



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CARIRI  
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA  
EM REDE NACIONAL

RENAN FERNANDES DE MORAES

**MAXIMIZANDO ÁREAS E MINIMIZANDO PERÍMETROS**

JUAZEIRO DO NORTE - CE  
2019

RENAN FERNANDES DE MORAES

## **MAXIMIZANDO ÁREAS E MINIMIZANDO PERÍMETROS**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Federal do Cariri, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Matemática.

Área de concentração: Ensino de Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Valdinês Leite de Sousa Júnior

JUAZEIRO DO NORTE - CE

2019

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação  
Universidade Federal do Cariri  
Sistema de Bibliotecas

---

- M827m Moraes, Renan Fernandes de.  
Maximizando áreas e minimizando perímetros/ Renan Fernandes de Moraes. – 2019.  
81 f.: il.; color.; enc. ; 30 cm.  
(Inclui bibliografia p. 77-78).
- Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Cariri, Centro de Ciências e Tecnologia  
–Programa de Pós-graduação em Matemática em Rede Nacional, Juazeiro do Norte, 2019.  
Área de Concentração: Ensino de Matemática.
- Orientação: Prof. Dr. Valdinês Leite de Sousa Júnior.
1. Desigualdade. 2. Geometria Euclidiana. 3. Isoperimetria. 4. Máximos. 5. Mínimos.  
I. Título.

---

CDD 516.24

Bibliotecário: João Bosco Dumont do Nascimento – CRB 3/1355



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO  
UNIVERSIDADE FEDERAL DO CARIRI  
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA  
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

---

## Maximizando Áreas e Minimizando Perímetros

*Renan Fernandes de Moraes*

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Federal do Cariri, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática

Aprovada em 18 de março de 2019.

### Banca Examinadora

*Valdinês Leite de Sousa Júnior*

Prof. Dr. Valdinês Leite de Sousa Júnior  
Orientador

*Érica Boizan Batista*

Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Érica Boizan Batista

UFCA

*Maria Silvana Alcântara Costa*

Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Maria Silvana Alcântara Costa

UFCA

## AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, por tudo que sou e o que conquistei.

Agradeço aos meus pais Antonio Fernandes e Maria Aparecida de Moraes Fernandes por tudo que fizeram por mim.

Agradeço a minha esposa Janayle Kéllen, pela compreensão, carinho, apoio e incentivo dado em todos os momentos.

Agradeço ao Professor Valdinês Leite pelo apoio, dedicação e orientação desta dissertação, por acreditar em mim ao me dedicar a realização deste trabalho.

Aos professores que participaram da banca de defesa deste trabalho.

A João Paulo, pela grande convivência na carreira acadêmica (graduação/mestrado), pelos inúmeros momentos de companheirismo e por todo apoio compartilhado nessa jornada.

Aos demais colegas de mestrado pelo convívio amigável de dois anos de estudos e pelos momentos agradáveis de descontração.

A Esaú Alves de Sousa, pelo apoio, companheirismo e incentivo nessa jornada de graduação/mestrado.

A Vicente Sousa, pelas inúmeras contribuições e longo período de convívio.

Ao professor Fábio Dantas, pelo convívio amigável no IFRN e pelas dicas para a elaboração desta dissertação.

Aos professores Augusto Xavier, Jonas Morais, Karlos Thadeu, Messias Vilbert, Micael Damasceno, Ramon Vianna, Robson Rafael pelos inúmeros conselhos nessa etapa final de mestrado e pela convivência na república.

À direção e à coordenação das escolas Joaquim Ferreira dos Santos e Antão Pereira e Silva, localizadas em Farias Brito - CE, pelo tempo de serviço e pelo acolhimento prestados nas instituições.

A todos os professores da UFCA que participam direta ou indiretamente do PROFMAT.

Ao IFRN - campus Parelhas, por conciliar meus horários de trabalho com os do mestrado. A todos os professores da referida instituição.

Aos professores do IFCE - campus Juazeiro do Norte, que percorreram todo o meu processo de graduação.

A CAPES e a SBM, idealizadores do PROFMAT.

E a todas as outras pessoas que, direta ou indiretamente, contribuíram em minha formação e elaboração desta dissertação.

Dedico este trabalho a meus pais, por todo apoio e incentivo dado na minha carreira acadêmica.

*A primeira regra do ensino é saber o que se deve ensinar. A segunda, é saber um pouco mais do que aquilo que se deve ensinar.*

*George Polya*

## RESUMO

Esta dissertação tem por objetivo descrever a maximização de áreas com minimização de perímetros na geometria euclidiana. Buscamos responder a cinco problemas de maximização de área e de minimização de perímetro em triângulos e polígonos convexos, atingindo a uma prova da desigualdade isoperimétrica para polígonos. Os resultados aqui contidos foram extraídos dos artigos [6] e [9]. Visando enriquecer tais abordagens e garantir melhor entendimento do que está apresentado, faremos uma breve abordagem da geometria euclidiana, buscando visualizar e entender propriedades básicas em relação a triângulos, polígonos e circunferências bem como noções de demonstrações geométricas, utilizando resultados de vários autores de grande referências nesses assuntos, bem como uma sequência de passos que constroem tais problemas no software Geogebra. Trabalharemos alguns problemas clássicos de máximos e mínimos em geometria euclidiana, de caráter histórico, e, por fim, propomos uma sequência de problemas geométricos, a fim de aplicar conceitos discutidos anteriormente.

**Palavras-chave:** Desigualdade, geometria euclidiana, isoperimetria, máximos, mínimos.



## ABSTRACT

This dissertation aims to describe the maximization of areas with minimization of perimeters in Euclidean geometry. We sought to answer five problems of area maximization and perimeter minimization in triangles and convex polygons, reaching a proof of the isoperimetric inequality for polygons. The results contained herein were extracted from articles [6] and [9]. Aiming at enriching such approaches and ensuring a better understanding of what is presented, we will make a brief approach to Euclidean geometry, seeking to visualize and understand basic properties in relation to triangles, polygons and circumferences as well as notions of geometric demonstrations, using results from several authors of great reference in these matters, as well as a sequence of steps that build such problems in Geogebra software. We will work on some classical problems of maximum and minimum in euclidean geometry, of historical character, and, finally, we propose a sequence of geometric problems, in order to apply concepts previously discussed.

**Keywords:** Inequality, euclidean geometry, isoperimetry, maximum, minimum.

## Índice de Notações

$\widehat{BAC}$ ;	Ângulo com vértice em $\hat{A}$ .
$\mathbb{C}(O, r)$	Circunferência de centro $O$ e raio $r$ .
$\widehat{BCD}$	Arco de circunferência formado pelos pontos $B$ , $C$ e $D$ .
$\overline{BC}$	Segmento determinado pelos pontos $B$ e $C$ .
$l(\overline{BC})$	Comprimento do segmento $\overline{BC}$
$\overrightarrow{BC}$	Semirreta de origem no ponto $B$ que passa pelo ponto $C$ .
$\overleftrightarrow{BC}$	Reta determinada pelos pontos $B$ e $C$ .
$d(O, \overrightarrow{BC})$	Distância do ponto $O$ à semirreta $\overrightarrow{BC}$ .
$\implies$	Implica que
$\iff$	Se, e somente se.
$\perp$	Perpendicular.
$//$	Retas paralelas.
$\equiv$	Congruente.
$\forall$	Para todo.
$S_n$	Área do polígono de $n$ lados.
$l_C$	Comprimento da circunferência.
$S_C$	Área da circunferência.
$\alpha$	Ângulo Alfa.
$\beta$	Ângulo Beta.
$\theta$	Ângulo Teta.
$\delta$	Ângulo Delta.
$\lambda$	Ângulo Lambda.
$\gamma$	Ângulo Gama.
$\chi$	Chi.
$\xi$	Xi.
sen	Seno.
cos	Cosseno.
tan	Tangente.
$S'$ ;	Derivada primeira.
$S''$	Derivada segunda.

# Lista de Tabelas

1	Nomeclatura de polígonos . . . . .	19
---	------------------------------------	----

## Lista de Figuras

1	Polígonos simples (1) e (2); e complexos (3) e (4). . . . .	19
2	Polígono convexo (5) e não convexo (6). . . . .	19
3	Circunferência de Centro $O$ e raio $r = \overline{OP}$ . . . . .	20
4	Elementos de uma circunferência. . . . .	21
5	curva fechada (A) e curva aberta (B). . . . .	22
6	Região Côncava (A) e Região Convexa (B). . . . .	22
7	Mediatriz de um segmento. . . . .	23
8	Circuncentro de um triângulo. . . . .	23
9	Polígono regular inscritível. . . . .	24
10	Polígono regular circunscritível. . . . .	24
11	Bissetriz do ângulo $A\hat{O}B$ . . . . .	25
12	Reta tangente a circunferência. . . . .	26
13	Retas tangentes à circunferência por um ponto exterior. . . . .	26
14	Propriedades sobre as retas tangentes à circunferência. . . . .	27
15	Um quadrilátero não inscritível. . . . .	27
16	Teorema do Ângulo Externo. . . . .	28
17	Ângulo inscrito numa circunferência. . . . .	28
18	Quadrilátero $ABCD$ inscritível. . . . .	29
19	Ângulos $B\hat{A}C \equiv B\hat{D}C$ . . . . .	29
20	$B\hat{A}C + B\hat{D}C = 180^\circ \implies ABCD$ é inscritível. . . . .	30
21	Área de um triângulo. . . . .	31
22	Critério para equivalência de áreas em triângulos. . . . .	32
23	Área do triângulo por Herón. . . . .	32
24	Área do quadrilátero por extensão da fórmula de Herón. . . . .	33
25	Ordem dos lados e ângulos de um triângulo . . . . .	35
26	Ao maior lado opõe-se o maior ângulo. . . . .	35
27	Os aviões que chegam em $A$ . . . . .	36
28	Comparando o terceiro lado de dois triângulos. . . . .	37
29	A desigualdade triangular. . . . .	38
30	Solução para o exercício 3.1 . . . . .	39
31	Retas perpendiculares com pontos não pertencentes a elas, respectivamente. . . . .	40
32	Solução para o exercício 3.2, parte 1. . . . .	41
33	Solução para o exercício 3.2, parte 2. . . . .	41
34	Solução para o exercício 3.2, parte 3. . . . .	42
35	Conexão do ponto mínimo de Fermat-Steiner. . . . .	43
36	Caminho mais curto para a luz para ir de $S$ a $E$ (Problema de Heron). . . . .	43
37	Poligonal $APB$ tangente ao círculo em $P$ . . . . .	44
38	Rotação do triângulo $ABC$ , obtendo-se o triângulo $A'B'C'$ . . . . .	44

39	Caminho de menor comprimento. . . . .	46
40	Caminho de menor comprimento tocando a reta $r$ apenas num ponto. . . . .	47
41	Determinação do ponto tal que se tenha menor comprimento. . . . .	47
42	Lema 4.1 . . . . .	48
43	Lema 4.1 com o simétrico do ponto $A$ . . . . .	48
44	Ponto $D$ sobre o lado $\overline{BC}$ do triângulo $ABC$ . . . . .	49
45	Ponto $D$ no interior do triângulo $ABC$ . . . . .	49
46	Resposta para o Problema 1. . . . .	50
47	Resposta para o Problema 2. . . . .	51
48	Resposta para o Problema 3 - parte 1. . . . .	52
49	Resposta para o Problema 3 - parte 2. . . . .	53
50	Resposta para o problema 4. . . . .	54
51	Resposta para o Problema 5. . . . .	55
52	Função com imagem negativa no intervalo. . . . .	56
53	Controles deslizantes - problema 1. . . . .	57
54	Segmento de comprimento fixo - problema 1. . . . .	58
55	Reta perpendicular à base do triângulo. . . . .	58
56	Reta paralela à reta suporte da base do triângulo. . . . .	58
57	Triângulos de mesma área - problema 1. . . . .	59
58	Ferramenta para determinar perímetro e área - problema 1. . . . .	59
59	Mediatriz de um segmento. . . . .	59
60	A elipse de focos $A$ e $B$ . . . . .	60
61	Controles deslizantes - problema 2. . . . .	61
62	Segmento de comprimento fixo - problema 2. . . . .	61
63	Construção da elipse. . . . .	61
64	Determinando polígonos a partir dos vértices. . . . .	62
65	Ferramenta para determinar perímetro e área - problema 2. . . . .	62
66	Mediatriz de um segmento. . . . .	62
67	Construção de polígono qualquer. . . . .	63
68	Ferramenta para determinar perímetro e área. . . . .	63
69	Polígono regular de lado dado. . . . .	63
70	Controles deslizantes - problemas 4 e 5. . . . .	64
71	Segmento de comprimento fixo. . . . .	64
72	Polígono de lado dado. . . . .	65
73	Ferramenta para determinar perímetro e área. . . . .	65
74	Comparação de polígonos com perímetro fixo. . . . .	65
75	Círculo com raio definido. . . . .	66
76	Triângulo, pentágono e icosaágono comparado com círculo. . . . .	66
77	Pavimentação por triângulos equiláteros. . . . .	68
78	Pavimentação por quadrados. . . . .	68

79	impossibilidade de pavimentação por pentágonos. . . . .	68
80	Pavimentação por hexágonos. . . . .	69
81	Impossibilidade de pavimentação por círculos. . . . .	69
82	Ilustração corte do couro. . . . .	70
83	À esquerda, Paris. Ao centro, Colônia. À direita, Braga. . . . .	70
84	Cavidade na curva. . . . .	71
85	Curva de maior área. . . . .	71
86	Solução para o problema de Dido com parede - parte 1. . . . .	72
87	Solução para o problema de Dido com parede - parte 2. . . . .	73
88	Retalhos. . . . .	75
89	Janela em arco romano. . . . .	75

# Sumário

<b>Lista de Tabelas</b>	<b>11</b>
<b>Lista de Figuras</b>	<b>12</b>
<b>1. INTRODUÇÃO</b>	<b>16</b>
<b>2. PRELIMINARES</b>	<b>18</b>
2.1. Polígonos, circunferências e algumas noções de curvas . . . . .	18
2.2. Lugares geométricos . . . . .	22
2.3. Áreas . . . . .	30
2.4. A desigualdade triangular . . . . .	35
<b>3. ALGUNS PROBLEMAS GEOMÉTRICOS</b>	<b>39</b>
<b>4. MAXIMIZANDO A ÁREA E MINIMIZANDO O PERÍMETRO</b>	<b>46</b>
4.1. Uma abordagem sobre triângulos . . . . .	46
4.2. Uma abordagem sobre polígonos . . . . .	51
4.3. A desigualdade isoperimétrica . . . . .	55
<b>5. DOS PROBLEMAS À PRÁTICA</b>	<b>57</b>
5.1. Problemas 1 . . . . .	57
5.2. Problema 2 . . . . .	59
5.3. Problema 3 . . . . .	63
5.4. Problema 4 e Problema 5 . . . . .	64
<b>6. PROBLEMAS DE MÁXIMOS E MÍNIMOS NA GEOMETRIA EUCLIDIANA</b>	<b>67</b>
6.1. A sagacidade das abelhas . . . . .	67
6.2. O problema de Dido . . . . .	69
6.2.1. A solução para o Problema de Dido . . . . .	70
<b>7. UMA PROPOSTA DE ATIVIDADES</b>	<b>74</b>
7.1 Problemas propostos . . . . .	74
<b>CONCLUSÃO</b>	<b>76</b>
<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>77</b>
<b>APÊNDICE</b>	<b>79</b>

# 1. INTRODUÇÃO

A geometria euclidiana é estudada nas escolas desde o ensino fundamental. É simples para ser trabalhada, portanto adequada para ser utilizada desde a escola elementar. Ela é baseada no texto do matemático grego Euclides, em sua obra *Elementos*, escrito por volta do ano 300 a.C., texto este que teve o maior número de traduções, depois da Bíblia Sagrada.

Visando uma construção significativa deste trabalho, dar-se atenção especial a algumas construções geométricas envolvidas, visto que cada construção realizada serve como um espécie de teorema de existência para a figura ou conceitos envolvidos. Assim, de maneira mais geral possível, esboçamos todos os passos nos teoremas/problemas propostos e resolvidos, visto que para tais situações é possível encontrar outras soluções. Segundo [13],

O método dos lugares geométricos e sua linguagem vêm proporcionar maior praticidade na resolução e entendimento de muitos problemas que envolvem construções geométricas.

Nesta dissertação pretendemos contribuir para o aperfeiçoamento do ensino de geometria, em especial correlacionar áreas e perímetros, que é considerado importante tanto no ensino básico quanto no nível superior. O interesse para tal abordagem consiste na forma de como os problemas geométricos são adaptados ao cotidiano e a situações da vida real, permitindo modular e interpretar fenômenos à nossa volta.

Desse modo, na construção deste texto, pretendemos discutir e entender algébrica e geometricamente, utilizando o software Geogebra, as soluções para os cinco problemas citados a seguir:

*Problema 1:* Dentre todos os triângulos de mesma área, qual é o de menor perímetro?

*Problema 2:* Dentre todos os triângulos de mesmo perímetro, qual é o de maior área?

*Problema 3:* Dentre todos os polígonos de  $n$  lados e de mesma área, qual deles têm o menor perímetro?

*Problema 4:* Dentre todos os polígonos de  $n$  lados e de mesmo perímetro, qual deles têm a maior área?

*Problema 5:* Dados dois polígonos regulares de mesmo perímetro  $L$ , aquele que tem maior área é o que possui um maior número de lados.

Os primeiros problemas envolvendo máximos e mínimos são encontrados na geometria euclidiana e envolvem perímetros, áreas e volumes. Segundo [8], o primeiro problema de máximo que chegou até nós encontra-se no Livro VI de *Os Elementos de Euclides* (330-275 a.C.), *Proposição 27*, e consiste na prova que de todos os retângulos com um dado perímetro, o quadrado é o que tem a área máxima.



Esta dissertação está dividida na seguinte forma: no *Capítulo 2*, desenvolveremos alguns resultados de geometria euclidiana, com base em [5], [10], [11], [13] e [16], que servirão de suporte para atingir nossos objetivos. No *Capítulo 3*, propomos algumas situações problemas de [2], [3] e [11], onde se aplicam as noções desenvolvidas anteriormente, e que servirão para o entendimento de alguns resultados posteriores.

No *Capítulo 4*, serão abordados os cinco problemas que, de acordo com [6], caracterizam a maximização de áreas com minimização de perímetro. Ainda neste capítulo, discutiremos resultados sobre a desigualdade isoperimétrica, seguindo [1], [9] e [14].

No *Capítulo 5*, a fim de que os leitores se familiarizem com softwares que promovem a aprendizagem matemática e utilizem recursos tecnológicos para a construção do conhecimento, propomos uma sequência de passos que organizam a construção dos *cinco problemas* trabalhados nos capítulos anteriores utilizando o software Geogebra.

No *Capítulo 6*, será feita a análise de alguns problemas de máximo e mínimo em geometria euclidiana, de acordo com [4], [8] e [15], a fim de visualizar tais conceitos discutidos anteriormente no contexto histórico de problemas geométricos.

Por fim, no *Capítulo 7*, será proposto uma série de situações problemas com o intuito de aplicar os conceitos vistos ao longo do trabalho, bem como modelar problemas matemáticos a fim de mostrar a beleza desta ciência.

## 2. PRELIMINARES

Neste seção, discutiremos resultados clássicos da geometria euclidiana, a fim de construir uma base para o entendimento dos próximos assuntos a serem discutidos. No desenvolvimento de cada subseção, procuramos seguir uma sequência lógica na apresentação de conceitos e propriedades.

A geometria euclidiana é caracterizada pela figuração de *noções primitivas*. Estas são adotadas sem definição, mas caracterizadas por um conhecimento axiomático, aceito sem contestação, tais como: *ponto, reta e plano*. Tudo isso é decorrente da experiência e observações realizadas.

### 2.1. Polígonos, circunferências e algumas noções de curvas

Nesta subseção, abordaremos resultados de acordo com [5] e [13]. Desenvolveremos algumas noções básicas para o entendimento dos próximos assuntos.

**Definição 2.1:** Dada uma sequência de pontos  $P_1, P_2, \dots, P_n$ ,  $n \geq 3$ , todos distintos, onde três pontos consecutivos não são colineares, considerando-se consecutivos  $P_{n-1}, P_n$  e  $P_1$ , assim como  $P_n, P_1$  e  $P_2$ , chama-se “o polígono  $P_1P_2 \dots P_n$ ” à reunião dos segmentos  $\overline{P_1P_2}, \overline{P_2P_3}, \dots, \overline{P_{n-1}P_n}, \overline{P_nP_1}$ .

Dado o polígono  $P_1P_2 \dots P_n$ , o caracterizamos de acordo com os seguintes elementos:

- 1)  $P_1, P_2, \dots, P_n$  são os vértices do polígono;
- 2)  $\overline{P_1P_2}, \overline{P_2P_3}, \dots, \overline{P_{n-1}P_n}$  são os lados do polígono;
- 3)  $P_n\widehat{P_1}P_2, P_1\widehat{P_2}P_3, \dots, P_{n-1}\widehat{P_n}P_1$  são os ângulos do polígono.

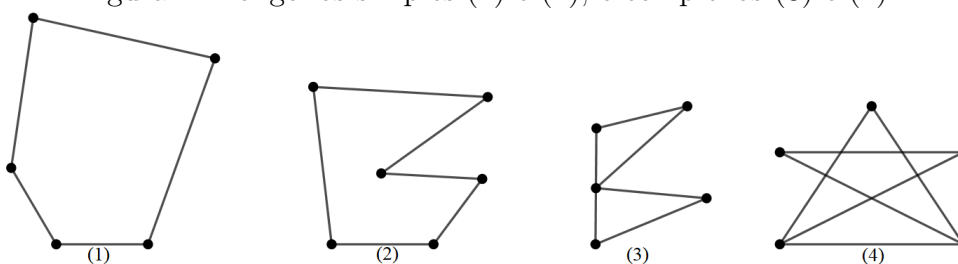
Observe que:

- 1') Dois lados que têm um vértice em comum são lados consecutivos;
- 2') Dois ângulos de um polígono são consecutivos se têm um lado do polígono comum;
- 3') Um polígono de  $n$  vértices possui  $n$  lados e  $n$  ângulos;
- 4') O perímetro de  $P_1P_2 \dots P_n$  é a soma  $l(\overline{P_1P_2}) + l(\overline{P_2P_3}) + \dots + l(\overline{P_{n-1}P_n})$ .

**Definição 2.2:** Um polígono é dito simples quando a interseção de quaisquer dois lados não consecutivos é vazia. Caso contrário, ele será complexo.

A menos que seja dito o contrário, todos os polígonos a serem trabalhados neste texto serão *simples*, pois cumprem tantos os itens 1), 2) e 3), como 1'), 2'), 3') e 4'), enunciados anteriormente. Quando um polígono é complexo, há contradição com o item 3').

Figura 1: Polígonos simples (1) e (2); e complexos (3) e (4).

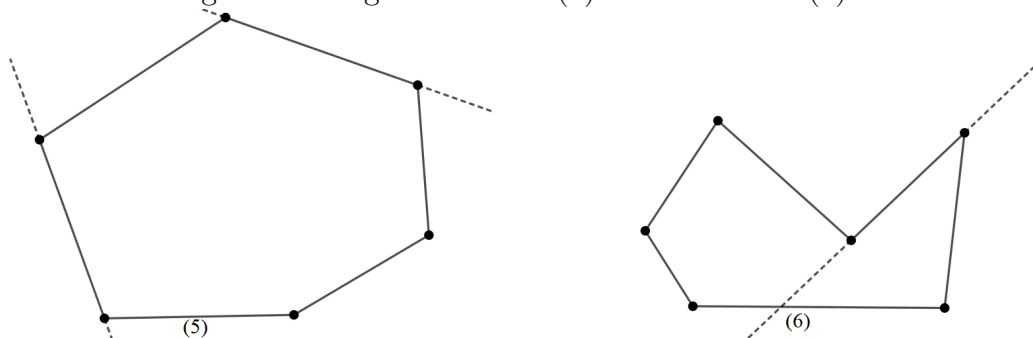


Fonte: [13]

**Definição 2.3:** Um polígono simples é dito *convexo* quando a reta determinada por dois de seus vértices consecutivos deixa todos os demais vértices num mesmo semiplano dos dois que ela determina.

Se um polígono não satisfaz a condição acima, ele é *não convexo* (ou *côncavo*).

Figura 2: Polígono convexo (5) e não convexo (6).



Fonte: baseado em [13].

Consideremos um polígono simples e um ponto não pertencente a ele. Se conduzirmos uma semirreta com origem no ponto dado e que não passe por nenhum vértice, mas intercepte o polígono e se o número de interseções for:

- (a) Ímpar, então o ponto é *interno* ao polígono;
- (b) Par, então o ponto é *externo* ao polígono.

Note que o conjunto dos pontos internos de um polígono é seu *interior* e o conjunto dos pontos externos é seu *exterior*. A reunião de um polígono com seu interior é uma *região poligonal* (ou superfície poligonal). Na figura (5), temos uma superfície poligonal convexa e na figura (6) uma superfície poligonal não convexa (ou côncava).

De acordo com o número  $n$  de lados, os polígonos recebem nomes especiais, conforme mostra tabela. Para  $n \geq 3$ , diremos que o polígono é: *n-ésimo polígono*.

Tabela 1: Nomeclatura de polígonos

n=3	Triângulo ou trilátero	3 lados
n=4	Quadrângulo ou quadrilátero	4 lados
n=5	Pentágono	5 lados
n=6	Hexágono	6 lados
n=7	Heptágono	7 lados
n=8	Octógono	8 lados
n=9	Eneágono	9 lados
n=10	Decágono	10 lados
n=11	Undecágono	11 lados
n=12	Dodecágono	12 lados
n=15	Pentadecágono	15 lados
n=20	Icoságono	20 lados

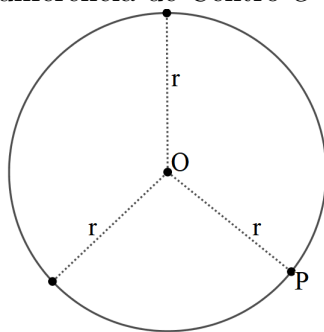
Fonte: [5].

**Definição 2.4:** Um polígono que possui lados congruentes é *equilátero*. Se possui os ângulos congruentes, é *equiângulo*.

**Definição 2.5:** Um polígono é *regular* quando é simultaneamente *equilátero* e *equiângulo*.

**Definição 2.6:** Sejam  $O$  um ponto e  $r$  um número real positivo. Definimos a *circunferência* de centro  $O$  e raio  $r$ , denotada por  $\mathbb{C}(O,r)$ , como sendo o conjunto de todos os pontos do plano que estão à mesma distância  $r$  do ponto  $O$ .

Figura 3: Circunferência de Centro  $O$  e raio  $r = \overline{OP}$ .

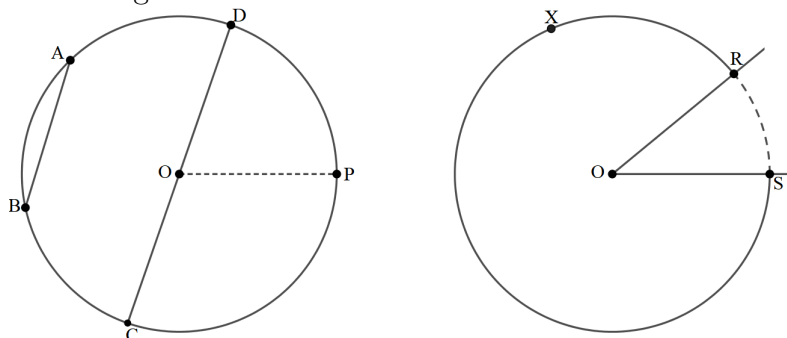


Fonte: [5].

Numa circunferência, temos os seguintes elementos:

- 1)  $\overline{OP}$  é o raio;
- 2)  $\overline{AB}$  é uma corda;
- 3)  $\overline{CD}$  é o diâmetro, ou seja, uma corda que passa pelo centro;
- 4)  $\widehat{RS}$  (tracejado) é o arco menor e  $\widehat{RS}$  (contínua) é o arco maior.

Figura 4: Elementos de uma circunferência.



Fonte: [5].

**Definição 2.7:** Dizemos que um círculo  $\alpha$  e uma reta  $t$  são *tangentes* ou, ainda, que a reta  $t$  é tangente ao círculo  $\alpha$ , se  $t$  e  $\alpha$  tiverem exatamente um ponto  $P$  em comum. Nesse caso, o ponto  $P$  é denominado o **ponto de tangência** de  $t$  e  $\alpha$ .

Segundo [13], temos as seguintes definições:

**Definição 2.8:** Um polígono é *inscritível numa circunferência* se tem todos os seus vértices pertencentes à circunferência.

Neste caso, dizemos que o polígono está inscrito nessa circunferência ou que tal circunferência é a *circunferência circunscrita ao polígono*.

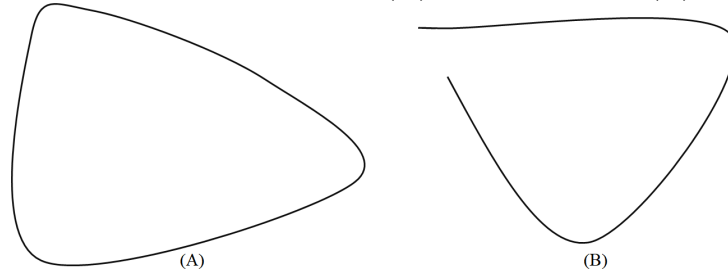
**Definição 2.9:** Um polígono é *circunscritível* se todos os seus lados são tangentes a mesma circunferência.

Neste caso, dizemos que o *polígono* está *circunscrito* à circunferência ou que tal circunferência é a *circunferência inscrita* no polígono.

**Definição 2.10:** Uma *curva fechada* simples é um conjunto de pontos que divide o plano em duas regiões: uma interna e outra externa.

Caso contrário, dizemos que a *curva* é *aberta* simples.

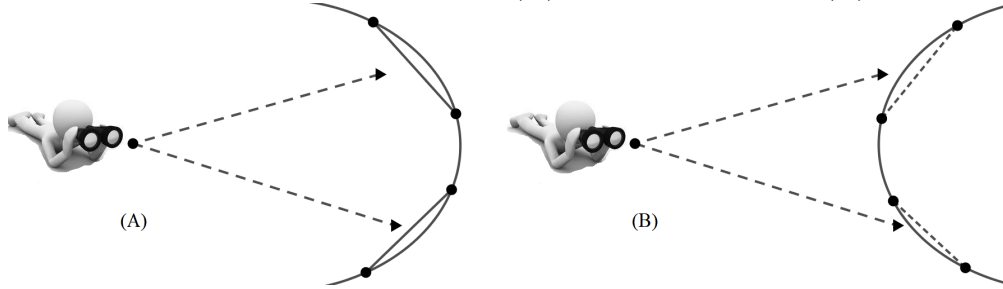
Figura 5: curva fechada (A) e curva aberta (B).



Fonte: o autor (2019).

**Definição 2.11:** Uma região (ou curva) do plano é dita *côncava* (respectivamente *convexa*) quando qualquer segmento de reta unindo quaisquer dois de seus pontos está mais próximo (respectivamente mais distante) do observador que o trecho da curva entre esses pontos.

Figura 6: Região Côncava (A) e Região Convexa (B).



Fonte: o autor (2019).

## 2.2. Lugares geométricos

Nesta subseção, seguiremos [10], [13] e [16] para atingir nossos objetivos.

**Definição 2.12:** Uma figura recebe o nome de *Lugar Geométrico* dos pontos que possuem uma propriedade  $\mathbb{P}$  quando:

- (a) Todos os seus pontos satisfazem a propriedade  $\mathbb{P}$ ;
- (b) Somente os pontos desta figura satisfazem a propriedade  $\mathbb{P}$ , isto é, se um ponto  $A$  possui a propriedade  $\mathbb{P}$ , então pertence a figura.

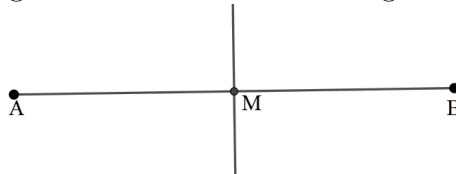
Em outras palavras, o *Lugar Geométrico* ( $LG$ ) dos pontos com a propriedade  $\mathbb{P}$  é formado exatamente pelos pontos do plano que satisfazem tal propriedade.

Exemplo 1: Uma circunferência de centro  $O$  e raio  $r$  é o  $LG$  dos pontos do plano que distam  $r$  de um ponto  $O$  dado.

Exemplo 2: A mediatriz de um segmento  $\overline{AB}$  é o  $LG$  dos pontos equidistantes de  $A$  e  $B$ .

De fato, a mediatriz divide o segmento em dois de mesmo tamanho. Pelo caso de congruência LAL, dado qualquer ponto  $P$  sobre a reta mediatriz,  $\overline{PA} = \overline{PB}$ . Logo, a mediatriz é o

Figura 7: Mediatriz de um segmento.



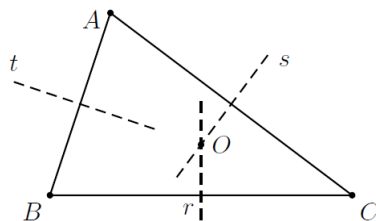
Fonte: o autor (2019).

*LG* dos pontos que equidistam a dois pontos dados.

**Proposição 2.1:** Em todo triângulo, as mediatrizes dos lados passam todas pelo mesmo ponto, chamado de **circuncentro**.

**Demonstração:** Sejam  $ABC$  um triângulo qualquer e  $r$ ,  $s$  e  $t$ , respectivamente, as retas mediatrizes dos lados  $\overline{BC}$ ,  $\overline{AC}$  e  $\overline{AB}$ , e  $O$  o ponto de interseção das retas  $r$  e  $s$ .

Figura 8: Circuncentro de um triângulo.



Fonte: [13].

Pela caracterização da mediatriz como *LG*, temos  $\overline{OA} = \overline{OC}$  e  $\overline{OC} = \overline{OB}$ . Assim,  $\overline{OA} = \overline{OC} = \overline{OB}$  e segue novamente pela caracterização da mediatriz como *LG* que  $O \in t$ . Portanto, as mediatrizes se cruzam num único ponto.  $\square$

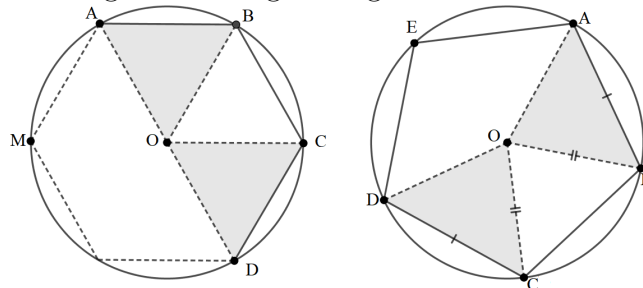
**Corolário 2.1:** Todo triângulo está inscrito numa circunferência.

**Demonstração:** De fato, pela *Proposição 2.1*, mostramos que as mediatrizes de um triângulo intersectam-se num único ponto. Note que, nos triângulos  $ABO$ ,  $ACO$  e  $BCO$ ,  $\overline{AO} = \overline{BO} = \overline{CO}$ . Logo, o ponto  $O$  é equidistante aos vértices do triângulo. Assim, existe um círculo de centro  $O$  e raio  $r = \overline{AO} = \overline{BO} = \overline{CO}$  que circunscreve este triângulo.  $\square$

**Proposição 2.2:** Todo polígono regular é inscrito numa circunferência.

**Demonstração:** De fato, seja  $ABCD \dots MN$  um polígono regular. Tomemos, sem perda de generalidade, o pentágono  $ABCDE$  para fixar as ideias.

Figura 9: Polígono regular inscritível.



Fonte: [5].

Pelos pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$ , usando o resultado do *Colorário 2.1*, tracemos a circunferência  $\alpha$  e seja  $O$  seu centro. Provemos que ela passa pelos demais vértices  $D$ ,  $E$ , ...,  $M$  e  $N$  do polígono. Consideremos os triângulos  $OBA$  e  $OCD$ . Estes triângulos são congruentes pelo caso LAL, pois

1.  $\overline{AB} = \overline{CD}$  são lados do polígono regular;
2.  $\overline{OB} = \overline{OC}$ , pois representam o raio da circunferência;

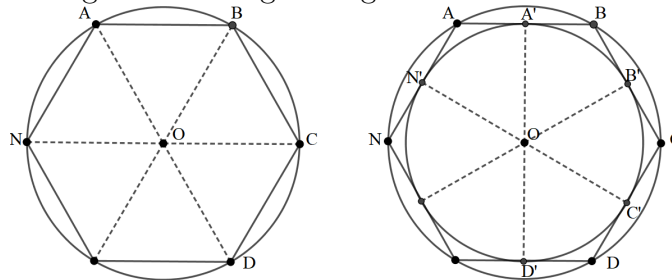
E considerando o triângulo isósceles  $BOC$ , que possui ângulos da base congruentes a, ainda, que os ângulos  $\widehat{ABC}$  e  $\widehat{BCD}$  do polígono regular são congruentes, por diferença decorre que  $\widehat{AOB} \equiv \widehat{COD}$ . Logo,  $OBA \equiv OCD \implies \overline{OA} = \overline{OD} \implies D \in \alpha$ .

De modo análogo,  $E \in \alpha$ , pois  $OCB$  e  $ODE$  são congruentes, ...,  $M \in \alpha$  e  $N \in \alpha$ , e o polígono  $ABCD \dots MN$  é inscrito na circunferência. Como existe uma única circunferência que passa por três pontos, sai a unicidade de  $\alpha$  por  $A, B, C, \dots, M, N$ .  $\square$

**Proposição 2.3:** Todo polígono regular é circunscritível numa circunferência.

**Demonstração:** Seja  $ABCD \dots MN$  um polígono regular. Em vista da proposição anterior, ele é inscrito numa circunferência  $\alpha$ . Seja  $O$  o centro desta circunferência. Os lados  $\overline{AB}, \overline{BC}, \dots, \overline{MN}$  e  $\overline{MA}$  são cordas congruentes desta circunferência, por isso distam igualmente do centro  $O$ .

Figura 10: Polígono regular circunscritível.



Fonte: [5].

Sendo  $A', B', C', \dots, N'$  os respectivos pontos médios de cada lado, temos que:  $\overline{OA'} = \overline{OB'} = \overline{OC'} = \dots = \overline{ON'}$ , donde se conclui que  $O$  é o centro da circunferência  $\alpha'$  que passa pelos



pontos  $A', B', C', \dots, N'$ . E ainda, sendo  $\overline{OA'} \perp \overline{AB}$ ,  $\overline{OB'} \perp \overline{BC}$ ,  $\overline{OC'} \perp \overline{CD}$ ,  $\dots$ ,  $\overline{ON'} \perp \overline{NA}$ , temos que  $ABCD \dots MN$  tem lados tangentes a  $\alpha'$ . Logo, o polígono  $ABCD \dots MN$  é circunscrito a circunferência  $\alpha'$ . Se existisse outra circunferência inscrita em  $ABCD \dots MN$ , ela passaria pelos pontos  $A'B'C'D' \dots M'N'$  e será, então, coincidente a  $\alpha'$ . Logo, a circunferência é única.  $\square$

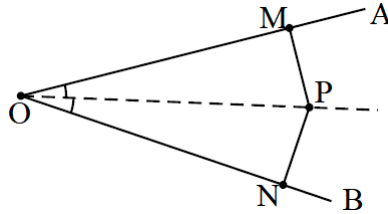
**Proposição 2.4:** Seja  $A\hat{O}B$  um ângulo dado. Se  $P$  é um ponto do mesmo, então

$$d(P, \overrightarrow{OA}) = d(P, \overrightarrow{OB}) \iff P \in (\text{Bissetriz de } A\hat{O}B),$$

onde  $d(P, \overrightarrow{OA})$  significa a distância do ponto  $P$  à semirreta  $\overrightarrow{OA}$ .

**Demonstração:** Suponhamos que  $P$  pertence à bissetriz do ângulo  $A\hat{O}B$  e sejam  $M$  e  $N$ , respectivamente, os pés das perpendiculares baixadas de  $P$  em relação às retas  $\overrightarrow{OA}$ ,  $\overrightarrow{OB}$ .

Figura 11: Bissetriz do ângulo  $A\hat{O}B$ .



Fonte: [11].

Os triângulos  $OMP$  e  $ONP$  são congruentes pelo caso *Lado-Ângulo-Ângulo oposto ao lado*, uma vez que  $M\hat{O}P \equiv N\hat{O}P$ ,  $O\hat{M}P \equiv O\hat{N}P = 90^\circ$  e  $\overline{OP}$  é lado comum aos mesmos. Daí,  $l(\overline{PM}) = l(\overline{PN})$ . E assim,  $d(P, \overrightarrow{OA}) = d(P, \overrightarrow{OB})$ .

Por outro lado, seja  $P$  um ponto no interior do ângulo  $A\hat{O}B$ , tal que  $\overline{PM} = \overline{PN}$ , onde  $M$  e  $N$  são os pés das perpendiculares baixadas de  $P$ , respectivamente, às semirretas  $\overrightarrow{OA}$  e  $\overrightarrow{OB}$ . Então, os triângulos  $MOP$  e  $NOP$  são novamente congruentes pelo caso *Cateto-Hipotenusa*, visto que  $\overline{OP}$  é hipotenusa comum e  $l(\overline{PM}) = l(\overline{PN})$ . Mas com isso,  $M\hat{O}P \equiv N\hat{O}P$ . Assim,  $P$  pertence à bissetriz de  $A\hat{O}B$ .  $\square$

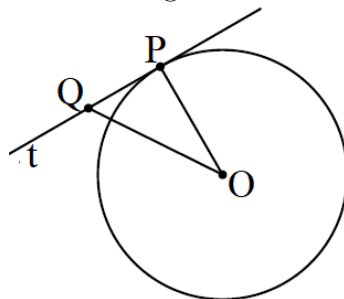
**Proposição 2.5:** Sejam  $\alpha$  um círculo de centro  $O$  e  $P \in \alpha$ . Se  $t$  é a reta que passa por  $P$  e é perpendicular a  $\overline{OP}$ , então  $t$  é tangente a  $\alpha$ .

**Demonstração:** Seja  $R$  o raio de  $\alpha$ . Observe a figura 12. Se  $Q \neq P$  é outro ponto de  $t$ , temos  $\overline{OQ} > \overline{OP} = R$ , uma vez que a medida de  $Q\hat{P}O$  é  $90^\circ$ . Logo é o maior ângulo do triângulo  $OPQ$ . Portanto,  $Q \notin \alpha$ , e, assim,  $P$  é o único ponto comum a  $t$  e  $\alpha$ .  $\square$

**Proposição 2.6:** Dados, no plano, um círculo  $\alpha$  e um ponto  $P$  exterior ao mesmo, há exatamente duas retas tangentes à  $\alpha$  passando por  $P$ .

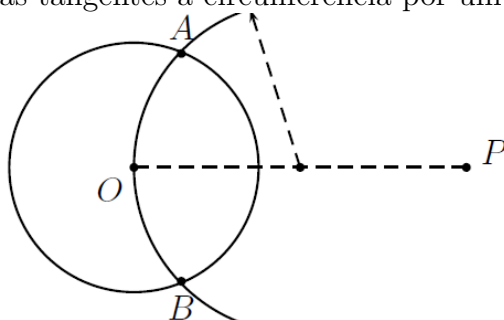
**Demonstração:** Sejam  $O'$  o centro do círculo dado e  $A$  e  $B$  os pontos de interseção do mesmo com àquele de diâmetro  $\overline{OP}$ .

Figura 12: Reta tangente a circunferência.



Fonte: [11].

Figura 13: Retas tangentes à circunferência por um ponto exterior.



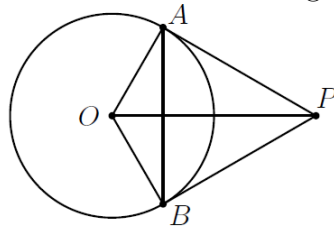
Fonte: [11].

Perceba que nos semicírculos superior e inferior, os triângulos  $OAP$  e  $OBP$  são retângulos, pois formam arcos capazes de  $90^\circ$  (para maiores informações, vide [11], pag. 91). Assim,  $\widehat{OAP} \equiv \widehat{OBP} = 90^\circ$ . Portanto,  $\overline{OA} \perp \overleftrightarrow{AP}$  e  $\overline{OB} \perp \overleftrightarrow{BP}$ . Assim, as retas  $\overleftrightarrow{AP}$  e  $\overleftrightarrow{BP}$  são tangentes ao círculo.

Mostremos que só existem duas retas para tal situação. Suponhamos que existe outra reta  $r$  passando por  $P$  e tangente ao círculo dado em  $X$ , digamos então que  $\overline{OX} \perp \overleftrightarrow{XP}$ . Logo,  $X$  pertence a um dos arcos capazes de  $90^\circ$  sobre  $\overline{OP}$ , isto é,  $X$  pertence ao círculo de diâmetro  $\overline{OP}$ . Mas aí,  $X$  está sobre a interseção do círculo dado com aquele de diâmetro  $\overline{OP}$  e, portanto,  $X = A$  ou  $X = B$ .  $\square$

**Proposição 2.7:** Sejam  $\alpha$  um círculo de centro  $O$  e  $P$  um ponto exterior ao mesmo. Se  $A, B \in \alpha$  são tais que  $\overleftrightarrow{PA}$  e  $\overleftrightarrow{PB}$  são tangentes a  $\alpha$ .

Figura 14: Propriedades sobre as retas tangentes à circunferência.



Fonte: [11].

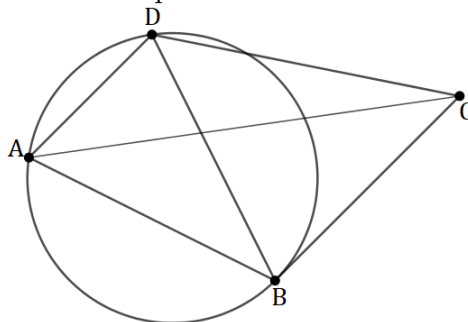
Então:

- (a)  $\overline{PA} = \overline{PB}$ ;
- (b)  $\overleftrightarrow{OP}$  é a mediatriz de  $\overline{AB}$ ;
- (c)  $\overleftrightarrow{OP}$  é a bissetriz dos ângulos  $\widehat{AOB}$  e  $\widehat{APB}$ ;
- (d)  $\overleftrightarrow{OP} \perp \overleftrightarrow{AB}$ .

**Demonstração:** Como  $l(\overline{OA}) = l(\overline{OB})$  e  $\widehat{PAO} \equiv \widehat{PBO} = 90^\circ$ , os triângulos  $POA$  e  $POB$  são congruentes, pelo caso *cateto-hipotenusa*. Assim,  $l(\overline{PA}) = l(\overline{PB})$ ,  $\widehat{APO} \equiv \widehat{BPO}$  e  $\widehat{AOP} \equiv \widehat{BOP}$ . Logo,  $\overline{PO}$  é bissetriz de  $\widehat{APB}$  e  $\widehat{AOB}$ . Agora, como  $P$  e  $O$  equidistam de  $A$  e  $B$ , segue que  $\overleftrightarrow{PO}$  é a mediatriz do segmento  $\overline{AB}$ . Logo,  $\overleftrightarrow{OP} \perp \overleftrightarrow{AB}$ .  $\square$

Segundo [11], contrariamente aos triângulos, nem todo quadrilátero convexo admite um círculo passando por seus vértices. Para ver isso, basta tomarmos um triângulo  $ABD$  e um ponto  $C$  não pertencente ao círculo circunscrito a  $ABD$ .

Figura 15: Um quadrilátero não inscrito.



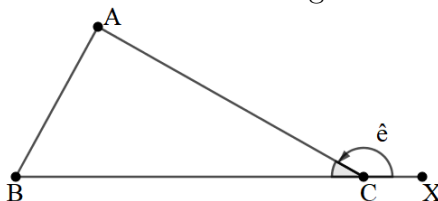
Fonte: [11].

Por outro lado, dizemos que um quadrilátero é inscrito se existir um círculo passando por todos os seus vértices. A partir da unicidade do círculo circunscrito a um triângulo, é imediato que, se um quadrilátero for inscrito, então o círculo que passa por seus vértices é único. Tal círculo é denominado o *círculo circunscrito* ao quadrilátero.

Para a próxima proposição, precisaremos de dois fortes teoremas da geometria euclidiana: o *Teorema do Ângulo Externo* e o *Teorema do Ângulo Inscrito*.

**Definição 2.13:** Dado um triângulo  $ABC$  e sendo  $\overrightarrow{CX}$  a semirreta oposta à semirreta  $\overrightarrow{CB}$ , o ângulo  $\hat{e} = \widehat{ACX}$  é o *ângulo externo* do triângulo  $ABC$  adjacente ao ângulo  $\widehat{ACB}$  e não adjacente aos ângulos  $\widehat{BAC}$  e  $\widehat{ABC}$ .

Figura 16: Teorema do Ângulo Externo.



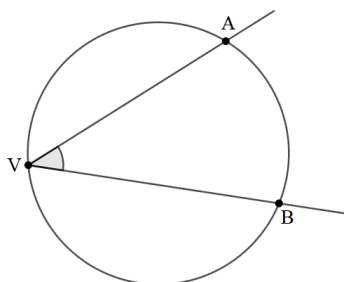
Fonte: [5].

**Teorema do Ângulo Externo:** Um ângulo externo de um triângulo é *maior* do que qualquer um dos ângulos internos não adjacentes.

Uma demonstração para este resultado pode ser encontrada em [5], página 45.

**Definição 2.14:** Um *Ângulo Inscrito* relativo a uma circunferência é um ângulo que tem vértice na circunferência e os lados são secantes a ela.

Figura 17: Ângulo inscrito numa circunferência.



Fonte: [5].

**Teorema do Ângulo Inscrito:** Um *ângulo inscrito* equivale a metade da medida do arco correspondente.

Uma demonstração para este resultado pode ser encontrada em [5], páginas 168 - 170. Note que todo ângulo inscrito determina uma corda na circunferência. Assim, ângulos inscritos que compartilham de uma mesma corda da circunferência são todos iguais. Esta noção define o chamado *Arco Capaz* (vide [5], pag. 174).

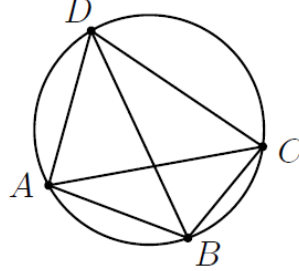
**Proposição 2.8:** Um quadrilátero convexo  $ABCD$ , de lados  $\overline{AB}$ ,  $\overline{BC}$ ,  $\overline{CD}$  e  $\overline{DA}$ , é inscritível se, e somente se, qualquer uma das condições for satisfeita:

(a)  $D\hat{A}B + B\hat{C}D = 180^\circ$ ;

(b)  $B\hat{A}C \equiv B\hat{D}C$ .

**Demonstração:** Suponhamos, inicialmente, que  $ABCD$  seja inscritível.

Figura 18: Quadrilátero  $ABCD$  inscritível.



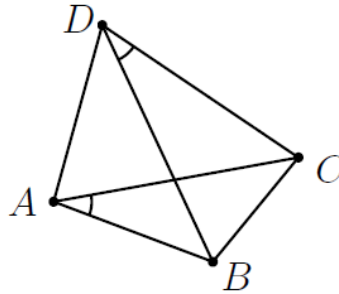
Fonte: [11].

Então, pelo Teorema do Ângulo Inscrito, temos  $B\hat{A}C \equiv B\hat{D}C$  e

$$D\hat{A}B + B\hat{C}D = \frac{1}{2}B\hat{C}D + \frac{1}{2}B\hat{A}D = 180^\circ$$

Reciprocamente, suponhamos primeiro que  $B\hat{A}C \equiv B\hat{D}C$ .

Figura 19: Ângulos  $B\hat{A}C \equiv B\hat{D}C$ .



Fonte: [11].

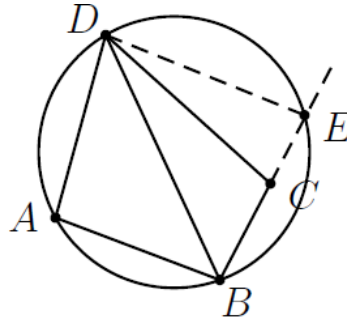
Como  $ABCD$  é convexo e seus vértices estão nomeados consecutivamente, segue que  $A$  e  $D$  estão situados no mesmo semiplano, daqueles determinados pela reta  $\overleftrightarrow{BC}$ . Sendo  $\theta$  o valor comum dos ângulos  $B\hat{A}C$  e  $B\hat{D}C$ , temos que  $A$  e  $D$  estão situados sobre o arco capaz de  $\theta$  sobre  $\overline{BC}$ , situado em tal semiplano. Logo, o círculo que contém o tal arco capaz circunscreve  $ABCD$ .

Suponhamos agora que  $D\hat{A}C + B\hat{C}D = 180^\circ$  e consideremos o círculo  $\alpha$ , circunscrito ao triângulo  $BAD$ .

Se  $C \notin \alpha$ , seja  $\overleftrightarrow{BC} \cap \alpha = \{E\}$ , com  $E \neq B, C$ . Pelo Item(a),

$$D\hat{A}B + B\hat{E}D = 180^\circ = D\hat{A}B + B\hat{C}D$$

Figura 20:  $B\hat{A}C + B\hat{D}C = 180^\circ \implies ABCD$  é inscritível.



Fonte: [11].

e, daí,  $B\hat{E}D \equiv B\hat{C}D$ . Mas, aplicando o *Teorema do Ângulo Externo* ao triângulo  $CDE$ , obtemos um contradição.  $\square$

### 2.3. Áreas

Nesta seção, usaremos resultados de [5], [11] e [14]. Nosso objetivo é trabalhar as noções de áreas para triângulos e quadriláteros e algumas relações que serão usadas posteriormente. Deixamos como sugestão de leitura as referências indicadas.

**Definição 2.15:** A *área* de uma superfície limitada é um número real positivo associado à superfície de tal forma que:

- (1) Às superfícies equivalentes estão associadas áreas iguais e reciprocamente.
- (2) A uma soma de superfícies está associada uma área (número) que é a soma das áreas das superfícies parcelas.
- (3) Se uma superfície está contida em outra, então sua área é menor ou igual a da outra.

Segundo [11], podemos enunciar os seguintes postulados para áreas:

- (1') Polígonos congruentes têm áreas iguais;
- (2') Se um polígono, convexo ou não, é particionado em um número finito de outros polígonos convexos, então a área do polígono maior é a soma das áreas dos polígonos menores;
- (3') Se um polígono contém outro, então a área do polígono maior é maior do que a área do polígono menor;
- (4') A área de um quadrado de lado 1cm é igual a  $1\text{cm}^2$ .

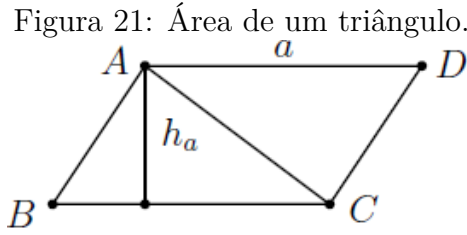
Intuitivamente, a área de uma região no plano é um número positivo que associamos à mesma e que serve para quantificar o espaço ocupado por ela.

**Proposição 2.9:** Seja  $ABC$  um triângulo de lados  $l(\overline{AB}) = c$ ,  $l(\overline{AC}) = b$  e  $l(\overline{BC}) = a$ , e alturas  $h_a$ ,  $h_b$  e  $h_c$ , respectivamente, relativas aos lados  $a$ ,  $b$  e  $c$ . Então,

$$S_{ABC} = \frac{ah_a}{2} = \frac{bh_b}{2} = \frac{ch_c}{2},$$

onde  $S_{ABC}$  indica a área do triângulo  $ABC$ . Em particular,  $ah_a = bh_b = ch_c$ .

**Demonstração:** Seja  $S$  a área de  $ABC$  e  $D$  a interseção da paralela a  $\overleftrightarrow{BC}$  por  $A$  com a paralela a  $\overleftrightarrow{AB}$  por  $C$ .



Fonte: [11].

Então, pelo caso de congruência  $ALA$ ,  $ABC \equiv CDA$ , uma vez que  $B\hat{A}C \equiv D\hat{C}A$ ,  $\overline{AC}$  é lado comum e  $B\hat{C}A \equiv D\hat{A}C$ . Assim, pelo postulado (1'),  $S_{ABC} = S_{CDA}$ . Mas,  $ABCD$  é um paralelogramo de base  $a$  e altura  $h_a$ . Assim,

$$2S = S_{ABC} + S_{CDA} = S_{ABCD} \implies S_{ABC} = \frac{1}{2}ah_a. \quad \square$$

**Lema 2.1:** Seja  $ABC$  um triângulo. Consideremos os segmentos  $l(\overline{AB}) = c$  e  $l(\overline{BC}) = a$  que formam os lados do triângulo e o ângulo  $\theta$  formado entre eles, então a área do triângulo  $ABC$  será dada por:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}a \cdot c \cdot \text{sen } \theta$$

**Demonstração:** Considere a figura anterior. Note que  $\text{sen } \theta = \frac{h_a}{c} \implies h_a = c \cdot \text{sen } \theta$ . Assim,

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}a \cdot h_a = \frac{1}{2}a \cdot c \cdot \text{sen } \theta \implies S_{ABC} = \frac{1}{2}a \cdot c \cdot \text{sen } \theta \quad \square$$

**Corolário 2.2:** Sejam  $ABC$  e  $A'BC$  triângulos tais que  $\overleftrightarrow{AA'} \parallel \overleftrightarrow{BC}$ . Então,  $S_{ABC} = S_{A'BC}$ .

**Demonstração:** Sendo  $d$  a distância entre as retas  $\overleftrightarrow{AA'}$  e  $\overleftrightarrow{BC}$ , então  $d$  é o comprimento das alturas de  $ABC$  e  $A'BC$ , relativas ao lado  $\overline{BC}$ , com  $l(\overline{BC}) = a$ .

Portanto,  $S_{ABC} = \frac{1}{2}a \cdot d = S_{A'BC}$ . □

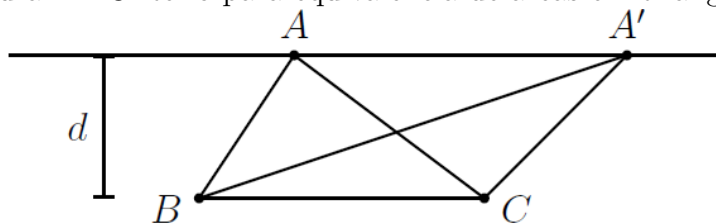
**Proposição 2.10:** Se um triângulo  $ABC$ , com perímetro fixo  $2p$  e lados  $a$ ,  $b$  e  $c$ , então a área desse triângulo é:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Esta é a conhecida *Fórmula de Herón* para a área de triângulos.

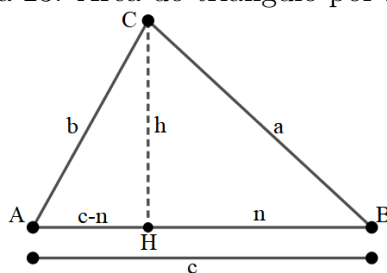
**Demonstração:** Consideremos o triângulo a seguir, de base  $\overline{AB}$ .

Figura 22: Critério para equivalência de áreas em triângulos.



Fonte: [11].

Figura 23: Área do triângulo por Herón.



Fonte: [14].

Vamos determinar sua área em função da base, com  $l(\overline{AB}) = c$  e altura  $h$ . Segue que, no triângulo  $AHC$ , pelo *Teorema de Pitágoras*,  $b^2 = (c-n)^2 + h^2$ . No triângulo  $BCH$ ,  $a^2 = n^2 + h^2$ . Assim,

$$b^2 - a^2 = (c-n)^2 + h^2 - (n^2 + h^2) = c^2 - 2cn \implies 2cn = c^2 + a^2 - b^2.$$

Segue que,  $n = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2c}$ . Como  $a^2 = n^2 + h^2$ , temos

$$a^2 = \left( \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2c} \right)^2 + h^2 \iff h^2 = a^2 - \left( \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2c} \right)^2 = \frac{4a^2c^2 - (c^2 + a^2 - b^2)^2}{4c^2}.$$

Logo,

$$h = \frac{\sqrt{4a^2c^2 - (c^2 + a^2 - b^2)^2}}{2c}.$$

Assim, a área do triângulo será:

$$S_{ABC} = \frac{ch}{2} = \frac{c}{2} \left( \frac{\sqrt{4a^2c^2 - (c^2 + a^2 - b^2)^2}}{2c} \right) = \frac{\sqrt{4a^2c^2 - (c^2 + a^2 - b^2)^2}}{4} \implies$$

$$S_{ABC} = \frac{\sqrt{(2ac)^2 - (c^2 + a^2 - b^2)^2}}{4} = \frac{\sqrt{(2ac + c^2 + a^2 - b^2)(2ac - (c^2 + a^2 - b^2))}}{4} \implies$$

$$S_{ABC} = \frac{\sqrt{((a+c)^2 - b^2)(b^2 - (a-c)^2)}}{4} = \frac{\sqrt{(a+b+c)(a+c-b)(b+a-c)(b+c-a)}}{4} \implies$$

$$S_{ABC} = \sqrt{\frac{(a+b+c)}{2} \frac{(a+c-b)}{2} \frac{(b+a-c)}{2} \frac{(b+c-a)}{2}}.$$

Como  $2p = a + b + c$ , segue que:

$$S_{ABC} = \sqrt{p(p-b)(p-c)(p-a)} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

□

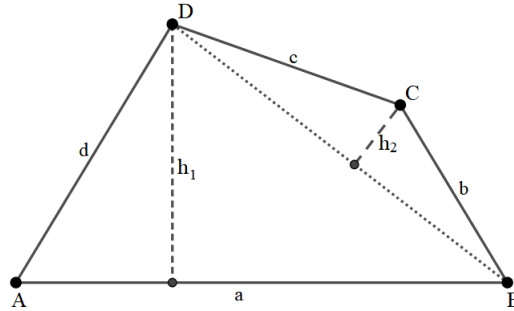


**Proposição 2.11:** Seja  $ABCD$  um quadrilátero, com  $l(\overline{AB}) = a$ ,  $l(\overline{BC}) = b$ ,  $l(\overline{CD}) = c$ ,  $l(\overline{DA}) = d$  e perímetro  $2p$ . Então sua área é dada por:

$$S_{ABCD} = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d) - \frac{1}{2}abcd(1 + \cos(\hat{A} + \hat{C}))}.$$

**Demonstração:** Consideremos o quadrilátero a seguir:

Figura 24: Área do quadrilátero por extensão da fórmula de Herón.



Fonte: [14].

Pelo *Lema 2.1*, temos que:  $S_{ABCD} = S_{ABD} + S_{BCD} = \frac{1}{2}ad\text{sen } \hat{A} + \frac{1}{2}bc\text{sen } \hat{C}$ .

Elevando ao quadrado ambos os membros da igualdade,

$$S_{ABCD}^2 = \left( \frac{1}{2}ad\text{sen } \hat{A} + \frac{1}{2}bc\text{sen } \hat{C} \right)^2 = \frac{a^2d^2\text{sen}^2 \hat{A} + 2abcd\text{sen } \hat{A}\text{sen } \hat{C} + b^2c^2\text{sen}^2 \hat{C}}{4}.$$

Logo,  $4S_{ABCD}^2 = a^2d^2\text{sen}^2 \hat{A} + 2abcd\text{sen } \hat{A}\text{sen } \hat{C} + b^2c^2\text{sen}^2 \hat{C}$ .

Pela relação fundamental da trigonometria,  $\text{sen}^2 \hat{A} + \cos^2 \hat{A} = 1$  e  $\text{sen}^2 \hat{C} + \cos^2 \hat{C} = 1$ . Assim,

$$\begin{aligned} 4S_{ABCD}^2 &= a^2d^2(1 - \cos^2 \hat{A}) + 2abcd\text{sen } \hat{A}\text{sen } \hat{C} + b^2c^2(1 - \cos^2 \hat{C}) \\ 4S_{ABCD}^2 &= a^2d^2 + b^2c^2 + 2abcd\text{sen } \hat{A}\text{sen } \hat{C} - a^2d^2\cos^2 \hat{A} - b^2c^2\cos^2 \hat{C}. \end{aligned}$$

Mas, pelo cosseno da soma,  $\cos(\hat{A} + \hat{C}) = \cos \hat{A}\cos \hat{C} - \text{sen } \hat{A}\text{sen } \hat{C}$ , segue que:

$$\begin{aligned} 4S_{ABCD}^2 &= a^2d^2 + b^2c^2 + 2abcd(\cos \hat{A}\cos \hat{C} - \cos(\hat{A} + \hat{C})) - a^2d^2\cos^2 \hat{A} - b^2c^2\cos^2 \hat{C} \\ 4S_{ABCD}^2 &= a^2d^2 + b^2c^2 + 2abcd\cos \hat{A}\cos \hat{C} - 2abcd\cos(\hat{A} + \hat{C}) - a^2d^2\cos^2 \hat{A} - b^2c^2\cos^2 \hat{C} \\ 4S_{ABCD}^2 &= a^2d^2 + b^2c^2 - (ad\cos \hat{A} - bc\cos \hat{C})^2 - 2abcd\cos(\hat{A} + \hat{C}). \end{aligned}$$

Observe agora que, nos triângulos  $DAB$  e  $BCD$ , em relação ao lado  $\overline{BD}$ , temos que:

- 1)  $\overline{BD}^2 = a^2 + d^2 - 2ad\cos \hat{A}$ ;
- 2)  $\overline{BD}^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos \hat{C}$ .

Fazendo 1) = 2), obtemos:  $a^2 + d^2 - 2ad\cos \hat{A} = b^2 + c^2 - 2bc\cos \hat{C}$ . Assim,

$$ad\cos \hat{A} - bc\cos \hat{C} = \frac{a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{2}$$

Segue que:

$$\begin{aligned} 4S_{ABCD}^2 &= a^2d^2 + b^2c^2 - \frac{(a^2 + d^2 - b^2 - c^2)^2}{4} - 2abcd \cos(\hat{A} + \hat{C}) \\ 16S_{ABCD}^2 &= 4a^2d^2 + 4b^2c^2 - (a^2 + d^2 - b^2 - c^2)^2 - 8abcd \cos(\hat{A} + \hat{C}) \\ 16S_{ABCD}^2 &= (2ad)^2 + (2bc)^2 - (a^2 + d^2 - b^2 - c^2)^2 - 8abcd \cos(\hat{A} + \hat{C}). \end{aligned}$$

Note que,  $(2ad)^2 + (2bc)^2 + 2(2ad)(2bc) = (2ad + 2bc)^2$ . Assim,

$$(2ad)^2 + (2bc)^2 = (2ad + 2bc)^2 - 8abcd.$$

Segue que,

$$\begin{aligned} 16S_{ABCD}^2 &= (2ad + 2bc)^2 - 8abcd - (a^2 + d^2 - b^2 - c^2)^2 - 8abcd \cos(\hat{A} + \hat{C}) \\ 16S_{ABCD}^2 &= (2ad + 2bc)^2 - 8abcd(1 + \cos(\hat{A} + \hat{C})) - (a^2 + d^2 - b^2 - c^2)^2. \end{aligned}$$

Usando a noção de produto da soma pela diferença, obtemos:

$$\begin{aligned} (2ad + 2bc)^2 - (a^2 + d^2 - b^2 - c^2)^2 &= (2ad + 2bc + a^2 + d^2 - b^2 - c^2)(2ad + 2bc - a^2 - d^2 + b^2 + c^2) \\ (2ad + 2bc)^2 - (a^2 + d^2 - b^2 - c^2)^2 &= [(a + d)^2 - (b - c)^2][(b + c)^2 - (a - d)^2]. \end{aligned}$$

$$\text{Assim, } 16S_{ABCD}^2 = [(a + d)^2 - (b - c)^2][(b + c)^2 - (a - d)^2] - 8abcd(1 + \cos(\hat{A} + \hat{C})).$$

Perceba que

$$[(a + d)^2 - (b - c)^2][(b + c)^2 - (a - d)^2] = [(a + d + b - c)(a + d + c - b)][(b + c + a - d)(b + c + d - a)].$$

Logo,

$$16S_{ABCD}^2 = [(a + d + b - c)(a + d + c - d)][(b + c + a - d)(b + c + d - a)] - 8abcd(1 + \cos(\hat{A} + \hat{C})).$$

Como  $a + b + c + d = 2p$ , segue que:

- 1)  $b + c + d - a = 2p - 2a$ ;
- 2)  $a + c + d - b = 2p - 2b$ ;
- 3)  $a + b + d - c = 2p - 2c$ ;
- 4)  $a + b + c - d = 2p - 2d$ .

Assim:

$$\begin{aligned} 16S_{ABCD}^2 &= (2p - 2c)(2p - 2b)(2p - 2d)(2p - 2a) - 8abcd(1 + \cos(\hat{A} + \hat{C})) \iff \\ 16S_{ABCD}^2 &= 16(p - a)(p - b)(p - c)(p - d) - 8abcd(1 + \cos(\hat{A} + \hat{C})) \iff \\ S_{ABCD}^2 &= (p - a)(p - b)(p - c)(p - d) - \frac{1}{2}abcd(1 + \cos(\hat{A} + \hat{C})). \end{aligned}$$

$$\text{Portanto, } S_{ABCD} = \sqrt{(p - a)(p - b)(p - c)(p - d) - \frac{1}{2}abcd(1 + \cos(\hat{A} + \hat{C}))}. \quad \square$$

Na *Proposição 2.11*, note que quando  $d = 0$ ,  $2p = a + b + c$  e  $S = \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}$ , que corresponde a área do triângulo  $ABC$ .

## 2.4. A desigualdade triangular

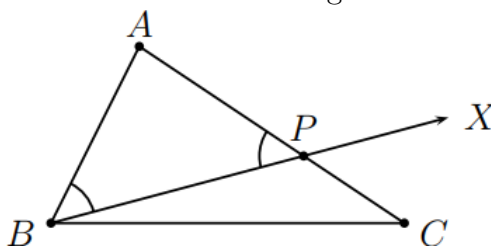
Iniciaremos esta subseção com um resultado de [11] que apresenta uma importante relação entre os comprimentos dos lados e as medidas dos ângulos de um triângulo.

**Proposição 2.12:** Seja  $ABC$  um triângulo.  $\widehat{ABC} > \widehat{ACB}$  se, e somente se,  $l(\overline{AC}) > l(\overline{AB})$ .

**Prova:**

( $\Rightarrow$ ) Consideremos  $\widehat{ABC} > \widehat{ACB}$  e mostremos que  $l(\overline{AC}) > l(\overline{AB})$ . Observe a figura a seguir.

Figura 25: Ordem dos lados e ângulos de um triângulo



Fonte: [11].

Tracemos a semirreta  $\overrightarrow{BX}$ , intersectando o interior de  $ABC$ , tal que  $\widehat{CBX} = \frac{1}{2}(\widehat{ABC} - \widehat{ACB})$ . Seja  $P$  o ponto de intersecção de  $\overrightarrow{BX}$  com o lado  $\overline{AC}$ . Aplicando o *Teorema do Ângulo Externo*, temos

$$\widehat{APB} = \widehat{CBP} + \widehat{BCP} = \frac{1}{2}(\widehat{ABC} - \widehat{ACB}) + \widehat{ACB} = \frac{1}{2}(\widehat{ABC} + \widehat{ACB}).$$

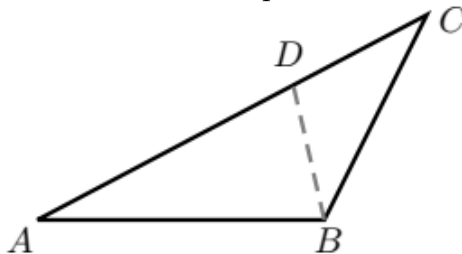
Observe que

$$\widehat{ABP} = \widehat{ABC} - \frac{1}{2}(\widehat{ABC} - \widehat{ACB}) = \frac{1}{2}(\widehat{ABC} + \widehat{ACB}).$$

Assim, o triângulo  $ABP$  é isósceles de base  $\overline{BP}$ . Logo,  $l(\overline{AB}) = l(\overline{AP}) < l(\overline{AC})$ .

( $\Leftarrow$ ) Suponhamos que  $l(\overline{AC}) > l(\overline{AB})$ . Mostremos que  $\widehat{ABC} > \widehat{ACB}$ . Consideremos um ponto  $D \in \overline{AC}$ , tal que  $l(\overline{AB}) = l(\overline{AD})$ .

Figura 26: Ao maior lado opõe-se o maior ângulo.



Fonte: [11].

Observe que  $\widehat{ABC} > \widehat{ABD}$ . Por construção, o triângulo  $ABD$  é isósceles. Assim,  $\widehat{ABD} \equiv \widehat{ADB}$ . Por outro lado, como o ângulo  $\widehat{ADB}$  é um ângulo externo do triângulo  $BCD$ , temos que  $\widehat{ADB} > \widehat{BCD} \equiv \widehat{ACB}$ . Assim,  $\widehat{ABC} > \widehat{ABD} \equiv \widehat{ADB} > \widehat{BCD} \equiv \widehat{ACB}$ .

□

Ressaltaremos aqui um exercício tirado de [11]:

**Exemplo 1:** Em um país, certo dia, um avião partiu de cada cidade com destino à cidade mais próxima. Se as distâncias entre as cidades são duas a duas distintas, prove que em nenhuma cidade aterrissaram mais de cinco aviões.

**Solução:** Seja “A” uma cidade qualquer desse país.

**Afirmção 2.1:** Se em “A” aterrissaram aviões partindo de outras duas cidades “B” e “C”, então, considerando o triângulo  $ABC$ , teremos  $B\hat{A}C > 60^\circ$ .

De fato, se  $B\hat{A}C \leq 60^\circ$ , então, uma vez que a soma dos ângulos de todo triângulo é  $180^\circ$ , concluímos que pelo menos um dos outros dois ângulos internos do triângulo  $ABC$  seria maior do que  $60^\circ$ . Desse modo, pela *Proposição 2.12*, uma das duas possibilidades a seguir ocorreria:

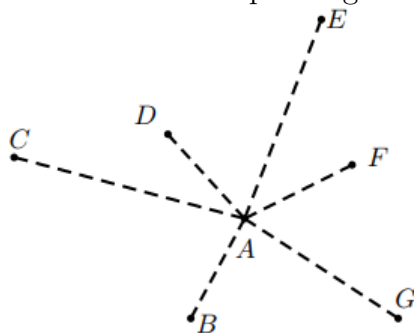
(i)  $l(\overline{BC}) < l(\overline{AB})$  (caso  $A\hat{C}B > 60^\circ \geq B\hat{A}C$ );

(ii)  $l(\overline{BC}) < l(\overline{AC})$  (caso  $A\hat{B}C > 60^\circ \geq B\hat{A}C$ ).

Entretanto, uma qualquer das possibilidades acima contradiria o fato de  $A$  ser a cidade mais próxima de  $B$  e de  $C$ , de sorte que deve ser  $B\hat{A}C > 60^\circ$ .

Agora, suponha que chegassem seis aviões em  $A$ , com origens nas cidades  $B, C, D, E, F$  e  $G$ . Observe a ilustração:

Figura 27: Os aviões que chegam em  $A$ .



Fonte: [11].

Então, por um lado teríamos:  $360^\circ = B\hat{A}C + C\hat{A}D + D\hat{A}E + E\hat{A}F + F\hat{A}G + G\hat{A}B$ , de sorte que pelo menos um desses seis ângulos seria menor ou igual a  $60^\circ$ . Por outro lado, a *Afirmção 2.1*, demonstrada inicialmente, fornece uma contradição, uma vez que garante que cada um desses seis ângulos deve ser maior que  $60^\circ$ . □

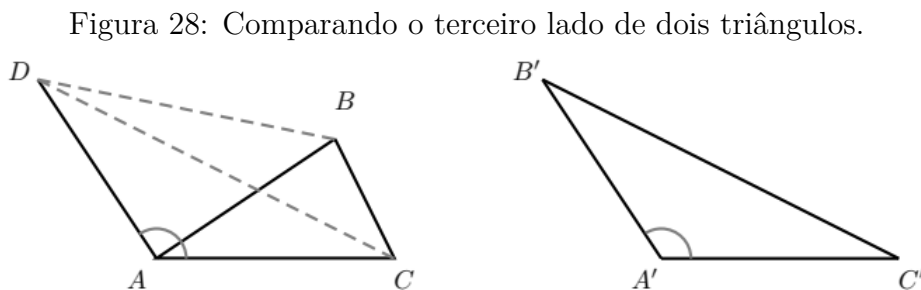
Como conseqüências da *Proposição 2.12*, seguem os seguintes Corolários:

**Corolário 2.3:** Se  $ABC$  é um triângulo tal que  $\widehat{BAC} \geq 90^\circ$ , então  $\overline{BC}$  é o seu maior lado. Em particular, num triângulo retângulo a hipotenusa é o maior lado.

**Prova:** Como  $\widehat{BAC} \geq 90^\circ$  e  $\widehat{BAC} + \widehat{ABC} + \widehat{ACB} = 180^\circ$ , temos  $\widehat{BAC} \geq 90^\circ > \widehat{ABC}$  e  $\widehat{BAC} \geq 90^\circ > \widehat{ACB}$ . Assim, pela *Proposição 2.12*, segue que  $l(\overline{BC}) > l(\overline{AC})$  e  $l(\overline{BC}) > l(\overline{AB})$ .  $\square$

**Corolário 2.4:** Sejam  $ABC$  e  $A'B'C'$  dois triângulos tais que  $l(\overline{AB}) = l(\overline{A'B'})$  e  $l(\overline{AC}) = l(\overline{A'C'})$ . Se  $\widehat{BAC} < \widehat{B'A'C'}$ , então  $l(\overline{BC}) < l(\overline{B'C'})$ .

**Prova:** Sejam  $\alpha$  o semiplano determinado por  $\overleftrightarrow{AC}$  e que contém o ponto  $B$ , e  $D$  o ponto de  $\alpha$  tal que  $l(\overline{AD}) = l(\overline{AB})$  e  $\widehat{DAC} \equiv \widehat{B'A'C'}$ .



Fonte: [11].

Observe que os triângulos  $DAC$  e  $B'A'C'$  são congruentes (pelo caso LAL). Daí, obtemos  $l(\overline{DC}) = l(\overline{B'C'})$ .

Mostremos agora que  $l(\overline{DC}) > l(\overline{BC})$ . Pela *Proposição 1.12*, é suficiente mostrar que  $\widehat{CBD} > \widehat{CDB}$ . Como o triângulo  $ABD$  é isósceles de base  $\overline{BD}$ , tem-se que  $\widehat{CBD} > \widehat{ABD} \equiv \widehat{ADB} > \widehat{CDB}$ .  $\square$

Após esta abordagem, estamos preparados para demonstrar o *Teorema da Desigualdade Triangular*.

**Teorema 2.1:** Em todo triângulo, cada um dos lados tem comprimento menor do que a soma dos comprimentos dos outros dois lados.

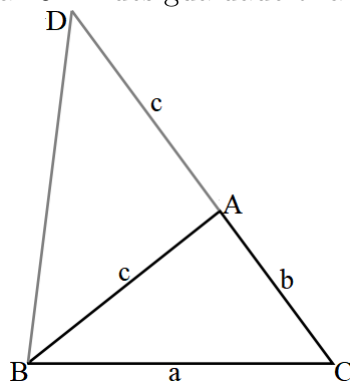
**Prova:** Seja  $ABC$  um triângulo com  $l(\overline{AB}) = c$ ,  $l(\overline{AC}) = b$  e  $l(\overline{BC}) = a$ . Suponhamos, sem perda de generalidade, que  $\overline{BC}$  é o maior dos lados do triângulo, de modo que  $a \geq b$  e  $a \geq c$ . Imediatamente, temos que  $b < a + c$  e  $c < a + b$ .

Consideremos a figura a seguir:

Mostremos que  $a < b + c$ . Marquemos o ponto  $D$  sobre a semirreta oposta à semirreta  $\overline{AC}$  tal que  $l(\overline{AD}) = l(\overline{AB}) = c$ . Logo,

$$l(\overline{CD}) = l(\overline{AC}) + l(\overline{AD}) = b + c.$$

Figura 29: A desigualdade triangular.



Fonte: [11].

Note que o triângulo  $ABD$  é isósceles. Assim,  $\widehat{ADB} \equiv \widehat{ABD}$  e, portanto,  $\widehat{CDB} \equiv \widehat{ADB} \equiv \widehat{ABD} < \widehat{ABD} + \widehat{ABC} \equiv \widehat{DBC}$ . Pela *Proposição 2.12*, no triângulo  $BCD$ , temos que  $a < b + c$ .

A desigualdade triangular fornece uma condição necessária e suficiente para a colinearidade de três pontos no plano. Mais precisamente, três pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$  no plano são colineares se, e somente se, uma das três opções abaixo é satisfeita:

- (a)  $l(\overline{AC}) = l(\overline{AB}) + l(\overline{BC})$ ;
- (b)  $l(\overline{AB}) = l(\overline{AC}) + l(\overline{CB})$ ;
- (c)  $l(\overline{BC}) = l(\overline{BA}) + l(\overline{AC})$ .

Observe que quando três pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$  no plano são colineares, ocorre uma, e somente uma das três opções acima, dependendo de qual dos três pontos dados esteja situado entre os outros dois.

Reciprocamente, se  $A$ ,  $B$  e  $C$  não são colineares, então eles formam um triângulo e, neste caso, a desigualdade triangular nos diz que

- (d)  $l(\overline{AC}) < l(\overline{AB}) + l(\overline{BC})$ ;
- (e)  $l(\overline{AB}) < l(\overline{AC}) + l(\overline{CB})$ ;
- (f)  $l(\overline{BC}) < l(\overline{BA}) + l(\overline{AC})$ .

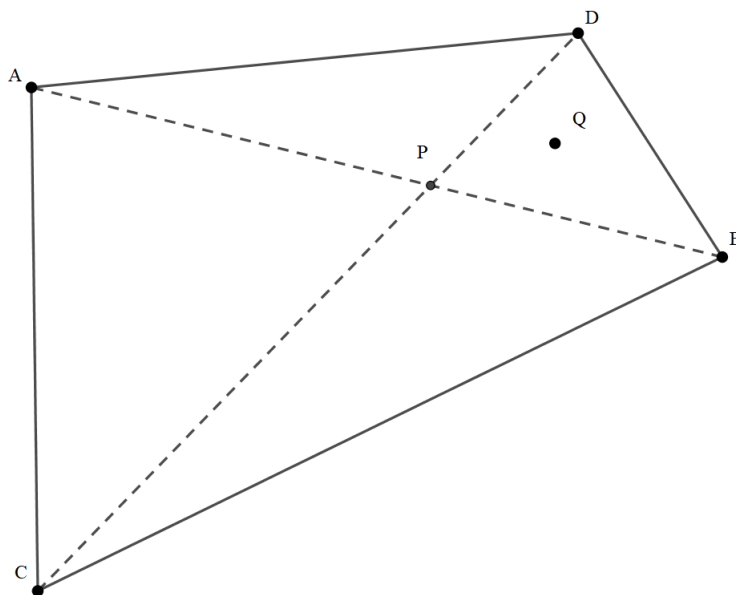
### 3. ALGUNS PROBLEMAS GEOMÉTRICOS

Nesta seção, propomos uma sequência de três exercícios, a fim de aplicar os conceitos vistos na seção anterior. Trabalharemos situações retiradas de [2], [3] e [11].

**Exercício 3.1:** Dado um quadrilátero convexo  $ACBD$ , prove que o ponto  $P$  do plano para o qual a soma  $l(\overline{PA}) + l(\overline{PB}) + l(\overline{PC}) + l(\overline{PD})$  é mínima é o ponto de interseção das diagonais.

**Solução:**

Figura 30: Solução para o exercício 3.1



Fonte: o autor (2019).

Pela desigualdade triangular em  $PAD$  e  $PCB$ , temos que:

$$1) \ l(\overline{AC}) < l(\overline{PA}) + l(\overline{PC});$$

$$2) \ l(\overline{BD}) < l(\overline{PB}) + l(\overline{PD}).$$

Assim,  $l(\overline{AC}) + l(\overline{BD}) < l(\overline{PA}) + l(\overline{PB}) + l(\overline{PC}) + l(\overline{PD})$ .

Suponhamos um ponto  $Q$  no interior de  $ABCD$  tal que  $Q \notin \overline{AB}$  e  $Q \notin \overline{CD}$ . Segue que,

$$3) \ l(\overline{AB}) < l(\overline{QA}) + l(\overline{QB});$$

$$4) \ l(\overline{CD}) < l(\overline{QC}) + l(\overline{QD}).$$

Assim,

$$l(\overline{AB}) + l(\overline{CD}) < l(\overline{QA}) + l(\overline{QB}) + l(\overline{QC}) + l(\overline{QD}) \implies$$

$$l(\overline{PA}) + l(\overline{PB}) + l(\overline{PC}) + l(\overline{PD}) < l(\overline{QA}) + l(\overline{QB}) + l(\overline{QC}) + l(\overline{QD}).$$

Por outro lado, suponhamos, sem perda de generalidade, que  $Q \in \overline{AB}$  e  $Q \notin \overline{CD}$ . Segue que

$$5) \quad l(\overline{CD}) < l(\overline{QC}) + l(\overline{QD});$$

$$6) \quad l(\overline{AB}) < l(\overline{QA}) + l(\overline{QD}).$$

Assim,

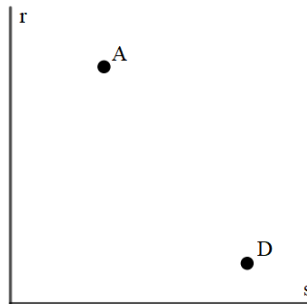
$$\begin{aligned} l(\overline{AB}) + l(\overline{CD}) < l(\overline{QA}) + l(\overline{QB}) + l(\overline{QC}) + l(\overline{QD}) &\implies \\ l(\overline{PA}) + l(\overline{PB}) + l(\overline{PC}) + l(\overline{PD}) < l(\overline{QA}) + l(\overline{QB}) + l(\overline{QC}) + l(\overline{QD}). \end{aligned}$$

Suponhamos agora, sem perda de generalidade,  $Q \in \overline{AB}$  e  $Q \notin \overline{CD}$ . Segue que,  $l(\overline{CD}) < l(\overline{QC}) + l(\overline{QD})$ . Somando  $l(\overline{PA}) + l(\overline{PB}) = l(\overline{QA}) + l(\overline{QB})$  em ambos os membros, obtemos

$$\begin{aligned} l(\overline{PA}) + l(\overline{PB}) + l(\overline{PC}) + l(\overline{PD}) < l(\overline{PA}) + l(\overline{PB}) + l(\overline{QC}) + l(\overline{QD}) &\implies \\ l(\overline{PA}) + l(\overline{PB}) + l(\overline{PC}) + l(\overline{PD}) < l(\overline{QA}) + l(\overline{QB}) + l(\overline{QC}) + l(\overline{QD}). \end{aligned} \quad \square$$

**Exercício 3.2:** Na figura abaixo, as semirretas  $r$  e  $s$  são perpendiculares. Construa com régua e compasso os pontos  $B \in r$  e  $C \in s$  para os quais a soma  $l(\overline{AB}) + l(\overline{BC}) + l(\overline{CD})$  seja a menor possível.

Figura 31: Retas perpendiculares com pontos não pertencentes a elas, respectivamente.



Fonte: [11].

**Solução:** Inicialmente consideremos os simétricos de  $A'$  e  $D'$  de  $A$  e  $D$  em relação às retas  $r$  e  $s$  respectivamente. Tracemos o segmento  $\overline{A'D'}$  e marquemos os  $B$  e  $C$  os respectivos pontos de interseção com  $r$  e  $s$ .

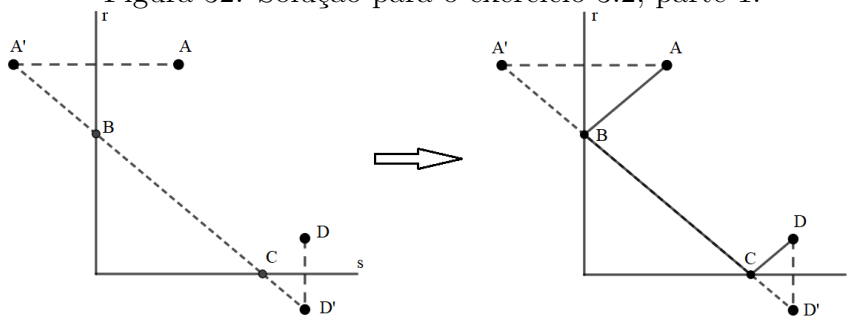
Vamos provar que  $l(\overline{AB}) + l(\overline{BC}) + l(\overline{CD})$  é mínimo. Observe inicialmente que, pela desigualdade triangular em  $A'AD'$ ,  $l(\overline{AB}) + l(\overline{BC}) + l(\overline{CD}) = l(\overline{A'B}) + l(\overline{BC}) + l(\overline{CD'}) < l(\overline{AA'}) + l(\overline{AD'})$ .

Suponhamos dois pontos arbitrários  $P$  e  $Q$ , como mostra a figura abaixo.

$$1) \quad \text{No triângulo } A'CP, \quad l(\overline{A'B}) + l(\overline{BC}) = l(\overline{AB}) + l(\overline{BC}) < l(\overline{A'P}) + l(\overline{PC});$$

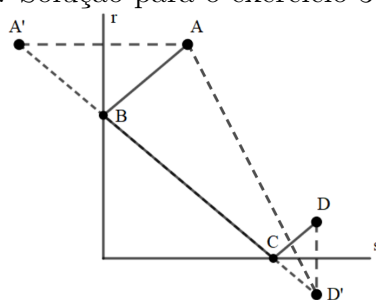


Figura 32: Solução para o exercício 3.2, parte 1.



Fonte: o autor (2019).

Figura 33: Solução para o exercício 3.2, parte 2.



Fonte: o autor (2019).

2) No triângulo  $D'BQ$ ,  $l(\overline{D'C}) + l(\overline{CB}) = l(\overline{DC}) + l(\overline{CB}) < l(\overline{D'Q}) + l(\overline{QB})$ ;

Juntando 1) e 2) obtemos:  $l(\overline{AB}) + l(\overline{BC}) + l(\overline{DC}) + l(\overline{CB}) < l(\overline{A'P}) + l(\overline{PC}) + l(\overline{D'Q}) + l(\overline{QB})$ .

Há três casos a serem analisados:

i)  $P = B$  e  $C \neq Q$ .

Segue que

$$l(\overline{AB}) + l(\overline{BC}) + l(\overline{DC}) + l(\overline{CB}) < l(\overline{A'P}) + l(\overline{BC}) + l(\overline{D'Q}) + l(\overline{QB}) \iff l(\overline{AB}) + l(\overline{BC}) + l(\overline{DC}) < l(\overline{A'P}) + l(\overline{D'Q}) + l(\overline{QB}) = l(\overline{AP}) + l(\overline{DQ}) + l(\overline{PQ}) = l(\overline{AP}) + l(\overline{PQ}) + l(\overline{QD}) \implies l(\overline{AB}) + l(\overline{BC}) + l(\overline{DC}) < l(\overline{AP}) + l(\overline{PQ}) + l(\overline{QD}).$$

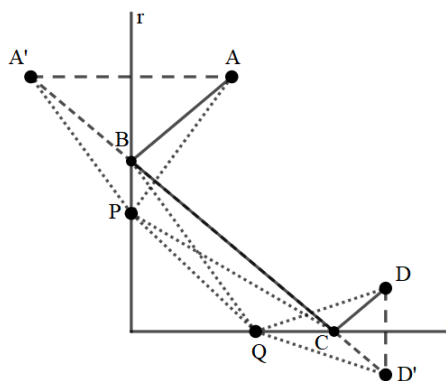
ii)  $P \neq B$  e  $C = Q$ .

Segue que

$$l(\overline{AB}) + l(\overline{BC}) + l(\overline{DC}) + l(\overline{CB}) < l(\overline{A'P}) + l(\overline{PC}) + l(\overline{D'Q}) + l(\overline{QB}) \iff l(\overline{AB}) + l(\overline{BC}) + l(\overline{DC}) < l(\overline{A'P}) + l(\overline{PC}) + l(\overline{D'Q}) = l(\overline{AP}) + l(\overline{PC}) + l(\overline{CD'}) = l(\overline{AP}) + l(\overline{PC}) + l(\overline{CD}) \implies l(\overline{AB}) + l(\overline{BC}) + l(\overline{DC}) < l(\overline{AP}) + l(\overline{PC}) + l(\overline{CD}).$$

iii)  $P \neq B$  e  $Q \neq C$ .

Figura 34: Solução para o exercício 3.2, parte 3.



Fonte: o autor (2019).

Suponhamos, sem perda de generalidade, e para outras situações segue de modo análogo, que tal como se encontra a figura acima. Segue que  $l(\overline{AB}) + l(\overline{BC}) + l(\overline{CD}) = l(\overline{A'B}) + l(\overline{BC}) + l(\overline{CD'}) < l(\overline{A'P}) + l(\overline{PQ}) + l(\overline{QD'}) = l(\overline{AP}) + l(\overline{PQ}) + l(\overline{QD})$ .

Logo, a solução é única. □

**Exercício 3.3:** "O problema de Fermat-Steiner": Dados três pontos não colineares localizados num plano, determine um ponto desse mesmo plano de modo que a soma das distâncias aos três pontos dados seja a menor possível.

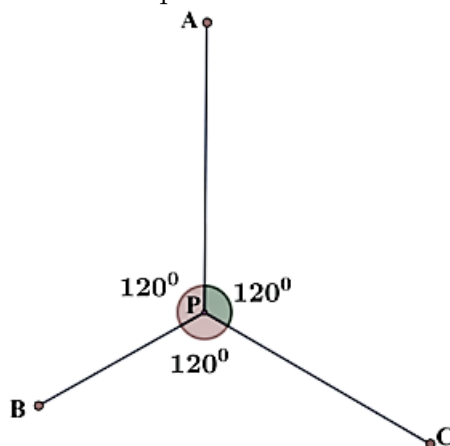
De acordo com [2], o problema foi proposto pela primeira vez pelo matemático francês Pierre Fermat (1601-1665). A generalização desse problema para  $n$  pontos ( $n > 2$ ), não necessariamente localizados num mesmo plano foi apresentada pelo matemático suíço Jakob Steiner (1796-1863). Antes disso, o matemático italiano Evangelista Torricelli (1608-1647) apresentou uma solução geométrica para encontrar um ponto que soluciona o problema de Fermat em duas dimensões.

A solução apresentada por Torricelli é a seguinte: se no triângulo  $ABC$  todos os ângulos são menores do que  $120^\circ$ , então  $P$  é o ponto a partir do qual cada um dos três lados  $\overline{AB}$ ,  $\overline{AC}$  e  $\overline{BC}$ , tomados dois a dois, subentendem um ângulo de  $120^\circ$ . Caso um ângulo de  $ABC$ , por exemplo, o ângulo em  $C$ , for igual ou maior do que  $120^\circ$ , então o ponto  $P$  coincidirá com o vértice  $C$ . A Figura a seguir ilustra esta solução.

Torricelli chegou nessa solução como consequência do conhecido problema de Heron. O matemático grego Heron de Alexandria, que viveu entre 150 a.C. e 250 d.C., mostrou, empregando um argumento geométrico simples, que se a luz deve ir de uma fonte  $S$  a um espelho  $MM'$  e, então, ao olho  $E$  de um observador, ela deve seguir o caminho mais curto possível  $SPE$  que é aquele em que os ângulos  $\widehat{SPM}$  e  $\widehat{EPM'}$  são iguais.

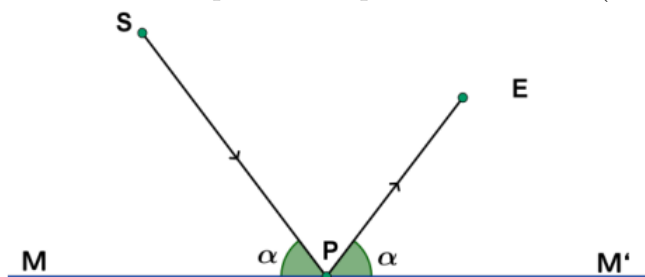
Apresentaremos duas soluções para o problema de Fermat como consequência do problema de Heron.

Figura 35: Conexão do ponto mínimo de Fermat-Steiner.



Fonte: [2].

Figura 36: Caminho mais curto para a luz para ir de  $S$  a  $E$  (Problema de Heron).



Fonte: [2].

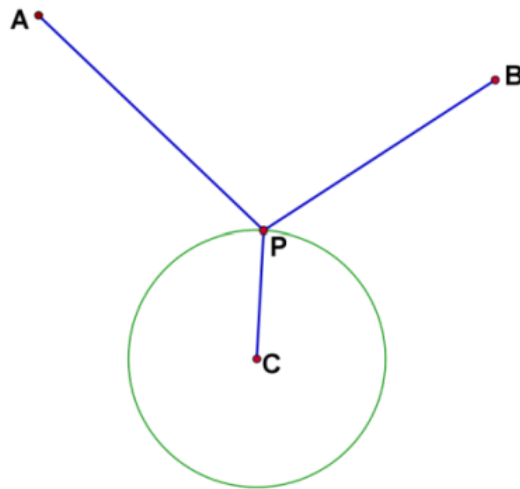
**Solução 1:** De fato, sejam  $A$ ,  $B$ , e  $C$  pontos contidos num mesmo plano. Suponhamos que  $P$  seja o ponto mínimo procurado. Construimos um círculo com centro em  $C$  e raio igual à distância  $\overline{PC}$ .

Observe que  $P$  deve ser o ponto tal que  $l(\overline{PA}) + l(\overline{PB})$  seja mínimo. Se  $A$  e  $B$  estão fora do círculo, como mostra a figura acima, então, segue do problema de Heron que  $\overline{PA}$  e  $\overline{PB}$  devem formar ângulos iguais com o círculo centrado em  $C$ . De modo inteiramente análogo, concluímos que, supondo que a soma  $l(\overline{PB}) + l(\overline{PC})$  seja mínima, então  $\overline{PB}$  e  $\overline{PC}$  devem formar ângulos iguais com o círculo centrado em  $A$  e raio  $\overline{AP}$ , desde que estejam ambos fora desse círculo.

Portanto, supondo que a soma  $l(\overline{PA}) + l(\overline{PB}) + l(\overline{PC})$  seja mínima, resulta em que os ângulos formados pelos segmentos  $\overline{PA}$ ,  $\overline{PB}$  e  $\overline{PC}$ , tomados dois a dois, são iguais entre si, e consequentemente iguais a  $120^\circ$ .  $\square$

O raciocínio utilizado nessa demonstração baseou-se na hipótese de que  $A$  e  $B$  estão ambos fora do círculo centrado em  $C$  e que  $B$  e  $C$  estão ambos fora do círculo centrado em  $A$ . É fácil demonstrar que isso sempre ocorrerá desde que todos os ângulos do triângulo  $ABC$  sejam todos menores do que  $120^\circ$ . No caso particular em que algum dos ângulos de  $ABC$  seja maior do que ou igual a  $120^\circ$ ,  $P$  deve coincidir com o vértice de maior ângulo, pois a soma dos dois

Figura 37: Poligonal  $APB$  tangente ao círculo em  $P$ .



Fonte: [2].

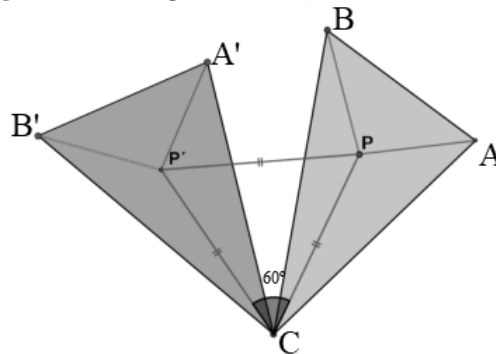
lados que formam o maior ângulo de  $ABC$  é menor do que qualquer outra soma de dois lados desse triângulo.  $\square$

O questionamento feito no parágrafo anterior discorre um resultado importante para o entendimento deste problema: *O Teorema de Heinen - 1834* (Para maiores informações, vide [3] pag. 13 a 18).

**Solução 2:** Vamos provar que, se os ângulos formados entre segmentos  $\overline{AP}$ ,  $\overline{BP}$  e  $\overline{CP}$ , tomados dois a dois, medem  $120^\circ$ , então a soma  $l(\overline{PA}) + l(\overline{PB}) + l(\overline{PC})$  é mínima.

De fato, seja um ponto qualquer localizado no interior do triângulo  $ABC$ . Girando esse triângulo em torno do vértice  $C$ , no sentido anti-horário, em  $60^\circ$ , obtemos o triângulo  $A'B'C'$ , em cujo interior localiza-se o ponto  $P'$ , imagem de  $P$ , como mostra a figura a seguir:

Figura 38: Rotação do triângulo  $ABC$ , obtendo-se o triângulo  $A'B'C'$ .



Fonte: [2].

**Afirmção 3.1:** O triângulo  $CPP'$  é equilátero.

De fato, como  $l(\overline{CP}) = l(\overline{CP'})$ , segue que o triângulo  $CPP'$  é isósceles e, desse fato,

resulta que seus ângulos da base  $PP'$ , têm mesma medida, ou seja,  $\widehat{C\hat{P}P'} \equiv \widehat{C\hat{P}'P}$ . Mas  $\widehat{P\hat{C}P'} = 60^\circ$ . Assim, obtemos que  $\widehat{C\hat{P}P'} \equiv \widehat{C\hat{P}'P} = 60^\circ$ . Portanto, o triângulo  $CPP'$  é equilátero.

Segue, assim, que  $l(\overline{PA}) + l(\overline{PB}) + l(\overline{PC}) = l(\overline{PA}) + l(\overline{P'P}) + l(\overline{P'B'})$ . Mas, observe que a soma  $l(\overline{PA}) + l(\overline{P'P}) + l(\overline{P'B'})$  é minimizada quando os pontos  $A, P, P'$  e  $B'$  estão todos contidos numa mesma reta. Supondo que os pontos  $A, P$  e  $P'$  estejam contidos numa mesma reta, e utilizando o fato de que  $\widehat{C\hat{P}P'} = 60^\circ$ , concluímos que  $\widehat{A\hat{P}C} = 120^\circ$ . De modo análogo, supondo que os pontos  $P, P'$  e  $B'$  estejam contidos numa mesma reta, e utilizando o resultado de que  $\widehat{C\hat{P}'P} = 60^\circ$ , concluímos que  $\widehat{B'\hat{P}'C} = 120^\circ$ . Portanto, o ponto  $P$  que minimiza a soma  $l(\overline{PA}) + l(\overline{PB}) + l(\overline{PC})$  é tal que os ângulos formados entre  $\overline{PA}, \overline{PB}$  e  $\overline{PC}$ , tomados dois a dois, medem cada um  $120^\circ$ .  $\square$

## 4. MAXIMIZANDO A ÁREA E MINIMIZANDO O PERÍMETRO

Neste capítulo, caracterizaremos a maximização de áreas com minimização de perímetros. Para isso, usaremos resultados anteriormente demonstrados, bem como provados a partir deste ponto. Assim, resolveremos os cinco problemas que caracterizam tal situação.

### 4.1. Uma abordagem sobre triângulos

Nesta subseção, estamos determinados a encontrar respostas para dois problemas:

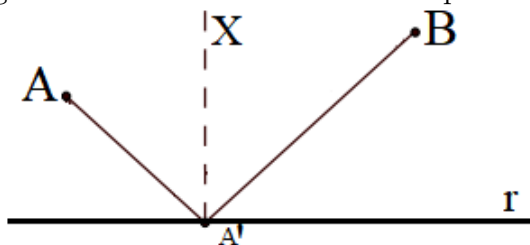
**Problema 1:** Dentre todos os triângulos de mesma área, qual é o de menor perímetro?

**Problema 2:** Dentre todos os triângulos de mesmo perímetro, qual é o de maior área?

Para tais questões, desenvolveremos alguns resultados de acordo com [6].

**Proposição 4.1:** Sejam  $A$  e  $B$  dois pontos localizados no mesmo semiplano determinado por uma reta  $r$ . Então, o caminho de menor comprimento que liga os pontos  $A$  e  $B$ , que passa pela reta  $r$ , é constituído pelos segmentos de reta  $\overline{AA'}$  e  $\overline{A'B}$ , com  $A' \in r$ , de tal forma que os ângulos  $\widehat{AA'X}$  e  $\widehat{XA'B}$  sejam congruentes.

Figura 39: Caminho de menor comprimento.



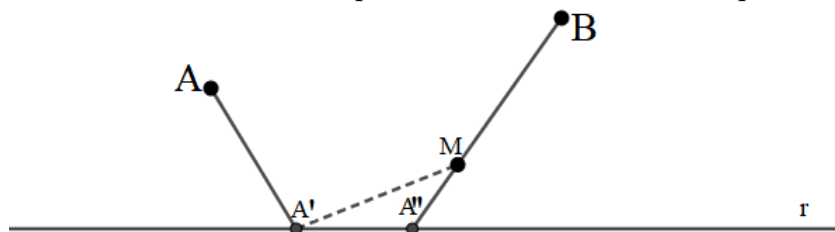
Fonte: [6].

**Prova:** A princípio, perceba que o caminho de menor comprimento ligando dois pontos é o segmento de reta com extremidades nesses pontos. Chamaremos este caminho de delta ( $\delta$ ).

**Afirmção 4.1:** O caminho  $\delta$ , de menor comprimento, intersecta a reta  $r$  em um único ponto.

Admitindo, por absurdo, que o caminho  $\delta$  toque a reta  $r$  em dois pontos,  $A'$  e  $A''$ . Seja  $M$  um ponto de  $\delta$  não pertencente à reta  $r$ , de tal forma que, ao percorrer o caminho de  $A'$  para  $M$ , necessariamente passa-se por  $A''$ .

Figura 40: Caminho de menor comprimento tocando a reta  $r$  apenas num ponto.



Fonte: [6].

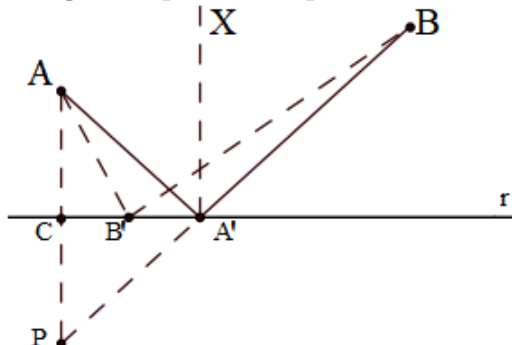
Logo, o caminho  $\delta'$ , obtido a partir de  $\delta$ , substituindo o segmento  $\overline{A'A''}$  por  $\overline{A'M}$ , tem um comprimento menor do que o comprimento do caminho  $\delta$  pois, pela desigualdade triangular,  $l(\overline{A'M}) < l(\overline{A'A''}) + l(\overline{A''M})$ .

**Afirmção 4.2:** O caminho  $\delta$  é constituído por dois segmentos de reta.

Com efeito, se  $A'$  é o ponto onde o caminho  $\delta$  intersecta a reta  $r$ , obrigatoriamente, o segmento de reta  $\overline{AA'}$ , contido em  $\delta$ , é um segmento de reta.

**Afirmção 4.3:** Determina-se o ponto  $A'$  a partir da interseção da reta  $r$  com o segmento  $\overline{PB}$ , onde  $P$  é o simétrico a  $A$  em relação a  $r$ .

Figura 41: Determinação do ponto tal que se tenha menor comprimento.



Fonte: [6].

Suponhamos por absurdo que o ponto de interceção entre o caminho  $\delta$  e a reta  $r$  seja um ponto  $B$  distinto de  $A'$ . Note que, usando a desigualdade triangular, teríamos um caminho de maior comprimento que aquela tocando em  $A'$ , pois

1. Os triângulos  $ACB$  e  $PCB$  são congruentes, pelo caso de congruência  $LAL$ ;
2. Os segmentos  $\overline{AB}$  e  $\overline{PB}$  são congruentes, já que os triângulos  $ACB$  e  $PCB$  também são;
3. Os segmentos  $\overline{AA'}$  e  $\overline{PA'}$  são congruentes, já que os triângulos  $ACA'$  e  $PCA'$  também são

Logo, no triângulo  $PB'B$ , tem-se  $l(\overline{PA'}) + l(\overline{A'B}) < l(\overline{PB'}) + l(\overline{B'B})$ .

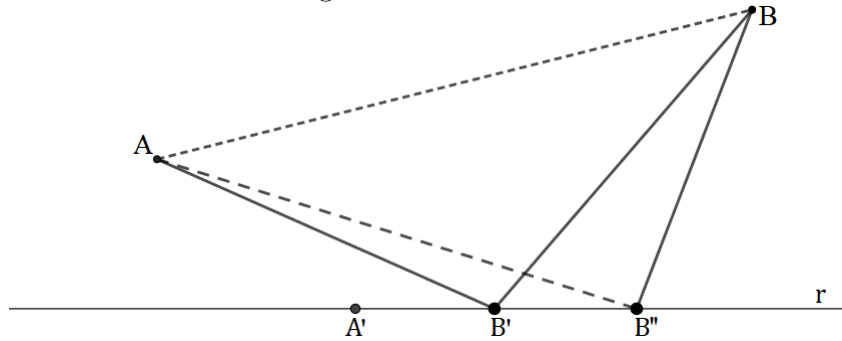
Como  $l(\overline{PA'}) = l(\overline{AA'})$  e  $l(\overline{PB'}) = l(\overline{AB'})$ , segue que

$$l(\overline{AA'}) + l(\overline{A'B}) < l(\overline{AB'}) + l(\overline{A'B}).$$

**Lema 4.1:** Seja  $A'$  a solução apresentada na *Proposição 4.1*. Se  $B'$  e  $B''$  são pontos sobre a reta  $r$  tais que,  $A'$ ,  $B'$  e  $B''$  são dois a dois distintos (isto é,  $A' \neq B' \neq B''$ ) e  $B'$  esteja entre  $A'$  e  $B''$ , então

$$l(\overline{AB'}) + l(\overline{B'B}) < l(\overline{AB''}) + l(\overline{B''B}).$$

Figura 42: Lema 4.1



Fonte: [6].

**Demonstração:** Consideremos o ponto  $P$  como sendo o simétrico do ponto  $A$  em relação a reta  $r$ .

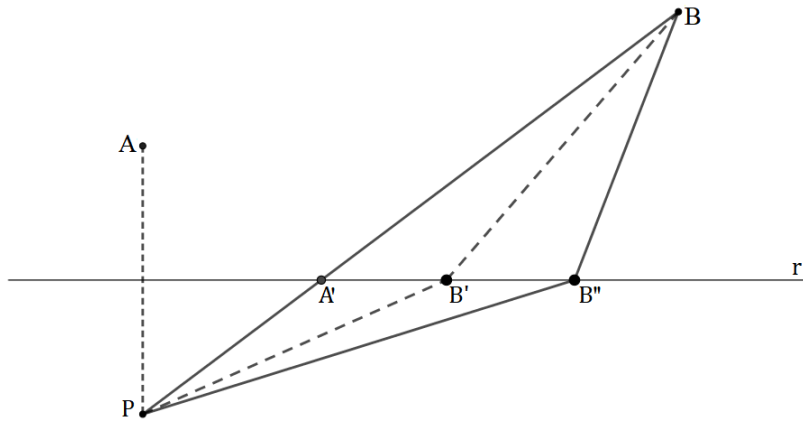


Figura 43: Lema 4.1 com o simétrico do ponto  $A$ .

Fonte: [6].

Provaremos que  $l(\overline{P'B'}) + l(\overline{B'B}) < l(\overline{P'B}) + l(\overline{B'B})$ .

Note que  $B'$  é um ponto pertencente ao interior do triângulo  $PBB''$ . Nesse sentido, e para finalizar a argumentação deste Lema, precisaremos do seguinte resultado:

**Afirmção 4.4:** Se  $D$  é um ponto do triângulo  $ABC$ , com  $D \neq A$ ,  $D \neq B$  e  $D \neq C$ , então,

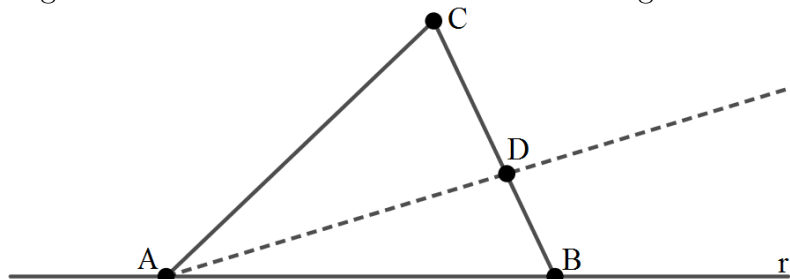
$$l(\overline{AD}) + l(\overline{DC}) < l(\overline{AB}) + l(\overline{BC}).$$



**Demonstração:** Existem duas possibilidades a serem consideradas:

- 1) O ponto  $D$  está sobre o lado  $\overline{BC}$ , como mostra a figura a seguir.

Figura 44: Ponto  $D$  sobre o lado  $\overline{BC}$  do triângulo  $ABC$ .



Fonte: [6].

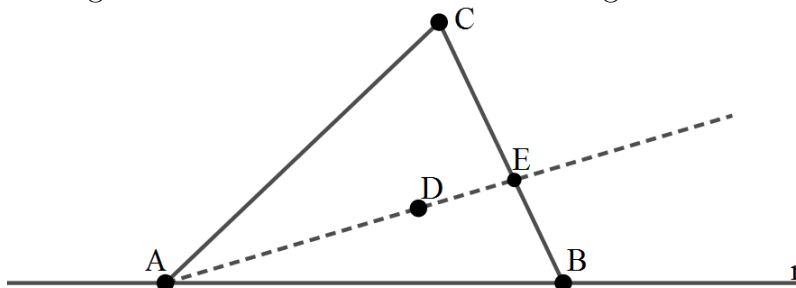
Pela desigualdade triangular, o resultado é rápido pois:

$$l(\overline{AD}) < l(\overline{AB}) + l(\overline{BD}) \text{ e } l(\overline{DC}) < l(\overline{BC}).$$

Assim,  $l(\overline{AD}) + l(\overline{DC}) < l(\overline{AB}) + l(\overline{BC})$ .

- 2) O ponto  $D$  pertence ao interior do triângulo  $ABC$ , como mostra a figura a seguir.

Figura 45: Ponto  $D$  no interior do triângulo  $ABC$ .



Fonte: [6].

Considere o ponto  $E$  como sendo a intersecção da reta  $\overleftrightarrow{AD}$  com o lado  $\overline{BC}$  do triângulo dado. Usando a desigualdade triangular, tem-se que

$$l(\overline{DC}) < l(\overline{DE}) + l(\overline{EC}).$$

Note agora que  $l(\overline{AD}) + l(\overline{DC}) < l(\overline{AE}) + l(\overline{EC})$  e  $l(\overline{AE}) < l(\overline{AB}) + l(\overline{BE})$ . Como  $l(\overline{AE}) = l(\overline{AD}) + l(\overline{DE})$ , tem-se que  $l(\overline{AE}) + l(\overline{EC}) < l(\overline{AB}) + l(\overline{BC})$ .

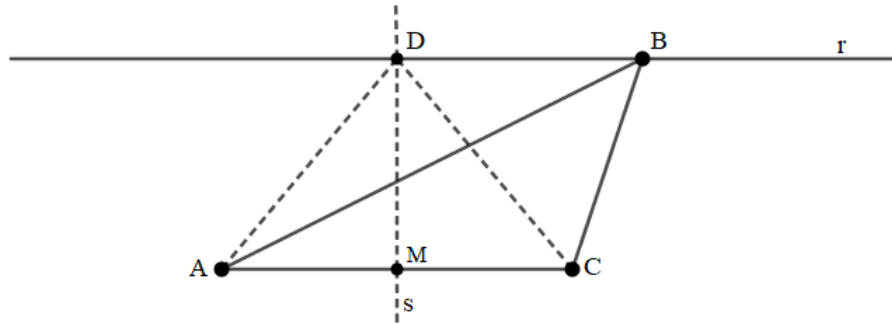
Assim,  $l(\overline{AD}) + l(\overline{DC}) < l(\overline{AB}) + l(\overline{BC})$ . □

**Explicação para o Problema 1:**

**Afirmção 4.5:** O triângulo investigado é o triângulo equilátero.

Suponhamos por absurdo que o triângulo  $ABC$  possui dois lados,  $\overline{AB}$  e  $\overline{BC}$ , de comprimentos diferentes. Consideremos a reta  $r$ , paralela à base  $\overline{AC}$  do triângulo  $ABC$ , que passa pelo vértice  $B$ . Na base  $\overline{AC}$ , tracemos a mediatriz deste segmento e, na interseção com a reta paralela traçada, marquemos o ponto  $D$ . Observe:

Figura 46: Resposta para o Problema 1.



Fonte: [6].

Usando o resultado da *Proposição 4.1*, e também a desigualdade triângular, o perímetro do triângulo  $ADC$  é menor do que o perímetro do triângulo  $ABC$ . Note também que esses dois triângulos possuem mesma área pois compartilham da mesma base e mesma altura. Isso se torna um absurdo pois, consideramos o triângulo  $ABC$  como sendo o de menor perímetro, fixada a área, encontramos outro triângulo de menor perímetro e mesma área que o inicial. Logo, o triângulo  $ABC$  deve ser equilátero.  $\square$

Neste resultado, conseguimos entender que dado qualquer triângulo *não equilátero* sempre existirá outro triângulo de menor perímetro e mesma área. O que provamos anteriormente acarreta que sempre conseguiremos um triângulo isósceles de mesma área, com menor perímetro do que o inicial.

Note que, para chegarmos a tal conclusão, foi admitido a existência de solução, isto é, considerando apenas os triângulos de mesma área, existe um triângulo de perímetro mínimo. Assim, resta-nos provar que tal triângulo é realmente um triângulo equilátero. Para tal, seguindo as ideias de [7] e [15], apresentaremos uma solução detalhada deste fato no apêndice deste trabalho.

A seguir, caracterizaremos os problemas apresentados assumindo a existência de solução. No capítulo 6, propomos a construção deste problema utilizando o software Geogebra.

### Explicação para o Problema 2:

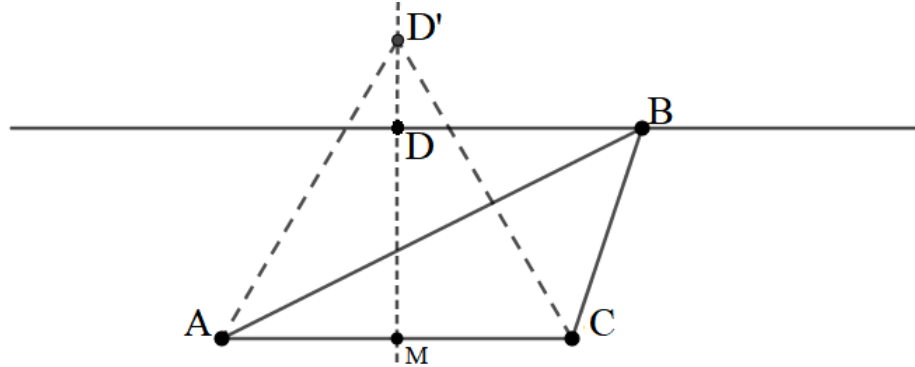
**Afirmção 4.6:** O triângulo equilátero é a solução do problema.

Considerando apenas os triângulos que possuem perímetro fixo, seja  $ABC$  aquele com área máxima. Os lados  $\overline{AB}$  e  $\overline{BC}$  do triângulo  $ABC$  são congruentes, pois caso contrário, se  $r$

é a reta que passa pelo vértice  $B$  e é paralela à base  $\overline{AC}$  do triângulo  $ABC$  e se  $D$  é o ponto de intersecção da reta  $r$  com a reta  $s$  que determina a mediatriz da base do triângulo, existe um ponto  $D'$  pertencente à reta  $s$  e acima de  $D$  satisfazendo

$$l(\overline{AD'}) + l(\overline{D'C}) = l(\overline{AB}) + l(\overline{BC}).$$

Figura 47: Resposta para o Problema 2.



Fonte: [6].

Assim, os triângulos  $AD'C$  e  $ABC$  têm perímetros iguais. Pelo *Problema 1*, a área do triângulo  $ADC$  é igual à área de  $ABC$ , pois compartilham de mesmas base e altura. Além disso, o triângulo  $AD'C$  possui área maior que o triângulo  $ADC$ , visto que  $l(\overline{DM}) < l(\overline{D'M})$ . Com esse fato, a área do triângulo  $AD'C$  é maior que a área de  $ABC$ , absurdo.

Logo, os lados  $\overline{AB}$  e  $\overline{BC}$  devem ter o mesmo comprimento. De forma análoga,  $\overline{AB}$  e  $\overline{AC}$  devem ter o mesmo comprimento. Assim, o triângulo  $ABC$  é equilátero.  $\square$

No capítulo 6, propomos a construção deste problema utilizando o software Geogebra.

## 4.2. Uma abordagem sobre polígonos

Anteriormente, discutimos problemas que envolviam apenas triângulos. Agora, ampliaremos os resultados anteriores para o caso de polígonos.

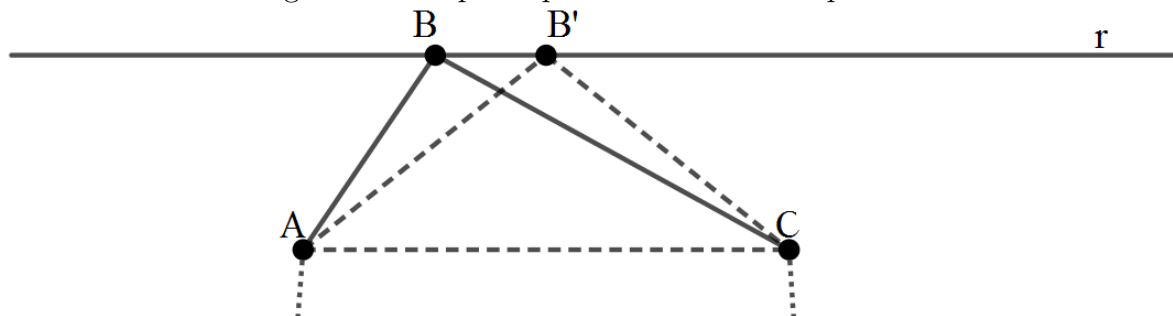
**Problemas 3:** Dentre todos os polígonos de  $n$  lados e de mesma área, qual deles têm o menor perímetro?

**Problemas 4:** Dentre todos os polígonos de  $n$  lados e de mesmo perímetro, qual deles têm a maior área?

Simultaneamente, os dois problemas citados anteriormente possuem a mesma solução: o polígono regular de  $n$  lados. Vale lembrar que um polígono regular é aquele cujos lados tem a mesmo comprimento e os ângulos a mesma medida.

**Explicação para o Problema 3:** Suponhamos inicialmente que o  $n$ -ésimo polígono, que denominaremos por  $\Gamma$ , que detém menor perímetro, possui dois lados  $\overline{AB}$  e  $\overline{BC}$ , respectivamente, de tamanhos diferentes. Consideremos  $r$  a reta que é paralela ao segmento de reta  $\overline{AC}$ , passando pelo ponto  $B$ .

Figura 48: Resposta para o Problema 3 - parte 1.



Fonte: [6].

Note que pela *Proposição 4.1*, existe um ponto  $B'$  sobre a  $r$  satisfazendo

$$l(\overline{AB'}) + l(\overline{B'C}) < l(\overline{AB}) + l(\overline{BC}).$$

Portanto, construímos uma região de mesma área que a anterior, mas com menor perímetro. Um absurdo, pois supomos que o triângulo inicialmente destacado seria o de menor perímetro, com área máxima. Assim, o polígono  $\Gamma$  é equilátero.

Resta-nos agora provar que este polígono é regular. Mostremos que ele deve ter todos os ângulos de mesma medida.

Com efeito, sejam  $\overline{AB}$ ,  $\overline{BC}$  e  $\overline{CD}$  lados consecutivos do polígono equilátero  $\Gamma$ . Suponhamos por absurdo que os ângulos  $\widehat{ABC}$  e  $\widehat{BCD}$  sejam tal que  $\alpha = \widehat{ABC}$  e  $\beta = \widehat{BCD}$  satisfaçam  $\alpha > \beta$ .

Marquemos um ponto  $F$  sobre o lado  $\overline{CD}$  tal que o ângulo  $\widehat{CBF} = \theta$  satisfaça  $2\theta < \alpha - \beta$ . Consideremos um ponto  $E$  sobre a semirreta  $\overrightarrow{AB}$  de modo que  $\overline{EC} \parallel \overline{BF}$ . Assuma ainda que  $\lambda = \widehat{EBF}$  e  $\gamma = \widehat{BFC}$ .

Note que  $\alpha + \lambda - \theta = 180^\circ$  e  $\beta + \gamma + \theta = 180^\circ$ . Como supomos  $2\theta < \alpha - \beta$ , segue que  $\gamma - \lambda = \alpha - \beta - 2\theta > 0$ . Assim,  $\gamma > \lambda$ .

**Afirmção 4.7:** Se  $BECF$  é um quadrilátero tal que  $\overline{BF} \parallel \overline{CE}$  e os ângulos  $\lambda = \widehat{EBF}$  e  $\gamma = \widehat{CFB}$  satisfazem  $\lambda < \gamma$ , então

$$l(\overline{BE}) + l(\overline{EF}) < l(\overline{BC}) + l(\overline{CF}).$$

Tracemos uma reta  $r$  passando pelos pontos  $E$  e  $C$ , e uma reta  $s$  sendo a mediatriz do segmento  $\overline{BF}$ . Seja  $P$  a interseção destas  $r$  e  $s$ . Usando a *Proposição 4.1*, o ponto  $P \in r$  satisfaz

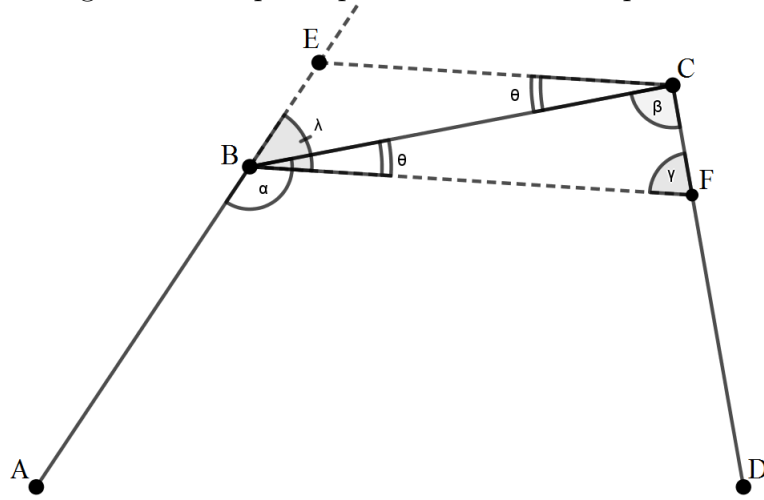
$$l(\overline{BP}) + l(\overline{PF}) < l(\overline{BQ}) + l(\overline{QF}),$$

$\forall Q \in r$ , com  $Q \neq P$ .

Existem duas situações para os pontos  $E$  e  $C$ :

- 1) Encontram-se do mesmo lado do ponto  $P$ .

Figura 49: Resposta para o Problema 3 - parte 2.



Fonte: [6].

Note que, como os ângulos  $\lambda = \widehat{EBF}$  e  $\gamma = \widehat{CFB}$  são tais que  $\lambda < \gamma$ , segue que o ponto  $E$  está estritamente entre  $P$  e  $C$ . Desse modo, o resultado segue diretamente do *Lema 4.1*.

2) O ponto  $P$  encontra-se entre  $E$  e  $C$ .

Consideremos o ponto  $C'$  tal que seja o simétrico de  $C$  em relação à reta  $s$ , mediatriz do segmento  $\overline{BF}$ . Note que, como assumimos o ângulo  $\widehat{EBF} < \widehat{CFB}$ , obtemos o ponto  $E$  entre  $C'$  e  $P$ . Novamente, usando o *Lema 4.1*, obtemos

$$l(\overline{BE}) + l(\overline{EF}) < l(\overline{BC'}) + l(\overline{C'F}).$$

Como  $l(\overline{BC'}) = l(\overline{CF})$  e  $l(\overline{C'F}) = l(\overline{BC})$ , temos o seguinte resultado:

$$l(\overline{BE}) + l(\overline{EF}) < l(\overline{BC}) + l(\overline{CF}).$$

Através desta manipulação geométrica, podemos substituir o quadrilátero  $ABCD$ , respectivamente obtido do polígono  $\Gamma$ , pelo quadrilátero  $AEFD$ , obtendo um novo polígono de mesma área, mas perímetro menor do que o polígono inicial. Logo, temos um absurdo.  $\square$

No capítulo 6, propomos a construção deste problema utilizando o software Geogebra.

**Explicação para o Problema 4:** Suponhamos, de acordo com o *Problema 3*, um polígono  $\mathbb{P}$  regular que detém a maior área possível, com menor perímetro.

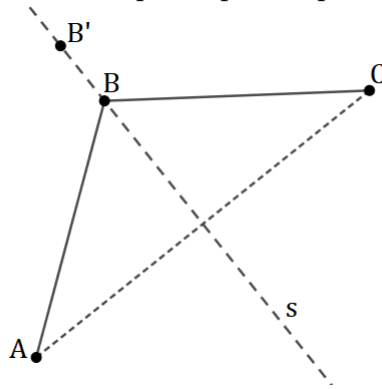
Atribuiremos  $\mathbb{A}$  como sendo a área deste polígono, de perímetro  $L$ .

Suponhamos a existência de outro polígono  $\mathbb{P}'$ , com  $n$ -lados e mesmo perímetro  $L$ , mas com área  $\mathbb{A}'$  tal que  $\mathbb{A}' > \mathbb{A}$ . Novamente, consideremos dois lados consecutivos de  $\mathbb{P}$ :  $\overline{AB}$  e  $\overline{BC}$ , como mostra a seguir.

Tomemos um ponto  $B'$  sobre a reta  $s$ , que é perpendicular a  $\overline{AC}$ , de modo que satisfaça

$$(l(\overline{AB'}) + l(\overline{B'C})) - (l(\overline{AB}) + l(\overline{BC})) = L - L'.$$

Figura 50: Resposta para o problema 4.



Fonte: [6].

O novo polígono  $\mathbb{P}'$  é obtido a partir de  $\mathbb{P}$  fazendo a permuta dos lados  $\overline{AB}$  e  $\overline{BC}$  por  $\overline{AB'}$  e  $\overline{B'C}$ . Absurdo!  $\square$

No capítulo 6, propomos a construção deste problema utilizando o software Geogebra.

### 4.3. A desigualdade isoperimétrica

Segundo [1,9,14], a desigualdade isoperimétrica afirma que qualquer curva fechada, de comprimento  $l$  cerca uma área menor do que ou igual a  $\frac{l^2}{4\pi}$ . Nosso objetivo nesta seção é estudar o seguinte problema:

**Problema 5:** Dados dois polígonos regulares de mesmo perímetro  $L$ , aquele que tem maior área é o que possui um maior número de lados.

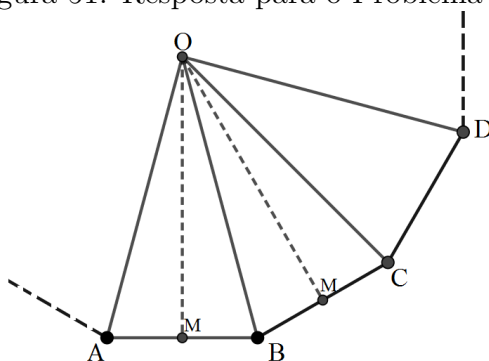
Para tal, faremos uso do *Teorema da Desigualdade Isoperimétrica*, cuja demonstração pode ser encontrada em detalhes em [1], [9] e [14].

**Teorema 1.** Toda curva fechada de comprimento  $l$  engloba uma área menor ou igual a  $\frac{l^2}{4\pi}$ . Além disso, este valor só é alcançado para o círculo de raio  $\frac{l}{2\pi}$ .

De posse deste importante resultado, estamos aptos a responder o *Problema 5*, proposto inicialmente.

**Explicação para o Problema 5:** A princípio, iremos expressar a área  $S_n$  de um  $n$ -ésimo polígono regular em termos de seu perímetro  $L$  dado. Note que em um polígono regular, podemos construí-lo através da união de  $n$  triângulos, todos isosceles, como mostra a *figura 51* a seguir.

Figura 51: Resposta para o Problema 5.



Fonte: baseado em [9].

O ponto  $O$  corresponde ao centro do polígono,  $\overline{AB}$  é um lado e  $\overline{OM}$  é a apótema. Consideremos  $l_n = l(\overline{AB})$  e  $a_n = l(\overline{OM})$ . Assim, segue que

$$L = nl_n \text{ e } S_n = \frac{n}{2}l_n a_n.$$

Note que o ângulo  $B\hat{O}A$  mede  $\pi/n$  radianos, e, como a apótema é perpendicular ao lado do polígono, obtemos

$$\frac{l_n}{2} = a_n \tan\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

Logo, a área deste polígono será:  $S_n = \frac{L^2}{4n} \cdot \frac{1}{\tan(\pi/n)} \iff S_n = \frac{L^2}{4\pi} \cdot \frac{\pi/n}{\tan(\pi/n)}$ .

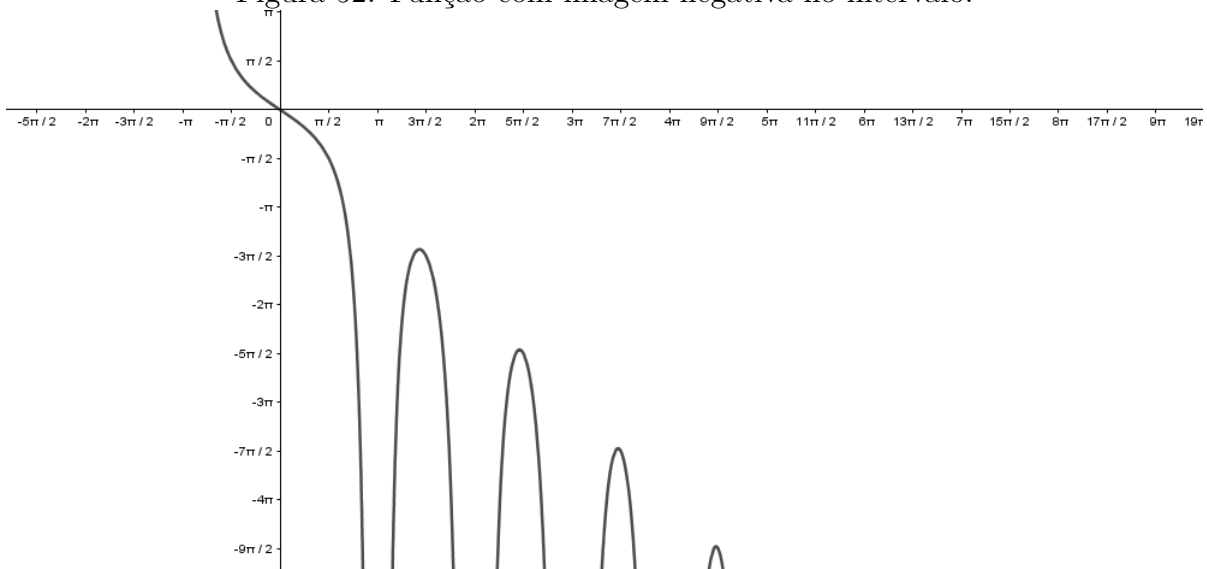
Vamos entender como se comporta a área em função da quantidade de lados. Consideremos a função:

$$f(x) = \frac{x}{\tan x}$$

em que  $x = \pi/n$ . Como a tangente está bem definida no intervalo aberto  $(0, \pi/2)$ , temos que para  $n > 2$  quando  $x$  se aproxima de zero,  $f(x)$  tende a 1 e quando  $x$  tende a  $\pi/2$ ,  $f(x)$  tende a zero.

Além disso,  $f$  é contínua no intervalo dado e sua derivada  $f'(x) = \frac{\tan x - x \sec^2 x}{\tan^2 x}$  é negativa no intervalo determinado, conforme mostra o gráfico a seguir.

Figura 52: Função com imagem negativa no intervalo.



Fonte: o autor (2019).

Logo,  $f$  é estritamente decrescente no intervalo dado. Como  $x = \frac{\pi}{n}$ , temos para  $n < m$ ,  $x_n > x_m$ . Como  $f$  é estritamente decrescente, temos  $f(x_m) > f(x_n)$ . Isso nos diz que a área  $S_n$  é estritamente crescente quando  $n$  cresce.

Logo, se  $n < m$  e  $S_n$  e  $S_m$  designam as áreas dos  $n$ -ésimo e  $m$ -ésimo polígono regular de mesmo perímetro, temos que  $S_n < S_m$ .  $\square$

Note que, quando a quantidade de lados cresce infinitamente, e o perímetro fixo, o Teorema da Desigualdade Isoperimétrica garante que o círculo detém a maior área. No capítulo 6, propomos a construção deste problema utilizando o software Geogebra.



## 5. DOS PROBLEMAS À PRÁTICA

O uso de recursos tecnológicos permite a nós professores muitas possibilidades didáticas e melhores metodologias nos processos de ensino e aprendizagem. Na matemática, existem diversos softwares que auxiliam na construção de aulas. Pretendemos aqui descrever a caracterização dos cinco problemas trabalhados anteriormente através do GEOGEBRA, um software que vincula tanto a Álgebra como Geometria na mesma importância.

As tecnologias nas aulas podem despertar a curiosidade dos discentes e motivá-los a aprender os conteúdos, fazendo com que realizem investigações matemáticas do conteúdo abordado através destes recursos. O software GEOGEBRA é gratuito e de fácil acesso. Mas é necessário conhecimento sobre suas ferramentas para entendermos e operarmos com as construções realizadas neste programa.

### 5.1. Problemas 1

No Capítulo 4, construímos uma resolução para o *Problema 1*, o qual enunciava:

“Dentre todos os triângulos de mesma área, qual é o de menor perímetro?”

Note que triângulos detem a mesma área quando possuem a mesma base e a mesma altura. Seguiremos os seguintes passos na construção no Geogebra para analisar tal situação.

1. Na ferramenta indicada pela *figura 53*, crie um “Controle Deslizante” que irá representar a área de seu triângulo. Faça-o variar entre 1 e 100. Denomine este controle de  $A$ .

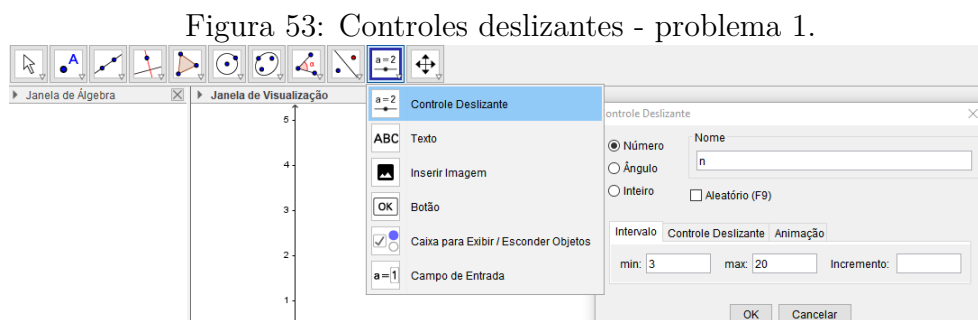


Figura 53: Controles deslizantes - problema 1.

Fonte: o autor (2019).

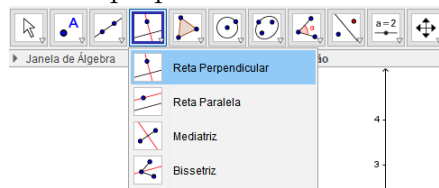
2. Novamente, usando a ferramenta da *figura 53*, crie outro “Controle Deslizante” que representará a base de seu triângulo. Represente-o por “ $b$ ” e faça-o variar entre  $0.1$  e  $A - 0.1$ , com incremento  $0.01$ . Além disso, usando a ferramenta da *figura 54*, crie um segmento de tamanho “ $b$ ”.
3. Defina na caixa de entrada o comando  $h = \frac{2A}{b}$ . Este representará a altura de seu triângulo.
4. Em um dos dois vértices da base do triângulo, use a ferramenta indicada na *figura 55* e trace uma perpendicular a base do triângulo.

Figura 54: Segmento de comprimento fixo - problema 1.



Fonte: o autor (2019).

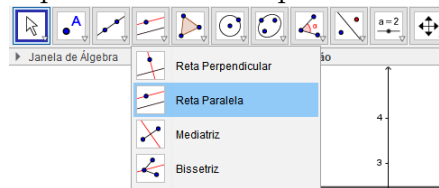
Figura 55: Reta perpendicular à base do triângulo.



Fonte: o autor (2019).

5. Usando a ferramenta citada na *figura 54*, clique sobre o ponto de interseção da perpendicular com a base do triângulo e crie um segmento de comprimento “h”. OBS.: ESTE SEGMENTO FICARÁ DETERMINADO SOBRE A BASE DO TRIÂNGULO. Desse modo, clique com o botão esquerdo sobre o segundo ponto que forma este segmento e arraste-o até o mesmo estar sobre a reta perpendicular traçada.
6. Na segunda extremidade do segmento de tamanho “h”, use a ferramenta da *figura 56* e trace uma reta paralela a base do triângulo passando por tal ponto citado.

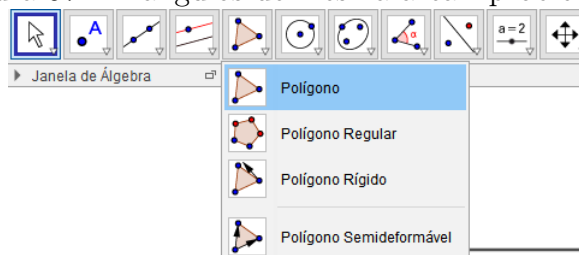
Figura 56: Reta paralela à reta suporte da base do triângulo.



Fonte: o autor (2019).

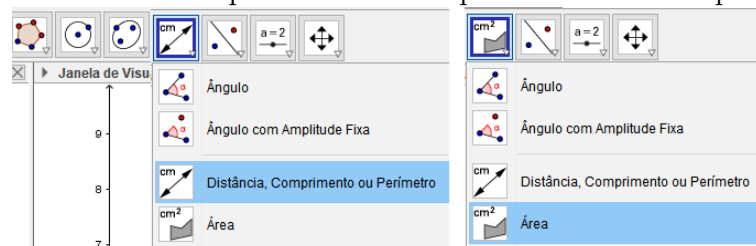
7. Feito os procedimentos anteriores, construímos o Lugar Geométrico dos triângulos que possuem uma determinada área. Com a ferramenta indicada na *figura 57*, e utilizando o segmento determinado pra ser a base, construa um triângulo de modo que o terceiro vértice pertença a reta paralela, criada no item anterior.
8. Selecione, sequencialmente, as duas ferramentas a seguir, citadas na *figura 58*, e, clicando sobre o triângulo construído, determine seu perímetro e área
9. Mova o vértice do triângulo sobre a reta paralela à sua base e análise sua área e perímetro. Note que a área permanece fixa, mas há uma variação de perímetro.

Figura 57: Triângulos de mesma área - problema 1.



Fonte: o autor (2019).

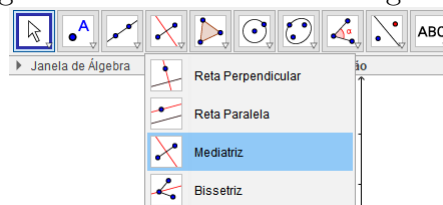
Figura 58: Ferramenta para determinar perímetro e área - problema 1.



Fonte: o autor (2019).

10. Usando a ferramenta da *figura 59*, determine a mediatriz do segmento que forma a base do triângulo e note que seu triângulo, de área fixa, tem menor perímetro quando passa pelo ponto de interseção da mediatriz com a reta paralela a base.

Figura 59: Mediatriz de um segmento.



Fonte: o autor (2019).

11. Clique com o botão direito do mouse, sequencialmente, sobre os lados do triângulo, vá em “Propriedades”, “Exibir Rótulo” e selecione “Valor”. Isso mostrará o comprimento dos lados de seu triângulo. Note que seu triângulo anterior é isósceles.
12. Mova o “Controle Deslizante” “b” e note que quando seu triângulo é equilátero, o perímetro é o menor possível.

## 5.2. Problema 2

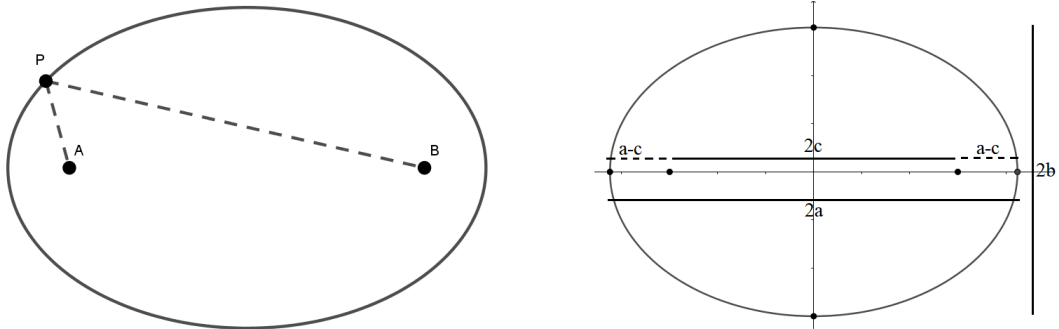
No Capítulo 4, construímos uma resolução para o *Problema 2*, o qual enunciava:

“Dentre todos os triângulos de mesmo perímetro, qual é o de maior área?”.

Para este problema, vamos relembrar uma definição importante da geometria analítica:

**Definição:** Dados dois pontos  $A$  e  $B$  num plano, uma *elipse* de focos  $A$  e  $B$  e eixo maior dado igual a  $2a$  ( $l(\overline{AB}) < 2a$ ) é o lugar geométrico dos pontos  $P$  do plano tais que  $l(\overline{PA}) + l(\overline{PB}) = 2a$ .

Figura 60: A elipse de focos  $A$  e  $B$ .



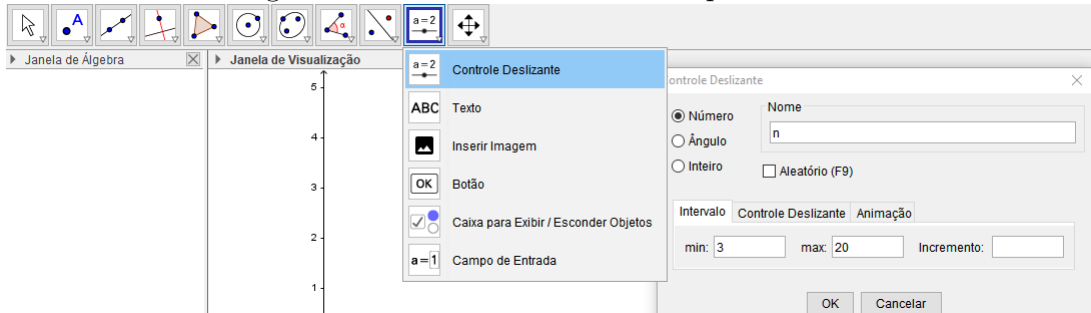
Fonte: o autor (2019).

Note que todos os triângulos construídos sobre a elipse possuem o mesmo perímetro, pois a base está fixa e a soma das distâncias aos vértices que formam a base é constante.

Inicialmente, para entender o problema geometricamente, utilizando o Geogebra, consideremos um triângulo de perímetro dado, iremos construir uma elipse que caracteriza tal situação, seguindo as restrições de seus elementos. Para tal construção, seguiremos os passos:

1. Na ferramenta indicada na *figura 61*, crie dois controles deslizantes tais que:
  - 1º) Represente o perímetro e varie entre  $1 < n < 100$ ;
  - 2º) Represente o tamanho da base do triângulo, e que varie entre:  $0.3 < a < \frac{n}{2} - 0.1$  pois, pela desigualdade triangular, cada lado deve ser menor do que a soma dos outros dois e não pode ter comprimento maior do que ou igual ao semiperímetro.

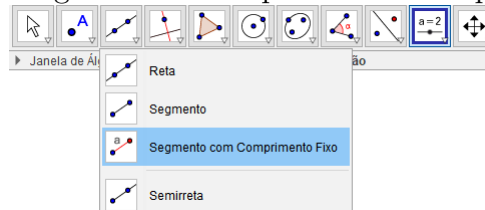
Figura 61: Controles deslizantes - problema 2.



Fonte: o autor (2019).

2. Na ferramenta indicada na *figura 62*, construa o segmento de tamanho  $a$ , que será a base de seu triângulo.

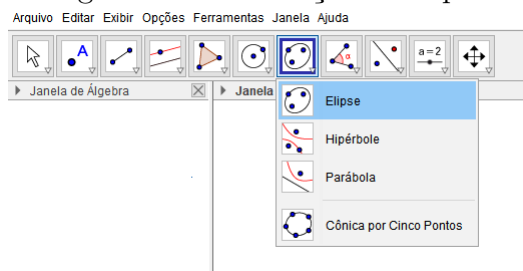
Figura 62: Segmento de comprimento fixo - problema 2.



Fonte: o autor (2019).

3. Note que a medida dos outros dois lados do triângulo devem ter soma igual a  $n - a$ .
4. Defina na caixa de entrada o comando  $d = n - a$ . Esta será a soma dos outros dois lados. Também na caixa de entrada, defina  $l = \frac{d - a}{2}$ . Este comando determinará a distância do vértice da base do triângulo até o ponto mais próximo da elipse. Com um dos vértices da base do triângulo, construa um segmento de comprimento  $l$ , usando a ferramenta anterior.
5. A seguir, com a ferramenta indicada na *figura 63*, construa a elipse de focos  $A$  e  $B$ , passando pelo ponto  $C$ .

Figura 63: Construção da elipse.



Fonte: o autor (2019).

6. Com a ferramenta indicada na *figura 64*, construa um triângulo com vértices sejam  $A$ ,  $B$  e algum ponto sobre a elipse.

Figura 64: Determinando polígonos a partir dos vértices.



Fonte: o autor (2019).

7. Selecione as ferramenta da *figura 65* e sobre o triângulo, ordenadamente, marque “Perímetro” e “Área”. Note que, movendo o ponto sobre a elipse, o triângulo permanece com o perímetro constante, mas com variação de área.

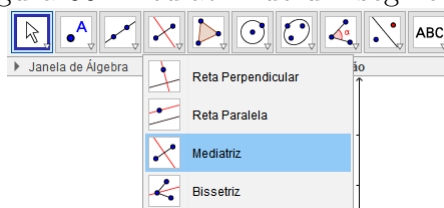
Figura 65: Ferramenta para determinar perímetro e área - problema 2.



Fonte: o autor (2019).

8. Usando a ferramenta da *figura 66*, determine a mediatriz do segmento que forma a base do triângulo e note que a área é máxima quando passa pelo ponto de interseção da mediatriz com a elipse.

Figura 66: Mediatriz de um segmento.



Fonte: o autor (2019).

9. Com o triângulo formado no item anterior, clique com o botão direito do mouse sobre cada lado do triângulo, vá em propriedades e, na opção “Rótulo”, marque “Valor”. Mova o “Controle Deslizante  $a$ ”, criado no item 1, e note que quando os lados de seu triângulo são todos iguais, obtem-se área máxima.

Assim, de perímetro fixo, o triângulo de área máxima é o equilátero.

### 5.3. Problema 3

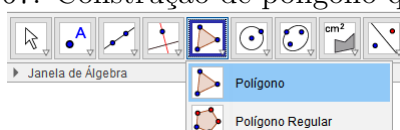
No Capítulo 4, construímos uma resolução para o *Problema 3*, o qual enunciava:

“Dentre todos os polígonos de  $n$  lados e de mesma área, qual deles têm o menor perímetro?”.

Vamos aqui criar uma sequência de passos a fim de construir tal situação no Geogebra.

1. Com a ferramenta da *figura 67*, crie um polígono qualquer, com a quantidade de lados que desejar.

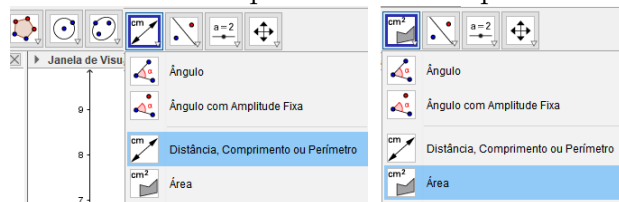
Figura 67: Construção de polígono qualquer.



Fonte: o autor (2019).

2. Selecione e clique, ordenadamente, cada ferramenta da *figura 68*, em cima do polígono formado. As ferramentas indicarão o perímetro e a área do polígono.

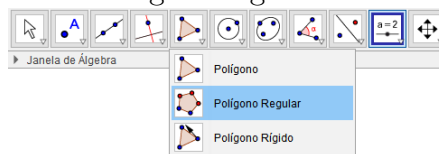
Figura 68: Ferramenta para determinar perímetro e área.



Fonte: o autor (2019).

3. Com a ferramenta indicada na *figura 69*, crie um polígono regular de  $n$  lados.

Figura 69: Polígono regular de lado dado.



Fonte: o autor (2019).

4. Selecione as ferramentas do item 2 e marque-as sobre o polígono regular criado.
5. Mova um dos pontos utilizados para determinar o polígono regular e analise o perímetro deles quando a área está igual.
6. Note que o polígono regular é aquele que detém o menor perímetro com área fixada.

## 5.4. Problema 4 e Problema 5

No Capítulo 4, construímos uma resolução para o *Problema 4*, o qual enunciava: “Dentre todos os polígonos de  $n$  lados e de mesmo perímetro, qual deles têm a maior área?”

No Capítulo 5, construímos uma resolução para o *Problema 5*, o qual enunciava: “Dados dois polígonos regulares de mesmo perímetro  $L$ , aquele que tem maior área é o que possui um maior número de lados.”

Vamos aqui construir uma sequência de passos para que possamos construir polígonos de perímetro fixo e observarmos a variação da quantidade de lados, a fim de analisar a área em cada situação e justificar os dois problemas citados.

1. Com a ferramenta indicada na *figura 70* crie dois controles deslizantes, tais que  $3 < n < 20$ , com incremento 1, indicará a quantidade de lados do polígono e  $10 < p < 100$ , com incremento 5, indicará o perímetro a ser fixado, ao qual deseja analisar as áreas formadas.

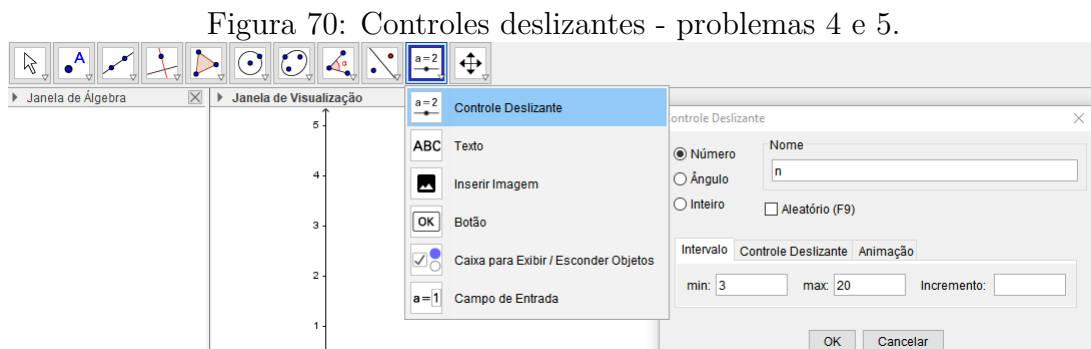
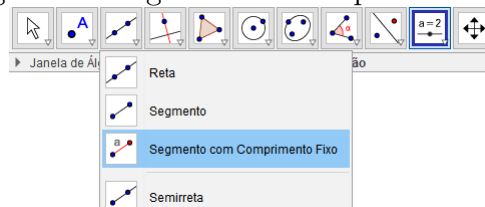


Figura 70: Controles deslizantes - problemas 4 e 5.

Fonte: o autor (2019).

2. Na caixa de entrada, defina o comando  $l = \frac{p}{n}$ . Este comando determinará o tamanho do lado do polígono.
3. Selecione a ferramenta indicada na *figura 71* e crie um segmento de comprimento  $l$ .

Figura 71: Segmento de comprimento fixo.

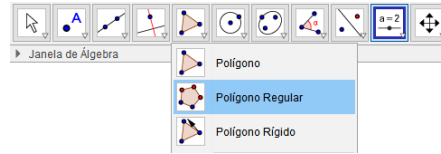


Fonte: o autor (2019).

4. Fixe inicialmente  $n = 3$  e selecione a ferramenta na *figura 72* e crie um polígono de  $n$  lados de tamanho  $l$ .



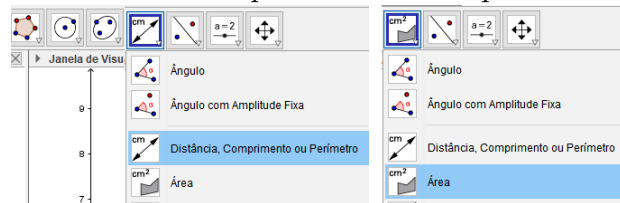
Figura 72: Polígono de lado dado.



Fonte: o autor (2019).

5. Selecione e clique, ordenadamente, cada ferramenta da *figura 73* em cima do polígono formado. As ferramentas indicarão o perímetro e a área do polígono.

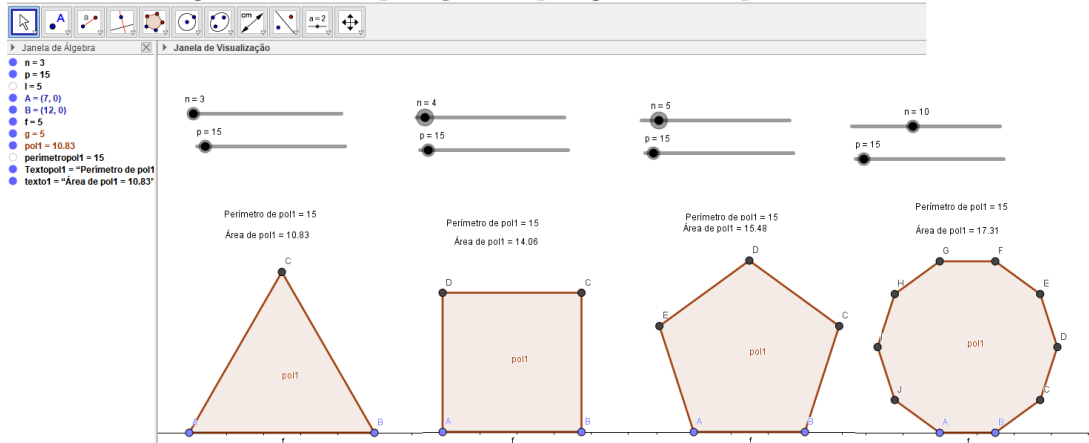
Figura 73: Ferramenta para determinar perímetro e área.



Fonte: o autor (2019).

Vejamos alguns casos desta construção, na *figura 74*:

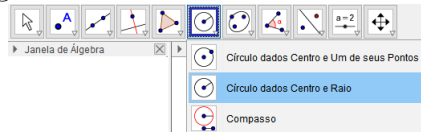
Figura 74: Comparação de polígonos com perímetro fixo.



Fonte: o autor (2019).

6. Movendo os controles deslizantes, pode-se verificar a variação das áreas com o perímetro fixo.
7. Vamos utilizar o resultado da *Desigualdade Isoperimétrica* e mostrar que o círculo detem a maior área, com perímetro fixo. Na caixa de entrada do Geogebra, defina o comando  $r = \frac{P}{2\pi}$ . Este será o raio do círculo de perímetro  $P$ . Selecione a ferramenta indicada na *figura 75* e crie o círculo de raio  $r$ . Retorne às ferramentas do item 5 e marque o perímetro e área deste círculo.

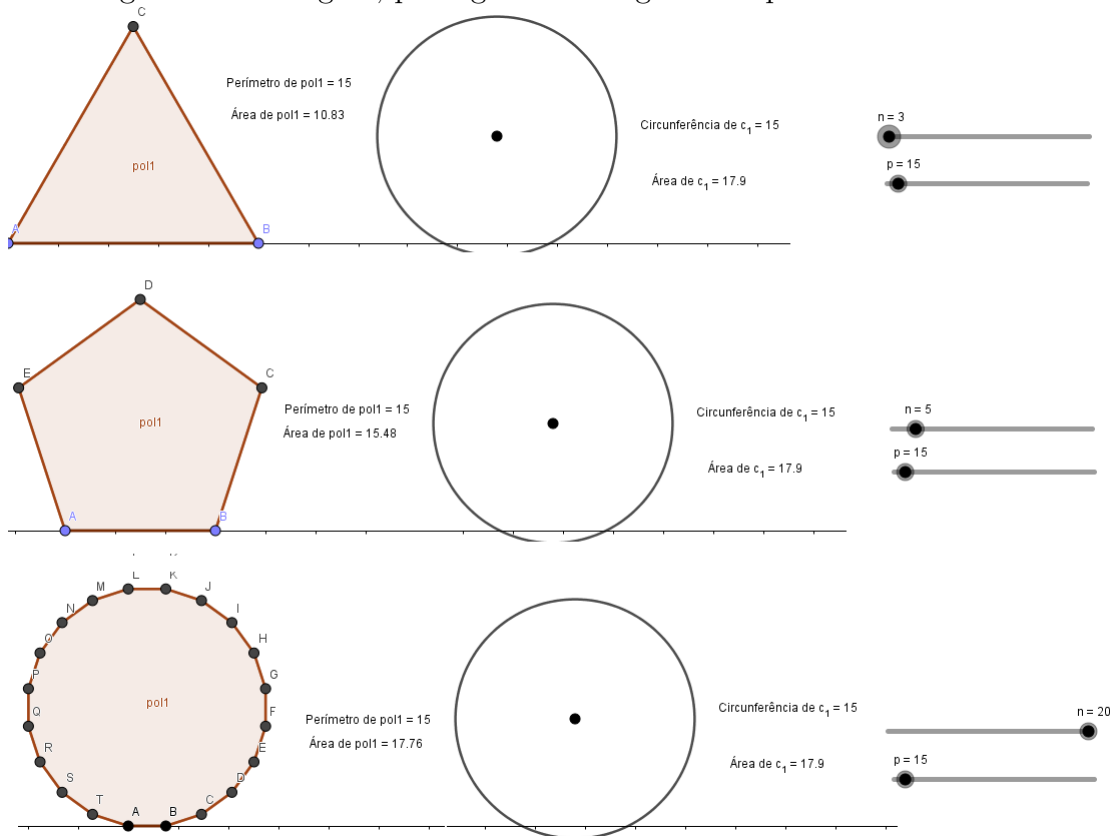
Figura 75: Círculo com raio definido.



Fonte: o autor (2019).

Vejamos algumas comparações de áreas, na *figura 76*:

Figura 76: Triângulo, pentágono e icoságono comparado com círculo.



Fonte: o autor (2019).

## 6. PROBLEMAS DE MÁXIMOS E MÍNIMOS NA GEOMETRIA EUCLIDIANA

Nesta seção, trabalharemos dois problemas, de caráter histórico na geometria euclidiana, que retratam a maximização de áreas com minimização de perímetro, bem como o uso da *Desigualdade Isoperimétrica* para suas justificativas.

### 6.1. A sagacidade das abelhas

Segundo [8], no livro V, da *Coleção*, Pappus discorre sobre isoperimetria no plano e no espaço e faz uma curiosa observação a respeito da forma como as abelhas constroem seus favos. Tendo mostrado que de dois polígonos regulares de mesmo perímetro, o que tem o maior número de lados tem maior área, concluiu que as abelhas provavam algum entendimento matemático, ao construir suas células como prismas hexagonais em vez de quadradas ou triangulares. O livro examina ainda, outros problemas de isoperimetria, inclusive a prova de que, para um perímetro dado, o círculo tem maior área que qualquer polígono regular.

A seguir faremos uma análise do problema das abelhas a que Pappus se refere. Primeiramente mostraremos um resultado, já conhecido desde os pitagóricos (século V a.C.), de que triângulo, quadrado e hexágono são os únicos polígonos regulares que tornam possível a pavimentação de um plano.

**Afirmção 6.1:** Os únicos polígonos que pavimentam o plano são: o triângulo, o quadrado e o hexágono.

De fato, sabemos que um polígono regular de  $n$  lados,  $n \geq 3$ , possui ângulos internos dados pela fórmula

$$a_i = \frac{(n-2) \cdot 180^\circ}{n}$$

Suponhamos que se tenha uma pavimentação do plano formada exclusivamente por polígonos regulares de  $n$  lados. Se em um dos vértices dos polígonos da pavimentação aparecem  $m$  polígonos, então a soma dos ângulos internos, neste vértice, deve ser igual a  $360^\circ$ ; ou seja,

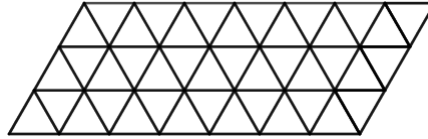
$$m \left[ \frac{(n-2) \cdot 180^\circ}{n} \right] = 360^\circ$$

Simplificando esta igualdade, obtemos  $m = \frac{2n}{n-2}$ . Como  $m \geq 3$ , segue-se que  $n \leq 6$ . Assim, concluímos que os únicos candidatos a ladrilhos de uma pavimentação do plano são: o triângulo, o quadrado, o pentágono e o hexágono.

Analisaremos agora quais desses polígonos realmente pavimentam o plano.

- 1) Para  $n = 3$ , obtemos  $m = \frac{2n}{n-2} = 6$ . Assim, a pavimentação do plano por triângulos equiláteros acontece de modo que em cada vértice concorrem 6 triângulos.

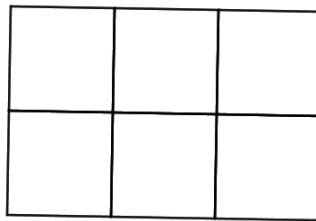
Figura 77: Pavimentação por triângulos equiláteros.



Fonte: [8].

- 2) Para  $n = 4$ , obtemos  $m = 4$ . Assim, a pavimentação do plano por quadrados acontece de modo que em cada vértice concorrem 4 quadrados.

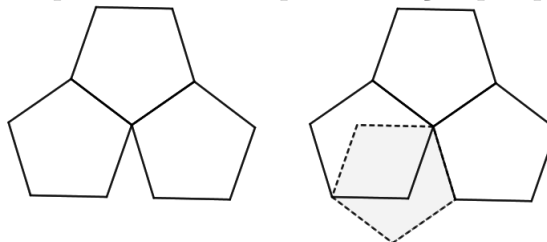
Figura 78: Pavimentação por quadrados.



Fonte: [8].

- 3) Se  $n = 5$ , temos que  $m = 3,333\dots$ . Como  $m$  deve ser um número inteiro, conclui-se que o pentágono não pode ser utilizado para pavimentar o plano. De fato, a figura a seguir mostra que podemos colocar três pentágonos ao redor de um vértice, perfazendo  $324^\circ$ , com falta de  $36^\circ$ ; mas se colocarmos o quarto pentágono, este irá se sobrepor ao primeiro.

Figura 79: impossibilidade de pavimentação por pentágonos.



Fonte: [8].

- 4) Para  $n = 6$ , obtemos  $m = 3$ . Assim, a pavimentação do plano por hexágonos acontece de modo que em cada vértice concorrem 3 hexágonos.

Desse modo, concluímos que somente o triângulo, o quadrado e o hexágono podem ser utilizados como ladrilhos de uma pavimentação do plano por polígonos regulares. Note que pelo *Problema 5* o hexágono é o polígono de maior área, com perímetro fixo.  $\square$

**Observação: Porquê não pavimentar o plano por círculos?**

Pela desigualdade isoperimétrica, o círculo detém a maior área, com perímetro fixo, em relação a outros polígonos regulares. Note que quando os círculos se tangenciam, há uma região

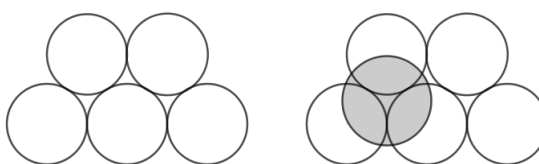
Figura 80: Pavimentação por hexágonos.



Fonte: [8].

entre eles que não “é coberta”. E se quisermos cobrir tal região, hávera uma sobreposição de círculos.

Figura 81: Impossibilidade de pavimentação por círculos.



Fonte: [8].

**Afirmação 6.2:** Dentre os prismas de bases triangulares, quadradas e hexagonais com mesmo perímetro, o de base hexagonal é o de maior volume.

Sabemos que o volume de um prisma é igual ao produto da área da base pela altura e a área lateral é igual ao produto do perímetro do polígono pela altura. Como o perímetro da base é o mesmo para os três prismas em questão, a área lateral é a mesma. Assim, o prisma que tiver maior área da base será o de volume máximo e, portanto, o de base hexagonal é o que satisfaz essa condição.  $\square$

## 6.2. O problema de Dido

Baseado em [15], registros literários contam que Dido, também conhecida por Elisa, era uma princesa fenícia do século IX a.C., da cidade de Tiro, localizada às margens do mar Mediterrâneo, onde hoje é o Líbano. Casada com o grande sacerdote Arquebas, eles detinham grandes riquezas e poderes em seu império. Em certo momento de suas vidas, o rei Pigmalião, irmão de Dido, assassinou Arquebas, a fim de subtrair a riqueza e os tesouros adquiridos por ele. Dido, receando a própria morte, reuniu grande quantidade de seguidores e partiu num navio, em busca de construir seu novo império noutras terras.

Em determinado ponto, no lugar escolhido pra fundar a nova cidade, chamada de “Qart Hadash” (Cartago), Dido tentou negociar terras do rei local, para que pudessem se estabelecer. O acordo feito foi que só teria em terras o que pudesse abranger com a pele de um boi. Dessa forma, decidiram então cortar a pele em tiras tão finas quanto possível, emendar todas e englobar num semicírculo um terreno beirando o mar (vide [4]).

Figura 82: Ilustração corte do couro.

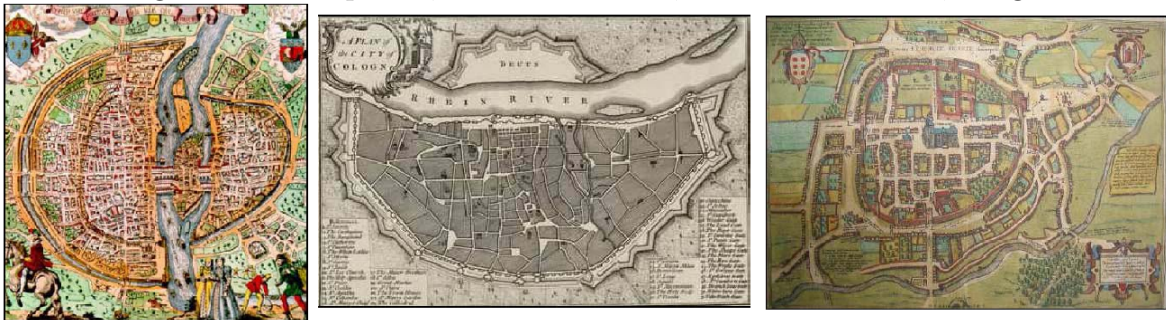


Fonte: [8].

Os registros históricos da resposta correta do problema não se restringem apenas à literatura. No período da Idade Média, bem comum era a construção de muros de proteção para as cidades. Ao consultar alguns mapas desta na época, não por acaso, encontramos muros no formato circular, ou semicircular. Como os muros eram feitos de pedras, sua construção era cara e trabalhosa. Utilizar o resultado da *Desigualdade isoperimétrica*, já conhecido na época, otimizava a área cercada, para uma quantidade fixa de material.

A seguir, apresentamos os mapas das cidades de Paris - França, Colônia - Alemanha e Braga - Portugal, que tinham formatos circulares (Braga) ou semicirculares (Paris e Colônia), quando as cidades eram banhadas por rios.

Figura 83: À esquerda, Paris. Ao centro, Colônia. À direita, Braga.



Fonte: [8].

### 6.2.1. A solução para o Problema de Dido

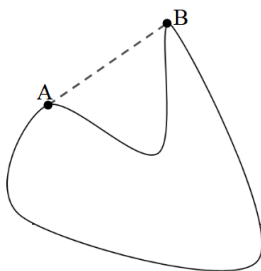
Segundo [15], para chegar a tal solução, utilizaremos os resultados obtidos por Jakob Steiner (1796 - 1863). Suponhamos inicialmente que o problema tenha como solução uma curva  $\mathbb{B}$ . Concluiremos que esta deve ser o círculo.

**Afirmção 6.3:**  $\mathbb{B}$  é uma curva convexa.

Suponhamos por absurdo que  $\mathbb{B}$  possua uma cavidade  $\alpha$  entre  $A$  e  $B$ .

Mas precisamente, existem dois pontos  $A$  e  $B$  em  $\mathbb{B}$  tais que o segmento aberto  $\overline{AB}$  está fora da região delimitada por  $\mathbb{B}$ . Seja  $\alpha'$  a reflexão do trecho  $\alpha$  da curva com relação ao segmento

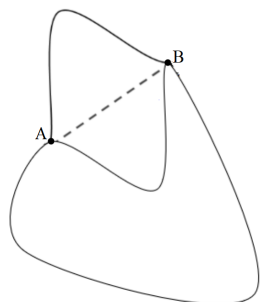
Figura 84: Cavidade na curva.



Fonte: baseado em [6].

$\overline{AB}$ .

Figura 85: Curva de maior área.



Fonte: baseado em [6].

A curva  $\mathbb{B}'$  obtida a partir de  $\mathbb{B}$  substituindo o trecho  $\alpha$  por  $\alpha'$  tem o mesmo comprimento que  $\mathbb{B}$  e engloba maior área. Absurdo!

Logo,  $\mathbb{B}$  é convexa. □

Novamente, seguindo as indicações de [15], iremos justificar o fato de que o problema de Dido é satisfeito através da construção de um semicírculo.

**Afirmção 6.4:** Mostremos agora que o Problema de Dido é equivalente ao seguinte:

**Problema de Dido com Parede:** Seja  $\rho$  uma reta do plano e seja  $\tau$  a união de  $\rho$  com um dos semiplanos determinados por  $\rho$ . Consideremos as curvas em  $\tau$  de um dado comprimento e cujos pontos inicial e final estão sobre  $\rho$ .

Mostraremos que entre essas curvas, aquelas que englobam maior área são exatamente os semicírculos com base sobre  $\rho$ . E isso será suficiente para solucionar o Problema de Dido na forma inicial. De fato, seja  $\xi$  uma curva que soluciona o problema de Dido.

Sejam  $A$  e  $B$  pontos sobre  $\xi$  que a dividem em dois arcos  $\xi_1$  e  $\xi_2$  de igual comprimento. As regiões  $R_1$  e  $R_2$  delimitadas pela reta  $\rho$ , que passa por  $A$  e  $B$ , e pelos arcos  $\xi_1$  e  $\xi_2$ , respectivamente, devem ter a mesma área pois se, por exemplo,  $R_1$  tivesse maior área que  $R_2$ , obteríamos uma curva  $\bar{\xi}$  de mesmo comprimento que  $\xi$  e englobando maior área. Bastaria tomar  $\bar{\xi} = \xi_1 \cup \xi'_1$

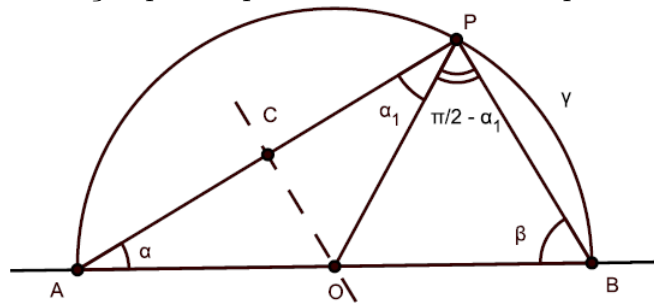
onde  $\xi'_1$  é a reflexão de  $\xi_1$  com relação a  $\rho$ .

Agora, as curvas  $\xi_1$  e  $\xi_2$  são soluções do problema de Dido com parede, pois se não fossem, existiria uma curva  $\xi_3$  de igual comprimento unindo pontos  $C$  e  $D$  de  $\rho$  e delimitando com  $\rho$  uma área maior. Seja  $\xi'_3$  a imagem refletida de  $\xi_3$  com relação a reta  $\rho$ . A curva fechada  $\xi_3 \cup \xi'_3$  teria o mesmo comprimento de  $\xi$  e delimitaria uma maior área, o que não é possível.  $\square$

Um semicírculo é caracterizado pela seguinte propriedade:

**Proposição 6.1:** Considere a figura a seguir, formada por uma curva convexa  $\xi_1$  e pelo segmento  $\overline{AB}$ .

Figura 86: Solução para o problema de Dido com parede - parte 1.



Fonte: [15].

Suponha que a seguinte propriedade se verifica: Dado qualquer ponto  $P$  sobre  $\xi_1$ , o ângulo  $\widehat{APB}$  é reto. Então  $\xi_1$  é um semicírculo.

Demonstração. Seja  $O$  o ponto médio do segmento  $\overline{AB}$ . Devemos então provar que  $l(\overline{OP}) = l(\overline{OA})$ . Para isso, basta mostrar que  $\alpha = \alpha_1$ . Assim, trace uma reta paralela a  $\overline{PB}$  passando por  $O$ . Então, a intersecção  $C$  dessa reta com  $\overline{AP}$  é o ponto médio do segmento  $\overline{AP}$ . Logo, os triângulos  $ACO$  e  $PCO$  são congruentes. Logo,  $\alpha = \alpha_1$ .  $\square$

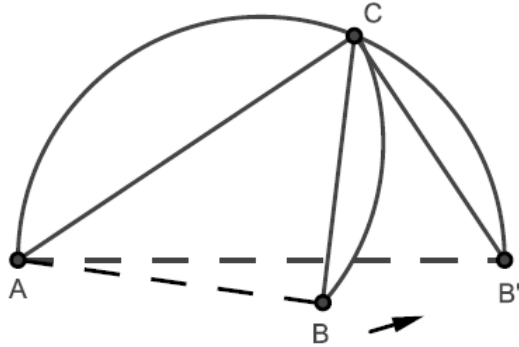
Podemos agora finalizar a demonstração da resolução do problema de Dido. Seja  $\xi_1$  a curva convexa que, entre as curvas convexas de comprimento  $L$ , delimita juntamente com a reta  $\rho$  a maior área. Mostraremos que  $\xi_1$  é um semicírculo. Pela proposição anterior, denotando por  $A$  e  $B$  os pontos de intersecção de  $\xi_1$  com a reta  $\rho$ , basta mostrarmos que, para todo ponto  $C \in \xi_1$ ,  $C \neq A$  e  $C \neq B$ , tem-se que o ângulo  $\widehat{ACB}$  é reto.

Suponha por absurdo que o ângulo  $\widehat{ACB}$  seja menor que  $\frac{\pi}{2}$ .

Nesse caso, rotacionamos o segmento  $\overline{CB}$ , com  $C$  fixo, juntamente com a região limitada por  $\xi_1$  e por  $\overline{CB}$ , no sentido anti-horário, de modo a obter o ângulo reto  $\widehat{ACB}'$ . Temos que a área do triângulo  $ACB'$  é maior que a área do triângulo  $ACB$ . De fato, a área do triângulo  $ACB$  é dada por



Figura 87: Solução para o problema de Dido com parede - parte 2.



Fonte: [15].

$$\frac{1}{2}l(\overline{AC}) \cdot l(\overline{CB}) \cdot \text{sen}(\widehat{ACB}) < \frac{1}{2}l(\overline{AC}) \cdot l(\overline{CB'})$$

onde  $\frac{1}{2}l(\overline{AC}) \cdot l(\overline{CB'})$  é a área do triângulo  $ACB'$ . Assim, obteríamos uma curva de mesmo perímetro que  $\xi_1$  englobando área maior, uma contradição. Portanto, o ângulo  $\widehat{ACB}$  deve ser reto. Assim, fica demonstrado que o problema de Dido com parede é resolvido apenas pelo semicírculo e, conseqüentemente, o Problema de Dido inicial é resolvido apenas pelo semicírculo.  $\square$

## 7. UMA PROPOSTA DE ATIVIDADES

Ciente de todo o conteúdo abordado e visando aplicações de tais tópicos, elaboramos nesta seção uma lista de problemas matemáticos, os quais propõem situações que envolvem os pontos discutidos anteriormente.

Esperando que este trabalho seja utilizado para aulas em diversos níveis de ensino, propomos problemas onde as resoluções não se tornem tão extensas, nem tão triviais. Assim, com a análise deste texto, esperamos que os leitores consigam deduzir resultados e construir argumentações que justifiquem tais situações.

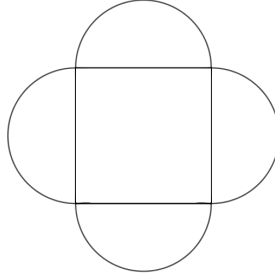
### 7.1 Problemas propostos

- 1) Dados dois pontos,  $A$  e  $B$ , e uma reta  $r$ , determine sobre  $r$  o ponto  $P$  tal que  $\overline{PA} + \overline{PB}$  seja a menor possível.
- 2) Dado um triângulo, construa uma circunferência circunscrita a ele.
- 3) Dados uma circunferência e um ponto fora dela, construa as retas tangentes a circunferência que passam pelo ponto dado.
- 4) Paulo e Carlos possuem tabletes de chocolate de formas quadrada e retangular, respectivamente. O tablete de Paulo tem 12cm de perímetro e o de Carlos tem a medida da base igual ao triplo da medida da altura e também perímetro 12cm. Sabendo que os tabletes possuem a mesma espessura, justifique quem tem mais vagem se houver a troca dos tabletes de chocolate.
- 5) Numa certa região potiguar, descampada e ao lado de uma montanha, estruturas rochosas detém grande acervo histórico em pinturas ruprestres. Afim de preservar tais locais, um grupo de geólogos possui 100 metros de cerca e 4 estacas para cercar a determinada região. Para preservar a maior área possível, qual deve ser o formato do cercado?
- 6) Um fazendeiro quer construir um cercado para criar gado. Como o dinheiro que tem é suficiente apenas para comprar 200 metros de tela, ele resolveu aproveitar a cerca reta do vizinho para economizar seu material. Construído, qual a maior área possível desse cercado?
- 7) Na confecção de um tapete de retalhos, uma costureira utilizou 20 pedaços iguais de tecido, como ilustrado.

Sabendo que a costureira atingiu  $1285\text{cm}^2$ , e que cada pedaço possui a maior área possível, de área do tecido, determine

  - a) A área de cada pedaço utilizado.
  - b) O perímetro de cada pedaço utilizado.

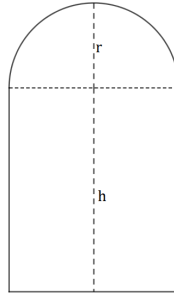
Figura 88: Retalhos.



Fonte: autor (2019).

8) É muito comum, em construções antigas, a figuração da arquitetura romana em portas e janelas. Numa construção, na busca de maior iluminação no interior de uma residência, um arquiteto projeta uma janela em arco romano, conforme a figura a seguir:

Figura 89: Janela em arco romano.



Fonte: autor (2019)

- a) Encontre uma relação entre  $r$  e  $h$  de modo que a área da janela seja máxima.
- b) Se  $r = 80cm$ , determine perímetro e área da janela.

## CONCLUSÃO

A geometria euclidiana constitui um bom modelo de teoria axiomática. As construções geométricas que, do modo como foram criadas pelos matemáticos da Antiguidade, não poderiam ser independentes da Geometria, contribuem tanto para o entendimento e o enriquecimento da teoria como para a solução de problemas que lhe são pertinentes.

Em vista dos argumentos apresentados, podemos observar o quão a geometria faz parte do nosso dia a dia. Ela é um dos pilares fundamentais do ensino da matemática, pois o ensino da mesma oferece uma imensa oportunidade para o discente de olhar, comparar, medir, generalizar e abstrair, desenvolvendo o pensamento lógico.

Dessa forma, espera-se que o estudo de áreas e perímetros envolvido nesse trabalho, bem como as abordagens em construções/soluções de problemas geométricos, possam contribuir à Educação Básica, de modo que nós professores possamos apresentar os conteúdos de Matemática com aplicações mais interessantes, inserindo também alguns tópicos que os livros didáticos disponibilizados não abordam.

Portanto, esperamos que este trabalho possibilite aos leitores melhor compreensão de alguns tópicos de geometria, bem como proporcione maior facilidade para organizar o raciocínio e construção de argumentações lógicas. Acreditamos que o uso do Geogebra, bem como recursos tecnológicos nas aulas de matemática, pode provocar mudanças, e dar resultados positivos, na forma de organizar e apresentar um conteúdo. A matemática, em si, é uma ciência que desperta curiosidade pois, a cada resultado encontrado, temos o interesse de buscar novas ideias, pontos que justifiquem este estudo.

## REFERÊNCIAS

- [1] AGUSTINI, E. et al. O teorema isoperimétrico e o problema da cerca. FAMAT em Revista - Revista Eletrônica de Iniciação Científica da Faculdade de Matemática da UFU, Uberlândia, p. 141-152, 2005.
- [2] BRITO, D. S. ALMEIDA, L. M. W. Modelagem com geometria, google earth e os caminhos mínimos de uma praça pública. Revista do Centro de Ciências Naturais e Exatas-UFSM. Santa Maria, v. 37 Ed. Especial PROFMAT, 2015, p. 02-18. Disponível em: <https://periodicos.ufsm.br/cienciaenatura/article/viewFile/14231/pdf>. Acesso: 06/07/2018.
- [3] COELHO, J. C.. O estudo das Árvores de Steiner no Plano Euclidiano e algumas aplicações através do Algoritmo de Melzak. 2016. 59f. Tese (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Federal do Amazonas, Instituto de Ciências Exatas, 2016. Disponível em: <https://tede.ufam.edu.br/bitstream/tede/5923/5/Disserta%C3%A7%C3%A3o%20-%20Jhones%20C.%20Coelho.pdf>. Acesso: 03/03/2019.
- [4] COSTA, S.; LIMBERGER, F.. A Lenda de Dido. Vídeo, Série: Matemática na Escola. Disponível em: <http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1126>. Acesso: 26/01/2019.
- [5] DOLCE, O. POMPEO, J. N. Fundamentos da Matemática Elementar, Volume 9: Geometria Plana. São Paulo, Atual Editora, 2005.
- [6] FIGUEIREDO, D. G. Problemas de máximo e mínimo na geometria euclidiana. Revista Matemática Universitária, v. 9/10, p. 69-108, 1989.
- [7] GUIDORIZZI, H. L. Um curso de cálculo vol 2. 5.ed. Rio de Janeiro: LTC, 2001.
- [8] HERMES, A. P.; PEREIRA, J. C. P.. Máximos e mínimos na geometria euclidiana: uma abordagem histórica. Revista Eletrônica Paulista de Matemática, v. 2, n. 1, p. 1-17, 2013. Disponível em: <http://hdl.handle.net/11449/122659>.
- [9] MOREIRA, C. G. T. A; SALDANHA, N. C. A desigualdade isoperimétrica. Revista Matemática Universitária, nº 15, p. 13-19, dezembro de 1993.
- [10] NETTO, S. L. Construções Geométricas: exercícios e soluções. 1.ed. Rio de Janeiro : SBM, 2009.
- [11] NETO, A. C. M. Geometria. Rio de Janeiro : SBM, 2013.

- [12] OLIVEIRA, K. I. M.; FERNÁNDEZ, A. J. C.. Iniciação a matemática: um curso com problemas e soluções. - 2<sup>a</sup> ed. - Rio de Janeiro : SBM, 2010.
- [13] REZENDE, E. Q. F.; QUEIROZ, M. L. B.. Geometria euclidiana plana e construções geométricas. - 2<sup>a</sup>ed - Campinas, SP : Editora da UNICAMP, 2008.
- [14] SILVA, C. C. A.. A Desigualdade Isoperimétrica. 2013. 80 p. Dissertação - (mestrado) - Universidade Federal da Paraíba, Centro de Ciências Exatas e da Natureza, 2013. Disponível em: [https://sca.profmat-sbm.org.br/sca\\_v2/get\\_tcc3.php?id=30418](https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=30418).
- [15] SILVA, D. A.. Sobre problemas de máximo e mínimo na Geometria Euclidiana. 2013. 49 p. Dissertação - (mestrado) - Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Instituto de Geociências e Ciências Exatas de Rio Claro, 2013. Disponível em: <http://hdl.handle.net/11449/99835>.
- [16] WAGNER, E. Construções Geométricas. 6.ed. Rio de Janeiro : SBM, 2007.

## APÊNDICE

### A<sub>1</sub>: Triângulo de área máxima e perímetro fixo: um estudo usando função de uma variável.

Discutiremos os resultados deste apêndice utilizando as referências de [7]. Ressalta-se que este problema está proposto como um exercício de [7], página 332, questão 16. Vamos descrever esse processo fazendo um estudo sobre uma função de uma só variável. Utilizaremos algumas noções de derivadas.

Consideremos um triângulo de lados  $a$ ,  $b$  e  $c$ , com perímetro constante, tal que o lado  $a$  é dado. Sabemos que o perímetro é  $2p = a + b + c$ . Queremos maximizar a área do triângulo, quando dado seu perímetro. Assim, consideremos a fórmula de Héron:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Observe que a função  $S$  é contínua em  $[0, p]$ . Logo, atinge um valor máximo absoluto nesse intervalo.

Como a área  $S \geq 0$ , maximizar a área  $S$  será igual a maximizar  $S^2$ . Segue que:  $S^2 = p(p-a)(p-b)(p-c)$ . Como supomos  $a$  dado, segue que  $b+c = x$ ,  $x$  constante. Assim,  $x = 2p - a$  e  $a = 2p - x$ . Fazendo as devidas substituições,

$$\begin{aligned} S^2(c) &= 2p(p - (2p - x))(p - (x - c))(p - c) = 2p(x - p)(p - x + c)(p - c) \iff \\ S^2(c) &= (2px - 2p^2)(p^2 - pc - xp + xc + cp - c^2) \iff (2px - 2p^2)(p^2 - xp + xc - c^2) \end{aligned}$$

Vamos derivar e encontrar os pontos críticos da função  $S^2$ .

$$(S^2)'(c) = (2px - 2p^2)(x - 2c) \implies (S^2)'(c) = 0 \iff p = 0 \text{ ou } x = p \text{ ou } c = \frac{x}{2}.$$

Perceba que  $p = 0$  não pode, pois se trata do perímetro do triângulo. Observe também que  $x = p$  também não vale, pois contradiz a desigualdade triangular. Assim,  $(S^2)'(c) = 0 \iff c = \frac{x}{2}$  e  $c = \frac{x}{2}$  é um ponto crítico.

Derivando novamente, obtemos:

$$(S^2)''(c) = (2px - 2p^2)(-2) = 4p^2 - 4px = 2p(2p - 2x).$$

Pela desigualdade triangular, sabemos que  $p < x$ . Assim,  $(S^2)''(c) < 0 \implies (S^2)''(\frac{x}{2}) < 0$ . Logo, a função possui um máximo em  $c = \frac{x}{2}$ .

Perceba que se trata de um máximo absoluto, pois  $S(0) = S(p) = 0$ . Assim, temos que:

$$c = \frac{b+c}{2} \iff b = c$$

Logo, o triângulo é isósceles.

Suponhamos agora um triângulo de área máxima e perímetro  $2p$ . Pelo que mostramos anteriormente, este triângulo deve ser isósceles. Consideremos  $a$  e  $b$  como sendo, respectivamente, a base e os outros lados. Assim, temos por perímetro  $2p = a + 2b$ .

Novamente, usando a fórmula de Herón, temos:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-b)} = \sqrt{p(p-a)(p-b)^2} = \sqrt{p(p-a) \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{a^2 p^2}{4} - \frac{pa^3}{4}},$$

que é uma função contínua em  $a$ , com  $a \in [0, p]$ . De modo análogo,  $S$  é máximo se e somente se  $S^2$  também o é. Derivando e encontrando os pontos críticos:

$$(S^2)'(a) = \frac{a}{2}p^2 - \frac{3a^2}{4}p \implies (S^2)'(a) = 0 \iff p = 0$$

ou

$$a = \frac{2p}{3}$$

Observe que  $p = 0$  não vale, pois se trata do perímetro dado. Logo,  $a = \frac{2p}{3}$  é o único ponto fixo. Fazendo a segunda derivada da função  $(S^2(a))$ :

$$(S^2)''(a) = \frac{p^2}{2} - \frac{3a}{2}p$$

Seque que  $(S^2)''\left(\frac{2p}{3}\right) = \frac{p^2}{2} - \frac{3p}{2} \frac{2p}{3} = -\frac{p^2}{2} < 0$ . Logo,  $a = \frac{2p}{3}$  é máximo absoluto no intervalo dado.

Assim, para  $a = \frac{2p}{3}$ , temos que  $2p = 3a \implies a = b$ . Logo, o triângulo é equilátero.

□



## A<sub>2</sub>: Desigualdade Isoperimétrica para Triângulos

Segue um resultado de [12]. Consideremos o perímetro de um triângulo de lados  $a$ ,  $b$  e  $c$  como sendo a soma  $2p = a + b + c$ .

**AFIRMAÇÃO:** Dentre todos os triângulos com perímetro fixo  $2p$ , o de maior área é o triângulo equilátero.

Usaremos aqui alguns resultados sobre desigualdades: as relações entre médias.

**Demonstração:** Usando a fórmula de Herón temos que a área de um triângulo com perímetro  $2p$  é dada pela expressão

$$A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

onde  $a$ ,  $b$  e  $c$  são os lados do triângulo.

Usando a desigualdade entre a média geométrica e a média aritmética, temos que

$$A \leq \sqrt{p \left( \frac{p-a+p-b+p-c}{3} \right)^3} = \frac{p^2}{3\sqrt{3}}$$

Logo, a maior área possível é de  $\frac{p^2}{3\sqrt{3}}$ , a qual é atingida quando

$$p-a = p-b = p-c \iff a = b = c$$

ou seja, quando o triângulo é equilátero. Notemos que nesse caso,  $\frac{p^2}{3\sqrt{3}} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$