



UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO SEMI-ÁRIDO  
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

PÉTRICK OLIVEIRA DA SILVA

**TORRE DE HANOI: UMA PROPOSTA PEDAGÓGICA PARA  
APRENDIZAGEM MATEMÁTICA E AQUISIÇÃO DO  
CONHECIMENTO CIENTÍFICO NO ENSINO SUPERIOR**

MOSSORÓ/RN  
2019

PÉTRICK OLIVEIRA DA SILVA

**TORRE DE HANOI: UMA PROPOSTA PEDAGÓGICA PARA  
APRENDIZAGEM MATEMÁTICA E AQUISIÇÃO DO  
CONHECIMENTO CIENTÍFICO NO ENSINO SUPERIOR**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentada à  
Universidade Federal Rural do Semi-Árido –  
UFERSA, Centro de Ciências Exatas e  
Naturais para a obtenção do título de Mestre  
em Matemática do programa PROFMAT.

**Orientador:** Prof. Dr. Antônio Gomes Nunes  
– UFERSA.

© Todos os direitos estão reservados a Universidade Federal Rural do Semi-Árido. O conteúdo desta obra é de inteira responsabilidade do (a) autor (a), sendo o mesmo, passível de sanções administrativas ou penais, caso sejam infringidas as leis que regulamentam a Propriedade Intelectual, respectivamente, Patentes: Lei n° 9.279/1996 e Direitos Autorais: Lei n° 9.610/1998. O conteúdo desta obra tomar-se-á de domínio público após a data de defesa e homologação da sua respectiva ata. A mesma poderá servir de base literária para novas pesquisas, desde que a obra e seu (a) respectivo (a) autor (a) sejam devidamente citados e mencionados os seus créditos bibliográficos.

S586t Silva, Pétrick Oliveira Da.  
Torre de Hanói: Uma proposta pedagógica para  
aprendizagem matemática e aquisição do  
conhecimento científico no ensino superior /  
Pétrick Oliveira Da Silva. - 2019.  
75 f. : il.

Orientador: Antônio Gomes Nunes.  
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal  
Rural do Semi-árido, Programa de Pós-graduação em  
Matemática, 2019.

1. Torre de Hanói. 2. Ensino de Matemática. 3.  
Aprendizagem Ativa. 4. Lúdico em sala de aula. I.  
Nunes, Antônio Gomes, orient. II. Título.

O serviço de Geração Automática de Ficha Catalográfica para Trabalhos de Conclusão de Curso (TCC's) foi desenvolvido pelo Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação da Universidade de São Paulo (USP) e gentilmente cedido para o Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal Rural do Semi-Árido (SISBI-UFERSA), sendo customizado pela Superintendência de Tecnologia da Informação e Comunicação (SUTIC) sob orientação dos bibliotecários da instituição para ser adaptado às necessidades dos alunos dos Cursos de Graduação e Programas de Pós-Graduação da Universidade.

PÉTRICK OLIVEIRA DA SILVA

**TORRE DE HANOI: UMA PROPOSTA PEDAGÓGICA PARA  
APRENDIZAGEM MATEMÁTICA E AQUISIÇÃO DO  
CONHECIMENTO CIENTÍFICO NO ENSINO SUPERIOR**

Dissertação apresentada a Universidade  
Federal Rural do Semiárido – UFRSA,  
Campus Mossoró/RN para obtenção do título  
de Mestre em Matemática.

**BANCA EXAMINADORA**



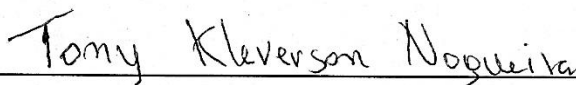
---

Prof. Dr. Antonio Gomes Nunes – UFRSA  
**Presidente**



---

Prof.ª Dr.ª Mariana de Brito Maia – UFRSA  
**Primeiro Membro**



---

Prof. Dr. Tony Kleverton Nogueira – UFRSA  
**Segundo Membro**

Aprovado em: 28 / 03 / 2019

*A minha mãe, Celina Lúcia, ao meu pai Pio Francisco, aos meus irmãos Tânia Íris e Aureliano Neto, a minha esposa Maria Eliene e a minha filha Soraya Vitória.*

“Talvez não tenha conseguido fazer o melhor, mas lutei para que o melhor fosse feito. Não sou o que deveria ser, mas Graças a Deus, não sou o que era antes”.

(Martin Luther King)

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço em primeiro lugar a Deus, pela oportunidade de realizar mais um sonho.

À minha mãe Celina Lúcia e ao meu pai Pio Francisco e meus irmãos Tânia Íris e Aureliano Neto, por todo o apoio e dedicação, e estarem sempre ao meu lado nos momentos difíceis.

À minha esposa Maria Eliene, por estar ao meu lado nessa passagem de minha vida.

Aos meus avós maternos, Maria Rebouças e Aureliano Lúcio, por me acolherem em sua casa.

À minha turma de mestrado da UFERSA, pelos momentos de aprendizado, discussões e brincadeiras.

Aos professores, que nos possibilitaram aprender e refletir sobre nossa profissão.

Aos meus amigos e companheiros de viagem: Eclésio, Elvis e Bruno.

Ao meu amigo professor Dr. Wanderley que contribuiu bastante para a realização da oficina que é a base de pesquisa desse trabalho.

Ao meu estimado orientador Prof. Dr. Antônio Gomes Nunes, por colaborar generosamente com a realização deste trabalho.

## RESUMO

Na busca por ampliar os conhecimentos acerca dos procedimentos que envolvem a aquisição do conhecimento científico e do processo de ensino-aprendizagem, a presente pesquisa tem por finalidade investigar o jogo Torre de Hanói como possibilidades de estudo em sala de aula no ensino de matemática, tendo como objetivo principal mostrar de que maneira a Torre de Hanói pode ser utilizado a fim de proporcionar um ganho de aprendizado por um viés mais lúdico e ativo. Além disso, busca-se demonstrar qual o papel do professor durante o processo da utilização de jogos em sala de aula. Para tal, optou-se por desenvolver uma pesquisa de campo no Ensino Superior, onde ainda não havia um largo estudo sobre o tema, com o qual este trabalho pudesse contribuir. Para o desenvolvimento de tal pesquisa, foi realizada uma aplicação de uma oficina nos primeiros semestres do curso de Licenciatura Plena em Matemática da Faculdade de Filosofia Dom Aureliano Matos - FAFIDAM/UECE. Para isso, foi feita uma pesquisa bibliográfica partindo da definição de Kiya (2014) acerca do aspecto lúdico como recurso pedagógico e dos pressupostos teóricos de Grandó (2000) sobre o uso dos jogos como um todo em sala de aula, dentre outros. Os resultados apontam que, os usos dos jogos matemáticos, como a Torre de Hanói, podem contribuir significativamente como método de ensino-aprendizagem que possibilita participação ativa e integrada entre os alunos e professores, facilitando a assimilação das teorias e dos conteúdos, contribuindo assim, para a aquisição do conhecimento científico.

**Palavras-chave:** Torre de Hanói. Ensino de Matemática. Aprendizagem ativa. Lúdico em sala de Aula.



## ABSTRACT

Aiming to expand the knowledge about procedures that involve scientific knowledge acquisition and the process of teaching/learning, this study aims to investigate the game Tower of Hanoi as a way of studying Mathematics in the classroom. The purpose of this implementation is to show how the game may be used to proportionate better learning through an active and ludic way. Besides, the research aims to demonstrate what the role of teachers is during the process of using such a tool. To do so, field research was conducted in Higher Education because there are not many studies about it and because this study may contribute to the area. A workshop was applied to undergraduate students that major in Mathematics in a local college called Faculdade de Filosofia Dom Aureliano Matos (FAFIDAM/UECE). This bibliographic research is based on Kiya (2014) about ludic aspects as a pedagogical tool, as well as on theoretical studies from Grandó (2000) about the usage of games in classrooms among others. Results suggest that the usage of mathematics games like Tower of Hanoi may significantly contribute as a teaching/learning method that enables integrated and active participation between teachers and students, thus facilitating the assimilation of theories and contents. Therefore, the study contributes to scientific knowledge acquisition.

**Keywords:** Tower of Hanoi. Mathematics teaching. Active learning. Playfulness.

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1: Jogos em sala de aula: vantagens e desvantagens.....	23
Tabela 2: Quantidade de discos, início do movimento e formação da torre.....	38
Tabela 3: Movimentos/Cor final da casa.....	40

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Torre de Hanói em madeira.....	27
Figura 2: Denominação das hastes.....	35
Figura 3: Torre com 1 disco.....	36
Figura 4: Torre com 2 discos.....	36
Figura 5: Torre com 3 discos.....	37
Figura 6: Torre com 7 discos.....	38
Figura (7): Torre com $(n+1)$ discos, movendo os primeiros $n$ discos.....	39
Figura (8): Movimento do disco de maior diâmetro.....	44
Figura (9): Movimento do disco de maior diâmetro.....	45
Figura (10): Movimento dos $n$ discos do Apoio para o Destino final.....	45
Figura (11): Questionário 1, pergunta 1.....	54
Figura (12): Questionário 1, pergunta 2.....	54
Figura (13): Questionário 1, pergunta 3.....	55
Figura (14): Questionário 1, pergunta 4.....	56

## LISTA DE EQUAÇÕES

Equação (1).....	41
Equação (2).....	41
Equação (3).....	41
Equação (4).....	41
Equação (5).....	42
Equação (6).....	42
Equação (7).....	42
Equação (8).....	42
Equação (9).....	43
Equação (10).....	43
Equação (11).....	43
Equação (12).....	49

## SUMÁRIO

<b>CAPÍTULO 1</b> .....	15
1.1. Introdução .....	15
<b>CAPÍTULO 2</b> .....	18
2.1. Justificativa .....	18
<b>CAPÍTULO 3</b> .....	19
3.1. Os jogos matemáticos e seu papel pedagógico. ....	19
3.2 A mediação docente no processo aluno-jogo-aprendizado. ....	20
3.3. Vantagens e habilidades desenvolvidas pelos jogos matemáticos. ....	22
<b>CAPÍTULO 4</b> .....	27
4.1. O jogo Torre de Hanói: origem e lenda. ....	27
4.2 Regras e objetivos do Jogo. ....	28
4.2.1. Regras do jogo. ....	28
4.2.2. Objetivos principais:.....	28
<b>CAPÍTULO 5</b> .....	29
5.1. Os desafios do ensino de matemática para alunos ingressos no Ensino Superior. ....	29
5.2 Possibilidades do Jogo Torre de Hanói nos diferentes níveis de ensino .....	30
5.3 Potencialidades da torre de Hanói em aulas de matemática no Ensino Superior .....	31
5.3.1. Paridade de um número inteiro.....	33
5.3.1.1 Propriedades da Paridade de números inteiros .....	34
5.3.1.2 O conceito de paridade e a Torre de Hanói.....	35
5.3.1.3 O problema do tabuleiro de xadrez.....	39
5.3.1.4 O problema do aperto de mãos .....	40
5.3.2. Recorrências.....	42
5.3.2.1 Recorrências e a Torre de Hanói .....	44
5.3.3. Princípio da Indução Finita. ....	46
5.3.3.1. Soma dos primeiros “n” números naturais.....	48

5.3.3.2. O problema da moeda falsa .....	49
<b>CAPÍTULO 6</b> .....	<b>51</b>
6.1. Proposta de Oficina .....	51
6.1.1. Objetivo Geral .....	51
6.1.2. Objetivos Específicos .....	51
6.1.3. Materiais e recursos tecnológicos .....	51
6.1.4. Procedimentos Metodológicos da Atividade .....	52
6.2. Resultados da Pesquisa e aplicação do jogo. ....	53
6.2.1 Resultados do Questionário 1. ....	54
6.2.2 Resultados do Questionário 2. ....	57
6.3 Avaliação dos resultados obtidos. ....	61
<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS</b> .....	<b>63</b>
<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b> .....	<b>64</b>
<b>ANEXOS</b> .....	<b>67</b>
Anexo I – Oficina Torre de Hanói.....	67
Anexo II – Questionário 1 .....	73
Anexo III – Questionário 2.....	74
Anexo IV – Fotos.....	75

# CAPÍTULO 1

## 1.1. Introdução

A educação básica passa atualmente por uma série de mudanças, em particular, no próprio aluno que, diante de uma grande variedade de tecnologias que lhes propiciam acesso aos mais diversos tipos de informações de forma rápida e dinamizada, desse modo o ensino teórico fica cada vez mais difícil, desafiando o educador a otimizar suas atividades em sala de aula a fim de atrair o alunado despertando e desafiando sua criatividade sobre as infinitas possibilidades de uso no cotidiano.

Durante muito tempo, a disciplina de matemática foi vista como a matéria de “fazer contas”. Hoje, sabemos que o ensino tradicional baseado apenas em fórmulas, procedimentos, listas de exercícios e avaliações não é atraente para o aluno e por isso causa uma rejeição dos mesmos. Cabe à escola e em particular ao professor, uma reflexão sobre como promover uma mudança de comportamento no aluno, de modo que o mesmo tenha um aprendizado satisfatório. Uma das maneiras de promover uma atenção maior por parte do aluno é a utilização de jogos matemáticos. Para Vygotsky (1991, p. 119), citado por Kiya (2014, p.13):

O lúdico influencia enormemente o desenvolvimento da criança. É através do jogo que a criança aprende a agir, sua curiosidade é estimulada, adquire iniciativa e autoconfiança, proporciona o desenvolvimento da linguagem, do pensamento e da concentração.

Sendo assim, compreendemos que a utilização de jogos no ensino de matemática surge como uma alternativa para a inserção de novos conteúdos, proporcionando uma aprendizagem diferenciada e lúdica. Em Piaget (1976), citado em Kiya (2014, p.13-14) também ressalta a importância desse instrumento no desenvolvimento de aspectos cognitivos da criança. Segundo ele, “o jogo é fundamental para o desenvolvimento cognitivo, pois, ao representar situações imaginárias, a criança tem a possibilidade de desenvolver o pensamento abstrato”.

Nesse trabalho busca-se demonstrar o papel pedagógico dos jogos matemáticos e a importância da mediação do professor no desenvolvimento das ideias matemáticas. Também será listado as habilidades (objetivos) alcançadas pelos alunos com o uso de jogos.

Ademais será apresentado algumas das possibilidades do uso do jogo Torre de Hanói como ferramenta de aprendizagem de matemática nos diferentes níveis de ensino: Básico e Superior. Sendo que a pesquisa está voltada para o nível Superior, onde foi desenvolvida uma oficina para os alunos do primeiro e segundo semestres da graduação em matemática da Faculdade de Filosofia Dom Aureliano Matos - FAFIDAM/UECE.

Na oficina, proposta para os alunos iniciantes da graduação, foi apresentado um questionário inicial para identificar se os alunos participantes detém familiaridade com o jogo Torre de Hanói. Em seguida, após a apresentação teórica e histórica do jogo, os alunos passaram para a parte prática de manipulação e familiarização. Após essa etapa inicial, abordou-se os potenciais de aplicação do jogo torre de Hanói no ensino de matemática no ensino básico e foi apresentado aos alunos participantes um desafio no qual os mesmos preencheram uma tabela contendo informações sobre a quantidade mínima de movimentos do jogo para certo número de discos.

Com as informações preenchidas na tabela, foi proposta uma atividade onde os alunos fizeram a dedução de uma fórmula que envolvia a quantidade mínima de movimentos para uma quantidade “n” de discos. Foram apresentados os conceitos de paridade de um número inteiro, recorrências e a indução matemática. E ao final da oficina foi feita a demonstração da fórmula de duas maneiras, usando indução matemática e a soma dos termos da Progressão Geométrica (P.G.). Encerrado o trabalho foi entregue aos alunos um novo questionário com perguntas acerca do jogo e de suas potencialidades enquanto ferramenta pedagógica onde os mesmos descreveram sobre a experiência vivenciada na oficina e sobre um uso futuro em sala de aula enquanto professores.

Nos dois primeiros capítulos desse trabalho apresenta-se os objetivos, bem como as respectivas justificativas para o desenvolvimento desta pesquisa, na sequência, no capítulo três, aborda-se o papel pedagógico dos jogos matemáticos enquanto ferramenta de aprendizagem e o seu uso em sala de aula como suporte lúdico. Em seguida aborda-se a mediação do professor onde o mesmo faz a ligação aluno-jogo matemático e ainda se citou as habilidades desenvolvidas pelos jogos matemáticos.

O quarto capítulo trata a Torre de Hanói enquanto objeto, o seu criador, a história e a lenda que deram início ao projeto do jogo, bem como os vários modelos de torres



existentes. E no quinto capítulo lista-se as potencialidades da utilização do jogo Torre de Hanói nos diferentes níveis de ensino: Básico e Superior.

Em face disso, são apresentados posteriormente os resultados obtidos com a oficina. Os resultados indicam que, o jogo Torre de Hanói, como ferramenta pedagógica em sala de aula, pode representar uma possibilidade de abordagem de aulas mais práticas e dinâmicas, já que, o aspecto lúdico do jogo é uma peça fundamental para chamar atenção do alunado para o que está sendo proposto.

Assim como os demais jogos matemáticos e quaisquer meios ou ferramentas a serem utilizados em sala de aula, é de fundamental importância que haja um planejamento adequado e uma intervenção pedagógica capaz de atender as necessidades provenientes dos problemas que surgirem com os jogos, bem como, com para superar os desafios cotidianos nos quais se esbarram o aprendizado.

## CAPÍTULO 2

### 2.1. Justificativa

Após ser convidado para ministrar uma oficina na 6ª edição do Encontro dos Estudantes de Matemática da FAFIDAM/UECE (VI EEMAT), onde abordei o tema “Torre de Hanói: Contexto e Aprendizagem” passei a me interessar cada vez mais pelo assunto. A oficina foi apresentada por mim e pelo meu colega de mestrado Elvis Maikon Reges, e contava com a participação de 8 alunos da graduação de Matemática, dos 1º e 2º semestres.

A oficina foi ministrada em dois momentos. Primeiro, falamos sobre a história, o criador e o desenvolvimento do jogo Torre de Hanói e suas regras e, em seguida foram entregues as torres de Hanói para que os alunos pudessem fazer a manipulação e a familiarização com o objeto. De imediato percebeu-se o envolvimento dos alunos com o jogo, pois, além de ser uma ferramenta lúdica é de fácil manejo.

Apesar de ser um jogo conhecido, chamou atenção o fato de constatarmos que alguns participantes da oficina não tinham conhecimento do jogo ou nunca tinham feito nenhum tipo de manipulação com determinado objeto. A partir daí, buscou-se saber se já existiam trabalhos voltados para a aplicação do jogo Torre de Hanói no ensino superior. Constatamos que ainda eram limitados a quantidade de pesquisas e publicações de trabalhos acerca do tema voltados para determinado nível de ensino, aumentado mais o nosso interesse em desenvolver tal pesquisa para esse determinado público.

Assim, um dos nossos objetivos é explorar o jogo Torre de Hanói buscando suas possibilidades como ferramenta para o ensino de matemática no ensino superior, sendo esse estudo com foco em alunos do primeiro e segundo semestres. Ademais, pretendemos demonstrar para os alunos participantes, o potencial do jogo torre de Hanói em aulas de matemática para o ensino básico, contribuindo assim, com sua formação enquanto futuro professor e possibilitando novas formas de práticas em sala de aula.

## CAPÍTULO 3

### 3.1. Os jogos matemáticos e seu papel pedagógico.

Tornar as aulas de matemática mais dinâmicas e prazerosas é um desafio e buscar recursos para que isso aconteça é uma meta para cada professor. Aulas muito teóricas deixam os alunos cansados e muitas vezes desmotivados, mas quando se leva materiais diferenciados (jogos matemáticos ou outros objetos lúdicos) para a sala de aula percebe-se uma maior empolgação por parte dos alunos.

Assim, observou-se que os jogos matemáticos podem ser um aliado para que o ensino de matemática seja mais prazeroso, pois, além do fato de ser um material palpável ou manipulável (em sua grande maioria), os jogos matemáticos são bem dinâmicos, estes fazem os alunos refletirem sobre as suas tomadas de decisão e de jogadas, contribuindo para que estes refutem seus erros e reflitam sobre seus acertos, fomentando, assim, o seu aprendizado.

Um dos pontos importantes dos jogos matemáticos é o aspecto lúdico, pois este contribui para que o aluno tenha uma boa aceitação da matéria a ser abordada pelo professor, como afirma Santos (2011, p.17):

A ludicidade é uma necessidade do ser humano em qualquer idade e não pode ser vista apenas como diversão. O desenvolvimento do aspecto lúdico facilita a aprendizagem, o desenvolvimento pessoal, social e cultural [...], facilita os processos de socialização, comunicação, expressão e construção do conhecimento.

Desse ponto de vista, o lúdico potencializa o processo de aprendizagem, pois, promove de imediato a voluntariedade no aluno em querer participar da atividade que será proposta. Lembrando que, determinada atividade não visa somente sua diversão, mas a curiosidade despertada no aluno se torna um potencial para a realização e aplicação dos conceitos matemáticos - que por vezes são alvo de esquiva pelos mesmos em certas atividades.

A partir daí o professor poderá promover os aspectos cognitivos que envolvem o jogo matemático, demonstrando também, como o trabalho em equipe na resolução dos problemas provenientes do jogo, podem contribuir para desenvolver o fator social como a interação entre os alunos e a socialização de ideias. Outro ponto importante é o fato de que o aluno constrói e desenvolve o seu aprendizado proporcionando um ganho substancial, tendo em vista que os mesmos podem relacionar as teorias do jogo à matemática e à vida real.

Ainda como potencial pedagógico, evidenciamos os jogos matemáticos como possibilidade na resolução de problemas matemáticos. Grandó (2000, p.32) afirma que:

O jogo propicia o desenvolvimento de estratégias de resolução de problemas na medida em que possibilita a investigação, ou seja, a exploração do conceito através da estrutura matemática subjacente ao jogo e que pode ser vivenciada, pelo aluno, quando ele joga, elaborando estratégias e testando-as a fim de vencer o jogo.

O jogo em si, nas suas técnicas e regras, pode promover desafios ao aluno. É na busca pela solução desses desafios que o aprendiz passa a desenvolver o seu raciocínio lógico, refletindo sobre as tomadas de decisão em consonância com as estratégias matemáticas desenvolvidas para se chegar ao resultado esperado. O jogo e a resolução de problemas se entrelaçam pelo fato de que ambos necessitam de metodologias do uso de técnicas para a sua manipulação/resolução para assim chegar a uma resposta certa.

### **3.2 A mediação docente no processo aluno-jogo-aprendizado.**

Quando se cita a palavra jogo matemático refere-se aos jogos pedagógicos ou didáticos que visam proporcionar aos alunos um ganho de aprendizado de maneira lúdica, diferenciada e significativa. No entanto, promover uma interação entre um jogo matemático, teoria (conteúdo a ser abordado) e resolução de problemas não é assim tão simples, e exige do professor um tempo maior de planejamento.

Exige também que o educador faça as devidas intervenções necessárias para a execução eficaz das atividades e manipulação do jogo, sem que sua mediação interfira na criação espontânea de seu aluno, mas que seja capaz de promover uma compreensão mais satisfatória e eficiente entre as atividades propostas e o jogo apresentado.

Diante dessa abordagem, Pereira (2013, p. 22) afirma que:

O jogo pedagógico ou didático tem como objetivo proporcionar determinadas aprendizagens, sendo uma alternativa para se melhorar o desempenho dos estudantes em alguns conteúdos de difícil aprendizagem. Nesta perspectiva, o jogo não é o fim, mas o eixo que conduz a um conteúdo didático específico, resultando de um conjunto de ações lúdicas para a aquisição de informações.

Assim diante das palavras do autor, o jogo matemático tem uma fundamental importância na aquisição de aprendizado, no entanto, este deve passar por um processo de aperfeiçoamento de modo a tornar-se acessível pelo aluno, visando um intercâmbio entre o

aluno e o aprendizado através do jogo. No desenvolvimento desse processo (interação aluno/jogo/aprendizado em matemática), o professor tem papel fundamental, pois será o mesmo que vai mesclar o jogo ao conteúdo matemático a ser trabalhado, visando uma abordagem diferenciada sobre o conteúdo.

Cada ferramenta pedagógica tem suas potencialidades e limitações. Assim, deve-se ter o cuidado ao trabalhar com jogos matemáticos em sala de aula. Pois “No contexto de ensino e aprendizagem, o objetivo do professor no trabalho com jogos matemáticos deve valorizar seu potencial pedagógico, ou seja, o desencadeamento de um trabalho de exploração e/ou aplicação de ideias matemáticas” (MARCO, 2004, p.37).

Ainda, de acordo com essa autora, não se trata de apenas “jogar o jogo”, mas de busca de soluções de problemas e desenvolvimento do raciocínio lógico, através da aplicação de ideias matemáticas. A intervenção pedagógica é de extrema importância durante todo o processo para se alcançar um resultado significativo, devendo o professor apontar as regras do jogo, as atividades propostas e os determinados objetivos a serem alcançados naquela aula.

Para que possa, dessa forma, integrar o aluno a todo o procedimento metodológico decorrente do jogo utilizado e assim, poder estimulá-lo a participar do desenvolvimento da aula, fazendo-o buscar diferentes estratégias de resolução para os distintos desafios decorrentes das jogadas, a fim de compreender o processo lógico que envolve a matemática.

Ainda em relação à intervenção pedagógica a ser feita pelo professor com jogos em aulas de matemática, Grandó (2000, p. 43-45) propõe sete momentos distintos:

- ✓ Familiarização com o material do jogo;
- ✓ Reconhecimento das regras;
- ✓ Jogar para garantir regras;
- ✓ Intervenção pedagógica verbal;
- ✓ Registro do jogo;
- ✓ Intervenção escrita;
- ✓ Jogar com competência.

A sequência acima apresentada foi de grande valia na construção e na aplicação do jogo Torre de Hanói na oficina que foi desenvolvida nesse trabalho e também serve de

base para que o professor situe seu plano de ensino ao trabalhar com jogos nos diferentes níveis de ensino.

Além disso, ainda é necessário que o professor dedique tempo ao trabalho proposto com o jogo, pois, é imprescindível que o mesmo disponha de material suficiente para atender a quantidade de alunos que venham a participar das atividades, além disso, o professor deve refletir sobre o jogo e o conteúdo a serem abordados, a faixa etária e o grau de aprendizado e maturidade dos alunos, além de buscar as estratégias adequadas para que o jogo matemático potencialize o aprendizado dos alunos de forma adequada e expressiva.

### **3.3. Vantagens e habilidades desenvolvidas pelos jogos matemáticos.**

Diante dos diversos meios de acesso e comunicação existentes nos dias atuais, a busca por informações se tornou cada vez mais fácil e rápida. Ciente dessa realidade, a educação deve buscar alternativas e meios que possam cada vez mais possibilitar uma abordagem pedagógica que, em consonância com o ensino tradicional da teoria, utilize outros métodos e ferramentas como suporte, de modo a ampliar as possibilidades de ensino-aprendizagem nas mais diversas áreas, em especial, o ensino de matemática que aqui se aborda.

Como possibilidade de abordagem e uso de ferramentas alternativas, buscou-se nos jogos matemáticos um meio viável para um ensino escolar mais dinâmico e lúdico que sejam capazes de desenvolver no aluno habilidades significativas – desde que feita a mediação adequada – para que o mesmo possa utilizar como suporte para futuras aprendizagens. Agora, quais seriam as vantagens e as subtrações de se utilizar jogos matemáticos em sala de aula? E, além disso, quais seriam essas habilidades que os jogos matemáticos poderiam desenvolver?

Sem dúvida, quando em sala de aula apresenta-se materiais diferenciados, os alunos demonstram maior empolgação em descobrir de que forma aquele material contribui com a aula a ser desenvolvida. Isso se torna evidente à medida que os alunos, de imediato, começam a tentar manipular e conhecer as regras do jogo ali apresentado, já buscando pensar em estratégias para tentar vencer os desafios supostos. Cabendo assim ao professor, a partir desse despertar dos alunos pelo jogo, determinar os passos da atividade e propor o contrato

didático para um bom desenvolvimento da aula a fim de alcançar os objetivos desejados para se obter as habilidades levantadas pelo jogo.

Sabe-se que, os jogos em sala de aula não são as respostas para todas as dificuldades de abordagem dos conteúdos, além do que, é preciso ter ciência de que a sala de aula também é composta de imprevistos e que para além das vantagens que os jogos possam possibilitar ao educador, também há os riscos de que, se não bem elaborados e pensados de forma estratégica para cada turma, podem se apresentar como desvantagem ou simplesmente não ser possível alcançar os objetivos elencados pelo conteúdo, prejudicando a aquisição das habilidades propostas pelos jogos, à medida que, desenvolver ou despertar nos alunos conhecimentos por meio de uma abordagem diferenciada é o que torna a utilização dos jogos em sala de aula significativa.

Grando (2000, p.35) nos apresenta um quadro com os mais diversos tipos de vantagens e desvantagens acerca da utilização dos jogos em sala de aula, orientando assim, para um bom traçar de estratégias para a elaboração didática que venha a fazer utilização dos jogos como ferramenta ou apoio. Como mostra a Tabela 1, a seguir:

Tabela (1): Jogos em sala de aula: vantagens e desvantagens

<b>VANTAGENS</b>	<b>DESVANTAGENS</b>
Fixação de conceitos já aprendidos de uma forma motivadora para o aluno;	O perigo de dar ao jogo um caráter puramente aleatório, tornando-se um "apêndice" em sala de aula.
Introdução e desenvolvimento de conceitos de difícil compreensão;	Os alunos jogam e se sentem motivados apenas pelo jogo, sem saber porque jogam;
Desenvolvimento de estratégias de resolução de problemas (desafio dos jogos);	O tempo gasto com as atividades de jogo em sala de aula é maior e, se o professor não estiver preparado, pode existir um sacrifício de outros conteúdos pela falta de tempo;
Aprender a tomar decisões e saber avaliá-las;	As falsas concepções de que se devem ensinar todos os conceitos através de jogos;
Significação para conceitos aparentemente incompreensíveis;	A perda da "ludicidade" do jogo pela interferência constante do professor, destruindo a essência do jogo;
Propicia o relacionamento das diferentes disciplinas (interdisciplinaridade);	A coerção do professor, exigindo que o aluno jogue, mesmo que ele não queira, destruindo a voluntariedade pertencente à natureza do jogo;
O jogo requer a participação ativa do	A dificuldade de acesso e disponibilidade

aluno na construção do seu próprio conhecimento;	de material sobre o uso de jogos no ensino, que possam vir a subsidiar o trabalho docente.
O jogo favorece a socialização entre os alunos e a conscientização do trabalho em equipe;	
A utilização dos jogos é um fator de motivação para os alunos;	
Dentre outras coisas, o jogo favorece o desenvolvimento da criatividade, de senso crítico, da participação, da competição “sadia”, da observação, das várias formas de uso da linguagem e do resgate do prazer em aprender;	
As atividades com jogos podem ser utilizadas para reforçar ou recuperar habilidades de que os alunos necessitem.	
Útil no trabalho com alunos de diferentes níveis;	
As atividades com jogos permitem ao professor identificar, diagnosticar alguns erros de aprendizagem, as atitudes e as dificuldades dos alunos.	

Fonte: GRANDO (2000, p.35).

É notório que o uso dos jogos em sala de aula possibilita um leque de vantagens e desvantagens. Dentre as desvantagens elencadas na tabela (1), destacamos neste trabalho algumas que devem ser vistas com mais atenção para que o uso do jogo mantenha seu caráter significativo como ferramenta pedagógica, são elas: o perigo de dar ao jogo um caráter puramente aleatório; jogar sem saber o porquê do jogo; a perda da “ludicidade” pela interferência do professor; e a coerção do professor destruindo a voluntariedade pertencente à natureza do jogo.

Tais desvantagens, se não percebidas podem acarretar na perda do sentido do jogo como um todo, uma vez que, “jogar por jogar” sem um objetivo bem traçado e estratégias desenvolvidas de maneira adequada, torna-se impossível obter as habilidades e vantagens que o trabalho com objetos lúdicos em sala de aula possa proporcionar. Também é preciso compreender que essa construção significativa se dá tanto pela relação aluno-aluno, quanto pela interação aluno-professor, fazendo com que o educador, apesar de ser objetivo nas atividades, não interfira demasiadamente de modo a prejudicar o aprendizado espontâneo.



Percebe-se também que são variados os benefícios de se trabalhar com jogos no desenvolvimento de conteúdos didáticos. Como foi destacado em capítulos anteriores, há algumas vantagens mais pertinentes a depender dos objetivos desejados. Algumas dessas vantagens também são elencadas no quadro apresentado por Grandó (2000) que aqui também é dado destaque. Primeiramente, o fato de que “a utilização do jogo é fator de motivação pelos alunos”, pois, compreende-se que isso se deva a ludicidade que os jogos possam despertar durante o aprendizado.

Outras vantagens aqui apresentadas dizem respeito à participação ativa do aluno durante o processo de aprendizagem e sobre a interação necessária entre os alunos e o professor. A primeira é responsável por ajudar no processo de aquisição do conhecimento de forma espontânea pelos alunos, ao passo que ele participa ativamente de todo o processo de desenvolvimento da aula, refletindo sobre os erros e acertos, e traçando estratégias para que possa chegar a um objetivo ou resultado desejado de forma mais rápida e eficiente.

A vantagem seguinte representa todo o contexto social que o ensino deve promover, já que, a interação ou socialização entre os alunos, promove não somente a resolução de problemas matemáticos, mas também, o desenvolvimento da comunicação e da linguagem por meio da troca de experiências e dúvidas pelos alunos, além do intermédio pelo professor tornando a atividade tanto eficiente num nível pedagógico quanto significativa para a aprendizagem e a vida do aluno.

Além dessas vantagens descritas, sobressaem outras apontadas no quadro que vêm a fomentar esta pesquisa, como: introdução e desenvolvimento de conceitos de difícil compreensão; significação para conceitos aparentemente incompreensíveis; e as atividades com jogos permitem ao professor identificar, diagnosticar alguns erros de aprendizagem, as atitudes e as dificuldades dos alunos. Estas últimas, tanto são motivadoras para o início do trabalho com os jogos, pois, permite desenvolver de forma mais simples e compreensível alguns conceitos em matemática, como para a avaliação que se sucederá ao jogo, permitindo ao professor identificar as dificuldades perceptíveis durante a atividade, podendo traçar estratégias para revogar tais dificuldades.

Apontados os benéficos adquiridos com a utilização dos jogos em sala de aula, apresenta-se na sequência as habilidades adquiridas por meio das vantagens desenvolvidas

com os jogos. Em seu livro *Jogos na Educação: criar, fazer, jogar*<sup>1</sup> a autora Maria da Glória Lopes cita os objetivos pedagógicos no contexto escolar e clínico que podem ser atingidos através do uso de atividades com jogos. Segundo Lopes (2011, p.36-45), conforme citado por Kiya (2014, p.14) os objetivos que podem ser atingidos através dos jogos são:

**Habilidades (Objetivos):**

- ✓ Aprimorar a coordenação motora:
- ✓ Desenvolver a organização espacial:
- ✓ Aumentar a atenção e a concentração;
- ✓ Desenvolver antecipação e estratégia;
- ✓ Ampliar o raciocínio lógico;
- ✓ Desenvolver a criatividade;
- ✓ Perceber figura e fundo.

No trabalho com jogos matemáticos, todas essas habilidades são importantes para o desenvolvimento cognitivo dos alunos, dentre as principais, destaca-se a concentração e o raciocínio lógico, já que essas habilidades adquiridas contribuirão para o processo de aprendizagem à medida que o raciocínio lógico é tido como uma ferramenta poderosa para a dedução de ideias matemáticas e resolução de problemas mais elaborados.

---

<sup>1</sup> Editora Cortez: Os modelos de jogos são apresentados com objetivos, faixa etária, material e estratégia para que o educador possa organizar seu trabalho, integrando conteúdos ao aperfeiçoamento das áreas cognitiva e motora do desenvolvimento infantil.

## CAPÍTULO 4

### 4.1. O jogo Torre de Hanói: origem e lenda.

A torre de Hanói é um jogo bem simples a princípio, ele é um quebra-cabeça que consiste em uma base, onde são fixados três pinos, em um dos quais são dispostos alguns discos, de diferentes diâmetros, uns sobre os outros. Existem diversos modelos diferentes, podendo variar quanto ao material de fabricação, de cor, de tamanho ou da quantidade de discos a depender da finalidade de quem a deseja manipular. Veja a Figura 1 a seguir:

Figura (1): Torre de Hanói em madeira.



Fonte: <https://www.papelariamatriz.com.br/Brinquedo-Educativo-Gui-Gui-TORRE-DE-HANOI#.XH05WcBKjIU>

Existem várias histórias a respeito da origem do jogo, uma das mais conhecidas diz respeito a uma lenda, e nessa lenda uma torre, a “Torre de Brahma”, encontra-se no centro do mundo, sob a cúpula de um templo situado em Benares, na Índia. Neste centro, há uma placa de latão onde estão fixados três pinos de diamantes, em um dos quais ao criar o mundo, Brahma colocou 64 discos de ouro, apoiadas um sobre o outro, e de diâmetro decrescente a partir da base.

Segundo as imutáveis leis de Brahma, os sacerdotes do templo estão incumbidos da tarefa de transferir a pilha de discos para um dos outros dois pinos trabalhando dia e noite sem cessar, sendo que devem mover um disco por vez e nunca pôr um disco maior sobre um menor que ele. A vida decorrerá durante essa tarefa, após o fim da tarefa, o templo, a torre e os sacerdotes serão transformados em pó, e o mundo desaparecerá com o estrondo de um trovão (BARROS, 2011, p.27).

No Ocidente, atribui-se a criação do jogo e da lenda da torre de Hanói, ao matemático francês Eduard Lucas. O jogo teria sido comercializado como brinquedo

sob a autoria do Professor Claus do colégio LI- SOU STIAN. Como brinquedos eram usados oito discos, segundo as mesmas regras descritas na lenda. (BARROS, 2011, p. 28)

Pode-se citar várias outras lendas a respeito das torres, mas todas elas têm o mesmo fundamento teórico e objetivos semelhantes, por isso evidenciamos apenas uma delas, em vista de ser uma das mais conhecidas atualmente.

## **4.2 Regras e objetivos do Jogo.**

### **4.2.1. Regras do jogo.**

Para manipulação do jogo é necessário que se respeitem algumas regras que o condicionam, deixando-o mais complexo e ao mesmo tempo dando real sentido de desafio, dessa forma exigindo do seu jogador maior grau de raciocínio no movimento das peças. As regras são as seguintes:

- ✓ Só pode movimentar uma peça (disco) por vez;
- ✓ Uma peça de maior diâmetro não pode ficar sobre uma peça de menor diâmetro;
- ✓ As peças devem estar sempre em uma das três hastes, ou em movimento;

### **4.2.2. Objetivos principais:**

De posse das regras é necessário que o jogador tenha seus objetivos definidos, seja pela simples manipulação por passatempo ou, como neste trabalho, com uma finalidade pedagógica.

Os objetivos principais são:

- ✓ Determinar uma estratégia para movimentar as peças de uma torre para outra com o menor número de jogadas de acordo com as regras;
- ✓ Determinar o número mínimo de jogadas para movimentar as peças de uma torre para outra;

Os objetivos também podem ter suas variantes, tais como, em um jogo de vários competidores saber quem conseguiu transportar a torre de um pino (haste) para outro com a menor quantidade de discos, sem levar em consideração a quantidade exata de jogadas.

## CAPÍTULO 5

### 5.1. Os desafios do ensino de matemática para alunos ingressos no Ensino Superior.

O ensino de matemática em nível escolar, em grande parte, é focado nas avaliações externas, como por exemplo: o SPAECE<sup>2</sup>, a Prova Brasil<sup>3</sup>. Essas avaliações exigem do aluno uma base de conteúdos elementares e muitas vezes distante de ensino mais aprofundado de conteúdos matemáticos. Diante disso, ao ingressar na universidade o aluno sente certo deslocamento da realidade de ensino no qual estava inserido anteriormente, pois, os conteúdos e a abordagem pedagógica atendem a uma realidade diferente da qual o aluno estava acostumado. Com isso, boa parte dos estudantes que chegam ao ensino superior sente dificuldade em muitas disciplinas que envolvem conhecimentos básicos de matemática.

Do mesmo modo, o sistema de ensino escolar “pressiona” o professor de matemática a focar determinados conteúdos – para atender as exigências das avaliações externas acima citadas – passando para os alunos a ideia de que “apenas isso é necessário e suficiente” ao aprendizado, deixando a noção de uma matemática simplificada e de cunho bastante técnica. Por conta disso, grande parte dos alunos ficam despreparados para enfrentar um ensino de cunho mais científico e aprofundado.

Quando ingressam na universidade esses alunos sentem enorme dificuldade, pois se deparam com um ensino baseado em teorias matemáticas nunca antes visto pelos mesmos. Além da rotina de estudos que é mais intensa e da abordagem pedagógica do professor universitário que é mais exigente e “conteudista<sup>4</sup>”, exigindo que o aluno detenha conhecimentos prévios essenciais para a compreensão e construção do conhecimento científico. Além disso, segundo Palis (2009, p.206), citado por Allevato e Masola (2016, p.68):

Há muitas outras preocupações, relativas a mudanças pedagógicas e curriculares que vêm ocorrendo, ou que precisam ocorrer, devido a fatores vários: o rápido

---

<sup>2</sup> Sistema Permanente de Avaliação da Educação Básica do Ceará, criado em 1992, o SPAECE fornece subsídios para formulação, reformulação e monitoramento das políticas educacionais, vislumbrando a oferta de um ensino de qualidade a todos os alunos da rede pública do Ceará.

<sup>3</sup> A Prova Brasil é uma avaliação para diagnóstico, em larga escala, desenvolvidas pelo Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (Inep/MEC). Têm o objetivo de avaliar a qualidade do ensino oferecido pelo sistema educacional brasileiro a partir de testes padronizados e questionários socioeconômicos. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/prova-brasil>.

<sup>4</sup> Refere-se ao fato da grande quantidade de conteúdos e disciplinas diferenciadas e dispostos concomitantemente aos alunos desde os primeiros semestres.

desenvolvimento das tecnologias computacionais; os apelos por integração com outras disciplinas, por iniciativas de inclusão e diversidade, por mais eficiência nos cursos de serviço, pelo emprego de múltiplas formas de avaliação, pelo trabalho em grupo, pelo desenvolvimento de habilidades de apresentação e comunicação etc.

Segundo a autora, são várias as dificuldades enfrentadas pelos alunos iniciantes nos cursos de graduação. Dentre elas, a mudança pedagógica que vem ocorrendo ou precisa ocorrer, já que, diante das inovações tecnológicas que permitem acesso aos mais diversos meios de comunicação e pesquisa, fazendo com que a sala de aula não seja exclusivamente o único local de aprendizado e acesso a informações, requerendo por parte das instituições de ensino e dos docentes uma mudança ou “adaptação” as mais diversas formas de aprender.

Nos cursos de graduação, além dos conteúdos abordados se apresentarem de forma bastante teórica e por vezes distantes da realidade do aluno, ainda há o fato de que somente sua participação ativa no processo de aprendizagem enquanto pesquisador em formação é que o levará a um grau desejado ou de excelência de aprendizado e construção do conhecimento.

Mas como o professor poderia intervir para facilitar a construção do saber científico por parte dos alunos? Diante de tal questionamento e as dificuldades constatadas em leituras que versam sobre o assunto, buscou-se desenvolver esta pesquisa a fim de se propor uma abordagem em sala de aula que possa utilizar jogos matemáticos como meio de trabalhar problemas e resoluções, que envolvam além da teoria (que é sem dúvida uma parte essencial do aprendizado) um enfoque prático e lúdico no ensino superior, podendo também, ser trabalhado nos níveis básicos de ensino.

## **5.2 Possibilidades do Jogo Torre de Hanói nos diferentes níveis de ensino**

A seguir, listam-se algumas das possibilidades de utilização do jogo Torre de Hanói nos diferentes níveis de ensino: básico e superior. Para tal, utilizaram-se como parâmetro teórico os estudos acerca das possibilidades educacionais com o jogo Torre de Hanói apresentados por Rossini e Silva (2016) e Silva (2015). Com isso, os professores que tiverem o interesse em trabalhar com essa ferramenta terão um suporte de conteúdos matemáticos como direcionamento inicial de trabalho.

### 1º - Ensino Infantil e Fundamental:

- ✓ Melhorar a coordenação motora;
- ✓ Aprendendo as diferentes cores (discos de cores diferentes);
- ✓ Alfabetização matemática e raciocínio lógico: conceitos e simbologia;
- ✓ Noção de crescente e decrescente;
- ✓ Forma Geométrica (círculo);
- ✓ Potenciação;
- ✓ Busca de estratégias;
- ✓ Socialização de ideias matemáticas.

### 2° - Ensino Médio:

- ✓ Contagem;
- ✓ Função exponencial;
- ✓ Progressão Geométrica (P.G.);

### 3° - Ensino Superior:

- ✓ Paridade de um número inteiro;
- ✓ Deduções e Recorrências (Recursão);
- ✓ Indução finita (demonstração de fórmulas).

Em seguida, descrevem-se alguns conteúdos possíveis de serem trabalhados tendo como suporte o jogo Torre de Hanói no ensino superior, abordando suas definições, teoremas e descrevendo alguns exemplos de sua aplicação na resolução de problemas matemáticos e expondo de que forma o jogo poderá ser utilizado como suporte teórico e de aprendizagem de tais conteúdos.

### **5.3 Potencialidades da torre de Hanói em aulas de matemática no Ensino Superior**

Muitas teorias versam sobre as dificuldades do ensino-aprendizagem de matemática em todos os níveis de ensino, principalmente no ensino básico, e assim, refletindo mais tarde no ensino superior. Agora, o que fazer para tentar mudar esse quadro? Ou seja, que tipo de ensino poderá promover no aluno uma aprendizagem mais significativa pautada na investigação e na busca de soluções de uma maneira lúdica e desafiadora?

Não se pretende aqui fazer uma investigação para tentar alavancar uma discussão aprofundada sobre as teorias de ensino-aprendizagem e nem ir a fundo sobre as dificuldades enfrentadas pelos discentes no que se refere à adaptação às diferentes metodologias utilizadas pelos professores universitários. Pretende-se mostrar uma proposta didática de ensino com a utilização do Jogo Torre de Hanói como proposta de aprendizagem, focando no fator lúdico e na investigação de conceitos matemáticos. Tal projeto, embora desenvolvido e aplicado em nível superior, também poderá ser utilizado por professores em outros níveis de ensino e futuramente pelos próprios alunos formandos participantes da oficina, desde que feitos os devidos ajustes para adequar-se à realidade do aluno.

Os jogos podem potencializar o ensino de conteúdos de matemáticas desde que sejam utilizados de maneira a levar o aluno a pensar e buscar soluções através da manipulação de um material concreto e lúdico e assim desenvolver, através da mediação do professor, a socialização de ideias promovendo assim seu próprio aprendizado. Como afirma Antunes (2003, p. 36):

É nesse contexto que o jogo ganha espaço como ferramenta ideal da aprendizagem, na medida em que propõe estímulo ao interesse do estudante, que como todo pequeno animal adora jogar e joga sempre principalmente sozinho e desenvolve níveis diferentes de sua experiência pessoal e social. O jogo ajuda-o a construir novas descobertas, desenvolve e enriquece sua personalidade e simboliza um instrumento pedagógico que leva ao educador a condição de condutor, estimulador e avaliador da aprendizagem.

Dessa forma, compreende-se também que a utilização do jogo como ferramenta pedagógica em sala de aula vem a contribuir não somente com o aprendizado dos alunos, mas que também, proporciona uma oportunidade para o docente de apresentar e desenvolver novas táticas de condução de aprendizagem e avaliação de seus alunos, assim como também de repensar suas estratégias de abordagem pedagógica.

Para desenvolver tal atividade, a fim de alcançar os objetivos acima descritos, pretendeu-se na oficina abordar alguns conceitos matemáticos que são geralmente de



exclusividade aos conteúdos do ensino superior, dentre os principais destaca-se o conceito de paridade de um número inteiro, a relação de recorrência, e a indução matemática. Também se utiliza o jogo para demonstrar a fórmula da soma dos termos de uma Progressão Geométrica (P.G.) finita.

Antes disso, veja um tópico que descreve a ideia de paridade de um número inteiro, a relação de recorrência, e a indução finita como conceitos matemáticos. Utiliza-se a relação de recorrência para determinar uma fórmula que envolve o número de discos da torre de Hanói e a quantidade mínima de jogadas para mover a torre, de acordo com as regras do jogo. Também abordar-se-á o conceito de paridade da quantidade de discos para desenvolver o movimento correto, e em seguida, utiliza-se a indução matemática para provarmos tal fórmula.

### 5.3.1. Paridade de um número inteiro

Pelo dicionário Aurélio<sup>5</sup> online de língua portuguesa, o conceito de paridade de um número inteiro<sup>6</sup> é a “propriedade de um número em relação a ser par ou ímpar”. Como sabemos, de maneira genérica, os números pares são aqueles números inteiros terminados em 0,2,4,6,8 e os números ímpares são os números inteiros terminados em 1,3,5,7,9. Assim estendendo esse conceito, Barros (2017, p.18) afirma que:

Denominamos números pares aos inteiros múltiplos de 2, ou seja, a todos os inteiros da forma  $2k$ , onde  $k$  é algum inteiro. Do mesmo modo, denominamos números ímpares aos inteiros que não são múltiplos de 2, ou seja, todos os inteiros da forma  $2k + 1$ , onde  $k$  é algum número inteiro.

Todo número inteiro é ou par ou ímpar, isto é, o conjunto dos números inteiros pode ser particionado em dois grandes subconjuntos: o conjunto dos números pares e o conjunto dos números ímpares, como mostra o teorema a seguir.

**Teorema:** Todo número inteiro é ou par ou ímpar.

Demonstração<sup>7</sup>:

---

<sup>5</sup> Dicionário Aurélio online, disponível em: <https://dicionariodoaurelio.com/paridade>

<sup>6</sup> Conjunto dos números inteiros:  $\mathbb{Z} = \{ \dots - 4, - 3, - 2, - 1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots \}$

<sup>7</sup> BARROS, Eduarda Ferreira. Equações diofantinas não lineares: uma proposta didática para resolução de problemas. Dissertação (mestrado) – Universidade Federal de Alagoas - Maceió, 2017.

Pelo Algoritmo de Euclides<sup>8</sup>, todo número inteiro  $n$  pode ser escrito como  $n = 2k + r$ , onde  $k$  e  $r$  são números inteiros e  $r$  são os restos possíveis na divisão de  $n$  por 2, ou seja,  $0 \leq r < 2$  ou, como  $r$  é inteiro, temos:  $r = 0$  ou  $1$ .

Daí, temos dois casos:

- i) se  $r = 0$ , então, teremos  $n = 2k + 0 = 2k$  e, por definição,  $n$  é um número par;
- ii) se  $r = 1$ , então, teremos  $n = 2k + 1$  e nesse caso concluímos que  $n$  é ímpar.

Portanto, conclui-se que, todo número inteiro é ou par ou ímpar.

### 5.3.1.1 Propriedades da Paridade de números inteiros

#### I) Paridade da soma:

Seja  $a, b$  números pares e  $c, d$  números ímpares, então:

- (i) A soma de dois números pares, resulta em um número par.

Prova:  $a + b = 2k + 2t = 2.(k + t) = 2q, q \in \mathbb{Z}$ ; (par)

- (ii) A soma de um número par com um número ímpar, resulta em um número ímpar.

Prova:  $a + c = 2k + (2t + 1) = 2k + 2t + 1 = 2.(k + t) + 1 = 2m + 1, m \in \mathbb{Z}$ ; (ímpar)

- (iii) A soma de dois números ímpares, resulta em um número par.

Prova:  $c + d = (2k + 1) + (2t + 1) = 2k + 2t + 2 = 2.(k + t + 1) = 2n, n \in \mathbb{Z}$ ; (par)

#### II) Paridade do Produto:

Seja  $a, b$  números pares e  $c, d$  números ímpares, então:

- (iv) O produto de dois números pares, resulta em um número par.

Prova:  $a \cdot b = 2k \cdot 2t = 2.(2k \cdot t) = 2s, s \in \mathbb{Z}$ ; (par)

- (v) O produto de um número par com um número ímpar, resulta em um número par.

Prova:  $a \cdot c = (2k) \cdot (2t + 1) = 2(k)(2t + 1) = 2(2kt + k) = 2h, h \in \mathbb{Z}$ ; (par)

- (vi) O produto de dois números ímpares, resulta em um número ímpar.

---

<sup>8</sup> Euclides de Alexandria (viveu entre 360 a.C. e 265 a.C.). Matemático e chamado de pai da Geometria. Escreveu o livro "Elementos". Foi professor de Matemática na Escola Real de Alexandria, no Egito. O algoritmo de Euclides é um método simples e eficiente de encontrar o máximo divisor comum entre dois números inteiros diferentes de zero.

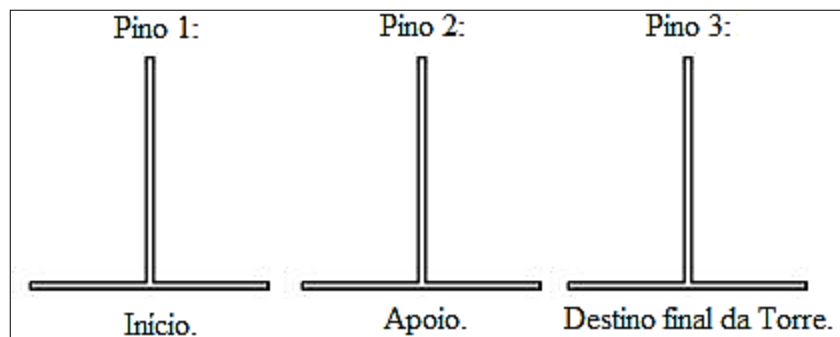
Prova:  $c \cdot d = (2k + 1) \cdot (2t + 1) = 2 \cdot (2kt + k + t) + 1 = 2r + 1, r \in \mathbb{Z};$  (ímpar)

### 5.3.1.2 O conceito de paridade e a Torre de Hanói

Durante a aplicação da oficina, abordou-se o conceito de paridade de um número inteiro a partir do momento em que os alunos tinham feito algumas tentativas de obter o número mínimo de jogadas (usando determinada quantidade de discos) com o jogo.

Esse conceito apresenta a possibilidade de se obter de forma mais eficiente o número mínimo de jogadas de acordo com a quantidade (par ou ímpar) de discos que se deve movimentar na torre. Primeiro denominamos cada pino (haste) da Torre de Hanói com um nome específico, para servir de orientação, por exemplo: Pino 1: Início (onde a torre inicial é posicionada), Pino 2: Apoio e Pino 3: Destino final da torre, de acordo com a Figura (2). Observe a seguir:

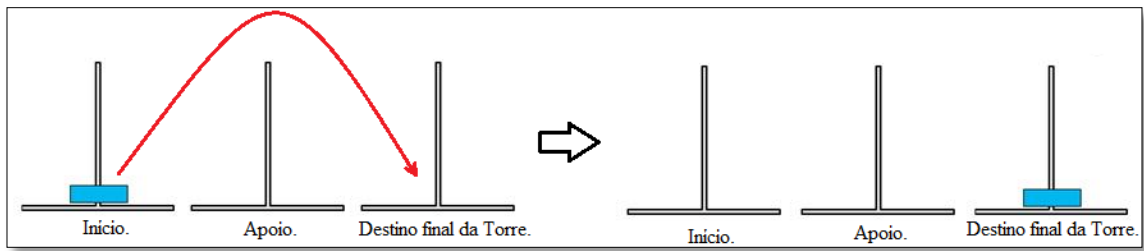
Figura (2): denominação das hastes.



Fonte: <https://www.devmedia.com.br/torres-de-hanoi-solucao-recursiva-em-java/23738>

Agora, mostra-se a movimentação com alguns discos para em seguida concluir de que maneira o conceito de paridade se aplica à Torre de Hanói. Observe a imagem a seguir:

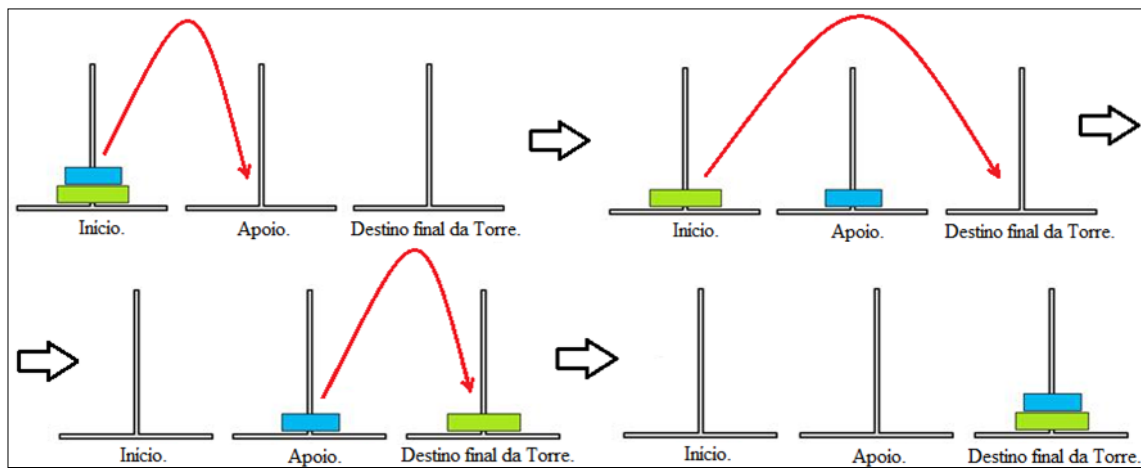
Figura (3): Torre com 1 disco.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Com apenas 1 disco, podemos movimentá-lo do início (pino 1) diretamente ao Destino final (Pino 3) e nesse caso, teremos apenas 1 jogada.

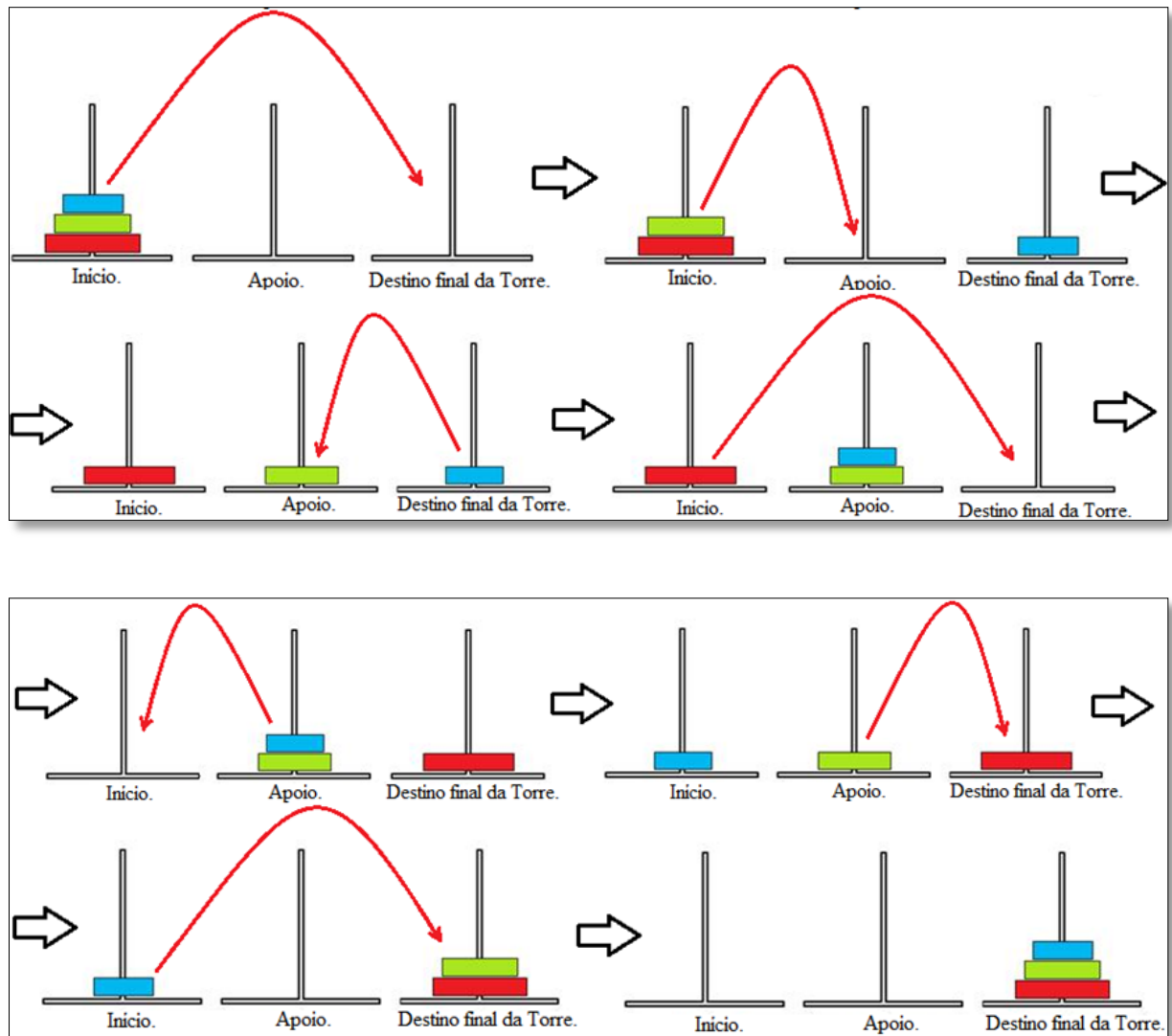
Figura (4): Torre com 2 discos.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Com 2 discos, movimenta-se o disco azul do início (pino 1) para o Apoio (Pino 2), em seguida, movimenta-se o disco verde para o Destino final (Pino 3) e encerramos transferindo o disco azul para o Destino Final (Pino 3). Nesse caso, teremos um total de 3 jogadas. Observe a Figura (5) a seguir:

Figura (5): Torre com 3 discos.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Com 3 discos, deve-se iniciar o movimento transferindo o disco azul para o destino final (Pino 3), o disco verde para o Apoio (Pino 2), o azul para o Apoio (Pino 2), o vermelho para o Destino final (Pino 3), o azul para o Início (Pino 1), o verde para o Destino final (Pino 3) e finalizando com o azul para o Destino final (Pino 3), totalizando 7 jogadas.

Agora, resumindo a ideia inicial acima (vista com 1,2 e 3 discos) analisemos as jogadas de acordo com a quantidade de discos inicial na torre e o movimento inicial da peça menor, de modo a obter a quantidade mínima de jogadas, veja a Tabela (2) a seguir:

Tabela (2): Quantidade de discos, início do movimento e formação da torre.

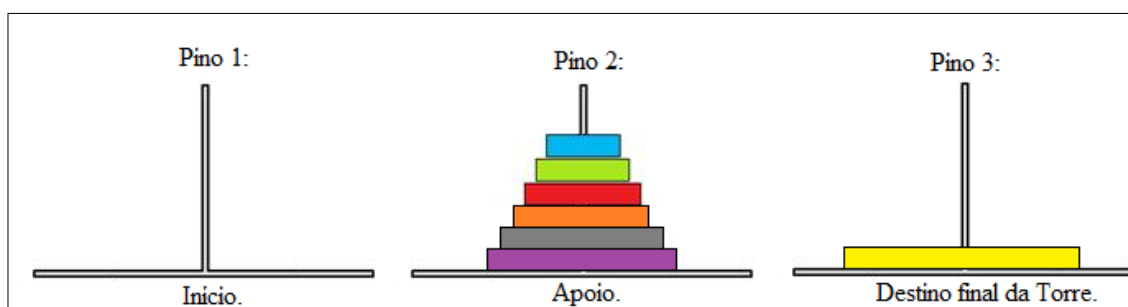
Quantidade de discos	Início do movimento da peça menor	Primeiro movimento da peça menor
1 disco	Destino final (pino 3)	Para onde será formada a torre final.
2 discos	Apoio (Pino 2)	Para onde não será formada a torre final.
3 discos	Destino final (pino 3)	Para onde será formada a torre final.
4 discos	Apoio (Pino 2)	Para onde não será formada a torre final.
5 discos	Destino final (pino 3)	Para onde será formada a torre final.
6 discos	Apoio (Pino 2)	Para onde não será formada a torre final.
7 discos	Destino final (pino 3)	Para onde será formada a torre final.

Fonte: Elaborado pelo autor.

Conclui-se que, para uma quantidade inicial ímpar de discos na torre, o movimento do disco menor deve ser para onde será formada a torre final. Caso contrário, se a quantidade de discos inicial na torre for par, o movimento do disco menor deverá ser para onde não será formada a torre final.

A seguir, veja na Figura (6), uma situação hipotética com 7 discos, na qual, após feitas algumas jogadas o disco maior (disco amarelo) já foi posicionado no Destino final (Pino 3) e agora deve-se concluir os movimentos com a menor quantidade de jogadas.

Figura (6): Torre com 7 discos.



Fonte: Elaborado pelo autor.

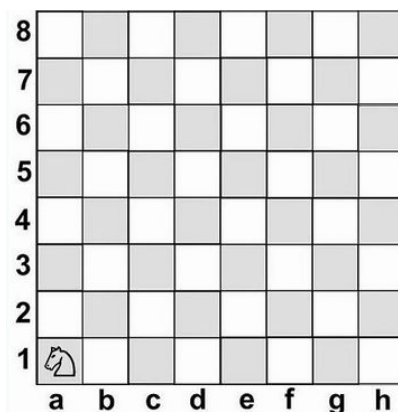
Agora, para onde se deve movimentar o disco azul? Para o Início (Pino 1) ou para o Destino final (Pino 3)? A resposta pode ser facilmente observada na Tabela (2). Como

temos uma quantidade inicial de 6 discos no Apoio (Pino 2), devemos iniciar o movimento com o disco azul indo para o Início (Pino 1), ou seja, para onde será formada a torre final, para que desse modo se conclua no final com uma quantidade mínima de jogadas. Na sequência, mostram-se outros dois problemas envolvendo a aplicação do conceito de paridade de um número inteiro.

### 5.3.1.3 O problema do tabuleiro de xadrez

Dispondo de um tabuleiro de xadrez e de uma peça, o cavalo, localizado na posição a1, como mostra a Figura (7) a seguir, resolva o seguinte problema<sup>9</sup>.

Figura (7): Tabuleiro de xadrez.



Fonte<sup>10</sup>: Adaptado pelo autor.

É possível um cavalo começar na posição a1 e terminar na posição h8 visitando cada uma das outras casas exatamente uma vez?

Primeiro, sendo que o cavalo é uma peça cujo movimento sempre forma um “L” observe que: se ela está em uma casa do tabuleiro da cor branca, ao se movimentar, ela irá para uma casa de outra cor, isto é, (nesse caso) para uma casa cinza, ou vice-versa, se a peça está em uma casa cinza, ao movimentarmos ela irá para uma branca.

Agora note que, inicialmente o cavalo está na casa a1, cuja cor é cinza. Se movimentar essa peça, ela irá para uma casa de cor branca. E se movimentar mais uma vez ela irá para uma casa de cor cinza. Como mostra a Tabela (3) a seguir:

<sup>9</sup> Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=PjzmaHnb-X0>. Acesso em: 21 de janeiro de 2019.

<sup>10</sup> [https://www.google.com.br/search?q=tabuleiro+de+xadrez&hl=pt-BR&authuser=0&source=lnms&tbm=isch&sa=X&sqi=2&ved=0ahUKEwi27eXHtvjgAhXQUd4KHcYACKAQ\\_AUIDygC#imgrc=2iePByIXcwsFPM](https://www.google.com.br/search?q=tabuleiro+de+xadrez&hl=pt-BR&authuser=0&source=lnms&tbm=isch&sa=X&sqi=2&ved=0ahUKEwi27eXHtvjgAhXQUd4KHcYACKAQ_AUIDygC#imgrc=2iePByIXcwsFPM):

Tabela (3): Movimentos/Cor final da casa.

<b>Movimento</b>	<b>Cor final da casa</b>
Inicialmente	Cinza
1 movimento	Branca
2 movimentos	Cinza
3 movimentos	Branca
4 movimentos	Cinza
5 movimentos	Branca
6 movimentos	Cinza
7 movimentos	Branca

Fonte: Elaborado pelo autor.

Veja que, ao realizarmos uma quantidade “ímpar” de movimentos a posição final da peça (o cavalo) será em uma casa de cor Branca, e ao realizarmos uma quantidade “par” de movimentos, será na casa de cor Cinza.

Logo, como o tabuleiro de xadrez dispõe de 64 casas (32 brancas e 32 cinzas, nesse caso) e cada casa só pode ser visitada apenas uma vez, segue que a peça deverá fazer mais 63 movimentos. No entanto, ao realizar os 63 movimentos desejados para que a peça visite todas as casas, esta se encontrará no final dos movimentos em uma casa de cor “Branca”, pois o número 63 é ímpar. Mas não será possível estar na casa h8, pois essa é da cor Cinza.

Portanto, segue que, é “impossível” que a peça (o cavalo) comece na posição a1 e termine na posição h8 visitando cada uma das outras casas exatamente uma vez.

#### **5.3.1.4 O problema do aperto de mãos**

Na comemoração do título de um campeonato de um time de futebol amador, os torcedores se cumprimentam com apertos de mãos. Sabendo que, os números de apertos de mãos não são necessariamente iguais, mostre que o número de pessoas que apertaram as mãos um número ímpar de vezes é par.



### Solução<sup>11</sup>:

Primeiro note que, quando duas pessoas se cumprimentam, cada uma conta um aperto de mãos, gerando dessa forma um número par na contagem de apertos de mãos.

Seja  $N_i$  = “O número de torcedores que deram  $i$  apertos de mãos”, isto é,  $N_1$  é o número de torcedores que deram apenas 1 aperto de mãos,  $N_2$  o número de torcedores que deram 2 apertos de mãos, ...,  $N_{10}$  o número de torcedores que deram 10 apertos de mãos, e assim por diante...

O total de torcedores ( $T_t$ ) envolvidos na comemoração é dado pela soma:

$$T_t = N_1 + N_2 + N_3 + N_4 + N_5 + N_6 + N_7 + N_8 + \dots + N_i + \dots + \dots \quad (1)$$

Agora, note que a quantidade total de apertos de mãos ( $T_A$ ) é dado pela seguinte soma:

$$T_A = 1.N_1 + 2.N_2 + 3.N_3 + 4.N_4 + 5.N_5 + 6.N_6 + 7.N_7 + 8.N_8 + \dots + i.N_i + \dots \quad (2)$$

(que é um número par, pois cada aperto de mãos gera duas contagens).

Assim, organizando temos:

$$T_A = 1.N_1 + 2.N_2 + 3.N_3 + 4.N_4 + 5.N_5 + 6.N_6 + 7.N_7 + 8.N_8 + \dots + i.N_i + \dots \rightarrow (\text{par})$$

$$T_A = (N_1 + 3.N_3 + 5.N_5 + 7.N_7 + \dots) + (2.N_2 + 4.N_4 + 6.N_6 + 8.N_8 + \dots) \rightarrow (\text{par})$$

Note que a segunda parcela da soma acima é um número par, e como o total ( $T_A$ ) é par, segue que:

$$N_1 + 3.N_3 + 5.N_5 + 7.N_7 + \dots \quad (3)$$

É necessariamente um número par, de acordo com a propriedade (i) da paridade.

Organizando essa soma, teremos:

$$N_1 + 3.N_3 + 5.N_5 + 7.N_7 + 9.N_9 + \dots \rightarrow (\text{par}) \quad (4)$$

$$(N_1 + N_3 + N_5 + N_7 + N_9 + \dots) + (2.N_3 + 4.N_5 + 6.N_7 + 8.N_9 + \dots) \rightarrow (\text{par})$$

Mais uma vez note a segunda parcela da soma acima é um número par., portanto, temos que:

---

<sup>11</sup> Solução retirada da internet. Disponível em: <<https://www.youtube.com/watch?v=UoJIZ30aQ4k>>

$$N_1 + N_3 + N_5 + N_7 + N_9 + \dots + N_{2i+1} + \dots \quad (5)$$

É um número par, de acordo com a propriedade (i) da paridade, mostrando assim que, o número de pessoas que apertaram as mãos um número ímpar de vezes é par.

### 5.3.2. Recorrências

Sobre o conceito de recorrência, Pereira (2014) nos diz que “uma relação de recorrência ou, como também é chamada, uma equação de recorrência, é uma relação que determina cada termo de uma dada sequência<sup>12</sup>, a partir de certo termo, em função dos termos anteriores”.

Ainda de acordo com Rosa (2017, p.17):

Recorrência ou relação de recorrência é uma técnica matemática que permite definir sequências e conjuntos, operações ou até mesmo algoritmos partindo de problemas genéricos. Para calcular um termo, utiliza-se uma regra que calcula através de termos anteriores. As relações de recorrência são compostas de duas partes importantes:

- i) As condições iniciais (que devem ser conhecidas);
- ii) E a relação de recorrência, na forma de uma equação (que será a regra que permitirá calcular os próximos termos em função dos antecessores).

Uma relação de recorrência é dita “linear” quando a função que relaciona cada termo aos termos anteriores é linear.

Exemplos:

$$i) X_n = X_{n-1} + 3 \quad (6)$$

$$ii) F_{n+1} = F_n + F_{n-1} \quad (7)$$

As recorrências lineares são ditas de “primeira ordem”, quando aparece na equação de recorrência um termo em função de seu antecessor imediato.

Por exemplo:

$$i) X_{n+1} = 5 \cdot X_n \quad (8)$$

---

<sup>12</sup> Uma sequência de números reais é uma função  $a: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ , que para cada  $n \in \mathbb{N}$  associa um número  $a_n$  pertencente aos reais chamado n-ésimo termo. É denominada finita, a sequência que possui um número limitado de termos. Do contrário a sequência é chamada infinita. Usualmente representamos estes casos respectivamente como  $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$  e  $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots)$ .

$$\text{ii) } A_n = A_{n-1} + 3n^2 \quad (9)$$

Resolver um sistema de equações recorrentes é encontrar uma fórmula fechada que lhe seja solução. “Uma fórmula fechada, ou solução explícita, dá o valor da função recursiva diretamente em termos do seu argumento, sem referência a nenhum valor da função para uma instância menor do problema” (ALEXANDRE E SILVA 2014, p.78).

Agora, apresentamos dois exemplos que envolvem o conceito de relação de recorrência.

**Exemplo 1:** Resolva a equação de recorrência  $X_{n+1} = X_n + n$ , com  $X_1 = 0$ . (10)

Solução:

$$\begin{aligned} X_2 &= X_1 + 1 \\ X_3 &= X_2 + 2 \\ X_4 &= X_3 + 3 \\ &\vdots \\ X_n &= X_{n-1} + (n - 1) \end{aligned}$$

Agora, somando membro a membro de todas as equações acima teremos:

$$\begin{aligned} X_2 + X_3 + X_4 + \dots + X_n &= (X_1 + 1) + (X_2 + 2) + (X_3 + 3) + \dots + (X_{n-1} + (n - 1)) \\ X_n &= X_1 + 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + (n - 1) \\ X_n &= 0 + 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + (n - 1) \\ X_n &= \frac{n \cdot (n-1)}{2} \end{aligned}$$

**Exemplo 2:** Encontre uma fórmula fechada para a recorrência dada por:  $\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_n = 2 \cdot a_{n-1} \end{cases}$  (11)

Solução:

$$\begin{aligned} a_1 &= 3 \\ a_2 &= 2 \cdot a_1 \\ a_3 &= 2 \cdot a_2 \\ &\vdots \\ a_n &= 2 \cdot a_{n-1} \end{aligned}$$

Agora, multiplicando membro a membro as equações acima, teremos:

$$\begin{aligned} a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \dots a_n &= 3 \cdot 2 \cdot a_1 \cdot 2 \cdot a_2 \cdot 2 \cdot a_3 \cdot \dots \cdot 2 \cdot a_{n-1} \\ a_n &= 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2 \\ a_n &= 3 \cdot 2^{n-1} \end{aligned}$$

A partir das soluções recorrentes encontradas precisamos de outro recurso matemático para verificar suas validades, no conjunto dos números naturais. Tal validade se verificará através do Princípio da Indução Finita ou Princípio da Indução Matemática.

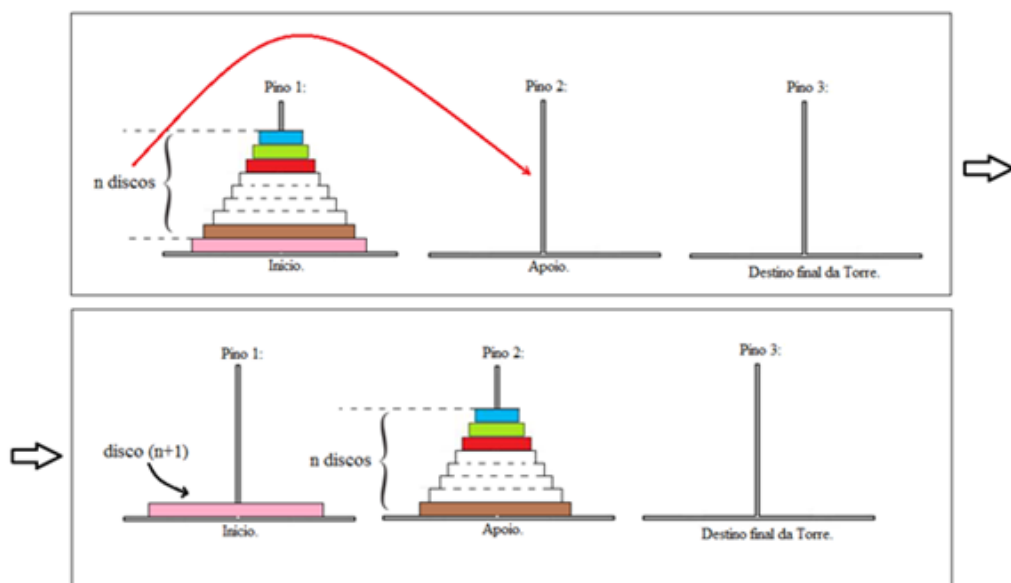
### 5.3.2.1 Recorrências e a Torre de Hanói

Para descrever uma recorrência para determinada quantidade de discos na Torre de Hanói, primeiramente suponha que, para  $n$  discos tenhamos um número mínimo de  $X_n$  jogadas. Agora, para uma torre com  $n+1$  discos deve-se determinar a quantidade de movimentos mínima  $X_{n+1}$  em termos de  $X_n$  de tal forma que se tenha  $X_{n+1} = f(X_n)$ . Assim, suponha uma Torre de Hanói com  $n+1$  discos no Início (pino 1), como mostra a figura a seguir, e deve-se transportá-los de modo que a torre seja totalmente montada em seu Destino final (Pino 3).

Passo a passo dos movimentos:

- i) Transportam-se os  $n$  primeiros discos para o Apoio (pino 2), totalizando  $X_n$  jogadas mínimas;

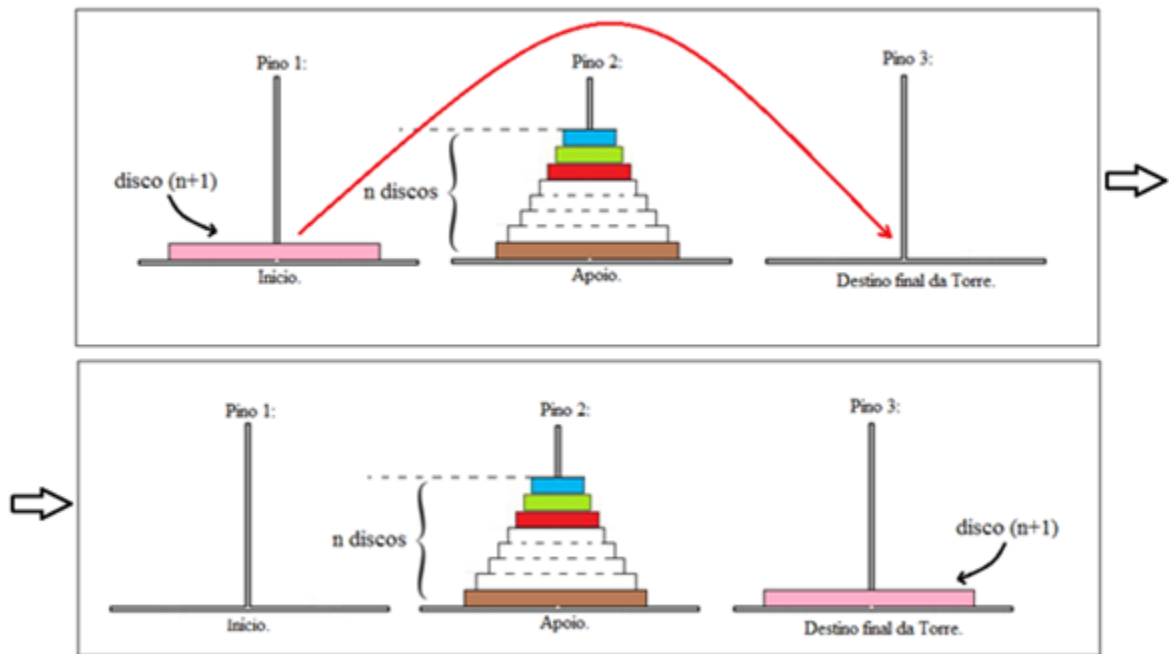
Figura (8): Torre com  $(n+1)$  discos, movendo os primeiros  $n$  discos.



Fonte: Elaborado pelo autor.

- ii) Transporta-se o disco  $(n+1)$  para o Destino final (Pino 3), com apenas 1 jogada;

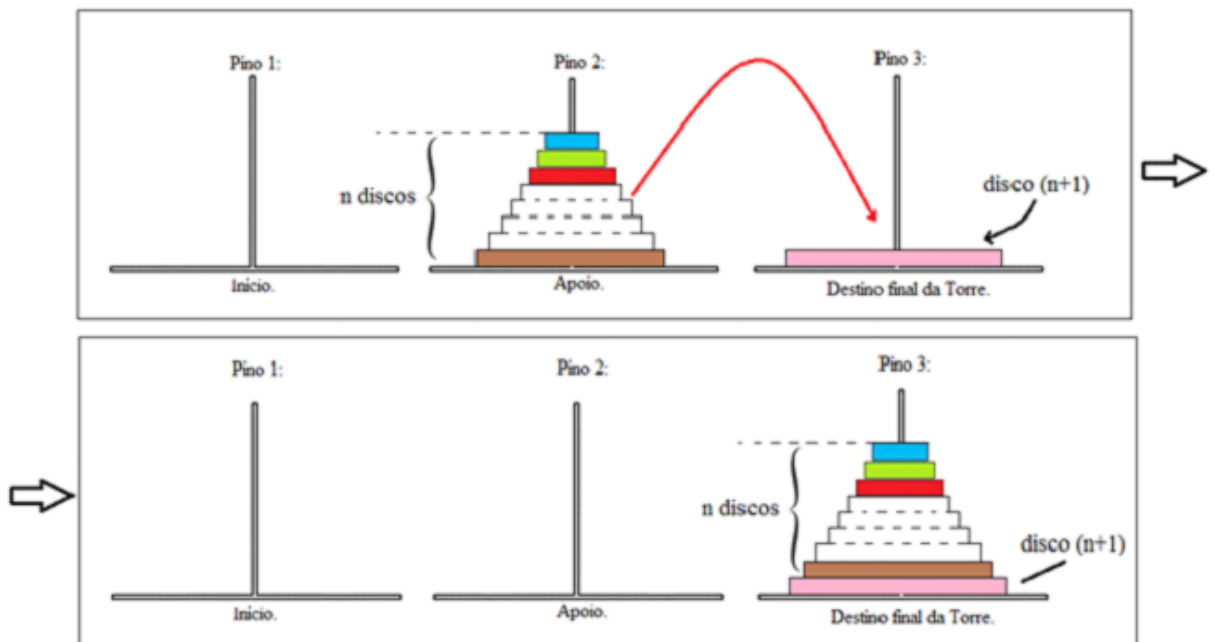
Figura (9): Movimento do disco de maior diâmetro.



Fonte: Elaborado pelo autor.

iii) Finalizando, transportam-se os  $n$  discos para o Destino final (Pino 3) com  $X_n$  jogadas;

Figura (10): Movimento dos  $n$  discos do Apoio para o Destino final.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Logo, conclui-se que para  $n+1$  discos teremos um total mínimo de:

$$X_{n+1} + X_n = 2.X_n + 1 \text{ jogadas.}$$

Portanto, a recorrência será  $X_{n+1} = 2.X_n + 1$ , com  $X_1 = 1$ .

(12)

### 5.3.3. Princípio da Indução Finita.

A indução finita ou indução matemática é um conteúdo geralmente abordado nos períodos iniciais do curso de matemática, ela trata sobre as demonstrações de algumas fórmulas que envolvem os números naturais<sup>13</sup> e é baseada nos axiomas<sup>14</sup> de Peano<sup>15</sup>. A demonstração por indução finita remete a ideia de infinito, ou seja, ela busca demonstrar que uma determinada assertiva vale para todos os números naturais a partir de uma dedução anterior.

Para a demonstração por indução finita temos como base os axiomas de Peano. De acordo com Carvalho e Morgado (2015, p.2), a construção de Peano caracteriza o conjunto dos números naturais por meio de quatro axiomas:

- 1° - Todo número natural tem um único sucessor (o que vem depois de), que também é um número natural;
- 2° - Números naturais diferentes têm sucessores diferentes;
- 3° - Existe um único número natural, designado por 1, que não é sucessor de nenhum outro;
- 4° - Seja  $X$  um conjunto de números naturais (isto é,  $X \subset \mathbb{N}$ ). Se  $1 \in X$  e se, além disso, o sucessor de cada elemento de  $X$  ainda pertencer a  $X$ , então  $X = \mathbb{N}$ .

Ainda segundo Lima (2013, p. 25), o último dos axiomas de Peano é conhecido como o axioma da indução. Ele é a base de um eficiente método de demonstração de proposições referentes aos números naturais (demonstrações por indução ou recorrência). Enunciado sob a forma de propriedades em vez de conjuntos ele se formula assim:

Seja  $P(n)$  uma propriedade relativa ao número natural  $n$ . Suponhamos que:

- i)  $P(1)$  é válida;
- ii) Para todo  $n \in \mathbb{N}$ , a validade de  $P(n)$  implica a validade de  $P(n+1)$ .

Então,  $P(n)$  é válida para todo número natural  $n$ .

Ou seja, se chamarmos de  $X$  o conjunto dos números naturais  $n$  para os quais  $P(n)$  é válida, veremos que  $1 \in X$  em virtude de i) e que  $n \in X \Rightarrow (n+1) \in X$  em virtude de ii). Logo pelo axioma de indução, concluímos que  $X = \mathbb{N}$ .

---

<sup>13</sup> $\mathbb{N} = \{1,2,3,4,5,\dots\}$  é comum também adotar  $\mathbb{N} = \{0,1,2,3,4,5,\dots\}$ .

<sup>14</sup>Axiomas são verdades inquestionáveis universalmente válidas, muitas vezes utilizadas como princípios na construção de uma teoria ou como base para uma argumentação.

<sup>15</sup>Giuseppe Peano (1858-1932). Lógico e matemático, formou-se em matemática na Universidade de Turim em 1880.

Grosso modo, pode-se citar a demonstração por indução da seguinte forma: supõe-se que uma fórmula vale para o primeiro número natural, o número 1, e em seguida a partir do número anterior ela seja válida para o número seguinte, o número 2, e a partir daí, para o número 3 e assim por diante, de tal modo que, se ela vale, por hipótese, para um determinado número natural “n”, e a partir daí ela ainda puder ser também definida para o número “n+1” então determinada assertiva será válida por indução matemática para todos os números naturais.

Em um primeiro contato com o método de indução finita, muitos alunos refutam e questionam sobre esse método, ou seja, eles se perguntam se apenas esses dois passos i) e ii) são suficientes para se demonstrar a validade de uma propriedade para todos os números naturais. Mas, segundo Hefez (2014, p. 15)

É preciso ter clareza que a Indução Matemática é diferente da indução empírica das ciências naturais, em que é comum, após certo número de experimentos, necessariamente finito, enunciar leis gerais que governam o fenômeno em estudo. Essas leis são tidas como verdades, até prova em contrário. Na matemática, não há lugar para afirmações verdadeiras até prova em contrário. A Prova por Indução Matemática trata de estabelecer que determinada sentença sobre os naturais seja sempre verdadeira.

É necessário compreender a essência da demonstração por indução e buscar sanar todas as dúvidas referentes a tal assunto tendo em vista a sua necessidade, pois, Lima (1998, p. 26) afirma que:

O Princípio da Indução é um eficiente instrumento para a demonstração de fatos referentes aos números naturais. Por isso deve-se adquirir prática em sua utilização. Por outro lado, é importante também conhecer seu significado e sua posição dentro do arcabouço da Matemática. Entender o Princípio da Indução é praticamente o mesmo que entender os números naturais.

Sem dúvida, como afirma o autor, a indução finita é um ótimo instrumento de demonstração de proposições e teoremas que envolvem os números naturais e, além disso, é evidente que:

Na indução finita é possível notar que na realização de uma experiência matemática os estudantes podem descobrir proposições por meio de construções empíricas, a partir daí verificar a veracidade de tal proposição. Para isso o estudante deve apresentar argumentos explicando porque se trata de uma afirmação verdadeira. Assim, continuando a experiência matemática, organizar os resultados encontrados em um sistema dedutivo, explorar novas possibilidades com relação a essa nova afirmação, investigar sob outros aspectos a experiência realizada e por fim comunicar os resultados encontrados. (SILVA, 2010, p. 32).

No desenvolvimento da oficina que foi proposta aos alunos iniciantes do curso de matemática da FAFIDAM/UECE, buscou-se desenvolver os trabalhos focando nas ideias do autor expostas acima, ou seja, para que os alunos buscassem estratégias para a resolução do jogo Torre de Hanói, utilizando para isso o jogo e uma tabela, que foi preenchida para que em seguida eles pudessem deduzir uma fórmula que valha para certa quantidade de discos e jogadas e, a partir daí, desenvolverem uma prova por indução verificando os passos e comunicando os resultados obtidos.

Antes de abordar sobre o conceito de paridade, será apresentado um pequeno tópico para duas demonstrações por indução, a primeira diz respeito à soma dos primeiros “n” números naturais e a segunda demonstração será sobre o problema da moeda falsa.

### 5.3.3.1. Soma dos primeiros “n” números naturais.

De acordo com Hefez (2014)<sup>16</sup>, acerca dos números naturais, demonstra que:

Seja  $S_n$  a soma dos números naturais de 1 até n, ou seja:  $S_n = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n$ . (12)

Agora, somando essa igualdade com ela mesma, membro a membro, temos:

$$\begin{array}{r}
 S_n = 1 + 2 + 3 + \dots + (n-2) + (n-1) + n \\
 + S_n = n + (n-1) + (n-2) + \dots + 3 + 2 + 1 \\
 \hline
 2.S_n = (n+1) + (n+1) + (n+1) + \dots + (n+1) + (n+1) + (n+1)
 \end{array}$$

Note que, no segundo membro da equação acima temos n parcelas com valor (n+1), assim, teremos:

$$2.S_n = n.(n+1) \Rightarrow S_n = \frac{n.(n+1)}{2}.$$

Portanto, segue que, a soma dos primeiros “n” números naturais é:  $\frac{n.(n+1)}{2}$

---

<sup>16</sup> Essa prova foi retirada do livro: Aritmética: Abramo Hefez (2014), capítulo 1, página 18-19.



Agora, para que não fiquem dúvidas a respeito do resultado encontrado, far-se-á a demonstração do resultado obtido acima utilizando o princípio de indução finita.

**Proposição:** Mostre, utilizando o princípio de indução matemática, que a soma dos primeiros “n” números naturais ( $S_n$ ) é igual a  $\frac{n.(n+1)}{2}$ .

Primeiro definamos a propriedade  $P(n)$ :  $S_n = \frac{n.(n+1)}{2}$ .

i) Para  $n=1$ ,  $P(1)$  é verdadeira, pois,  $S_1 = \frac{1.(1+1)}{2} = \frac{1.2}{2} = 1$ .

ii) Suponhamos agora que a proposição seja verdadeira para determinado número natural  $n$ , ou seja, que  $P(n)$ :  $S_n = \frac{n.(n+1)}{2}$  seja verdadeira e mostremos que  $P(n+1)$  também é verdadeira.

Por hipótese temos,  $S_n = \frac{n.(n+1)}{2}$ , assim adicionando  $(n+1)$  a ambos os membros, teremos:

$$S_n + (n+1) = \frac{n.(n+1)}{2} + (n+1)$$

$$S_{n+1} = \frac{n.(n+1) + 2.(n+1)}{2} = \frac{(n+1).(n+2)}{2} = \frac{(n+1).((n+1)+1)}{2}.$$

O que nos diz que  $P(n+1)$  é verdadeira, logo a proposição  $P(n)$  é válida para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

### 5.3.3.2. O problema da moeda falsa

Para demonstrar esse problema, Carvalho e Morgado (2014)<sup>17</sup>, descrevem por meio de uma suposição a seguinte afirmação:

---

<sup>17</sup> CARVALHO, Paulo César Pinto; MORGADO, Augusto César;. **Matemática Discreta**. Rio de Janeiro: SBM, 2015. Unidade 4, p.7.

Têm-se  $3^n$  moedas de ouro, sendo uma delas falsa, com peso menor do que as demais. Dispõe-se de uma balança de dois pratos, sem nenhum peso. Vamos mostrar, por indução sobre  $n$ , que é possível achar a moeda falsa com  $n$  pesagens.

Definamos a proposição  $P(n)$ : Com  $3^n$  moedas de ouro, dentre elas uma é falsa, com peso menor que as demais, e de uma balança de dois pratos, é possível encontrar a moeda falsa com  $n$  pesagens.

i) Para  $n=1$ , temos que  $P(1)$  é verdadeira, pois  $3^1 = 3$  moedas e basta pôr uma moeda em cada prato da balança e descobre-se imediatamente qual é a moeda falsa com apenas 1 pesagem.

ii) Suponha, agora, que o resultado seja válido para algum valor de  $n$ , ou seja  $P(n)$  verdadeira, e que se tenha que achar a moeda falsa dentre  $3^{n+1}$  moedas dadas.

Primeiro, separemos as  $3^{n+1}$  moedas em 3 grupos de  $3^n$  moedas cada. Seleciona-se dois desses grupos de  $3^n$  moedas e coloca-os nos dois pratos da balança, um grupo em cada prato. Assim, se pode descobrir em que grupo de  $3^n$  moedas encontra-se a moeda falsa. Assim, tendo efetuado 1 pesagem.

Agora, pela hipótese de indução, como tem-se  $3^n$  moedas, descobre-se a moeda falsa com  $n$  pesagens, que, junto com a pesagem já efetuada, perfazem o total de  $n + 1$  pesagens.

Logo, tem-se pela hipótese de indução, que  $P(n) \implies P(n+1)$ . Portanto a proposição  $P(n)$  é válida para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

## **CAPÍTULO 6**

### **6.1. Proposta de Oficina**

Neste capítulo apresentar-se-á a proposta de oficina na qual foi trabalhado o conceito de paridade, recorrências e a indução finita com o uso do jogo Torre de Hanói, além da demonstração da fórmula da soma dos termos de uma P.G., a fim de desenvolvermos competências e habilidades demonstrando a eficiência do uso do jogo em sala de aula.

#### **6.1.1. Objetivo Geral**

Explorar o jogo Torre de Hanói como ferramenta potencial no ensino de matemática no nível superior.

#### **6.1.2. Objetivos Específicos**

- Apresentar a história e a lenda do jogo Torre de Hanói;
- Expor as regras e os objetivos principais do jogo;
- Mostrar as potencialidades do jogo;
- Aplicar um questionário a fim de colher informações sobre o conhecimento prévio dos alunos a respeito do jogo;
- Propor um desafio para que os alunos participantes da oficina trabalhem com o jogo de modo a fazerem uma dedução de uma fórmula que envolva a quantidade de discos e o número mínimo de jogadas;
- Demonstrar as possíveis utilidades do jogo Torre de Hanói em sala de aula para os alunos participantes da oficina enquanto professores em formação;
- Trabalhar o conceito de paridade de um número inteiro, recorrência e indução finita com o uso da Torre de Hanói, bem como demonstrar a fórmula da soma dos termos de uma P.G. (Progressão Geométrica).

#### **6.1.3. Materiais e recursos tecnológicos**

Para realização da oficina foi necessário a disponibilidade de uma réplica da Torre de Hanói para cada aluno participante, já que buscou-se explorar o potencial de cada aluno na

manipulação do jogo de forma autônoma, para que pudessem em seguida compartilhar os erros e acertos num primeiro contato. Foi necessário também, a utilização da data show e de um computador para exposição do conteúdo e das teorias a serem trabalhadas. Além disso, foi feita a utilização de material impresso com questionário e uma tabela a ser preenchida pelos alunos no decorrer das atividades da oficina.

#### **6.1.4. Procedimentos Metodológicos da Atividade**

Para realização da atividade, buscou-se primeiramente definir os conceitos matemáticos possíveis de serem trabalhados a partir do nosso objeto de estudo, o jogo Torre de Hanói. A partir dos levantamentos bibliográficos, chegou-se ao consenso de que seria possível trabalhar alguns temas nos diferentes níveis de ensino. Dentre aqueles que melhor se adequariam ao objetivo de pesquisa, optou-se por desenvolver o estudo focando nos temas: Conceito de paridade de um número inteiro; Recorrência e a indução finita (Princípio de Indução Matemática).

Tendo em mente o que desejaria trabalhar, buscou-se desenvolver tal atividade em um nível de ensino específico que ainda não havia uma ampla quantidade de pesquisa com o objeto de estudo aqui abordado: a Torre de Hanói no Ensino Superior. Para o desenvolvimento desta pesquisa foi elaborado, primeiramente, uma oficina que foi aplicada nos primeiros semestres do curso de licenciatura em matemática da Faculdade de Filosofia Dom Aureliano Matos (FAFIDAM/UECE).

Essa oficina foi desenvolvida em quatro etapas. No primeiro momento, foi aplicado um questionário inicial com 4 questões, sendo 3 objetivas e 1 subjetiva. Pretendeu-se com esse questionário perceber qual o nível de familiaridade dos alunos com o jogo proposto e sobre suas possíveis potencialidades. Em seguida, esse primeiro questionário foi recolhido e foram entregues os roteiros da oficina contendo o passo a passo das atividades a serem desenvolvidas.

No segundo momento, desenvolveu-se a apresentação com o uso do Datashow e de slides, com os quais foram expostas a história e a lenda que envolve o jogo Torre de Hanói, bem como o seu criador. Além disso, foi explicado as regras do jogo e suas potencialidades nos diferentes níveis (Ensino Básico e Superior), e em seguida, foi distribuído para cada aluno participante uma réplica da Torre de Hanói, confeccionada em madeira, para que os mesmos

pudessem manipular e participar ativamente da oficina. Após um pequeno intervalo, para que os alunos façam uma familiarização e socialização de ideias, pediu-se que eles preenchessem uma tabela, anexada no roteiro da oficina que lhes foi entregue de início, para que preenchessem a tabela com os números obtidos com as primeiras tentativas jogadas, tabela essa que envolve o número de discos e a quantidade mínima de movimentos.

Na etapa seguinte, foi proposto que os alunos refletissem sobre o preenchimento da tabela, acerca da quantidade de movimentos obtidos por cada aluno. Mostrando após isso, a quantidade correta de jogadas para certa quantidade de discos e mostrando os passos corretos a serem feitos para obter tais números. Para isso, definiu-se para os alunos participantes o conceito de paridade de um número inteiro.

Na quarta e última etapa, foi proposto que os alunos deduzissem um algoritmo que definisse a quantidade mínima de movimentos com  $n+1$  discos a partir da quantidade mínima de movimentos com  $n$  discos, com  $n = 1,2,3,4,5,6$  e  $7$  discos. A partir daí, explicou-se o conceito de Recorrência (ou recursão).

Na quarta também se demonstrou a fórmula que envolve a quantidade mínima de movimentos da Torre de Hanói em termos de uma quantidade  $n$  qualquer de discos utilizando o princípio de indução matemática, na qual foi utilizado o algoritmo encontrado por recursão para concluir tal demonstração. Bem como, abordou-se também, uma demonstração da fórmula utilizando para isso a soma dos termos de uma P.G. (Progressão Geométrica) finita.

Para encerrar, buscou-se através de um segundo questionário, uma reflexão dos alunos sobre as potencialidades do jogo Torre de Hanói, para saber se os mesmos consideram relevante o uso do jogo como ferramenta pedagógica nos conteúdos expostos na oficina como forma de abordagem dos conceitos que são trabalhados no ensino superior e, além disso, saber se eles pretendem desenvolver futuramente (enquanto professores) alguma atividade com o uso da Torre de Hanói.

## **6.2. Resultados da Pesquisa e aplicação do jogo.**

Para apresentação dos resultados obtidos, expõe-se em Figuras, primeiramente, as respostas obtidas com o primeiro questionário entregue para avaliar o nível de conhecimento dos alunos acerca do objeto utilizado (Torre de Hanói) e das atividades desenvolvidas a partir

dele. À medida que se apresentar os gráficos e as questões, será feita pequenas reflexões acerca das respostas dadas pelos alunos e de que forma elas contribuem com o resultado de nossa pesquisa.

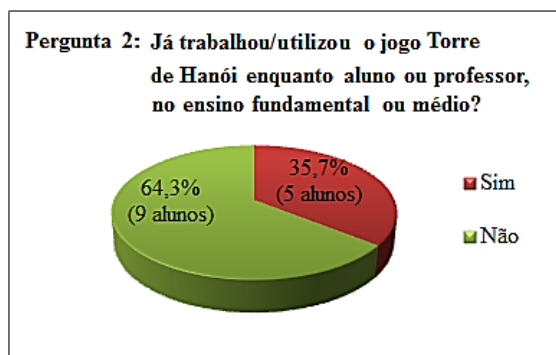
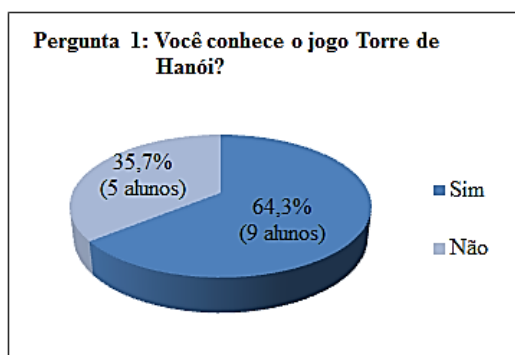
### 6.2.1 Resultados do Questionário 1.

O primeiro questionário é composto por quatro questões, sendo 3 objetivas e 1 subjetiva. As respostas para as primeiras três questões são apresentadas somente como “sim” ou “não”, que versam sobre conhecimento prévio sobre o jogo. A quarta questão busca explorar se, aqueles alunos que têm conhecimento sobre o jogo, seria capaz de descrever alguma potencialidade evidente de trabalho com a Torre de Hanói.

Veja a seguir as figuras correspondentes ao resultado da pergunta 1 e 2:

Figura (11): Questionário 1, pergunta 1.

Figura (12): Questionário 1, pergunta 2.



Fonte: Elaborado pelo autor.

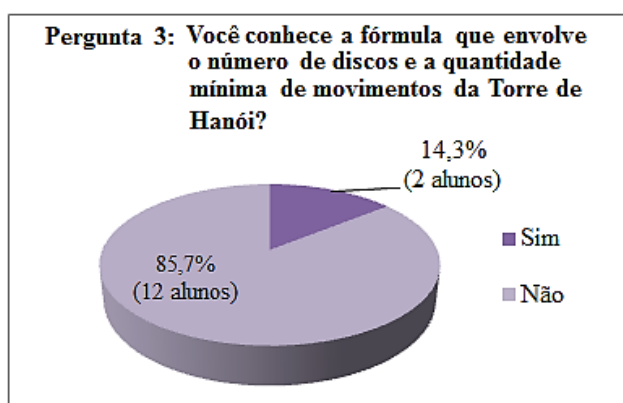
Pela análise do gráfico presente na Figura (11), podemos observar que, a maioria dos alunos participantes conhecem o jogo Torre de Hanói, no entanto, ainda há uma parcela dos alunos que não conheciam o jogo, o que causou surpresa, já que, se trata de uma ferramenta comum e muito conhecida pelos professores e nas escolas.

Ao passo que observamos no gráfico da Figura (12), podemos perceber que a porcentagem de alunos que chegaram a trabalhar ou utilizar a ferramenta em sala de aula cai pela metade, se comparada com a quantidade do gráfico da Figura (11) que afirmaram conhecer o jogo. Com isso, podemos perceber que, apenas uma pequena parcela dos alunos (35,7%) chegou a trabalhar ou utilizar a Torre de Hanói como objeto de aprendizagem em sala de aula.

Tal constatação contribuiu para confirmar as primeiras observações acerca da utilização dos jogos em sala de aula, já que, considera-se nesta pesquisa que ainda há pouco aproveitamento quanto ao uso de jogos como material didático, a fim de fornecer uma aula mais prática e lúdica, chamando atenção para o que se é estudado além da teoria e consequentemente contribuindo com o aprendizado do aluno.

Dando sequência à análise, observe a seguir a Figura (13) correspondente ao resultado da terceira pergunta:

Figura (13): Questionário 1, pergunta 3.



Fonte: Elaborado pelo autor.

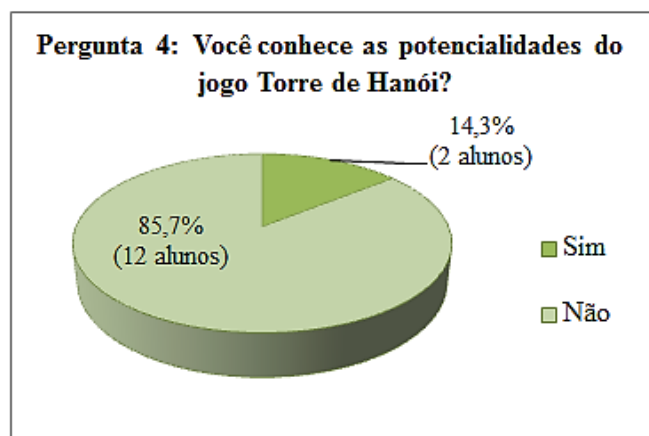
De acordo com as perguntas 1 e 2 constatou-se que apenas 35,7% (5 alunos) dos alunos participantes tinham conhecimento da ferramenta Torre de Hanói, e se tratando da fórmula que envolve a quantidade de discos em termos do número mínimo de movimentos apenas 14,3% (2 alunos) tinham conhecimento.

Devido ao fato de poucos alunos, participantes da oficina, terem em algum momento trabalhado com o jogo, consequentemente, uma parcela ainda menor tinha conhecimento sobre regras e fórmulas que compunha o jogo. Com isso, boa parte dos que já tinha utilizado a ferramenta faziam um número de jogadas superior ao das jogadas mínimas previstas pela fórmula ou pela regra.

Tinha-se aí um desafio ao professor, demonstrar que era possível completar toda uma sequência de jogas utilizando para isso uma fórmula matemática que fornecia uma quantidade mínima de movimentos, aos quais os alunos poderiam atingir após a manipulação pensada e correta do objeto.

Da mesma forma, em se tratando de conhecimento matemático, quando questionados sobre possíveis potencialidades ou uso da Torre de Hanói no ensino de matemática, apenas 2 alunos (14,3%) souberam apontar possíveis conteúdos a serem trabalhados com o uso de tal jogo. Como se mostra na Figura (14) abaixo:

Figura (14): Questionário 1, pergunta 4.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Como possibilidade de abordagem em sala de aula, 2 alunos, que nomeados de Aluno 8 e Aluno 10, descreveram duas possíveis formas de se trabalhar Torre de Hanói em sala de aula.

Aluno 8: *“É possível ser utilizado no trabalho com Progressão Geométrica (P.G.)”*

Aluno 10: *“Ela nos dá a possibilidade de conhecimento sobre sequências e proporcionalidade”.*

Depois de uma apresentação formal do jogo, sua história, seu criador e suas regras, os alunos foram motivados a preencher uma tabela com o número mínimo de jogadas a partir de determinada quantidade de discos na torre. Os alunos que ainda não conheciam o jogo tiveram certa dificuldade em sua manipulação inicial.

Passados alguns minutos de interação com o objeto e socialização de ideias, foi apresentada a ideia de paridade de um número inteiro. A partir daí os alunos passaram a diminuir consideravelmente o número de jogadas, chegando a dar valores próximos e até acertar exatamente o número mínimo de jogadas para certas quantidades de discos.



Preenchida a tabela, foi lançado um desafio para que os alunos deduzissem um algoritmo que envolvesse o número de jogadas e a quantidade de discos. Daí foi definida a ideia de recorrência, a partir de uma função em que os alunos deduziram como sendo:  $f(n+1) = 2.f(n) + 1$ , ou seja, a quantidade de jogadas para determinado número de discos foi descrita como sendo “o dobro da quantidade de jogadas anterior mais uma jogada”. Encontrado o algoritmo, foi utilizado o princípio de indução matemática para fazer a demonstração da fórmula que envolve o número de discos e a quantidade mínima de jogadas da Torre de Hanói:  $f(n) = 2^n - 1$ .

Percebe-se que, somente dois alunos participantes conheciam a ferramenta utilizada na oficina em todas as suas dimensões, desde a manipulação e quantidades de jogadas, até aos conteúdos matemáticos possíveis de serem trabalhados a partir do uso da Torre de Hanói. Essa comprovação leva a compreensão de que esses dois alunos foram os únicos que trabalharam em sala de aula junto ao professor desenvolvendo estratégias de aprendizagem por meio do objeto, pois esses mesmos alunos relataram terem utilizado, em outro momento, tal objeto para assimilação dos conteúdos acima descritos por eles.

## 6.2.2 Resultados do Questionário 2.

Para buscar compreender se a abordagem pedagógica de cunho mais lúdico, com o uso da Torre de Hanói no enfoque didático de conteúdos matemáticos, possibilitou uma melhor compreensão ou assimilação de novos conteúdos e da teoria matemática que são possíveis de serem desenvolvidos com o jogo (Paridade, Recorrência e P.G) foi aplicado um segundo questionário (Questionário 2), dessa vez composto por quatro questões subjetivas.

À medida que serão apresentadas as questões, também serão expostas as respostas mais relevantes dadas pelos alunos, com as quais será feita uma breve análise acerca do ponto de vista dos alunos em relação ao jogo, a oficina e ao trabalho com materiais lúdicos em sala de aula.

**Pergunta 1: Sobre as potencialidades do jogo Torre de Hanói, seria possível apontar mais alguma que pudesse ser usada em conteúdos do ensino fundamental, médio ou superior?**

Aluno 8: *“Serve para o desenvolvimento do pensamento rápido”*

Aluno 10: *“Cria a possibilidade para o conhecimento sobre sequências e também de proporção ao tamanho de círculos”*

A pergunta 1 foi um desafio lançado aos alunos participantes, já que foi apontado durante a oficina algumas das possibilidades para o uso da Torre de Hanói em diferentes níveis de ensino. E nesse caso, buscou-se instiga-los a pensar em novas maneiras de se trabalhar com o jogo. Por isso, entende-se que pela dificuldade da pergunta, apenas dois alunos responderam a primeira pergunta.

**Pergunta 2: O jogo Torre de Hanói é uma ferramenta relevante para o ensino de matemática? Você considera que os alunos poderiam aprender de uma maneira mais lúdica e diferenciada?**

Aluno 3: *“Sim, pois os alunos podem aprender as ferramentas praticando de maneira mais lúdica”*.

Aluno 9: *“Sim, seria uma forma de mostrar a matemática não apenas no teórico e sim como uma forma de diversão”*.

Todos os alunos foram positivos a essa pergunta, destacando que sim, o jogo apresentado na oficina é relevante para o ensino de matemática. Os alunos 3 e 9 citados acima destacam o fator lúdico como um potencial para se levar esse tipo de material para sala de aula.

No entanto, outros alunos destacaram que esse tipo de abordagem prática seria relevante especificamente para chamar a atenção do conteúdo em si, ou seja, utilizar o jogo como uma ferramenta de aprendizagem da teoria matemática, como destaca-se os alunos 2 e 6 abaixo.

Aluno 2: *“Sim, com a Torre de Hanói pode ser desenvolvido métodos como P.G, função exponencial e contagem”*.

Aluno 6: *“É relevante para o ensino da matemática. Sim, ajuda no raciocínio lógico do aluno”*.

A resposta dada por um outro aluno (Aluno 10) chamou a atenção por revelar uma necessidade recorrente em sala de aula por parte dos alunos. O aluno 10, destaca que: *“Sim, com o uso de jogos como a Torre de Hanói nos proporciona uma visão do “mundo real” da matemática, ou seja, uma aprendizagem na prática”*. A necessidade, a qual destacou, refere-se

à dúvida recorrente dos alunos em saber ou compreender de que forma aquilo que que é exposto em sala de aula de matemática pode ser utilizado em seu cotidiano de forma significativa ou relevante.

**Pergunta 3: Você, enquanto futuro professor de matemática, pretende utilizar jogos matemáticos (como a torre de Hanói) em suas aulas?**

Aluno 2: *”Sim, os jogos podem ser um bom método para que o aluno desenvolva o seu pensamento”.*

Aluno 5: *”Sim, pois os jogos podem ajudar aos alunos a entenderem melhor sobre o assunto abordado em sala de aula”.*

Aluno 7: *”Sim. É interessante que os alunos conheçam esses jogos, para o aluno testar seus conhecimentos”.*

Aluno 9: *”Sim, principalmente para mostrar que em um simples jogo se utiliza algumas fórmulas matemáticas”.*

Aluno 13: *”Sim, pois é uma forma de aprendizagem diferente e criativa, isso irá ajudar com que os alunos entendam melhor”.*

Pela análise das respostas, a maioria dos alunos descreveu que utilizariam os jogos matemáticos em sala de aula, principalmente com a intenção de chamar a atenção para o conteúdo ou para desenvolver o conteúdo. Outros alunos compreenderam de forma mais ampla – sem focar apenas no interesse em abordar simplesmente o conteúdo – o uso dos jogos em sala de aula, descrevendo que teriam interesse de utilizá-los como forma de testar o conhecimento dos alunos ou para desenvolver o seu pensamento (raciocínio lógico).

Ainda outros descreveram que há um interesse em demonstrar em sala de aula como a matemática pode estar presente de forma atraente e significativa em um simples jogo, mais uma vez buscando demonstrar a importância do “porquê” se trabalhar aquele assunto.

**Pergunta 4: Essa oficina contribuiu de alguma forma para você enquanto aluno do curso de licenciatura em matemática?**

Aluno 7: *”Sim. Até então não sabia como construir a torre e nem como usar os conceitos de paridade e sua relação de P.G.”.*

Aluno 9: *"Sim, provocou em mim o interesse de descobrir outros métodos "diferentes" para transmitir a matemática aos meus futuros alunos".*

Aluno 10: *"Sim, pois como formação que utilizar artifícios como jogos e outros materiais didáticos para sala de aula".*

Aluno 11: *"Sim. Para fazer como descobrisse novos modelos de aprendizagem para no futuro desenvolver em sala de aula".*

Aluno 12: *"Sim, pois me fez conhecer um pouco sobre a torre de Hanói e assim, como futura professora, mostrar outras formas de aprender o conteúdo utilizando ela".*

Em especial a essa pergunta, todos os alunos responderam que sim, que de algum modo a oficina contribuiu para seu aprendizado enquanto aluno e futuro professor. Alguns, no entanto, não desenvolveram a resposta além do sim. Uns ainda não conheciam o jogo e descreveram que foi interessante conhecer e que pretendiam passar adiante o conhecimento.

Outros foram além, descrevendo que participar da oficina fez com que se abrissem novos horizontes para a busca de novos jogos e métodos de aprendizagem que pudessem ser abordados em sala de aula e contribuíssem de alguma forma para facilitar o aprendizado de maneira mais lúdica e desafiadora.

Percebeu-se que desde o início da aplicação da oficina, os alunos receberam a proposta com bastante expectativa, embora alguns ainda não tivessem a oportunidade de trabalhar com o jogo Torre de Hanói em outra ocasião, mostraram-se dispostos para se trabalhar com a aplicação do jogo.

Além disso, mostraram interesse em descobrir e conhecer novas formas de trabalho em sala de aula com jogos matemáticos, já que, segundo eles, a aula prática é um método muito diferenciado para a abordagem de conteúdos e de aprendizagem. Pois despertará nos alunos maior interesse e participação.

Para finalizar a oficina, descreveu-se uma proposta de atividade para o ensino médio com a utilização do conceito de P.G. (progressão Geométrica) e a prova do número mínimo de jogadas da Torre de Hanói, proposta essa que os alunos poderiam utilizar futuramente como professores, contribuindo para um primeiro contato dos alunos com possíveis abordagens pedagógicas em sala de aula.

### 6.3 Avaliação dos resultados obtidos.

Finalizado todo o procedimento da oficina, percebeu-se que ainda há um caminho pela frente a ser traçado por professores e alunos, no que se refere as práticas em sala de aula. Pois, a sociedade se renova a cada dia nas suas formas de aprendizagem e de intermédio do conhecimento.

A partir disso, e da oficina aplicada, percebeu-se os alunos têm muito interesse em aulas mais práticas que chame a atenção deles para o desenvolvimento de ideias e resolução de problemas que os desperte a utilizar os conhecimentos por eles adquiridos. Além disso, também, percebeu-se que o uso do jogo facilitou de certa forma, a assimilação mais rápida dos conceitos de paridade de um número inteiro, recorrências e uma base teórica sobre indução matemática, tema ainda não trabalhado por eles na universidade.

Isso se deve ao fato de que os alunos participantes são ingressantes dos primeiros semestres, ou seja, alguns conteúdos não haviam sido abordados ainda em sala de aula. Mediante isso, houve uma breve dificuldade em identificação da teoria, mas que com o trabalho com a Torre de Hanói eles conseguiram perceber de que forma se dá o desenvolvimento matemático daquele conteúdo que, até o momento da oficina, se apresentava como novo.

Muitos dos alunos demonstraram-se surpresos em ver que em um simples jogo carrega várias possibilidades matemáticas, possíveis de incrementar o aprendizado e tornar as aulas mais diversificadas. Relatando que sentiam a ausência de aulas práticas - como se propôs a oficina - que pudessem promover um aprendizado voltado para eles como alunos e também como proposta de possibilidade de se trabalhar como professores.

Isso evidencia que, mesmo ingressados em nível superior, os alunos sentem ainda necessidade de um trabalho mais significativo e prático daquilo que estão aprendendo, mesmo que seja com o intermédio de um simples jogo, mas que se bem planejado, com objetivos bem traçados e métodos definidos, podem trazer um ganho para o aprendizado do aluno e para fomentar sua criticidade enquanto professores em formação.

A Torre de Hanói, embora seja um objeto simples e bastante conhecido, mostrou-se como uma ferramenta significativa do ponto de vista pedagógico, tanto para uma melhor assimilação de teorias como para a introdução de novas, e também para o desenvolvimento

crítico das práticas em sala de aula possíveis de serem trabalhadas e que venham a contribuir significativamente com o aprendizado, principal objetivo em qualquer abordagem pedagógica.

## CONSIDERAÇÕES FINAIS

Com a utilização da Torre de Hanói em sala de aula, no Ensino Superior, pode-se compreender que os jogos matemáticos podem contribuir de forma significativa para o aprendizado e para o desenvolvimento de conteúdos, mesmo se tratando do nível superior, pois é uma forma de se trabalhar a teoria em consonância com a realidade do aluno, respondendo a necessidade de uma aprendizagem mais significativa.

Buscou-se com esta pesquisa demonstrar que o processo de aprendizagem em sala de aula pode se tornar mais dinâmica e diversificada, com o intermédio dos jogos matemáticos, colocando professores e alunos num procedimento mais ativo diante das atividades apresentadas.

Além disso, os jogos permitem um aprendizado mais lúdico e descontraído, diferente da apresentação simplesmente teórica, que muitas vezes afastam o aluno do interesse pela descoberta, mesmo se tratando de um nível de ensino que se espera maior maturidade por parte dos mesmos.

Lembrado que, os jogos em si, não são respostas para todas as dificuldades durante o processo de ensino-aprendizagem. Mas que, é durante o processo de construção e descoberta, para após se desconstruir conceitos e em seguida reconstruir novas perspectivas por meio das dificuldades enfrentadas no desenrolar das atividades com os jogos, que o alunado passa a compor de forma ativa e significativa o que foi pensado pelo professor como objetivo.

É durante esse procedimento, construção - desconstrução - reconstrução, que o professor deve estar apto a perceber as ações durante o jogo e poder levantar hipóteses que venha a contribuir para a identificação das principais dificuldades e da tomada de decisão para se chegar ao resultado desejado a partir dos objetivos por ele traçados.

Mediante isso, constatou-se que, os usos dos jogos matemáticos podem se mostrar uma fonte de novos métodos de aprendizagem, no qual haja uma participação ativa de ambas as partes, professores e alunos, no processo de aquisição do conhecimento e do senso crítico nas resoluções dos problemas enfrentados para a construção do conhecimento científico.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALEXANDRE, Eduardo de Santana Medeiros; SILVA, Hélio de Menezes; **Matemática elementar**. - 2ª Edição. João Pessoa: Editora da UFPB, 2014.

ALLEVATO, Norma Suely Gomes; MASOLA, Wilson de Jesus. **Dificuldades de aprendizagem matemática de alunos ingressantes na educação superior**. Rev. Brasileira de Ensino Superior, 2(1): 64-74, jan.-mar. 2016. Disponível em:<<https://seer.imed.edu.br/index.php/REBES/article/view/1267>> Acesso em: 02 de novembro de 2018.

ANTUNES, C. **Jogos para a estimulação das múltiplas inteligências**. 12a. edição. Petrópolis, RJ: Vozes, 2003.

BARROS, Eduarda Ferreira. **Equações diofantinas não lineares: uma proposta didática para resolução de problemas**. Dissertação (mestrado) – Universidade Federal de Alagoas – UFAL, Maceió, 2017. Disponível em:<<http://www.repositorio.ufal.br/bitstream/riufal/2457/1/Equa%C3%A7%C3%B5es%20diofantinas%20n%C3%A3o%20lineares%20-%20uma%20proposta%20did%C3%A1tica%20para%20resolu%C3%A7%C3%A3o%20de%20problemas.pdf>> Acesso em: 10 de janeiro de 2019.

BARROS, R. J. A. do. **A Utilização Dos Jogos na Aprendizagem de Indução Finita no Ensino Superior**. Dissertação (mestrado) em Educação – Universidade Federal do Pernambuco – UFPE, Recife, 2011. Disponível em:<<http://www.tede2.ufrpe.br:8080/tede/bitstream/tede2/5950/2/Rafael%20Jose%20Alves%20do%20Rego%20Barros.pdf>> Acesso em: 22 de dezembro de 2018.

CARVALHO, Paulo César Pinto; MORGADO, Augusto César; **Matemática Discreta**. 294 p. Coleção PROFMAT. SBM. Rio de Janeiro: SBM, 2015

GRANDO, R. C. **O conhecimento matemático e o uso de jogos na sala de aula**. Tese de Doutorado. Campinas, SP. Faculdade de Educação, UNICAMP, 2000. Disponível em:<<https://pedagogiaaopedaletra.com/wp-content/uploads/2012/10/O-CONHECIMENTO-MATEM%C3%81TICO-E-O-USO-DE.pdf>> Acesso em: 14 de dezembro de 2018.

HEFEZ, Abramo. **Aritmética**. 338 p. Coleção PROFMAT. Rio de Janeiro: SBM, 2014.

KIYA, Marcia Cristina da Silveira. **O uso de Jogos e de atividades lúdicas como recurso pedagógico facilitador da aprendizagem**. 2014. Caderno Pedagógico. Ortigueira, Paraná. Disponível em: <[http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/cadernospe/pdebusca/producoes\\_pde/2014/2014\\_uepg\\_ped\\_pdp\\_marcia\\_cristina\\_da\\_silveira\\_kiya.pdf](http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/cadernospe/pdebusca/producoes_pde/2014/2014_uepg_ped_pdp_marcia_cristina_da_silveira_kiya.pdf)> Acesso em: 20 de novembro de 2018.

LIMA, Elon Lages. **Números e funções reais**. 297 p. Coleção PROFMAT. Rio de Janeiro: SBM, 2013.



LIMA, Elon Lages. **O princípio da Indução**. Eureka Nº 3. 1998. Disponível em:<<https://www.obm.org.br/content/uploads/2017/01/eureka3.pdf>> Acesso em: 11 de março de 2019.

MARCO, Fabiana Fiorezi de. **Estudo dos processos de resolução de problema mediante a construção de jogos computacionais de matemática no ensino fundamental**. Dissertação de Mestrado. Campinas, SP. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de educação. 2004. Disponível em:<[http://repositorio.unicamp.br/bitstream/REPOSIP/253205/1/Marco\\_FabianaFiorezide\\_M.pdf](http://repositorio.unicamp.br/bitstream/REPOSIP/253205/1/Marco_FabianaFiorezide_M.pdf)> Acesso em:15 de dezembro de 2018.

PEREIRA, Ana Luísa Lopes. **A Utilização do Jogo como recurso de motivação e aprendizagem**. Universidade do Porto. Faculdade de Letras. Portugal , 2013. Disponível em:< <https://repositorio-aberto.up.pt/bitstream/10216/71590/2/28409.pdf>> Acesso em: 11 de dezembro de 2018.

PEREIRA, Marcus Vinícius. **Recorrências – Problemas e Aplicações**. Dissertação de Mestrado. Brasília, DF. Universidade de Brasília - Instituto de Ciências Exatas. 2014. Disponível em:<[https://edisciplinas.usp.br/pluginfile.php/3992504/mod\\_resource/content/1/Recorr%C3%AAncias.pdf](https://edisciplinas.usp.br/pluginfile.php/3992504/mod_resource/content/1/Recorr%C3%AAncias.pdf)>. Acesso em: 5 de janeiro de 2019.

ROSA, Marcos Antônio. **A importância das relações de recorrência para melhoria do ensino-aprendizagem da matemática discreta**. Dissertação de Mestrado. Campinas, SP. Universidade Estadual de Campinas - Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. 2017. Disponível em:<[http://repositorio.unicamp.br/bitstream/REPOSIP/325439/1/Rosa\\_MarcosAntonio\\_M.pdf](http://repositorio.unicamp.br/bitstream/REPOSIP/325439/1/Rosa_MarcosAntonio_M.pdf)>. Acesso em: 2 de janeiro de 2019.

ROSSINI, Marcela Aparecida Penteadó; SILVA, Geisa Zilli Shinkawa da;. **O jogo torre de Hanói e algumas de suas potencialidades educacionais**. Encontro Nacional de Educação Matemática (XII ENEM) – Educação Matemática na Contemporaneidade: Desafios e possibilidades, São Paulo 2016. Disponível em:<[http://www.sbem.com.br/enem2016/anais/pdf/6829\\_3165\\_ID.pdf](http://www.sbem.com.br/enem2016/anais/pdf/6829_3165_ID.pdf)> Acesso em: 2 de março de 2019.

SANTOS, Alinne Nunes Alves dos. **Ludicidade e Infância: A Importância do lúdico no aprendizado da criança**. 2011. 71 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Pedagogia) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2011. Disponível em:<<http://www.uel.br/ceca/pedagogia/pages/arquivos/ALINNE%20NUNES%20ALVES%20DO%20SANTOS.pdf>> Acesso em: 11 de janeiro de 2019.

SILVA, Claudenor Ancelmo da. **A torre de Hanói como ferramenta facilitadora do processo de ensino-aprendizagem de função exponencial e resolução de problemas**. Dissertação de Mestrado. Mossoró, RN. Universidade Federal Rural do Semiárido. PROFMAT 2015. Disponível em:< <https://ppgmat.ufersa.edu.br/wp->

content/uploads/sites/58/2016/02/Disserta%C3%A7%C3%A3o-Claudenor-Ancelmo.pdf>  
Acesso em: 10 de dezembro de 2018.

SILVA, Eduardo Machado da. **Compreensão de estudantes de um curso de matemática a respeito do conceito de indução finita**. 2010. 157 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina 2009.

## ANEXOS

### Anexo I – Oficina Torre de Hanói



UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO SEMIÁRIDO (UFERSA)  
FACULDADE DE FILOSOFIA DOM AURELIANO MATOS  
(FAFIDAM/UECE)



PROFESSOR: Pétrick Oliveira da Silva

#### **OFICINA: TORRE DE HANÓI: UMA PROPOSTA PEDAGÓGICA PARA APRENDIZAGEM MATEMÁTICA E AQUISIÇÃO DO CONHECIMENTO CIENTÍFICO NO ENSINO SUPERIOR**

#### INTRODUÇÃO:

Trazemos uma proposta de atividade de matemática utilizando o jogo torre de Hanói em sala de aula. A proposta abordada nessa oficina será voltada para o ensino Superior, onde abordaremos algumas potencialidades da utilização de tal jogo. Dentre elas destacamos o conceito de paridade de um número inteiro, a relação de recorrência e a indução finita (ou indução matemática).

Essa oficina está dividida em dois momentos. De início faremos um breve histórico e apresentação do jogo Torre de Hanói, suas regras e suas potencialidades em aulas de matemática nos níveis básicos de ensino. Em seguida os alunos manipularão o jogo, de modo a familiarizarem-se com o objeto. Depois de um primeiro contato, será entregue uma tabela contendo a quantidade de discos “n”, para que os alunos possam preencher, de acordo com as regras.

Seguindo com os trabalhos, apresentaremos o conceito de paridade de um número inteiro, conceito esse que ajudará os alunos a fazerem a tomada correta de decisão enquanto a manipulação dos discos da torre. Depois os alunos serão desafiados a “deduzir” uma fórmula que exiba a quantidade de movimentos com “n+1” discos a partir de “n” discos, e dessa forma, apresentaremos o conceito de recorrência. Por fim, usaremos Indução Matemática para provar a fórmula encontrada.

Também trazemos uma proposta que poderá ser usada em sala de aula no Ensino Médio, com o estudo da P.G.(progressão Geométrica).

Esse pequeno trabalho foi proposto a partir das ideias de Machado(1995), Santos, Carvalho & Muller(2006), Costa(2010) e Silva(2015).

#### 1 - OBJETIVO DA OFICINA:

O objetivo é explorar o jogo Torre de Hanói como ferramenta potencial no ensino de matemática nos seus diferentes níveis, mostrando as suas potencialidades.

Como instrumento pedagógico, a torre de Hanói pode auxiliar o professor no desenvolvimento do aprendizado de uma maneira mais lúdica. Pretende-se que os participantes tenham um primeiro contato com a Matemática contida nas atividades propostas com o jogo. “Trata-se de uma Matemática que pode ser explorada em todos os níveis de ensino de uma forma atraente e significativa” Santos (2006).

Será proposta uma atividade que envolverá todos os alunos, e estes deverão manipular o objeto (torre de Hanói) de modo a obter a menor quantidade de movimentos possíveis, de acordo com as regras determinadas.

## 2 – ORIGEM:

A torre de Hanói, também conhecida por torre do bramanismo ou quebra-cabeças do fim do mundo, aparece publicada em 1883 pelo matemático francês Eduard Lucas. A publicação dizia que o jogo vinha do Vietnã, sendo popular também na China e no Japão.

## 3 - A LENDA DAS TORRES:

Existem várias lendas a respeito da origem do jogo, a mais conhecida diz respeito a um templo Hindu, situado no centro do universo. Diz-se que o deus Brama supostamente havia criado uma torre com 64 discos de ouro e mais duas estacas equilibradas sobre uma plataforma. Brama ordenara-lhes que os monges do templo movessem, dia e noite, todos os discos de uma estaca para outra segundo as suas instruções. As regras eram simples: apenas um disco poderia ser movido por vez e nunca um disco maior deveria ficar por cima de um disco menor.

Segundo a lenda, quando todos os 64 discos fossem transferidos de uma estaca para a outra, o templo iria desmoronar e o mundo desapareceria.

**Pergunta 1:** Será que os monges demorariam muito tempo para mover todos os discos?

**Pergunta 2:** Se demorasse exatamente 1 segundo para mover cada disco, em quantos anos eles transfeririam toda a torre de 64 discos?

## 4 – POSSIBILIDADES DO USO DO JOGO TORRE DE HANÓI:

O jogo torre de Hanói, além de ser uma ferramenta atrativa como “passa-tempo”, ela também pode ser utilizada como um potencial em aulas de matemática. Abaixo listamos alguns exemplos de como ela pode ser utilizada nos diferentes níveis de ensino.

### Ensino Infantil e Fundamental:

- ✓ Melhorar a coordenação motora;
- ✓ Aprendendo as diferentes cores (discos de cores diferentes);
- ✓ Organização e tamanho (discos de diâmetros diferentes);
- ✓ Noção de crescente e decrescente;
- ✓ Forma Geométrica(círculo);
- ✓ Busca de estratégias.

Como afirma Machado (1995, p.45):

Na pré-escola, a Torre pode ser utilizada como jogo livre, com regras simples para separação de cores ou tamanhos. A partir da 4ª ou da 5ª séries, pode-se jogar segundo as duas regras básicas e o jogo possibilita uma série de explorações interessantes, no caminho para a descoberta da estratégia ótima para alcançar o fim almejado.

#### Ensino Médio:

- ✓ Contagem;
- ✓ Função exponencial;
- ✓ Progressão Geométrica (P.G.);

#### Ensino Superior:

- ✓ Paridade;
- ✓ Deduções e Recursão;
- ✓ Indução finita (demonstração de fórmulas).
- ✓ Conceito de diferenciação de áreas, cálculo de valor numérico;

#### 5 - ATIVIDADE PROPOSTA:

Utilizar o jogo torre de Hanói para preencher a tabela abaixo (esta que exibe a quantidade “n” de discos e a quantidade mínima de movimentos) utilizando as regras a seguir.

#### Regras:

- ✓ Somente um disco pode ser posto de cada vez.
- ✓ Um disco maior nunca pode ser posto sobre um disco menor.

Tabela:

Nº de discos	Quantidade mínima de movimentos
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
....	
n	

#### 6 - DEDUÇÃO E PROVA DA FÓRMULA:

Tentaremos deduzir uma fórmula que expresse a quantidade de movimentos mínima em termos do número de discos na Torre de Hanói, ou seja, buscaremos definir a quantidade de movimentos com 2 discos, a partir da quantidade de movimentos obtido com 1 disco, depois saber a quantidade de movimentos mínima com 3 discos, a partir de 2 discos e, de

maneira recursiva, determinar a quantidade mínima de jogadas com “ $n+1$ ” discos a partir de “ $n$ ” discos.

Em seguida usaremos indução matemática para provarmos a fórmula. Para isso exige-se do aluno um conhecimento prévio de demonstrações.

### 7 - UMA PROPOSTA DE APLICAÇÃO NO ENSINO-MÉDIO:

No Ensino Médio, a partir da 2ª série, com o estudo da P.G.(Progressão Geométrica), podemos utilizar a fórmula da soma dos termos de uma P.G. para demonstrar a fórmula da Torre de Hanói.

O objetivo não é só a demonstração da fórmula, mas também podemos promover refutações, busca de soluções por tentativa e erro, desenvolvimento de estratégias e processos de contagem, além da socialização de ideias matemáticas, como afirma Costa (2010):

“Por si só o jogo é capaz de conceber atitudes mais positivas em relação ao processo de aprendizagem, além de promover a socialização, pois estabelece incontestáveis e reais reações de aceitação, cumprimento de regras, etc.”.

#### Passo a Passo:

1. Apresentar o Jogo (Modelo, Criador e a Lenda);



2. Deixar os alunos manipularem o jogo para que se familiarizem com ele;

3. Apresentação das regras do jogo;

4. Propor (caso não disponibilize do jogo em madeira) que os alunos construam uma torre de Hanói;



5. Os alunos devem construir uma tabela auxiliar relacionando o número de peças com o número mínimo de movimentos necessários para o transporte.

Modelo da tabela:

Tabela Inicial

Quantidade de discos	Quant. de movimentos de cada peça						Total de movimentos
	Pç 1	Pç 2	Pç 3	Pç 4	Pç 5	Pç 6	
1							
2							
3							
4							
5							
6							

Fonte: COSTA(2010)

Tabela já preenchida pelos alunos

Quantidade de discos	Quant. de movimentos de cada peça						Total de movimentos
	Pç 1	Pç 2	Pç 3	Pç 4	Pç 5	Pç 6	
1	1	0	0	0	0	0	1
2	2	1	0	0	0	0	3
3	4	2	1	0	0	0	7
4	8	4	2	1	0	0	15
5	16	8	4	2	1	0	31
6	32	16	8	4	2	1	63

Fonte: COSTA(2010)

6. De posse da tabela, pode-se propor algumas questões para que os alunos respondam:

Exemplos:

- ✓ O número de movimentos é alterado quando a torre é transportada para o outro pino?
- ✓ Acrescentando uma peça à torre, em quanto aumentaria o número de movimentos?
- ✓ Existe alguma relação matemática entre a quantidade de discos e a quantidade de jogadas?
- ✓ Para os 64 discos propostos pelo deus “Brama”, quantas jogadas seriam necessárias para que os monges concluíssem essa tarefa?
- ✓ Supondo que os monges demorassem 1 segundo para mover um disco, em quantos anos, os monges concluiriam a tarefa de mover os 64 discos?

7. Prova da fórmula da torre de Hanói usando a soma dos termos da P.G.

Seja “n” a quantidade de discos contidos na torre de Hanói.

Para n=1 disco, teremos 1 jogada = 1

Para n=2 discos, teremos 3 jogadas = 1 + 2 =  $1 + 2^1$

Para n=3 discos, teremos 7 jogadas = 1 + 2 + 4 =  $1 + 2^1 + 2^2$

Para n=4 discos, teremos 15 jogadas = 1 + 2 + 4 + 8 =  $1 + 2^1 + 2^2 + 2^3$

Para n=5 discos, teremos 31 jogadas = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 =  $1 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4$

Para n=6 discos, teremos 63 jogadas = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 =  $1 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5$

Agora, observe que para uma quantidade qualquer “n” de discos teremos:

Para  $n = n$  discos, teremos:  $1 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + \dots + 2^{n-1}$  jogadas.

Logo, teremos a soma dos termos da seguinte P.G.  $(1, 2^1, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, \dots, 2^{n-1})$ , onde  $a_1 = 1$  e  $q = 2$ .

Assim, aplicando a fórmula da soma dos termos da P.G. temos:

$$S_n = \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1} = \frac{1 \cdot (2^n - 1)}{2 - 1} = 2^n - 1$$

Portanto, conclui-se que, para “ $n$ ” discos teremos um total de  $2^n - 1$  jogadas.



## Anexo II– Questionário 1



UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO SEMIÁRIDO (UFERSA)  
FACULDADE DE FILOSOFIA DOM AURELIANO MATOS  
(FAFIDAM/UECE)



PROFESSOR: Pétrick Oliveira da Silva

### Questionário 1:

1. Você conhece o jogo Torre de Hanói?	Sim ( )	Não ( )
2. Já trabalhou/utilizou, enquanto aluno ou professor, no ensino fundamental ou médio?	Sim ( )	Não ( )
3. Você conhece a fórmula que envolve o número de discos e a quantidade mínima de movimentos?	Sim ( )	Não ( )
4. Você conhece as potencialidades do jogo Torre de Hanói? Se Sim, descreva: _____ _____ _____.	Sim ( )	Não ( )

**Anexo III – Questionário 2.**



UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO SEMIÁRIDO (UFERSA)  
FACULDADE DE FILOSOFIA DOM AURELIANO MATOS  
(FAFIDAM/UECE)



PROFESSOR: Pétrick Oliveira da Silva

**Questionário 2:**

1. Sobre as potencialidades do jogo Torre de Hanói, seria possível apontar mais alguma que pudesse ser usada em conteúdos do ensino fundamental, médio ou superior?

---

---

---

2. O jogo Torre de Hanói é uma ferramenta relevante para o ensino de matemática? Você considera que os alunos poderiam aprender de uma maneira mais lúdica e diferenciada?

---

---

---

3. Você, enquanto futuro professor de matemática, pretende utilizar jogos matemáticos (como a torre de Hanói) em suas aulas?

---

---

---

4. Essa oficina contribuiu de alguma forma para que você enquanto aluno do curso de licenciatura em matemática?

---

---

---

Obrigado!!!

Anexo IV – Fotos.

