{(N-19)}.$$

Assumindo  $N > 27$  temos

$$(N-9)(N-19) > (N-27)(N+1) \Rightarrow$$

o que é equivalente a desigualdade

$$N^2 - 28N + 171 \geq N^2 - 26N - 27 \Rightarrow$$

de modo que

$$-2N \geq -198$$

ou ainda  $N \leq 99$ .

Portanto  $p(\mathcal{A}_{28}) < p(\mathcal{A}_{29}) < p(\mathcal{A}_{30}) < \dots < p(\mathcal{A}_{99}) > p(\mathcal{A}_{100}) > p(\mathcal{A}_{101}) > \dots$  e assim  $p(\mathcal{A}_N)$  é máximo quando  $N = 99$ .

O problema anterior pode ser generalizado, conforme segue.

**Exemplo:** Para determinar o tamanho da população de animais de certa espécie em uma região, os biólogos, frequentemente, utilizam o método de Captura e Recaptura. O procedimento consiste em capturar número pré-fixado  $m$  de animais da espécie desejada e marcá-los. Em seguida, eles são soltos e espera-se um tempo para permitir que eles se misturem aos demais. Uma segunda amostra é retirada com  $r$  animais e o número de animais marcados é contado. Com base nessa informação, deseja-se estimar o tamanho  $N$  da população desses animais na região.

Considere o evento  $\mathcal{A}_N$ , capturar  $k_0$  peixes já marcados tendo  $N$  peixes no lago. Como anteriormente, temos que

$$p(\mathcal{A}_N) = \frac{\binom{m}{k_0} \binom{N-m}{r-k_0}}{\binom{N}{r}}$$

e queremos que  $p(\mathcal{A}_N)$  seja máximo. Assim

$$p(\mathcal{A}_{N+1}) = \frac{\binom{m}{k_0} \binom{N+1-m}{r-k_0}}{\binom{N+1}{r}}.$$

é a probabilidade de se pegar  $k_0$  peixes que já foram marcados, em  $r$  peixes capturados tendo o lago um total de  $(N+1)$  peixes.

Agora, basta analisar até quando  $p(\mathcal{A}_{N+1}) > p(\mathcal{A}_N)$ , ou seja, até quando que  $p(\mathcal{A}_N)$  cresce conforme crescimento de  $N$ . Procedendo de maneira semelhante ao exemplo anterior, temos que  $p(\mathcal{A}_{N+1}) > p(\mathcal{A}_N)$  implica que  $p(\mathcal{A}_{N+1}) - p(\mathcal{A}_N) \geq 0$ , ou seja,

$$\frac{\binom{N+1-m}{r-k_0}}{\binom{N+1}{r}} - \frac{\binom{N-m}{r-k_0}}{\binom{N}{r}} \geq 0$$

de onde vem que

$$\frac{\binom{m}{k_0}}{\binom{N}{r} \binom{N+1}{r}} \left[ \binom{N}{r} \binom{N+1-m}{r-k_0} - \binom{N+1}{r} \binom{N-m}{r-k_0} \right] \geq 0$$

ou ainda

$$\binom{N}{r} \binom{N+1-m}{r-k_0} - \binom{N+1}{r} \binom{N-m}{r-k_0} > 0.$$

Manipulando esta última expressão e colocando os fatores comuns em evidência podemos concluir que

$$\frac{(N-m+1)}{(N-m-r+k_0+1)} \geq \frac{(N+1)}{(N-r+1)}$$

e, assumindo  $N > -m - r + k_0 + 1$  temos:

$$(N-m+1)(N-r+1) \geq (N-m-r+k_0+1)(N+1)$$

de modo que

$$N^2 + (2-m-r)N + (mr-r-m+1) \geq N^2 + (2-m-r+k_0)N + (k_0-r-m+1),$$

de onde temos

$$mr \geq k_0N + k_0$$

ou ainda

$$N \leq \frac{mr - k_0}{k_0} = m \frac{r}{k_0} - 1.$$

A teoria da probabilidade também pode ser utilizada em situações nas quais se deseja obter uma estimativa de pessoas com uma certa característica, em geral característica de natureza constrangedora, dentro de população. Vejamos o exemplo a seguir:

**Exemplo:** Deseja-se estimar a proporção  $p$  de habitantes de determinada cidade ser usuário de drogas. Para isso, realizam-se entrevistas com alguns habitantes da cidade. Não se deseja perguntar diretamente ao entrevistado se ele usa drogas, pois ele poderia se recusar a responder, ou até mesmo não responder corretamente. Adota-se então o seguinte procedimento: propõe-se ao entrevistado duas perguntas cujas respostas podem ser *sim* ou *não*. Uma destas perguntas deve ser a pergunta de interesse, como por exemplo:

1. Você usa drogas?
2. Sua idade é um número par?

Pede-se para o entrevistado que jogue uma moeda, longe do entrevistador, e que se o resultado for cara, responda a primeira pergunta, e se for coroa, responda a a segunda pergunta.

Suponha que foram realizadas mil entrevistas e obtidos quatrocentos respostas *sim*. Qual seria uma estimativa para o número de usuário de drogas dessa cidade? O diagrama seguinte ilustra as possibilidades de respostas e suas respectivas probabilidades

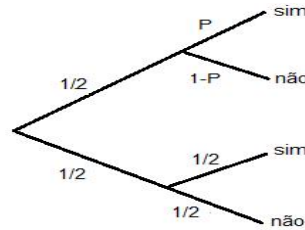


Figura 1.1: Árvore de possibilidades para o problema.

Seja  $p_s$  a probabilidade de alguém responder *sim* para qualquer uma das perguntas. Então, de acordo com o diagrama da Figura 1.1, temos:

$$p_s = \frac{1}{2}p + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}p + \frac{1}{2} \Rightarrow p = 2p_s - \frac{1}{2}.$$

Como quatrocentas pessoas responderam *sim* é razoável então  $p_s = 40\% = 0,4$  e assim temos:  $p = 2 \cdot 0,4 - 0,5 = 0,3$ . Logo, podemos estimar em 30% a proporção de usuários de drogas dessa cidade.

Vejamos uma outra aplicação interessante da teoria de probabilidade.

**Exemplo** Num grupo de  $r$  pessoas, qual é a probabilidade de pelo menos duas delas fazer aniversário no mesmo dia?

Este problema é bastante surpreendente, pois, para valores de  $r$  relativamente pequeno, essa probabilidade é bastante alta. Consideremos o ano com 365 dias e assumimos que  $r < 365$ , pois para  $r \geq 365$  a probabilidade procurada seria 1. Consideramos ainda que todos os dias são equiprováveis. Seja  $\mathcal{A}$  o evento de interesse, isto é,  $\mathcal{A} = \{\text{pelo menos duas pessoas aniversariam no mesmo dia}\}$  e seja  $\mathcal{A}^C$  o complementar do evento  $\mathcal{A}$ , isto é,  $\mathcal{A}^C = \{\text{nenhuma pessoa faz aniversário no mesmo dia que outra}\}$ . Desta forma temos que o número de elementos do evento  $\mathcal{A}^C$  é

$$\#(\mathcal{A}^C) = 365 \cdot 364 \cdot 363 \cdot 362 \cdot \dots \cdot (365 - r + 1).$$

Como um ano possui 365 dias, o número de elementos do nosso espaço amostral  $\#(\Omega)$  é o número de maneiras possíveis para os aniversários das  $r$  pessoas, e como temos 365 opções de dias para o nascimento de cada pessoa, então  $\#(\Omega) = 365^r$ . Assim,

$$p(\mathcal{A}^C) = \frac{365 \cdot 364 \cdot 363 \cdot 362 \cdot \dots \cdot (365 - r + 1)}{365^r}.$$

Logo, a probabilidade de haver pelo menos duas pessoas que fazem aniversário no mesmo dia, que é dada por:

$$p(\mathcal{A}) = 1 - \frac{365 \cdot 364 \cdot 363 \cdot 362 \cdot \dots \cdot (365 - r + 1)}{365^r}.$$

A Tabela 1.1 resume os valores de  $p(\mathcal{A})$  para alguns valores de  $r$ .

$r$	5	10	10	23	25	30	40	50	60
$p(\mathcal{A})$	0,03	0,12	0,41	0,51	0,57	0,71	0,89	0,97	0,99

Tabela 1.1:  $p(\mathcal{A})$  par alguns valores de  $r$

Note que, para um grupo de 23 pessoas, é mais provável haver duas ou mais pessoas que fazem aniversário no mesmo dia do que todas aniversariem em dias diferentes. Note ainda que para grupos com mais de 50 pessoas, é quase certo que haja duas ou mais pessoas que façam aniversário no mesmo dia.

## 1.2 Probabilidade condicional

Suponha que temos a informação que um evento  $\mathcal{A}$  ocorreu e queremos saber qual a probabilidade de um evento  $\mathcal{B}$  ocorrer. A probabilidade de  $\mathcal{B}$  ocorrer dado que  $\mathcal{A}$  ocorreu que representaremos por  $p(\mathcal{B}|\mathcal{A})$ , é definida por:

$$p(\mathcal{B}|\mathcal{A}) = \frac{p(\mathcal{A} \cap \mathcal{B})}{p(\mathcal{A})}$$

no qual admitimos que  $p(\mathcal{A}) \neq 0$

Uma argumentação para a validade desta fórmula pode ser feita por meio do diagrama de Venn da Figura. Sejam dois eventos  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{B}$  de um experimento aleatório



cujo espaço amostral é  $\Omega$ . Queremos calcular a probabilidade de ocorrer  $\mathcal{B}$ , dado que  $\mathcal{A}$  ocorreu.

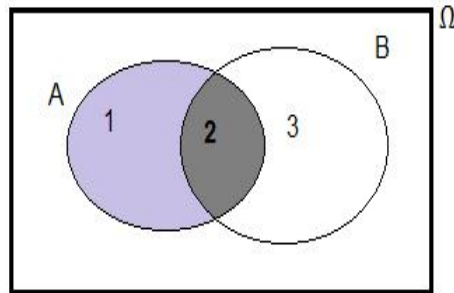


Figura 1.2: Diagrama de Venn para os eventos  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{B}$ .

Observe que, os eventos pertencentes a região 3 do nosso diagrama, não podem ocorrer, pois temos a informação que  $\mathcal{A}$  ocorreu, ou seja, ocorreram os eventos das regiões 1 e 2. Assim, os casos favoráveis à ocorrência de  $\mathcal{B}$  são apenas aqueles que se encontram na intersecção de  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{B}$ , ou seja, na região 2. Isto é, o número de casos favoráveis à ocorrência de  $\mathcal{B}$ , dado que ocorreu  $\mathcal{A}$ , é  $\#(\mathcal{A} \cap \mathcal{B})$ . E, como já sabemos que o evento  $\mathcal{A}$  ocorreu, o número de casos possíveis para o experimento fica reduzido a  $\#(\mathcal{A})$ , ou seja, o espaço amostral original do experimento sofre uma restrição, passando agora a ser o conjunto  $\mathcal{A}$  de modo que

$$p(\mathcal{B}|\mathcal{A}) = \frac{\text{número de casos favoráveis}}{\text{número de casos possíveis}} = \frac{\#(\mathcal{A} \cap \mathcal{B})}{\#(\mathcal{A})}.$$

Dividindo o numerador e o denominador do terceiro membro desta igualdade por  $\#(\Omega)$  obtemos:

$$p(\mathcal{B}|\mathcal{A}) = \frac{\frac{\#(\mathcal{A} \cap \mathcal{B})}{\#(\Omega)}}{\frac{\#(\mathcal{A})}{\#(\Omega)}} \Rightarrow p(\mathcal{B}|\mathcal{A}) = \frac{p(\mathcal{A} \cap \mathcal{B})}{p(\mathcal{A})}.$$

A probabilidade condicional pode ser vista como uma *nova* medida de probabilidade, de forma a representar melhor as chances de eventos aleatórios a partir da informação de que um dado evento ocorreu. Assim, pode-se dizer que o número que associaremos às chances que um evento tem de ocorrer, esta intimamente relacionada ao tipo de informações que possuímos sobre o experimento. Nossa opinião sobre um determinado experimento depende do tipo de informações que temos sobre ele.

### 1.2.0.6 Algumas aplicações de probabilidade condicional

Para ilustrar o uso da probabilidade condicional, consideremos a situação em um jogo de futebol entre as equipes  $A$  e  $B$ , que este ano já se enfrentaram nove vezes, sabe-se que a equipe  $A$  venceu em seis ocasiões e a equipe  $B$  venceu três. Caso fossemos apostar na vitória de uma dessas equipes, nossa intuição diria que é melhor apostar na equipe  $A$ , já que ela leva vantagem em número de vitórias sobre a outra equipe. Mas antes que a partida comece, ficamos sabendo os três principais jogadores da equipe  $A$  não participarão deste jogo, e que isto já aconteceu em 4 ocasiões nas quais a equipe  $A$  perdeu seu jogo.

Repare que o cenário mudou, pois a equipe  $A$  ficou fragilizada com a perda dos seus principais jogadores. Com isso, nossa opinião tende a mudar, pois nossa intuição agora diz que é melhor apostar na outra equipe, que esta completa.

Analisando a situação descrita acima, podemos perceber que a *chance* que atribuímos a um determinado acontecimento ocorrer em um experimento, depende de fatos exclusivamente relacionados a este experimento, em que circunstância o mesmo irá se realizar, ou seja, a probabilidade de sucesso em um experimento esta condicionada as condições que ele será realizado. Em várias outras situações de nossa vida cotidiana, atribuímos probabilidade a um determinado evento de acordo com as informações que possuímos relativas a este evento.

Vejam algumas outras situações interessantes de uso do conceito de probabilidade condicional.

**Exemplo** Sabe-se que 70% dos pênaltis marcados a favor da Seleção de Futebol do Brasil são cobrados por jogadores do Cruzeiro. A probabilidade de um pênalti ser convertido é de 80% se for cobrado por um jogador do Cruzeiro e de 60% em caso contrário. Um pênalti a favor do Brasil acabou de ser marcado:

1. Sabendo que o pênalti foi convertido, qual a probabilidade do cobrador desse pênalti ter sido um jogador do Cruzeiro?
2. Sabendo que o pênalti foi perdido, qual a probabilidade de o cobrador desse pênalti ter sido um jogador do Cruzeiro?

Vejam como esse problema pode ser resolvido sob a luz da probabilidade condicional.

1. Para um pênalti ser convertido, ou ele é cobrado por um jogador do Cruzeiro ou não. Analisemos cada caso separadamente.

A probabilidade de ser cobrado por um jogador do Cruzeiro e ser convertido é igual a:  $0,7 \cdot 0,8 = 0,56$ . Essa é a probabilidade dos nossos casos favoráveis. A probabilidade de ser cobrado por um jogador, que não seja do Cruzeiro, e ser convertido é igual a:  $0,3 \cdot 0,6 = 0,18$ . Assim, podemos concluir que a probabilidade de um pênalti ser convertido a favor do Brasil é de  $0,56 + 0,18 = 0,74$ , ou seja, 74% dos pênaltis marcados a favor do Brasil são convertidos. Essa é a probabilidade dos nossos casos possíveis. Logo, considerando o evento  $\mathcal{B}$ , pênalti cobrado por um jogador do Cruzeiro, e o evento  $\mathcal{A}$ , pênalti convertido. Teremos que a probabilidade procurada é:

$$p(\mathcal{B}|\mathcal{A}) = \frac{\text{casos favoráveis}}{\text{casos possíveis}} = \frac{0,56}{0,74} = 0,7567 = 75,67\%.$$

**Exemplo** Um casal acaba de ter gêmeos. Sabendo que uma das crianças é do sexo feminino, qual a probabilidade de as duas crianças serem do sexo feminino?

Para este problema temos o seguinte espaço amostral:

$$\Omega = \{(M, M), (M, F), (F, M), (F, F)\}.$$

Logo, se estivéssemos interessados em saber a probabilidade de um casal, que acabou de ter gêmeos, ter duas meninas, que chamaremos de evento  $\mathcal{A}$ , teríamos:

$$p(\mathcal{A}) = \frac{1}{4}$$

. Mas como temos a informação que uma das crianças é do sexo feminino, nosso espaço amostral se modifica, passando a ser:

$$\mathcal{B} = \{(M, F), (F, M), (F, F)\},$$

uma vez que o evento  $(MM)$  não pode ocorrer. Com isso, a probabilidade de as duas crianças serem do sexo feminino também se modifica, sendo agora igual a

$$p(\mathcal{A}|\mathcal{B}) = \frac{1}{3}.$$

O mesmo resultado pode ser obtido por aplicação direta da fórmula de probabili-

dade condicional. Para isso, precisamos considerar os eventos:  $\mathcal{A}$  que representa o evento que um dos gêmeos é do sexo feminino;  $\mathcal{B}$  que representa o evento que os gêmeos são do sexo feminino. Assim,  $p(\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) = 1/4$  e  $p(\mathcal{A}) = 3/4$  de modo que por aplicação da fórmula  $p(\mathcal{A}|\mathcal{B})$  chegamos ao mesmo resultado.

Vejamos agora como informações adicionais influenciam a probabilidade desejada.

**Exemplo:** Um casal acaba de ter gêmeos, sabendo-se que uma das crianças é do sexo feminino e se chama Paula, qual a probabilidade de as duas crianças serem do sexo feminino?

Para resolver este problema vamos chamar: de  $F$  o evento elementar *nascer uma criança do sexo feminino cujo nome não é Paula*; de  $M$  o evento elementar *nascer uma criança do sexo masculino*; e finalmente de  $F_p$  o evento *nascer uma criança do sexo feminino e receber o nome de Paula*. Assim, nosso espaço amostral para o nascimento dos gêmeos será

$$\Omega = \{(M, M), (M, F), (F, M), (F, F), (M, F_p), (F_p, M), (F, F_p), (F_p, F), (F_p, F_p)\}.$$

Podemos excluir desse espaço amostral o evento  $(F_p, F_p)$  por ser um evento pouco provável de ocorrer. Afinal, quem é que tem duas filhas, gêmeas, e as registra com o mesmo nome? Além disso, como temos a informação que um dos gêmeos é uma menina chamada Paula, os eventos  $(M, M)$ ,  $(M, F)$ ,  $(F, M)$  e  $(F, F)$  se excluem automaticamente. Logo, com as informações fornecidas o espaço amostral para este problema se reduz a

$$\Omega = \{(M, F_p), (F_p, M), (F, F_p), (F_p, F)\}$$

nos quais podemos considerar que os eventos são equiprováveis. Assim, a probabilidade procurada é

$$p(\mathcal{A}|\mathcal{B}) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

É importante notar que o fato de sabermos o nome de uma das crianças influencia diretamente na probabilidade procurada.

Para dar alcance ao objetivo pretendido neste trabalho, precisamos de alguns

conceitos mais avançados da teoria de probabilidade.

### 1.3 Variável aleatória, valor esperado e variância

Uma *variável aleatória*, denotada pela letra  $X$ , é uma função que associa um número real para cada evento do espaço amostral. Isto é, uma variável aleatória é uma função  $X : A \rightarrow \mathbb{R}$ , onde  $A$  é o conjunto formado pelos eventos de do espaço amostral  $\Omega$ . Para simplificar, seja  $V_X$  o conjunto de valores possíveis da variável aleatória  $X$ .

As variáveis aleatórias podem ser classificadas em *discretas* e *contínuas*. As variáveis aleatórias *discretas* são variáveis cujo o conjunto  $V_X$  é finito ou infinito enumerável. No caso em que  $V_X$  é um conjunto não enumerável tem-se uma variável aleatória *contínua*.

Seja  $X$  uma variável aleatória discreta assumindo valores reais  $V_X = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ , podemos atribuir uma probabilidade para cada um dos possíveis valores  $x_i$  assumidos por  $X$  por meio expressão

$$p_i = p(X = x_i) = p(\{\mathcal{A} \in A; X(\mathcal{A}) = x_i\}),$$

isto é, a probabilidade de  $X$  assumir o valor  $x_i$  é definida como a probabilidade dos eventos  $\mathcal{A}$  tais que  $X(\mathcal{A}) = x_i$ . A função  $p : V_x \rightarrow [0, 1]$  definida acima é chamada de *função de probabilidade* ou *função de distribuição* da variável aleatória  $X$ .

Para ilustrar, consideremos o espaço amostral  $\Omega$  resultante do lançamento de duas moedas  $\Omega = \{(c, c), (c, k), (k, c), (k, k)\}$  e seja  $p((c, c)) = p((c, k)) = p((k, c)) = p((k, k)) = 1/4$ . Consideremos  $X$  a variável aleatória que associa para cada evento de  $\Omega$  o número de caras deste evento. Assim, os possíveis valores de  $X$  é dado por  $V_X = \{0, 1, 2\}$  e, para cada um desses possíveis valores, temos as probabilidades

$$p_1 = p(X = 0) = \frac{1}{4}, \quad p_2 = p(X = 1) = \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad p_3 = p(X = 2) = \frac{1}{4}.$$

Não é difícil verificar a validade da igualdade

$$p(X = x_i \text{ ou } X = x_j) = p(X = x_i) + p(X = x_j)$$

para uma variável aleatória discreta  $X$ .

A *esperança*, ou *valor esperado*, de uma variável aleatória discreta  $X$  é o número  $E(X)$  definido pela fórmula

$$\mu = E(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p(x_i).$$

esperança pode ser interpretada como a média da variável aleatória  $X$ .

**Exemplo:** Considere um jogo no qual se lançam três moedas não viciadas e o jogador recebe R\$ 2,00 caso apareça uma cara, R\$ 4,00 se aparecerem duas caras e R\$ 8,00 caso apareçam três caras. Se nenhuma cara ocorre, nada se recebe. Quanto se esperaria ganhar caso fizesse esse jogo uma vez?

Inicialmente verificamos que o espaço amostral para o lançamento de três moedas é o conjunto

$$\Omega = \{(k, k, k), (k, k, c), (k, c, k), (c, k, k), (k, c, c), (c, k, c), (c, c, k), (c, c, c)\}.$$

Para representar o jogo, definimos a variável aleatória  $X$  que retorna o número de caras de cada evento elementar de  $\Omega$ . A distribuição de probabilidade da variável aleatória  $X$  está representada Tabela 1.2.

Número de caras	0	1	2	3
Probabilidade	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

Tabela 1.2: Distribuição de probabilidade da variável aleatória  $X$ .

Se definirmos a variável aleatória  $Y$  que representa valor a ser recebido em cada jogada, então podemos construir a distribuição de probabilidades de  $Y$ , conforme Tabela 1.3.

Número de caras	0	1	2	3
$y_i$ : valor a ser recebido (R\$)	0	2	4	8
Probabilidade: $p(y_i)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

Tabela 1.3: Distribuição de probabilidade da variável aleatória  $Y$ .

cujo valor é

$$E(Y) = 0 \cdot \frac{1}{8} + 2 \cdot \frac{3}{8} + 4 \cdot \frac{3}{8} + 8 \cdot \frac{1}{8} = \frac{26}{8} = 3,25$$

Como o valor esperado é uma média a longo prazo então, após várias jogadas, se esperaria ganhar R\$ 3,25.

Embora as probabilidades nunca possam ser negativas o valor esperado de uma variável aleatória pode ser negativo, conforme podemos ver no exemplo a seguir.

**Exemplo:** Em um sorteio, 1500 bilhetes são vendidos a R\$ 2,00 cada. Serão 4 prêmios sorteados nos valores de R\$ 500,00, R\$ 250,00, R\$ 150,00 e R\$ 75,00. Se você comprar um bilhete qual é o valor esperado do seu lucro?

Para encontrar o lucro para cada prêmio, devemos subtrair o valor do prêmio do valor pago pelo bilhete. Assim, para o prêmio de R\$ 500,00, temos um lucro igual a R\$ 500,00 – R\$ 2,00 = R\$ 498,00. E assim por diante para os demais prêmios. Definindo a variável aleatória discreta  $X$  que retorna o lucro em reais, temos a seguinte distribuição de probabilidades:

Lucro em reais ( $x_i$ )	498	248	148	73	-2
$p(x_i)$	$\frac{1}{1500}$	$\frac{1}{1500}$	$\frac{1}{1500}$	$\frac{1}{1500}$	$\frac{1496}{1500}$

Tabela 1.4: Distribuição de probabilidade da variável aleatória  $X$ .

Para esta variável aleatória temos o valor esperado

$$E(X) = 498 \cdot \frac{1}{1500} + 248 \cdot \frac{1}{1500} + 148 \cdot \frac{1}{1500} + 73 \cdot \frac{1}{1500} + (-2) \cdot \frac{1496}{1500} = -1,35.$$

Logo, como o valor esperado é negativo, você espera perder uma média de R\$ 1,35 por cada bilhete que comprar.

**Exemplo:** Seja  $\Omega = \{e_1, e_2\}$  onde  $p(e_1) = p$  e  $p(e_2) = 1 - p$ . Considere a variável aleatória  $X$  definida por  $X(e_1) = a$  e  $X(e_2) = -b$ , com  $a$  e  $b$  positivos.

Esta variável aleatória  $X$  serve como modelo em um jogo entre dois jogadores,

onde um dos jogadores aposta em um dos eventos  $e_1$  ou  $e_2$  e recebe um valor de  $a$  reais se o evento  $e_1$  ocorre e perde  $b$  reais se ocorre o evento  $e_2$ . Pergunta-se:

1. Qual é a esperança de  $X$ ? Por aplicação direta da definição de valor esperado temos

$$E(X) = pa - b(1 - p) = p(a + b) - b$$

2. Quais devem ser os valor de  $a$  e  $b$  de modo que a aposta seja *justa*? Entendemos por aposta justa aquela em que as chances de ganhar e perder são iguais, ou seja, o valor esperado  $E(X) = 0$ . Assim,

$$p(a + b) - b = 0$$

o que implica em

$$\frac{a}{b} = \frac{1 - p}{p}.$$

Outro conceito importante no estudo do comportamento de uma variável aleatória  $X$  é a *variância*,  $V(X)$ , definida por:

$$V(X) = \sum_{i=1}^k [x_i - E(X)]^2 p_i$$

A variância é uma medida que representa o quão afastado estão os dados do valor esperado de  $X$ , ou de sua média, em média.

Para exemplificar, consideremos aqui a variável aleatória  $Y$  cuja a distribuição de probabilidade está representada na Tabela 1.2 na página 37. Temos então que:

$$V(Y) = \left(\frac{13}{4}\right)^2 \frac{1}{8} + \left(2 - \frac{13}{4}\right)^2 \frac{1}{8} + \left(4 - \frac{13}{4}\right)^2 \frac{1}{8} + \left(8 - \frac{13}{4}\right)^2 \frac{1}{8} = \frac{564}{128} \approx 4,40.$$

Veamos a seguir alguma variáveis aleatórias fundamentais para o desenvolvimento deste trabalho.



### 1.3.1 Algumas variáveis aleatórias especiais.

#### 1.3.1.1 Variável aleatória de Bernoulli

Diz-se que  $X$  *variável aleatória de Bernoulli* quando  $X$  assume apenas os valores 0 ou 1. Sua distribuição de probabilidade é dada por:

$$p(X = 1) = p, \quad \text{e} \quad p(X = 0) = 1 - p.$$

Utilizamos a notação  $X \sim \text{Bernoulli}(p)$  para significar que a variável aleatória é de Bernoulli.

Em uma variável aleatória de Bernoulli, a probabilidade  $p$  é denominada de parâmetro do modelo. É prática comum considerar como *sucesso* a ocorrência de 1 e de *fracasso* a ocorrência de 0. Assim, denominamos por *ensaio de Bernoulli*, o experimento que tem resposta dicotômica do tipo sucesso-fracasso.

Sejam  $\mathcal{A}$  um evento de um espaço amostral  $\Omega$  com  $p(\mathcal{A}) = p$  e  $\omega \in \Omega$  um evento elementar. Se definirmos a variável aleatória

$$X(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{se } \omega \in \mathcal{A}, \\ 0, & \text{se } \omega \in \mathcal{A}^C. \end{cases}$$

então  $X \sim \text{Bernoulli}(p)$ . Um exemplo clássico do modelo de Bernoulli é o lançamento de uma moeda. Podemos definir *sucesso* como a ocorrência de qualquer uma das faces, digamos cara. Dessa forma temos:

$$X(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{se } \omega = \text{cara}; \\ 0, & \text{se } \omega = \text{coroa} \end{cases}$$

Se a moeda for equilibrada temos  $p = 1/2$  de modo que  $p(X = 1) = 1/2$ .

A esperança e a variância de  $X \sim \text{Bernoulli}(p)$  são respectivamente

$$E(X) = \sum_{i=1}^k x_i p_i = 1 \cdot p + 0 \cdot (1 - p) = p,$$

$$V(X) = \sum_{i=1}^k [x_i - E(X)]^2 p_i = [1 - p]^2 p + [0 - p]^2 (1 - p) =$$

$$(1 - p)p[(1 - p) + p] = p - p^2 = p(1 - p).$$

A repetição de sucessivos ensaios de Bernoulli é fonte de vários problemas teóricos interessantes. Considerando uma sequência de  $n$  ensaios de Bernoulli, independentes, outros modelos podem ser construídos.

### 1.3.1.2 Variável aleatória Binomial

Seja  $X_1, X_2, \dots, X_n$  variáveis aleatórias de Bernoulli com  $X_i \sim \text{Bernoulli}(p)$ . A variável aleatória  $X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$  assume valor no conjunto  $V_X = \{0, 1, 2, \dots, n\}$  e tem *distribuição de probabilidade binomial* dada por

$$p_i = p(Y = i) = \binom{n}{i} p^i (1 - p)^{n-i}.$$

A notação utilizada para esta variável é  $X \sim B(n, p)$ .

**Exemplo:** A taxa de imunização de uma vacina é de 80%. Se um grupo de 20 pessoas foram vacinadas, desejamos saber o comportamento probabilístico do número de pessoas imunizadas desse grupo.

Seja  $X$  a variável de interesse. Para cada pessoa do grupo, a probabilidade de estar imunizada é 0,8 e admitimos, ainda, independência entre os resultados das várias pessoas vacinadas. Dessa forma, teremos  $X \sim B(20, 0,8)$ , em que o sucesso corresponde à imunização. Por exemplo, a probabilidade de quinze pessoas estarem imunizados é dada por:

$$p(X = 15) = p(15) = \binom{20}{15} 0,8^{15} \cdot 0,2^{20-15} = 0,175.$$

Na literatura encontra-se facilmente a prova do seguinte resultado.

**Teorema:** Se para dado  $n \geq 1$  e  $p \in [0, 1]$ ,  $X \sim B(n, p)$ , então

$$\begin{aligned} E(X) &= np, \\ V(X) &= np(1 - p). \end{aligned}$$

### 1.3.1.3 Variável aleatória uniforme

Suponha que a variável aleatória  $X$  assumira valores no conjunto  $V(X) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ , isto é,  $X$  é uma variável aleatória discreta. Dizemos que a variável aleatória  $X$  é *uniforme* quando sua distribuição de probabilidade é dada por:

$$p(X = x_i) = \frac{1}{n}$$

para todo  $i = 1, 2, \dots, n$ .

No caso em que a variável aleatória  $X$  assume valores no intervalo  $V(X) = (a, b)$ , isto é,  $X$  é uma variável aleatória contínua, então dizemos que a variável aleatória  $X$  é *uniforme* quando sua distribuição de probabilidade é dada por:

$$p(X \in I) = \frac{l}{n}$$

para todo intervalo  $I \subset (a, b)$  de comprimento  $l$ .

## 1.4 Área e probabilidade

A teoria da probabilidade pode ser utilizada para determinar a área de figuras planas. Para estabelecer a relação entre áreas e probabilidade apresenta-se abaixo a definição axiomática de área. Consideramos aqui uma classe  $M$  de subconjuntos do plano que são *mensuráveis* cuja definição formal não abordaremos aqui (tal definição pode ser encontrada por exemplo em Tom M. Apostol, [1]).

Para essa classe  $M$  de subconjuntos do plano que são mensuráveis, definimos uma função  $a : M \rightarrow \mathbb{R}$ , chamada de *área*, que deve satisfazer:

1. **Propriedade de não negatividade.** Para cada conjunto  $S$  de  $M$ , temos:

$$a(S) \geq 0;$$

2. **Propriedade aditiva.** Se  $S$  e  $T$  estão em  $M$  então também estão em  $M$  os conjuntos  $(S \cup T)$  e  $(S \cap T)$  e, além disso,

$$a(S \cup T) = a(S) + a(T) - a(S \cap T).$$

3. **Invariância por congruência.** Se um conjunto  $S$  está em  $M$  e se  $T$  é *congruente* com  $S$  então  $T$  também está em  $M$  e têm-se:

$$a(S) = a(T).$$

4. **Escolha de escala.** Todo o retângulo  $R$  está em  $M$  e se os lados de  $R$  tem comprimentos  $h > 0$  e  $k > 0$  então

$$a(R) = hk.$$

5. **Propriedade de exaustão.** Considere os conjuntos  $Q$ ,  $S$  e  $T$  de maneira que

$$S \subseteq Q \subseteq T, \tag{1.1}$$

nos quais  $S$  e  $T$  pertencem a  $M$  e são formados por uniões finitas de retângulos. Se existe um único número  $c$  que verifica as desigualdades

$$a(S) \leq c \leq a(T)$$

para todas as regiões  $S$  e  $T$  que satisfaçam (1.1), então  $Q$  é mensurável, isto é,  $Q \in M$  e

$$a(Q) = c.$$

O primeiro desses axiomas estabelece simplesmente que a área de um conjunto plano mensurável não pode ser um número negativo. Já o segundo axioma nos diz que, quando um conjunto é formado por duas regiões (as quais podem haver intersecção), a área da reunião é a soma das duas partes, menos a área da sua intersecção. Em particular, se a intersecção tem área nula, a área do todo é a soma das áreas das duas partes. O terceiro axioma atribua áreas iguais a conjuntos tendo o mesmo tamanho e forma. Seria trivial a verificação dos 3 primeiros axiomas se atribuíssemos o número zero como área de cada conjunto de  $M$ . Já o quarto axioma atribui uma área não nula aos retângulos e, inalmente, o quinto axioma incorpora o *método de exaustão* permitindo assim estender a classe dos conjuntos mensuráveis a regiões mais gerais.

Consideremos agora como espaço amostral  $\Omega$  um retângulo de lados  $h$ ,  $k$  positivos.

Da definição axiomática de área, temos que  $a(\Omega) = hk$ . Com o objetivo de atribuir uma probabilidade ao evento  $\mathcal{A}$  do espaço amostral  $\Omega$ , considere a função  $p : A \rightarrow \mathbb{R}$ , no qual  $A$  é o conjunto formado pelos eventos de  $\Omega$ , definida pela seguinte expressão

$$p(\mathcal{A}) = \frac{a(\mathcal{A})}{hk}.$$

Claramente temos que  $0 \leq p(\mathcal{A}) \leq 1$ , uma vez que  $a(\mathcal{A}) \leq a(\Omega)$ . Temos ainda que se  $\mathcal{A}_1$  e  $\mathcal{A}_2$  são disjuntos, então

$$p(\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2) = \frac{a(\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2)}{hk} = \frac{a(\mathcal{A}_1) + a(\mathcal{A}_2)}{hk} = \frac{a(\mathcal{A}_1)}{hk} + \frac{a(\mathcal{A}_2)}{hk} = p(\mathcal{A}_1) + p(\mathcal{A}_2).$$

Além disso, temos que  $p(\Omega) = 1$ . Então a função  $p : A \rightarrow \mathbb{R}$  assim definida é uma função de probabilidade.

A expressão

$$p(\mathcal{A}) = \frac{a(\mathcal{A})}{hk}$$

nos permite relacionar os conceitos de área e probabilidade de modo que podemos usar métodos de estimativas de probabilidade de ocorrência de um evento  $\mathcal{A}$  para obtermos um valor estimado para a área da região plana definida pelo evento  $\mathcal{A}$ .

# Capítulo 2

## Lei dos Grandes Números e simulações

### 2.1 Introdução

Frequentemente deseja-se saber qual a probabilidade de eventos em que nem sempre é possível determinar a sua ocorrência. Por exemplo, se desejamos determinar a probabilidade de um time ser campeão, quando o campeonato aproxima-se do seu final, como vimos no capítulo anterior a quantidade de resultados possíveis torna inviável a análise de cada uma dessas possibilidades. O que poderíamos fazer seria, observar com que frequência cada time conquista o título por meio da observação de um grande número de campeonatos, o que, na prática, é naturalmente inviável.

Dispõe-se, hoje, de ferramentas que nos possibilitam fazer esse tipo de análise de forma bastante aproximada, fazendo simulações por meio de programas computacionais pode-se “realizar” milhares ou até milhões de campeonatos em questão de minutos ou até mesmo segundos. Neste sentido, as planilhas eletrônicas se mostram uma ferramenta prática para nos auxiliar nesta tarefa num nível mais elementar.

Neste capítulo vamos analisar como a frequência relativa pode ser usada para obter estimativas da probabilidade de um evento. Para isto será utilizado um importante resultado da teoria da probabilidades - a Lei dos Grandes Números. O mérito da Lei dos Grandes Números está no fato de permitir, por meio de uma longa série de observações, a estimativa da probabilidade associada a fenômenos nos quais não é possível aplicar a definição clássica de probabilidade.

## 2.2 Moedas e frequências relativas

Em 1692, Jacob Bernoulli demonstrou um teorema segundo o qual, se é conhecido a probabilidade de ocorrência de um evento num experimento aleatório, é possível indicar quais são as expectativas da frequência da sua ocorrência se o mesmo experimento for repetido um número considerável de vezes sob condições semelhantes. Por outro lado, se é desconhecida a probabilidade de um evento, mas o número de experimentos é muito grande então a sua probabilidade pode ser estimada com a precisão e certeza que se desejar.

A Lei de Bernoulli, mais conhecido como a *Lei dos Grandes Números*, afirma que, quando conforme número de realizações aumenta, a frequência relativa de um evento tende a estabilizar num determinado valor que se adota como a probabilidade desse acontecimento. Quando se repete um experimento um número suficientemente grande de vezes é possível, substituir a *Frequência Relativa* por *Probabilidade* com erro desprezível.

Para se compreender bem a Lei dos Grandes Números e suas implicações, é interessante considerar alguns experimentos práticos e também estabelecer um contraste com a definição clássica de Probabilidade.

### 2.2.1 Simulação do lançamento de moedas

Usando-se a definição clássica, a probabilidade de ocorrer uma *cara* no lançamento de uma moeda justa é, conhecidamente,  $1/2$  ou 50%.

Considere o experimento que consiste em realizar o lançamento de uma moeda  $n$  vezes e observar a frequência com que o evento  $\mathcal{A} = \textit{face voltada para cima é cara}$  ocorre. Podemos associar para cada um desses lançamentos a variável aleatória

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{se o evento } \mathcal{A} \text{ ocorre} \\ 0 & \text{se o evento } \mathcal{A} \text{ não ocorre} \end{cases}$$

Consideremos ainda a variável aleatória

$$M_n = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$$

que é frequência relativa da ocorrência do evento  $\mathcal{A}$ .

Estamos interessados em responder a pergunta: O que acontece com a variável  $M_n$  conforme o número de lançamentos  $n$  aumenta? Vamos realizar nosso experimento de lançar moedinhas, felizmente, fazendo uso das planilhas eletrônicas. Para isto, vamos usar a função *aleatórioentre(0;1)* que retorna um valor 0 ou 1, com distribuição uniforme, ou seja, com probabilidade igual de retornar o número 0 ou o 1. Assim, como modelo do nosso experimento, vamos considerar que o evento  $\mathcal{A}$  ocorreu quando o resultado da função *aleatórioentre(0;1)* for o número 1.

No experimento aleatório, realizado como descrito acima, foram obtidos os seguintes resultados representados na Tabela 2.1.

Número de lançamentos	Número obs. de caras	Frequência relativa	Diferença para a prob. clássica
10	7	0,7 = 70%	30%
150	84	0,56 = 56%	4%
500	240	0,48 = 48%	2%
20000	10049	0,5024 = 50,24%	0,24%

Tabela 2.1: Dados obtidos em simulação computacional do lançamento de moedas.

A palavra *simulação* no nosso contexto se refere ao processo de obter computacionalmente um conjunto de valores da variável  $M_n$  por meio de  $n$  realizações do experimento aleatório cujo resultado é a variável aleatória  $X_i$ . Mais precisamente, neste trabalho uma *simulação* de tamanho  $n$  consiste em obter o valor  $M_i$ , para  $i \leq n$ .

Como se pode ver, a medida que se aumenta o número de lançamentos, o valor da frequência relativa se aproxima cada vez mais dos 50% previstos pela definição clássica de probabilidade. Como é de se esperar, pela natureza aleatória do experimento, cada uma das simulações apresentam resultados diferentes, mas frequência relativa também possui o mesmo comportamento. Parece haver uma certa estabilização em torno de 50%.

A Figura 2.1 mostra o valor de  $M_n$  para  $n = 1, 2, \dots, 10$  em três simulações.



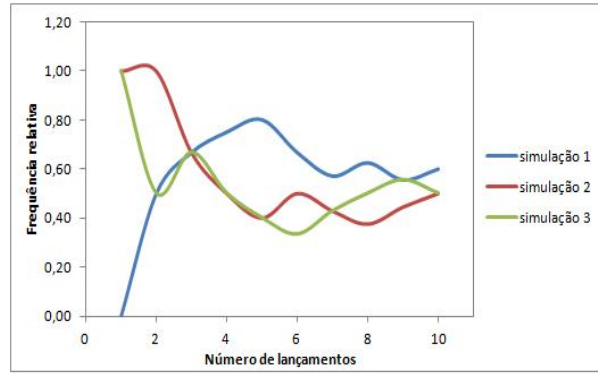


Figura 2.1: Simulações do lançamento de 10 moedas.

A Figura 2.2 representa o comportamento, da frequência de caras, em 3 simulações, com 500 lançamentos de uma moeda em cada simulação

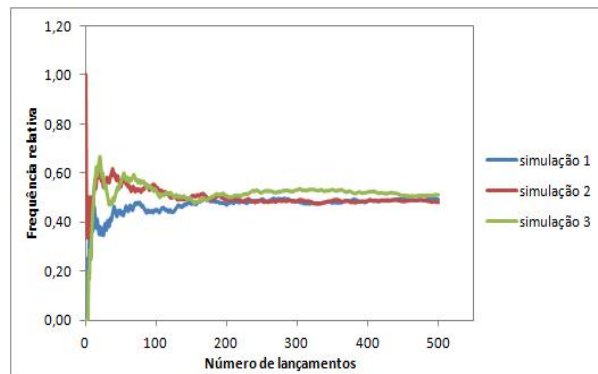


Figura 2.2: Simulações do lançamento de 500 moedas.

Já na Figura 2.3 temos três simulações do lançamento de mil moedas em cada simulação.

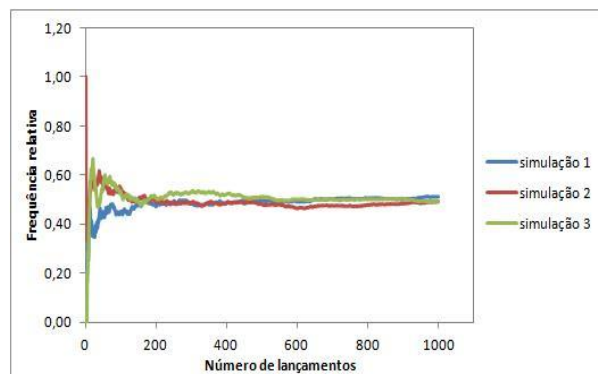


Figura 2.3: Simulações do lançamento de 1000 moedas.

Embora, cada simulação apresente um resultado diferente, podemos observar claramente uma menor flutuação do valor de  $M_n$  em torno do valor  $1/2$  conforme o valor de

$n$  aumenta. A Tabela 2.2 resume os valores de  $M_n$  obtidos em algumas simulações.

$n$	Máx	Mín	Média	[0.45, 0.55]	[0.48, 0.52]	[0.49, 0.51]
100	0,640	0,320	0,501	0,733	0,365	0,223
500	0,560	0,420	0,500	0,980	0,638	0,370
1000	0,554	0,451	0,500	0,996	0,788	0,466
5000	0,520	0,471	0,499	1	0,995	0,832
10000	0,518	0,485	0,499	1	1	0,939
15000	0,516	0,487	0,500	1	1	0,976
20000	0,511	0,488	0,500	1	1	0,989

Tabela 2.2: Simulações do lançamento de moedas para diferentes valores de  $n$ .

Note que, quanto maior o número de lançamentos, menor é a diferença entre as frequências máxima e mínima, ou seja, menor é a flutuação em torno de  $1/2$ , e mais próxima fica a frequência relativa da probabilidade obtida com a definição clássica.

Nas figuras seguintes, vemos os histogramas para 700 simulações e diferentes lançamentos em cada simulação.

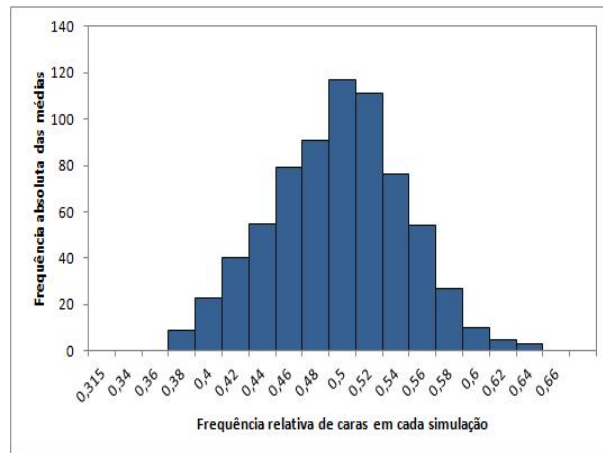


Figura 2.4: Histograma para 700 simulações de  $M_{100}$ .

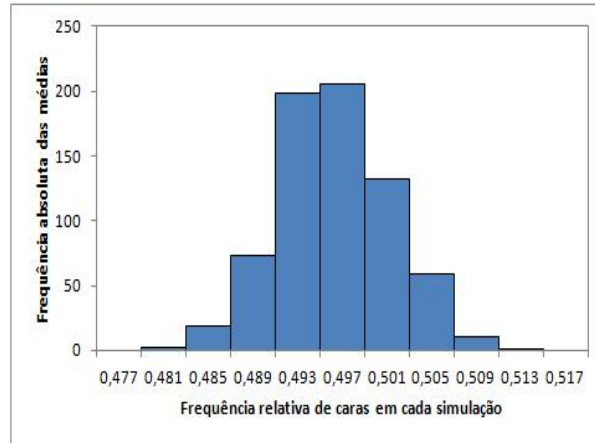


Figura 2.5: Histograma para 700 simulações de  $M_{10000}$ .

Note em cada figura que, quanto maior o número de lançamentos realizados, mais os valores de  $M_n$  obtidos se concentram em torno de  $1/2$ .

Na seção seguinte, vamos mostrar o principal resultado que justifica os dados obtidos nas simulações apresentadas nesta seção.

## 2.3 A Lei dos Grandes Números

Consideremos a variável aleatória de Bernoulli,  $X_i$ , com  $i = 1, 2, \dots, n$  tal que,

$$p(X_i = 1) = p \quad \text{e} \quad p(X_i = 0) = 1 - p.$$

Como vimos no capítulo anterior, dada a realização de  $n$  experimentos aleatórios pode-se considerar a variável

$$M_n = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}.$$

A variável aleatória  $M_n$  assume valores no conjunto

$$V_{M_n} = \{i/n : i = 0, 1, 2, \dots, n\}$$

e sua distribuição de probabilidade é:

$$m(i) = P\left(M_n = \frac{i}{n}\right) = \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}$$

Não é difícil mostrar que o valor esperado e a variância de  $M_n$  são dados, respectivamente, por

$$E(M_n) = p \quad \text{e} \quad V(M_n) = \frac{p(1-p)}{n}$$

de modo que conforme o valor de  $n$  aumenta, os dados ficam mais concentrados em torno da média  $E(M_n) = p$ . Vejamos com mais detalhes como isto acontece.

Para isso, seja  $\varepsilon > 0$  um valor dado e estamos interessados em saber qual a probabilidade da variável  $M_n$  não pertencer ao conjunto

$$A = \left\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, 1\right\} \cap (p - \varepsilon, p + \varepsilon).$$

Ou, equivalentemente, podemos escrever

$$A^C = \left\{\frac{i}{n} : \left|\frac{i}{n} - p\right| \geq \varepsilon, i = 0, 1, 2, \dots, n\right\}$$

e queremos encontrar  $p(M_n \in A^C)$ .

Como vimos no primeiro capítulo, a probabilidade do evento  $A^C$  ocorrer é a soma das probabilidades  $m(k)$  de cada evento elementar  $k/n \in A^C$  e vamos representar isso por

$$p(M_n \in A^C) = \sum_{A^C} m(k)$$

Usando a definição de variância, temos que:

$$V(M_n) = \sum_{k=0}^n \left(\frac{k}{n} - p\right)^2 m(k) \geq \sum_{A^C} \left(\frac{k}{n} - p\right)^2 m(k)$$

no qual a última desigualdade é verdadeira, pois estamos somando apenas os elementos

que estão em  $A^C$ . Agora, se  $k/n \in A^C$  então  $|k/n - p| \geq \varepsilon$  de modo que temos

$$V(M_n) \geq \sum_{A^C} \left( \frac{k}{n} - p \right)^2 m(k) \geq \sum_{A^C} \varepsilon^2 \cdot m(k)$$

que, colocando  $\varepsilon^2$  em evidencia na desigualdade anterior, obtemos

$$V(M_n) \geq \varepsilon^2 \sum_{A^C} m(k) = \varepsilon^2 p (M_n \in A^C)$$

de onde vem que

$$p(M_n \in A^C) \leq \frac{V(M_n)}{\varepsilon^2} = \frac{p(1-p)}{\varepsilon^2 n}.$$

Usando o fato de  $p(1-p) \leq \frac{1}{4}$  então temos a seguinte estimativa

$$p(M_n \in A^C) = p \left( \left| \frac{k}{n} - p \right| \geq \varepsilon \right) \leq \frac{1}{4n\varepsilon^2}.$$

o que prova a Lei dos Grandes Números de Bernoulli.

A desigualdade anterior nos revela que a probabilidade de que a frequência relativa  $M_n$  esteja fora do intervalo  $(p - \varepsilon, p + \varepsilon)$  para um valor de  $\varepsilon > 0$  escolhido, diminui conforme consideramos mais experimentos. Assim, a convergência de  $M_n$  para o valor  $p$  desconhecido é dado em termos de probabilidade.

A mesma desigualdade ainda nos revela que ao usarmos a frequência relativa com estimativa para o valor  $p$  a chance de cometermos um erro maior do que  $\varepsilon > 0$  fixado é de

$$\frac{1}{4n\varepsilon^2}.$$

Para ilustrar, suponha que  $\varepsilon = 10^{-2} = 0,01$  então

$$\frac{1}{4n\varepsilon^2} = \frac{1}{4n \cdot 10^{-4}} = \frac{10000}{4n}.$$

Suponha ainda que realizamos uma simulação com  $n = 25000$ . Com isso, ao considerarmos  $M_{25000}$  como estimativa para  $p$ , temos  $1/10 = 10\%$  de probabilidade que estejamos

cometendo um erro maior do que  $10^{-2}$ . Ou de maneira equivalentemente, a frequência relativa  $M_{25000}$  estima o valor da probabilidade desconhecida  $p$  com erro máximo de  $\varepsilon = 0,01$  em 90% da vezes que realizarmos a simulação. A chance 1/10 de cometermos um erro maior  $\varepsilon = 0,01$  é relativamente alta. No entanto, podemos diminuir este valor simplesmente aumentando o número de repetições do experimento.

Para efeito de ilustração, consideremos o experimento fictício da moedinha da seção anterior. Suponha que  $\varepsilon = 2 \cdot 10^{-2}$  e  $n = 20000$  de modo que

$$\frac{1}{4n\varepsilon^2} = \frac{1}{4n \cdot 4 \cdot 10^{-4}} = \frac{10000}{16 \cdot 20000} = \frac{1}{32}.$$

Então o valor  $\frac{1}{32}$  é a probabilidade do evento  $M_{20000} \notin (0.48, 0.52)$ . Ou ainda, temos aproximadamente 97% chance de que a probabilidade  $p$  esteja no intervalo  $(0.48, 0.52)$ .

No capítulo que segue vamos utilizar a Lei dos Grande Números juntamente com parte do que foi desenvolvido no capítulo anterior para estimarmos probabilidades de alguns eventos de interesse bem como aplicar obtermos a área de algumas figuras planas e volumes de alguns sólidos.

# Capítulo 3

## Simulação em planilhas eletrônicas

### 3.1 Introdução

Neste capítulo vamos utilizar os dados teóricos obtidos nos capítulos anteriores para obter estimativas de probabilidade de alguns eventos utilizando planilhas eletrônicas.

### 3.2 Lançamento de dados

Consideremos o experimento aleatório em que desejamos simular o lançamento de um dado e observar qual face está voltada para cima. Para simplificar, vamos olhar apenas para o número de vezes em que a face com o número 1 aparece voltada para cima.

Neste experimento não temos a intenção de estimar a probabilidade, pois já a conhecemos. O objetivo aqui é verificar mais uma vez o poder da Lei dos Grandes Números de Bernoulli e introduzir a ideia de simulações em planilhas eletrônicas.

Seja  $r_i$  o resultado da função *aleatórioentre*(1; 6). Para simular nosso lançamento de dados, consideramos a variável aleatória

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{se } r_i \in \{1\} \\ 0 & \text{se } r_i \in \{2, 3, 4, 5, 6\} \end{cases}$$

e definimos a variável aleatória

$$M_n = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$$

que é frequência relativa da ocorrência do evento de interesse.

A Figura 3.1 mostra o comportamento da variável aleatória  $M_n$  para três simulações com 800 realizações da variável  $X_i$  em cada simulação. Assim como na simulação do lançamento de moedas do capítulo anterior, podemos observar que  $M_n$  apresenta uma estabilização conforme aumentamos o valor  $n$ .

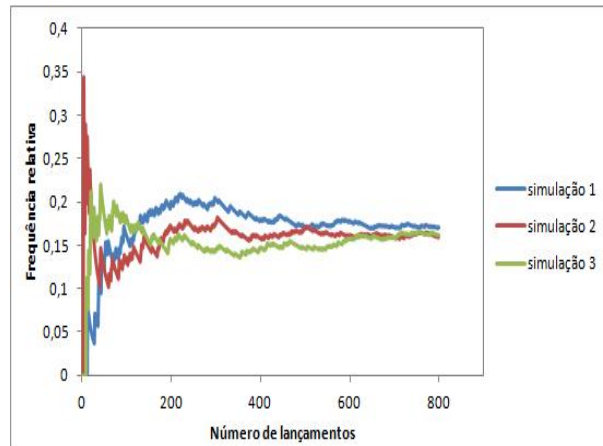


Figura 3.1: Simulações na realização de 800 realizações da variável  $X_i$ .

Na Figura 3.2, temos o histograma de 500 simulações da variável  $M_{20000}$  com  $n = 20000$  repetições da variável  $X_i$ .

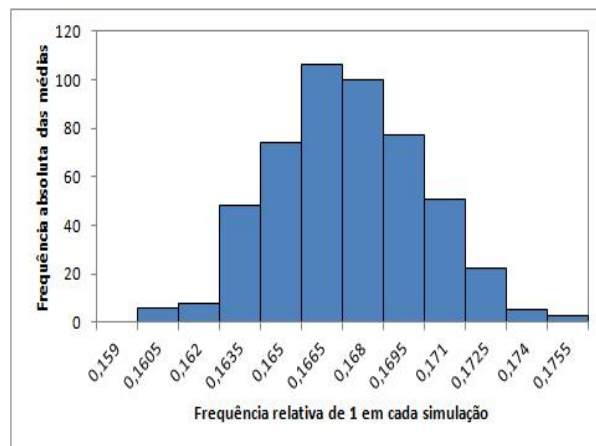


Figura 3.2: Histograma para 500 simulações da variável aleatória  $M_{20000}$ .

Tomando  $\varepsilon = 2 \cdot 10^{-2}$ , e  $n = 20000$  a Lei dos Grandes Números garante que a probabilidade máxima de  $M_n$  estar no intervalo  $(p - \varepsilon, p + \varepsilon)$  é

$$p(M_n \in (p - \varepsilon, p + \varepsilon)) \geq 1 - \frac{1}{4n\varepsilon^2} = 1 - \frac{1}{4n \cdot 4 \cdot 10^{-4}} = 1 - \frac{10000}{16 \cdot 20000} = \frac{31}{32}.$$



Isto é, em aproximadamente 97% das vezes teremos  $M_n$  no intervalo  $(p - \varepsilon, p + \varepsilon)$ .

### 3.3 Simulação de provas

Considere que uma pessoa irá fazer uma prova, composta por 10 questões, do tipo verdadeiro ou falso, mas que não possui conhecimento algum sobre o assunto que será abordado na mesma, ou seja, esta pessoa irá responder as questões de forma totalmente aleatória. Qual é a probabilidade dessa pessoa conseguir responder corretamente  $k$  questões com  $k \in \{0, 1, 2, \dots, 10\}$ ? Em outras palavras, queremos estimar a probabilidade de uma pessoa, que “chuta” todas as respostas de uma prova desse tipo, responder corretamente  $k$  questões.

O espaço amostral  $\Omega$  para este caso é constituído por todas as formas que se pode responder as 10 questões dessa prova. Logo, como cada questão pode ser respondida apenas como falsa ou verdadeira, temos que  $\#(\Omega) = 2^{10}$ .

Consideraremos o evento  $\mathcal{A}$  que consiste em responder corretamente  $k$  questões. Para isto, consideremos a variável aleatória:

$$Q_i = \begin{cases} 1 & \text{se } q_i \text{ for respondida corretamente;} \\ 0 & \text{se } q_i \text{ não for respondida corretamente.} \end{cases}$$

Queremos estimar a probabilidade da variável aleatória

$$S = Q_1 + Q_2 + \dots + Q_{10}$$

assumir o valor  $k$ .

Para estimar a probabilidade do evento de interesse por meio de uma planilha eletrônica vamos proceder da seguinte forma:

1. Consideramos que a questão  $q_i$  foi respondida corretamente se a função *aleatórioentre*(0;1) retornar o valor 1;
2. Definimos a variável aleatória  $S = q_1 + q_2 + \dots + q_{10}$ ;

3. Finalmente, consideramos a variável aleatória

$$X = \begin{cases} 1 & \text{se } S = k \\ 0 & \text{se } S \neq k \end{cases}$$

no qual  $k$  é fixado.

Como estamos interessados na probabilidade de ocorrência do evento *acertar  $k$  questões* então a Lei dos Grandes números nos diz que devemos olhar para a variável aleatória

$$M_n = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}.$$

Na Figura 3.3 temos uma estimativa para a distribuição de probabilidade da variável  $X$  para  $k = 1, 2, \dots, n$ . A probabilidade do acerto de exatamente  $k$  questões foi estimada observando o valor da variável  $M_n$  com  $n = 20000$ . De acordo com a Lei dos Grandes Números,  $M_n$  estima a probabilidade desejada com erro menor do que 2% em aproximadamente 97% das observações da variável  $M_n$ .

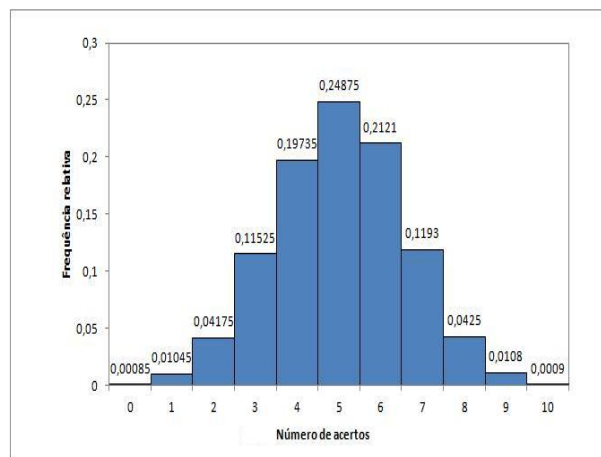


Figura 3.3: Distribuição de probabilidade da variável  $S$ .

Note que, de acordo com distribuição estimada, as chances de conseguir acertar cinco questões em uma prova nas condições descritas no problema, é muito maior do que acertar 1 questão por exemplo. Note ainda que acertar 0 ou 10 questões possuem probabilidades iguais.

### 3.4 Valor esperado de uma variável aleatória

Podemos ainda utilizar as planilhas eletrônicas com a finalidade de se obter estimativas do valor esperado de uma variável aleatória, conforme vamos descrever nessa seção.

Considerando um espaço amostral  $\Omega = \{e_1, e_2, e_3\}$  no qual  $p(e_1) = p_1$ ,  $p(e_2) = p_2$  e  $p(e_3) = p_3$  são as probabilidades de ocorrência de cada um dos eventos elementares. Consideremos ainda a variável aleatória

$$X = \begin{cases} a & \text{se } e_1 \text{ ocorre} \\ b & \text{se } e_2 \text{ ocorre} \\ c & \text{se } e_3 \text{ ocorre} \end{cases}$$

então a esperança de  $X$  é

$$E(X) = a \cdot p_1 + b \cdot p_2 + c \cdot p_3.$$

Se as probabilidades são desconhecidas, podemos estimar o valor de  $E(X)$  utilizando estimativas para  $p_1$ ,  $p_2$  e  $p_3$ . O mesmo argumento pode ser utilizado para obter o valor esperado de uma variável aleatória discreta com um número finito qualquer de possíveis resultados.

Os próximos exemplo ilustram o que foi discutido acima.

**Exemplo:** Um jogo consiste em lançar três moedas e observar o número de caras obtidos. Se este número for igual a 1, o apostador ganha R\$ 2; se for 2 ganha R\$ 2; se for 3 ganha R\$ 8 e, finalmente, se for 0 o apostador perde R\$ 16.

Vamos considerar a seguinte variável aleatória

$$X = \begin{cases} -16 & \text{se ocorrer 0 caras} \\ 2 & \text{se ocorrer 1 cara} \\ 4 & \text{se ocorrer 2 caras} \\ 8 & \text{se ocorrer 3 caras.} \end{cases}$$

Com o objetivo de estimar o valor esperado da variável aleatória  $X$  precisamos estimar a probabilidade de ocorrência dos eventos:

$\mathcal{A}$  = ocorrência de 0 caras no lançamento de três moedas;

$\mathcal{B}$  = ocorrência de 1 caras no lançamento de três moedas;

$\mathcal{C}$  = ocorrência de 2 caras no lançamento de três moedas;

$\mathcal{D}$  = ocorrência de 3 caras no lançamento de três moedas.

Para isto, procedemos da seguinte forma:

1. Para representar o lançamento de cada uma das moedas, definimos os valores  $r_i$ ,  $s_i$  e  $t_i$  como resultados da função *aleatórioentre*(0; 1);
2. Consideramos a variável aleatória  $S = r_i + s_i + t_i$ ;
3. Definimos as variáveis  $X^{(\mathcal{A})}$ ,  $X^{(\mathcal{B})}$ ,  $X^{(\mathcal{C})}$  e  $X^{(\mathcal{D})}$  pondo

$$X^{(\mathcal{A})} = \begin{cases} 1 & \text{se } S = 0 \\ 0 & \text{se } S \neq 0 \end{cases} \quad X^{(\mathcal{B})} = \begin{cases} 1 & \text{se } S = 1 \\ 0 & \text{se } S \neq 1 \end{cases}$$

$$X^{(\mathcal{C})} = \begin{cases} 1 & \text{se } S = 2 \\ 0 & \text{se } S \neq 2 \end{cases} \quad X^{(\mathcal{D})} = \begin{cases} 1 & \text{se } S = 3 \\ 0 & \text{se } S \neq 3 \end{cases}$$

4. Consideramos as variáveis aleatórias

$$M_n^{(\mathcal{A})} = \frac{X_1^{(\mathcal{A})} + X_2^{(\mathcal{A})} + \cdots + X_n^{(\mathcal{A})}}{n};$$

$$M_n^{(\mathcal{B})} = \frac{X_1^{(\mathcal{B})} + X_2^{(\mathcal{B})} + \cdots + X_n^{(\mathcal{B})}}{n};$$

$$M_n^{(\mathcal{C})} = \frac{X_1^{(\mathcal{C})} + X_2^{(\mathcal{C})} + \cdots + X_n^{(\mathcal{C})}}{n};$$

$$M_n^{(\mathcal{D})} = \frac{X_1^{(\mathcal{D})} + X_2^{(\mathcal{D})} + \cdots + X_n^{(\mathcal{D})}}{n}.$$

como estimativas para a probabilidade de ocorrência dos eventos  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}$ ,  $\mathcal{C}$  e  $\mathcal{D}$ , respectivamente;

5. Finalmente consideramos

$$E(X_n) = -16 \cdot M_n^{(\mathcal{A})} + 2 \cdot M_n^{(\mathcal{B})} + 4 \cdot M_n^{(\mathcal{C})} + 8 \cdot M_n^{(\mathcal{D})}$$

como a estimativa para a esperança da variável aleatória  $X$ .

As Figuras 3.4 e 3.5 mostram o comportamento de  $E(X_n)$  para três simulações para diferentes realizações de cada uma das variáveis aleatórias  $X^{(\mathcal{A})}$ ,  $X^{(\mathcal{B})}$ ,  $X^{(\mathcal{C})}$  e  $X^{(\mathcal{D})}$ . Note que, conforme o número de lançamentos aumenta o gráfico apresenta o mesmo comportamento de estabilidade dos casos anteriores.

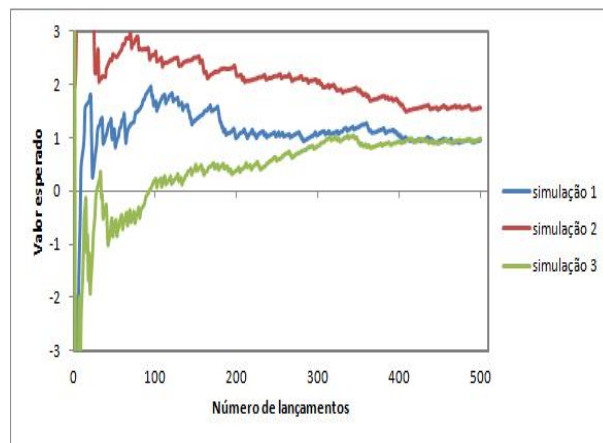


Figura 3.4: Simulações de  $E(X_n)$ .

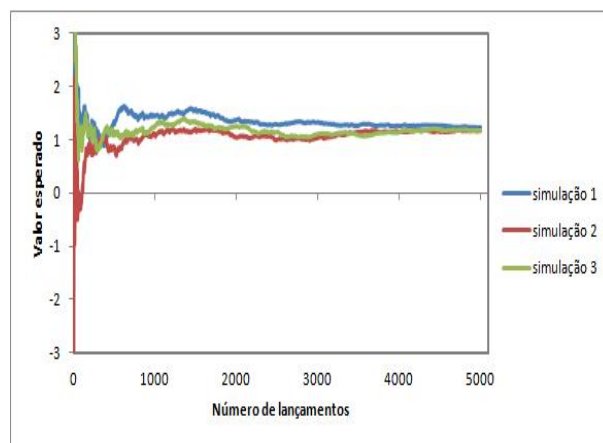


Figura 3.5: Simulações de  $E(X_n)$ .

O histograma da Figura 3.6, feito a partir de 200 simulações com  $n = 5000$  realizações das variáveis aleatórias  $X^{(A)}$ ,  $X^{(B)}$ ,  $X^{(C)}$  e  $X^{(D)}$  em cada simulação, mostra o comportamento da estimativa  $E(X_n)$  do valor esperado de  $X$ .

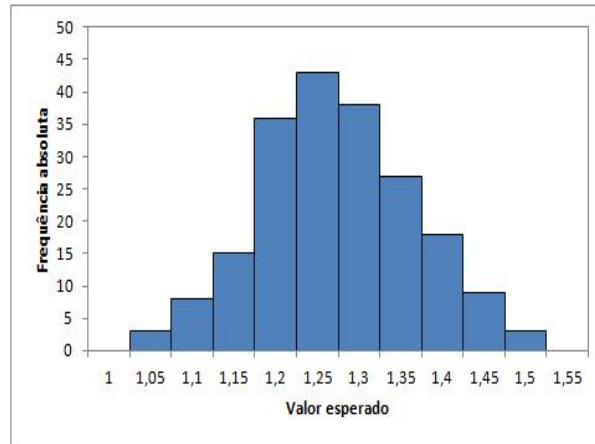


Figura 3.6: Histograma de  $E(X_n)$  para 200 simulações com  $n = 5000$ .

Percebemos que para um grande número de repetições desse experimento o gráfico tende a se estabilizar em torno de 1,25 que admitimos ser a estimativa do valor esperado da variável aleatória  $X$ .

### 3.5 Áreas e volumes

Como vimos no Capítulo 1, a área de uma figura plana  $F$  inscrita num retângulo  $R$  de lados  $h > 0$  e  $k > 0$  satisfaz a seguinte relação:

$$a(F) = p(F)hk,$$

no qual  $p(F)$  é a probabilidade de ocorrência de  $F$  quando consideramos o retângulo  $R$  como o espaço amostral, de modo que podemos usar as planilhas eletrônicas para estimar a área de uma figura  $F$ .

Para simplificar vamos supor que a figura plana  $F$  esteja inscrita em um retângulo com vértices em  $(a, c)$ ,  $(b, c)$ ,  $(a, d)$  e  $(b, d)$ .

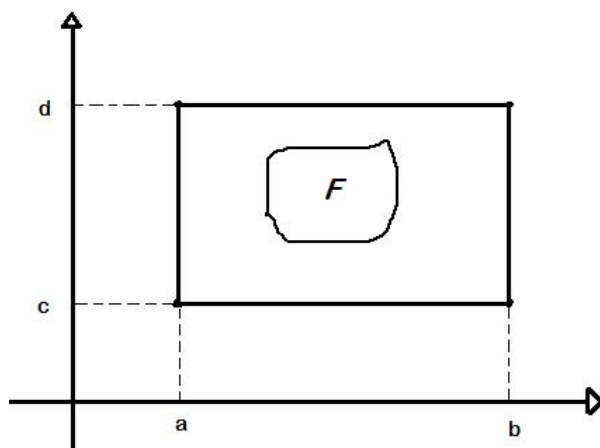


Figura 3.7: Representação gráfica do espaço amostral  $R$  e do evento  $F$ .

Considere ainda a variável aleatória

$$X = \begin{cases} 1 & \text{se } (x, y) \in F \\ 0 & \text{se } (x, y) \notin F, \end{cases}$$

Assim,  $p(X = 1) = p(F)$ .

Para estimarmos a probabilidade  $p(F)$  podemos proceder da seguinte forma:

1. Escolhemos aleatoriamente, com distribuição uniforme, um ponto  $r_i \in [a, b]$ ;
2. Escolhemos aleatoriamente, com distribuição uniforme, um ponto  $s_i \in [c, d]$ ;
3. Usamos algum critério para decidir se o ponto  $(r_i, s_i) \in F$ ;
4. Atribuímos o valor 1 para a variável aleatória  $X_i$  caso  $(r_i, s_i) \in F$  e 0 caso  $(r_i, s_i) \notin F$ ;
5. Consideramos a variável aleatória

$$M_n = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$$

que será usado como a estimativa para  $p(F)$ .

No que segue o método acima para obter estimativas de área de algumas figuras planas.

**Exemplo:** Suponha que desejamos obter a área abaixo da reta  $y = 2x$ , com  $x \in [0, 2]$ , conforme representada na Figura 3.8.

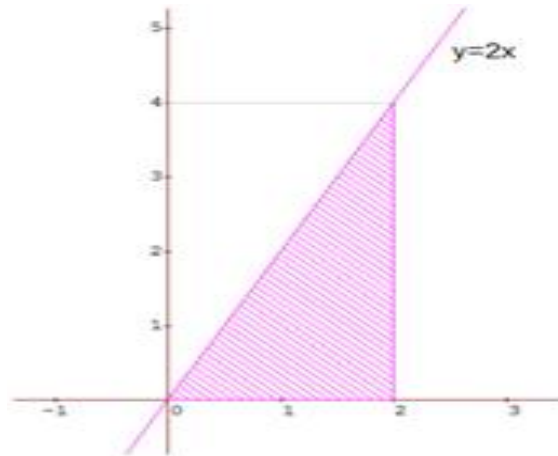


Figura 3.8: Representação gráfica da região de interesse.

Neste exemplo, um ponto  $(a, b)$  pertence ao evento de interesse se  $b \leq 2a$ . Este é o critério que vamos usar para decidir se  $(a, b) \in F$ . Assim:

1. Escolhemos aleatoriamente, com distribuição uniforme, pares  $r_i \in [0, 2]$  e  $s_i \in [0, 4]$ . Este passo pode ser feito numa planilha eletrônica usando as seguintes expressões:

$$r_i = 2 \cdot \text{aleatorio()} \quad \text{e} \quad s_i = 4 \cdot \text{aleatorio()}.$$

2. Verificamos se  $s_i \leq 2r_i$ . Caso verdadeiro, atribuímos o valor 1 para  $X_i$  e o valor 0 caso seja falso;
3. Como último passo, consideramos a variável aleatória

$$M_n = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n},$$

para a estimativa de  $p(F)$  e então

$$a_n(F) = 8M_n$$

é a estimativa para a área de  $F$ .

As Figuras 3.9 e 3.10 representam o comportamento das estimativas  $M_n(F)$  para  $n = 500$  e  $n = 5000$  realizações da variável aleatória  $X$ .



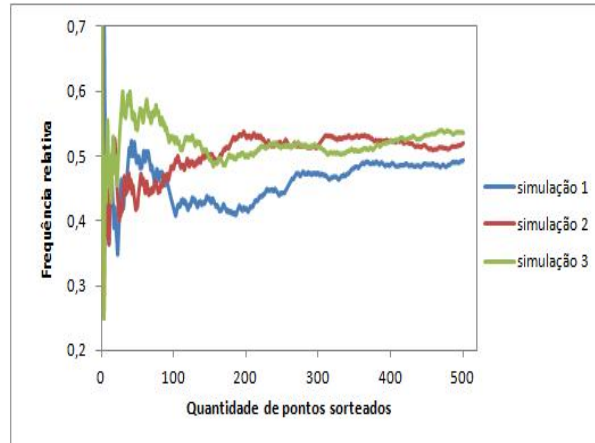


Figura 3.9: Estimativas  $M_n(F)$  para  $n \leq 500$ .

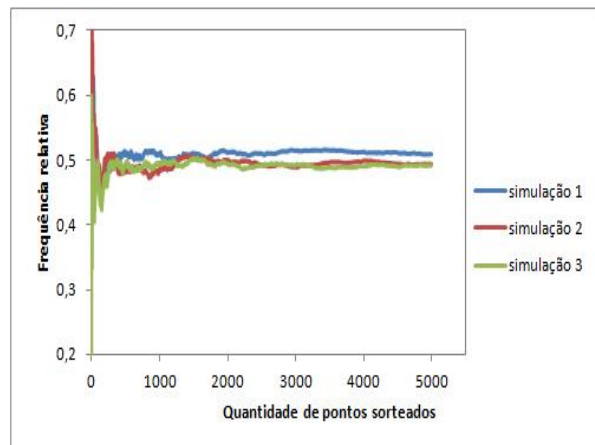


Figura 3.10: Estimativas  $M_n(F)$  para  $n \leq 5000$ .

Na figura 3.11 temos o histograma referentes a cem simulações de  $a_n(F)$ , cada uma delas com  $n = 20000$  realizações da variável aleatória  $X$ .

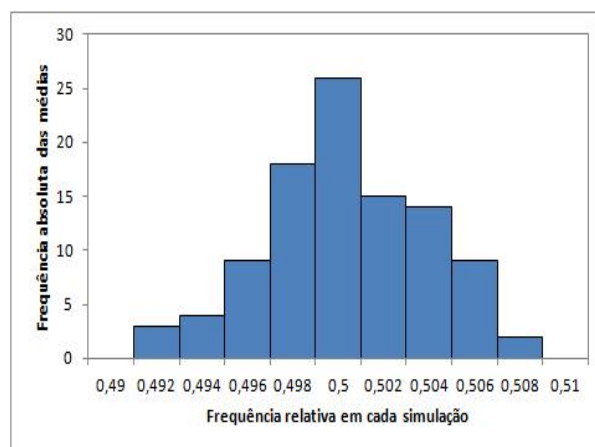


Figura 3.11: Histograma de observação da variável  $M_n(F)$ .

Analisando os dados acima, podemos perceber em ambos os gráficos tendem a se estabilizar em  $1/2$ , que é justamente a porção da área ocupada pelo triângulo em relação ao retângulo em questão. Quanto maior o número de repetições que fazemos mais próximo desse valor ficam as estimativas do valor  $1/2$ , conforme garantido pela Lei dos Grande Números.

Vale fazer uma observação importante sobre o erro na estimativa da área. Pela Lei dos Grandes Números, ao considerarmos  $M_n$  como estimativa para a probabilidade  $p$  desconhecida, temos uma chance máxima de  $\frac{1}{4n\varepsilon^2}$  de que  $M_n \notin (p - \varepsilon, p + \varepsilon)$ . No caso da área, temos a probabilidade máxima de  $\frac{1}{4n\varepsilon^2}$  de que  $a_n \notin (a - 8\varepsilon, a + 8\varepsilon)$ . Por exemplo, tomando  $\varepsilon = 2 \cdot 10^{-2}$  e  $n = 20000$  então  $a_n \in (4.84, 5.16)$  com probabilidade de aproximadamente de 97%.

**Exemplo:** Vamos agora estimar a área da região localizada abaixo da curva  $y = \text{sen}(x)$ , com  $x \in [0, \pi]$ .

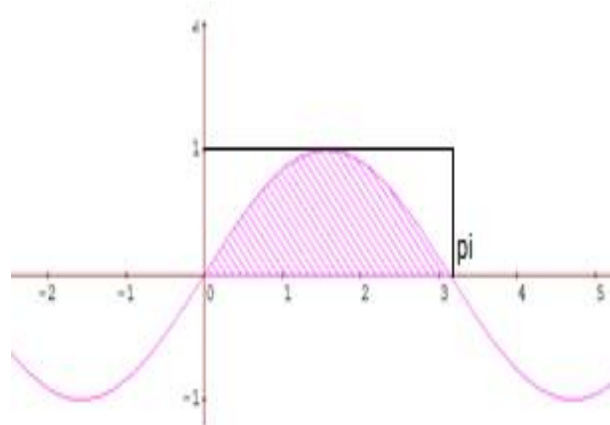


Figura 3.12: Representação gráfica da região de interesse.

1. Escolhemos aleatoriamente, com distribuição uniforme, pares  $r_i \in [0, \pi]$  e  $s_i \in [0, 1]$ . Este passo pode ser feito numa planilha eletrônica usando as seguintes expressões:

$$r_i = \pi \cdot \text{aleatorio}() \quad \text{e} \quad s_i = \text{aleatorio}().$$

2. Verificamos se  $s_i \leq \text{sen}(r_i)$ . Caso verdadeiro, atribuímos o valor 1 para  $X_i$  e o valor 0 caso seja falso;

3. Como último passo, consideramos a variável aleatória

$$M_n = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n},$$

para a estimativa de  $p(F)$  e então

$$a_n(F) = \pi M_n$$

é a estimativa para a área de  $F$ .

Na Figura 3.13 podemos ver o comportamento da estimativa  $M_n(F)$ . Novamente, como garantido pela Lei do Grande Números, temos a convergência para o valor  $p(F)$ . Neste caso, a área da figura  $F$  está estimada em 2,04 unidades de área.

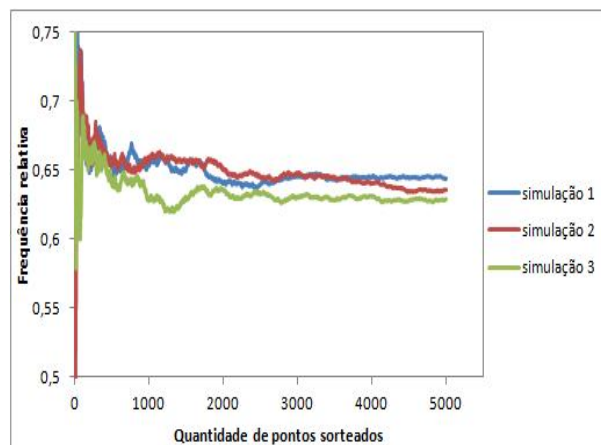


Figura 3.13: Estimativas  $M_n(F)$  para  $n \leq 5000$ .

Vale ressaltar que o gráfico da Figura 3.14 representa a proporção da área ocupada pela figura  $F$  com relação a área do retângulo.

**Exemplo:** Vamos agora estimar a área da região localizada no interior de uma circunferência de raio 4 e centro  $(0, 0)$ .

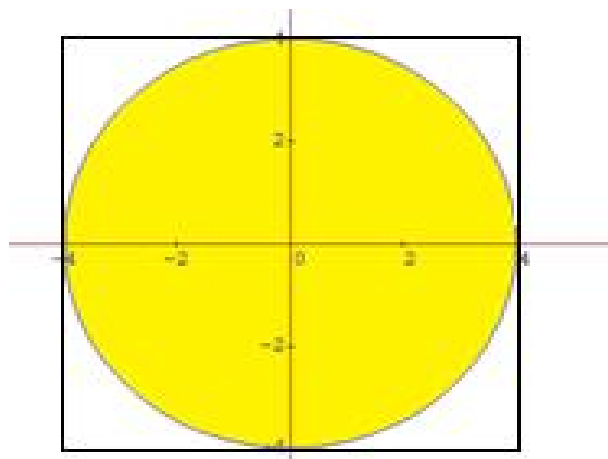


Figura 3.14: Representação gráfica da região de interesse.

Sabemos da geometria que esta área é igual  $16\pi$  unidade de área mas vamos aqui estimá-la usando o mesmo método usados nos exemplos anteriores.

1. Escolhemos aleatoriamente, com distribuição uniforme, pares  $r_i \in [-4, 4]$  e  $s_i \in [-4, 4]$ . Como anteriormente, este passo pode ser feito numa planilha eletrônica usando as seguintes expressões:

$$r_i = -4 + 8 \cdot \text{aleatorio()} \quad \text{e} \quad s_i = -4 + 8 \cdot \text{aleatorio()}.$$

2. Verificamos se  $s_i^2 + r_i^2 \leq 16$ . Caso verdadeiro, atribuímos o valor 1 para  $X_i$  e o valor 0 caso seja falso;
3. Finalmente consideramos a variável aleatória

$$M_n = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n},$$

para a estimativa de  $p(F)$  e então

$$a_n(F) = 16M_n$$

é a estimativa para a área de  $F$ .

Na Figura 3.15 podemos ver o comportamento da estimativa  $M_n(F)$ . Assim como anteriormente, a Lei do Grande Números garante a convergência para o valor  $p(F)$ .

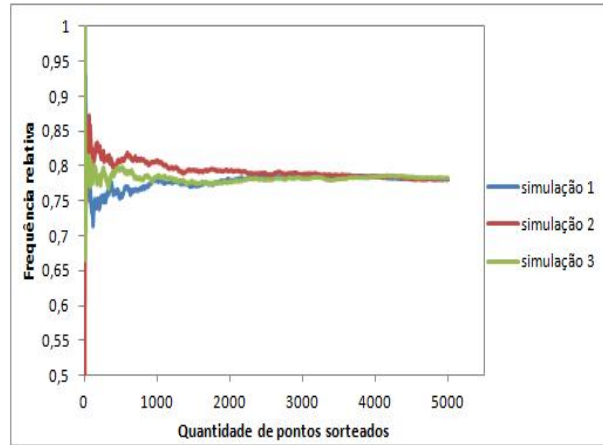


Figura 3.15: Estimativas  $M_n(F)$  para  $n \leq 5000$ .

Na figura 3.16 temos o histograma referentes a 400 simulações de  $M_n(F)$ , cada uma delas com  $n = 5000$  realizações da variável aleatória  $X$ .

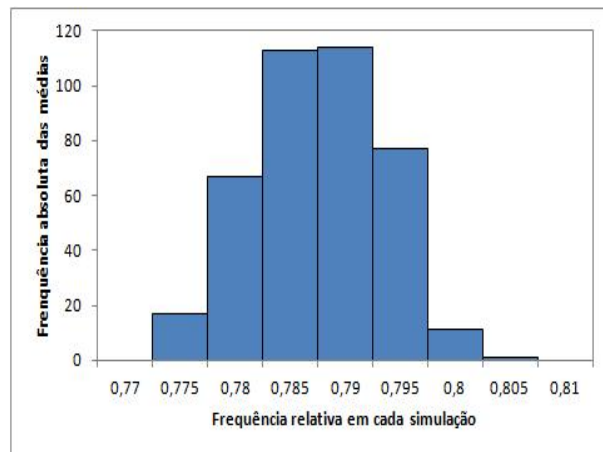


Figura 3.16: Histograma de observação da variável  $M_n(F)$ .

**Exemplo:** Estimar a área da interseção entre a circunferência  $x^2 + y^2 = 4$  e a elipse

$$\frac{x^2}{16} + y^2 = 1$$

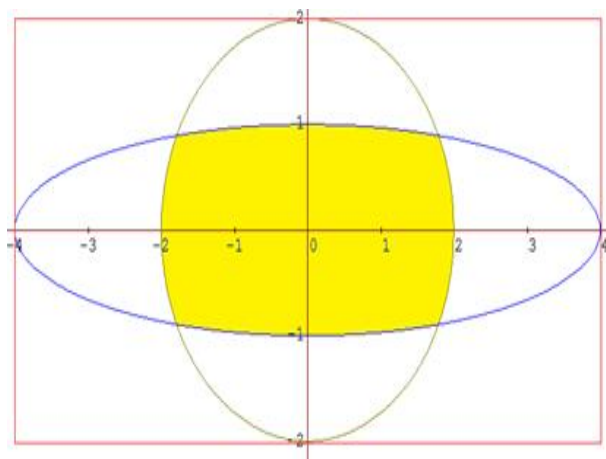


Figura 3.17: Representação gráfica da região de interesse.

Para estimar a área da região de interesse podemos proceder da seguinte forma:

1. Escolhemos aleatoriamente, com distribuição uniforme, pares  $r_i \in [-4, 4]$  e  $s_i \in [-2, 2]$ . Como anteriormente, este passo pode ser feito numa planilha eletrônica usando as seguintes expressões:

$$r_i = -4 + 8 \cdot \text{aleatorio}() \quad \text{e} \quad s_i = -2 + 4 \cdot \text{aleatorio}().$$

2. Verificamos se  $s_i^2 + r_i^2 \leq 4$ . Caso verdadeiro, atribuímos o valor 1 para  $X_i$  e o valor 0 caso seja falso; Estimativa da elipse:
3. Verificamos se  $\frac{r_i^2}{16} + s_i^2 \leq 1$ . Caso verdadeiro, atribuímos o valor 1 para  $Y_i$  e o valor 0 caso seja falso.
4. Feito isso, devemos efetuar o produto  $Z_i = X_i Y_i$  para decidir se as duas condições são satisfeitas simultaneamente e então consideramos a variável aleatória

$$M_n = \frac{Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n}{n}$$

para a estimativa de  $p(F)$  e então

$$a_n(F) = 32M_n$$

é a estimativa para a área de  $F$ .

Na Figura 3.18 vemos a convergência da estimativa  $M_n(F)$  da probabilidade  $p(F)$  que representa a proporção da área ocupada pela figura de interesse com relação ao retângulo.

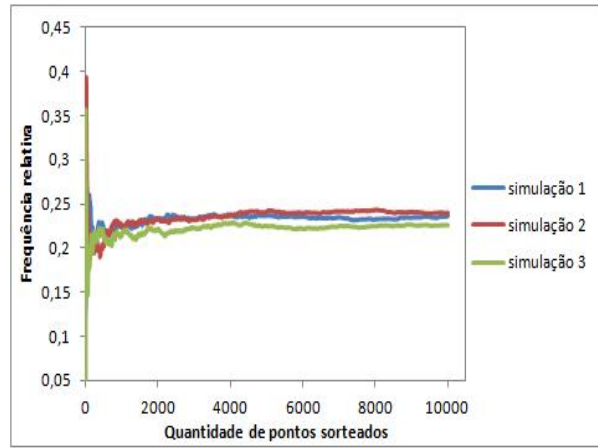


Figura 3.18: Estimativas  $M_n(F)$  para  $n \leq 10000$ .

### 3.5.1 Volume de sólidos

Assim como fizemos para a área, podemos proceder de maneira semelhante para estimar o volume de alguns sólidos geométricos. Neste caso, consideremos como espaço amostral o paralelepípedo de arestas  $h$ ,  $k$  e  $t$  positivos. Neste caso temos que

$$v(S) = p(S) \cdot h \cdot k \cdot t.$$

**Exemplo:** Consideremos o problema de estimar o volume da esfera  $S$  definida por  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$ .

Neste caso, procedemos da seguinte forma:

1. Escolhemos aleatoriamente, com distribuição uniforme, ternas  $r_i \in [-2, 2]$ ,  $s_i \in [-2, 2]$  e  $t_i \in [-2, 2]$ . Como anteriormente, este passo pode ser feito numa planilha eletrônica usando as seguintes expressões:

$$r_i = -2 + 4 \cdot \text{aleatorio}(), \quad s_i = -2 + 4 \cdot \text{aleatorio}() \quad \text{e} \quad t_i = -2 + 4 \cdot \text{aleatorio}().$$

2. Verificamos se  $s_i^2 + r_i^2 + t_i^2 \leq 4$ . Caso verdadeiro, atribuímos o valor 1 para  $X_i$  e o valor 0 caso seja falso.

3. Finalmente consideramos a variável aleatória

$$M_n = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n},$$

para a estimativa de  $p(S)$  e então

$$v_n(S) = 64M_n$$

é a estimativa do volume de  $S$ .

Na Figura 3.19 vemos a convergência da estimativa  $M_n(S)$  para a probabilidade  $p(S)$  de modo que podemos estimar o volume de  $S$  pela expressão  $v_n(S) = 64M_n$ .

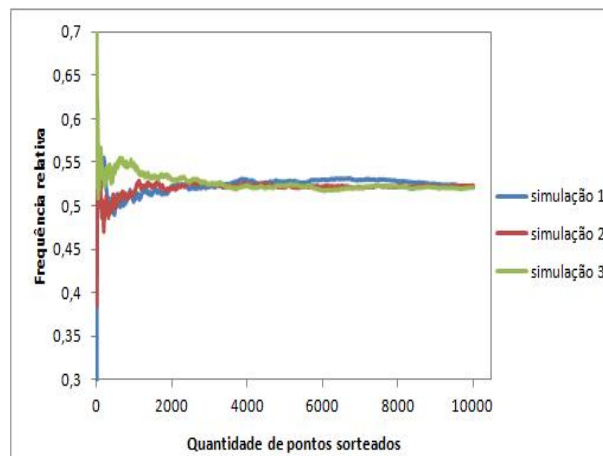


Figura 3.19: Estimativas  $M_n(F)$  para  $n \leq 10000$ .

**Exemplo:** Consideremos o problema de estimar o volume da interseção entre esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$  e a elipsoide

$$x^2 + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1.$$

Neste caso, procedemos da seguinte forma:

1. Escolhemos aleatoriamente, com distribuição uniforme, ternas  $r_i \in [-2, 2]$ ,  $s_i \in [-3, 3]$  e  $t_i \in [-2, 2]$ ;
2. Verificamos se  $s_i^2 + r_i^2 + t_i^2 \leq 4$ . Caso verdadeiro, atribuímos o valor 1 para  $X_i$  e o valor 0 caso seja falso;
3. Verificamos se

$$r_i^2 + \frac{s_i^2}{9} + \frac{t_i^2}{4} \leq 1.$$



Caso verdadeiro, atribuímos o valor 1 para  $Y_i$  e o valor 0 caso seja falso;

4. Feito isso, devemos efetuar o produto  $Z_i = X_i Y_i$  para decidir se as duas condições são satisfeitas simultaneamente e então consideramos a variável aleatória

$$M_n = \frac{Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_n}{n}$$

para a estimativa de  $p(S)$  e então

$$v_n(S) = 32M_n$$

é a estimativa para o volume de  $S$ .

Na Figura 3.20 vemos a convergência da estimativa  $M_n(S)$  para o valor  $p(S)$ . Como anteriormente a estimativa  $M_n(S)$ , representa a proporção da volume ocupado pelo sólido de interesse com relação ao paralelepípedo circunscrito.

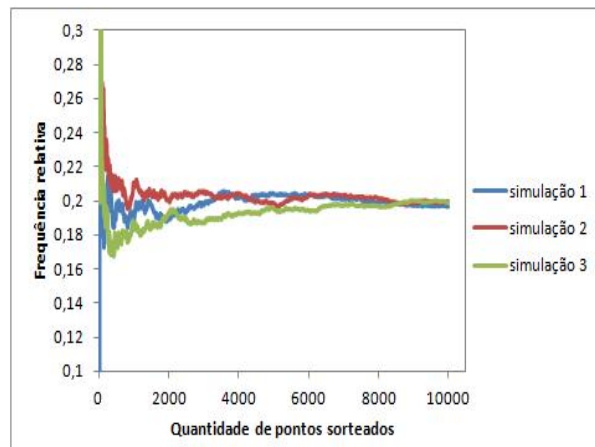


Figura 3.20: Estimativas  $M_n(F)$  para  $n \leq 10000$ .

## 3.6 Probabilidade em jogos de futebol

Por meio de simulações também é possível estimar a probabilidade de um determinado time ser campeão em um determinado torneio.

Vamos considerar que em um campeonato de futebol faltam três rodadas para seu final e os times que podem ser campeões possuem os seguintes quantidades de pontos:

1. Equipe A, 55 pontos;

2. Equipe B, 54 pontos;
3. Equipe C, 52 pontos;
4. Equipe D, 50 pontos;

Queremos estimar a probabilidade da equipe  $A$  ser a campeã isolada do campeonato. Definiremos que todas as equipes têm a mesma qualidade, ou seja, em qualquer jogo todas as equipes têm iguais chances de vencer e, além disso, vitórias, empates e derrotas tem iguais chance de acontecer a qualquer equipe.

As probabilidades de um time vencer, empatar ou perder para outro, pode ser atribuída de forma diferente a que estamos fazendo aqui, é assim que se faz na prática, pois não pode um time que lidera o tornei ter mesma probabilidade de vencer um determinado jogo do que um time que ocupa a ultima posição. Mas, como já mencionamos, não levaremos isso em consideração neste trabalho.

O experimento consiste em atribuir a uma variável aleatória os seguintes valores

$$X = \begin{cases} 0 & \text{se o time perder;} \\ 1 & \text{se o time empatar;} \\ 2 & \text{se o time vencer} \end{cases}$$

Para isso, usaremos a função *aleatórioentre*(0; 2) e programaremos a planilha eletrônica para retornar 0 caso o número sorteado seja 0, 1 caso seja 1 e 3 caso o número sorteado seja 3. E claro que se o time  $A$  joga contra o time  $B$ , esses números estão condicionados, ou interligados, uma vez que, no jogo entre as equipes  $A$  e  $B$ , se para a equipe  $A$  foi sorteado o número 2, torna automático que a planilha eletrônica retorne o número 0 para a equipe  $B$ , mas isso é fácil de programar.

Feito isso, devemos programar a planilha eletrônica para contar os pontos ganhos por todas as equipes e para retornar o número 1, toda vez que a equipe  $A$ , ao fim das 5 rodadas, possuir o maior número de pontos e 0 caso contrário.

Fizemos isso 5000 vezes e verificamos que nestas condições o time foi campeão em aproximadamente 60% das vezes. Assim podemos estimar que a probabilidade de o time *A* ser campeão é de 0,6.

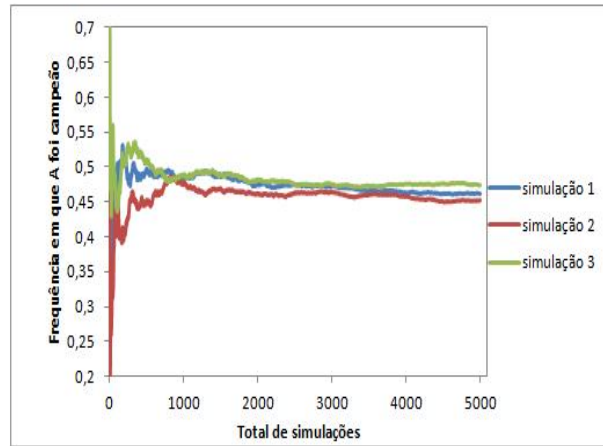


Figura 3.21: Simulação da frequência relativa para 5000 repetições.

Note que, obter esse valor usando a definição clássica é possível, mas também é no mínimo trabalhoso, pois, estamos analisando 5 times que jogarão 3 vezes, cada um, totalizando 9 jogos, considerando que os times não jogam entre si. Para cada jogo temos 3 resultados possíveis, vitória de um time, empate e vitória do outro time, assim teríamos de analisar  $3^{20} = 3486784401$  possíveis resultados. Os quais se fossemos analisar todos, gastando em média 1 segundo para analisar cada resultado, demoraríamos mais de 100 anos para terminar, o que não é uma informação das mais animadoras.

# Considerações finais e trabalhos futuros

Neste trabalho apresentamos uma proposta alternativa ao ensino de probabilidade, em nível de ensino médio, por meio de simulações em planilhas eletrônicas e abordando problemas diferenciados dos abordados no livros didáticos tradicionais. Observamos o quão surpreendente pode ser o uso de planilhas eletrônicas para estimar probabilidades de eventos interessantes que, muitos deles, não é possível obter pelos métodos convencionais. O que a princípio nos parecia uma tarefa muito complicada e desinteressante se mostrou uma ferramenta simples, interessante e muito útil.

O ensino de probabilidade, que é tão temido por alunos e em alguns casos, até mesmo por professores, pode se tornar interessante e divertido com o auxílio das planilhas eletrônicas.

Percebemos que o ensino de probabilidade pode ser feito em conjunto com outras áreas da matemática, tais como, a geometria plana e espacial e a geometria analítica, o que acreditamos contribuir como fonte de motivação para o estudo destas áreas citadas.

Este trabalho nunca teve a pretensão de ser uma fonte definitiva de métodos e problemas para o uso em sala de aula por parte de alunos e professores. Longe disso, buscamos apenas trilhar superficialmente um caminho que pode nos levar a lugares surpreendente na busca por um ensino mais motivante e relacionado com o nosso tempo.

Pretendemos aprofundar um pouco mais nos problemas, explorando alternativas que foram abandonada no meio do caminho por motivos de forças maiores. É de nosso interesse levar as atividades aqui propostas para sala de aula, apresentado para alunos e até mesmo professores como forma alternativa no ensino de probabilidades.

Finalmente, como trabalho futuro, pretendemos desenvolver uma espécie de manual técnico detalhando como professores e alunos podem fazer uso das planilhas eletrônicas

e probabilidade como ferramentas na busca da solução de problemas.

# Referências Bibliográficas

- [1] T. M. APOSTOL. *Calculus, one-variable, with an introduction to linear algebra*, volume 1. Reverté, Barcelona - Espanha, 2<sup>a</sup> edition, 1988.
- [2] H. EVES. *Introdução à História da Matemática*. Editora da Unicamp, Campinas, 2004.
- [3] G. IEZZI. *Matemática: Ciência e Aplicações.*, volume 2. Saraiva, São Paulo, 6<sup>a</sup> edition, 2010.
- [4] J. R. JULIANELLI. *Curso de Analise Combinatória e Probabilidade*. Ciência Moderna, Rio de Janeiro, 1<sup>a</sup> edition, 2009.
- [5] E. L. LIMA. *A Matemática do Ensino Médio*, volume 2. SBM, Rio de Janeiro, 6<sup>a</sup> edition, 2006.
- [6] M. N. MAGALHÃES. *Probabilidade e Variáveis Aleatórias*. Edusp, São Paulo, 2<sup>a</sup> edition, 2006.
- [7] P. C. P.; PITOMBEIRA J. B.; FERNANDEZ P. MORGADO, A. C.; CARVALHO. *Ánalise Combinatória e Probabilidade com as soluções dos exercício*. SBM, Rio de Janeiro, 9<sup>a</sup> edition, 1991.
- [8] M. NETO, P. L. O. C.; CYMBALISTA. *Probabilidades*. Edgard Blucher, São Paulo, 2<sup>a</sup> edition, 2005.
- [9] M P; CALZOLARI I T SANTOS, J P O; MELLO. *Introdução à Análise Combinatória*. Editora da Unicamp, Campinas, 3<sup>a</sup> edition, 2002.