UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação

Geogebra como suporte para o ensino de Geometria por meio de construções geométricas abordadas no Programa de Iniciação Científica da OBMEP

Leila Aparecida Alves

Dissertação de Mestrado do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT)

ICMC USP
SÃO CARLOS

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura: ______________________

Leila Aparecida Alves

Geogebra como suporte para o ensino de Geometria por meio de construções geométricas abordadas no Programa de Iniciação Científica da OBMEP

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestra em Ciências – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. *VERSÃO REVISADA*

Área de Concentração: Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Orientadora: Profa. Dra. Katia Andreia Gonçalves de Azevedo

USP – São Carlos
Abril de 2019

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,
com os dados inseridos pelo(a) autor(a)

A639g

Aparecida Alves, Leila
Geogebra como suporte para o ensino de Geometria por meio de construções geométricas abordadas no Programa de Iniciação Científica da OBMEP / Leila Aparecida Alves; orientadora Katia Andreia Gonçalves de Azevedo. -- São Carlos, 2018.
137 p.

Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-Graduação em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) -- Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, 2018.

1. Construções Geométricas. 2. Geometria. 3. Software matemático no ensino. 4. Geogebra. I. Andreia Gonçalves de Azevedo, Katia , orient. II. Título.

Bibliotecários responsáveis pela estrutura de catalogação da publicação de acordo com a AACR2:
Gláucia Maria Saia Cristianini - CRB - 8/4938
Juliana de Souza Moraes - CRB - 8/6176

Leila Aparecida Alves

Geogebra as an aid to teach Geometry using geometric constructions as considered by OBMEP's Scientific Initiation Program

Dissertation submitted to the Institute of Mathematics and Computer Sciences – ICMC-USP – in accordance with the requirements of the Professional Master's Program in Mathematics in National Network, for the degree of Master in Science. *FINAL VERSION*

Concentration Area: Professional Master Degree Program in Mathematics in National Network

Advisor: Profa. Dra. Katia Andreia Gonçalves de Azevedo

USP – São Carlos
April 2019

Este trabalho é dedicado ao programa PROFMAT e às pessoas com quem convivi nesses espaços ao longo desses anos. As vivências e aprendizagens adquiridas foram a melhor experiência da minha formação acadêmica.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, pois acredito que a fé é o alimento da alma.
À minha mãe que considero como a minha primeira professora e me ensinou a importância dos estudos. Aos meus irmãos Lívia, Marina e José Miguel, pelo carinho e apoio que muito contribuíram na minha formação.
À minha professora e orientadora Prof.ª Dr.ª Katia Andreia Gonçalves de Azevedo, muito obrigada pela colaboração, incentivo, orientação e dedicação para a elaboração deste trabalho.
Aos meus amigos, professores e todos que de certo modo colaboraram para que eu alcançasse esse objetivo, em especial à Helena e ao Paulo.
De um modo geral, quero agradecer a todos do programa PROFMAT, pois esta formação com certeza me possibilitou novos olhares para a ação docente.
O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

"A Geometria faz com que possamos adquirir
o hábito de raciocinar, e esse hábito pode ser empregado,
então, na pesquisa da verdade e ajudar-nos na vida."
(Jacques Bernoulli)

RESUMO

ALVES, L. A. **Geogebra como suporte para o ensino de Geometria por meio de construções geométricas abordadas no Programa de Iniciação Científica da OBMEP**. 2019. 137 p. Dissertação (Mestrado em Ciências – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2019.

Este trabalho tem por objetivo apresentar uma maneira de solidificar certos tópicos abordados em Geometria, tanto no Ensino Fundamental quanto no Ensino Médio, por meio de construções geométricas, utilizando para isso o software matemático Geogebra ao invés da maneira tradicional com régua e compasso. As construções geométricas abordadas pelo Programa de Iniciação Científica da OBMEP (PIC) serão usadas neste trabalho. Além das construções propriamente ditas, são consideradas as demonstrações e justificativas para cada problema. Este recurso computacional possibilita ao aluno aprimorar os conhecimentos não somente em relação às construções geométricas por facilitar sua compreensão e visualização, mas também os argumentos e teoria necessários para justificar cada passagem. Por fim, pretende-se que este trabalho sirva como material de apoio ao professor que poderá usar as construções em qualquer conteúdo e em qualquer série/ano que achar conveniente.

Palavras-chave: Construções Geométricas, Recursos Computacionais no Ensino Básico, Geogebra.

ABSTRACT

ALVES, L. A. **Geogebra as an aid to teach Geometry using geometric constructions as considered by OBMEP's Scientific Initiation Program**. 2019. 137 p. Dissertação (Mestrado em Ciências – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2019.

The objective of this work is to present a way to solidify certain topics addressed in Geometry, both in Elementary and High School, through geometric constructions, using Geogebra mathematical software in detriment of the traditional way with ruler and compass. The geometric constructions considered by the OBMEP Scientific Initiation Program (PIC) will be used in this work. Besides the constructions, the demonstrations and justifications for each proposed problem are considered. This computational resource allows the student to improve knowledge not only in geometric constructions, facilitating their understanding and visualization, but also the arguments and theory necessary to justify each estage. Finally, it is intended that this work serves as support material for the teacher who can use the constructions in any content and in any series / year that considers appropriate.

Keywords: Geometric Constructions, Computational Resources in Basic Education, Geogebra.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Ponto . . . 31
Figura 2 – Reta . . . 31
Figura 3 – Plano . . . 32
Figura 4 – Ângulo . . . 32
Figura 5 – Classificação dos ângulos . . . 33
Figura 6 – Ponto Médio . . . 34
Figura 7 – Reta, Segmento e Semirreta . . . 35
Figura 8 – Retas Concorrentes e Paralelas . . . 35
Figura 9 – Ângulos alternos internos, correspondentes e opostos pelo vértice . . . 35
Figura 10 – Teorema de Thales . . . 36
Figura 11 – Polígono convexo e não convexo . . . 37
Figura 12 – Triângulo . . . 37
Figura 13 – Soma dos ângulos internos de um triângulo . . . 38
Figura 14 – Nomenclatura dos lados de um triângulo retângulo . . . 38
Figura 15 – Caso LAL . . . 39
Figura 16 – Caso ALA . . . 39
Figura 17 – Demonstração caso ALA . . . 39
Figura 18 – Caso LLL . . . 40
Figura 19 – Demonstração caso LLL . . . 40
Figura 20 – Demonstração caso CH . . . 41
Figura 21 – Semelhança de triângulos . . . 41
Figura 22 – Caso AA . . . 42
Figura 23 – Triângulo Isósceles . . . 42
Figura 24 – Triângulo Retângulo . . . 43
Figura 25 – Ângulos dos três triângulos . . . 44
Figura 26 – Triângulos Rotacionados . . . 44
Figura 27 – Relações métricas no triângulo retângulo . . . 44
Figura 28 – Mediatriz . . . 45
Figura 29 – Construção da Mediatriz . . . 46
Figura 30 – Circuncentro e circunferência circunscrita . . . 47
Figura 31 – Mediana . . . 47
Figura 32 – Baricentro . . . 48
Figura 33 – Bissetriz interna . . . 48

Figura 34 – Construção da Bissetriz 49
Figura 35 – P pertence à bissetriz do $\Delta\, ABC$ 50
Figura 36 – Incentro e circunferência inscrita 50
Figura 37 – Ortocentro nos triângulos acutângulo, obtusângulo e retângulo 51
Figura 38 – Ortocentro 52
Figura 39 – Desigualdade Triangular 52
Figura 40 – Paralelogramo 53
Figura 41 – Soma dos ângulos internos 53
Figura 42 – Ângulos opostos congruentes 54
Figura 43 – Pares de lados opostos congruentes 55
Figura 44 – Diagonais se intersectam no ponto médio 55
Figura 45 – Tipos de Paralelogramo 56
Figura 46 – Quarta Proporcional 56
Figura 47 – Circunferência 57
Figura 48 – Tangência na circunferência 58
Figura 49 – Ângulos dentro da circunferência 58
Figura 50 – Ângulo Central e Ângulo Inscrito 59
Figura 51 – Circunferência Circunscrita e Inscrita a um triângulo 60
Figura 52 – Potência de ponto 60
Figura 53 – Arco Capaz 61
Figura 54 – Atalho Geogebra 64
Figura 55 – Tela Inicial 65
Figura 56 – Ícones da barra de ferramentas 66
Figura 57 – Comando Mover 66
Figura 58 – Ponto, Interseção e Ponto Médio 66
Figura 59 – Reta, Segmento e Segmento com Comprimento Fixo 67
Figura 60 – Retas Perpendicular, Paralela, Mediatriz, Bissetriz e Tangente 68
Figura 61 – Polígonos 69
Figura 62 – Compasso, Círculo dados Centro e Um de seus Pontos, Círculo dados Centro e Raio 69
Figura 63 – Ângulo, Ângulo com Amplitude Fixa e Distância 70
Figura 64 – Controle Deslizante 71
Figura 65 – Mover Janela de Visualização, Ampliar e Reduzir 71
Figura 66 – Esconder um Objeto 72
Figura 67 – Construção Ponto Médio 77
Figura 68 – Construção Mediatriz 78
Figura 69 – Preparação - Paralela 78
Figura 70 – Construção Paralela 79
Figura 71 – Construção Perpendicular 81

Figura 72 – Divisão de um segmento . . . 83
Figura 73 – Controle Deslizante - Como preencher . . . 84
Figura 74 – Divisão Segmento - Controle Deslizante . . . 85
Figura 75 – Construção Arco Capaz . . . 86
Figura 76 – Construção Arco Capaz . . . 87
Figura 77 – Construção - Problema 1 . . . 89
Figura 78 – Construção - Problema 2 . . . 90
Figura 79 – Construção - Problema 3 . . . 92
Figura 80 – Construção - Problema 4 . . . 93
Figura 81 – Construção - Problema 5 . . . 95
Figura 82 – Controle Deslizante - Problema 6 . . . 96
Figura 83 – Construção - Problema 6 . . . 98
Figura 84 – Construção - Problema 7 . . . 100
Figura 85 – Construção 1 - Problema 8 . . . 101
Figura 86 – Construção 2 - Problema 8 . . . 102
Figura 87 – Problema 9 . . . 104
Figura 88 – Construção - Problema 10 . . . 105
Figura 89 – Problema 11 - Tangentes . . . 107
Figura 90 – Problema 11 - Arco Capaz . . . 108
Figura 91 – Problema 12 . . . 110
Figura 92 – Construção - Problema 13 . . . 112
Figura 93 – Construção - Problema 14 . . . 114
Figura 94 – Construção - Problema 15 . . . 115
Figura 95 – Solução - Problema 16 - I . . . 116
Figura 96 – Solução - Problema 16 - II . . . 116
Figura 97 – Construção - Problema 16 . . . 118
Figura 98 – Construção - Problema 16 - Final . . . 118
Figura 99 – Preparação - Problema 17 . . . 119
Figura 100 – Solução - Problema 17 . . . 119
Figura 101 – Construção - Problema 17 . . . 121
Figura 102 – Construção - Problema 18 . . . 123
Figura 103 – Construção - Problema 19 . . . 125
Figura 104 – Construção Final - Problema 19 . . . 125
Figura 105 – Preparação - Problema 20 . . . 126
Figura 106 – Solução - Problema 20 . . . 126
Figura 107 – Construção - Problema 20 . . . 128
Figura 108 – Construção - Problema 21 . . . 130
Figura 109 – Capacitação - Professores . . . 133
Figura 110 – Oficina - USP . . . 134

Figura 111 – Aplicação - Alunos com régua, papel e compasso 134
Figura 112 – Aplicação - Alunos com o Geogebra 135

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO 21

2 UMA ANÁLISE SOBRE GEOMETRIA NO CURRÍCULO DO ESTADO DE SÃO PAULO 23

3 PRÉ-REQUISITOS 31

3.1 Figuras geométricas planas 36

3.1.1 Triângulos 37

3.1.2 Elementos e pontos notáveis de um triângulo 45

3.1.3 Quadriláteros 52

3.2 Quarta proporcional 56

3.3 Circunferência 57

3.4 Equação de 2° grau: 61

4 GEOGEBRA 63

4.1 Comandos do GEOGEBRA 66

5 CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS 75

5.1 Construções elementares 76

5.2 Resolução dos Problemas 88

6 UTILIZAÇÃO E EXPERIÊNCIA DO MATERIAL 131

REFERÊNCIAS 137

CAPÍTULO

1

INTRODUÇÃO

Ensinar construções geométricas é importante não apenas no Ensino Fundamental mas também no Ensino Médio. Entretanto, esse ensino pode se tornar complexo se o professor não dominar o assunto e/ou não elaborar estratégias diferenciadas para abordar este conteúdo. Por isso, a necessidade de diversificar a aula para promover o desenvolvimento do conhecimento, em uma perspectiva pedagógica tornando assim as aulas dinâmicas, interativas e inovadoras. Desta maneira, propomos o ensino de Geometria por meio do ensino das construções geométricas utilizando o *software* livre GEOGEBRA (versão 6.0.432). Ao utilizar um recurso computacional, o ensino pode tornar-se mais prazeroso por ser uma atividade lúdica e tornar as aulas mais dinâmicas.

> Os alunos em nossas escolas estão sempre cansados, sobrecarregados e vivem esperançosos em busca de feriados e de férias. Isto não acontece com os alunos do jardim de infância e das escolas maternais. Estes mostram seu entusiasmo pela escola, exatamente porque o jardim de infância e as escolas maternais introduziram no sistema escolar a ludicidade, onde a alegria e o prazer são fatores preponderantes. Isto deveria acontecer em todos os níveis de ensino. Contestada ou não, a ludicidade será o método do futuro, pois é o único capaz de proporcionar a continuação da vida do educando de uma forma alegre, atraente e engajada, da mesma forma que atinge integralmente os objetivos vinculados aos níveis do conhecimento, da afetividade e do desenvolvimento sensorio-motor.(ALMEIDA, 1981, p. 25).

É importante o professor utilizar recursos tecnológicos na educação como método para complementar o ensino, pois o uso dessas mídias contribuem de maneira significativa para os processos de ensino e aprendizagem de forma que os estudantes possam utilizar-se de todas as potencialidades de interação e visualização que essas tecnologias proporcionam. Sendo assim, o professor pode utilizar esta estratégia para introduzir aulas de Laboratório de Matemática, na qual o aluno é protagonista e constrói o conhecimento tanto individual, como coletivo, colocando em prática o aprendizado adquirido. Assim, a motivação em trabalhar com este tema foi devido ao fato de o ensino das construções geométricas proporcionarem diversos benefícios educativos e por possibilitar a utilização de um recurso computacional com o intuito de motivar os alunos a aprenderem. Portanto, o objetivo foi preparar um material que explore problemas envolvendo as construções geométricas, que possa ser trabalhado em todas as séries/anos e que utilize um software matemático (Geogebra). Este trabalho busca então, contribuir para a formação de professores para que sejam capazes de aprimorar seus conhecimentos matemáticos articulados com o uso da tecnologia e, assim, estimular seus alunos para garantir a aprendizagem das competências indicadas nos objetivos educacionais.

No Capítulo II é feita uma análise curricular de como a Geometria é solicitada nas escolas estaduais do estado de São Paulo no Ensino Fundamental e Ensino Médio.

No Capítulo III são apresentados os teoremas e conceitos que serão necessários para compreender a resolução das construções, são os chamados pré - requisitos que caracterizam os conhecimentos prévios para cada construção.

No Capítulo IV é apresentado uma introdução sobre o *software* Geogebra, como baixá-lo e como utilizá-lo explicando cada comando que será utilizado no trabalho.

No Capítulo V, é utilizado a resolução dos problemas do livro *Uma Introdução às Construções Geométricas* (WAGNER, 2015). Este livro é parte do material associado ao programa PIC (Programa de Iniciação Científica), que é um programa para alunos premiados na OBMEP (Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas), no qual os alunos possuem contato com atividades de Matemática, ampliando seus conhecimentos matemáticos e preparando-os para um futuro desempenho profissional e acadêmico. Neste livro todas as construções são feitas com papel, régua e compasso, então apresentamos as resoluções por meio do Geogebra. Primeiramente, são realizadas as construções elementares e, em seguida, a resolução dos problemas do livro. Em cada problema são especificados os conhecimentos prévios, como preparar o problema no Geogebra, solução, construção, como é feita a verificação da construção e a justificativa, tornando este um trabalho que contribuirá para a formação do professor de Matemática.

No Capítulo VI, são apresentadas as experiências de utilização deste trabalho. Uma das experiências refere-se ao momento em que o trabalho foi aplicado durante uma etapa de formação para professores da área de exatas, em uma escola estadual de Ribeirão Preto-SP. A outra experiência trata da aplicação deste trabalho a alunos em dois momentos: em sala de aula com alunos do Ensino Médio, realizado na própria escola e uma aplicação com alunos do Ensino Fundamental, em uma oficina de estudos realizada no Departamento de Computação e Matemática (DCM -FFCLRP) da Universidade de São Paulo. Se o leitor estiver vendo esta dissertação no formato PDF, ele pode utilizar o recurso de clicar sobre a palavra que está na cor azul e assim ser direcionado ao texto no qual tem a explicação.

CAPÍTULO

2

UMA ANÁLISE SOBRE GEOMETRIA NO CURRÍCULO DO ESTADO DE SÃO PAULO

As construções geométricas são importantes no processo de ensino aprendizagem e por isso a necessidade de ser uma área de estudo em todas as séries/anos da educação básica. Vamos analisar como a Geometria é abordada na disciplina de Matemática das escolas públicas do estado de São Paulo. Em 2008 a Secretaria da Educação do Estado de São Paulo desenvolveu um currículo base para os anos iniciais e anos finais do Ensino Fundamental e Médio, com todos os conteúdos que devem ser ministrados em cada bimestre de cada série/ano nas escolas da rede pública, como forma de direcionar o professor na preparação de suas aulas. Abordaremos o "Currículo do Estado de São Paulo: Matemática e suas tecnologias"do Ensino Fundamental e Médio.

> A Secretaria da Educação do Estado de São Paulo propôs, em 2008, um currículo básico para as escolas da rede estadual nos níveis de Ensino Fundamental (Ciclo II) e Ensino Médio. Com isso, pretendeu apoiar o trabalho realizado nas escolas estaduais e contribuir para a melhoria da qualidade das aprendizagens dos alunos. Esse processo partiu dos conhecimentos e das experiências práticas já acumulados, ou seja, partiu da recuperação, da revisão e da sistematização de documentos, publicações e diagnósticos já existentes e do levantamento e análise dos resultados de projetos ou iniciativas realizados. (SÃO PAULO, 2011, p. 7).

Este currículo é uma forma de padronizar o ensino das escolas públicas do estado de São Paulo. Além desse documento o Estado entrega a todos os alunos o "caderno do aluno" (apostila) com atividades que são sugestões para o professor trabalhar segundo os conteúdos exigidos no currículo, e os professores recebem o "caderno do professor" que contém as respostas e orientações sobre os exercícios, porém, este material é apenas um apoio para o professor que deve utilizar também livros didáticos e outros recursos que julgar necessários.

> O Currículo se completa com um conjunto de documentos dirigidos especialmente aos professores e aos alunos: os Cadernos do Professor e do Aluno, organizados por disciplina/ série(ano)/bimestre. Neles, são apresentadas Situações de Aprendizagem para orientar o trabalho do professor no ensino dos conteúdos disciplinares específicos e a aprendizagem dos alunos. Esses conteúdos, habilidades e competências são organizados por série/ano e acompanhados de orientações para a gestão da aprendizagem em sala de aula e para a avaliação e a recuperação. Oferecem também sugestões de métodos e estratégias de trabalho para as aulas, experimentações, projetos coletivos, atividades extraclasse e estudos interdisciplinares. (SÃO PAULO, 2011, p. 8)

No currículo do estado de São Paulo a Geometria é apresentada de forma espiral, ou seja, está presente em todos os anos/séries, o que difere é o nível de aprofundamento.

> Consideramos que a Geometria deve ser tratada, ao longo de todos os anos, em abordagem espiralada, o que significa dizer que os grandes temas podem aparecer tanto nas séries/anos do Ensino Fundamental quanto nas do Ensino Médio, sendo a diferença a escala do tratamento dada ao tema. (SÃO PAULO, 2011, p. 41)

Assim, o professor deve trabalhar a Geometria em todas as séries/anos como achar conveniente, sendo importante que trabalhe com o desenho geométrico para que os conteúdos sejam fixados. Abaixo apresentamos como a Geometria aparece no Currículo do Estado de São Paulo, especificando as séries/anos, bimestres, o foco dado à Geometria e as habilidades adquiridas na aquisição destes conhecimentos.

- **Na 5ª série/6° ano** (**3° bimestre**)
  - Conteúdos:

    Formas geométricas: Formas planas, Formas espaciais.

    Perímetro e área: Unidades de medida, Perímetro de uma figura plana, Cálculo de área por composição e decomposição, Problemas envolvendo área e perímetro de figuras planas.
  - Habilidades:

    Saber identificar e classificar formas planas e espaciais em contextos concretos e por meio de suas representações em desenhos e em malhas.

Saber planificar figuras espaciais e identificar figuras espaciais a partir de suas planificações.

Compreender a noção de área e perímetro de uma figura, sabendo calculá-los por meio de recursos de contagem e de decomposição de figuras.

Compreender a ideia de simetria, sabendo reconhecê-la em construções geométricas e artísticas, bem como utilizá-la em construções geométricas elementares.

- **Na 6ª série/7° ano (2° e 3° bimestre)**
  - *2° Bimestre*
    - Conteúdos: Ângulos, Polígonos, Circunferência, Simetrias, Construções geométricas, Poliedros.
    - Habilidades: Compreender a ideia de medida de um ângulo (em grau), sabendo operar com medidas de ângulos e usar instrumentos geométricos para construir e medir ângulos.
      Compreender e identificar simetria axial e de rotação nas figuras geométricas e nos objetos do dia a dia.
      Saber calcular a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo e estender tal cálculo para polígonos de n lados.
      Saber aplicar os conhecimentos sobre a soma das medidas dos ângulos de um triângulo e de um polígono em situações práticas.
      Saber identificar elementos de poliedros e classificar os poliedros segundo diversos pontos de vista.
      Saber planificar e representar (em vistas) figuras espaciais.
  - *3° Bimestre*
    - Conteúdos: Razões constantes na Geometria: π
    - Habilidades: Conhecer o significado do número π como uma razão constante da Geometria, sabendo utilizá-lo para realizar cálculos simples envolvendo o comprimento da circunferência ou de suas partes.

• **Na 7ª série/8° ano (4° bimestre)**

Conteúdos: Teorema de Tales, Teorema de Pitágoras, Área de polígonos, Volume do prisma.

Habilidades: Reconhecer e aplicar o teorema de Tales como uma forma de ocorrência da ideia de proporcionalidade, na solução de problemas em diferentes contextos.

Compreender o significado do teorema de Pitágoras, utilizando-o na solução de problemas em diferentes contextos.

Calcular áreas de polígonos de diferentes tipos, com destaque para os polígonos regulares.

Saber identificar prismas em diferentes contextos, bem como saber construí-los e calcular seus volumes.

- **Na 8ª série/9° ano (3º e 4° bimestres)**

- *3° Bimestre*

Conteúdos: Proporcionalidade na Geometria, O conceito de semelhança, Semelhança de triângulos, Razões trigonométricas.

Habilidades: Saber reconhecer a semelhança entre figuras planas, a partir da igualdade das medidas dos ângulos e da proporcionalidade entre as medidas lineares correspondentes.

Saber identificar triângulos semelhantes e resolver situações-problema envolvendo semelhança de triângulos.

Compreender e saber aplicar as relações métricas dos triângulos retângulos, particularmente o teorema de Pitágoras, na resolução de problemas em diferentes contextos.

Compreender o significado das razões trigonométricas fundamentais (seno, cosseno e tangente) e saber utilizá-las para resolver problemas em diferentes contextos.

- *4° Bimestre*

Conteúdos: Corpos redondos, O número π; a circunferência, o círculo e suas partes; área do círculo, Volume e área do cilindro.

Habilidades: Conhecer a circunferência, seus principais elementos, suas características e suas partes.

Compreender o significado do π como uma razão e sua utilização no cálculo do perímetro e da área da circunferência.

Saber calcular de modo compreensivo a área e o volume de um cilindro.

- **Na 1ª série do ensino médio (4° bimestre)**

Conteúdos: Geometria/Relações Geometria-Trigonometria, Razões trigonométricas nos triângulos retângulos, Polígonos regulares: inscrição, circunscrição e pavimentação de superfícies, Resolução de triângulos não retângulos: Lei dos Senos e Lei dos Cossenos.

Habilidades: Saber usar de modo sistemático relações métricas fundamentais entre os elementos de triângulos retângulos, em diferentes contextos.

Conhecer algumas relações métricas fundamentais em triângulos não retângulos, especialmente a Lei dos Senos e a Lei dos Cossenos.

Saber construir polígonos regulares e reconhecer suas propriedades fundamentais.

Saber aplicar as propriedades dos polígonos regulares no problema da pavimentação de superfícies.

Saber inscrever e circunscrever polígonos regulares em circunferências dadas.

• **Na 2ª série do ensino médio (4° bimestre)**

Conteúdos: Geometria métrica espacial, Elementos de Geometria de posição, Poliedros, prismas e pirâmides, Cilindros, cones e esferas.

Habilidades: Compreender os fatos fundamentais relativos ao modo geométrico de organização do conhecimento (conceitos primitivos, definições, postulados e teoremas).

Saber identificar propriedades características, calcular relações métricas fundamentais (comprimentos, áreas e volumes) de sólidos como o prisma e o cilindro, utilizando-as em diferentes contextos.

Saber identificar propriedades características, calcular relações métricas fundamentais (comprimentos, áreas e volumes) de sólidos como a pirâmide e o cone, utilizando-as em diferentes contextos.

Saber identificar propriedades características, calcular relações métricas fundamentais (comprimentos, áreas e volumes) da esfera e de suas partes, utilizando-as em diferentes contextos.

Compreender as propriedades da esfera e de suas partes, relacionando-as com os significados dos fusos, das latitudes e das longitudes terrestres.

• **Na 3ª série do ensino médio (1° bimestre)**

Conteúdos: Geometria analítica, Pontos: distância, ponto médio e alinhamento de três pontos, Reta: equação e estudo dos coeficientes; problemas lineares, Ponto e reta: distância, Circunferência: equação, Reta e circunferência: posições relativas, Cônicas: noções, equações, aplicações.

Habilidades: Saber usar de modo sistemático sistemas de coordenadas cartesianas para representar pontos, figuras, relações, equações.

Saber reconhecer a equação da reta, o significado de seus coeficientes, as condições que garantem o paralelismo e a perpendicularidade entre retas.

Compreender a representação de regiões do plano por meio de inequações lineares.

> Saber resolver problemas práticos associados a equações e inequações lineares.
>
> Saber identificar as equações da circunferência e das cônicas na forma reduzida e conhecer as propriedades características das cônicas.

Analisando o currículo de Matemática do Estado de São Paulo vemos que a Geometria não tem foco nas construções geométricas. Nota-se que na 6ª série/7° ano aparece o conteúdo de construções geométricas, porém, estas construções são apenas de representações de figuras tridimensionais no plano usando malhas pontilhadas, ou seja, as construções geométricas não são trabalhadas de modo que o aluno entenda todos os princípios da Geometria. Isto pode ser considerado um grande desperdício, pois por meio das construções geométricas o aluno adquire vários conhecimentos que o ajudam a desenvolver habilidades e competências para compreender melhor os conteúdos. São muitos os benefícios e além disso a aula torna-se mais dinâmica e o aluno fica motivado a ser mais participativo desenvolvendo o protagonismo juvenil. Segundo Marmo e Marmo (1994), o desenho geométrico desenvolve do raciocínio lógico, a precisão, a organização matemática e a criatividade.

> É importante que se atente para a necessidade de incorporar a Geometria ao trabalho em todas as séries/anos da grade escolar, cabendo ao professor a busca de um equilíbrio no tratamento dos conteúdos fundamentais nos diversos bimestres. Como já se mencionou, praticamente qualquer um dos conteúdos fundamentais – Números, Geometria, Relações – presta-se naturalmente a uma articulação com os outros. (SÃO PAULO, 2011, p. 41)

> De modo geral, consideramos que, em todos os níveis, a escola deveria caracterizar-se mais como uma oficina de produção e articulação de ideias do que como uma distribuidora de conteúdos. Naturalmente, ao longo de todas as ações docentes, os conteúdos básicos entrelaçam-se continuamente. Muitas vezes, na Geometria, diversas grandezas estarão envolvidas; os números, por outro lado, sempre estarão presentes, explícita ou tacitamente. (SÃO PAULO, 2011, p. 52)

A utilização de softwares como recursos tecnológicos na educação é abordado no Currículo do Estado de São Paulo na seção *Fundamentos para o ensino da Matemática.*

> Particularmente no que tange às tecnologias e à inserção no mundo do trabalho, a Matemática está numa situação de ambivalência que, longe de ser indesejável, desempenha papel extremamente fecundo.
>
> Por um lado, certamente os numerosos recursos tecnológicos disponíveis para utilização em atividades de ensino encontram um ambiente propício para acolhimento no terreno da Matemática:

> máquinas de calcular, computadores, softwares para a construção de gráficos, para as construções em Geometria e para a realização de cálculos estatísticos são muito bem-vindos [...] (SÃO PAULO, 2011, p. 32-33)

Porém, as apostilas do Estado de São Paulo não abordam muito esta prática. Desta forma, para facilitar o dia-a-dia do professor em sala de aula, o ideal seria apresentar uma apostila somente de construções geométricas que seriam trabalhadas em todas as séries/anos, com explicações e sugestões de atividades como é feito nas demais apostilas, promovendo a possibilidade de trabalhar com aulas de Laboratório de Matemática de modo a possibilitar uma melhor compreensão dos conteúdos matemáticos pelos alunos. Contudo, o professor tem a autonomia para aprofundar os conteúdos introduzindo as construções geométricas nas suas aulas, isso pode ser feito em todos os anos já que a Geometria é abordada em todos eles. Pretende-se que este trabalho possa ser utilizado neste sentido, auxiliando o professor em sala de aula. É importante observar que ao desenvolver as habilidades proporcionadas pelo desenho geométrico o aluno fortalecerá a sua independência em resolver problemas também de outras áreas da Matemática e até em outras disciplinas.

CAPÍTULO

3

PRÉ-REQUISITOS

Existem alguns pré - requisitos que os alunos precisam saber antes de realizar as construções geométricas propostas, são os conhecimentos prévios que o professor deve trabalhar com os alunos. A Geometria é uma área da Matemática que se baseia em dois conjuntos de princípios: elementos como ponto, reta, plano e um conjunto de afirmações, aceitas sem demonstrações, chamados **Postulados**, ou **Axiomas**.

O **ponto** é representado por uma letra maiúscula do alfabeto, seu formato é como a marca que a ponta de uma agulha deixa numa folha de papel ou então no cruzamento de dois traços.

Figura 1 – Ponto

A **reta** é representada por uma letra minúscula do alfabeto, seu formato é como uma linha esticada. Pode ser representada também por quaisquer dois de seus pontos, digamos A e B, e representá-la por $r = \overleftrightarrow{AB}$. A dupla seta sobre as letras indica que a reta é infinita nos dois sentidos. Pontos pertencentes a uma mesma reta são chamados **colineares**, caso contrário, são **não colineares**. Na Figura 2 temos a reta $s = \overleftrightarrow{MN}$ e a reta $t = \overleftrightarrow{PQ}$. Os pontos M e N são colineares e os pontos M, N e P são não colineares.

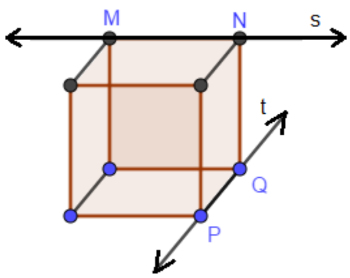


Figura 2 – Reta

O **plano** é representado por letras minúsculas do alfabeto grego: α (alfa), β (beta), π (pi) etc. Seu formato é como a superfície de uma lousa ou uma folha de caderno que se estende infinitamente em todas as direções. O plano é formado por pontos e contém retas ou figuras geométricas, assim dizemos que os pontos pertencem ao plano e as retas ou figuras geométricas são subconjuntos do plano, ou seja, estão contidas no plano. O lugar geométrico de um subconjunto do plano é o conjunto de pontos do plano que satisfazem uma determinada propriedade, por exemplo, a circunferência de raio R e centro O é o lugar geométrico dos pontos do plano que distam R do centro O.

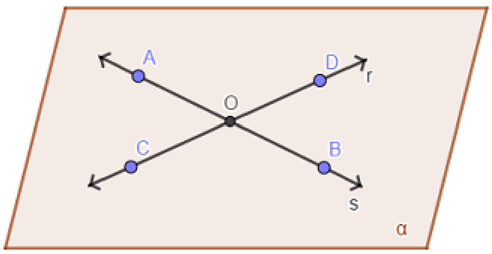


Figura 3 – Plano

Nesta figura temos o plano α e podemos afirmar que:

$A \in \alpha$ e $B \in \alpha$ então $\overleftrightarrow{AB} \subset \alpha$ e $C \in \alpha$ e $D \in \alpha$ então $\overleftrightarrow{CD} \subset \alpha$. **Ângulos:** A reunião de duas semirretas de mesma origem e não colineares, limitam duas regiões do plano, que são chamadas de ângulos. Na figura abaixo, O é o vértice, $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ são as semirretas, α é o ângulo convexo e β o ângulo não convexo.

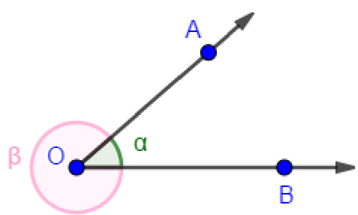


Figura 4 – Ângulo

Os ângulos são medidos em graus e são classificados de acordo com essas medidas.

a) Ângulo agudo é aquele cuja medida é maior que 0º e menor que 90º.

b) Ângulo reto é aquele cuja medida é igual a 90º.

c) Ângulo obtuso é aquele cuja medida é maior que 90º e menor que 180º.

d) Ângulo raso é aquele cuja medida é igual a 180º.

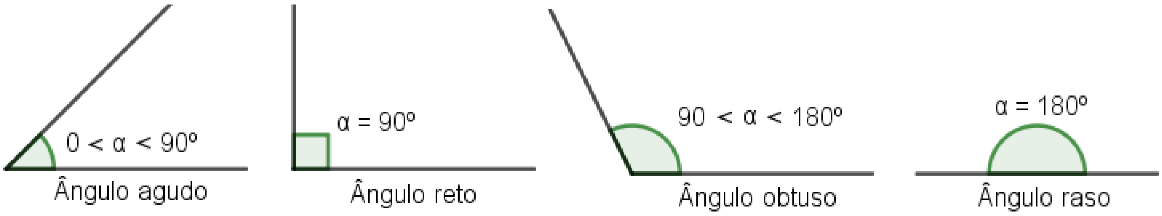


Figura 5 – Classificação dos ângulos

Na Geometria Euclidiana, temos os postulados ou axiomas de Euclides, ver (BARBOSA, 1985), são ordenados da seguinte forma.

1. Axiomas de incidência :

   1.1 : Qualquer que seja a reta existem pontos que pertencem à reta e pontos que não pertencem à reta.

   1.2 : Dados dois pontos distintos, existe uma única reta que contém estes pontos.

2. Axiomas de ordem:

   2.1 : Dados três pontos de uma reta, um e apenas um deles localiza-se entre os outros dois.

   2.2 : Dados dois pontos A e B sempre existem, um ponto C entre A e B e um ponto D tal que B está entre A e D.

   2.3 : Uma reta m determina exatamente dois semiplanos distintos cuja interseção é a reta m.

3. Axiomas de medição de segmentos e ângulos :

   3.1 : A todo par de pontos do plano corresponde um número maior ou igual a zero. Este número é zero, se e somente se, os pontos são coincidentes. O número que se refere este axioma é chamado de distância entre os pontos ou comprimento do segmento determinado pelos dois pontos.

   3.2 : Os pontos de uma reta podem ser sempre colocados em correspondência biunívoca com os números reais, de modo que a diferença entre estes números meça a distância entre os pontos correspondentes. Ao aplicarmos este axioma, o número que corresponde a um ponto da reta é denominado **coordenada** daquele ponto.

   3.3 : Se o ponto C encontra-se entre A e B, então $\overline{AC} + \overline{CB} = \overline{AB}$, isto é, o comprimento do segmento determinado por A é a soma dos comprimentos dos segmentos determinados por A e C e por C e B.

3.4 : Todo ângulo tem uma medida em grau maior ou igual a zero. A medida de um ângulo é zero, se e somente se, ele é constituído por duas semirretas coincidentes.

3.5 : É possível colocar em correspondência biunívoca, os números reais entre 0 e 180 e as semirretas de mesma origem que dividem um dado semiplano, de modo que a diferença entre estes números seja a medida do ângulo formado pelas semirretas correspondentes.

4. Axioma de congruência de triângulos :

4.1 : (1º caso de congruência de triângulos) Dados dois triângulos ABC e EFG, se dois lados são congruentes e o ângulo formado por estes lados também são congruentes, ou seja, $\overline{AB} = \overline{EF}$, $\overline{AC} = \overline{EG}$, e $\widehat{A} = \widehat{E}$, então $ABC = EFG$. (Aqui, "$=$" significa congruente).

5. Axioma das retas paralelas:

5.1 : Por um ponto fora de uma reta m pode-se traçar uma única reta paralela à reta m.

Segmento de reta: são dados dois pontos distintos A e B sobre uma reta, o segmento AB é a porção da reta r situada de A até B, isto é, é o conjunto de todos os pontos que se encontram entre A e B, inclusive os seus extremos A e B. O instrumento para medir o comprimento de um segmento é a régua graduada. Seja A um ponto que corresponde ao valor a de uma régua graduada e B o ponto que corresponde ao valor b, a medida do segmento AB é obtida pela diferença $|b-a|$ e será denotado por $\overline{AB}$. Segmentos congruentes são segmentos que possuem medidas iguais. Como consequência, um segmento é sempre congruente a ele mesmo e, dois segmentos congruentes a um terceiro, são congruentes entre si.

Chamamos de **ponto médio** de um segmento AB a um ponto M deste segmento tal que $\overline{AM} = \overline{MB}$. Um segmento possui um único ponto médio (BARBOSA, 1985, p. 16).

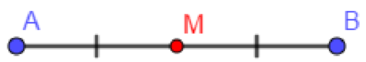


Figura 6 – Ponto Médio

Semirreta: um ponto A, situado sobre uma reta r, divide-a em duas partes, que são semirretas cujo ponto de partida é o ponto A. Escolhendo pontos B e C sobre r, um em cada uma de tais partes, podemos denotar as semirretas de origem A por $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$.

Figura 7 – Reta, Segmento e Semirreta

Dadas duas retas no plano, temos somente duas possibilidades com relação à posição dessas retas, ou elas têm um ponto em comum (concorrentes), ou não possuem nenhum ponto em comum (paralelas). Isto pode ser demonstrado utilizando os axiomas de incidência (BARBOSA, 1985, p. 1). Para indicar que duas retas são paralelas é utilizado o símbolo $\|$. Se as retas concorrentes se interceptam (cruzam) formando um ângulo reto (90º) elas são chamadas de **perpendiculares**. Para indicar que duas retas são perpendiculares é utilizado o símbolo $\perp$. Por qualquer ponto de uma reta, passa uma única reta perpendicular a esta reta (BARBOSA, 1985, p. 29).

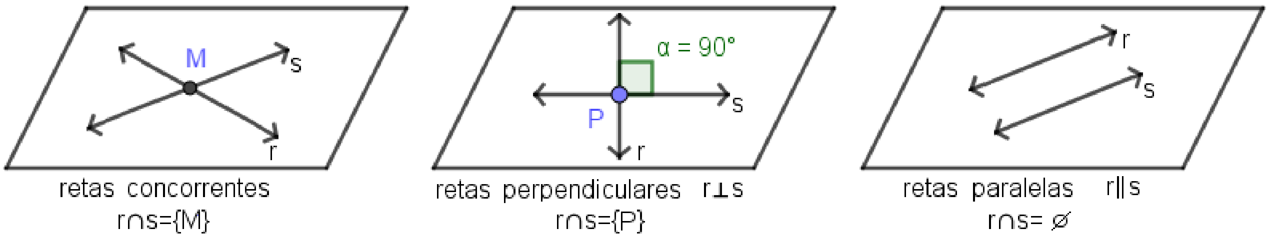


Figura 8 – Retas Concorrentes e Paralelas

Quando duas retas r e s são interceptadas por uma transversal t, formam-se oito ângulos, como indicado na figura abaixo.

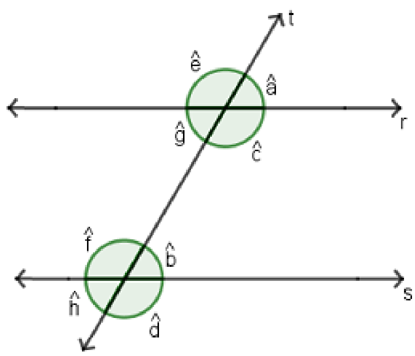


Figura 9 – Ângulos alternos internos, correspondentes e opostos pelo vértice

Os ângulos $\widehat{a}$ e $\widehat{b}$, $\widehat{c}$ e $\widehat{d}$, $\widehat{e}$ e $\widehat{f}$, $\widehat{g}$ e $\widehat{h}$ são chamados **ângulos correspondentes**, os ângulos $\widehat{a}$ e $\widehat{g}$, $\widehat{b}$ e $\widehat{h}$, $\widehat{c}$ e $\widehat{e}$, $\widehat{d}$ e $\widehat{f}$ são chamados **opostos pelo vértice** (OPV), $\widehat{c}$ e $\widehat{f}$, $\widehat{b}$ e $\widehat{g}$ são chamados ângulos **alternos internos** e $\widehat{b}$ e $\widehat{c}$, $\widehat{f}$ e $\widehat{g}$ são chamados **colaterais internos**. Temos as seguintes proposições (NETO, 2013, p. 47):

Proposição 1. As retas r e s são paralelas se, e somente se, os ângulos alternos internos são iguais.

Proposição 2. As retas r e s são paralelas se, e somente se, os ângulos correspodentes são iguais.

Proposição 3. As retas r e s são paralelas se, e somente se, a soma de quaisquer dois colaterais internos for 180º.

Vamos considerar um conjunto de retas paralelas a um plano α. O conjunto de paralelas é chamado de **feixe de paralelas**. Esse feixe de retas paralelas pode intersectar duas ou mais retas transversais, determinando sobre elas segmentos de retas proporcionalmente correspondentes. O seguinte Teorema é conhecido como Teorema de Thales.

Teorema 1. Um feixe de retas paralelas determina, em duas transversais quaisquer, segmentos que são proporcionais.

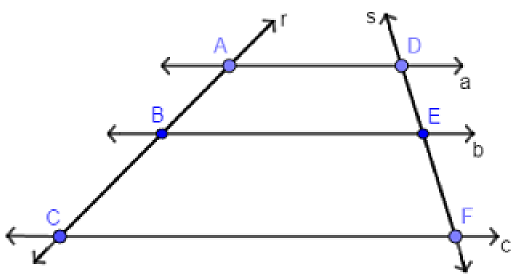


Figura 10 – Teorema de Thales

Assim, temos $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{DE}{EF}$ (lê-se AB está para BC, assim como DE está para EF). A demonstração pode ser vista em (NETO, 2013, p. 141).

3.1 Figuras geométricas planas

Neste texto o principal foco são as **figuras geométricas planas**, ou seja, uma figura geométrica em que todos os seus pontos estão no mesmo plano, essas figuras são chamadas de **polígono** se são compostas por uma linha fechada que é formada por segmentos de reta. Quando todos os pontos de um segmento de reta que possui as extremidades no interior do polígono estão dentro dele, então este polígono é **convexo**, caso contrário é não convexo. Na figura 11, o polígono a é convexo e o polígono b é não convexo.

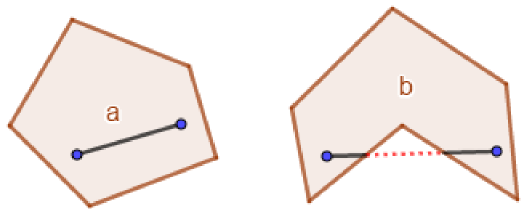


Figura 11 – Polígono convexo e não convexo

Destacamos as seguintes figuras geométricas planas e as propriedades relacionadas à elas:

3.1.1 Triângulos

Sejam A, B e C, três pontos não colineares. Considere as retas $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{BC}$ e $\overleftrightarrow{AC}$, a região delimitada por essas retas é chamada de triângulo ABC e usaremos a notação Δ ABC.

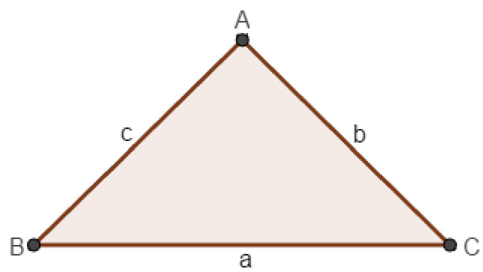


Figura 12 – Triângulo

- Os pontos A, B e C são os vértices do triângulo.
- Os segmentos AB, BC e AC são os lados do triângulo e suas medidas são dadas por $\overline{AB} = c$, $\overline{BC} = a$ e $\overline{AC} = b$.
- Os ângulos $A\widehat{B}C = \widehat{B}$, $B\widehat{C}A = \widehat{C}$ e $B\widehat{A}C = \widehat{A}$, são os ângulos internos do triângulo.

Proposição 4. A soma dos ângulos internos de qualquer triângulo é 180°.

Demonstração. Seja ABC um triângulo e $\overleftrightarrow{MN}$ a reta paralela ao lado BC e que passa pelo vértice A. Pela Proposição 1 temos que $\widehat{B} = B\widehat{A}M$, $\widehat{C} = C\widehat{A}N$. Assim, $\widehat{A} + B\widehat{A}M + C\widehat{A}N = 180^{\circ}$. Logo, $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = \widehat{A} + B\widehat{A}M + C\widehat{A}N = 180^{\circ}$. $\square$

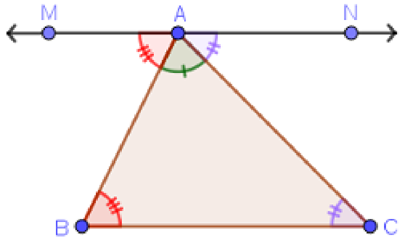


Figura 13 – Soma dos ângulos internos de um triângulo

Podemos classificar os triângulos em relação aos seus ângulos:
a) Triângulo Acutângulo é aquele que tem três ângulos agudos.
b) Triângulo Obtusângulo é aquele que tem um ângulo obtuso.
c) Trângulo Retângulo é aquele que tem um ângulo reto.

Em um triângulo retângulo os lados que formam o ângulo reto chamam-se **catetos** e o lado oposto ao ângulo reto chama-se **hipotenusa**.

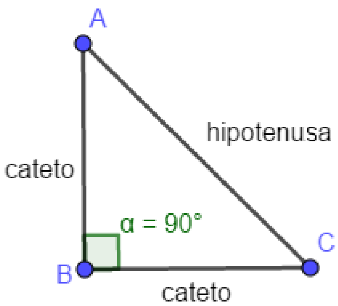


Figura 14 – Nomenclatura dos lados de um triângulo retângulo

Em todo triângulo retângulo podemos aplicar o Teorema de Pitágoras: $hip = cat + cat$, isto é, hipotenusa ao quadrado é igual a soma dos quadrados dos catetos, que será demonstrado mais adiante.

Definição 1. Dois triângulos são **congruentes** se for possível estabelecer uma correspondência biunívoca entre seus vértices de modo que lados e ângulos correspondentes sejam congruentes.

Podemos em algumas situações, afirmar que dois triângulos são congruentes, são os chamados casos de congruência de triângulos.

- **1º Caso de congruência de triângulos: lado, ângulo, lado (LAL)**
  É o Axioma 4.1, citado anteriormente: Se dois triângulos têm dois lados e o ângulo compreendido por esses lados respectivamente congruentes, então estes dois triângulos são congruentes.

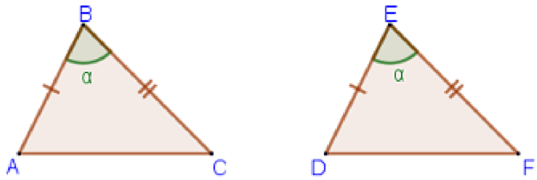


Figura 15 – Caso LAL

- **2º Caso de congruência de triângulos: ângulo, lado, ângulo (ALA)**

  Se dois triângulos têm um lado e dois ângulos adjacentes a esse lado respectivamente congruentes, então esses dois triângulos são congruentes.

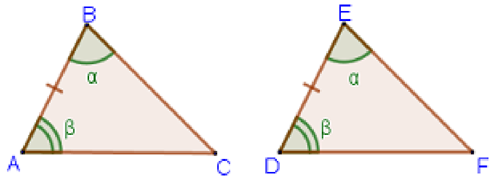


Figura 16 – Caso ALA

Demonstração. Sejam ABC e DEF dois triângulos tais que $\overline{AB} = \overline{DE}$, $\widehat{A} = \widehat{D}$ e $\widehat{B} = \widehat{E}$. Seja P um ponto do segmento $\overline{BC}$, tal que $\overline{BP} = \overline{EF}$. Então temos, $\overline{BP} = \overline{EF}$, $\overline{AB} = \overline{DE}$ e $\widehat{B} = \widehat{E}$. Concluímos pelo Axioma 4.1 que $\Delta\ ABP = \Delta\ DEF$. Como consequência, tem-se que $P\widehat{A}B = \widehat{D}$. Mas por hipótese, $\widehat{D} = \widehat{A} = B\widehat{A}C$. Logo, $P\widehat{A}B = \widehat{A}$. Consequentemente, os segmentos $\overline{AP}$ e $\overline{AC}$ coincidem e assim o ponto P coincide com o ponto C e, portanto, coincidem os triângulos ABC e ABP. Como já provamos que $\Delta\ ABP = \Delta\ DEF$, então $\Delta\ ABC = \Delta\ DEF$. □

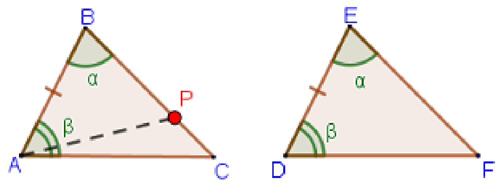


Figura 17 – Demonstração caso ALA

- **3º Caso de congruência de triângulos: lado, lado, lado (LLL)**

  Se dois triângulos têm os três lados respectivamente congruentes, então estes dois triângulos são congruentes.

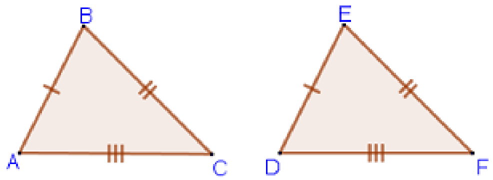


Figura 18 – Caso LLL

Demonstração. Sejam ABC e DEF dois triângulos tais que $\overline{AB} = \overline{DE}$, $\overline{BC} = \overline{EF}$ e $\overline{AC} = \overline{DF}$. Vamos provar que $\Delta\, ABC = \Delta\, DEF$, para isso construa a partir da semirreta AC e no semiplano oposto ao que contém o ponto B,um ângulo igual ao $\widehat{D}$. No lado deste ângulo que não contém o ponto C, marque um ponto P tal que $\overline{AP} = \overline{DE}$ e ligue P a C. Como $\overline{AC} = \overline{DF}$ (por hipótese), $\overline{AP} = \overline{DE}$ (por construção) e $P\widehat{A}C = \widehat{D}$ (por construção), então pelo Axioma 4.1 $\Delta\, ACP = \Delta\, DEF$. Agora vamos mostrar que os triângulos ACP e ABC são congruentes. Para isso, trace BP, como $\overline{AP} = \overline{DE} = \overline{AB}$ e $\overline{PC} = \overline{EF} = \overline{BC}$, então os triângulos APB e BPC são isósceles, por definição. Segue então que, $A\widehat{P}B = A\widehat{B}P$ e $C\widehat{P}B = C\widehat{B}P$ e logo que $A\widehat{P}C = A\widehat{B}C$. Mas então pelo Axioma 4.1, podemos concluir que os triângulos APC e ABC são iguais. Como já provamos que o triângulo APC é igual o triângulo DEF, concluimos que os triângulos ABC e DEF são congruentes. □

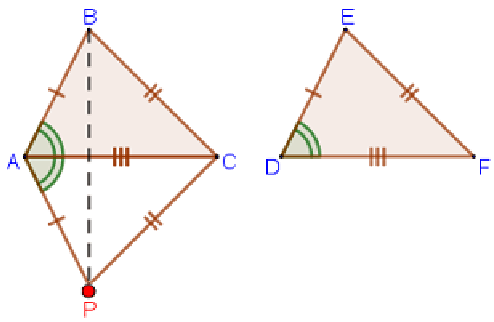


Figura 19 – Demonstração caso LLL

- **Caso especial de congruência de triângulos: Cateto, Hipotenusa (CH)** Este caso especial é um caso particular do LLL. Se dois triângulos retângulos têm congruentes um cateto e a hipotenusa, então esses triângulos são congruentes.

Demonstração. Seja $\Delta\, ABC$ um triângulo retângulo com hipotenusa medindo a e catetos medindo b e c e $\Delta\, DEF$ um triângulo retângulo com hipotenusa medindo d e catetos medindo e e f. Por hipótese temos $a = d$ e, sem perda de generalidade vamos supor, $b = e$. Assim, pelo teorema de Pitágoras, temos:

$$a^2 = b^2 + c^2 \quad \text{e} \quad d^2 = e^2 + f^2$$

Por meio da hipótese obtemos, $b^2+c^2=e^2+f^2$ e como assumimos que $b=e$, temos portanto, $c=f$. Logo, os triângulos retângulos que têm congruentes o cateto e a hipotenusa, são congruentes pelo caso LLL. $\square$

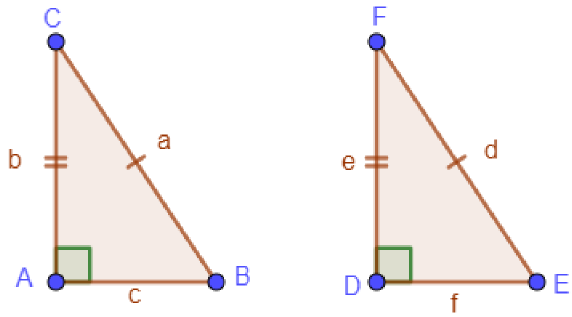


Figura 20 – Demonstração caso CH

Definição 2. Dois triângulos são **semelhantes** se for possível estabelecer uma correspondência biunívoca entre seus vértices de modo que os ângulos correspondentes sejam iguais e os lados correspondentes sejam proporcionais. Indicamos que dois triângulos são semelhantes utilizando o símbolo $\sim$.

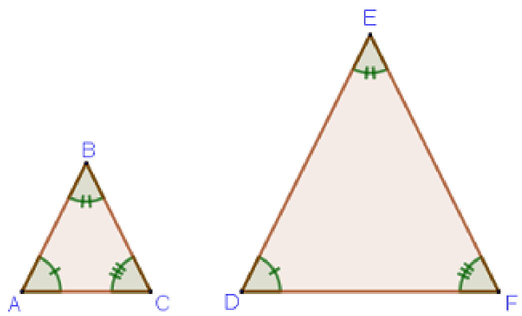


Figura 21 – Semelhança de triângulos

Teorema 2. Considere dois triângulos ABC e DEF. Se $\widehat{A}=\widehat{D}$ e $\widehat{B}=\widehat{E}$, então os triângulos são semelhantes (caso AA = ângulo, ângulo).

Demonstração. A soma dos ângulos internos de um triângulo é 180º, então a igualdade dos ângulos $\widehat{A}$ e $\widehat{D}$ e dos ângulos $\widehat{B}$ e $\widehat{E}$ resulta na igualdade dos ângulos $\widehat{C}$ e $\widehat{F}$. Agora vamos provar que os lados são proporcionais, para isso considere o segmento DF e o ponto H tal que $\overline{DH}=\overline{AC}$. Agora por H trace um segmento paralelo a EF. Este corta o segmento DE no ponto G, formando o triângulo DGH que é congruente ao triângulo ABC ($\widehat{A}=\widehat{D}$, $\overline{AC}=\overline{DH}$ e $\widehat{C}=\widehat{F}=D\widehat{H}G$). Pelo Teorema 1 temos: $\dfrac{\overline{DH}}{\overline{DF}}=\dfrac{\overline{DG}}{\overline{DE}}$. Como $\overline{DH}=\overline{AC}$ e $\overline{DG}=\overline{AB}$ então dessas igualdades temos: $\dfrac{\overline{AC}}{\overline{DF}}=\dfrac{\overline{AB}}{\overline{DE}}$. De maneira análoga, desmonstra-se que $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{DE}}=\dfrac{\overline{BC}}{\overline{EF}}$. $\square$

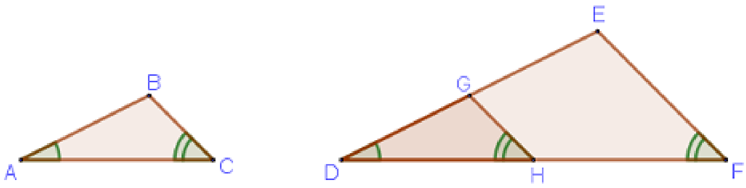


Figura 22 – Caso AA

Assim, dados $\Delta\, ABC$ e $\Delta\, DEF$ se $\widehat{A} = \widehat{D}$, $\widehat{B} = \widehat{E}$, $\widehat{C} = \widehat{F}$, então as seguintes igualdades são válidas: $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \dfrac{\overline{BC}}{\overline{EF}} = \dfrac{\overline{AC}}{\overline{DF}}$. O quociente comum entre as medidas dos lados correspondentes é chamado de razão de porporcionalidade entre os dois triângulos. Quando os dois triângulos são congruentes a razão de proporcionalidade é 1.

Teorema 3. Se em dois triângulos ABC e DEF tem-se $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \dfrac{\overline{BC}}{\overline{EF}} = \dfrac{\overline{CA}}{\overline{FD}}$, então os dois triângulos são semelhantes.

Existem outros dois casos de semelhança de triângulos, o caso LAL e LLL, os argumentos e justificativas desses casos serão omitidos (demonstrações análogas ao caso anterior).

Definição 3. Um triângulo é dito isósceles se tem dois lados congruentes, esses lados são chamados de laterais e o terceiro lado é chamado de base.

Proposição 5. Em um triângulo isósceles os ângulos da base são iguais.

Demonstração. Seja M o ponto médio do lado BC. Como $\overline{BM} = \overline{CM}$, $\overline{AB} = \overline{AC}$ e $\overline{AM}$ é lado comum dos $\Delta\, AMB$ e $\Delta\, AMC$, segue do caso de congruência LLL que tais triângulos são congruentes. Logo, $A\widehat{B}M = A\widehat{C}M$. $\square$

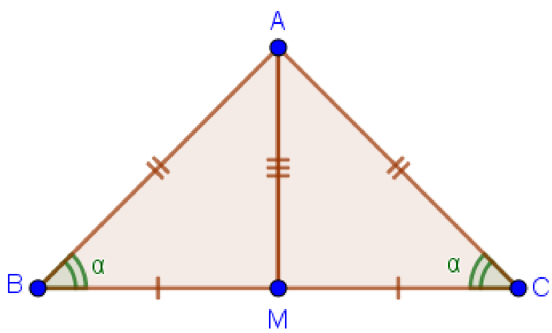


Figura 23 – Triângulo Isósceles

Definição 4. Um triângulo é dito equilátero se tem os três lados congruentes.

Proposição 6. Em um triângulo equilátero os três ângulos são iguais, medindo 60° cada um deles.

Demonstração. Basta observar que todos os lados de um triângulo equilátero podem ser vistos como bases do mesmo, considerando-o como um triângulo isósceles. Assim, todo triângulo equilátero possui três ângulos iguais e como a soma dos ângulos internos é 180º, cada um deles mede 60º. □

Definição 5. Um triângulo é dito escaleno se todos os lados e ângulos são diferentes.

Podemos destacar algumas relações métricas em um triângulo retângulo.

Consideremos o triângulo retângulo *ABC*, ver figura 24.

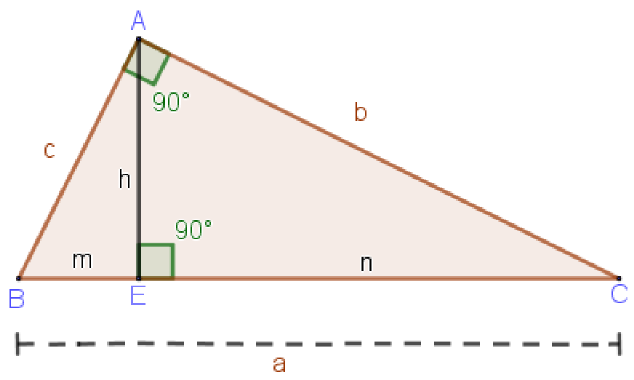


Figura 24 – Triângulo Retângulo

Os elementos deste triângulo *ABC* são: *a* (medida da hipotenusa *BC*), *b* (medida do cateto *AC*), *c* (medida do cateto *AB*), *h* (medida da altura *AE*), *m* (medida da projeção de *AB* sobre a hipotenusa), *n* (medida da projeção de *AC* sobre a hipotenusa).

Traçando a altura *AE* relativa à hipotenusa do $\Delta\, ABC$, obtemos dois outros triângulos retângulos, *EBA* e *EAC*.

Os triângulos *ABC*, *EBA* e *EAC* são semelhantes dois a dois, pois possuem dois ângulos iguais (caso AA). De fato,

$$\Delta ABC \begin{cases} \widehat{B}+\widehat{A}+\widehat{C}=180^\circ \\ \widehat{B}+90^\circ+\widehat{C}=180^\circ \\ \widehat{B}+\widehat{C}=90^\circ \end{cases} \quad \text{e} \quad \Delta BAE \begin{cases} \widehat{B}+B\widehat{A}E+\widehat{E}=180^\circ \\ \widehat{B}+B\widehat{A}E+90^\circ=180^\circ \\ \widehat{B}+B\widehat{A}E=90^\circ \end{cases}$$

Logo, $B\widehat{A}E=\widehat{C}$, pois no $\Delta\, ABC$ vimos que $\widehat{B}+\widehat{C}=90^\circ$. Note que,

$$\Delta EAC \begin{cases} \widehat{E}+E\widehat{A}C+\widehat{C}=180^\circ \\ 90^\circ+E\widehat{A}C+\widehat{C}=180^\circ \\ E\widehat{A}C+\widehat{C}=90^\circ \end{cases}$$

Logo, $E\widehat{A}C=\widehat{B}$, pois no $\Delta\, ABC$ vimos que $\widehat{B}+\widehat{C}=90^\circ$.

Assim, obtemos os seguintes triângulos com seus respectivos ângulos.

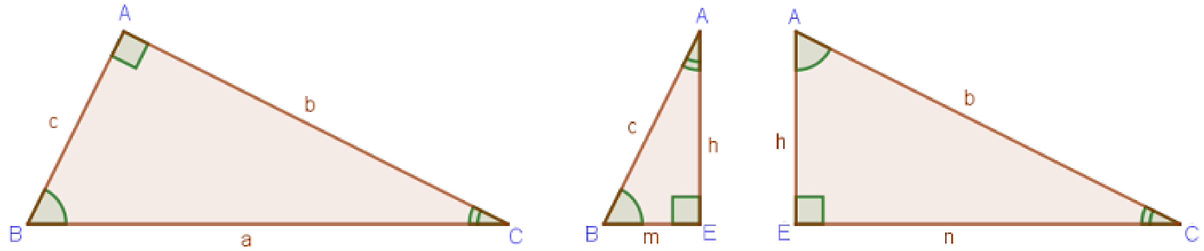


Figura 25 – Ângulos dos três triângulos

Rotacionando estes triângulos, fica visível a semelhança entre eles, ver figura 26.

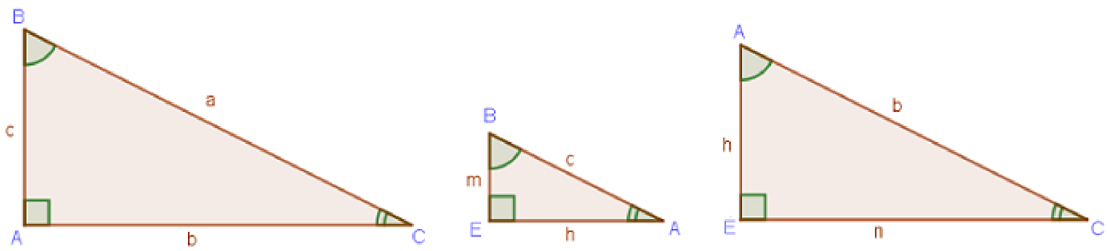


Figura 26 – Triângulos Rotacionados

Com base na semelhança de triângulos, podemos enunciar a seguinte proposição.

Proposição 7. Em todo triângulo retângulo a altura do vértice do ângulo reto é a média proporcional entre as projeções dos catetos sobre a hipotenusa.

Demonstração. Considere os triângulos EBA e EAC.

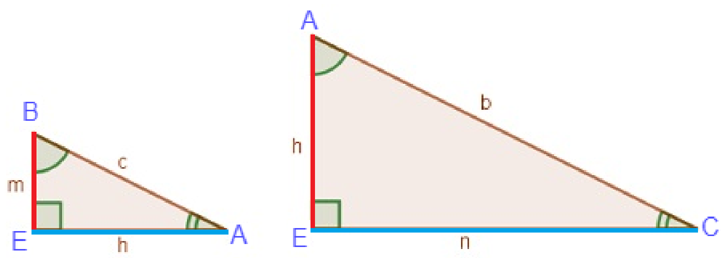


Figura 27 – Relações métricas no triângulo retângulo

Temos $\Delta\, EBA \sim \Delta\, EAC \Rightarrow \dfrac{m}{h} = \dfrac{h}{n} \Rightarrow h \cdot h = m \cdot n \Rightarrow h^2 = m \cdot n$ $\square$

Esta proposição também é conhecida como *Média geométrica de um segmento*, no qual a altura relativa à hipotenusa é a média geométrica entre as projeções dos catetos sobre a hipotenusa. Neste caso, a média geométrica é dada por $h^2 = m \cdot n$ ou $h = \sqrt{mn}$.

Teorema 4. Teorema de Pitágoras O quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos.

Demonstração. Temos:
$$\begin{cases} \Delta ABC \sim \Delta EBA \Rightarrow \dfrac{a}{c} = \dfrac{c}{m} \Rightarrow c \cdot c = a \cdot m \Rightarrow c^2 = a \cdot m \quad (I) \\ \\ \Delta ABC \sim \Delta EAC \Rightarrow \dfrac{a}{b} = \dfrac{b}{n} \Rightarrow b \cdot b = a \cdot n \Rightarrow b^2 = a \cdot n \quad (II) \end{cases}$$

Somando (I) e (II) temos:

$$b^2 + c^2 = a \cdot m + a \cdot n \iff b^2 + c^2 = a(m+n) \iff b^2 + c^2 = a \cdot a \iff b^2 + c^2 = a^2. \quad \square$$

3.1.2 Elementos e pontos notáveis de um triângulo

Podemos também determinar outros elementos notáveis nos triângulos, como mediatriz, mediana, bissetriz e altura e também seus respectivos pontos notáveis, como o circuncentro, baricentro, incentro, e ortocentro. Vamos determinar cada um deles e demonstrar suas características.

I **Mediatriz e Circuncentro**

Mediatriz:

Definição 6. Dados os pontos A e B no plano, a mediatriz do segmento AB é a reta perpendicular ao segmento AB, que passa pelo ponto médio de AB.

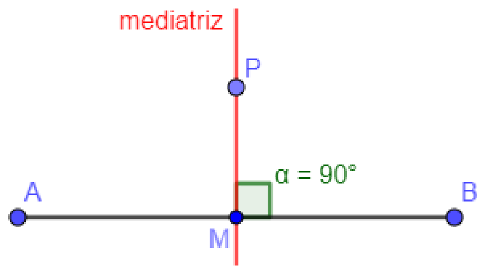


Figura 28 – Mediatriz

Proposição 8. O lugar geométrico da mediatriz de um segmento AB é o conjunto de todos os pontos que estão a uma mesma distância dos extremos deste segmento.

Demonstração. Sejam AB um segmento e m a mediatriz deste segmento passando pelo ponto médio M de AB. Considere P um ponto sobre m. Então $\overline{AM} = \overline{MB}$, $A\widehat{M}P = B\widehat{M}P = 90°$ e MP é lado comum aos triângulos AMP e BMP.

Assim, pelo caso LAL, temos que os triângulos são congruentes e $\overline{AP} = \overline{PB}$. Logo, qualquer ponto sobre a mediatriz está a uma mesma distância dos extremos do segmento.

Por outro lado, se todos os pontos que estão sobre a reta distam o mesmo dos segmentos, então $\overline{AM} = \overline{MB}$ (M é o ponto médio de AB), $\overline{AP} = \overline{PB}$ e PM é lado comum aos triângulos AMP e BMP, ou seja, são congruentes pelo caso LLL. Logo, $P\widehat{M}A = P\widehat{M}B$ e $P\widehat{M}A + P\widehat{M}B = 180°$, implicando que $P\widehat{M}A = P\widehat{M}B = 90°$ e a reta é perpendicular ao segmento AB, passando pelo ponto médio. Logo, é a mediatriz. □

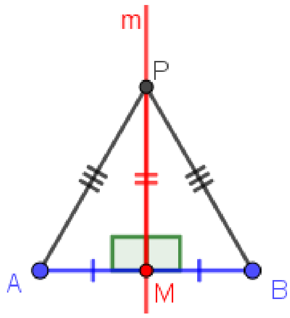


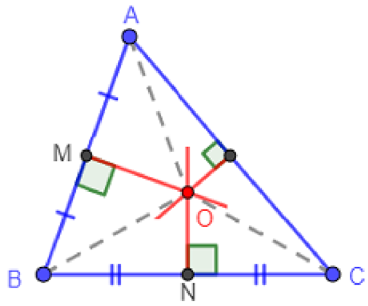
Figura 29 – Construção da Mediatriz

Teorema 5. Seja ABC um triângulo, as mediatrizes dos lados AB, AC e BC interceptam num ponto O. Além disso, a distância do ponto O aos vértices são iguais, ou seja, $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC}$.

Demonstração. Sejam M, N e P, pontos médios dos lados AB, BC e AC, respectivamente. Seja O o ponto de interseção das mediatrizes relativas aos lados. Temos que, se o ponto O na mediatriz de AB, então este ponto é equidistante de A e de B, ou seja, $\overline{OA} = \overline{OB}$. Analogamente, $\overline{OB} = \overline{OC}$ e consequentemente, O é equidistante dos vértices. Agora considere a reta passando por P e O. Como P é o ponto médio e O é equidistante de A e C, a reta PO é mediatriz do lado AC. Portanto, todas as mediatrizes cruzam em O que é equidistante dos vértices. □

A circunferência que passa em todos os vértices de um polígono é chamado de circunferência circunscrita.

<u>Circuncentro:</u> é o ponto onde as três mediatrizes de um triângulo se encontram, é denotado por O. É também o centro da circunferência circunscrita ao triângulo e note que este centro pode estar dentro do triângulo e nesse caso o triângulo é acutângulo, fora do triângulo e nesse caso o triângulo é obtusângulo, ou sobre o triângulo e nesse caso o triângulo é retângulo.



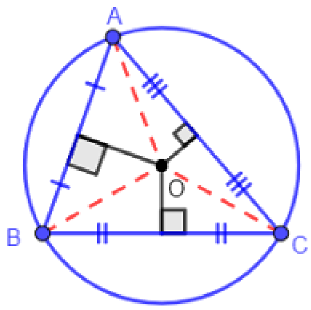


Figura 30 – Circuncentro e circunferência circunscrita

II **Mediana e Baricentro**

Mediana: é o segmento que une um vértice ao ponto médio do lado (aresta) oposto. Todo triângulo possui três medianas, cada uma relativa a um lado. Elas se encontram em um ponto chamado **Baricentro**.

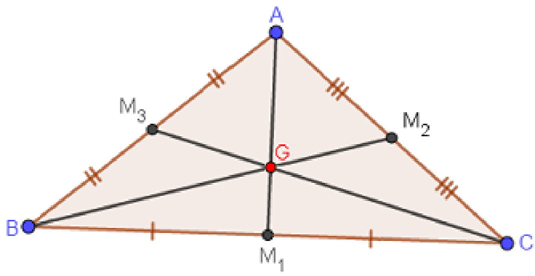


Figura 31 – Mediana

Na figura 31 temos que: AM_1 é a mediana relativa ao lado BC, BM_2 é a mediana relativa ao lado AC, CM_3 é a mediana relativa ao lado AB e G é o encontro das três medianas (baricentro).

Baricentro: é o ponto onde as três medianas de um triângulo se encontram, será denotado por G. O Baricentro divide cada mediana em duas partes, sendo que a parte que contém o vértice é o dobro da outra.

Teorema 6. Seja ABC um triângulo, M, N, os pontos médios dos lados BC e AC, respectivamente. Então as medianas AM e BN interceptam-se num ponto G do interior do $\Delta\, ABC$. Além disso, $\overline{AG} = 2\overline{GM}$ e $\overline{BG} = 2\overline{GN}$, ou seja, $\overline{AG} = \dfrac{2}{3}\overline{AM}$ e $\overline{BG} = \dfrac{2}{3}\overline{BN}$.

Demonstração. Seja P, o ponto médio de AG e Q, o ponto médio de BG. Ligando P com Q e M com N, temos que:

$$\begin{cases} PQ = \dfrac{1}{2}AB, \quad PQ \parallel AB \\ \\ MN = \dfrac{1}{2}AB, \quad MN \parallel AB \end{cases}$$

Assim, $MN \parallel PQ$ e $MN = PQ$.

Logo, $PQMN$ é um paralelogramo (veja a definição mais adiante), PM, QN são as diagonais e G é o ponto de encontro das diagonais. No paralelogramo, o ponto de encontro das diagonais é também o ponto médio delas, então $PG = GM$ e se P é ponto médio de AG, $AP = PG$, logo $AP = PG = GM$, então $\overline{AG} = 2\overline{GM}$, ou seja, $\overline{AG} = \dfrac{2}{3}\overline{AM}$. Analogamente, temos $\overline{BG} = 2\overline{GN}$.

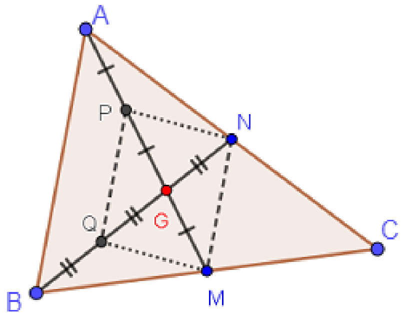


Figura 32 – Baricentro

□

De modo similar, se prova que a 3^a mediana (CO) também intercepta o ponto G e que $\overline{CG} = 2\overline{GO}$.

III Bissetriz e Incentro

<u>Bissetriz interna:</u> É a reta que divide um ângulo do vértice ao meio, passando pelo próprio vértice e interceptando o lado oposto. Todo triângulo tem três bissetrizes internas, cada uma de um ângulo interno e elas se encontram em um ponto chamado **Incentro**.

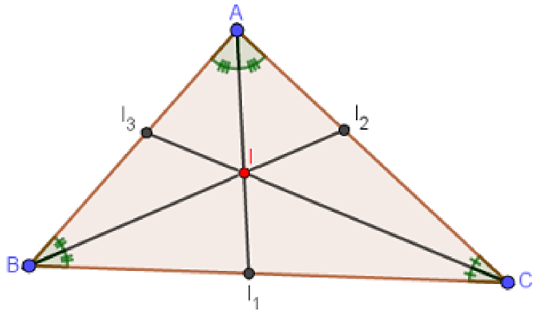


Figura 33 – Bissetriz interna

Na figura 33 temos que: AI_1 é a bissetriz relativa ao ângulo $\widehat{A}$, BI_2 é a bissetriz relativa ao ângulo $\widehat{B}$, CI_3 é a bissetriz relativa ao ângulo $\widehat{C}$ e I é o encontro das três bissetrizes (incentro).

Vamos apresentar a construção da bissetriz de um vértice de um triângulo dado.

Considere duas semirretas $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ formando o ângulo $\widehat{A} = B\widehat{A}C$. Para construir a bissetriz do ângulo $\widehat{A}$, deve-se seguir os seguintes passos: com compasso em A e com uma abertura constante r, marque os pontos $X \in AB$ e $Y \in AC$. Depois, com outra abertura s, tal que s seja maior que a metade de $\overline{XY}$, trace duas circunferências, uma de centro em X e outra de centro em Y, as duas circunferências se interceptam nos pontos P e Q. A semirreta $\overrightarrow{AP}$ é a bissetriz do ângulo $\widehat{A}$. Temos dois triângulos formados, XAP e YAP, onde $\overline{AX} = \overline{AY} =$ raio r e $\overline{XP} = \overline{YP} =$ raio s. O lado AP é comum para os dois triângulos. Assim, segue do caso de congruência LLL que $\Delta\, XAP \equiv \Delta\, YAP$ e, portanto, $X\widehat{A}P = Y\widehat{A}P$. Logo a bissetriz AP divide o ângulo em dois ângulos iguais.

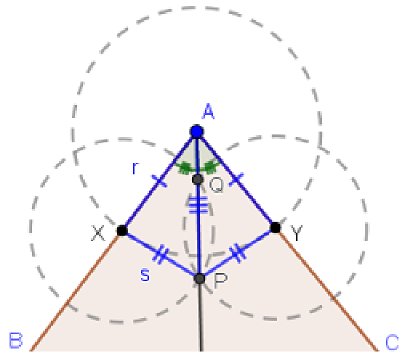


Figura 34 – Construção da Bissetriz

O papel da bissetriz de um ângulo como lugar geométrico está essencialmente contida na proposição a seguir, a distância entre um ponto P à semirreta $\overrightarrow{AB}$ será denotada por $d(P,\overrightarrow{AB})$.

Proposição 9. Seja $A\widehat{B}C$ um ângulo dado. Se P é um ponto da bissetriz, então $d(P,\overrightarrow{AB}) = d(P,\overrightarrow{BC}) \Leftrightarrow P \in$ bissetriz de $A\widehat{B}C$.

Demonstração. Suponha primeiro que P pertence à bissetriz de $A\widehat{B}C$ e sejam M e N, respectivamente, os pés das perpendiculares baixadas de P às semirretas $\overrightarrow{BA}$ e $\overrightarrow{BC}$. Considere os triângulos BMP e BNP, temos $M\widehat{B}P = N\widehat{B}P$, $B\widehat{M}P = B\widehat{N}P = 90°$ e OP é lado comum aos mesmos, então estes triângulos são congruentes pelo caso LAA_o. Logo, $\overline{PM} = \overline{PN}$, ou seja, $d(P,\overrightarrow{AB}) = d(P,\overrightarrow{BC})$.

Reciprocamente, seja P um ponto no interior do triângulo, tal que $\overline{PM} = \overline{PN}$, onde M e N, são os pés das perpendiculares baixadas de P, respectivamente às semirretas $\overrightarrow{BA}$ e $\overrightarrow{BC}$. Então os triângulos MBP e NBP são novamente congruentes pelo caso CH (cateto, hipotenusa), pois BP é a hipotenusa comum e $\overline{PM} = \overline{PN}$. Então $M\widehat{B}P = N\widehat{B}P$, de forma que P pertence à bissetriz do $\Delta\, ABC$. $\square$

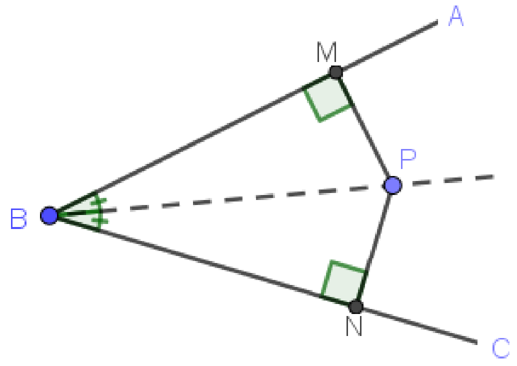


Figura 35 – P pertence à bissetriz do $\Delta\, ABC$

Teorema 7. Seja ABC um triângulo, as bissetrizes dos ângulos $\widehat{A}$, $\widehat{B}$ e $\widehat{C}$ interceptam - se em um único ponto I no interior do $\Delta\, ABC$. Além disso, a distância de I até AB, AC e BC são iguais.

Demonstração. Sejam r, s e t, respectivamente, as bissetrizes internas dos ângulos $\widehat{A}$, $\widehat{B}$ e $\widehat{C}$ do triângulo ABC e I o ponto interseção das retas r e s. Como $I \in r$, segue da caracterização das bissetrizes como lugar geométrico, dada à proposição anterior, que I equidista dos lados AB e AC. Analogamente, $I \in s$ garante que I equidista dos lados AB e BC (ver figura 36, à esquerda, segmentos verdes). Portanto I equidista de AC e BC e, usando novamente a caracterização de bissetrizes, concluímos que I pertence à bissetriz do ângulo $\widehat{C}$, ou seja, à reta t. Assim, r, s e t concorrem em I. $\square$

A circunferência com centro em I e raio sendo a distância de I a AB é chamada de circunferência inscrita ao triângulo ABC.

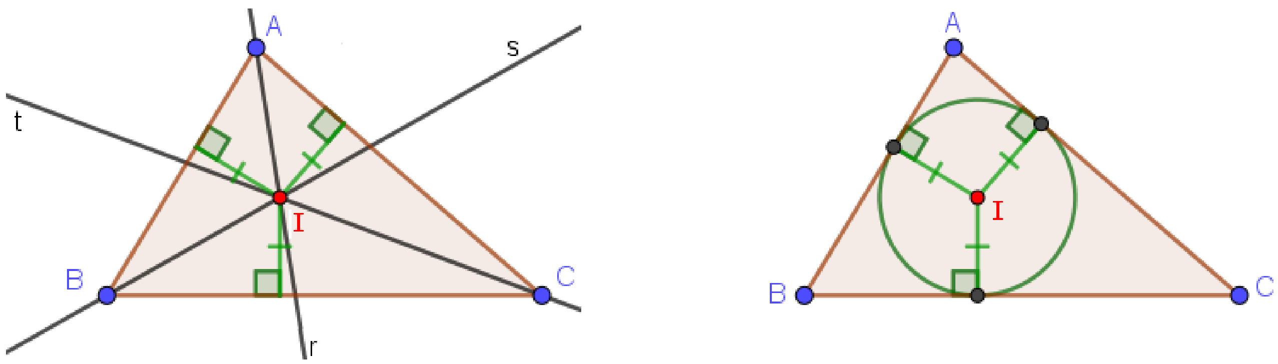


Figura 36 – Incentro e circunferência inscrita

IV Altura e Ortocentro

Altura de um lado do triângulo: é a perpendicular traçada de um vértice ao lado oposto ou ao seu prolongamento. Esse lado é chamado base da altura, e o ponto onde a altura encontra a base é chamado de pé da altura.

Ortocentro: é o ponto onde as três alturas de um triângulo se encontram (interceptam) e é denotado por H. No triângulo acutângulo o Ortocentro fica interno, no triângulo obtusângulo fica externo e no triângulo retângulo é o vértice do triângulo que contém o ângulo reto.

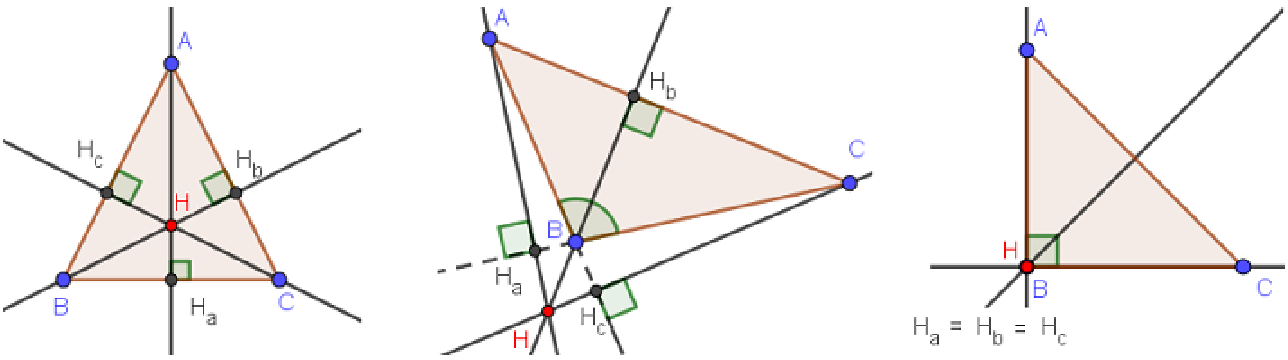


Figura 37 – Ortocentro nos triângulos acutângulo, obtusângulo e retângulo

Teorema 8. Seja o triângulo ABC, r, s e t, as retas determinadas pelas alturas relativamente a A , B e C, respectivamente. Então r, s e t se interceptam em um único ponto H.

Demonstração. Considere as retas paralelas aos lados, passando pelos vértices opostos. Estas retas não são paralelas duas a duas, pois os lados dos triângulos não são paralelos dois a dois. Logo estas retas se cruzam duas a duas, formando um triângulo. Considerando D, E e F, as intersecções das retas paralelas a AB e AC, BC e AB, BC e AC, respectivamente, podemos considerar o $\Delta\ DEF$. Então temos que DE, EF e FD são paralelos aos lados BA, CB e AB, respectivamente. Afirmamos que o $\Delta\ BAF$ é congruente ao $\Delta\ ABC$. De fato, como AF é paralelo a BC, $A\widehat{B}C = B\widehat{A}F$, pois são alternos internos. Da mesma forma, BF ser paralelo a AC implica que $B\widehat{A}C = A\widehat{B}F$. Como BA é comum, pelo caso de congruência ALA, temos que o $\Delta\ BAF$ e o $\Delta\ ABC$ são congruentes. Da mesma forma, podemos mostrar que o $\Delta\ CEA$ e o $\Delta\ DCB$ também são congruentes ao $\Delta\ ABC$. Assim, $\overline{FA} = \overline{AE}$, $\overline{FB} = \overline{BD}$ e $\overline{EC} = \overline{CD}$. Logo, o prolongamento das alturas do $\Delta\ ABC$ são mediatrizes do $\Delta\ DEF$ e eles se interceptam, pelo Teorema 5. □

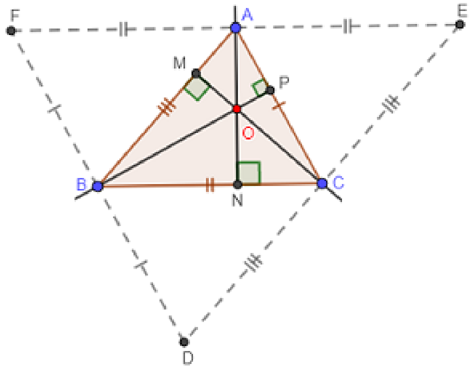


Figura 38 – Ortocentro

Proposição 10. Se ABC é um triângulo, tal que $\widehat{B} > \widehat{C}$, então $\overline{AC} > \overline{AB}$.

Para uma demonstração ver (NETO, 2013, p. 56).

Proposição 11. (Desigualdade Triangular) Em todo triângulo, cada lado é menor que a soma dos outros dois lados.

Demonstração. Seja ABC um triângulo, tal que $\overline{AB} = c$, $\overline{AC} = b$ e $\overline{BC} = a$. Vamos provar apenas que $a < b + c$, pois as outras desigualdades são análogas. Marque o ponto D sobre a semirreta $\overrightarrow{CA}$ tal que $A \in CD$ e $\overline{AD} = \overline{AB}$.

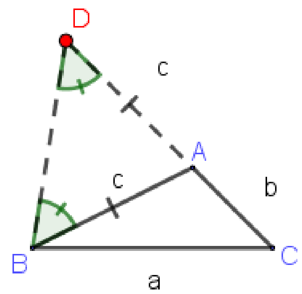


Figura 39 – Desigualdade Triangular

Temos que $\overline{CD} = \overline{AC} + \overline{AD} = \overline{AC} + \overline{AB} = b + c$. Como o triângulo BDA é isósceles temos, $B\widehat{D}A = D\widehat{B}A$, assim basta observamos que $B\widehat{D}C = B\widehat{D}A = D\widehat{B}A < D\widehat{B}A + A\widehat{B}C = D\widehat{B}C$. Sendo a, b e c os comprimentos dos lados de um triângulo, segue da Proposição 10 que $a < b + c$.

□

3.1.3 Quadriláteros

Um quadrilátero é um polígono de quatro lados, como por exemplo, paralelogramo, quadrado, retângulo, losango, etc.

Definição 7. Paralelogramo é o quadrilátero que tem os lados opostos paralelos.

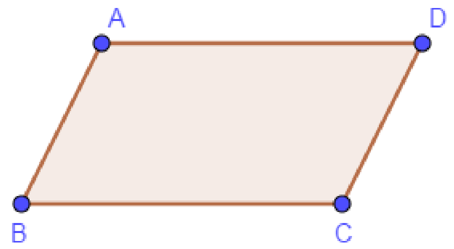


Figura 40 – Paralelogramo

Vamos demonstrar algumas propriedades dos paralelogramos, tais como, a soma dos ângulos internos é 360°, os ângulos e lados opostos são congruentes e as diagonais se cruzam no ponto médio.

1º) *A soma dos ângulos internos de um quadrilátero é 360°*

Demonstração. Seja $ABCD$ um quadrilátero convexo, a diagonal AC o divide em dois triângulos. Já sabemos que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180°, logo a soma dos ângulos internos de um quadrilátero é a soma dos ângulos internos de dois triângulos. Assim a soma será: $180° + 180° = 360°$. □

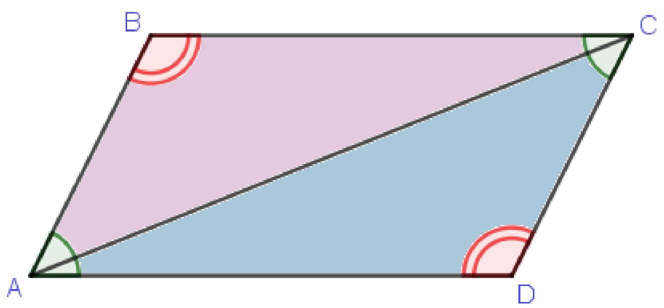


Figura 41 – Soma dos ângulos internos

2º) *Um quadrilátero convexo é um paralelogramo se, e somente se, seus ângulos opostos forem congruentes*

Demonstração. (⇒) Suponha que o quadrilátero $ABCD$ é um paralelogramo, então $AB \parallel CD$ e $AD \parallel BC$, assim os ângulos $\widehat{A}$ e $\widehat{D}$ são colaterais internos em relação ao lado AD e os ângulos $\widehat{C}$ e $\widehat{D}$ são colaterais internos em relação ao lado CD. Então temos:

$\widehat{A}+\widehat{D}=180^\circ \Rightarrow \widehat{D}=180^\circ-\widehat{A}$ (I),

$\widehat{D}+\widehat{C}=180^\circ$ (II).

Substituindo (I) em (II) temos: $180^\circ-\widehat{A}+\widehat{C}=180^\circ$. Portanto $\widehat{A}=\widehat{C}$.

Por outro lado, se $A\widehat{B}D=C\widehat{D}B$ e $C\widehat{B}D=A\widehat{D}B$, então $A\widehat{B}D+C\widehat{B}D=C\widehat{D}B+A\widehat{D}B$. Logo, $\widehat{B}\equiv\widehat{D}$.

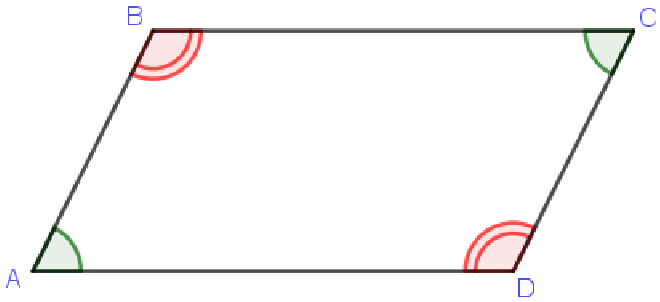


Figura 42 – Ângulos opostos congruentes

$(\Leftarrow)$ Seja $ABCD$ um quadrilátero convexo, em que $\widehat{A}=\widehat{C}$ e $\widehat{B}=\widehat{D}$, então $\widehat{A}+\widehat{B}=\widehat{C}+\widehat{D}$ e , como $\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{C}+\widehat{D}=360^\circ$, temos que $\widehat{A}+\widehat{B}=\widehat{C}+\widehat{D}=180^\circ$. Analogamente, $\widehat{A}+\widehat{D}=\widehat{B}+\widehat{C}=180^\circ$. Agora, como a soma dos colaterais internos é igual a 180°, isso implica que $AB \parallel CD$ e $AD \parallel BC$, de maneira que $ABCD$ tem lados opostos paralelos, isto é, é um paralelogramo. □

3º) *Um quadrilátero convexo é um paralelogramo se, e somente se, seus pares de lados opostos forem congruentes:*

Demonstração. $(\Rightarrow)$ Suponha que $ABCD$ é um paralelogramo, então já sabemos que $\widehat{A}=\widehat{C}$. Traçamos a diagonal BD. Sabemos que $AB \parallel CD$, então considerando os triângulos ABD e CDB, temos:

$A\widehat{B}D=C\widehat{D}B=\alpha$ (alternos internos), $\overline{BD}=\overline{BD}$, é o lado comum nos dois triângulos e $C\widehat{B}D=A\widehat{D}B=\beta$ (alternos internos), então pelo caso ALA temos $\Delta\, ABD\equiv\Delta\, CDB$.

Consequentemente, teremos: $\overline{AB}=\overline{CD}$ e $\overline{BC}=\overline{AD}$.

$(\Leftarrow)$ Seja $ABCD$ um quadrilátero convexo, tal que $\overline{AB}=\overline{CD}$ e $\overline{AD}=\overline{BC}$. Traçando a diagonal BD, teremos dois triângulos ABD e BCD, que são congruentes pelo caso LLL, donde segue que $A\widehat{B}D=C\widehat{D}B$ e $A\widehat{D}B=C\widehat{B}D$, que são alternos internos o que implica que $AB \parallel CD$ e $AD \parallel BC$. Logo, este quadrilátero é um paralelogramo. □

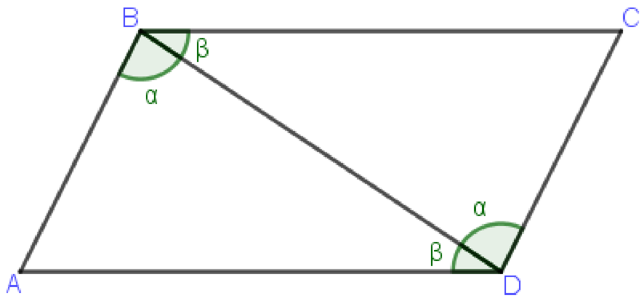


Figura 43 – Pares de lados opostos congruentes

4º) *Um quadrilátero convexo é um paralelogramo se, e somente se, suas diagonais se intersectam nos respectivos pontos médios:*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Suponha que o quadrilátero $ABCD$ é um paralelogramo e M é a interseção das duas diagonais. Como $AD \parallel BC$, então $D\widehat{A}M = B\widehat{C}M$, pois são alternos internos formados por AC. Também temos que $C\widehat{B}M = A\widehat{D}M$, pois são alternos internos formados por BD. Sabemos que $\overline{AD} = \overline{BC}$, então $\Delta\ MAD$ e $\Delta\ MBC$ são congruentes pelo caso ALA. Logo, $\overline{AM} = MC$ e $\overline{BM} = \overline{MD}$. Assim, as diagonais se cruzam no ponto médio.

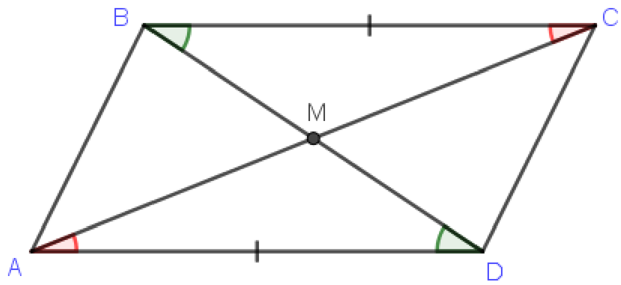


Figura 44 – Diagonais se intersectam no ponto médio

($\Leftarrow$) Seja $ABCD$ um quadrilátero cujas diagonais AC e BD se interseptam no ponto médio M de ambas. Então $\overline{AM} = \overline{MC}$, $\overline{BM} = \overline{MD}$ e $B\widehat{M}C = A\widehat{M}D$ (ângulos opostos pelo vértice), de modo que os triângulos BCM e DAM são congruentes pelo caso LAL. Analogamente, $\Delta\ BAM$ e $\Delta\ CDM$ também são congruentes por LAL. Tais congruências nos dão, respectivamente, $\overline{AD} = \overline{BC}$ e $\overline{AB} = \overline{CD}$, o que implica que $ABCD$ é um paralelogramo. $\square$

Podemos classificar os paralelogramos nos seguintes tipos:

a) Retângulo: possui quatro ângulos retos.

b) Losango: possui os quatro lados congruentes. As diagonais estão nas bissetrizes dos ângulos internos e são perpendiculares entre si.

c) Quadrado: possui os quatro lados congruentes e os quatro ângulos retos.

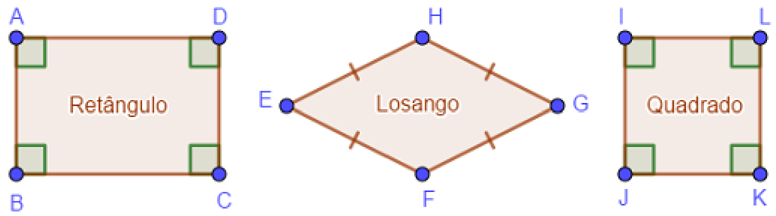


Figura 45 – Tipos de Paralelogramo

Note que: Todo quadrado é um losango e todo quadrado é um retângulo.

3.2 Quarta proporcional

Dados os pontos A, O, B, C, D, os segmentos $\overline{OA} = a$, $\overline{OB} = b$, $\overline{AC} = c$ e $\overline{BD} = x$, dizemos que o segmento x é a quarta proporcional desses segmentos quando: $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{x}$. Sua construção é feita utilizando o Teorema 1.

Sobre um ângulo qualquer de vértice O tomemos sobre um lado os segmentos $\overline{OA} = a$, $\overline{AC} = c$ e, sobre o outro lado, $\overline{OB} = b$. Traçando por C uma paralela ao segmento AB determinamos o ponto D na semirreta OB. O segmento $\overline{BD} = x$ é a solução da equação: $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{x}$.

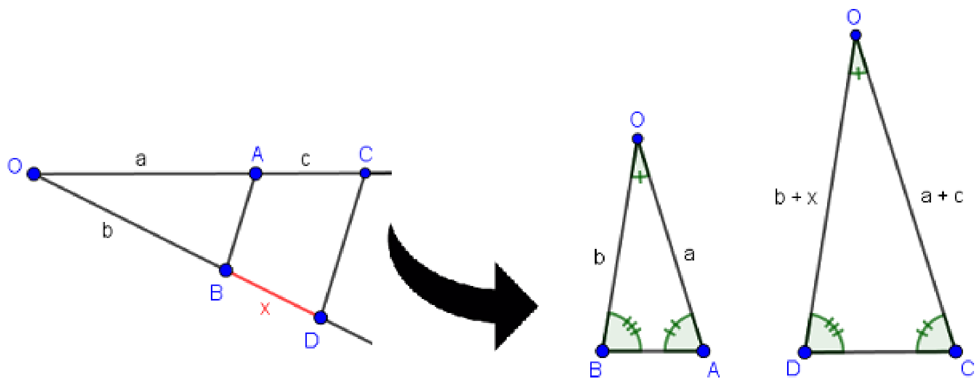


Figura 46 – Quarta Proporcional

De fato, temos nesta construção que $\Delta\ OBA$ é semelhante ao $\Delta\ ODC$, pois $\widehat{O}$ é um ângulo comum, $O\widehat{B}A = O\widehat{D}C$ e $O\widehat{A}B = O\widehat{C}D$ pois são ângulos correspondentes. Os segmentos paralelos AB e CD são cortados pelas transversais OD e OC, pelo Teorema 1 temos a seguinte relação:

Se $\overline{OB} = b$, $\overline{OA} = a$, $\overline{OD} = b + x$ e $\overline{OC} = a + c$, então $\dfrac{a}{b} = \dfrac{a+c}{b+x} \Rightarrow a \cdot (b+x) = b \cdot (a+c) \Rightarrow ab + ax = ab + bc \Rightarrow ax = bc \Rightarrow \dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{x}$.

3.3 Circunferência

Dados um ponto O e $r > 0$, definimos uma circunferência de centro O e raio r o conjunto de todos os pontos que distam de O o valor r.

Definição 8. Corda é o segmento que une 2 pontos quaisquer de uma circunferência. Toda corda que passa pelo centro recebe o nome de diâmetro. Dados dois pontos A e B sobre uma circunferência, esta fica dividida em duas partes. Cada uma dessas partes é denominada **arco**, o arco $\widehat{AB}$ é o arco formado pelo ângulo $A\hat{O}B$.

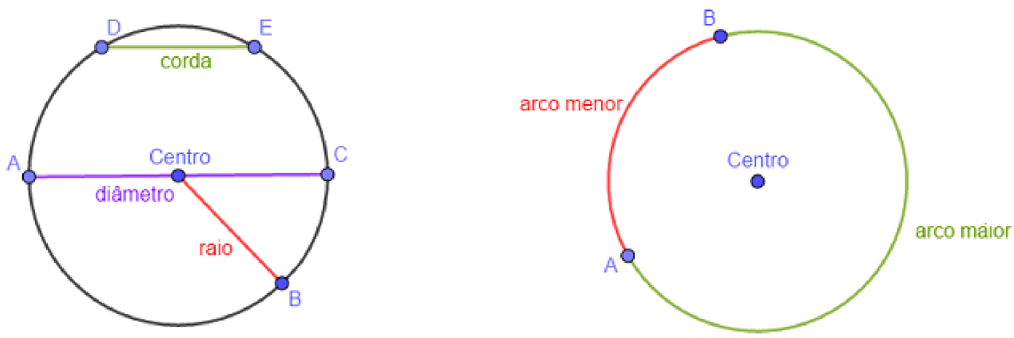


Figura 47 – Circunferência

A medida do diâmetro é também a distância $2r$ (2 vezes o raio), todo diâmetro de um círculo o divide em duas partes iguais, denominadas semicírculos e reciprocamente, se uma corda de um círculo o divide em duas partes iguais, então esta corda é, necessariamente, um diâmetro do círculo.

Observação 1. Círculo é a região delimitada por uma circunferência.

- Posições relativas de uma reta e uma circunferência:

  Uma reta r e uma circunferência C podem ocupar as seguintes posições:

  a) Reta **secante** à circunferência. $C \cap r = \{A, B\}$, isto é, possuem dois pontos em comum.

  b) Reta **tangente** à circunferência. $C \cap r = \{A\}$, isto é, possuem um ponto em comum. O ponto comum entre a tangente e a circunferência é chamado de **ponto de tangência**.

  Se o ponto estiver dentro da circunferência: não é possível traçar uma reta tangente por esse ponto, pois a reta cruzaria a circunferência em 2 pontos, ou seja, elas teriam 2 pontos em comum.

  Se o ponto estiver externo à circunferência: por esse ponto podemos traçar 2 retas tangentes à circunferência.

Observação 2. A distância de um ponto a uma reta é a medida do segmento perpendicular a esta reta, então a distância da reta tangente ao centro é igual ao raio.

Proposição 12. Seja C a circunferência de centro em O e raio r e P um ponto de C. Se t é a reta que passa por P e é perpendicular ao raio OP, então t é a tangente a C.

Demonstração. Suponha que o ponto $Q \in t$. Se $Q \neq P$, então temos: $\overline{QO}$ é o maior lado do $\Delta\, OPQ$, ou seja, $\overline{QO} > \overline{PO} = r$, pois $Q\widehat{P}O = 90°$ é o maior ângulo do triângulo OPQ. Logo, a distância $\overline{QO}$ é maior que o raio, portanto, $Q \notin C$ e, assim, P é o único ponto em comum a t e a C. $\square$

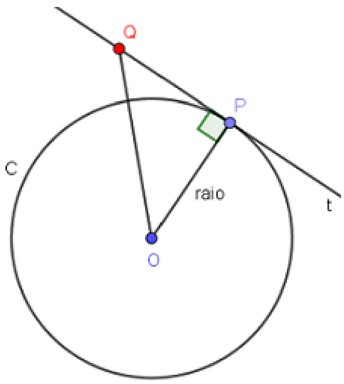


Figura 48 – Tangência na circunferência

c) Reta **externa** à circunferência. $C \cap r = \varnothing$, isto é, não possuem ponto em comum.

- Ângulos na circunferência:

Ângulo central: é o ângulo formado por duas semirretas $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$, no qual A, $B \in$ à circunferência e o vértice O está no centro da circunferência. O ângulo central e o arco determinado por ele têm a mesma medida, isto é, $A\widehat{O}B = \widehat{AB}$.

Ângulo inscrito: é aquele cujo vértice pertence à circunferência e cujos lados são semirretas secantes, isto é, $E\widehat{C}D = \widehat{ED}$.

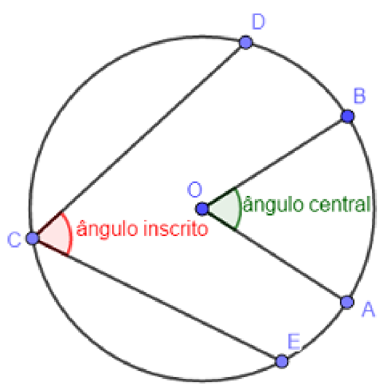


Figura 49 – Ângulos dentro da circunferência

Ângulos correspondentes na circunferência são os que determinam o mesmo arco.

Teorema 9. A medida de um ângulo inscrito é igual a metade da medida do ângulo central correspondente.

Demonstração. Consideremos o caso em que um dos lados do ângulo inscrito é um diâmetro. Dada uma circunferência de centro O e pontos A, B e C, conforme a figura 50. Sejam α e β as medidas dos ângulos $A\widehat{O}B$ e $A\widehat{C}B$, respectivamente, e o ponto O seja ponto de $\overline{CB}$. Temos que,

$\overline{OA} = \overline{OC}$, pois são raios da circunferência, então o triângulo OAC é isósceles e, portanto, $O\widehat{C}A = C\widehat{A}O = \beta$.

Seja θ a medida do ângulo $C\widehat{O}A$, como a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180°, temos $\theta = 180°$ - 2 β. Por outro lado, os pontos C, O e B são colineares, logo $\theta + \alpha = 180°$, ou seja, $\theta = 180°$ - α.

Temos, então, que, 180° - 2 β = 180° - α, e assim $\beta = \dfrac{\alpha}{2}$ ou $\alpha = 2\ \beta$. Portanto, o ângulo inscrito é metade do ângulo central correspondente ou metade do arco que ele determina. Para os outros casos em que nenhum dos lados do ângulo inscrito é um diâmetro ver (BARBOSA, 1985, p. 129). □

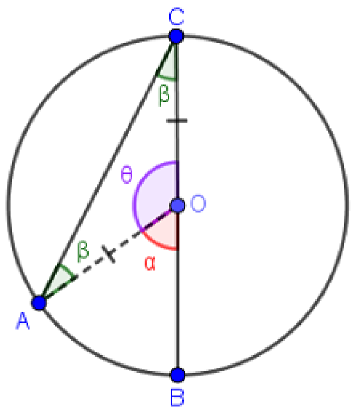


Figura 50 – Ângulo Central e Ângulo Inscrito

Circunferência Circunscrita a um triângulo: É a circunferência na qual os três vértices tangenciam a circunferência, ou seja, cada vértice do triângulo é um ponto da circunferência. O circuncentro (encontro das mediatrizes dos lados do triângulo) é equidistante aos três vértices do triângulo e é, portanto, o centro da circunferência que é circunscrita ao triângulo.

Circunferência Inscrita a um triângulo: É a circunferência na qual os lados do triângulo tangenciam a circunferência. O incentro (encontro das bissetrizes internas do triângulo) é o centro da circunferência que é inscrita ao triângulo.

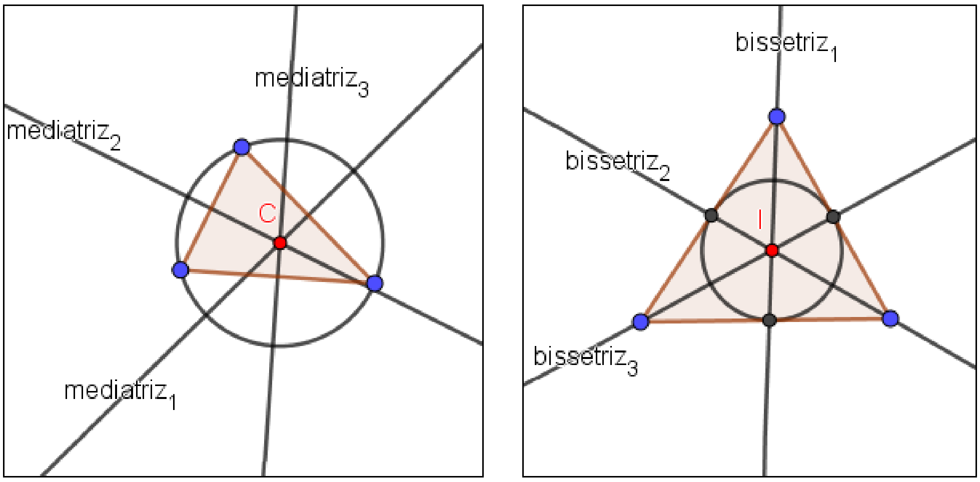


Figura 51 – Circunferência Circunscrita e Inscrita a um triângulo

Potência de Ponto: relação métrica na circunferência

Existem várias definições de potências de pontos, a que será utilizada é a da secante e tangente interceptando fora da circunferência.

Dadas uma circunferência e duas retas, sendo uma secante que passa pelos pontos A e B da circunferência e outra tangente que passa pelo ponto C da circunferência. Se estas duas retas se interceptam em um ponto P fora da circunferência, então o quadrado da medida do segmento PC é igual ao produto da medida do segmento PA pela medida do segmento PB, ou seja, $(\overline{PC})^2 = (\overline{PA}) \cdot (\overline{PB})$.

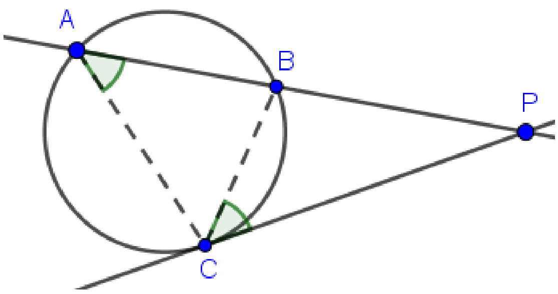


Figura 52 – Potência de ponto

Demonstração. Considerando os triângulos PAC e PCB, temos:

$\widehat{P} = \widehat{P}$ (ângulo comum)

$\widehat{A} = B\widehat{C}P = \dfrac{\widehat{BC}}{2}$, pois os dois determinam o mesmo arco e são ângulos inscritos.

Logo, $\Delta\, PAC \sim \Delta\, PCB$.

Então, temos: $\dfrac{\overline{PA}}{\overline{PC}} = \dfrac{\overline{PC}}{\overline{PB}} \Rightarrow (\overline{PC})^2 = (\overline{PA}) \cdot (\overline{PB})$. $\square$

Arco capaz:

Considere dois pontos A e B sobre uma circunferência. Para todo ponto P sobre um dos arcos, o ângulo $A\widehat{P}B = \theta$ é constante. Um observador que percorra o maior arco AB da Figura 53, consegue ver o segmento AB sempre do mesmo ângulo. Este arco é chamado de **arco capaz** do ângulo θ sobre o segmento AB.

Observação 3. Todo triângulo retângulo cabe numa semicircunferência, ou seja, se o ponto P é qualquer ponto da circunferência de diâmetro AB, o ângulo $A\widehat{P}B$ é reto. Por isso, cada semicircunferência de diâmetro AB é chamada de *arco capaz de 90°* sobre AB.

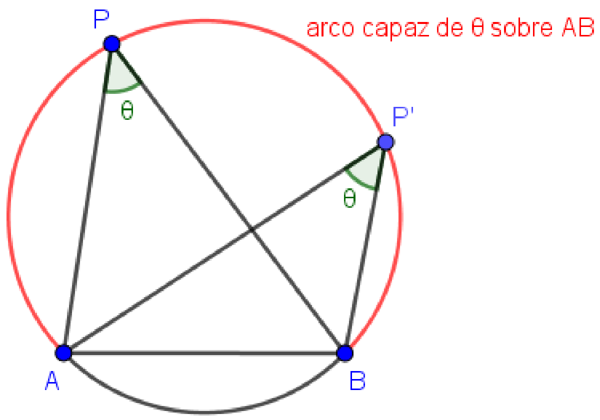


Figura 53 – Arco Capaz

A demonstração está no Capítulo 5, em construções elementares, ver Arco Capaz.

3.4 Equação de 2° grau:

Alguns problemas que serão resolvidos necessitam também de conhecimentos algébricos além dos conhecimentos geométricos.

A equação de segundo grau, é toda equação da forma $ax^2 + bx + c = 0$. Os números representados por a, b e $c \in \mathbb{R}$, com $a \neq 0$, são chamados de *coeficientes*. Resolver a equação é encontrar os valores das raízes reais x_1 e x_2 que satisfaçam a igualdade, sua resolução pode ser feita utilizando a fórmula de Bháskara:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

A demonstração será feita com o método de completar quadrados.

$$ax^2+bx+c=0 \;\Leftrightarrow$$

$$\frac{ax^2}{a}+\frac{bx}{a}+\frac{c}{a}=\frac{0}{a} \;\Leftrightarrow$$

$$x^2+\frac{bx}{a}+\frac{c}{a}=0 \;\Leftrightarrow$$

$$x^2+\frac{bx}{a}+\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}=0 \;\Leftrightarrow$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a} \;\Leftrightarrow$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2} \;\Leftrightarrow$$

$$x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \;\Leftrightarrow$$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

CAPÍTULO

4

GEOGEBRA

Neste trabalho será utilizado um *software* para o ensino e aprendizagem da Matemática, na realização das construções de desenhos geométricos. Existem vários *softwares* para esta finalidade, o que utilizaremos chama-se GEOGEBRA (versão: 6.0.432). É um *software* de uso livre, criado por Markus Hohenwarter e pode ser baixado gratuitamente pela internet, por ser desenvolvido em linguagem JAVA, está disponível em várias plataformas, ou seja, pode ser baixado em computadores com *Windows*, *Linux* ou *Mac OS*. É possível também baixar o Geogebra em *smartphones* que contém sistema operacional, no qual é possível acessar a internet e baixar aplicativos, o professor pode solicitar que os alunos façam o *download* do aplicativo e utilizá-lo no próprio celular.

É um recurso educacional que torna a aula mais dinâmica, interativa e atraente, possibilitando diálogos e discussões sobre as resoluções dos problemas propostos. Além disso, utilizar *softwares* na educação auxilia no desenvolvimento das habilidades necessárias para a formação do aluno, pois por meio deles é possível atingir diversos objetivos educacionais, fazendo com que o aluno desenvolva seu processo de construção do conhecimento, inserindo o aluno no mundo tecnológico e contribuindo com a integração das tecnologias com o ensino da matemática.

> Neste Currículo, a Matemática é apresentada como um sistema primário de expressão, assim como a língua materna, com a qual interage continuamente. Ela também deve articular-se permanentemente com todas as formas de expressão, especialmente com as que são associadas às tecnologias informáticas, colaborando para uma tomada de consciência da ampliação de horizontes que essas novas ferramentas propiciam. (SÃO PAULO, 2011, p. 35).

> Na organização dos trabalhos em classe, é importante destacar o papel decisivo representado pelas aulas expositivas. O professor não pode limitar-se a tal forma de apresentação dos assuntos, mas também não pode abdicar dela. Muitos outros recursos podem

> e devem ser utilizados, incluindo-se os advindos das tecnologias informáticas. (SÃO PAULO, 2011, p. 53).

É possível encontrar na internet vários manuais e vídeos que ensinam a utilizar este programa, um desses manuais é de Hohenwarter e Hohenwarter (2009) e pode ser acessado através do seguinte endereço eletrônico: <https://static.geogebra.org/help/docupt_PT.pdf>.

Segundo Dante (2014), o Geogebra trata-se de um *software* matemático, criado por Markus Hohenwarter, que reúne Álgebra e Geometria, pode ser utilizado em todos os níveis de ensino e já recebeu diversos prêmios na Europa e Estados Unidos.

Para fazer o download do Geogebra (GeoGebra Clássico), podemos acessar o site <https://www.geogebra.org/download>, é possível baixar no celular ou no computador. Tem várias opções de programas e sistemas operacionais (iOS, Android, Windows, Mac, Chromebook e Linux), o escolhido neste trabalho é o *Geogebra Classic 6* para Windows. Basta clicar sobre o sistema operacional desejado e fazer o *download*. Em seguida, deve-se clicar em *EXECUTAR*, o programa será instalado no computador e será criado um atalho na área de trabalho para acessá-lo.

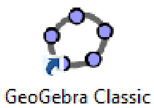


Figura 54 – Atalho Geogebra

A tela inicial do programa é dividida em Zona Gráfica e Zona Algébrica.

Zona Gráfica ou Janela de Visualização: É a parte direita da tela, com eixos e malha quadriculada e é o espaço onde são feitas as construções.

Zona Algébrica ou Janela de Álgebra: É a parte esquerda da tela e é o espaço onde aparecem as características algébricas dos desenhos que estão sendo construídos.

Estas duas janelas, de visualização e de álgebra, mostram um objeto em diferentes representações que interagem entre si, aumentando o campo de visão do aluno. Por isso, este *software* torna-se uma ferramenta importante nas construções geométricas. Destacamos que, com o recurso *Janela de Álgebra*, todas as informações algébricas do desenho são registradas simultaneamente, o que possibilita a abstração do conceito pelo aluno.

Contudo, caso não queira ter a visualização da Janela de Álgebra, basta fechá-la clicando em *Menu*, em seguida em *Exibir* e depois em *Janela de Álgebra*, entretanto, alguns elementos podem não ser nomeados automaticamente durante as construções.

A tela inicial apresenta, na parte superior esquerda, uma **barra de ferramentas** que contém ícones com tópicos relacionados (similares) que chamaremos de ***Comando***.

Estes ícones serão utilizados para a realização das construções. Na parte superior direita podemos encontrar o ***Menu*** com opções de configurações e abaixo dele, a barra de **edição** de tela ou de figuras. Se nenhuma figura estiver selecionada, as opções nesta barra serão referentes à tela como, por exemplo, colocar ou tirar eixos, colocar ou tirar malhas, tipos de malhas, etc. Se alguma figura, ponto, segmento, estiver selecionado (o que pode ser feito clicando sobre a constução), as opções nesta barra serão referentes à construção selecionada, como por exemplo alterar cor, traçados, linhas, etc.

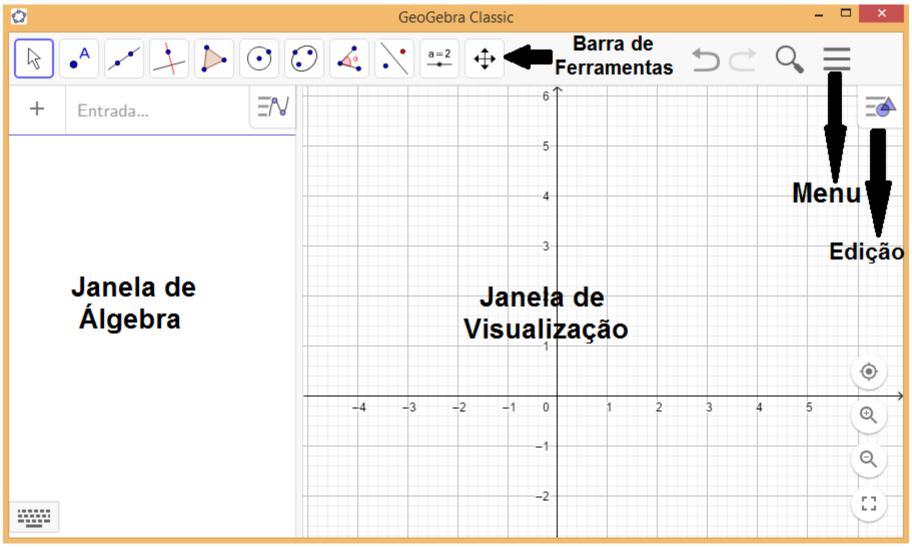


Figura 55 – Tela Inicial

A construção pode ser realizada com ou sem a utilização dos eixos e malhas, assim o modo de exibição da tela inicial fica a critério do professor. Dependendo da construção, os eixos e malhas, podem beneficiar na resolução fazendo com que o aluno conte os quadrados ao invés de utilizar as definições e o raciocínio para chegar nas conclusões, mas de início o professor pode deixar para que assim o aluno possa perceber os espaços e medidas e facilitar o entendimento do *software* e a relação com o conceito a ser estudado.

Malha Quadriculada e Eixos Cartesianos: Se desejar escondê-los, basta utilizar a barra de edição da tela ou clicar com o botão direito do mouse em qualquer lugar da tela que aparecem estas opções para serem selecionadas. Para colocá-los novamente, basta fazer o mesmo procedimento.

Protocolo de Construção: O professor pode visualizar o passo a passo, na ordem em que a construção geométrica for feita, utilizando o **Protocolo de Construção**. Desta forma, este recurso pode ser utilizado pelo professor para a correção, por exemplo. Para isso, basta selecionar o item *Protocolo de Construção* que fica no *Menu* em *Exibir*. Aparecerá uma tabela que mostra todos os passos da construção na ordem em que foi realizada.

4.1 Comandos do GEOGEBRA

Neste trabalho, não utilizaremos todos os recursos da barra de ferramentas, citaremos apenas aqueles que serão utilizados nas construções, que são os que estão nos ícones: 1º, 2º, 3º, 4º, 5º, 6º, 8º, 10º e 11º, conforme a Figura 56.

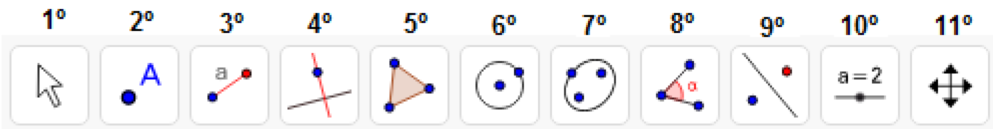


Figura 56 – Ícones da barra de ferramentas

Os comandos executados pelo Geogebra, como reta, segmento, ponto, etc, são nomeados durante a construção, essa nomenclatura ou rótulo é alterada para cada novo comando ou objeto construído.

- **1° ícone → comando: Mover**

(a) Mover

Figura 57 – Comando Mover

  - Este comando também é usado para parar a última ação, por exemplo, se o ícone para fazer pontos for selecionado, todas as vezes que clicar na tela, aparecerá um ponto, então, para parar com esta ação você pode clicar no comando Mover e não mais aparecerão pontos na tela. Desta forma, após utilizar alguma ferramenta, clique no primeiro ícone para voltar para o cursor, ou utilize a tecla *Esc* do teclado. O mover também serve para mover objetos, letras e medidas que aparecem em cima da construção.

- **2° ícone → comandos: Ponto, Interseção de Dois Objetos e Ponto Médio**

(a) Ponto

(b) Interseção

(c) Ponto Médio

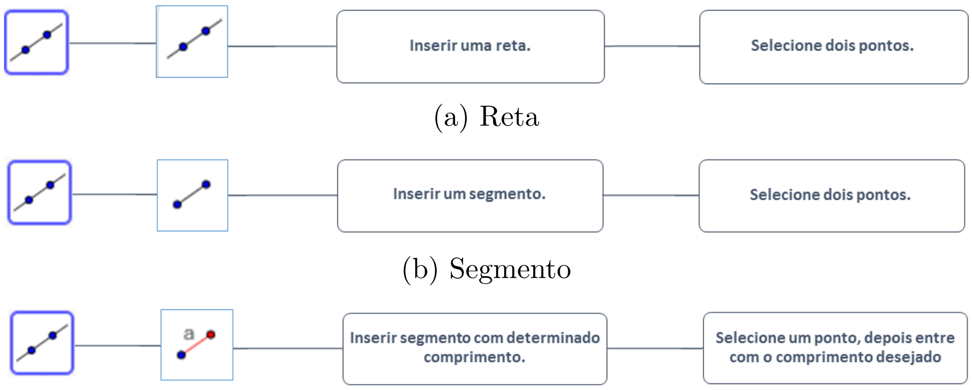
Figura 58 – Ponto, Interseção e Ponto Médio

– **Marcar um ponto:** selecione este comando Ponto, em seguida clique no lugar onde deseja colocar este ponto.

– **Marcar a Interseção de Dois Objetos:** selecione o comando Interseção de Dois Objetos, em seguida clique nos dois objetos que deseja marcar a interseção.

– **Ponto Médio:** selecione o comando Ponto Médio, em seguida clique nos pontos extremos do segmento.

- **3° ícone → comandos: Reta, Segmento e Segmento com Comprimento Fixo**



(a) Reta

(b) Segmento

(c) Segmento com Comprimento Fixo

Figura 59 – Reta, Segmento e Segmento com Comprimento Fixo

– **Fazer um Segmento ou Reta:** selecione o comando desejado e clique em dois lugares, para posicionar o segmento ou reta. Aparecerá o segmento/reta f com dois pontos.

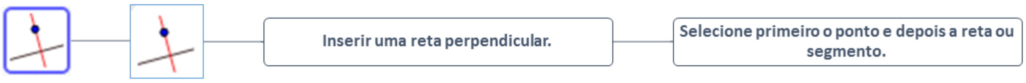
– **Ligar dois pontos com um segmento:** dados dois pontos, selecione o comando Segmento e clique nos dois pontos.

– **Criar segmento com valor dado:** selecione o comando Segmento com Comprimento Fixo, depois clique em algum lugar da malha e abrirá uma caixa para digitar o tamanho que você deseja do segmento, digite o valor (utilize ponto no lugar da vírgula).

– **Construir duas retas distintas, com uma interseção:** selecione o comando Reta, para posicionar a primeira reta. Selecione novamente este comando, um dos pontos que aparecem na primeira reta e depois em outro lugar da tela onde deseja posicionar a segunda reta.

– **Mover um segmento:** para mover um segmento clique no comando Mover, em seguida clique no ponto mais escuro do segmento e arraste para onde desejar.

- **4° ícone → comandos: Reta Perpendicular, Reta Paralela, Mediatriz, Bissetriz e Reta Tangente**



(a) Reta Perpendicular

(b) Reta Paralela

(c) Mediatriz

(d) Bissetriz

(e) Reta Tangente

Figura 60 – Retas Perpendicular, Paralela, Mediatriz, Bissetriz e Tangente

  – **Traçar a Perpendicular a um Segmento/Reta:** selecione o comando Reta Perpendicular e clique na reta dada duas vezes para fixar a perpendicular.

  – **Traçar a Perpendicular ou Reta Paralela a um segmento/reta e que passa por um ponto dado:** clique no comando que deseja, em seguida no ponto, depois na reta/segmento.

  – **Traçar a Mediatriz de um segmento:** selecione o comando Mediatriz e clique no próprio segmento ou nos pontos extremos do segmento.

  – **Traçar a Bissetriz de um ângulo:** selecione o comando Bissetriz, em seguida clique em 3 pontos que formam o ângulo.

  – **Traçar a Reta Tangente à uma circunferência:** selecione o comando Reta Tangente, clique no ponto da circunferência e em seguida na circunferência.

- **5° ícone → comando: Polígono e Polígono Regular**

(a) Polígono

(b) Polígono Regular

Figura 61 – Polígonos

  - **Formar polígonos:** selecione o comando Polígono, clique na tela formando o polígono que deseja e no ponto inicial para fechar a figura.
  - **Formar polígonos regulares (lados iguais):** selecione o comando Polígono Regular, clique em dois lugares determinando o tamanho do lado do polígono regular e abrirá uma caixa para digitar a quantidade de vértices.

- **6° ícone → comandos: Compasso, Círculo Dados Centro e Um de Seus Pontos e Círculo dados Centro e Raio**

(a) Círculo dados Centro e Um de seus Pontos

(b) Círculo dados Centro e Raio

(c) Compasso

Figura 62 – Compasso, Círculo dados Centro e Um de seus Pontos, Círculo dados Centro e Raio

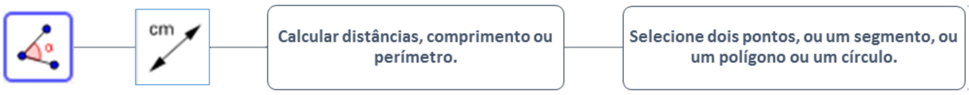
  - **Construir uma circunferência:** com o comando Compasso, clique no segmento dado ou em dois pontos para definir o raio e o centro, respectivamente. Desta forma a figura pode ser movimentada. Uma outra possibilidade é utilizar o comando Círculo Dados Centro e Um de Seus Pontos, o primeiro ponto em que clicar será o centro e o próximo será um ponto da circunferência.
  - **Construir uma circunferência com o valor do raio dado:** selecione o comando Círculo dados Centro e Raio e clique onde deseja colocar o centro da circunferência. Abrirá uma caixa para digitar o valor do raio (utilize ponto no lugar de vírgula).

– **Transportar medidas:** para isso, utilize o comando Compasso. Por exemplo, para transportar a medida de um segmento AB, selecione o comando Compasso, clique em um extremo do segmento (ponto A) e depois no outro extremo (ponto B). Em seguida, clique no ponto onde deseja transportar a medida do segmento, obtendo uma circunferência, cujo raio é a medida de AB.

- **8° ícone → comandos: Ângulo, Ângulo com Amplitude Fixa e Distância, Comprimento ou Perímetro**

(a) Ângulo

(b) Ângulo com Amplitude Fixa



(c) Distância (comprimento ou perímetro)

Figura 63 – Ângulo, Ângulo com Amplitude Fixa e Distância

– **Construção de um ângulo qualquer:** selecione o comando Ângulo, em seguida clique em três lugares para formar a abertura do ângulo que desejar.

– **Construção de um ângulo com um determinado valor:** selecione o comando Ângulo com Amplitude Fixa, em seguida clique em dois lugares quaisquer, abrirá uma caixa para colocar o valor que deseja (utilize ponto no lugar da vírgula) e também indique o sentido que deseja formar o ângulo (anti-horário ou horário). Aparecerão apenas os pontos que formam o ângulo, basta, então ligá-los com segmentos ou retas.

– **Medir distâncias e comprimento:** selecione o comando Distância, Comprimento ou Perímetro e clique nos pontos extremos do segmento que deseja medir, ou então, basta clicar sobre o segmento ou uma circunferência.

Observação 4. Se a medida aparecer em cima da construção, basta arrastá-la para fora usando o 1° ícone (Mover), para isso selecione este comando, clique sobre a medida para selecioná-la e depois arraste-a.

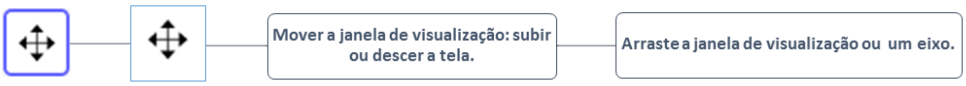
- **10° ícone → comando: Controle Deslizante**

Figura 64 – Controle Deslizante

O uso de um controle deslizante possibilita causar variações em objetos (manualmente ou automaticamente), garantindo o dinamismo das representações geométricas.

  - **Criar um controle deslizante:** clique no respectivo comando e em seguida na tela onde deseja colocá-lo. Aparecerá uma janela para nomear, especificar o intervalo e incremento e alterar as propriedades do controle deslizante.

- **11° ícone → comandos: Mover Janela de Visualização, Ampliar e Reduzir**



(a) Mover Janela de Visualização

(b) Ampliar

(c) Reduzir

Figura 65 – Mover Janela de Visualização, Ampliar e Reduzir

  - **Mover, ampliar ou reduzir a tela de exibição:** às vezes a figura fica muito grande e não aparece inteiramente na tela. Para visualizar a figura pode-se mover a tela usando o comando Mover Janela de Visualização ou diminuir a tela usando o comando Reduzir. Para voltar ao normal basta aumentar a tela novamente usando o comando Ampliar.

Abaixo temos alguns procedimentos de **edição** dos objetos:

- **Desfazer qualquer ação:** (ctrl + z) ou clicar nas setas que ficam do lado esquerdo do *Menu*.

- **Renomear ponto ou segmento/reta:** basta clicar sobre o objeto com o botão direito do mouse e selecionar *Renomear*. Aparecerá a letra que representa este objeto e para alterá-la, basta digitar a letra que deseja. Lembramos que pontos são, usualmente, denotados por letras maiúsculas e segmentos, retas e circunferências por letras minúsculas.

- **Esconder Objeto**: para esconder algum objeto sem apagá-lo, pode-se utilizar a bolinha colorida que aparece na *Janela de Álgebra* (lado esquerdo da janela de exibição). Todo objeto tem uma respectiva bolinha colorida, basta clicar em cima dela, quando ela está colorida é porque o objeto está aparecendo na construção e quando está branca é porque está escondido.

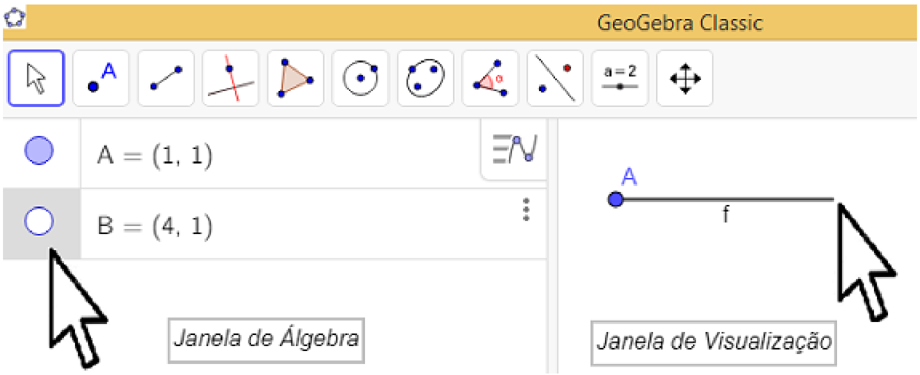


Figura 66 – Esconder um Objeto

Observação 5. Pode também ao invés de clicar na bolinha que representa o objeto, clicar com o botão direito do mouse sobre o objeto e selecionar a opção: *Exibir Objeto*. Para ele voltar a aparecer basta realizar o mesmo procedimento.

- **Esconder o nome (rótulo) do Objeto:** às vezes o nome de algum objeto (ponto, segmento, reta, circunferência, etc) atrapalha na visualização de uma construção, então quando desejar tirar o nome, clique com o botão direito do mouse sobre ele (ou sobre sua nomenclatura na *Janela de Álgebra*)e selecione a opção: *Exibir Rótulo*. Para ele voltar a aparecer basta realizar o mesmo procedimento.

- **Apagar objeto:** para apagar o objeto, basta clicar com o botão direito em cima dele ou em cima da bolinha que o representa (Janela de Álgebra) e selecionar *Apagar*.

- **Mudar a cor do objeto:** é possível fazer várias figuras geométricas e colocar uma cor para cada uma. Basta, com o botão direito, selecionar o objeto e clicar em *Configurações*, em seguida selecionar a cor desejada. Uma outra forma é selecionar o objeto e em seguida na *Barra de Edição* selecionar a cor que deseja.

- **Salvar a Construção:** todas as construções podem ser salvas, para isso selecione *Menu*, *Arquivo* e depois *Gravar*. Abrirá uma tela solicitando um cadastro, que não é necessário no momento, podendo ser fechada. Então, clique em gravar e escolha o local em que deseja salvar a construção. Ela ficará salva no *software* do Geogebra e pode ser retomada e alterada quando necessário.

- **Salvar como imagem:** para isso deve-se exportar a imagem da tela, selecione *Menu*, *Arquivo*, *Export Image* e em seguida *Download*. Escolha o local onde deseja salvar a imagem, se for alterar o nome, deve-se colocar no final do nome: **.jpg** ou **.png**.

CAPÍTULO 5

CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS

As construções geométricas surgiram na antiguidade e foram muito importantes no desenvolvimento e na descoberta da Matemática.

> O desenvolvimento acelerado da Matemática no mundo antigo deveu-se a gregos geniais, pensadores, filósofos, cientistas que colocaram o raciocínio, a lógica e a razão como ferramentas para descobrir coisas novas e tentar explicar o mundo em que viviam. "Tudo é número" disse Pitágoras sintetizando o pensamento que tudo na natureza pode ser explicado pelos números, ou seja, pela Matemática. As construções geométricas estavam no centro desse desenvolvimento da Matemática.
>
> As construções geométricas continuam até hoje a ter grande importância na compreensão da Matemática elementar. Seus problemas desafiam o raciocínio e exigem sólido conhecimento dos teoremas de geometria e das propriedades das figuras e não é exagero dizer que não há nada melhor para aprender geometria do que praticar as construções geométricas. (WAGNER, 2015, p. i).

Assim como apresentado no livro *Uma Introdução às Construções Geométricas* (WAGNER, 2015), teremos primeiro as construções elementares que serão a base para algumas construções, tais como: ponto médio, mediatriz, paralela, perpendicular, divisão de um segmento em partes iguais e arco capaz. No *software* Geogebra há comandos que realizam algumas destas construções, mas em um primeiro momento vamos utilizar estes comandos apenas como confirmação no final de cada construção, para que assim o aluno aprenda a realizá-la. Em geral, as construções serão resolvidas como se estivesse utilizando ferramentas básicas do desenho geométrico.

Após apresentarmos as construções elementares citadas, apresentaremos alguns problemas propostos da apostila 10 do PIC, como forma de aplicação destas construções. Neste momento, como as construções elementares já foram realizadas, poderemos utilizar os comandos do Geogebra ao invés de construí-las novamente, porém, isto ficará a critério do professor. Vale ressaltar que o papel do professor na realização destas atividades é de suma importância por permitir que os alunos cheguem às suas próprias conclusões sem fornecer às respostas de imediato.

Em cada construção teremos os seguintes tópicos: **Conhecimentos prévios, Preparação, Construção, Verificação com o Geogebra e Justificativa.**

Conhecimentos prévios: são os conhecimentos que os alunos precisam ter antes de realizar a construção.

Preparação: são os dados do problema que devem estar na tela do Geogebra antes de iniciar a construção.

Construção: todas as etapas da construção e resolução do problema.

Verificação com o Geogebra: como confirmar se a construção está correta, utilizando comandos do próprio *software*.

Justificativa: é a explicação matemática do porquê a construção está correta, é uma etapa importante que o professor deve estimular seus alunos a responderem, para que o conhecimento seja construído de forma também teórica.

Ao final de cada construção, para que se obtenha uma melhor visualização, os objetos utilizados no decorrer da construção podem ser omitidos (ver Esconder Objeto) e o objeto que é o resultado procurado, pode ser colorido (ver Mudar a Cor do Objeto).

5.1 Construções elementares

5.1.1 Ponto Médio - Construir o ponto médio do segmento dado AB.

Conhecimentos prévios: Definição de mediatriz, circunferência.

Preparação: Com o comando Segmento, construa um segmento AB qualquer.

Construção:

I) Com o comando Círculo Dados Centro e Um de Seus Pontos, construa duas circunferências de raio AB, uma de centro em A e outra de centro em B.

II) Marque a interseção das duas circunferências com o comando Interseção de Dois Objetos, obtendo os pontos C e D.

III) Construa uma reta com o comando Reta, que passe pelos pontos obtidos.

IV) Marque a interseção do segmento AB com a reta e renomeie este ponto para M. O ponto M é o ponto médio do segmento AB.

Para melhorar a visualização esconda os objetos deixando apenas o segmento e o ponto médio.

Verificação com o Geogebra: Selecione o comando Ponto Médio e clique nos pontos extremos do segmento AB, aparecerá o ponto médio deste segmento. Se ele coincidir com o que foi feito pelo aluno, então a construção está correta.

Justificativa: As duas circunferências construídas possuem o mesmo raio, então temos $\overline{DA} = \overline{DB}$ e $\overline{AC} = \overline{BC}$. Logo, a reta que passa por C e D é a mediatriz do segmento AB. E, portanto, o ponto M é o ponto médio do segmento.

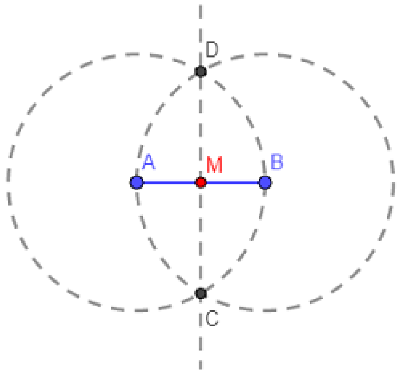


Figura 67 – Construção Ponto Médio

5.1.2 Mediatriz - Construir a mediatriz do segmento dado AB.

Conhecimentos prévios: Definição de mediatriz, circunferência.

Preparação: Com o comando Segmento, construa o segmento AB.

Construção: Sua construção é idêntica a do ponto médio.

I) Com o comando Compasso, construa duas circunferências de raio AB, uma de centro em A e outra de centro em B.

II) Marque a interseção das duas circunferências com o comando Interseção de Dois Objetos, obtendo os pontos C e D,

III) Construa uma reta com o comando Reta, que passe pelos pontos C e D. A reta obtida é a mediatriz do segmento AB.

Verificação com o Geogebra: A verificação é feita utilizando o comando Mediatriz. Aparecerá a reta que é a mediatriz do segmento AB, se ela coincidir com a que foi feita pelo aluno, então a construção está correta.

Justificativa: Ver Proposição 8 sobre mediatriz.

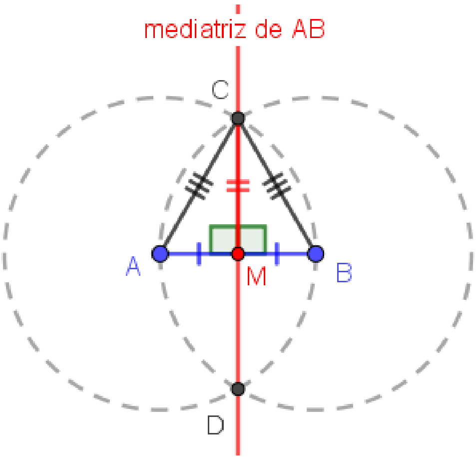


Figura 68 – Construção Mediatriz

5.1.3 Paralela - Traçar uma reta paralela à reta r passando por um ponto P fora dela:

Conhecimentos prévios: Definição de reta paralela e propriedades de losango.

Preparação: Dada uma reta r, considere A e B pertencente à reta. Construa uma reta com o comando Reta, renomeie para r e esconda um dos pontos, pode ser o B deixando apenas o ponto A, por exemplo. Com o comando Ponto, coloque um ponto fora da reta e renomeie para P.

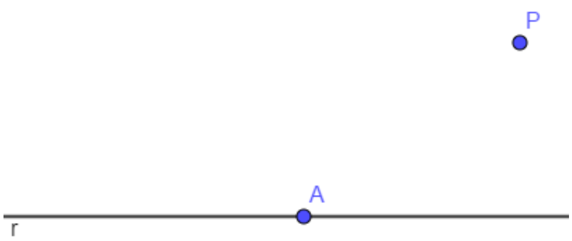


Figura 69 – Preparação - Paralela

Construção:

I) Com o comando Compasso, construa uma circunferência de raio $\overline{AP}$ e centro em A, obtendo a circunferência c.

II) Marque com o comando Interseção de Dois Objetos, a interseção da reta r com a circunferência c, obtendo os pontos C e D.

III) Construa duas circunferências com o comando Compasso, uma de raio AP e centro em D (ou em C) e outra de mesmo raio e centro em P, obtendo assim as circunferências d e e que possuem raios $\overline{AP} = \overline{AD}$.

IV) Marque a interseção das circunferências d e e, obtendo os pontos E e F, um deles será coincidente com o ponto A (neste caso é o F) (pode escondê-lo).

V) Com o comando Reta, construa uma reta que passa por P e pelo ponto E. Formará uma reta que é paralela à reta r e que passa pelo ponto P.

Verificação com o Geogebra: Selecione o comando Reta Paralela, clique na reta dada r, em seguida clique no ponto P. Se a reta formada pelo GEOGEBRA for coincidente com a que foi encontrada pelo aluno, então a construção está correta.

Justificativa: Nesta construção todas as circunferências possuem o mesmo raio, ou seja, $\overline{PA} = \overline{AD} = \overline{DE} = \overline{EP}$. Os pontos $PEDA$ formam um losango, logo é também um paralelogramo e tem os lados opostos paralelos, portanto, as retas são paralelas.

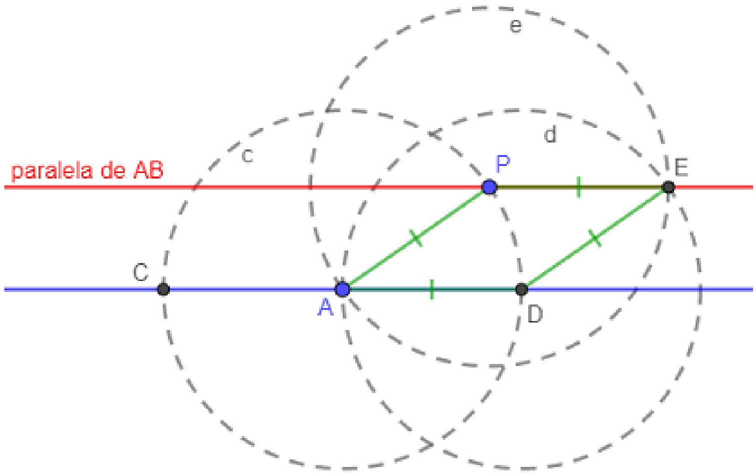


Figura 70 – Construção Paralela

5.1.4 Perpendicular

A perpendicular a uma reta pode ser solicitada de duas maneiras: passando por um ponto que esteja fora da reta ou passando por um ponto que esteja sobre a reta. Vamos fazer as duas construções:

1º) Perpendicular - Traçar a perpendicular a uma reta r passando por um ponto P fora dela.

Conhecimentos prévios: Definição de mediatriz, circunferência.

Preparação: Construa uma reta com o comando Reta e renomeie para r, depois com o comando Ponto, coloque um ponto fora de r e renomeie para P (pode esconder os dois pontos A e B que aparecem na reta).

Construção:

I) Será necessário fazer uma circunferência cujo raio seja maior que a distância de P à r, então coloque um Ponto do outro lado da reta (lado oposto onde está o ponto P), para indicar por onde vai passar a circunferência, obtendo o ponto C.

II) Com o comando Compasso construa uma circunferência de raio CP e centro em P.

III) Marque com o comando Interseção de Dois Objetos, a interseção da circunferência com a reta, obtendo os pontos D e E.

IV) Coloque um Ponto sobre a reta r, entre os pontos D e E, tal que este ponto determine sobre DE um segmento maior que a metade de DE, obtendo assim o ponto F.

V) Com o comando Compasso, construa duas circunferências de raio $\overline{FD}$, uma com centro em D, e outra com centro em E, obtendo respectivamente as circunferências d e e.

VI) Marque a interseção das circunferências d e e, obtendo os pontos G e H.

VII) Construa uma Reta que passe pelos pontos G e H, esta é a reta perpendicular à reta r que passa pelo ponto P.

Verificação com o Geogebra: Selecione o comando Reta Perpendicular, em seguida clique na reta r e depois no ponto P. Se a reta formada pelo GEOGEBRA for coincidente com a que foi encontrada pelo aluno, então a construção está correta.

Justificativa: Nesta construção temos $\overline{PD} = \overline{PE}$, pois são os raios da circunferência c e $\overline{GD} = \overline{GE}$, pois são os raios das circunferências d e e. Então, concluímos que a reta que contém os pontos P e G é a mediatriz do segmento DE, logo é a perpendicular que passa por P.

2º) **Perpendicular - Traçar a perpendicular a uma reta r passando por um ponto P que está sobre a reta.**

Conhecimentos prévios: Definição de mediatriz, circunferência.

Preparação: Construa uma Reta e renomeie para r, esconda um dos pontos A e B que aparecem e o outro renomeie para P.

Construção:

I) Utilizando o comando Círculo Dados Centro e Um de Seus Pontos, construa uma circunferência de centro em P e um raio qualquer, obtendo o ponto B e raio $\overline{PB}$.

II) Com o comando Interseção de Dois Objetos, marque a interseção da circunferência com a reta, obtendo dois pontos C e D, sendo um deles coincidente com o ponto B (se for clicado sobre a reta ao construir a circunferência). Temos nessa circunferência o diâmetro DC e centro P de modo que $DP = PC$, ou seja, o ponto P é o ponto médio do segmento DC, então agora é só traçar a mediatriz de DC, que é a perpendicular que passa pelo ponto médio (ver construção Mediatriz).

Verificação com o Geogebra: Selecione o comando Reta Perpendicular, clique na reta r e depois no ponto P. Se a reta formada pelo GEOGEBRA for coincidente com a que foi encontrada pelo aluno, então a construção está correta.

Justificativa: Nesta construção temos $\overline{PD} = \overline{PC}$, pois são os raios da primeira circunferência e $\overline{ED} = \overline{EC}$, pois são os raios da segunda e terceira circunferência que são iguais. Então, a reta que contém os pontos P e E é a mediatriz do segmento DC, logo é a perpendicular que passa por P.

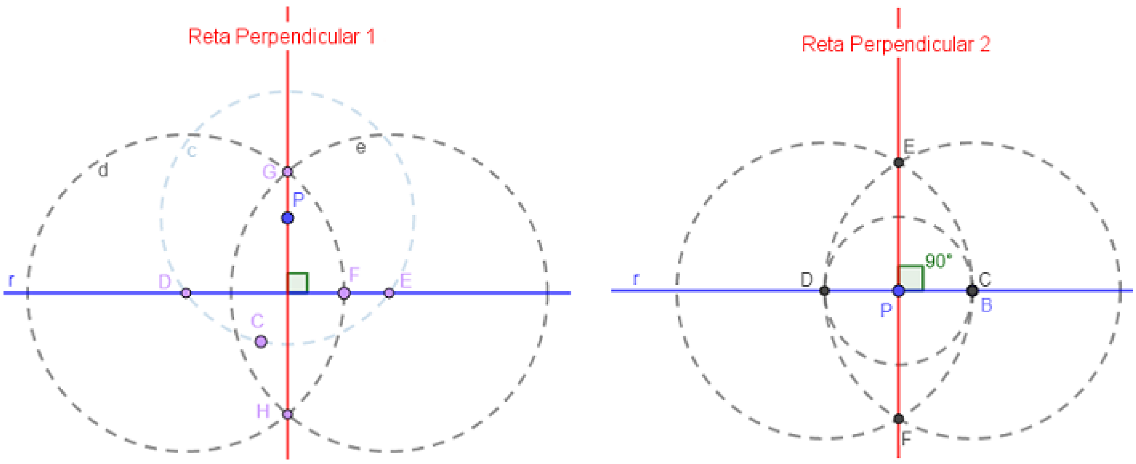


Figura 71 – Construção Perpendicular

5.1.5 Divisão de um Segmento em n Partes Iguais

É possível dividir um segmento dado em um número qualquer de partes iguais, por meio de construção geométrica ou da construção de um comando no Geogebra próprio para isso. Utilizaremos as duas formas. Vamos determinar a divisão de um segmento em 3 partes iguais, contudo, a construção pode ser estendida para quantas partes desejar.

1º)**Dividir um segmento em 3 partes iguais usando construção geométrica.**

Conhecimentos prévios: Circunferência, paralelas, Teorema de Thales.

Preparação: Construa um Segmento AB.

Solução: A partir do ponto A traçar uma semirreta qualquer diferente de AB, vamos supor AC, e sobre ela marcar 3 segmentos iguais, para isso vamos utilizar uma circunferência, onde marcaremos 3 vezes o seu raio em AC. Então, basta ligar o último ponto formado na reta AC, ao último ponto do segmento AB (ponto B) e traçar retas paralelas a este segmento que passam pelos pontos marcados pelos raios das circunferências criadas em AC. Assim, o segmento AB será dividido em 3 partes iguais.

Construção:

I) Trace uma Reta qualquer que passe pelo ponto A (diferente de AB), obtendo a reta AC. Esconda o ponto C.

II) Com o comando Círculo Dados Centro e Um de Seus Pontos, faça uma circunferência de centro em A e um raio qualquer sobre a reta AC (não precisa ser muito grande). Formará a circunferência de raio $\overline{AD}$.

III) Deve-se repetir o tamanho do raio desta circunferência duas vezes sobre a reta AC. Para isso, utilize o comando Compasso e faça uma circunferência de raio $\overline{AD}$ e centro em D. Em seguida, com o comando Interseção de Dois Objetos, marque a interseção desta circunferência com a reta AC, obtendo os pontos E e F, note que um deles é coincidente com o ponto A, por isso pode escondê-lo.

IV) Novamente com o comando Compasso, faça outra circunferência de raio $\overline{DF}$ e com centro em F.

V) Com o comando Interseção de Dois Objetos, marque a interseção desta circunferência com a reta AC, obtendo os pontos G e H, um deles é coincidente com o ponto D, por isso pode escondê-lo.

   Assim temos na reta AC, 3 partes iguais, $\overline{AD} = \overline{DF} = \overline{FH}$. Esconda as três circunferências.

VI) Ligue H e B com um Segmento.

VII) Com o comando Reta Paralela, trace retas paralelas ao segmento HB e que passam pelos pontos F e D.

VIII) Com o comando Interseção de Dois Objetos, marque as interseções das retas paralelas com o segmento AB, obtendo os pontos I e J.

IX) Esconda as retas paralelas, a reta AC, o segmento HB, os pontos D, F e H. Teremos então, o segmento AB, dividido em três partes iguais, $\overline{AJ} = \overline{JI} = \overline{IB}$.

Verificação com o Geogebra: Com o comando Distância, Comprimento ou Perímetro meça as medidas das três partes, se as medidas dos três segmentos forem iguais então a divisão está correta.

Justificativa: Temos que $\overline{AJ} = \overline{JI} = \overline{IB}$, isso é justificado pelo *Teorema 1*, pois obtivemos um feixe de retas paralelas (reta JD, reta IF e o segmento HB), cortadas por 2 transversais (segmento AB e reta AC). De fato, pelo Teorema de Thales, temos: $\dfrac{\overline{AD}}{\overline{DF}} = \dfrac{\overline{AJ}}{\overline{JI}}$ e como $\overline{AD} = \overline{DF}$, pois são os raios da mesma circunferência, temos:

$\dfrac{\overline{AD}}{\overline{DF}} = 1$, logo $1 = \dfrac{\overline{AJ}}{\overline{JI}}$, portanto, teremos: $\overline{AJ} = \overline{JI}$. Fazendo o mesmo com a outra parte do segmento obteremos $\overline{AJ} = \overline{JI} = \overline{IB}$.

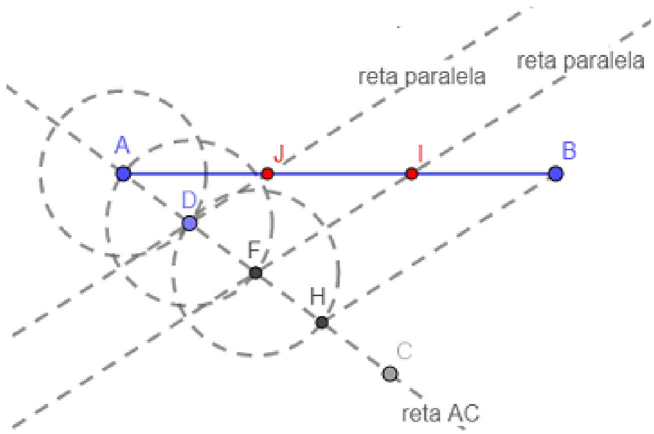


Figura 72 – Divisão de um segmento

2º)**Dividir um segmento em 3 partes iguais criando um comando no Geogebra (controle deslizante).**

Preparação: Construa um Segmento AB.

Construção:

I) Clique no 10° ícone e selecione o comando Controle Deslizante, depois clique em algum lugar da tela onde deseja colocar o controle deslizante.

Aparecerá um campo com os tópicos, ***Nome, Intervalos: mínimo, máximo e Incremento***, ou seja, será escolhido o nome da variável que será representada no controle deslizante, um intervalo (mínimo e máximo) em que a variável estará compreendida, e o incremento que é a escala de variação.

- No nome coloque: **n**
- No mínimo coloque: **1**
- No máximo coloque: **50**
- No incremento coloque: **1**
- Em seguida clique em *OK*.

Figura 73 – Controle Deslizante - Como preencher

Na tela do GEOGEBRA aparecerá o n (controle deslizante), que representa a quantidade de partes em que o segmento será dividido.

II) Agora tem que criar uma lista de pontos entre AB que estejam igualmente espaçados, para isso vamos criar uma sequência de pontos. No *Menu*, clique em *Exibir* e depois clique em *Campo de Entrada*. Aparecerá o *Campo de Entrada* na parte inferior da tela, neste campo digite ***sequencia***, vão aparecer algumas opções, clique na opção ***Sequência(<Expressão>, <Variável>, <Valor Inicial>, <Valor Final>, <Incremento>)***.

Observação 6. O segmento será dividido por pontos, a variável k indica o ponto, isto é, para o 1° ponto $k = 1$, para o 2° ponto $k = 2$ e assim sucessivamente, o valor A é o início dessa divisão, n é a quantidade de partes que será dividido o segmento e $(B - A)$ é o tamanho do segmento, assim a expressão $A + (k/n)(B - A)$ determina onde estará cada ponto da divisão.

- Na <Expressão> digite: $A + (k/n)(B - A)$,
- Na <Variável> digite: k
- No <Valor Inicial> digite: 1
- No <Valor Final> digite: $n - 1$
- No <Incremento> digite: 1

Assim, teremos

Sequência (A + (k / n)(B - A), k, 1, n - 1, 1)

Clique em *ENTER* e agora basta mexer no n com o mouse colocando a quantidade de segmentos que deseja dividir o segmento AB que neste caso é 3.

III) Com o comando Ponto coloque um ponto sobre as marcações da divisão.

Observação 7. Se os extremos do segmento não forem A e B, basta alterar apenas estas letras nas fórmulas.

Verificação com o Geogebra: Com o comando Distância, Comprimento ou Perímetro meça as medidas das três partes, se as medidas dos três segmentos forem iguais então a divisão está correta.

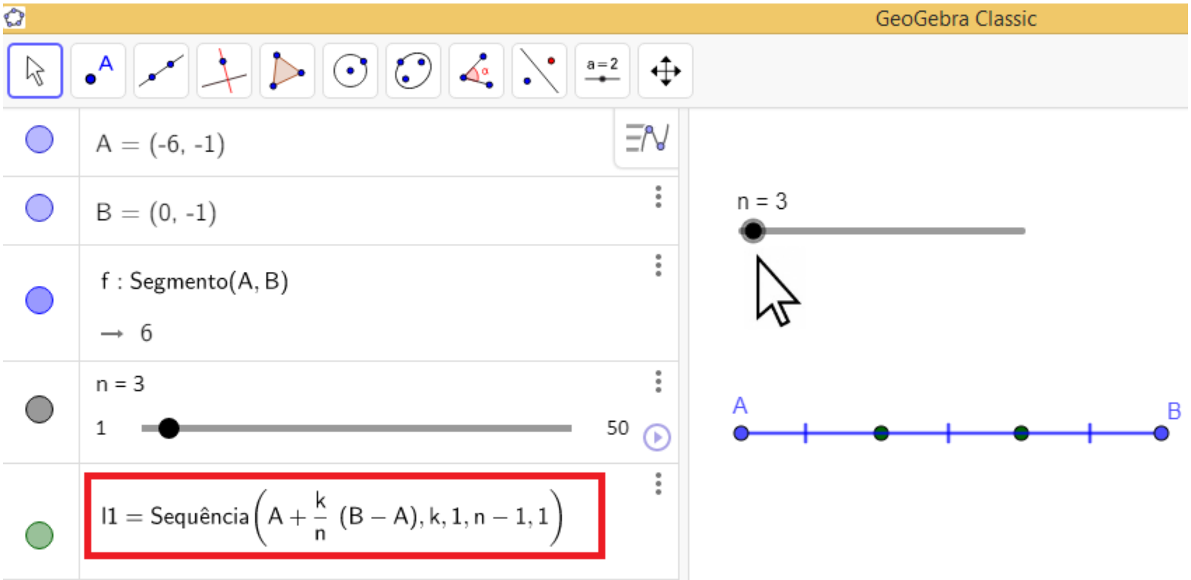


Figura 74 – Divisão Segmento - Controle Deslizante

5.1.6 Arco Capaz

Arco Capaz é o lugar geométrico dos pontos que determinam um segmento AB em um determinado ângulo α. Os pontos extremos do segmento não compartilham das propriedades do lugar geométrico.

Dado um ângulo α e um segmento AB, determinar um ponto P, no plano, tal que, $A\widehat{P}B = \alpha$

Conhecimentos prévios: Circunferência, reta perpendicular, mediatriz, soma dos ângulos internos de um triângulo, ângulo central, ângulo inscrito.

Preparação: Com o comando Ângulo, construa um ângulo α qualquer e com o comando Segmento, construa um segmento. O segmento será formado pelos pontos DE, basta renomeá-los para A e B para que fique conforme o enunciado.

Construção:

I) Transfira o ângulo dado α para baixo do segmento AB sobre o ponto A. Esta tranferência pode ser feita utilizando o comando do Geogebra ou transportando o ângulo (problema 4). Se for utilizar o comando do Geogebra, basta utilizar o comando Ângulo com Amplitude Fixa, em seguida clicar em B e depois clicar em A. Será aberta uma caixa para digitar o valor do ângulo. Digite o valor de α, marque o sentido horário. Formará o ângulo $B\widehat{A}B' = \alpha$. Ligue com um Segmento os pontos A e B'.

II) Com o comando Reta Perpendicular, trace a perpendicular ao segmento AB' que passa pelo ponto A.

III) Em seguida com o comando Mediatriz, trace a mediatriz do segmento AB.

IV) Marque com o comando Interseção de Dois Objetos, a interseção da perpendicular com a mediatriz, obtendo o ponto D.

V) O ponto D pertence à mediatriz de AB, então pela definição de mediatriz temos $\overline{DA} = \overline{DB}$. Logo, o ponto D é o centro de uma circunferência e $\overline{DA} = \overline{DB}$ são os raios. Portanto, com o comando Círculo Dados Centro e Um de Seus Pontos, trace a circunferência de centro em D e raio $\overline{DA}$ ou $\overline{DB}$.

VI) Para qualquer ponto P que estiver no arco maior AB, teremos $A\widehat{P}B = \alpha$. Com o comando Ponto, coloque um ponto em qualquer lugar do arco maior AB e o renomeie para P.

VII) Ligue com um Segmento o ponto A com P e depois P com B.

VIII) O ângulo $A\widehat{P}B = \alpha$.

Verificação com o Geogebra: Para confirmar que o ângulo $A\widehat{P}B$ é igual a α, utilize o comando Ângulo, clique em B, em seguida clique em P e depois em A. Vai aparecer o valor deste ângulo, se for igual ao α dado, então a construção está correta.

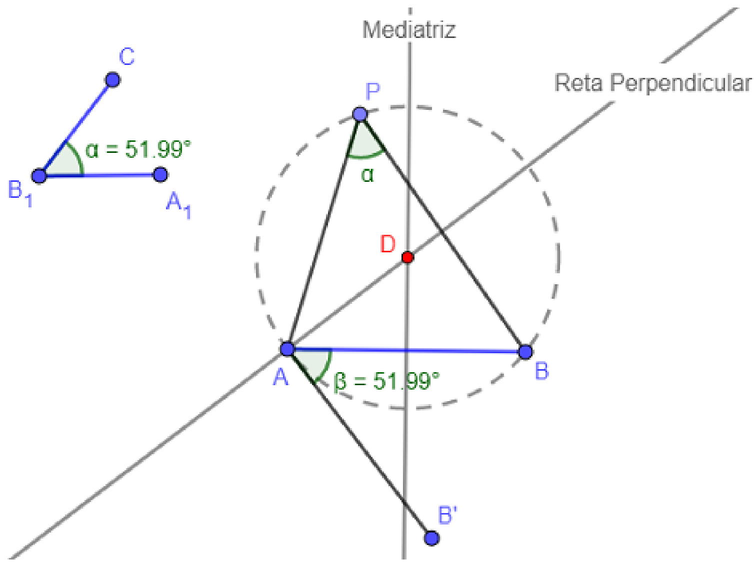


Figura 75 – Construção Arco Capaz

Justificativa: No ponto D que é a interseção da perpendicular com a mediatriz temos que $\overline{DA} = \overline{DB}$, pois D está na mediatriz do segmento AB. Marcando um ponto (E) na interseção da mediatriz com o segmento AB temos:

- O ângulo $D\widehat{E}A$ é reto (pois a mediatriz corta o segmento perpendicularmente).
- O ângulo $D\widehat{A}B'$ é reto (pois foi formado pela perpendicular ao segmento AB').
- O ângulo $B\widehat{A}B' = \alpha$, logo $D\widehat{A}E$ é igual ao complemento de α, ou seja, 90° - α.
- Como $D\widehat{E}A$ é reto os outros dois ângulos do triângulo EAD têm que somar 90° (soma dos ângulos internos de um triângulo), então o ângulo $E\widehat{D}A$ é complemento do ângulo $D\widehat{A}E$, ou seja, é complemento do complemento de α. Logo, $E\widehat{D}A = \alpha$.
- O mesmo acontece com o triângulo DEB, pois eles são congruentes, logo o ângulo $E\widehat{D}B = \alpha$.

  Com isso concluímos que o arco menor AB, é um arco de 2α, pois o ângulo central $A\widehat{D}B = 2\alpha$.

  Logo, tomando um ponto P qualquer do arco maior AB, o ângulo $A\widehat{P}B$ = metade do ângulo central (ângulo inscrito), ou seja, $A\widehat{P}B = \alpha$.

Assim, este arco maior AB é chamado **Arco Capaz** de α.

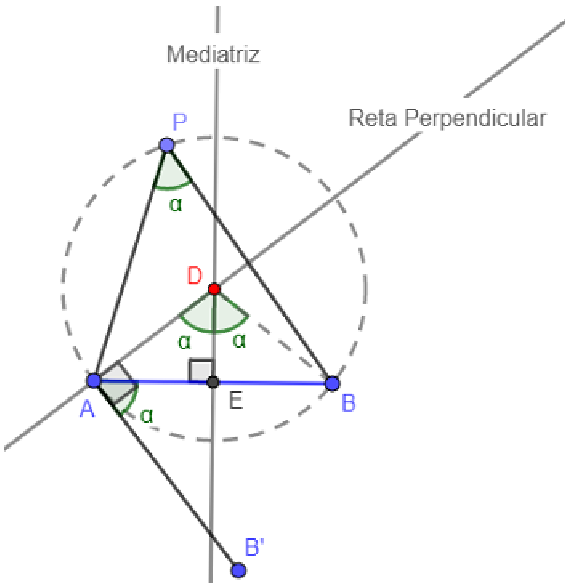


Figura 76 – Construção Arco Capaz

Observação 8. Na construção do Arco Capaz de 90°, a perpendicular será o próprio diâmetro da circunferência, então basta traçar a mediatriz do segmento dado e a interseção da mediatriz com o segmento é o centro da circunferência.

Agora realizaremos a resolução dos problemas, uma vez que as construções elementares (paralela, mediatriz, ponto médio, perpendicular, divisão de um segmento e arco capaz)já foram realizadas, o leitor pode tomar posse de todas essas construções sem a necessidade de construí-las novamente. Então fica a critério do professor, ou o aluno realiza essa construção ou utiliza os comandos do Geogebra.

Nos problemas a seguir, foi incluído mais um tópico: *Solução* que é uma ideia de como será feita a construção.

5.2 Resolução dos Problemas

Problema 1

Dado um segmento AB construa o triângulo equilátero ABC e a altura CM do vértice C.

Conhecimentos prévios: Circunferência, triângulo (altura e classificação em relação aos lados), mediatriz.

Preparação: Com o comando Segmento, construa um segmento AB qualquer .

Solução: Faça duas circunferências cujo raio seja a medida do segmento dado, uma com centro em A e outra com centro em B. Sejam C e D a interseção dessas duas circunferências, então, o triângulo ABC é equilátero, a reta CD é a mediatriz de AB, que determina a altura dentro do triângulo.

Construção:

I) Com o comando Círculo Dados Centro e Um de Seus Pontos, construa duas circunferências de raio $\overline{AB}$ uma com centro em A e outra com centro em B.

II) Marque a interseção das duas circunferências com o comando Interseção de Dois Objetos, obtendo os pontos C e D.

III) Com o comando Segmento, ligue os vértices A, B e C para construir o triângulo. Observe que os dois pontos podem ser solução, ou seja, podemos ter o ΔABC ou ΔABD, pois eles são iguais. Vamos usar como solução o ponto C, assim teremos o ΔABC, conforme solicitado no enunciado.

IV) Com o comando Mediatriz, trace a mediatriz de AB.

V) Marque a interseção da mediatriz com o lado AB do triângulo e a renomeie para M.

VI) Esconda a mediatriz e ligue com um segmento a altura CM do triângulo ABC.

Verificação com o Geogebra: Utilize o comando Polígono Regular, selecione os pontos A e B. Aparecerá na tela um campo para digitar a quantidade de vértices que deseja, digite 3 e formará o triângulo ABE, onde $\overline{AB} = \overline{BE} = \overline{EA}$.

Como a altura é perpendicular ao lado oposto do triângulo, basta traçar a perpendicular ao lado oposto que passa por E, utilizando o comando Reta Perpendicular. Se o triângulo e a altura formados pelo GEOGEBRA forem coincidentes com os que foram feitos pelo aluno, a construção estará correta.

Justificativa: Nesta construção temos $\overline{CA} = \overline{AB} = \overline{BC}$, pois os raios das circunferências c e d são iguais. Como $\overline{CA} = \overline{CB}$, então C está sobre a mediatriz do segmento AB, logo CM é a perpendicular que passa pelo ponto médio M. Portanto, teremos o triângulo equilátero ABC e sua altura CM.

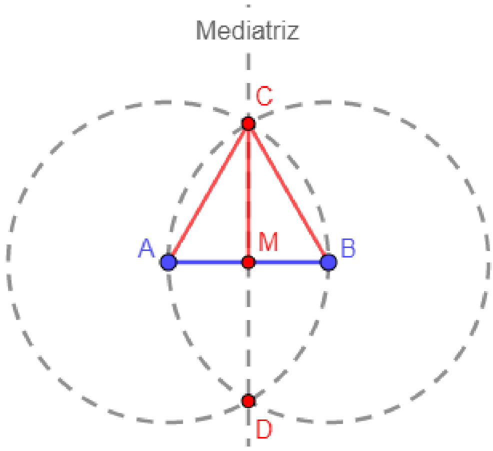


Figura 77 – Construção - Problema 1

Problema 2

Dado o segmento AB, construa o quadrado $ABCD$.

Conhecimentos prévios: Circunferência, quadrado, paralelas, perpendicular.

Preparação: Faça um Segmento AB.

Solução: Traçando por A e B retas perpendiculares ao segmento AB e 2 circunferências de raio $\overline{AB}$, uma de centro em A e outra de centro em B, as interseções dessas circunferências com as perpendiculares são os vértices C e D do quadrado.

Construção:

I) Construa com o comando Compasso, duas circunferência de raio AB, uma com centro em A e outra com centro em B.

II) Trace com o comando Reta Perpendicular, duas retas perpendiculares ao segmento AB, uma que passa por A e outra que passa por B.

III) Com o comando Interseção de Dois Objetos, marque as interseções das perpendiculares com as circunferências. Formarão os pontos C, D, E e F, neste caso tem duas possibilidades de formar o quadrado, ou ligar o ponto D com F e formar o quadrado $ABFD$, ou ligar o ponto C com E e formar o quadrado $ABEC$, vamos utilizar os pontos D e F.

IV) Para que as letras fiquem conforme no enunciado, renomeie a letra F para C, então teremos o quadrado $ABCD$.

V) Esconda as perpendiculares e os pontos que não serão utilizados. Ligue com o comando Segmento os pontos B com C, C com D e D com A.

Verificação com o Geogebra: Usando o comando Polígono Regular, clique no ponto A, depois no ponto B. Aparecerá na tela um campo para digitar a quantidade de vértices que deseja, digite 4 e aparecerá um quadrado $ABFG$. Se o quadrado formado pelo GEOGEBRA for coincidente com o que foi feito pelo aluno, então a construção está correta.

Justificativa: Nesta construção temos $\overline{AB} = \overline{AD} = \overline{BC}$, pois os raios das circunferências construídas são iguais. Com as retas perpendiculares traçadas, podemos afirmar que os ângulos $\widehat{A}$ e $\widehat{B}$ são ângulos retos e assim D e C pertencem à paralela de AB, logo $\overline{DC} = \overline{AB}$ e os ângulos $\widehat{D}$ e $\widehat{C}$ também são retos. Concluímos então que $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DA}$, todos os lados e ângulos são iguais, temos, portanto, um quadrado $ABCD$.

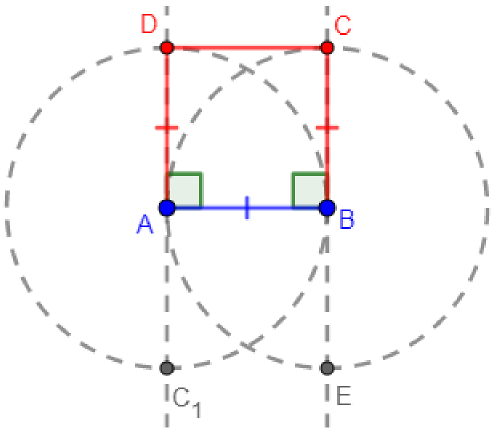


Figura 78 – Construção - Problema 2

Problema 3

Construir o triângulo ABC sendo dados os três lados.

Conhecimentos prévios: circunferência, triângulo.

Preparação: Com o comando Segmento, construa 3 segmentos quaisquer que corresponderão aos lados do triângulo, pode colocá-los na parte superior ou no canto da tela para não atrapalhar a construção. Serão formados os segmentos AB, CD e EF.

Solução: Construir uma reta e sobre ela transportar o segmento AB. Construir uma circunferência com centro em A e raio CD e outra com centro em B e raio EF. A interseção dessas duas circunferências é a solução.

Construção:

I) Constua uma reta com o comando Reta, obtendo a reta i com os pontos G e H, esconda um destes pontos da reta, por exemplo H.

II) Transporte o segmento AB para esta reta, com o comando Compasso construa uma circunferência de raio $\overline{AB}$ e centro em G, obtendo a circunferência c.

III) Marque com o comando Interseção de Dois Objetos a interseção da circunferência com a reta, obtendo dois pontos I e J.

IV) Esconda a circunferência e o ponto I, para deixar apenas um ponto da interseção. Assim temos $\overline{GJ} = \overline{AB}$.

V) Transporte o segmento CD para uma das extremidades do segmento GJ, com o comando Compasso construa uma circunferência de raio $\overline{CD}$ e centro em G, obtendo a circunferência d.

VI) Faça o mesmo procedimento para transferir a medida do segmento EF para o ponto J, obtendo a circunferência e de centro J e raio $\overline{EF}$.

VII) Marque com o comando Interseção de Dois Objetos, a interseção das circunferências d e e, obtendo os pontos K e L que são as duas soluções, escolha um destes pontos, o ponto K por exemplo.

VIII) Ligue os pontos com o comando Segmento, para formar o triângulo KGJ que tem os lados iguais as medidas de $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ e $\overline{EF}$.

Verificação com o Geogebra: Pode-se verificar se a figura está correta através das medidas. Utilize o comando Distância, Comprimento ou Perímetro e meça as medidas dos segmentos dados, depois meça as do triângulo formado. Se as medidas do triângulo forem iguais as dos segmentos, então a construção estará correta.

Justificativa: Foram criadas circunferências cujos raios são equivalentes as medidas dos segmentos dados.

Temos: $\overline{GJ} = \overline{AB}$, pois $\overline{GJ}$ equivale a medida do raio da circunferência c.

Temos $\overline{GK} = \overline{CD}$, pois $\overline{GK}$ equivale a medida do raio da circunferência d.

Temos: $\overline{JK} = \overline{EF}$, pois $\overline{JK}$ equivale a medida do raio da circunferência e.

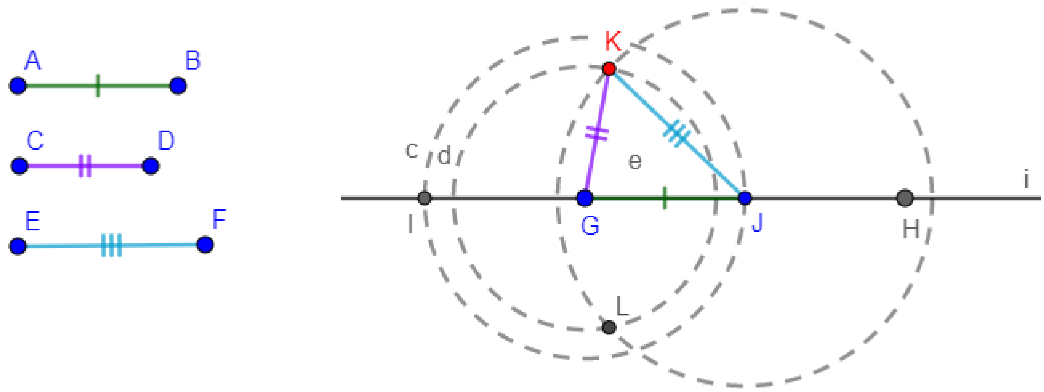


Figura 79 – Construção - Problema 3

Problema 4

Dado o ângulo α, e a semirreta OX construir o ângulo $X\widehat{O}Y = \alpha$.

Conhecimentos prévios: Circunferência, casos de semelhança de triângulos.

Preparação: Faça um Ângulo qualquer. Para formar o ângulo $A\widehat{B}C$, ligue os pontos A, B e B, C com um segmento. Depois faça um Segmento qualquer e o renomeie para OX.

Solução: O objetivo é transportar o ângulo dado para a semirreta, para isso construa uma circunferência usando um dos lados que formam o ângulo como raio e o vértice deste ângulo como centro. Marque a interseção da circunferência formada com o outro lado, ponto D. Transporte a medida $\overline{AB}$ para a semirreta dada com o compasso e marque a interseção, chame de ponto E. Transporte a medida $\overline{AD}$ para o ponto E com o compasso e marque a interseção das duas circunferências, chame de ponto Y. O ângulo $X\widehat{O}Y$ formado será igual a α.

Construção:

I) Esconda o ponto C do ângulo que foi criado, pois este poderá atrapalhar a construção.

II) Com o comando Compasso, faça uma circunferência de raio $\overline{AB}$ e centro em B, obtendo a circunferência c.

III) Marque com o comando Interseção de Dois Objetos, a interseção do segmento BC com a circunferência. Formará o ponto D, então o ângulo α está agora representado por $A\widehat{B}D$.

Obs.: Se o segmento estiver menor que o raio da circunferência, passe por BC uma reta e depois marque esta interseção.

IV) Transporte a medida de AB para o segmento OX, a partir da extremidade O, usando o comando Compasso, ou seja, construa uma circunferência de raio $\overline{AB}$ e centro em O, obtendo a circunferência d.

V) Com o comando Interseção de Dois Objetos, marque a interseção da circunferência d com o segmento OX, obtendo o ponto E.

VI) Transporte o arco de abertura do ângulo α para a circunferência d. Para isso construa uma circunferência de raio $\overline{AD}$ e centro em E com o comando Compasso, obtendo a circunferência e.

VII) Marque a interseção das circunferências d e e com o comando Interseção de Dois Objetos, obtendo os pontos F e G, que são os dois lugares onde podemos colocar o ângulo. Vamos utilizar o ponto F.

VIII) Esconda as circunferências e os pontos E e G.

IX) Ligue O e F com um Segmento.

X) Renomeie o ponto F para Y, conforme solicitado no enunciado. Teremos então o ângulo $X\widehat{O}Y = \alpha$.

Verificação com o Geogebra: Com o comando Ângulo, clique em X, O, Y e aparecerá o valor do ângulo que foi construído, se o valor for igual ao do ângulo dado, a construção estará correta.

Justificativa: Temos que $\overline{BA} = \overline{BD} = \overline{OY} = \overline{OE}$, pois representam os raios da circunferência c e d que possuem raios iguais. Também $\overline{AD} = \overline{EY}$, pois são iguais ao raio da circunferência e. Logo temos o caso de semelhança de triângulo LLL. Então o ângulo $A\widehat{B}D = E\widehat{O}F$ $(X\widehat{O}Y\ ) = \alpha$.

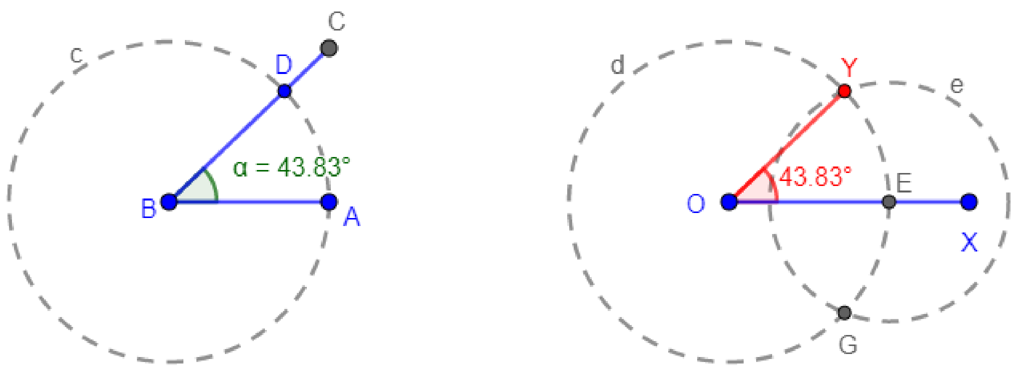


Figura 80 – Construção - Problema 4

Observação 9. *A partir de agora, vamos permitir, por comodidade, utilizar outros comandos do Geogebra que já criam o ângulo com a medida que desejamos e o segmento também, por meio dos comandos Ângulo com Amplitude Fixa e Segmento* *com Comprimento Fixo, já que os alunos já aprenderam a transportar esses objetos, assim, não precisamos ficar repetindo os procedimentos anteriores, podemos utilizar direto os comandos do software para estes casos, pois são instrumentos que permitem tornar mais rápida e prática a execução das construções. Entretanto, caso o prefessor queira, estes comandos podem ser dispensados e então o aluno terá que transportar o lado e o ângulo.*

Problema 5

Construir o triângulo ABC ***dados o lado*** a ***e os ângulos*** $\widehat{B}$ ***e*** $\widehat{C}$***.***

Conhecimentos prévios: Triângulo, ângulo, circunferência.

Vamos resolver este problema atribuindo o valor de $a = 5$ cm para o lado $\overline{BC}$ e 62° e 38° para os ângulos $\widehat{B}$ e $\widehat{C}$, respectivamente.

Preparação: O lado a que foi dado do triângulo ABC, corresponde por definição ao lado BC. Coloque com o comando Segmento com Comprimento Fixo, um segmento de 5 cm e renomeie o pontos para BC e o segmento para a. Assim temos o segmento $a = \overline{BC} = 5$ cm.

Se desejar que o aluno transporte os ângulos dados para o segmento, construa os ângulos separadamente usando o comando Ângulo com Amplitude Fixa, e o aluno terá que transportar usando os procedimentos do exercício anterior, sem utilizar o comando.

Se optar por deixar o aluno utilizar o comando para construir estes ângulos sobre o segmento, deixe na preparação, apenas o segmento para que ele próprio coloque estes ângulos usando o comando Ângulo com Amplitude Fixa.

Vamos fazer a construção levando em conta que o aluno poderá utilizar este comando.

Solução: Desenhe o segmento $BC = 5$ cm e, em seguida construa os ângulos dados, obtendo as retas BC' e CB' de forma que os ângulos $C\widehat{B}C'$ e $B\widehat{C}B'$ sejam iguais aos ângulos dados. A interseção dessas duas retas é o vértice A do triângulo.

Construção:

I) Com o comando Ângulo com Amplitude Fixa, coloque o ângulo $\widehat{B} = 62°$ no ponto B do segmento BC. Basta clicar no ponto C depois no ponto B, digitar o valor e clicar em *sentido anti-horário*, obtendo o ponto C', logo $C\widehat{B}C' = 62°$. Utilizando o mesmo procedimento, coloque o ângulo $\widehat{C} = 38°$ no ponto C, no sentido horário.

II) Com o comando Reta, ligue B a C' e C a B'.

III) O encontro dessas duas retas é o vértice A do triângulo. Marque a interseção dessas duas retas com o comando Interseção de Dois Objetos, obtendo o ponto A.

IV) Esconda as retas e os pontos B' e C'. Com o comando Segmento, ligue B a A e A a C e teremos o triângulo ABC de base $\overline{BC} = 5$ cm e ângulos da base $\widehat{B} = 62°$ e $\widehat{C} = 38°$.

Observação 10. Para os valores dos ângulos dados o professor pode escolher quaisquer valores desde que a soma dos dois não seja maior que 180°.

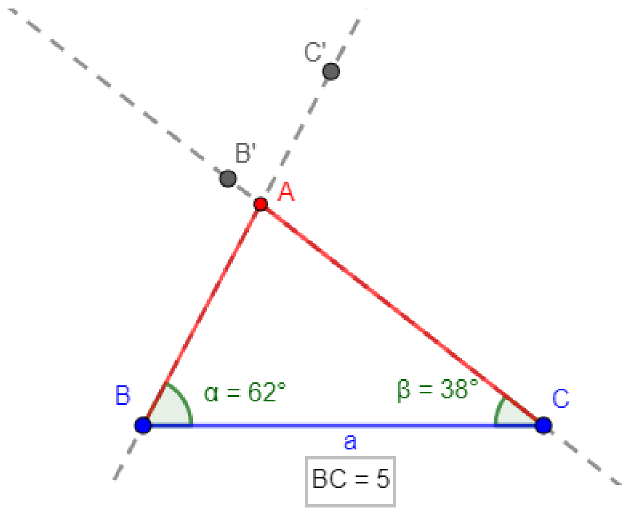


Figura 81 – Construção - Problema 5

Problema 6

Construir o triângulo ABC ***conhecendo o lado*** BC ***= 5,3 cm, e as medianas*** m_b ***= 4 cm e*** m_c ***= 5 cm.***

Considere m_b como a medida da mediana do lado B e m_c como a medida da mediana do lado C.

Conhecimentos prévios: Mediana, baricentro, circunferência.

Preparação: Com o comando Segmento com Comprimento Fixo, faça um segmento de 5,3 cm. Aparecerá o segmento AB, então basta renomeá-lo para que fique igual ao enunciado (B e C). Em seguida, com o mesmo comando faça outros dois segmentos, um de 4 cm e outro de 5 cm, aparecerão os segmentos g ou seja, AD e h isto é EF.

Solução: A distância do baricentro a um vértice é igual a $\frac{2}{3}$ da respectiva mediana e se G é o baricentro do triângulo ABC, o triângulo GBC pode ser construído porque o lado BC é conhecido e são também conhecidas as distâncias $GB = \frac{2}{3}m_b$ e $GC = \frac{2}{3}m_c$, isto é, basta dividir as medianas em três partes iguais.

Construção:

I) Divida as medianas g e h em 3 partes iguais, como foi feito nas *Construções Elementares* (ver Divisão de um Segmento em n Partes Iguais). Pode-se fazer a construção passo a passo ou criar o comando que faz a divisão conforme foi explicado anteriormente, utilizando o comando Controle Deslizante. Para isso use o exemplo dado e faça dois incrementos um pode ser chamado de b e o outro de c. Na fórmula da sequência, substitua o A pelo ponto inicial do segmento e o B pelo ponto final do segmento, no caso de g temos que o inicial é o ponto A e o final é o ponto D, depois substitua n por b, que foi o nome dado ao incremento, ou seja, a fórmula com estes nomes será $\textit{Sequência}(A+(k/b)(D-A),k,1,b-1,1)$. Faça o mesmo com o segmento h e a fórmula será $\textit{Sequência}(E+(k/c)(F-E),k,1,c-1,1)$. Depois no controle deslizante, arraste b e c para o valor 3, assim os segmentos serão divididos em 3 partes iguais. Com o comando Ponto, coloque pontos sobre estas marcações.

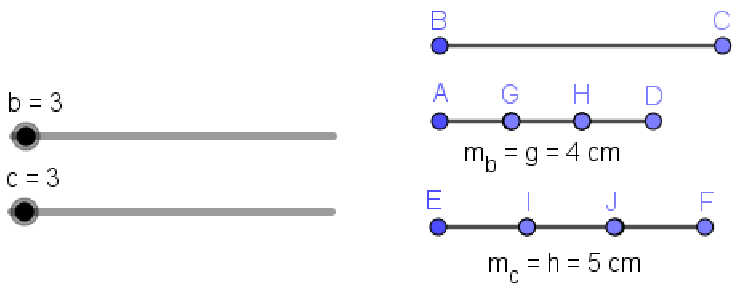


Figura 82 – Controle Deslizante - Problema 6

Teremos então no segmento AD, $\overline{AG}=\overline{GH}=\overline{HD}$ e no segmento EF, $\overline{EI}=\overline{IJ}=\overline{JF}$.

II) Com o comando Mover, mova o segmento BC para onde deseja realizar a construção. Com o comando Ponto Médio, marque o ponto médio do segmento BC, pode renomeá-lo para M.

III) Como já sabemos que a distância do vértice ao Baricentro é $\frac{2}{3}$ da mediana, basta pegar apenas os $\frac{2}{3}$ dela e transportar para o segmento BC. Com o comando Compasso transporte a medida de $\frac{2}{3}$ de g para o ponto B. Formará a circunferência d de centro em B e raio $\frac{2}{3}$ de g. Com o mesmo comando transporte $\frac{2}{3}$ de h para o ponto C. Formará a circunferência e de centro em C e raio $\frac{2}{3}$ de h.

IV) O ponto de encontro destas duas circunferências é o ponto G (baricentro), então marque a interseção com o comando Interseção de Dois Objetos, obtendo dois pontos da interseção, K e L. Escolha um deles, K por exemplo, e renomeie para G, o ponto L pode esconder.

V) Com o comando Reta, trace uma reta que passe pelos pontos M e G. Formará a reta g, onde estará a mediana do vértice A.

VI) Precisa-se agora marcar o ponto A. Para isso, sabe-se que $\overline{MA}$ é a mediana m_a e que AG é $\frac{2}{3}$ dessa mediana e, consequentemente, $\overline{MG}$ é $\frac{1}{3}$ de m_a. Como já temos o tamanho de MG, basta considerá-lo duas vezes mais e colocá-lo sobre a reta g para saber onde estará o ponto A.

VII) Com o comando Compasso, faça uma circunferência de raio $\overline{MG}$ e centro em G, obtendo a circunferência h.

VIII) Com o comando Interseção de Dois Objetos, marque a interseção dessa circunferência com a reta. Formarão os pontos K e N, note que um deles, ponto K, é coincidente com o ponto M e pode escondê-lo.

IX) Repita o procedimento anterior, fazendo outra circunferência de raio $\overline{MG}$, porém agora com centro em N. Formará a circunferência p.

X) Marque a interseção dessa circunferência com a reta MG. Formarão os pontos O e P, como O é coincidente com G é possível escondê-lo. Assim na reta temos três vezes a medida de MG, tal que $\overline{MG}$ é $\frac{1}{3}$ da mediana m_a e $\overline{PG}$ é $\frac{2}{3}$ da mediana, logo o ponto P é o vértice A do triângulo ABC.

XI) Renomeie o ponto P para A.

XII) Basta ligar com Segmento os pontos B com A e C com A para formar o triângulo ABC.

XIII) Pode limpar a figura, esconda as circunferências deixando apenas o triângulo ABC, e os pontos M e G.

XIV) Com o comando Ponto Médio, marque o ponto médio dos lados AB e AC do triângulo. Formarão os pontos P e Q.

XV) Com o comando Segmento, ligue cada vértice com o ponto médio do lado oposto a ele, ou seja, ligue A com M, C com P, e B com Q. Estes segmentos são as medianas, note que todas cruzam no ponto G que é o Baricentro.

Verificação com o Geogebra: Para confirmar se está correto, pode-se verificar se realmente as medianas se cruzam no ponto G e também medir as medianas g e h com o comando Distância, Comprimento ou Perímetro e conferir se as medidas são iguais as do enunciado, isto é, se aparecer as medidas 4 e 5, então a construção estará correta.

Justificativa: Ver Teorema 5.

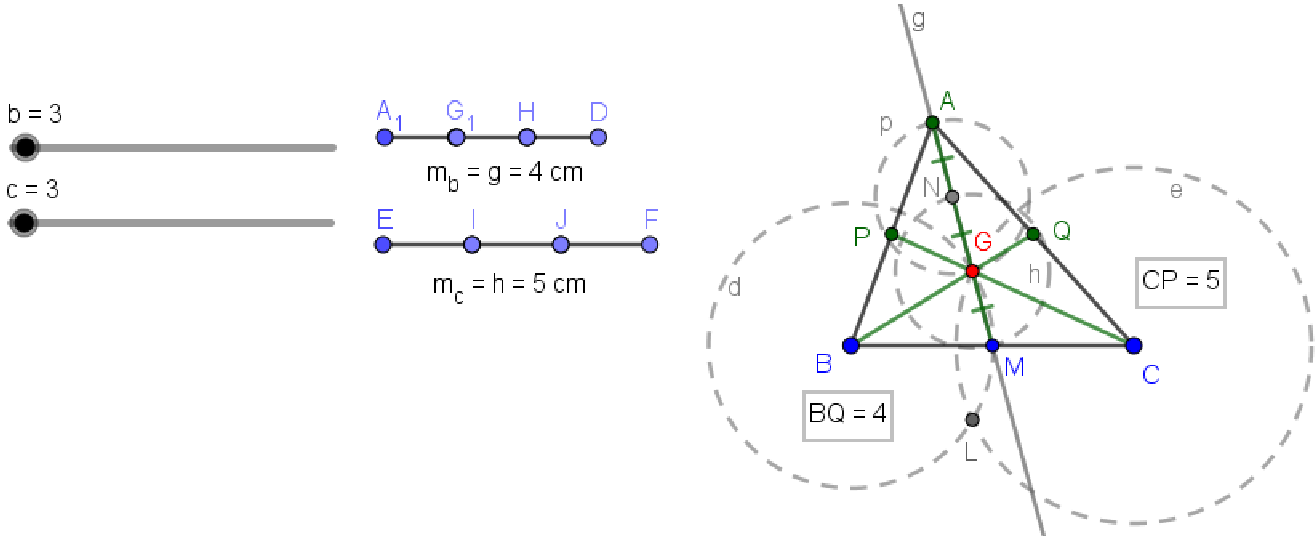


Figura 83 – Construção - Problema 6

Problema 7

Desenhe o triângulo ABC ***conhecendo os lados*** AB ***= 4,5 cm,*** BC ***= 5,2 cm e a altura relativa ao lado*** BC ***= 3,8 cm.***

Conhecimentos prévios: Perpendicular, paralelas, circunferência, lugar geométrico, altura de triângulo.

Preparação: Com o comando Segmento com Comprimento Fixo, faça um segmento de 4,5 cm, obtendo o segmento $AB = 4,5cm$.

Em seguida faça o mesmo procedimento para criar o segmento de 5,2 cm, obtendo o segmento $CD = 5,2cm$, basta renomeá-lo para BC. Depois com o mesmo comando faça a altura de 3,8 cm, obtendo o segmento $DE = 3,8cm$.

Solução: Trace uma reta i e sobre ela coloque o segmento BC com o comprimento dado. Afastado de BC desenhe uma reta perpendicular a i e seja X o ponto de interseção. Assinale sobre ela o segmento XY = 3,8 cm e trace por Y uma paralela à reta i. Este é o lugar geométrico do vértice A. Com o compasso faça uma circunferência de centro em B e raio = 4,5 cm, a circunferência cortará a reta paralela em dois pontos mostrando que há duas soluções para o problema.

Construção:

I) Faça uma reta qualquer com o comando Reta. Obs.: Clique em pontos bem separados, para que estes pontos possam ser utilizados depois. Formará a reta i com os pontos F e G.

II) Transporte a medida de BC para a reta i com o comando Compasso, ou seja, faça uma circunferência de raio BC e centro em F (ponto que está na reta), obtendo a circunferência c, neste caso o ponto G está fora da circunferência, então ele poderá ser utilizado para a próxima etapa, caso ele fique dentro da circunferência, esconda-o e crie um outro ponto sobre a reta e fora da circunferência.

III) Com o comando Interseção de Dois Objetos, marque a interseção da circunferência c com a reta. Formarão os pontos H e I, então temos $\overline{FI} = \overline{FH} = \overline{BC}$ sobre a reta i. Renomeie F para B e I para C para que a construção não fique confusa e esconda o ponto H.

IV) Em seguida com o comando Reta Perpendicular, trace a perpendicular à reta i, que passa pelo ponto G (ponto fora da circunferência). Formará a perpendicular j, sendo G o ponto da interseção da perpendicular j com a reta i.

V) Coloque com o comando Compasso, a medida da altura relativa ao segmento BC nesta perpendicular, ou seja, faça uma circunferência de raio $\overline{DE} = 3{,}8$ cm e centro em G, obtendo a circunferência d.

VI) Com o comando Interseção de Dois Objetos, marque a interseção da circunferência d com a perpendicular j. Formarão os pontos F e I, vamos escolher o que está acima (ponto I), logo $\overline{GI} = \overline{DE}$ é a altura do triângulo ABC.

VII) Pode-se esconder as circunferências c, d e o ponto F.

VIII) Com o comando Reta Paralela, trace a reta paralela à reta i e que passa pelo ponto I. Formará a reta k, é nela que estará o vértice A do triângulo, pois entre as retas i e k a distância é 3,8 cm.

IX) Faça uma circunferência de raio AB e centro em B, com o comando Compasso, obtendo a circunferência e.

X) Com o comando Interseção de Dois Objetos, marque a interseção da circunferência e com a paralela k, obtendo os pontos J e K que são os dois lugares geométricos onde pode estar o ponto A, escolha um desses pontos para ser o vértice A, por exemplo o ponto K e o renomeie para A.

XI) Esconda a circunferência e e as retas.

XII) Com o comando Segmento, ligue A com B, A com C e B com C.

Verificação com o Geogebra: Podemos conferir se o triângulo está correto, medindo os lados AB, BC e a altura GI, usando o comando Distância, Comprimento ou Perímetro. Se as medidas forem iguais as do enunciado, então a construção estará correta.

Justificativa: Observamos que qualquer ponto que esteja sobre a reta paralela ao segmento BC terá como altura 3,8 cm e a localização de A é determinada observando que o raio da circunferência construída tem a mesma medida do lado AB.

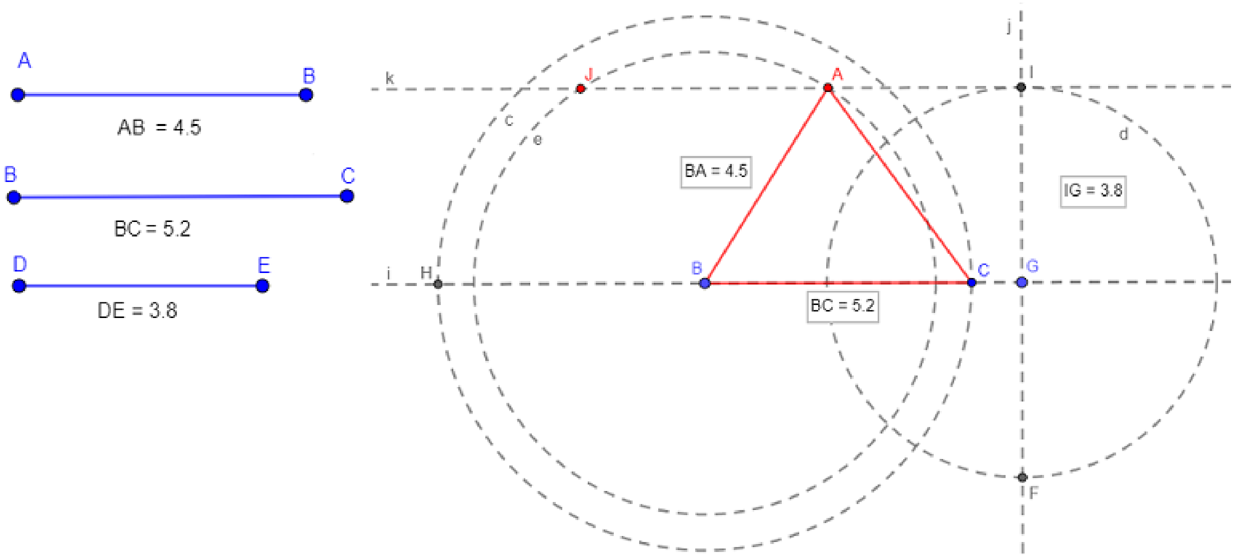


Figura 84 – Construção - Problema 7

Problema 8

Construir a circunferência que passa por três pontos A, B, e C dados em posição.

Preparação: Na tela é necessário haver três pontos, por onde irá passar uma circunferência. Para isso coloque três pontos com o comando Ponto, obtendo os pontos A, B e C.

Temos duas maneiras de resolver este problema, vamos fazer as duas construções: utilizando mediatrizes (construção 1) e utilizando o arco capaz (construção 2).

- ***Construção 1 - Mediatrizes***

  Conhecimentos prévios: Mediatriz, circunferência, circunferência circunscrita ao triângulo, circuncentro.

  Solução: Seja O o centro da circunferência que passa por A, B e C. Como $\overline{OA} = \overline{OB}$, então O pertence à mediatriz de AB. Como $\overline{OB} = \overline{OC}$ então O pertence à mediatriz de BC. Assim, o ponto O é a interseção dessas duas mediatrizes, ou seja, basta traçar as mediatrizes dos segmentos AB e BC e a interseção destas duas mediatrizes será o ponto O (centro).

  Observação 11. As três mediatrizes se encontram no ponto O, porém, não é necessário traçar as três mediatrizes, com duas já é possível encontrar o ponto procurado.

  Construção:

  I) Utilizando o comando Mediatriz, trace a mediatriz entre A e B e depois a mediatriz entre B e C.

II) Com o comando Interseção de Dois Objetos, marque a interseção entre as duas mediatrizes, renomeie o ponto da interseção para O, pois ele é o centro.

III) Assim $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC}$, pois são os raios, então se temos o centro e o raio é possível traçar a circunferência. Utilizando o comando Círculo Dados Centro e Um de Seus Pontos, faça a circunferência de centro O e raio $\overline{OA}$.

Verificação com o Geogebra: Ao traçar a circunferência, se os três pontos A, B e C pertecerem a circunferência então a construção está correta.

Justificativa: Pela definição de mediatriz, encontramos o centro O, como a circunferência é circunscrita ao triângulo formado pelos 3 pontos, seu centro é o ponto de encontro de todas as mediatrizes do triângulo (circuncentro), ver Teorema 5.

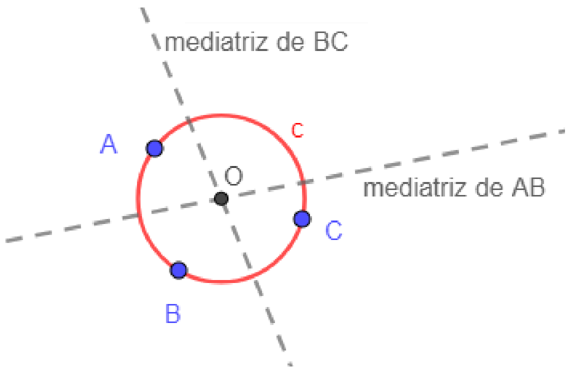


Figura 85 – Construção 1 - Problema 8

- ***Construção 2 - Arco Capaz***

Conhecimentos prévios: Arco capaz, mediatriz, circunferência, perpendicular.

Solução: Vamos construir o Arco Capaz, ligando três pontos dados com segmentos formando um triângulo. Escolheremos um dos ângulos para ser o utilizado na construção do arco capaz, por exemplo, o ângulo $\widehat{A} = \alpha$. Então, basta fazer a construção do Arco Capaz, transportando este ângulo para um dos pontos B ou C.

Construção:

I) Ligue com Segmento os pontos A, B e C, formando um triângulo.

II) Escolha um dos ângulos interno do triângulo para ser utilizado na construção do Arco Capaz, por exemplo, o ângulo $\widehat{A}$. Então com o comando Ângulo, clique em B, em seguida clique em A e depois em C. Formará o ângulo α.

III) Já sabemos que os pontos A, B e C pertencem à circunferência, então podemos dizer que o arco maior CB é o arco capaz do ângulo α, ou seja, o ângulo α pode ser construído a partir de um ângulo abaixo do segmento oposto a ele, isto é, abaixo do segmento BC. Então, transporte o ângulo α para o vértice B ou C, colocando-o abaixo do segmento BC. Para isso, utilize o comando Ângulo com Amplitude Fixa, clique em C, depois clique em B, vai abrir uma caixa para digitar o valor do ângulo, digite o valor do ângulo α e clique no sentido horário. Formará o ângulo $C\widehat{B}C' = \alpha$.

IV) Ligue com Segmento os pontos B e C'.
A interseção da perpendicular ao segmento BC' que passa pelo ponto B, com a mediatriz do segmento BC formam o centro da circunferência procurada.

V) Com o comando Reta Perpendicular, trace a perpendicular ao segmento BC' que passa pelo ponto B.

VI) Trace a mediatriz ao segmento BC, com o comando Mediatriz.

VII) Marque a interseção da perpendicular com a mediatriz, com o comando Interseção de Dois Objetos, renomeie o ponto da interseção para O.

VIII) Construa a circunferência cujo centro é O e raio é $\overline{OB}$ ou $\overline{OC}$, com o comando Círculo Dados Centro e Um de Seus Pontos, obtendo a cincunferência procurada.

Verificação com o Geogebra: Se os três pontos estiverem na circunferência então a costrução está correta.

Justificativa: Como O está sobre a mediatriz de BC, então $\overline{OB} = \overline{OC}$ que são os raios da circunferência procurada. Pela definição de Arco Capaz, o encontro da mediatriz com a perpendicular do ângulo α, determina o centro da circunferência.

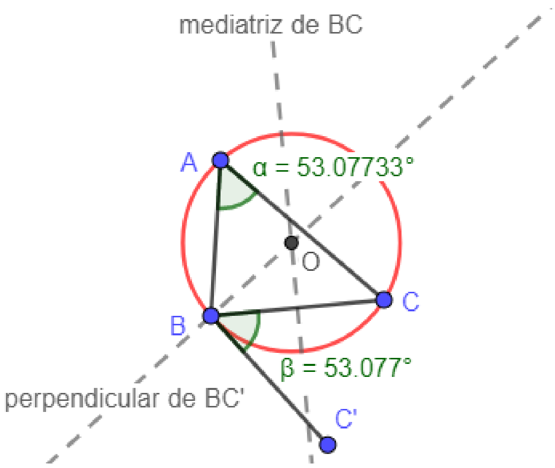


Figura 86 – Construção 2 - Problema 8

Problema 9

Construir a circunferência inscrita em um triângulo dado.

Conhecimentos prévios: Circunferência, circunferência inscrita, incentro, bissetriz, perpendicular.

Preparação: Desenhe um triângulo qualquer com o comando Polígono, ou coloque três pontos em lugares distintos e ligue-os com segmentos.

Solução: Seja ABC o triângulo dado. O centro da circunferência inscrita (incentro) é o ponto de interseção das bissetrizes internas. Precisamos então traçar as bissetrizes de dois ângulos do triângulo, não precisa das três porque duas já são o necessário para encontrar o ponto de encontro das bissetrizes, que é o centro (I) da circunferência inscrita, mas não podemos ainda desenhá-la, pois não conhecemos o raio. Como I é o ponto que equidista dos três lados do triângulo, a distância de I até o lado do triângulo é o raio da circunferência inscrita.

Construção:

I) Trace com o comando Bissetriz, as bissetrizes de dois ângulos internos, $\widehat{A}$ e $\widehat{C}$ por exemplo.

II) Marque o encontro das bissetrizes com o comando Interseção de Dois Objetos. Renomeie o ponto da interseção para I (incentro).

   Já temos o centro da circunferência inscrita, falta achar o raio para poder traçar esta circunferência. A distância entre I e os lados do triângulo são as mesmas, logo são os raios, vamos encontrar esta distância.

III) Com o comando Reta Perpendicular, trace a perpendicular a AC que passa por I.

IV) Marque com o comando Interseção de Dois Objetos, a interseção da perpendicular com o segmento AC, obtendo o ponto D.

   Temos, portanto, que $\overline{ID}$ é o raio da circunferência e o centro é I e então, já podemos traçar a circunferência.

V) Trace com o comando Círculo Dados Centro e Um de Seus Pontos, a circunferência de centro I e raio $\overline{ID}$, obtendo a circunferência d que é a solicitada no enunciado.

Verificação com o Geogebra: Se a circunferência estiver dentro do triângulo, tangenciando os seus lados, então a construção está correta.

Justificativa: Ver Teorema 6.

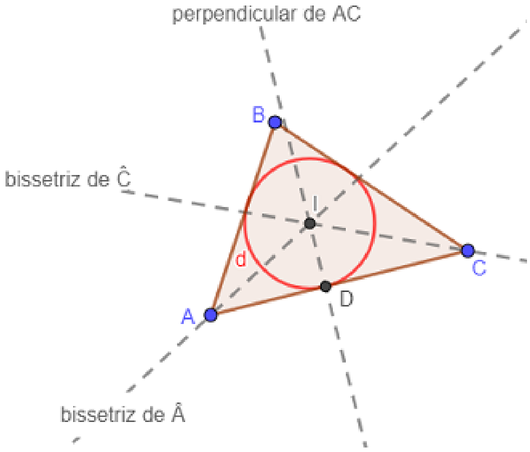


Figura 87 – Problema 9

Problema 10

Traçar por um ponto P exterior a uma circunferência as duas retas tangentes.

Conhecimentos prévios: Retas tangentes à circunferência, perpendicular, arco capaz.

Preparação: Com o comando Círculo Dados Centro e Um de Seus Pontos, construa uma circunferência qualquer. Formará a circunferência c de centro em A e o ponto B tal que $B \in c$. Esconda o ponto B e renomeie o ponto A para O.

Com o comando Ponto, coloque um ponto fora da circunferência e renomeie este ponto para P.

Solução: Seja D o ponto na circunferência, tal que DP é a reta tangente que passa por P. Temos então que PD é perpendicular a OD. Se ligarmos com segmentos O, P e D teremos um triângulo retângulo em D e todo triângulo retângulo, cabe numa semicircunferência que é o arco capaz de 90°. Portanto, se traçarmos o arco capaz de 90° no segmento OP, encontraremos este ponto D que será a interseção do arco capaz com a circunferência dada.

Construção:

I) Ligue O e P com um Segmento.

II) Em seguida construa o arco capaz de 90° sobre OP da seguinte forma: coloque um ângulo de 90° no ponto P abaixo do segmento OP, para isso utilize o comando Ângulo com Amplitude Fixa, se O estiver à direita de P, após selecionar o comando, clique em P, em seguida clique em O e se O estiver a esquerda de P faça o contrário. Vai abrir a caixa para digitar o ângulo que deseja, digite 90° e deixe marcado no sentido anti-horário. Formará o ponto O' que forma o ângulo, ligue P e O' com um Segmento. Observe que os segmentos OP e PO'

são perpendiculares, assim não precisa traçar a reta perpendicular ao segmento PO' que passa por P, pois este já é o segmento OP. Trace a mediatriz de OP, utilizando o comando Mediatriz. Marque o encontro da mediatriz com o segmento OP utilizando o comando Interseção de Dois Objetos, obtendo o ponto A e trace uma circunferência com o comando Círculo Dados Centro e Um de Seus Pontos, de centro A e raio $\overline{AP}$. Pela definição de Arco Capaz, o arco OP é o lugar geométrico onde qualquer ponto D sobre ele, formará um ângulo $O\widehat{D}P = 90°$.

III) Marque a interseção das duas circunferências utilizando o comando Interseção de Dois Objetos, obtendo os pontos D e C que são os dois possíveis pontos de tangência.

IV) Ligue com o comando Reta o ponto P, aos pontos obtidos no item anterior, obtendo as duas retas tangentes solicitadas PD e PC.

Verificação com o Geogebra: Com o comando Ângulo, meça os ângulos $P\widehat{D}O$ e $P\widehat{C}O$, se forem 90° a construção está correta.

Justificativa: O ângulo $P\widehat{D}O$ e o ângulo $P\widehat{C}O$ pertencem ao arco capaz do segmento OP e os ângulos deste arco capaz são de 90°, por construção.

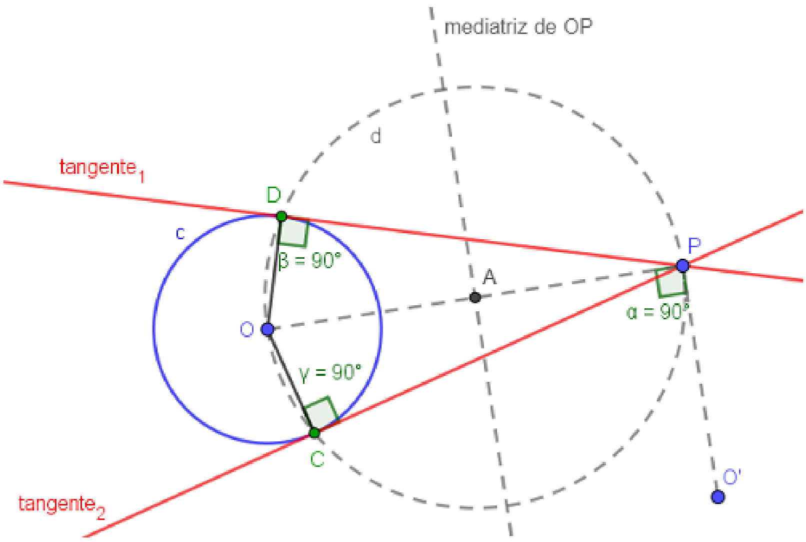


Figura 88 – Construção - Problema 10

Problema 11

Dados uma circunferência de centro O, um ponto P fora dessa circunferência e um segmento $\overline{AB} = a$. Trace por P uma reta que determine na circunferência uma corda de comprimento a.

Conhecimentos prévios: Corda, ponto médio, mediatriz, lugar geométrico, tangente, arco capaz.

Preparação: Com o comando Círculo Dados Centro e Um de Seus Pontos, construa uma circunferência qualquer. Formará a circunferência c de centro A e o ponto $B \in c$. Renomeie o ponto B para X e o ponto A para O. Com o comando Ponto, coloque um ponto em qualquer lugar fora da circunferência e renomeie este ponto para P.

Com o comando Segmento, contrua um segmento qualquer, porém, este deve ser menor ou igual ao diâmetro de c, já que deverá estar dentro da circunferência. Formará o segmento f determinado pelos pontos A e B, renomeie o segmento f para a, para que fique igual ao enunciado.

Solução: Na circunferência dada podemos traçar várias retas que determinam uma corda de comprimento a, mas que passe por um ponto P fora da circunferência teremos apenas duas. Seja M' o ponto médio dessas várias cordas, a distância do centro O para os pontos médios dessas cordas será constante, pois $\overline{OX}$ e $\overline{XM'}$ são constantes. Assim, o lugar geométrico de M' é uma circunferência de centro O e raio OM'. Para isso, vamos colocar a corda na circunferência, em qualquer lugar, traçar a mediatriz, achando o seu ponto médio (M'), e a medida de OM' será o raio da circunferência que queremos traçar. Se M' pertence à mediatriz do segmento XC, então $X\widehat{M'}O = 90°$, isso acontecerá em qualquer corda a e como P tem que passar pela corda, teremos então que o ponto M será o ponto tal que $P\widehat{M}O = 90°$.

Construção:

I) Com o comando Compasso, construa uma circunferência de raio $\overline{AB}$ e centro em X. Formará a circunferência d.

II) Marque a interseção das duas circunferência com o comando Interseção de Dois Objetos, obtendo os pontos C e D, que formam duas cordas $\overline{XC}$ e $\overline{XD}$ de comprimento a, pois é a medida do raio $\overline{AB}$. Escolha um deles, C por exemplo, para utilizar, o D pode esconder.

III) Com o comando Segmento, ligue o ponto X com C.

IV) Trace a mediatriz de XC com o comando Mediatriz.

V) Marque a interseção da mediatriz com o segmento XC com o comando Interseção de Dois Objetos, obtendo o ponto E, renomeie-o para M'.

VI) Com o comando Círculo Dados Centro e Um de Seus Pontos, construa uma circunferência de centro O e raio OM'. Formará a circunferência e que é o lugar geométrico do ponto médio das cordas de comprimento a.

    É preciso agora encontrar em qual lugar da circunferência e, estará o ponto M, tal que a reta PM determine na circunferência uma corda a.

Temos agora duas maneiras de resolver este problema, utilizando tangência (construção 1) ou utilizando o arco capaz (construção 2), o professor escolhe qual deseja utilizar.

1. ***Construção 1 - Tangente:*** Se a reta forma 90° com a circunferência e, então PM é tangente à esta circunferência e o ponto de tangência é o ponto médio M da corda. Assim, teremos duas soluções, pois P determina duas tangentes na circunferência e.

   I) Com o comando Reta Tangente, construa a reta tangente à circunferência e e que passa por P, obtendo duas retas tangentes, que são as duas soluções possíveis.

   II) Com o comando Interseção de Dois Objetos, marque as interseções da tangente com a circunferência c, obtendo os pontos E e F na primeira tangente e os pontos G e H na segunda tangente. Estes pontos determinam na circunferência c, duas cordas de comprimento a.

   Verificação com o Geogebra: Com o comando Distância, Comprimento ou Perímetro, meça a corda dada AB e depois meça as cordas encontradas na circunferência c, se os valores forem iguais, então a construção está correta.

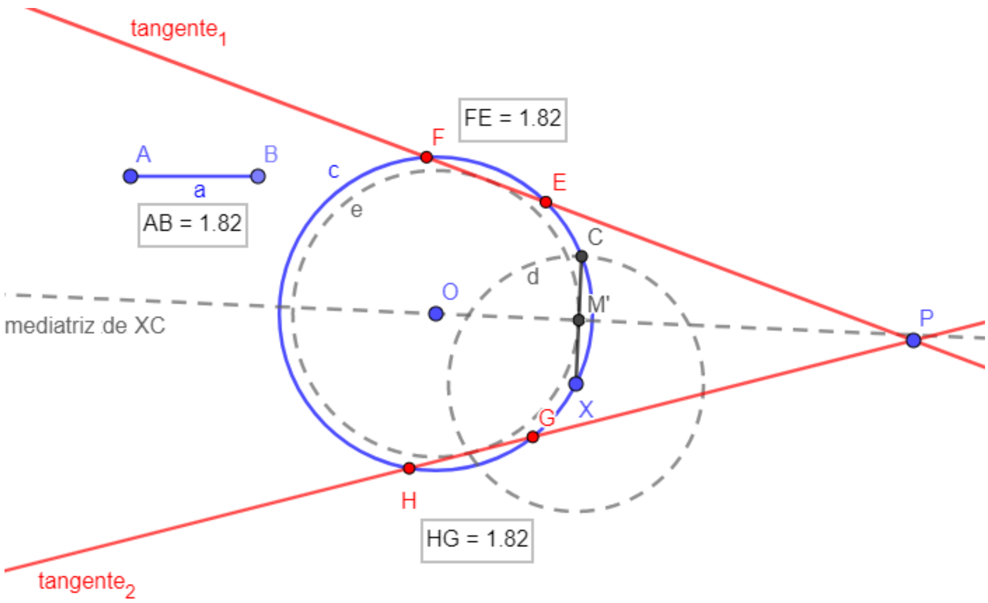


Figura 89 – Problema 11 - Tangentes

2. ***Construção 2 - Arco Capaz:***

Para a visualização ficar melhor pode-se esconder alguns bjetos que não serão mais utilizados, como por exemplo os pontos X, C e M', o segmento XC, a mediatriz de XC e a circunferência d. Se teremos $P\widehat{M}O = 90°$, ao ligar P, M e O com segmentos teremos um triângulo retângulo. Como visto no Arco capaz de 90°, todo triângulo retângulo determina um arco capaz cujo ângulo de 90° está sobre uma circunferência de diâmetro igual a hipotenusa (PO). Então, se $\overline{PO}$ é a medida do diâmetro da circunferência do arco capaz, basta traçarmos esta circunferência e a interseção desta circunferência com a circunferência e será o ponto médio M da corda que procuramos.

I) Para traçar a circunferência precisamos achar o raio e para isso basta encontrarmos o ponto médio entre P e O com o comando Ponto Médio, obtendo o ponto E, assim, $\overline{PE} = \overline{OE}$ = raio da circunferência do arco capaz de 90°.

II) Com o comando Círculo Dados Centro e Um de Seus Pontos, construa a circunferência de centro E e raio $\overline{PE}$, obtendo a circunferência g.

III) Marque a interseção das circunferências e e g com o comando Interseção de Dois Objetos obtendo dois pontos, pode renomeá-los para M (um ficará M e o outro M_1).

IV) Com o comando Reta, ligue P com M_1 e P com M, obtendo as retas h e i, que determinam um segmento de comprimento a na circunferência c conforme solicitado.

V) Marque com o comando Interseção de Dois Objetos, a interseção das retas com a circunferência c, obtendo os pontos F, G, H e I, tal que $\overline{FG} = \overline{HI} = a$.

Verificação com o Geogebra: Com o comando Distância, Comprimento ou Perímetro, meça a corda dada AB e depois meça as cordas FG e HI. Se os valores das cordas forem iguais ao valor de AB, então a construção está correta.

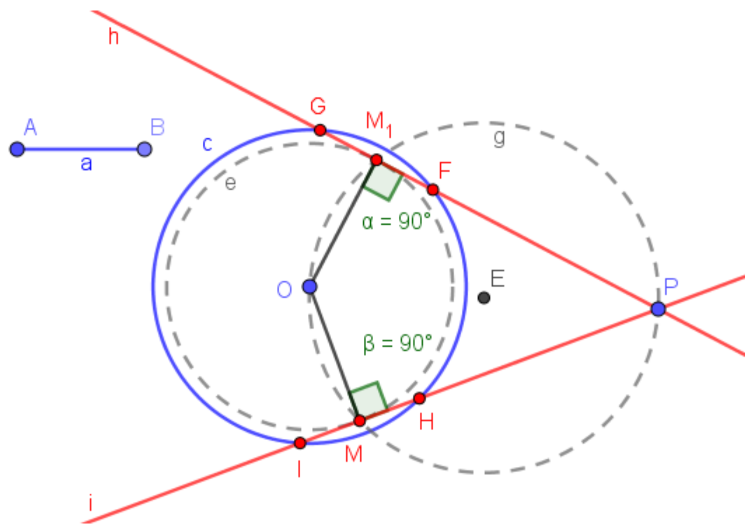


Figura 90 – Problema 11 - Arco Capaz

Justificativa:

Como visto no *Problema 8*, se dois pontos A e B pertencem a uma circunferência, então a mediatriz de AB passa pelo centro dessa circunferência. Então seja AB a corda de tamanho a na circunferência dada, se traçarmos a mediatriz de AB ela a interceptará no seu ponto médio M' (definição de mediatriz) e onde quer que a corda esteja na circunferência, teremos que a medida OM' é constante. Isso porque OA e AM' são constantes, logo OM' também será. Logo se traçarmos uma circunferência de centro O e raio OM' teremos o lugar geométrico de M.

Por outro lado, a reta que passa por P e determina na circunferência dada, uma corda de comprimento a é tal que $P\widehat{M}O = 90°$, pois OM é a mediatriz da corda. Logo podemos afirmar que a reta que procuramos tangência a circunferência de raio $\overline{OM}$ ou que se ligarmos P com O veremos que tem um arco capaz, pois $\widehat{M} = 90°$ determina o segmento PO, logo se o ângulo é 90° significa que PO é o diâmetro da circunferência que possui o ponto M. Então, achando o ponto médio de PO teremos o centro dessa circunferência do arco capaz, e a interseção dessa circunferência com a de raio $\overline{OM}$ serão os possíveis lugares para o ponto médio da corda. Basta então ligar P com estes dois pontos médios e teremos as duas retas que determinam na circunferência dada, uma corda de tamanho dado a.

Problema 12

Construir o triângulo ABC sendo dados o lado $\overline{BC}$ = 4,5 cm, o ângulo $\widehat{A}$ = 60° e a altura relativa ao lado $\overline{BC}$ = h = 3,2 cm.

Conhecimentos prévios: Arco capaz, paralela, perpendicular.

Preparação: Com o comando Segmento com Comprimento Fixo, construa dois segmentos, um de 4,5 cm e outro de 3,2 cm. Serão formados, respectivamente, os segmentos AB com 4,5 cm, renomeie-o para BC e o segmento CD com 3,2 cm, renomeie-o para $BhCh$ (para indicar que é a altura de BC). Pode renomear também o segmento g para h, para que fique igual ao enunciado.

Com o comando Ângulo com Amplitude Fixa, construa o ângulo $\widehat{A} = 60^{\circ}$. Formarão os pontos A, D e A', ligue com segmentos A e D, D e A'.

Solução: Se $B\widehat{A}C = 60$ então A está no arco capaz de 60° construído sobre BC. Por outro lado, como o vértice A dista 3,2 cm da reta BC, ele está em uma reta paralela a BC distando 3,2 cm desta reta. Então o vértice A será a interseção do arco capaz com a paralela.

Construção:

I) Com o comando Mover, mova o segmento BC para onde deseja fazer a construção (clique no ponto mais escuro do segmento para conseguir movê-lo).

II) Trace uma reta por B e C com o comando Reta.

III) Trace uma perpendicular à reta BC fora do segmento BC utilizando o comando Reta Perpendicular, clicando sobre BC duas vezes. Formará o ponto E que é a interseção da reta com a perpendicular.

IV) Transporte para a perpendicular a altura $\overline{BhCh} = 3{,}2$ cm, utilizando o comando Compasso.

V) Com o comando Interseção de Dois Objetos, marque a interseção desta circunferência com a reta perpendicular, obtendo dois pontos cuja distância até o centro da circunferência é $3,2cm$.

VI) Com o comando Reta Paralela, trace a paralela à BC que passa por um destes dois pontos (ponto G por exemplo).

VII) Coloque um ângulo de 60° abaixo do ponto B, utilizando o comando Ângulo com Amplitude Fixa, para isso clique em C, em seguida em B e abrirá uma caixa para digitar o valor do ângulo, digite 60º e clique em *sentido horário*, formará o ângulo e um ponto C', então ligue B e C' com um Segmento.

VIII) Trace o arco capaz de 60° construído sobre BC (ver Arco Capaz), obtendo o centro da circunferência do arco capaz (ponto H) e trace com o comando Círculo Dados Centro e Um de Seus Pontos esta circunferência.

IX) A interseção desta circunferência com a reta paralela construída é onde estará o ponto A. Marque a interseção com o comando Interseção de Dois Objetos, obtendo dois pontos e teremos dois lugares possíveis onde poderá estar o vértice A. Escolha um deles e com o comando Segmento, ligue os vértices do triângulo obtido.

Verificação com o Geogebra: Para conferir basta fazer as medições e verificar se conferem com o enunciado, utilizando o comando Distância, Comprimento ou Perímetro.

Justificativa: Os pontos sobre a circunferência construída utilizando o arco capaz de 60° relativo ao lado BC, formam um ângulo de 60° com B e C. Se o ponto está sobre a paralela traçada, então a altura relativa ao lado BC será a distância entre estas retas paralelas.

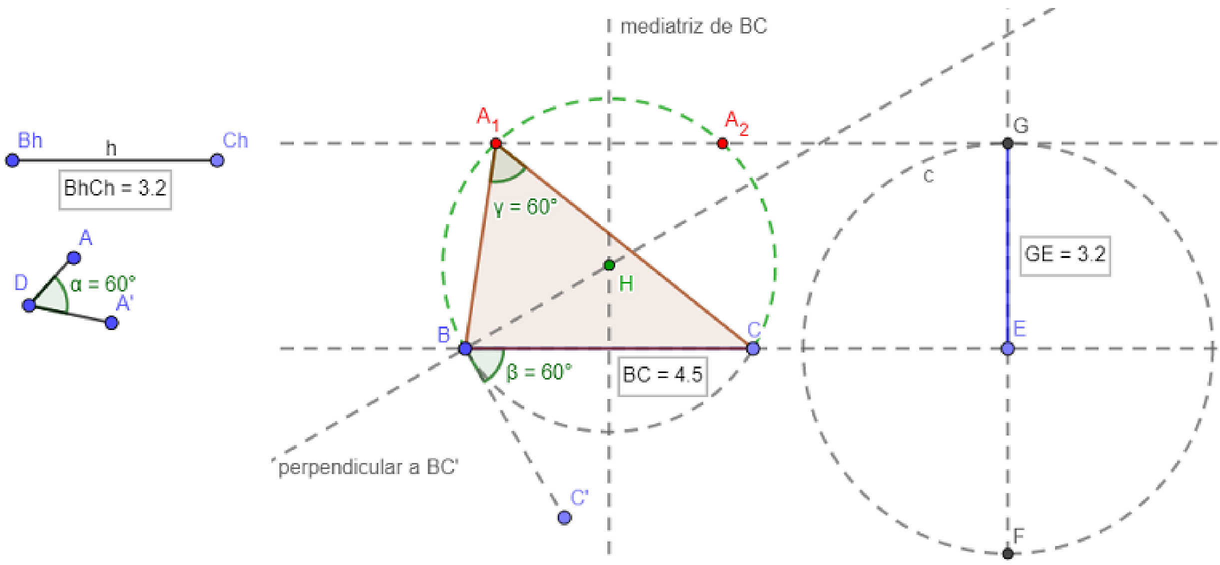


Figura 91 – Problema 12

Problema 13

Construir o triângulo** ABC **conhecendo as medidas dos lados,** $\overline{AB} = 5,2cm$**,** $\overline{BC} = 5,7cm$ **e a altura relativa ao lado** AB**,** $h = 4,5cm$**.

Conhecimentos prévios: Perpendicular, arco capaz, circunferência.

Preparação: Com o comando Segmento com Comprimento Fixo, construa três segmentos, um de 5,2 cm, outro de 5,7 cm e outro de 4,5 cm. Formarão, respectivamente, os segmentos AB, CD e EF. Renomeie CD para BC e EF renomeie para $A'B'$ que será a altura.

Solução: Seja BC a base do triângulo. Traçando a perpendicular à AB que passa por C vamos ter um ponto E de interseção dessa perpendicular com AB, tal que CE = altura relativa à AB. Logo, teremos que $B\widehat{E}C = 90°$, assim podemos afirmar que E pertence ao arco capaz de 90° construído sobre BC. Construindo este arco capaz e colocando com compasso a medida da altura que foi dada, no vértice C, a interseção deles será o ponto E. Depois basta traçar uma reta sobre BE e colocar com compasso a medida dada de AB, sobre o vértice B, a interseção dessa medida com a reta traçada é o vértice A do triângulo solicitado.

Construção:

I) Com o comando Mover, mova o segmento BC para onde deseja fazer a construção.

II) Construir o arco capaz de 90° sobre BC (ver Arco Capaz de 90°). Basta achar o ponto médio de BC (ponto D) e traçar a circunferência de centro em D e raio $\overline{BD}$). Formará a circunferência c, onde o arco BC é o lugar geométrico do ponto E (ponto de interseção da altura relativa a AB com o segmento AB).

III) Para encontrar onde estará o ponto E, coloque no vértice C a medida de $A'B'$, 4,5 cm, utilizando o comando Compasso. Formará uma circunferência de centro em C e raio 4,5 cm.

IV) A interseção das duas circunferências é onde estará o ponto E, então marque esta interseção com o comando Interseção de Dois Objetos (escolha um dos dois pontos de interseção para ser o E).

V) Com o comando Reta, trace uma reta por BE, é nesta reta que estará o vértice A.

VI) Coloque com o comando Compasso, a medida dada de AB sobre o vértice B. Formará uma circunferência de centro em B e raio = 5,2 cm.

VII) A interseção desta circunferência com a reta BE é onde está o ponto A, então utilizando o comando Interseção de Dois Objetos, marque esta interseção e a renomeie para A.

VIII) Com o comando Segmento ou o comando Polígono, ligue os pontos *A*, *B* e *C* com segmentos para formar o triângulo *ABC*.

Verificação com o Geogebra: Para conferir utilize o comando Distância, Comprimento ou Perímetro e verifique se as medições dos lados *AB*, *BC* e a altura *CE* que é a altura relativa ao lado *AB* conferem com as do enunciado. Pode-se verficar também se o ângulo *E* é de 90° com o comando Ângulo.

Justificativa: Por construção, o ponto *E* está sobre o arco capaz de 90° e assim o segmento *CE* é perpendicular à *AB*, as demais etapas são apenas transposições das medidas dadas.

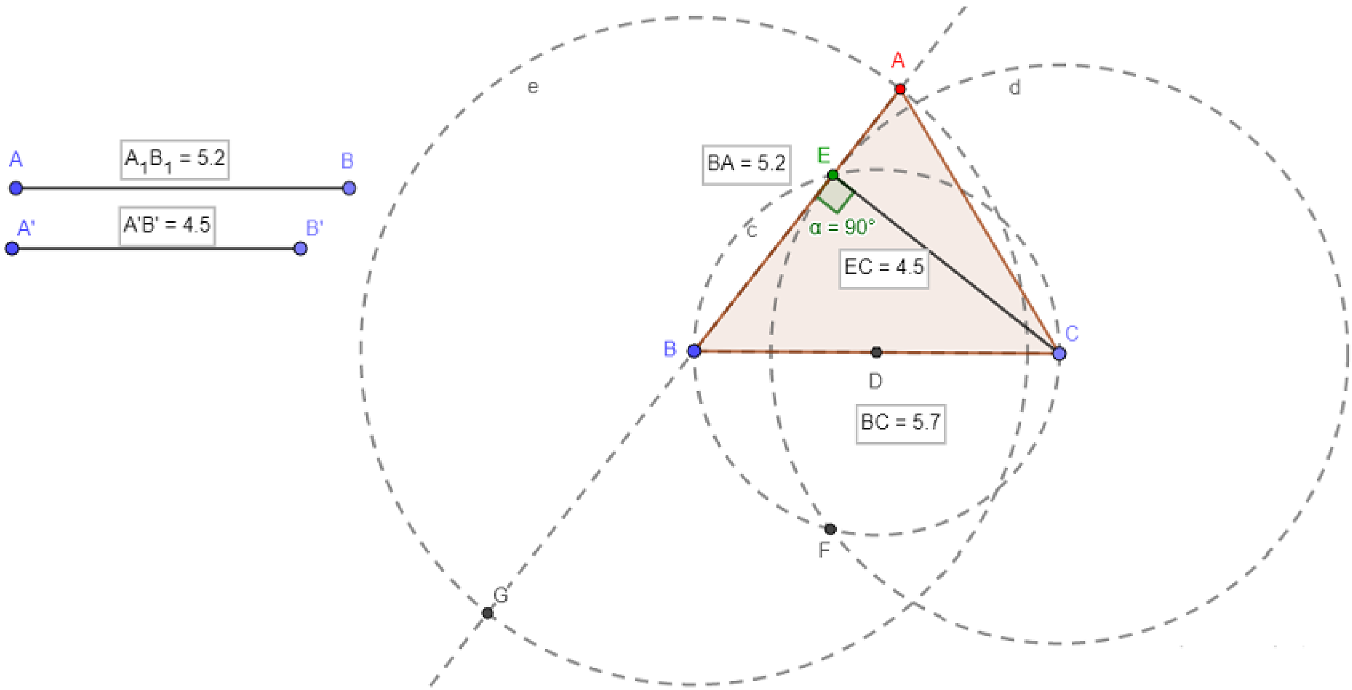


Figura 92 – Construção - Problema 13

Problema 14

É dado o triângulo ABC ***com*** $\overline{AB} = 4cm$, $\overline{BC} = 6,5cm$ ***e*** $\overline{CA} = 7cm$. ***Trace uma reta paralela a*** BC ***cortando*** AB ***em*** M ***e*** AC ***em*** N ***de forma que se tenha*** $\overline{AN} = \overline{BM}$.

Conhecimentos prévios: Bissetriz, paralela, paralelogramo, ângulos alternos internos, triângulo isósceles.

Preparação: Construa um triângulo com medidas dos lados, para isso coloque *BC* como base usando o comando Segmento com Comprimento Fixo, digite 6,5 cm e renomeie-o para *BC*. Em seguida por *B* trace uma circunferência com o comando Círculo dados Centro e Raio, de raio 4 cm ($\overline{AB}$) e por *C* trace uma circunferência com o mesmo comando, de raio 7 cm ($\overline{AC}$). O encontro destas duas circunferências é o vértice A, então marque a interseção com o comando Interseção de Dois Objetos, obtendo dois pontos dessa interseção, vamos utilizar apenas um, o ponto A, esconda o outro ponto. Ligue com Segmento AB e BC. Dessa forma teremos $\overline{AB} = 4cm$ e $\overline{AC} = 7cm$. Esconda as circunferências para que fique apenas o triângulo na tela.

Solução: Dado o triângulo ABC é preciso traçar por N o segmento NE paralelo a MB. Se o triângulo ANE for isósceles teremos $\overline{AN} = \overline{NE}$ e $\overline{NE} = \overline{MB}$, pois $MNEB$ é um paralelogramo, logo $\overline{AN} = \overline{MB}$. Para obtermos um triângulo isósceles em ANE teremos que ter $E\widehat{A}N = A\widehat{E}N$ e como $B\widehat{A}E$ e $A\widehat{E}N$ são alternos internos, então eles são iguais e logo $B\widehat{A}E = E\widehat{A}N$, o que implica que o segmento AE é a bissetriz de $\widehat{A}$. Portanto, basta traçar a bissetriz do ângulo $\widehat{A}$ que interceptará o segmento BC no ponto E, depois traçar por E uma paralela à MB, que interceptará o segmento AC no ponto N e depois traçar por N a paralela ao segmento BC, que interceptará o segmento AB no ponto M.

Construção:

I) Trace a bissetriz do ângulo $\widehat{A}$, utilizando o comando Bissetriz.

II) Marque a interseção da bissetriz com o lado BC utilizando o comando Interseção de Dois Objetos, obtendo o ponto E.

III) Com o comando Reta Paralela, trace por E a paralela ao lado AB.

IV) Marque a intersessão da paralela com o lado AC, com o comando Interseção de Dois Objetos, renomeie o ponto da interseção para N.

V) Por N trace a paralela ao lado BC, com o comando Reta Paralela.

VI) Com o comando Interseção de Dois Objetos, marque a interseção desta segunda paralela com o lado AB, renomeie o ponto desta interseção para M.

Verificação com o Geogebra: Para conferir basta fazer as medições dos segmentos AN e BM, com o comando Distância, Comprimento ou Perímetro e verificar se são iguais.

Justificativa: Ao traçar a bissetriz de $\widehat{A}$ obtemos $B\widehat{A}E = E\widehat{A}C$. Temos que $MB \parallel NE$ e $MN \parallel BE$, logo $MNEB$ é um paralelogramo e temos $\overline{NE} = \overline{BM}$ (dizemos que foi feita uma translação do segmento BM).

Se $BM \parallel NE$, então podemos dizer que $B\widehat{A}E = A\widehat{E}N$, pois são alternos internos, então teremos $E\widehat{A}C = B\widehat{A}E = A\widehat{E}N$.

E se $E\widehat{A}C = A\widehat{E}N$ temos que o triângulo ANE é isósceles e assim $\overline{AN} = \overline{NE}$ e como vimos anteriormente $\overline{NE} = \overline{BM}$. Logo, $\overline{AN} = \overline{NE} = \overline{BM}$.

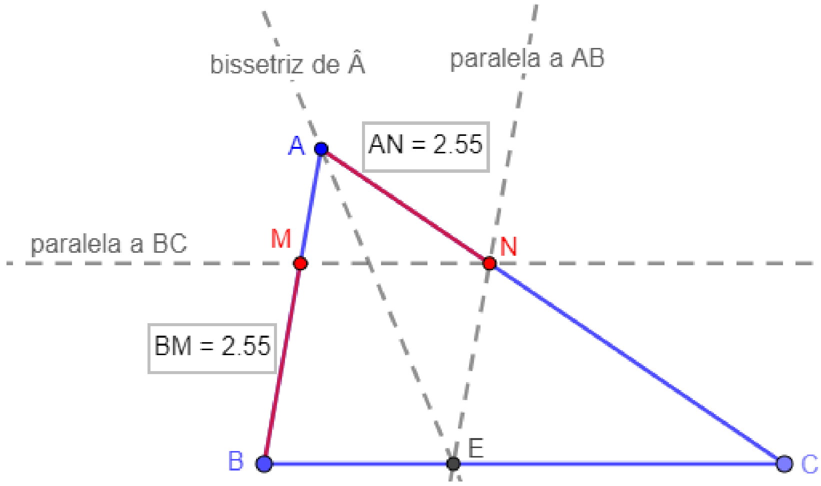


Figura 93 – Construção - Problema 14

Problema 15

Desenhe uma reta r e dois pontos A e B situados de um mesmo lado de r. Determine o ponto P sobre a reta r de forma que a soma $AP+PB$ seja mínima.

Conhecimentos prévios: Perpendicular, desigualdade triangular.

Preparação: Com o comando Reta, trace uma reta qualquer, renomeie-a para r e esconda os pontos que aparecem. A reta r divide o plano em dois semiplanos. Com o comando Ponto, coloque dois pontos no mesmo semiplano e renomeie estes pontos para A e B.

Solução: Obtenha o ponto B', simétrico de B em relação à r. Para fazer isto, trace por B uma perpendicular à r e, com o compasso, passe B para o outro lado obtendo o seu simétrico. Assinale um ponto Q qualquer, sobre a reta r. Trace QA, QB e QB'. Como r é mediatriz de BB' então $\overline{QB} = \overline{QB'}$. Assim, a soma $\overline{AQ}+\overline{QB}$ é sempre igual a $\overline{AQ}+\overline{QB'}$. Entretanto, esta soma será mínima se A, Q e B' forem colineares. E nesta posição está o ponto P procurado.

Construção:

I) Trace o simétrico de B em relação à r: para isso com o comando Reta Perpendicular trace por B, uma perpendicular à reta r. Marque com o comando Interseção de Dois Objetos, a interseção da perpendicular com a reta r, obtendo o ponto C.

II) Com o comando Círculo Dados Centro e Um de Seus Pontos, construa uma circunferência de centro em C e raio $\overline{BC}$, formará a circunferência c. Marque com o comando Interseção de Dois Objetos, a interseção desta circunferência com a reta perpendicular. Teremos então dois pontos, sendo um deles coincidente com B. Esconda este ponto e o outro renomeie para B'.

III) Com o comando Segmento, ligue os pontos B' com A.

IV) A interseção de AB' com a reta r é o ponto P, tal que a soma $\overline{AP}+\overline{PB}$ é mínima, marque essa interseção com o comando Interseção de Dois Objetos e renomeie o ponto para P.

Verificação com o Geogebra: Ligue com segmento P e B e meça a distância de A até P e depois de P até B. Some as duas medidas, faça o mesmo com o ponto B' para confirmar que a soma é a mesma. Coloque um ponto em outro lugar qualquer da reta e faça o mesmo procedimento anterior, confira que a medida é maior, pode colocar quantos pontos quiser, todas as somas de A até o ponto escolhido e desse ponto até B, serão maiores que a encontrada.

Justificativa: Ao traçar a circunferência c, temos que $\overline{BC} = \overline{B'C}$, C é o ponto médio de BB' e P está sobre sua mediatriz, logo $\overline{PB'} = \overline{PB}$. Portanto, temos $\overline{AP}+\overline{PB'} = \overline{AP}+\overline{PB}$. Pela desigualdade triangular, o ponto P tem que ser colinear com A e B', para se obter a soma mínima, por isso usamos B' para achar o P.

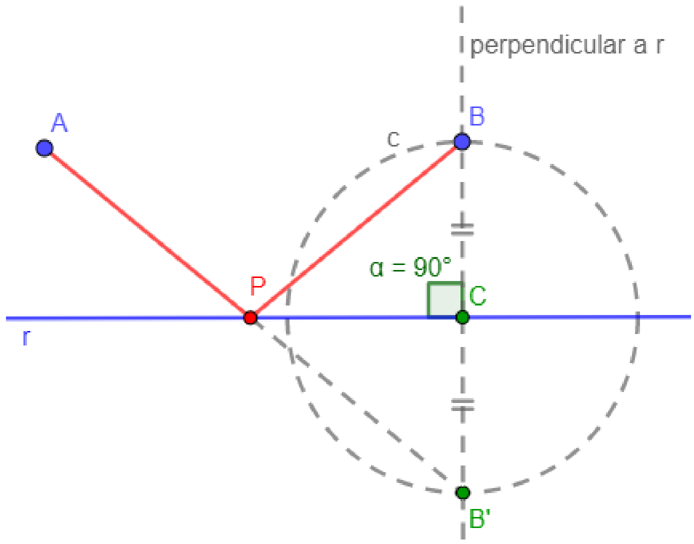


Figura 94 – Construção - Problema 15

Problema 16

Inscrever no triângulo ABC dado, um quadrado tendo um lado sobre BC.

Conhecimentos prévios: Quarta proporcional, Teorema de Thales, circunferência, altura de triângulo, paralelas, perpendicular.

Preparação: Construir um triângulo ABC qualquer com o comando Polígono. O triângulo formado, possui base $\overline{BC} = a$ e altura h.

Solução: Seja o quadrado $MNPQ$ inscrito em ABC, com o lado MN sobre BC. Seja x o lado do quadrado. Vamos calcular este valor em função da base $\overline{BC} = a$ do triângulo e da altura h relativa a esta base.

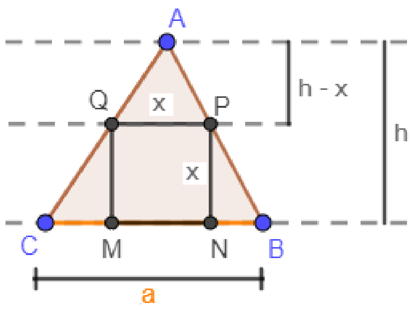


Figura 95 – Solução - Problema 16 - I

O triângulo APQ, que tem base $\overline{PQ} = x$ e altura $h - x$, é semelhante ao triângulo ABC. Logo, $\frac{x}{a} = \frac{h-x}{h}$. Então, $xh = ah - ax$, ou seja, $ax + xh = ah$. Colocando o x em evidência temos: $x(a+h) = ah$ e assim obtemos $x = \frac{ah}{a+h}$.

Temos, então, uma fórmula que calcula x em função de a e h. Vamos "construir" esta fórmula. Observe que $x = \frac{ah}{a+h}$ é o mesmo que $\frac{a+h}{a} = \frac{h}{x}$, ou seja, a nossa incógnita x é a 4^a proporcional entre $a+h$, a e h. A figura 96 nos auxilia obter x usando o teorema de Thales.

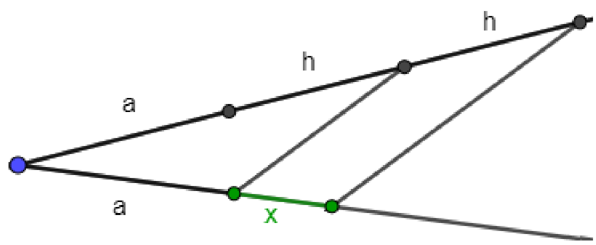


Figura 96 – Solução - Problema 16 - II

Conhecemos, então, o lado do quadrado e agora, devemos pensar como construí-lo dentro do triângulo. Podemos traçar a altura $\overline{AD}$ e, sobre ela (com o compasso) construir o ponto E, tal que $\overline{DE} = x$. A paralela por E à reta BC determina os vértices P e Q do quadrado.

Sendo a e b os segmentos dados, a terceira proporcional entre a e b é o segmento x, tal que $\frac{a}{b} = \frac{b}{x}$, ou seja, $x = \frac{b^2}{a}$. A construção é a mesma que mostramos para a quarta proporcional.

Construção:

I) Construa com o comando Reta, 2 retas concorrentes distintas com interseção em D (pode esconder os outros pontos que aparecem).

II) Com o comando Compasso, transporte a medida da base do triângulo sobre as retas, ou seja, construa uma circunferência de raio $\overline{BC}$ e centro em D, obtendo a circunferência d, cujo raio mede a, que é a medida da base do triângulo.

III) Marque com o comando Interseção de Dois Objetos, a interseção desta circunferência com as duas retas, obtendo os pontos G, H, I e J, vamos utilizar apenas o H e o J, esconda os outros dois pontos, assim temos $\overline{DH} = \overline{DJ} = a$.

IV) Trace a altura do triângulo, para isso basta utilizar o comando Reta Perpendicular e traçar a perpendicular à base BC passando pelo vértice A. Com o comando Interseção de Dois Objetos, marque a interseção dessa perpendicular com a base BC, obtendo o ponto K, assim a medida $\overline{AK}$ é o tamanho da altura do triângulo.

V) Coloque a medida da altura do triângulo sobre uma das retas, após a medida a que já está marcada, para que assim tenhamos a medida $a+h$, por exemplo na reta que contém o ponto H, construa com o comando Compasso uma circunferência de raio AK e centro em H. Formará a circunferência e. Marque com o comando Interseção de Dois Objetos, a interseção da circunferência e com a reta que contém o ponto H, aparecerão os pontos L e M, vamos utilizar apenas o M, esconda o ponto L e as circunferências. Então temos $\overline{HM} = h$ e assim $\overline{DM} = a+h$.

VI) Coloque a medida de h novamente na mesma reta, a partir do ponto M, utilizando o comando Compasso. Marque novamente a interseção da circunferência com esta reta usando o comando Interseção de Dois Objetos, obtendo o ponto O. Então temos $\overline{MO} = h$.

VII) Na fórmula temos que: $a+h$ está para a assim como h está para x, onde a medida x é a quarta proporcional. Então, ligue com um Segmento os pontos M e J, depois trace a paralela à MJ que passa por O, marque a interseção da paralela com a reta g, obtendo o ponto P. A medida $\overline{JP}$ é a quarta proporcional, agora basta levá-la para o triângulo.

VIII) Transporte a medida de JP com o comando Compasso para o triângulo ABC, ou seja, construa uma circunferência de raio $\overline{JP}$ com centro em K, em seguida marque a interseção da perpendicular com esta circunferência com o comando Interseção de Dois Objetos, obtendo dois pontos Q e R, esconda o ponto que está fora do triângulo (R) e a circunferência que foi criada.

IX) Trace uma paralela a BC que passa pelo ponto Q usando o comando Reta Paralela e marque a interseção desta paralela com o lado AB e depois com o lado AC do triângulo usando o comando Interseção de Dois Objetos, obtendo os pontos S e T. Esconda a paralela, a altura e os pontos Q e K.

X) Trace com o comando Reta Perpendicular, duas retas perpendiculares a BC, uma que passa pelo ponto S e outra que passa pelo ponto T. Em seguida marque as interseções destas perpendiculares com o segmento BC, obtendo os pontos U e V. Esconda as duas perpendiculares. Os pontos S, T, U e V são os vértices do quadrado, ligue estes pontos com Segmento, obtendo o quadrado $STUV$ que é inscrito no triângulo ABC e que tem um dos lados sobre o lado BC.

Verificação com o Geogebra: Para confirmar basta medir o segmento JP e depois medir os lados do quadrado, se as medidas forem iguais então a construção está correta.

Justificativa:

A medida $\overline{JP}$ é a quarta proporcional, então $\overline{JP} = x$. A circunferência que foi usada para transferir a medida de JP para o triângulo, tem raio igual a $\overline{JP}$, logo $\overline{QK} = \overline{JP} = x$ e $\overline{TU} = \overline{SV} = \overline{QK} = x$, pois os segmentos TU, SV e QK são paralelos.

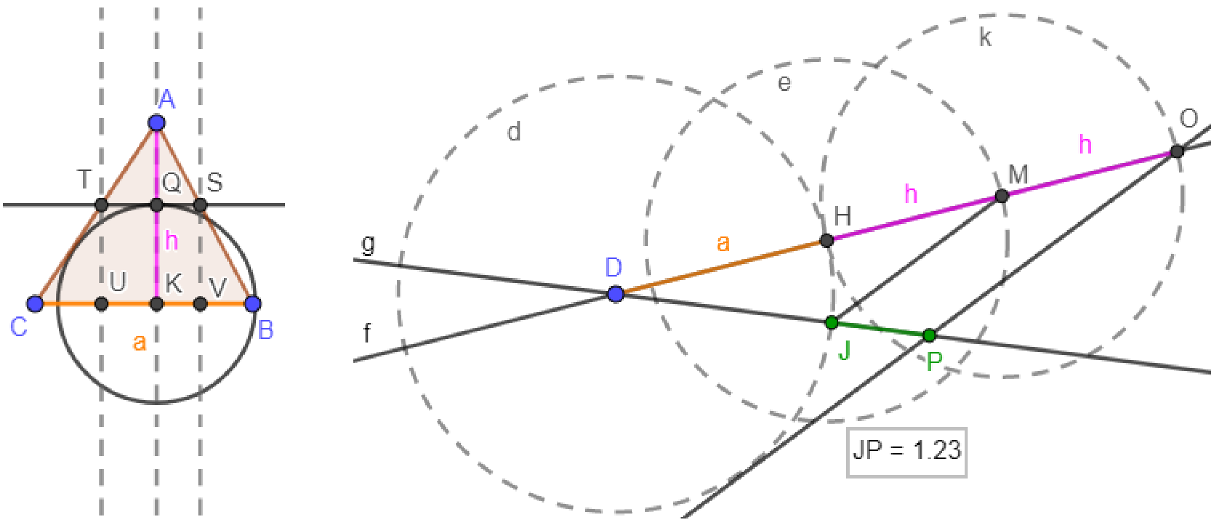


Figura 97 – Construção - Problema 16

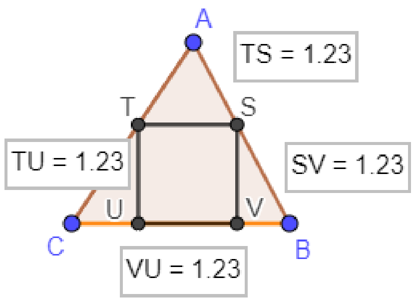


Figura 98 – Construção - Problema 16 - Final

Problema 17

***Construir a diagonal de um paralelepípedo retângulo conhecendo as arestas** a,b **e** c.*

Conhecimentos prévios: Teorema de Pitágoras, perpendicular, circunferência.

Preparação: Com o comando Segmento faça um segmento AB, depois com o mesmo comando faça outro segmento começando do ponto B, assim teremos o segmento BC, repita o processo fazendo o terceiro segmento começando do ponto C e teremos o segmento CD. Pode-se renomear os segmentos respectivamente para a, b e c para que fiquem conforme o enunciado.

Figura 99 – Preparação - Problema 17

Solução: Sabemos que a diagonal de um paralelepípedo retângulo de dimensões a,b e c é dado por $x = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$. Fazendo $y = \sqrt{a^2+b^2}$ e, em seguida, $x = \sqrt{y^2+c^2}$, determinamos x.

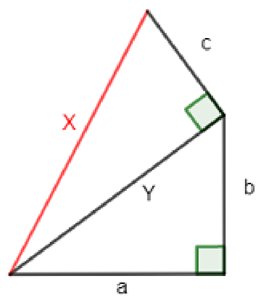


Figura 100 – Solução - Problema 17

Construção:

I) Faça com o comando Reta, uma reta qualquer para usá-la para fazer a construção, obtendo a reta EF. Pode esconder o ponto F.

II) Construa uma circunferência de raio $\overline{AB}$ e centro em E, para colocar a medida da aresta a sobre esta reta, usando o comando Compasso. Com o comando Interseção de Dois Objetos, marque a interseção desta circunferência com a reta, obtendo dois pontos G e H, escolha um deles, o H por exemplo. Esconda a circunferência e o ponto G.

III) Trace com o comando Reta Perpendicular, a perpendicular à reta EF que passa pelo ponto H.

IV) Construa com o comando Compasso uma circunferência de raio $\overline{BC}$ e centro em H para colocar a medida da aresta b, sobre a perpendicular. Marque com o comando Interseção de Dois Objetos a interseção desta circunferência com a perpendicular, obtendo os pontos I e J. Escolha um destes pontos, o J por exemplo e esconda o outro ponto e a circunferência. Assim, temos $\overline{EH} = a$ e $\overline{HJ} = b$.

V) Ligue os pontos E e J com um Segmento.

VI) Observe que foi formado um triângulo EHJ, retângulo em H e hipotenusa EJ que chamaremos de y. Logo, pelo Teorema 4 (Teorema de Pitágoras), $y = \sqrt{a^2 + b^2}$ e esta é a medida da diagonal da base.

VII) Construa outro triângulo retângulo cujos catetos são y e a aresta c. Para isso trace com o comando Reta Perpendicular, uma perpendicular ao segmento EJ que passa pelo ponto J.

VIII) Com o comando Compasso, construa uma circunferência de raio $\overline{CD}$ e centro em J. Marque com o comando Interseção de Dois Objetos, a interseção desta circunferência com esta segunda perpendicular, obtendo os pontos K e L, escolha um destes pontos, o ponto L por exemplo, esconda o outro ponto e a circunferência. Assim temos $\overline{EJ} = \sqrt{a^2 + b^2}$ e $\overline{JL} = c$.

IX) Ligue com um Segmento os pontos E e L.

X) Observe que foi formado outro triângulo EJL, retângulo em J e hipotenusa EL que chamaremos de x. Então, pelo Teorema 4 (Teorema de Pitágoras), $x = \sqrt{\sqrt{a^2 + b^2}^2 + c^2}$, logo $x = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ e esta é a medida da diagonal do paralelepípedo.

Verificação com o Geogebra: Utilize o comando Distância, Comprimento ou Perímetro para verificar se a medida obtida por construção está correta.

Justificativa: Teorema 4 (Teorema de Pitágoras).

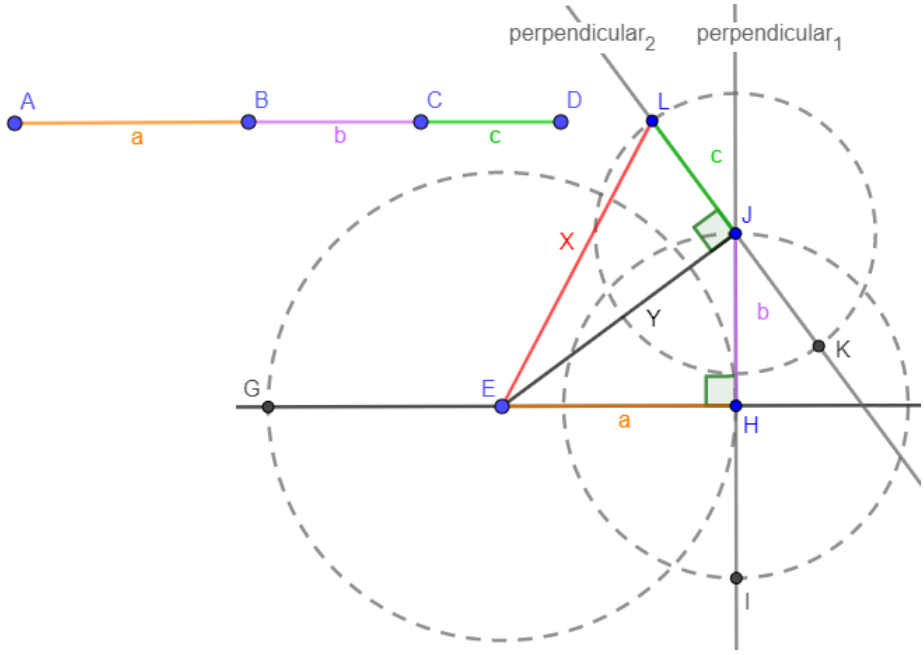


Figura 101 – Construção - Problema 17

Problema 18

Dado o segmento a, construir o segmento $x = a\sqrt{21}$

Conhecimentos prévios: Teorema de Pitágoras, perpendicular, circunferência.

Preparação: Com o comando Segmento, construa um segmento AB, obtendo o segmento f, pode-se renomeá-lo para a para que fique igual ao enunciado.

Solução: Fazendo alguns cálculos, podemos perceber que a hipotenusa de um triângulo retângulo de catetos $4a$ e $2a$ é: $y = \sqrt{(4a)^2 + (2a)^2} = \sqrt{16a^2 + 4a^2} = \sqrt{20a^2}$, logo $y = a\sqrt{20}$. Assim, com mais um passo, chegamos a x = $a\sqrt{21}$.

Construção:

I) Com o comando Reta, coloque uma reta sobre o segmento AB.

II) Com o comando Compasso, construa uma circunferência de raio $\overline{AB}$ e centro em B. Marque a interseção desta circunferência com a reta com o comando Interseção de Dois Objetos, obtendo dois pontos, sendo um deles o ponto C coincidente com o ponto A, por isso pode esconder este ponto deixando apenas o outro. Novamente, com o comando Compasso faça outra circunferência de raio $\overline{AB}$ e centro em D e marque a interseção com a reta, obtendo dois pontos (esconda o ponto que é coincidente com B). Realize este procedimento mais uma vez para que se tenha um total de $4a$ sobre a reta. Assim, temos $\overline{AB} = \overline{BD} = \overline{DF} = \overline{FH} = a$

III) Trace com o comando Reta Perpendicular, uma perpendicular à reta que passa pelo ponto A.

IV) Coloque sobre esta perpendicular duas medidas de a, para isso com o comando Compasso, construa uma circunferência de raio $\overline{AB}$ e centro em A. Marque com o comando Interseção de Dois Objetos, a interseção desta circunferência com a perpendicular, obtendo os pontos I e J, pode esconder o ponto I. Repita o mesmo procedimento mas gora com centro em J e marque a interseção, obtendo os pontos K e L, esconda o ponto K que é coincidente com A e pode esconder também todas as circunferências.

V) Ligue os pontos L e H com um Segmento. Observe que foi formado um triângulo LAH, retângulo em A, com catetos medindo $2a$ e $4a$ e hipotenusa LH. Assim, pelo Teorema 4 (Teorema de Pitágoras) temos $\overline{LH} = \sqrt{(2a)^2 + (4a)^2} = \sqrt{20a^2} = a\sqrt{20}$.

VI) Faça outro triângulo retângulo de catetos medindo LH e a, para isso use o comando Reta Perpendicular. Trace uma perpendicular a LH que passa pelo ponto L.

VII) Com o comando Compasso, construa uma circunferência de raio $\overline{AB}$ e centro em L para colocar sobre esta segunda perpendicular a medida de a. Marque com o comando Interseção de Dois Objetos a interseção desta circunferência com a segunda perpendicular, obtendo os pontos M e N, pode esconder o M e a circunferência.

VIII) Ligue com um Segmento os pontos N e H. Observe que foi formado outro triângulo retângulo NLH, retângulo em L, catetos medindo a e $a\sqrt{20}$ e hipotenusa NH. Aplique o Teorema 4 neste triângulo e obtenha: $\overline{NH} = \sqrt{a^2 + (a\sqrt{20})^2} = \sqrt{a^2 + 20a^2} = \sqrt{21a^2} = a\sqrt{21}$. Logo, a hipotenusa NH tem como medida $a\sqrt{21}$.

Verificação com o Geogebra: A verificação pode ser feita medindo os segmentos de medida a com o comando Distância, Comprimento ou Perímetro e verificando se todos possuem a mesma medida e também com o comando Ângulo, medindo os ângulos $\widehat{A}$ e $\widehat{L}$ e conferindo se possuem 90°.

Justificativa: Teorema 4 (Teorema de Pitágoras).

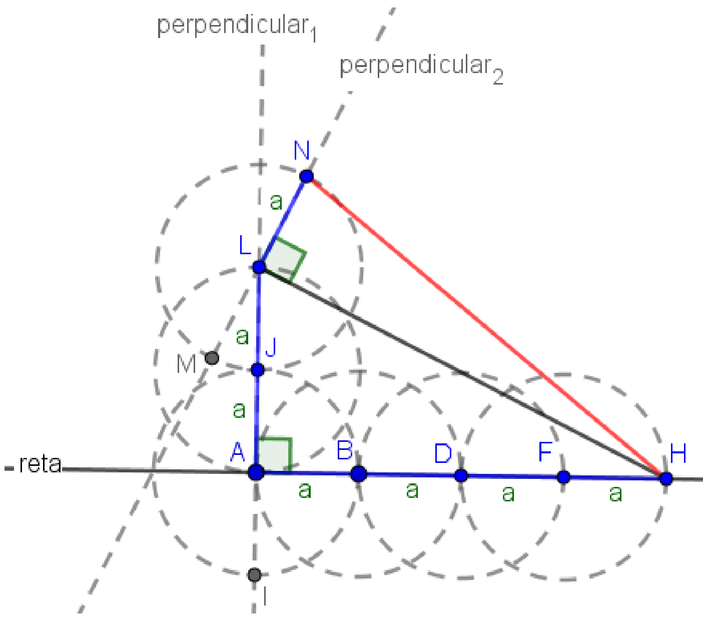


Figura 102 – Construção - Problema 18

Problema 19

Dados os segmentos a e b encontre os segmentos x e y tais que:

$$\begin{cases} x+y=a \\ xy=b^2 \end{cases}$$

Conhecimentos prévios: Relações métricas no triângulo retângulo (média geométrica), perpendicular, circunferência, arco capaz.

Preparação: Construa um segmento qualquer com o comando Segmento, obtendo $AB=f$, em seguida com o mesmo comando construa outro segmento menor que o primeiro, obtendo $CD=g$. Renomeie o segmento f para a e o segmento g para b, para que fique igual ao enunciado.

Solução: Transfira o segmento $AB=a$ para uma reta r, encontre seu ponto médio e trace a semicircunferência de diâmetro AB. Assinale um ponto P sobre r, trace por P uma perpendicular a r e sobre ela construa o segmento $PQ=b$. A paralela a r traçada por Q determina o ponto C sobre a semicircunferência. A perpendicular à r traçada por C determina o ponto H interior a AB. Os segmentos $AH=x$ e $HB=y$ são tais que $x+y=a$ e $xy=b^2$.

Construção:

I) Construa uma reta qualquer com o comando Reta, obtém-se a reta EF, esconda um destes pontos para que ele não atrapalhe a construção, o ponto F por exemplo.

II) Construa uma circunferência com o comando Compasso, de raio $\overline{AB}$ e centro em E. Com o comando Interseção de Dois Objetos, marque a interseção da circunferência com a reta, obtendo os pontos G e H. Esconda a circunferência e um destes pontos, o ponto G por exemplo. Assim, temos $\overline{EH} = a$.

III) Com o comando Ponto Médio, marque o ponto médio de EH, obtendo o ponto I.

IV) Com o comando Círculo Dados Centro e Um de Seus Pontos, construa uma circunferência de centro em I e raio $\overline{IH}$.

V) Coloque um Ponto sobre a reta, fora da circunferência e o renomeie para P.

VI) Trace com o comando Reta Perpendicular, uma perpendicular à reta que passa por P.

VII) Construa com o comando Compasso, uma circunferência de raio CD e centro em P, para colocar sobre a perpendicular a medida de b. Marque com o comando Interseção de Dois Objetos a interseção desta circunferência com a perpendicular, obtendo dois pontos J e K, escolha um deles e esconda o outro, por exemplo J, e a circunferência.

VIII) Trace com o comando Reta Paralela, uma paralela à reta inicial e que passa pelo ponto K.

IX) Marque a interseção desta paralela com a circunferência de raio IH, obtendo os pontos L e M, escolha um deles para ser o vértice do triângulo, o ponto L por exemplo, o outro ponto pode esconder.

X) Com o comando Reta Perpendicular, trace uma perpendicular à reta inicial que passa pelo ponto L e marque a interseção desta perpendicular com a reta com o comando Interseção de Dois Objetos, obtendo o ponto N.

XI) Ligue com Segmento, os pontos L e E e depois os pontos L e H. Assim, foi formado um triângulo ELH, retângulo em L.

Temos $\overline{LN} = b$, $\overline{EN} = x$ e $\overline{NH} = y$. Portanto, $x + y = a$ e $xy = b^2$.

Verificação com o Geogebra: Verificar que $E\widehat{L}H$ é 90º e o resultado segue por propriedade dos triângulos retângulos.

Justificativa: O triângulo ELH é retângulo em L pelo Arco Capaz de 90°, pois é um ângulo inscrito na circunferência que determina o diâmetro EH. Uma das relações métricas no triângulo retângulo de altura b e hipotenusa $x + y = a$ é $b^2 = x \cdot y$, ver Proposição 7.

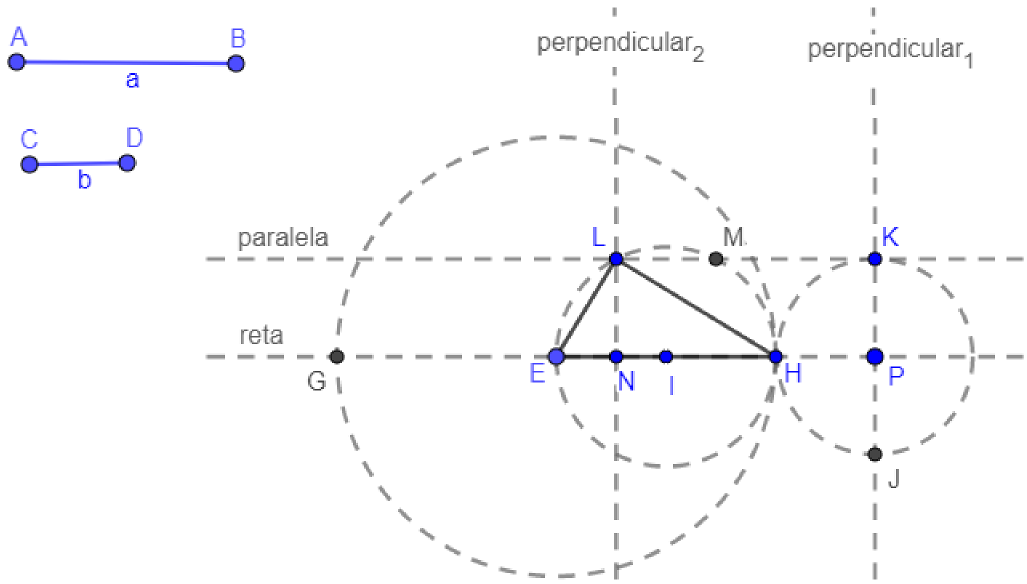


Figura 103 – Construção - Problema 19

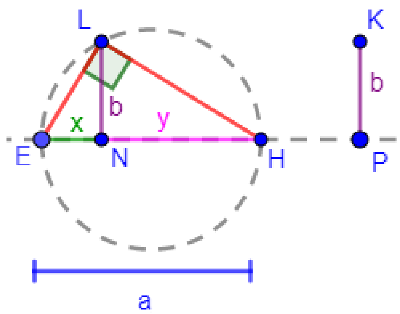


Figura 104 – Construção Final - Problema 19

Problema 20

A Figura 105 mostra uma circunferência tangente no ponto T à reta r e um ponto P sobre r, tal que $\overline{PT} = t$. Dado o segmento a, construa por P uma secante PAB, tal que $\overline{AB} = a$.

Conhecimentos prévios: Equação de 2° grau, potência de ponto (reta tangente e reta secante), Teorema de Pitágoras.

Preparação: Com o comando Círculo Dados Centro e Um de Seus Pontos, construa uma circunferência qualquer. Formará a circunferência de centro em A e ponto B pertencente a circunferência. Renomeie o ponto A para O e o ponto B para T. Trace com o comando Reta Tangente, a tangente à circunferência que passa pelo ponto T. Formará a reta f, renomeie-a para r. Com o comando Ponto, coloque um ponto sobre a reta r e fora da circunferência, renomeie este ponto para P. Depois com o comando Segmento, construa um segmento qualquer. Formará o segmento $AB = f$, renomeie para a. Coloque um Segmento entre P e T e renomeie para t.

Observação 12. Pode-se colorir a circunferência dada para não confundir com as circunferências que serão construídas durante a resolução.

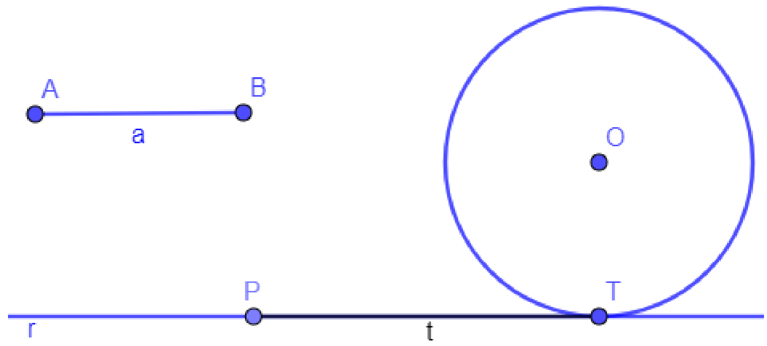


Figura 105 – Preparação - Problema 20

Solução: Seja $\overline{PA} = x$, conforme a figura 106.

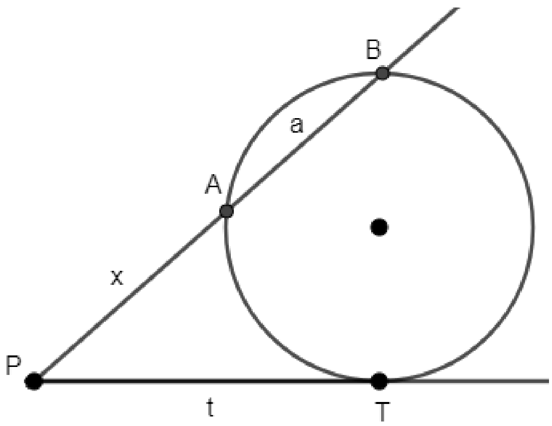


Figura 106 – Solução - Problema 20

Utilizando o conceito de potência de um ponto em relação a uma circunferência temos $\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PT}^2$, ou seja, $x(x+a) = t^2$, logo $x^2 + ax = t^2$. Para encontrar o valor de x devemos resolver a equação $x^2 + ax - t^2 = 0$. Usando a fórmula de resolução da equação do segundo grau (fórmula de Bháskara) temos o seguinte:

$\Delta = a^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-t^2) = \Delta = a^2 + 4t^2 > 0$ e

$x = \dfrac{-a + \sqrt{a^2 + 4t^2}}{2}$ logo $x = \dfrac{-a + \sqrt{a^2 + (2t)^2}}{2}$, pois é uma medida.

Assim, o radical $r = \sqrt{a^2 + (2t)^2}$ é a hipotenusa de um triângulo retângulo cujos catetos são a e $2t$.

Podemos escrever: $x = \dfrac{\sqrt{a^2+(2t)^2}-a}{2}$

Isso quer dizer que para encontrar x basta considerar este radical r, obter uma medida de a e depois dividir por 2.

Uma vez determinado o segmento x, basta traçar uma circunferência de centro P e raio x para determinar o ponto A na circunferência.

Construção:

I) Construa um triângulo retângulo de catetos medindo a e $2t$, para isso com o comando Ponto, coloque um ponto sobre a reta r afastado da circunferência dada, obtendo o ponto C. Construa uma circunferência de raio $\overline{PT}$ e centro em C. Marque a interseção desta circunferência com a reta r, com o comando Interseção de Dois Objetos, obtendo os pontos D e E.

II) Com o comando Reta Perpendicular, trace a reta perpendicular à r que passa por D.

III) Construa com o comando Compasso, uma circunferência de raio $\overline{AB}$ e centro em D, para assim colocar a medida de a sobre esta perpendicular. Marque a interseção desta circunferência com a perpendicular usando o comando Interseção de Dois Objetos, obtendo os pontos F e G. Escolha um destes pontos, o ponto F por exemplo e esconda o outro.

IV) Ligue com um Segmento os pontos E e F, assim temos um triângulo EDF, retângulo em D e catetos $\overline{ED} = 2t$ e $\overline{DF} = a$. Portanto, aplicando o Teorema 4 sua hipotenusa é $\overline{EF} = \sqrt{a^2+(2t)^2}$.

V) Precisamos do valor de $x = \dfrac{\sqrt{a^2+(2t)^2}-a}{2}$, então desta medida da hipotenusa que foi encontrada, basta tirar a medida de a e depois dividir o restante por 2. Para isso construa uma circunferência de raio $\overline{AB}$ e centro em E com o comando Compasso. Marque com o comando Interseção de Dois Objetos, a interseção desta circunferência com a hipotenusa EF, obtendo o ponto H. Assim, tem-se $\overline{HF} = \sqrt{a^2+(2t)^2}-a$.

VI) Basta dividir o segmento por 2, ou seja, com o comando Ponto Médio, marque o ponto médio entre H e F, obtendo o ponto I. Logo, $\overline{HI}$ é igual a medida $x = \dfrac{\sqrt{a^2+(2t)^2}-a}{2}$, isto é, é a medida de P até a circunferência dada.

VII) Coloque esta medida na figura dada utilizando o comando Compasso, construa uma circunferência de raio $\overline{HI}$ e centro em P. Marque a interseção desta circunferência com a circunferência dada, obtendo os pontos J e K que são as duas possíveis soluções do problema, escolha um deles, o ponto J, por exemplo.

VIII) Com o comando Reta, trace uma reta que passa pelos pontos P e J.

IX) Marque com o comando Interseção de Dois Objetos, a interseção da reta com a circunferência dada, obtendo os pontos L e M, sendo um deles, L por exemplo, coincidente com J, esconda este ponto. Assim, tem-se $\overline{JM} = \overline{AB} = a$.

Verificação com o Geogebra: Para conferir meça o segmento $a = \overline{AB}$ que foi dado, com o comando Distância, Comprimento ou Perímetro e depois meça com o mesmo comando o segmento encontrado $\overline{JM}$, se os valores forem iguais então a construção está correta.

Justificativa: A medida é obtida observando que se A e B são pontos da circunferência tais que $\overline{AB} = a$, então $\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PT}^2$.

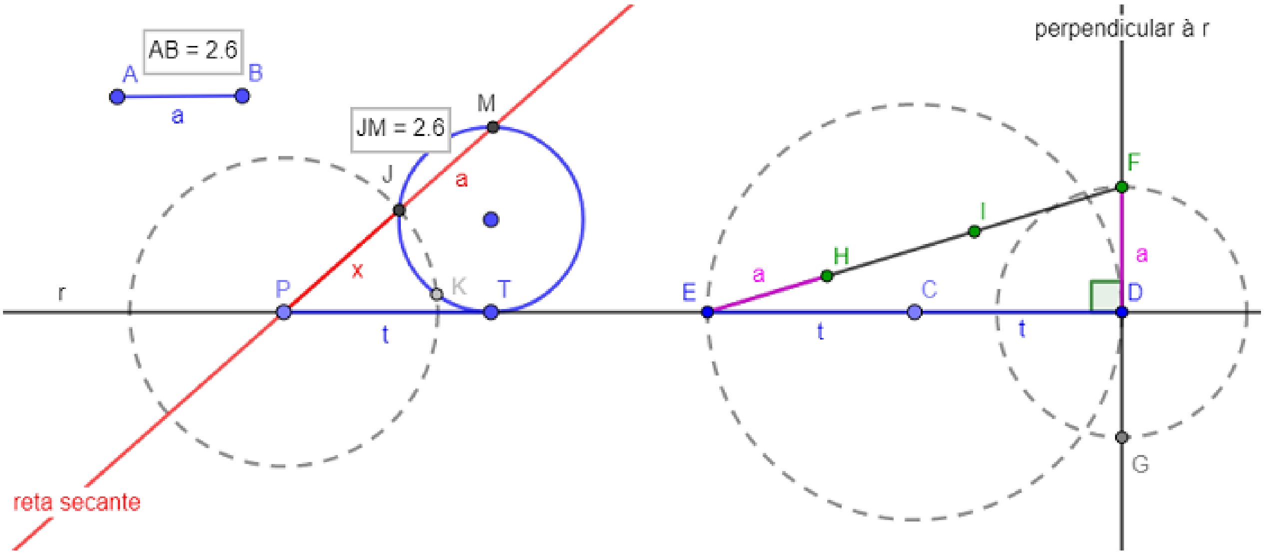


Figura 107 – Construção - Problema 20

Problema 21

Dados os segmentos a ***e*** b***, determine o segmento*** x ***tal que*** $\dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}$

Conhecimentos prévios: Paralela, Quarta proporcional.

Preparação: Construa dois segmentos distintos com o comando Segmento, obtendo os segmentos AB e CD, renomeie - os para a e b.

Solução: Fazendo os cálculos para obter o x temos o seguinte.

$$\frac{1}{x} = \frac{b+a}{ab} \Leftrightarrow \frac{x}{ab} = \frac{1}{b+a} \Leftrightarrow x = \frac{ab}{a+b}.$$

Logo, $\dfrac{a+b}{a} = \dfrac{b}{x}$, o que mostra que x é a quarta proporcional entre os segmentos $a+b$, a e b.

Construção:

I) Construa com o comando Reta, duas retas distintas, com mesma origem, obtendo duas retas (f e g) concorrentes no ponto E. Pode-se esconder os outros pontos que aparecem.

II) Construa com o comando Compasso, uma circunferência de raio $\overline{AB}$ e centro em E, para transportar a medida de a para a reta.

III) Marque com o comando Interseção de Dois Objetos, a interseção desta circunferência com as duas retas, obtendo os pontos H, I, J e K. Pode-se esconder os pontos que não serão utilizados, H e J, e a circunferência. Assim, tem-se $\overline{EI} = \overline{EK} = a$.

IV) Construa uma circunferência de raio $\overline{CD}$ e centro em I, com o comando Compasso, para transportar a medida de b para a reta f.

V) Com o comando Interseção de Dois Objetos, marque a interseção desta circunferência com a reta f, obtendo os pontos L e M, esconda o ponto que não será utilizado, L, e a circunferência. Repita este procedimento para ter mais uma medida de b sobre esta reta, isto é, construa uma circunferencia de raio $\overline{CD}$ e centro em M e marque a interseção desta circunferência com a reta, depois esconda o ponto que não será utilizado e a circunferência. Assim, tem-se $\overline{EI} = a$, $\overline{IM} = b$, $\overline{MO} = b$ e $\overline{EK} = a$.

VI) Trace com o comando Reta, uma reta que passa pelos pontos M e K.

VII) Com o comando Reta Paralela, trace a reta paralela à reta MK e que passa pelo ponto O.

VIII) Marque com o comando Interseção de Dois Objetos, a interseção da paralela com a reta g, obtendo o ponto P. Logo, temos que KP é a quarta proporcional entre $a+b$, a e b, ou seja, $KP = x$.

Verificação com o Geogebra: Medir o segmento KP e conferir se satisfaz $\dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}$.

Justificativa: O segmento construído por meio da quarta proporcional, fornece o valor procurado.

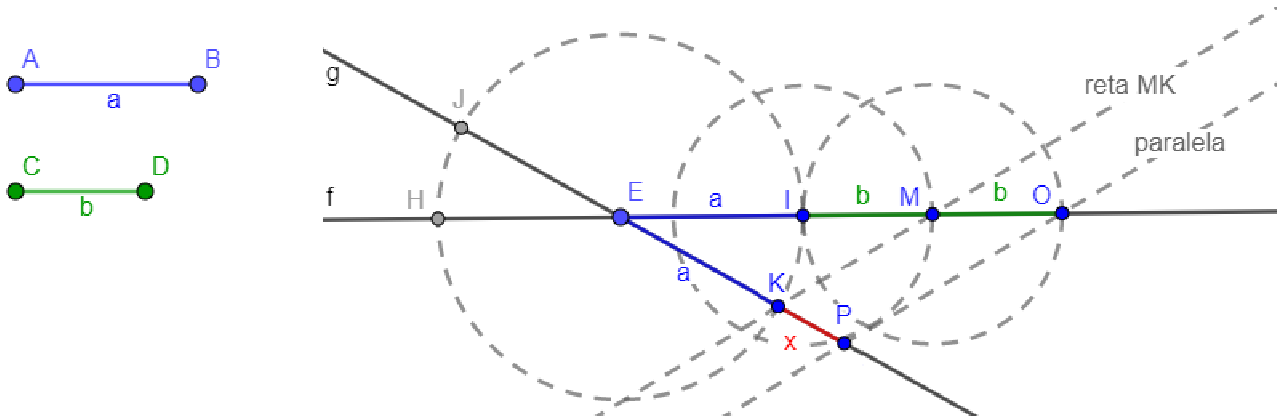


Figura 108 – Construção - Problema 21

CAPÍTULO

6

UTILIZAÇÃO E EXPERIÊNCIA DO MATERIAL

Como mencionado na parte introdutória desta dissertação, pretende-se que este trabalho sirva como uma ferramenta para que alunos e professores possam pensar e trabalhar conceitos geométricos através das construções geométricas, utilizando-se de recursos computacionais para isto. Para obtermos um retorno de como o material poderia ser utilizado em sala de aula, aplicamos parte do trabalho em dois momentos distintos e para públicos distintos: professores de diferentes disciplinas e alunos do Ensino Médio da escola E.E. Prof. Dr. Oscar de Moura Lacerda, em Ribeirão Preto no interior de São Paulo. Desta forma, foi possível verificar se estas construções através do software Geogebra são consistentes diante das perspectivas de ensinar e de aprender Matemática.

Capacitação

Primeiramente, durante um trabalho de capacitação feito com professores da área de Ciências da Natureza, Matemática e suas tecnologias, apresentamos parte do trabalho com o objetivo principal de aprender uma nova tecnologia para atender as demandas distintas de suas disciplinas. A importância desta ação na formação docente envolvendo a tecnologia, consta no Currículo de Matemática do Estado de São Paulo.

> A tecnologia imprime um ritmo sem precedentes ao acúmulo de conhecimentos e gera profunda transformação quanto às formas de estrutura, organização e distribuição do conhecimento acumulado. Nesse contexto, a capacidade de aprender terá de ser trabalhada não apenas nos alunos, mas na própria escola, como instituição educativa. Isso muda radicalmente a concepção da escola: de instituição que ensina para instituição que também aprende a ensinar. Nessa escola, as interações entre os responsáveis pela aprendizagem dos alunos têm caráter de ações formadoras, mesmo que os envolvidos não se deem conta disso. Vale ressaltar a responsabili-

> dade da equipe gestora como formadora de professores e a responsabilidade dos docentes, entre si e com o grupo gestor, na problematização e na significação dos conhecimentos sobre sua prática. Essa concepção parte do princípio de que ninguém é detentor absoluto do conhecimento e de que o conhecimento coletivo é maior que a soma dos conhecimentos individuais, além de ser qualitativamente diferente. Esse é o ponto de partida para o trabalho colaborativo, para a formação de uma "comunidade aprendente", nova terminologia para um dos mais antigos ideais educativos. A vantagem hoje é que a tecnologia facilita a viabilização prática desse ideal (SÃO PAULO, 2011, p. 10).

Nesse contexto, verifica-se a importância de se ter uma formação continuada dos professores, principalmente uma formação baseada na tecnologia de forma colaborativa que coloca o aluno como um protagonista, pois a troca de experiências é fundamental para auxiliar no trabalho pedagógico e para a aquisição de novos conhecimentos. Com base nisso, foi transmitido aos professores e ao coordenador da área de exatas os conhecimentos deste trabalho. Segundo os professores, este método torna o aprendizado matemático significativo para os alunos e é um caminho para trabalhos diferenciados não só desta área mas também das outras que compõem o currículo, evidenciando, assim, a possibilidade de atividades interdisciplinares e em espiral envolvendo conteúdos e disciplinas. Contudo, é necessário que o professor esteja preparado para trabalhar com a tecnologia e conheça o papel pedagógico dela no processo de ensino aprendizagem, ou seja, conheça o software, as orientações empregadas em cada construção, suas aplicações, demonstrações e justificativas para que o objetivo de cada construção seja alcançado.

Assim, cabe ressaltar que o papel do professor é essencial, pois ele é o motivador e o mediador no processo, devendo acompanhar, orientar e conduzir as discussões geradas nas resoluções dos problemas.

A capacitação foi realizada na sala de informática, com acesso ao software Geogebra, ao longo de duas semanas. Primeiro foi apresentado o software e explicado sobre seus comandos e funcionalidades, em seguida foi feito junto com os professores as resoluções das construções elementares.

Depois os professores foram desafiados a resolver os problemas da seguinte forma:

I) Primeiro foi colocado o problema e eles tiveram um tempo para resolvê-lo;

II) A seguir a solução foi apresentada. Um tempo adicional foi concedido para a realização das construções;

III) Na sequência, os professores explicaram como tinham realizado a construção, expondo as suas resoluções, utilizando o software;

IV) No final, foi feita a confirmação por meio dos comandos do Geogebra e foram apresentadas as justificativas.

Figura 109 – Capacitação - Professores

No encerramento desta etapa da capacitação, foi feita uma socialização onde todos os professores aprovaram este método de construção geométrica, refletiram sobre o uso deste recurso tecnológico e elencaram propostas de inclusão destas construções em suas matérias, tais como: em Física, na construção de modelos atômicos, imagens em espelhos esféricos, galáxias; em Química, na construção de átomos e moléculas e em Biologia, para trabalhar com as formas geométricas da natureza.

Aplicação em sala de aula

Realizamos uma aplicação onde algumas construções foram abordadas, seguindo a estrutura do trabalho, com alunos do 1°, 2° e 3° anos do Ensino Médio e alguns do Ensino Fundamental. Esta atividade foi aplicada na própria escola aos alunos do 3° ano do Ensino Médio, em sala de aula, e os demais alunos tiveram a oportunidade de participar desta atividade junto com alunos de outras escolas de Ensino Fundamental e Médio durante a Semana de Ciência e Tecnologia da USP, em 2017, em uma oficina organizada pela autora. Esta oficina foi parte da programação realizada no Departamento de Computação e Matemática da Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras de Ribeirão Preto.

O objetivo principal desta atividade foi verificar a aplicabilidade do software na resolução de alguns problemas propostos em comparação com o método tradicional, usando régua e compasso. Entretanto, os alunos que participaram da oficina realizaram apenas as construções utilizando o software. Os estudantes trabalharam de maneira colaborativa e interativa ao realizarem as atividades propostas com a utilização do Geogebra, foi identificada como uma prática investigativa, que contribui para a aquisição de conhecimentos matemáticos. Os professores das turmas que participaram da oficina acharam que esta tecnologia se torna uma facilitadora para uma aprendizagem significativa, pois proporciona discussões matemáticas referentes ao conteúdo, estimula a curiosidade dos alunos, possibilita a generalização de resultados, além de proporcionar a interação aluno-aluno e aluno-professor.

Figura 110 – Oficina - USP

Antes de cada construção foi feita uma revisão dos pré requisitos necessários para cada uma delas, que aparecem no tópico *Conhecimentos Prévios.*

A atividade desenvolvida na escola foi dividida em duas etapas: na 1° etapa foram trabalhadas as construções elementares utilizando papel, régua e compasso e na 2° etapa, as mesmas construções, porém, utilizando o software Geogebra e a resolução de alguns problemas propostos no trabalho.

Segue abaixo o roteiro da atividade:

1° etapa: Os alunos receberam folhas de caderno de desenho, transferidor, compasso e régua. As construções elementares foram feitas junto com os alunos, fazendo questionamentos de qual seria o próximo passo, por que, como demonstrar etc.

Figura 111 – Aplicação - Alunos com régua, papel e compasso

2° etapa: Realizada na sala de informática, os alunos sentaram em duplas, pois não há computadores suficientes para todos. Eles foram desafiados a refazer novamente as construções elementares utilizando o Geogebra e novamente com o auxílio e questionamentos da professora os alunos discutiram as formas de resolução. Depois, os alunos receberam os problemas envolvendo construções geométricas, foram informados de quais pré requisitos seriam necessários para cada problema e tentaram realizar a construção, sem a explicação da professora, utilizando o software. Após alguns minutos (tempo estipulado pelo professor), o professor leu a solução para que os alunos que não conseguiram concluir tivessem uma visão ampla da resolução e tentassem novamente resolver o problema. No final os alunos que conseguiram explicaram as jutificativas com a ajuda da professora.

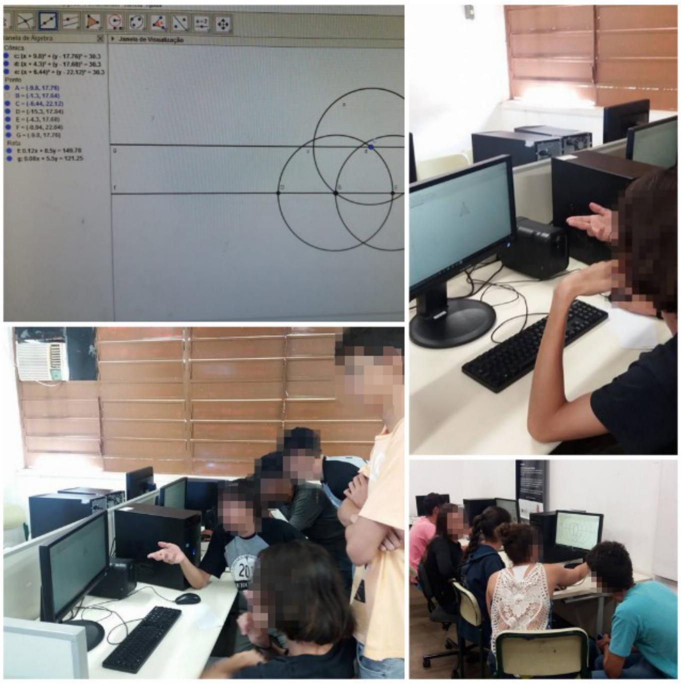


Figura 112 – Aplicação - Alunos com o Geogebra

Após a realização destas duas etapas, foi feita uma pesquisa com os alunos sobre qual método eles acharam mais interessante, na qual 100% dos alunos escolheram a construção geométrica com o uso do Geogebra. Dentre as justificativas dos alunos, destacamos: ser interessante por envolver um recurso tecnológico; ter uma visualização melhor da construção e assim conseguir demonstrá-la; ter maior exatidão nos resultados finais, pois com a régua e compasso muitas vezes o resultado não era exato, devido aos pequenos erros de construção; ter maior motivação durante a aula por se tratar de uma aula que envolve a tecnologia. Segundo Jorge (1998), o aprendizado de construções geométricas possibilitam o desenvolvimento da autonomia, a sensibilidade para observar as formas geométricas na natureza e a sua aplicação na produção humana e isso foi confirmado nestas aplicações feitas em sala de aula. Foi possível perceber também que os alunos desenvolvem o raciocínio lógico, a criticidade, a solidariedade e se tornam protagonistas, contribuindo com o desempenho não apenas em Matemática mas também em outras disciplinas, de forma a potencializar os processos de ensino e aprendizagem.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, P. N. de. **Dinâmica Lúdica Técnicas e Jogos Pedagógicos**. 3th. ed. São Paulo: Editora Loyola, 1981. 25 p. Citado na página 21.

BARBOSA, J. L. M. **Geometria Euclidiana Plana**. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1985. Citado nas páginas 33, 34, 35 e 59.

DANTE, L. R. **Matemática: contextos e aplicações**. São Paulo: Ática, 2014. Citado na página 64.

DOWNLOAD DO GEOGEBRA. **Baixar Aplicativos GeoGebra**. GeoGebra Clássico. <https://www.geogebra.org/download>. Acesso em: 20 set. 2018. Citado na página 64.

HOHENWARTER, M.; HOHENWARTER, J. **Ajuda GeoGebra: Manual Oficial da Versão 3.2**. 2009. <https://static.geogebra.org/help/docupt_PT.pdf>. Acesso em: 21 nov. 2017. Citado na página 64.

JORGE, S. **Desenho geométrico: Ideias e imagens**. São Paulo: Saraiva, 1998. Citado na página 135.

MARMO, C.; MARMO, N. **Desenho geométrico**. Rio de Janeiro: Scipione, 1994. Citado na página 28.

NETO Ântonio C. M. **Geometria**. 1th. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2013. Citado nas páginas 35, 36 e 52.

SÃO PAULO, Secretaria de Estado da Educação. **Currículo do Estado de São Paulo: Matemática e suas tecnologias**. São Paulo: SEE, 2011. (Coordenação Maria Inês Fini). Citado nas páginas 23, 24, 28, 29, 63, 64 e 132.

WAGNER, E. **Uma introdução às construções geométricas**. Rio de Janeiro: IMPA, 2015. Citado nas páginas 22 e 75.

ICMC USP
SÃO CARLOS