



Universidade Federal de Mato Grosso

Instituto de Ciências Exatas e da Terra

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA



# Geometria e geometria molecular: Um estudo quimicomatemático

**Edinéia Maria Teixeira de Paula Campos**

Mestrado Profissional em Matemática: PROFMAT/SBM

Orientador: **Prof. Dr. Geraldo Lúcio Diniz**

Trabalho financiado pela Capes

Cuiabá - MT

Março de 2013

### Dados Internacionais de Catalogação na Fonte.

P324g PAULA CAMPOS, Edinéia Maria Teixeira de.  
Geometria e geometria molecular: : Um estudo  
quimicomatemático / Edinéia Maria Teixeira de PAULA CAMPOS.  
-- 2013  
106 f. : il. color. ; 30 cm.

Orientador: Geraldo Lúcio Diniz.  
Dissertação (mestrado profissional) - Universidade Federal de  
Mato Grosso, Instituto de Ciências Exatas e da Terra, Programa de  
Pós-Graduação em Matemática, Cuiabá, 2013.  
Inclui bibliografia.

1. Demonstrações. 2. Pirâmides. 3. Sequências didáticas. I.  
Título.

Ficha catalográfica elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

**Permitida a reprodução parcial ou total, desde que citada a fonte.**

# Geometria e geometria molecular: Um estudo quimicomatemático

Este exemplar corresponde á redação final da dissertação devidamente corrigida e defendida por Edinéia Maria Teixeira de Paula Campos e aprovada pela comissão julgadora.

Cuiabá, 16 de março de 2013.

Prof. Dr. Geraldo Lúcio Diniz  
Orientador

## **Banca examinadora:**

Prof. Dr. Geraldo Lúcio Diniz (UFMT)

Prof. Dr. Andre Krindges (UFMT)

Prof. Dr. Jefferson Cruz dos Santos Leite (UFPI)

Dissertação apresentada ao curso de Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT da Universidade Federal de Mato Grosso, como requisito parcial para obtenção do título **de Mestre em Matemática**.

Dissertação de Mestrado defendida em 16 de março de 2013 e aprovada pela  
banca examinadora composta pelos Professores Doutores

---

Prof. Dr. Geraldo Lúcio Diniz

---

Prof. Dr. Andre Krindges

---

Prof. Dr. Jefferson Cruz dos Santos Leite

*A meu marido Wolf, pelo amor, dedicação e compreensão durante toda a realização deste trabalho, a meu irmão Edinei pelo apoio e, especialmente, a duas pessoas a quem devo minha vida e todas as minhas realizações, meus pais Édio e Izaura.*

# Agradecimentos

À Deus pela vida e por ter me dado forças para a realização deste trabalho.

Ao meu orientador, professor Dr. Geraldo Lúcio Diniz, pela paciência, dedicação, apoio e competência. Sua contribuição foi essencial para a realização deste trabalho.

À todos os professores do Mestrado Profissional em Matemática da UFMT, que com seus ensinamentos deram contribuições significativas para a minha formação.

Aos meus pais, Édio e Izaura, que me deram a vida e me ensinaram a vivê-la com dignidade, que iluminaram os meus caminhos com afeto e dedicação, para que o trilhasse sem medo e cheia de esperanças, que se doaram inteiros e renunciaram muitas vezes aos seus sonhos para que eu pudesse realizar os meus.

Ao meu marido Wolf pelo amor, carinho e paciência durante estes dois anos. Sei que não foi fácil, mas você sempre me incentivou e apoiou, mesmo, nos momentos de estresse total.

Ao meu irmão Edinei pelo incentivo, apoio e companheirismo em todos os momentos.

A minha amiga e colega de mestrado Liliana, por dividir conosco todas as angústias e alegrias nestes dois anos.

Aos alunos das terceiras séries (2013) do ensino médio da Escola “13 de Maio” que participaram das atividades propostas neste trabalho.

Muito obrigado a todos.

Edinéia Maria Teixeira de Paula Campos

Cuiabá, abril, 2013.

“Viver de noite me fez senhor do fogo.

A vocês eu deixo o sono.

O sonho, não.

Esse eu mesmo carrego”.

Paulo Leminski

trecho do poema Carrego o peso da lua

# Resumo

Neste trabalho é apresentada uma proposta para atividades diferenciadas envolvendo temas de química e matemática. Como escopo, foi escolhido o tema central de geometria molecular, onde foram destacadas cinco moléculas para representar cada uma das cinco geometrias moleculares escolhidas. Com base nas cinco moléculas, foi elaborada uma sequência de atividades didáticas de modo a explorar os aspectos químicos, tais como os componentes básicos de um átomo e de uma molécula, bem como a matemática envolvida em cada uma das geometrias formada pelas moléculas, tais como: ângulos, triângulos, pirâmides, etc. As atividades foram realizadas com duas turmas de 3º ano do ensino médio de uma escola pública do município de Porto Esperidião/MT, cujos resultados se encontram no 3º capítulo, além de algumas sugestões de atividades que estão no 4º capítulo. Ao final, é feita uma avaliação de todo o processo de construção deste trabalho.

**Palavras chaves:** Demonstrações. Pirâmides. Sequências didáticas.

# Abstract

This paper presents a proposal for interdisciplinary activities involving themes of Chemistry and Mathematics. As scope, the Molecular Geometry was chosen as the central theme, where five molecules were highlighted to represent each of the five chosen molecular geometries. Based on these five molecules was prepared a sequence of learning activities in order to exploit the chemical aspects such as the basic components and an atom of one molecule and the mathematics involved in each of the geometries formed by the molecules, such as: angles, triangles, pyramids, etc. The activities were conducted with two groups of third year of high school at a public school in Porto Esperidião/MT, whose results are in the third chapter, plus some suggestions for activities that are in the 4th chapter. At the end, an assessment is made of the entire construction process of this work.

**Keywords:** Demonstrations. Pyramids. Teaching sequences.

# Sumário

<b>1</b>	<b>Um novo olhar e uma nova abordagem sobre velhos conceitos</b>	<b>17</b>
1.1	Reavaliando velhos conceitos . . . . .	17
1.2	A proposta . . . . .	20
<b>2</b>	<b>Visão molecular e geométrica da geometria das moléculas</b>	<b>24</b>
2.1	Atividades . . . . .	24
2.1.1	As bexigas: 1ª atividade . . . . .	25
2.1.2	Bolas e varetas: 2ª atividade . . . . .	27
2.1.3	Construção e demonstração: 3ª Atividade . . . . .	29
2.1.4	Aprofundamento: 4ª atividade . . . . .	29
2.2	Geometria molecular . . . . .	30
2.3	A geometria e as moléculas . . . . .	35
2.4	Molécula de dióxido de carbono . . . . .	35
2.5	Retas, semirretas e segmentos de reta . . . . .	39
2.5.1	Retas . . . . .	39
2.5.2	Classificação dos Ângulos . . . . .	42
2.6	Molécula da água . . . . .	44
2.7	Molécula de Trifluoreto de Boro . . . . .	47
2.7.1	Triângulo . . . . .	49
2.7.2	Área e perímetro de um triângulo . . . . .	51
2.7.3	Pontos notáveis de um triângulo . . . . .	51
2.7.4	Demonstração do ângulo do $\text{BF}_3$ . . . . .	54
2.8	Molécula da Amônia . . . . .	55
2.8.1	Pirâmide . . . . .	57
2.8.2	Base triangular (Triângulo equilátero) . . . . .	61

2.8.3	Base quadrada . . . . .	61
2.8.4	Base hexagonal (regular) . . . . .	62
2.8.5	Área de uma pirâmide . . . . .	63
2.8.6	Volume de uma pirâmide . . . . .	63
2.8.7	Demonstração do ângulo da amônia . . . . .	67
2.9	A Molécula de Metano . . . . .	67
2.9.1	Caracterização do gás metano . . . . .	67
2.9.2	Tetraedro . . . . .	70
<b>3</b>	<b>Aplicação da sequência didática</b>	<b>76</b>
3.1	As bexigas: 1ª atividade . . . . .	76
3.2	Bolas e varetas: 2ª atividade . . . . .	78
3.3	Amônia e as pirâmides: 3ª atividade . . . . .	81
3.4	Metano e o tetraedro: 4ª atividade . . . . .	82
3.5	Com a palavra: “o aluno” . . . . .	86
<b>4</b>	<b>Sugestão para ampliar a sequência didática</b>	<b>88</b>
4.1	Fulereo e a bola de futebol . . . . .	88
4.1.1	Grafite . . . . .	89
4.1.2	Diamante . . . . .	89
4.1.3	Fulereo . . . . .	90
4.1.4	Lei de Euler . . . . .	93
4.1.5	Atividade . . . . .	94
	<b>Considerações finais</b>	<b>96</b>
	<b>Referências bibliográficas</b>	<b>100</b>
<b>A</b>	<b>Conceitos e demonstrações</b>	<b>101</b>
A.1	Teorema de Pitágoras . . . . .	101
A.2	Princípio de Cavalieri . . . . .	103
A.3	Lei dos senos e lei dos cossenos . . . . .	104
A.3.1	Lei dos senos . . . . .	104
A.3.2	Lei dos cossenos . . . . .	106

# Lista de Figuras

2.1	Representação eletrônica no modelo VSEPR . . . . .	32
2.2	Representação da ligação covalente . . . . .	33
2.3	Possíveis ligações do carbono . . . . .	33
2.4	CH <sub>4</sub> formando um tetraedro regular . . . . .	34
2.5	Moléculas e suas geometrias . . . . .	35
2.6	Cubo de volume 22,4 L. . . . .	36
2.7	Disposição geométrica da molécula de CO <sub>2</sub> . . . . .	38
2.8	Representação geométrica de uma reta $r$ . . . . .	39
2.9	Posições relativas de uma reta no plano. . . . .	39
2.10	Exemplos de retas concorrentes. . . . .	39
2.11	Exemplo de duas retas paralelas. . . . .	40
2.12	Exemplo de duas retas coincidentes. . . . .	40
2.13	Representação geométrica de semirretas. . . . .	40
2.14	Representação de segmentos de reta. . . . .	41
2.15	Exemplos de segmentos de reta. . . . .	41
2.16	Representação angular da molécula de CO <sub>2</sub> . . . . .	42
2.17	Representação geométrica do ângulo raso. . . . .	42
2.18	Representação geométrica do ângulo reto. . . . .	42
2.19	Representação geométrica do ângulo agudo. . . . .	42
2.20	Representação geométrica do ângulo obtuso. . . . .	43
2.21	Circunferência de centro A. . . . .	43
2.22	Circunferência dividida ao meio . . . . .	43
2.23	Diferentes representações da molécula da água. . . . .	44
2.24	Representação estrutural e eletrônica da molécula da água. . . . .	46
2.25	Disposição atômica da molécula da água. . . . .	46

2.26	Fórmula estrutural do trifluoreto de boro. . . . .	48
2.27	Geometria da molécula do trifluoreto de boro. . . . .	49
2.28	Representação geométrica do triângulo. . . . .	49
2.29	Ângulos externos de um triângulo. . . . .	50
2.30	Classificação dos triângulos em relação aos lados. . . . .	50
2.31	Classificação do triângulo de acordo com seus ângulos. . . . .	50
2.32	Soma dos ângulos internos de um triângulo. . . . .	51
2.33	Paralelogramo ABCD subdividido em dois triângulos: ABC e ADC . . . .	51
2.34	Construção geométrica do circuncentro. . . . .	52
2.35	Construção geométrica do incentro . . . . .	53
2.36	Construção geométrica do ortocentro . . . . .	53
2.37	Construção geométrica do baricentro . . . . .	54
2.38	Ligações dos átomos da amônia. . . . .	56
2.39	Ângulos da molécula da amônia. . . . .	57
2.40	Medidas da molécula da amônia. . . . .	57
2.41	As pirâmides de Gizé. . . . .	57
2.42	Representação geométrica de uma pirâmide de base $A_1A_2A_3\dots A_n$ . . . . .	58
2.43	Representação geométrica de uma pirâmide de base triangular. . . . .	58
2.44	Elementos de uma pirâmide regular . . . . .	60
2.45	Relação entre os elementos de uma pirâmide regular . . . . .	60
2.46	Triângulo equilátero inscrito numa circunferência de raio $r$ . . . . .	61
2.47	Quadrado inscrito numa circunferência de raio $r$ . . . . .	62
2.48	Representação de uma base hexagonal. . . . .	62
2.49	Pirâmide e sua secção transversal. . . . .	64
2.50	Pirâmides de mesma volume. . . . .	65
2.51	Prisma decomposto em três pirâmides. . . . .	66
2.52	Fórmula estrutural do $\text{CH}_4$ . . . . .	70
2.53	Geometria da molécula do metano. . . . .	70
2.54	Tetraedro regular . . . . .	71
2.55	Elementos do tetraedro. . . . .	72
2.56	Localização da altura (H) do tetraedro. . . . .	72
2.57	Molécula do $\text{CH}_4$ e sua geometria tetraédrica . . . . .	73

2.58	Cubo de aresta $2a$ .	73
2.59	Ângulo $\theta$ .	74
2.60	PO e PB formando um ângulo $\theta$ .	74
3.1	Alunas analisando as moléculas representadas por bexigas	77
3.2	$\text{CO}_2$ , $\text{H}_2\text{O}$ e $\text{BF}_3$ representados por bolas e varetas.	79
3.3	Geometria trigonal do $\text{BF}_3$	79
3.4	Pontos notáveis do triângulo equilátero	80
3.5	Representação da molécula da amônia.	81
3.6	Molécula da amônia.	82
3.7	Representação da molécula da amônia.	83
3.8	Aluno observando o cubo e o tetraedro.	83
3.9	Tetraedro encaixado dentro do cubo.	84
3.10	$\text{CH}_4$ dentro do tetraedro que está dentro do cubo.	84
3.11	Geometria tetraédrica do $\text{CH}_4$ .	85
3.12	Molécula do metano ( $\text{CH}_4$ ).	85
3.13	Alunos resolvendo as atividades com o auxílio das construções.	86
4.1	Grafite formado por camadas de átomos de carbono.	89
4.2	Estrutura do diamante.	90
4.3	Estrutura do fulereno (a) e de uma bola de futebol (b).	91
4.4	Modelo de uma molécula de Fulereno.	91
4.5	Construção da bola de futebol a partir do icosaedro.	92
4.6	Icosaedro truncado (ou bola de futebol ou ainda a molécula do futeboleno $\text{C}_{60}$ ).	93
A.1	Triângulo retângulo.	101
A.2	Quadrados de lados $b + c$ .	101
A.3	Quatro triângulos inscritos num quadrado.	102
A.4	Quatro triângulos inscritos num quadrado.	102
A.5	Identidade geométrica de $a^2 = b^2 + c^2$ .	103
A.6	Mesma quantidade de chapas em ambas as pilhas para ilustrar o princípio de Cavalieri.	103
A.7	Dois sólidos $S_1$ e $S_2$ de mesma altura.	104

A.8	Dois sólidos $S_1$ e $S_2$ de mesma altura. . . . .	105
A.9	Ilustração da lei dos senos para os ângulos $\hat{B}$ e $\hat{C}$ . . . . .	105
A.10	Triângulo demonstrativo da lei dos cossenos. . . . .	106

# Lista de Tabelas

2.1	Construções moleculares com bexigas . . . . .	25
2.2	Identificação das geometrias moleculares . . . . .	26
2.3	Identificação de algumas propriedades dos átomos presentes nas moléculas . . . . .	26
2.4	Desenho de moléculas . . . . .	26
2.5	Revisão das moléculas . . . . .	27
2.6	Representação das moléculas construídas . . . . .	27
2.7	Ângulos e geometrias das moléculas . . . . .	28
2.8	Polígono formado na lateral de cada molécula . . . . .	28
2.9	Composição química do $\text{CO}_2$ . . . . .	37
2.10	Composição química do trifluoreto de boro. . . . .	48
2.11	Composição química da amônia. . . . .	56
2.12	Propriedades dos átomos do Hidrogênio e do Carbono . . . . .	69

# Introdução

Vivemos num mundo globalizado e informatizado que vem exigindo mudanças constantes na educação, com isto, formar cidadãos capazes de interpretar e analisar informações de forma crítica, saber conceitualizar diversos assuntos, aperfeiçoar velhos conhecimentos e valores, passa a ser o objetivo da educação atual.

O ensino de matemática é um instrumento fundamental para todas as disciplinas, pois em todas, há um detalhe que para ser esclarecido faz-se necessário um conhecimento básico de matemática.

Vale destacar que no ensino médio, de acordo com Ribeiro (2011): “A matemática deve ser uma ciência que permite ao aluno perceber que os encadeamentos lógicos, as definições e as demonstrações possibilitam a construção de novos conceitos e estruturas, úteis às diversas áreas”.

Diante de tudo isso, uma das disciplinas que requer diversos conhecimentos matemáticos, é a química, pois em alguns conteúdos, o conhecimento de matemática é essencial.

Analisando todos estes “detalhes”, e a experiência como aluna e como professora de matemática e química do ensino médio, é que surgiu a idéia de elaborar uma sequência de aulas envolvendo matemática e química.

As sequências de aulas têm como tema principal a geometria molecular, vista sobre um olhar quimicomatemático, onde os olhos, na maior parte das aulas, repousam sobre a matemática. O objetivo nesta sequência é possibilitar aos professores destas duas disciplinas, uma aula transdisciplinar, inovadora e criativa que consiga entrelaçar teoria e prática. Para alcançar estes objetivos o texto foi organizado em quatro capítulos.

O primeiro capítulo começa com os dilemas de uma professora e sua experiência profissional, passando pelos meandros didáticos da proposta e termina com os objetivos a serem alcançados com esta proposta.

O segundo capítulo traz a sequência de atividades, os objetivos para cada atividade e um estudo dos conceitos e demonstrações dos conteúdos químicos e matemáticos necessários para o bom desenvolvimento da mesma.

O terceiro capítulo contempla um relato avaliativo do desenvolvimento das atividades, destacando os acertos, os erros e as mudanças ocorridas e, para finalizar, há diversos depoimentos dos alunos a respeito das aulas.

No quarto capítulo são feitas sugestões para a continuação da sequência de aulas, abordando uma paixão nacional: a bola de futebol e a geometria molecular do fulereno.

Nas considerações finais é feita uma avaliação de todo este trabalho destacando os pontos positivos, negativos e toda a contribuição que ele trouxe.

No apêndice são apresentados conceitos e feitas algumas demonstrações de conteúdos que foram utilizadas no decorrer deste trabalho, mas não foram ali demonstrados.

Esperamos que os colegas professores vejam este trabalho, como um material didático diferenciado para o ensino de geometria e de geometria molecular, o qual foi construído com muita dedicação, foi testada e observada a sua eficácia, ou pelo menos como inspiração para a elaboração de uma proposta diferenciada.

# Capítulo 1

## Um novo olhar e uma nova abordagem sobre velhos conceitos

Neste capítulo são apresentados os dilemas de uma professora e sua experiência profissional, passando pelos meandros didáticos da proposta. Ao final do capítulo são apresentados os objetivos a serem alcançados com esta proposta.

### 1.1 Reavaliando velhos conceitos

No cotidiano, o conhecimento parece ser alguma coisa tão corriqueira que nós não nos perguntamos pelo que é, pelo seu processo, pela sua origem, pela sua forma de apropriação. Aos poucos, ao longo de nossa infância, adolescência, juventude, vamos adquirindo entendimentos das coisas que compõem o mundo que nos cerca, das relações com as pessoas, das normas morais e sociais que regem as relações entre os seres humanos. Por isso, nos acostumamos a esses entendimentos, a partir do momento em que fomos adquirindo-os espontaneamente. Com eles e a partir deles conversamos, discutimos, temos certeza e dúvidas, formulamos juízos. Contudo, quase nunca, exceção feita aos especialistas, nos perguntamos sobre o que é o conhecimento, seu significado, origem. Habitamo-nos a utilizar o entendimento, por isso não o problematizamos. (Luckesi e Luckesi, 2002)

Por problematização, consideramos o conceito sobre tudo o que aprendemos ao longo de nossas vidas, ou seja, a essência com que cada “coisa” é feita. E isso faz lembrar

os tempos de escola e por escola entende-se o caminho trilhado “escolarmente” até hoje.

Ao relembrar o aprendizado e como sempre o “problematizamos”, vemos que na maior parte das vezes, ele nos foi apresentado como um conhecimento pronto e acabado e comodamente o aceitamos por acreditar ser este o caminho mais fácil e rápido.

Durante todo o ensino fundamental e médio, não lembramos de algum professor, ter demonstrado alguma fórmula ou teorema em qualquer disciplina que seja. Recordamos das fórmulas e dos teoremas que nos apresentaram como meio para resolver um determinado exercício. Não podemos esquecer das muitas listas de exercícios que priorizavam puramente o cálculo.

Na faculdade, alguns professores tentaram ensinar usando a problematização dos conteúdos, mas nas avaliações isso não acontecia, e lógico como já outrora fomos ensinados a não nos preocuparmos com isso, continuamos aprendendo a resolver exercícios, nos quais normalmente éramos bons. Como consequência, enquanto professores, continuamos o processo, ou seja, raramente ensinamos o conceito, a problematização de um determinado conteúdo.

De acordo com Vigostick:

É pela aprendizagem nas relações com os outros que construímos os conhecimentos que permite nosso desenvolvimento mental. A aprendizagem dos alunos vai sendo construída mediante processo de relação do indivíduo com seu ambiente sociocultural e com suporte de outros indivíduos mais experientes. (Neves e Damiani, 2006)

Ao fazer a inscrição para o mestrado profissional (PROFMAT), continuamos “achando” que saber resolver exercícios numéricos era o ponto principal do estudo da matemática, e imaginem a surpresa e frustração quando deparamos com exercícios que requeriam-nos, muito mais do que apenas fazer contas, mas exigiam que demonstrássemos as tais contas. Para poder demonstrar essas contas necessitávamos dos conceitos que sempre acreditamos serem apenas detalhes pequenos que os livros traziam e raramente líamos. Logo, a primeira reação foi renegá-los e, conseqüentemente, encontramos dificuldades para apreender e resolver o que agora diferentemente era cobrado.

Mas um dia conversando com umas alunas estudiosas que outrora foram nossas pupilas durante alguns anos, e elas reclamavam que às havia abandonado e que agora elas enfrentavam dificuldades em compreender o conteúdo que o outro professor lhes ensinava,

pois ele priorizava, primeiramente, o entendimento do conceito. Percebemos que precisávamos mudar o modo de pensar e ensinar matemática e, conseqüentemente, química, pois também lecionamos química.

Mas existem pontos favoráveis, pois sempre nos preocupamos em ensinar os conteúdos voltados para o cotidiano dos alunos. O que também não é fácil, pois os livros didáticos raramente fazem essa associação: conteúdo e realidade.

Diante de tudo isso, ao escolher um tema para desenvolver o trabalho de conclusão do mestrado, tentamos corrigir um pouco desses desvios de conhecimento (que já havia começado a serem corrigidos ao longo do mestrado) e, conseqüentemente, melhorar a nossa prática docente, propondo um novo olhar sobre dois conteúdos de disciplinas diferentes, matemática e química, mas que no final, será praticamente um só.

A proposta também tem um cunho desafiador, pois é um conteúdo de química ao qual não temos total domínio e é uma “mistura” que não encontramos em nenhum livro didático.

Os vários livros didáticos de matemática e química, que pesquisamos para desenvolver este trabalho, não fazem este elo entre as duas disciplinas. Em nenhum dos livros de química do ensino médio, encontramos qualquer anotação do porque que os ângulos formados entre os átomos de uma determinada molécula tem aquele valor.

Nos livros de matemática, apenas dois: Paiva (2009) e Ribeiro (2011) fazem uma referência sobre a geometria molecular, mas nada sobre os valores dos ângulos e de como trabalhar este conteúdo com os alunos durante as aulas de matemática.

Sendo que Ribeiro (2011), dentro da assessoria pedagógica, informa que é a organização geométrica que diferencia algumas moléculas, como por exemplo, no caso do diamante e do grafite.

Sendo assim, a proposta é misturar a geometria molecular com a geometria plana, espacial e analítica, vista sobre um olhar diferenciado e voltado para a realidade dos alunos.

Pois, de acordo com a abordagem vygotskyana:

O homem é visto como alguém que transforma e é transformado nas relações que acontecem em uma determinada cultura. O que ocorre não é uma somatória entre fatores inatos e adquiridos e sim uma interação dialética que se dá, desde o nascimento, entre o ser humano e o meio social e cultural em que se insere (Neves e Damiani, 2006).

## 1.2 A proposta

Nos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (Brasil, 2000) juntamente com a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (Brasil, 1996), estão explicitados os três conjuntos de competências que devem ser desenvolvidas durante a vida escolar do aluno no ensino médio, a saber: comunicar e representar; investigar e compreender; contextualizar social e historicamente os conhecimentos, que visam contribuir na promoção da realização pessoal, na qualificação para um trabalho digno e no exercício da cidadania.

De acordo com o artigo 35 da Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB), o ensino médio, etapa final da educação básica, com duração de três anos, tem como finalidades:

- A consolidação e o aprofundamento dos conhecimentos adquiridos no Ensino Fundamental, possibilitando o prosseguimento de estudos.
- A preparação básica para o trabalho e a cidadania do educando, para continuar aprendendo, de modo a ser capaz de se adaptar com flexibilidade a novas condições de ocupação ou aperfeiçoamento posteriores.
- O aprimoramento do educando como pessoa humana, incluindo a formação ética e o desenvolvimento crítico.
- A compreensão dos fundamentos científico-tecnológicos dos processos produtivos, relacionando a teoria com a prática, no ensino de cada disciplina.

Conforme nos diz Loyde et al. (2009):

A matemática se encontra no cenário escolar como um dos principais canais para auxiliar o aluno a enfrentar situações-problema, visto que ela pode propiciar: a compreensão e interpretação destes momentos; bem como a capacidade de argumentar, analisar e tirar as próprias conclusões diante das situações. Porém, estes e outros resultados positivos, podem ser alcançados se depararmos com práticas docentes, na educação básica, que apresentem de modo motivador e significativo os conteúdos matemáticos apresentados nos currículos escolares.

Observando os conteúdos matemáticos e químicos que integram os currículos escolares, encontramos um grande entrelaçamento entre as duas disciplinas e, neste sentido, meus olhos se prenderam ao que envolve geometria e toda a magia que a rodeia. A magia está no fato de que a geometria está por toda parte, para onde olhamos vemos algo geométrico, pois convivemos em nosso cotidiano com ideias de volume, altura, largura, comprimento, triângulos, quadrados e uma infinidade de outros conceitos geométricos.

Mas será que estamos ensinando nossos alunos a identificar e usar toda essa geometria que está a nossa disposição?

Pensando nisso, a proposta aqui apresentada, tem por objetivo fornecer uma possibilidade aos professores da educação básica de inserir na sua prática docente uma aula transdisciplinar, através da geometria de algumas moléculas e usando o material concreto para representá-las, de modo a tornar mais dinâmica, prazerosa e interligada as aulas.

Mas vejamos as definições sobre interdisciplinar, multidisciplinar e transdisciplinar para ver se realmente esta é a denominação para esta proposta.

Bochniak (1992) afirma que: “A interdisciplinaridade transcende a justaposição das disciplinas, é na verdade um processo de coparticipação, reciprocidade, mutualidade, diálogo que caracterizam não somente as disciplinas, mas todos os envolvidos no processo educativo”.

Segundo Almeida Filho (1997): “Na multidisciplinaridade, cada professor cooperará com o estudo dentro da sua própria ótica, ou seja, um estudo sob diversos ângulos, mas sem existir um rompimento entre as fronteiras das disciplinas”.

Conforme nos diz Domingues (2013):

Na multidisciplinaridade, várias disciplinas cooperam com um projeto, mas cada qual trabalhando um aspecto do objeto com o seu método. Na interdisciplinaridade, há situações em que uma disciplina nova adota métodos de outra mais antiga. É o caso clássico, por exemplo, da Bioquímica, matéria em que houve uma fusão de campos. Na transdisciplinaridade, a tentativa é a de instaurar uma metodologia unificada, ou seja, é a sugestão de uma nova visão do conhecimento, menos compartimentalizada e disciplinar, mais holística, com sistemas abertos e capazes de produzir uma nova ciência e novas tecnologias.

Portanto, a proposta é transdisciplinaridade, pois implica na construção de um novo objeto, com metodologia peculiar, a partir da integração de diferentes disciplinas, ou seja, a proposta consiste em fazer um mix de geometria molecular com geometria plana, espacial e analítica, pois como nos diz Loyde et al. (2009): “é interessante lembrar que a linguagem matemática é muito usada para descrever diversos fenômenos das mais distintas áreas do conhecimento humano. Para isso, ela se utiliza de diferentes campos como o algébrico, o numérico e o geométrico”.

Durante as aulas de matemática somos constantemente questionados sobre qual a utilidade e a importância de tal conteúdo no dia-a-dia. Não há uma resposta rápida e fácil, mas para Ávila (1995): “o ensino da matemática é justificado, em larga medida, pela riqueza dos diferentes processos de criatividade que ele exhibe, proporcionando aos educandos excelentes oportunidades de exercitar e desenvolver suas faculdades intelectuais”.

E, segundo Moraes (2012), “o significado da matemática para o aluno resulta das conexões que ele estabelece entre ela e as demais disciplinas”, ou seja, uma mudança de metodologia pode ser um meio para diminuir os problemas encontrados no ensino de matemática.

Diante de tudo que fora anteriormente exposto, escolhemos 5 geometrias moleculares: **linear, angular, triangular, piramidal e tetraédrica** e 5 moléculas para representar cada uma delas, que consideramos mais importantes, para desenvolver este trabalho, que contemplará o estudo da geometria que existe na geometria das moléculas e, conseqüentemente, estudar a química básica que envolve todas essas moléculas, pois conforme argumenta Clements e Battista (1992): “a geometria é importante, pois ela nos oferece uma maneira de interpretar e refletir sobre o nosso meio físico”.

Esta junção entre geometria molecular e geometria matemática tem como objetivos:

- Mostrar que é possível trabalhar transdisciplinarmente.
- Intuir o aluno a perceber que a geometria está em todos os lugares e que ela é a chave para desvendar muitos mistérios nas várias áreas do conhecimento.
- Demonstrar os valores dos ângulos existentes entre os átomos.
- Demonstrar para os alunos que a matemática não é uma ciência pronta e acabada.

- Recordar velhos conceitos aprendidos ao longo dos anos escolares e através destes elaborar novos e/ou aprimorar velhos.
- Construir as moléculas e as geometrias nelas presentes para que os alunos possam ver, sentir e aprender na prática o conceito ali trabalhado.

Para atingir estes objetivos foram elaboradas atividades que pudessem ajudar os alunos a aprender de um modo interessante e criativo, pois elas acoplam teoria e prática, que estão apresentadas no capítulo seguinte.

## Capítulo 2

# Visão molecular e geométrica da geometria das moléculas

É importante lembrar que as disciplinas do conhecimento podem ser separadas para melhor administração de currículos escolares, mas que todas devem ser integradas na construção individual do conhecimento e este é o lema que norteará todas as atividades.

As atividades estão abaixo relacionadas e posteriormente serão apresentadas toda a teoria necessária para o desenvolvimento das mesmas.

### 2.1 Atividades

Segundo Kishimoto (1998):

O uso de jogos na educação está relacionado à presença concomitante de duas funções: a lúdica e a educativa. A função lúdica garante que o jogo propicie a diversão, o prazer (e até o desprazer) quando escolhido voluntariamente e a função educativa garante a aprendizagem de qualquer coisa que complete o indivíduo em seu saber, seus conhecimentos e sua apreensão do mundo. Ambas as funções devem estar sempre em equilíbrio para que não haja apenas jogo, ou apenas ensino.

### 2.1.1 As bexigas: 1ª atividade

A primeira atividade tem como objetivos:

- Identificar qual o nível de conhecimento dos alunos sobre o assunto;
- Possibilitar uma visão mais concreta das moléculas e de sua disposição geométrica;
- Propiciar a socialização de conhecimentos;
- Proporcionar roteiro para que os alunos possam aos poucos ir construindo seu conhecimento químico e matemático sobre geometria molecular.

Os alunos devem ser organizados em duplas, as quais recebem folhas com questões que possibilitem aos alunos ir, aos poucos, construindo o conhecimento necessário para identificar a disposição geométrica de diferentes moléculas.

As folhas são recolhidas, corrigidas e os dados são analisados para identificar onde estão as maiores dificuldades. Coletadas estas informações, as folhas são novamente entregues aos alunos e com o auxílio de um projetor multimídia, as questões são discutidas com eles para que, assim, possam analisar seus erros.

As perguntas são as seguintes:

1. O que é molécula?
2. Já pararam para pensar se as moléculas possuem uma forma, uma estrutura? Qual? Será que essa estrutura influencia em alguma coisa nas propriedades das moléculas?
3. Preencha a tabela 2.1, utilizando bexigas e as instruções dadas. (As bexigas devem ser infladas igualmente e amarradas umas as outras, de acordo com cada linha da tabela 2.1).

Tabela 2.1: Construções moleculares com bexigas

Quantidade	Geometria da molécula	Ângulo entre as bexigas (grau)
2 bexigas soltas		
2 bexigas presas		
3 bexigas soltas		
3 bexigas presas		
4 bexigas soltas		

4. Com o auxílio da tabela periódica e das figuras que fizeram com as bexigas, preencha a tabela 2.2.

Tabela 2.2: Identificação das geometrias moleculares

Molécula	Nome da molécula	Quantidade de bexigas	Geometria da molécula	Por quê?
H <sub>2</sub> O CH <sub>4</sub> NH <sub>3</sub> CO <sub>2</sub> BF <sub>3</sub> O <sub>2</sub>				

5. Preencha a tabela 2.3 com o auxílio da tabela periódica:

Tabela 2.3: Identificação de algumas propriedades dos átomos presentes nas moléculas

Nome	Carbono	Oxigênio	Nitrogênio	Hidrogênio	Flúor	Boro
Símbolo Número atômico (Z) Número de Massa (A) Número de prótons (p) Número de elétrons (e) Número de nêutrons (n) Camada de valência Família Período Grupo Distribuição eletrônica						

6. Desenhe as moléculas abaixo na fórmula estrutural ou na eletrônica.

Tabela 2.4: Desenho de moléculas

CO <sub>2</sub>	H <sub>2</sub> O	BF <sub>3</sub>	NH <sub>3</sub>
CH <sub>4</sub>	O <sub>2</sub>		

7. Após o desenho das moléculas mudaram de idéia em relação à associação com as bexigas? Por quê?

8. Se respondeu sim na questão 7, preencha novamente a tabela 2.5.

Tabela 2.5: Revisão das moléculas

Molécula	Quantidade de bexigas	Geometria da molécula	Por quê?
H <sub>2</sub> O			
CH <sub>4</sub>			
NH <sub>3</sub>			
CO <sub>2</sub>			
BF <sub>3</sub>			
O <sub>2</sub>			

### 2.1.2 Bolas e varetas: 2ª atividade

A segunda atividade tem como objetivo reforçar e aprimorar o conhecimento sobre a geometria molecular e analisar matematicamente a geometria que há nelas. A metodologia utilizada será a mesma da 1ª atividade, com o auxílio de bolas de isopor e varetas para representar as moléculas.

As questões que nortearão esta atividade estão abaixo relacionadas.

1. Construa as moléculas abaixo usando bolas de isopor e varetas, com o transferidor faça as medidas dos ângulos e depois as desenhe.

Tabela 2.6: Representação das moléculas construídas

CO <sub>2</sub>	H <sub>2</sub> O	BF <sub>3</sub>	NH <sub>3</sub>	CH <sub>4</sub>
-----------------	------------------	-----------------	-----------------	-----------------

2. Ligue as extremidades das bolinhas com barbante e preencha a tabela?

Tabela 2.7: Ângulos e geometrias das moléculas

Molécula	Geometria molecular	Por quê?	Ângulo entre os átomos (classificação)	Por quê?
H <sub>2</sub> O				
CH <sub>4</sub>				
NH <sub>3</sub>				
CO <sub>2</sub>				
BF <sub>3</sub>				

3. Matematicamente, qual o nome dado à linha (representado por barbantes ou varetas) que liga um átomo ao outro?

( ) reta ( ) semirreta ( ) segmento de reta

4. Que polígono formou nas laterais da molécula de:

Tabela 2.8: Polígono formado na lateral de cada molécula

Molécula	Polígono	Por quê?
H <sub>2</sub> O		
CH <sub>4</sub>		
NH <sub>3</sub>		
CO <sub>2</sub>		
BF <sub>3</sub>		

5. Pesquise e apresente:

a) O método usado para encontrar os ângulos das moléculas de NH<sub>3</sub> e H<sub>2</sub>O;

b) Um breve relato sobre a utilização do: CO<sub>2</sub>, H<sub>2</sub>O , BF<sub>3</sub>, NH<sub>3</sub>eCH<sub>4</sub>.

### 2.1.3 Construção e demonstração: 3<sup>a</sup> Atividade

A terceira atividade tem como objetivo demonstrar matematicamente os ângulos das geometrias moleculares: linear, trigonal plana e tetraédrica e desenvolver problemas químicos e matemáticos, os quais tenham as moléculas como ator principal.

1. Descreva por dois métodos, os cálculos e/ou desenhos necessários para encontrar os ângulos das moléculas de:  
  
BF<sub>3</sub>  
  
CO<sub>2</sub>
2. Identifique a geometria das moléculas da NH<sub>3</sub> e do CH<sub>4</sub> e diga quantas faces, arestas e vértices cada uma delas tem?
3. Construa um cubo cuja aresta mede 15 cm usando canudinho e encontre as coordenadas do centro deste cubo, depois faça abaixo, um esboço do método usado para encontrá-las.
4. Encontre a medida da diagonal de um quadrado do cubo cuja aresta mede 15 cm e use-a para construir um tetraedro. Descreva todo o caminho percorrido.
5. Encaixe o tetraedro dentro do cubo. As coordenadas do centro do cubo são as mesmas do centro do tetraedro, ou seja, o centro do cubo é o centro do tetraedro? Por quê?
6. Todos os ângulos formados entre os átomos da molécula do CH<sub>4</sub> são iguais? Por quê?
7. Encontrar uma fórmula para calcular a área e o volume do tetraedro.

### 2.1.4 Aprofundamento: 4<sup>a</sup> atividade

A quarta atividade tem como objetivo aprofundar no estudo químico e, principalmente, matemático da molécula piramidal da amônia e da tetraédrica do metano. Para alcançar estes objetivos serão construídas a geometria piramidal e tetraédrica, usando canudinhos.

1. Qual a massa molecular de 1 mol do metano? E de 1 mol da amônia?

2. Qual o volume molar de um mol do metano? De 2 mols de metano? De 5 mols de metano?
3. Qual o volume molar de um mol da amônia? De 2 mols da amônia? De 5 mols da amônia?
4. Quantas arestas, vértices e faces tem cada uma das estruturas?
5. Usando a medida da aresta do tetraedro, calcule a área de uma lateral, da base e a total e o volume deste poliedro?
6. Usando as medidas das arestas da base e da lateral da pirâmide, calcule a área lateral, da base e a total deste poliedro?

## 2.2 Geometria molecular

O universo é composto por bilhões de compostos químicos microscópicos ou, na maioria das vezes, esses compostos são tão pequeninos que não conseguimos vê-los nem com o auxílio de microscópicos. Aprendemos que tudo ao nosso redor é composto por átomos. Átomos, que são tão minúsculos, que os comparamos com grãos de areia.

Mas será, então, que uma reunião de átomos é um amontoado de grãos de areia, como uma bola? Ou será que cada reunião de átomos tem estrutura diferente?

Essa mesma pergunta deve ter sido feita pelos cientistas que formularam as primeiras teorias atômicas. E, provavelmente, devem ter concluído ali naquele momento, olhando ao redor e observando a natureza, que o mais lógico é que cada reunião de átomos daria origem a estrutura diferente. Essas estruturas formadas pelos compostos são estudadas observando a geometria que as moléculas tendem a formar.

Em química, aprendemos que toda a matéria é formada por átomos e que todo átomo tem um núcleo, em torno do qual “orbitam” os elétrons. Também aprendemos que esses átomos podem se ligar por meio de um compartilhamento de elétrons, formando uma molécula. Mas onde entra a matemática? Cada molécula tem **forma geométrica** determinada pela disposição dos núcleos dos átomos que a compõem (Paiva, 2009).

Os químicos utilizam a expressão **Geometria Molecular** para designar a maneira como os núcleos dos átomos que constituem a molécula se acham posicionados uns

em relação aos outros. Portanto, de acordo com Lira (2012): “A geometria molecular baseia-se na forma espacial que as moléculas assumem pelo arranjo dos átomos ligados”.

Mas, outra pergunta que surge é: será que podemos prever a geometria de uma molécula?

Os químicos ingleses Nevil Sidgwick e Hebert Powel, também fizeram esse mesmo questionamento e após diversas pesquisas, em 1940, sugeriram ser possível prever a forma aproximada de uma molécula com base no número de pares de elétrons na camada de valência do átomo central, no caso em que as moléculas contêm somente ligações simples. Este método de prever a geometria de uma molécula baseia-se na minimização da repulsão dos pares de elétrons, ou seja, a orientação dos orbitais deve ser tal que as distâncias entre elas sejam a maior possível.

Esse método foi estudado, reestruturado e divulgado pelo canadense Ronald Gillespie, em 1957. Ele criou uma ferramenta muito simples para prever a geometria das moléculas, tendo assim uma maior exatidão.

O método se baseia no modelo da **repulsão dos pares eletrônicos da camada de valência** (às vezes abreviado pela sigla de origem inglesa VSEPR, de **Vallence Shell Electron Pair Repulsion**), ou pela sigla TRPEV, que significa: **Teoria da Repulsão dos Pares Eletrônicos de Valência**. Essa teoria se baseia em um simples argumento de que os grupos de elétrons se repelem uns com os outros e a forma adotada pela molécula será aquela em que a repulsão dos grupos eletrônicos seja mínima (Gillespie, 1994).

De acordo com o modelo VSEPR o par de elétrons em uma camada de valência é organizado de forma que cada elétron se posicionará o mais longe possível do seu vizinho, isto ocorre devido a repulsão eletrostática entre eles. Muitos átomos têm oito elétrons ou quatro pares na camada de valência. Em outras palavras eles obedecem a regra do octeto. O arranjo de quatro pares eletrônicos é de forma tal a mantê-los o mais afastado uns dos outros, e isto se dá quando os pares eletrônicos estão localizados nos vértices de um tetraedro (figura 2.1).

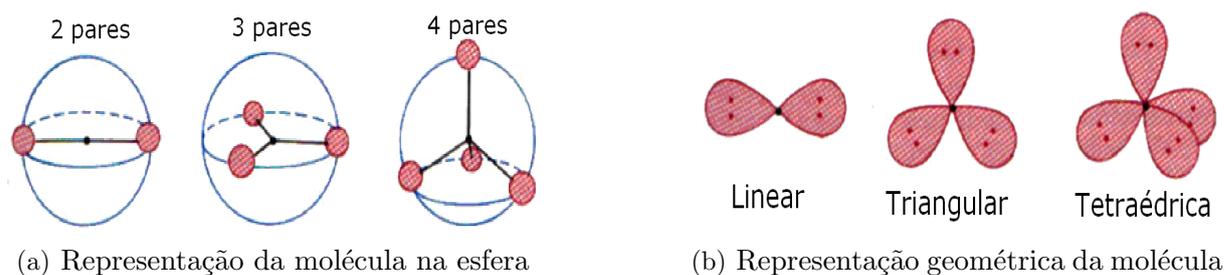


Figura 2.1: Representação eletrônica no modelo VSEPR

De acordo com Lira (2012):

A teoria da repulsão dos pares eletrônicos de valência (TRPEV) aponta que os pares eletrônicos (elétrons de valência, ligantes ou não) do átomo central se comportam como nuvens eletrônicas que se repelem e, portanto, tendem a manter a maior distância possível entre si. Mas, como as forças de repulsão eletrônica não são suficientes para que a ligação entre os átomos seja desfeita, essa distância é verificada no ângulo formado entre eles.

E, segundo Barbosa (2004):

Os átomos, apesar da neutralidade elétrica, são na sua maioria, espécies instáveis e reativas. Eles tendem a se combinar, formando os mais variados tipos de compostos. Nestes, os átomos são mantidos por meio de ligações químicas. Essas ligações envolvem sempre os elétrons da sua camada de valência (a mais externa).

As moléculas são formadas por átomos unidos por ligações covalentes e podem apresentar, na sua constituição, de dois a milhares de átomos. A disposição dos núcleos desses átomos irá determinar diferentes formas geométricas para as moléculas.

Uma ligação é covalente quando os átomos envolvidos compartilham um ou mais pares eletrônicos. Normalmente, a diferença de eletronegatividade entre os átomos que formam uma ligação covalente é pequena ou nula. Representamos normalmente um par de elétrons envolvidos em uma ligação covalente por meio de um traço (–), conforme ilustrado na figura 2.2.

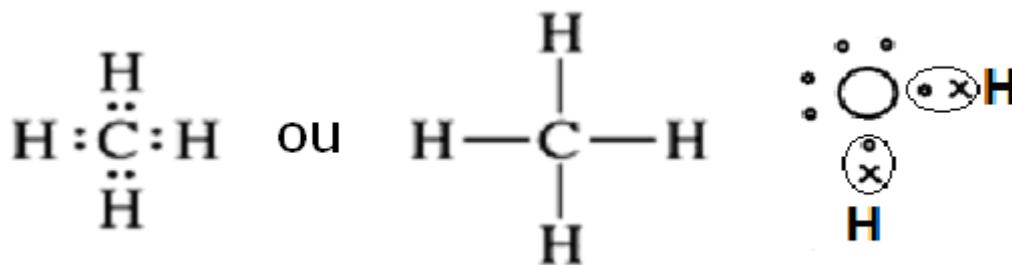


Figura 2.2: Representação da ligação covalente

Observando a figura 2.2, vemos que nem todos os elétrons de valência estão envolvidos nas ligações covalentes e esses elétrons são denominados **não ligantes**. Assim, ao escrevermos as fórmulas estruturais, os pares de elétrons não ligantes podem ou não ser representados, dependendo do que se deseja enfatizar.

Essas estruturas são denominadas **estruturas de Lewis**, em homenagem ao químico norte-americano Gilbert W. Lewis. Como podemos ver, o número total de elétrons na camada mais externa do hidrogênio (H) é 2 e nas do carbono (C), nitrogênio (N) e oxigênio (O) é 8, ou seja, formam ligações covalentes, de modo que se alcance a regra do *octeto*, ou seja, 8 elétrons no último nível ocupado, ou 2 elétrons, no caso do H.

A covalência requerida por um átomo para alcançar o octeto não deve ser necessariamente atingida apenas por meio de ligações simples (-), mas também por ligações duplas (=) ou tríplexes ( $\equiv$ ).

Por exemplo, as quatro ligações do carbono podem ser realizadas da seguinte forma:

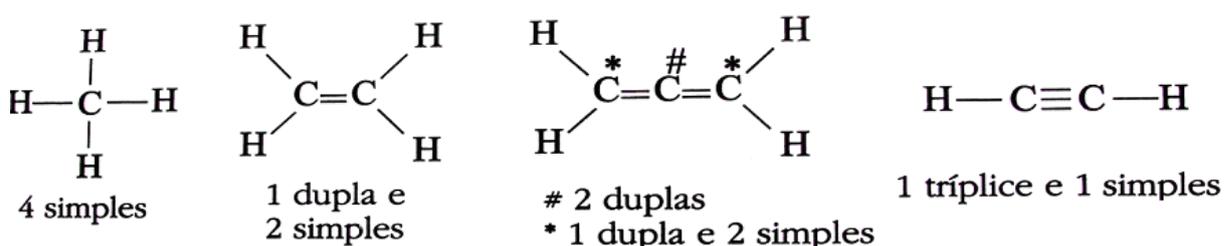


Figura 2.3: Possíveis ligações do carbono

Olhando a primeira molécula representada na figura 2.3 ( $\text{CH}_4$ ) temos a impressão, que ela geometricamente seria um quadrado. Mas isso é “culpa” da representação de **Lewis**, que apenas representa os compartilhamentos de pares de elétrons que foram feitos para que ambos os átomos alcançassem a regra do octeto. Para chegarmos à geometria que realmente a molécula do  $\text{CH}_4$  tem, temos que imaginá-la no espaço e colocar em prática a

teoria VSEPR, segundo a qual os elétrons se repelem uns com os outros e a forma adotada pela molécula será aquela em que a repulsão dos grupos eletrônicos seja mínima. Sendo assim, a molécula do  $\text{CH}_4$ , geometricamente é um tetraedro, como podemos ver na figura 2.4.

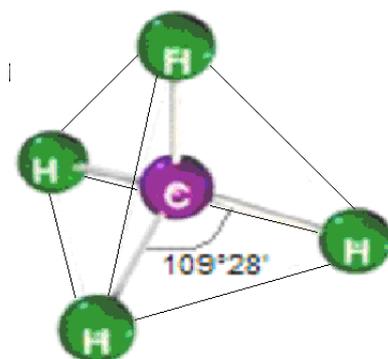


Figura 2.4:  $\text{CH}_4$  formando um tetraedro regular

Para prevermos a disposição geométrica de uma molécula, é necessário

- Escrever a fórmula estrutural, identificando o átomo central e a quantidade de átomos presentes na molécula.
- Identificar o número de ligações atômicas e se há elétrons livres no átomo central.
- Usar a teoria VSEPR.

Após termos seguido estes três passos, veremos que cada molécula possui a sua representação geométrica e algumas delas estão ilustradas na figura 2.5.

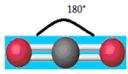
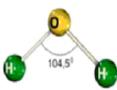
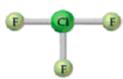
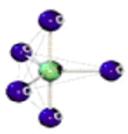
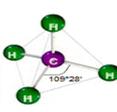
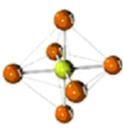
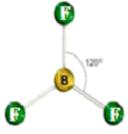
Molécula			
Disposição geométrica	Linear	Angular	Forma de T
Molécula			
Disposição geométrica	Bipiramidal	Tetraédrica	Octaédrica
Molécula			
Disposição geométrica	Triangular	Piramidal	Quadrado planar

Figura 2.5: Moléculas e suas geometrias

## 2.3 A geometria e as moléculas

Vamos analisar as moléculas e desvendar a matemática e a química que às envolvem, pois segundo Lana (2013):

A geometria é uma ferramenta preciosa para entendermos o universo. Ela nos ajuda tanto a descrever a grandeza cósmica das órbitas planetárias quanto nos auxilia na visão do inimaginavelmente pequeno das formas das moléculas. Um excelente lembrete de que as disciplinas do conhecimento podem ser separadas para melhor administração de currículos escolares, mas que todas devem ser integradas na construção individual do conhecimento.

## 2.4 Molécula de dióxido de carbono

É um gás importante para o reino vegetal, pois é essencial na realização do processo de fotossíntese das plantas (processo pelo qual as plantas transformam a energia solar em energia química).

Este gás é liberado no processo de respiração (na expiração) dos seres humanos e também na queima dos combustíveis fósseis (gasolina, diesel, querosene, carvão mineral e vegetal). A grande quantidade de dióxido de carbono na atmosfera é prejudicial ao planeta, pois é um dos gases que ocasiona o efeito estufa e, por consequência, o aquecimento global.

É usado comercialmente em algumas bebidas (carbonatadas) e também em extintores de incêndio. Se inalado, em grande quantidade, pode provocar irritações nas vias aéreas, vômitos, náuseas e até mesmo morte por asfixia (o que ocorre geralmente nos incêndios).

O **volume molar** do  $\text{CO}_2$  é 22,4 L/mol, pois é o volume ocupado por um mol de qualquer gás, a uma determinada pressão e temperatura, ou seja, o volume é diretamente proporcional ao seu número de mols de um gás. Este valor é resultado de experimentos feitos em Condições Normais de Temperatura e Pressão (CNTP) – 1 atm e 273 K e segue a Hipótese de Avogadro (criada em 1811 por Amedeo Avogadro), onde volumes iguais de diferentes gases, a uma mesma temperatura e pressão, possuem mesmo número de mols.

Pode ser determinado pela equação de Clapeyron. Nas Condições Normais de Temperatura e Pressão (CNTP), por exemplo, pode ser assim calculado:

Equação de Clapeyron:  $P.V = n.R.T$ , onde:

Volume (V) =  $x$  litros (L)

Pressão (P) = 1 atmosfera (atm)

Quantidade de matéria (n) = 1 molécula (mol)

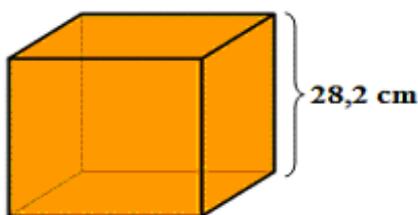
Constante universal dos gases (R) =  $0,082 \text{ atm.L.mol}^{-1}.\text{K}^{-1}$

Temperatura (T) = 273 K (Kelvin)

$P.V = n.R.T \Rightarrow 1 \text{ atm} \cdot V = 1 \text{ mol} \cdot 0,082 \text{ atm.L. mol}^{-1}.\text{K}^{-1} \cdot 273 \text{ K} \Rightarrow V = 22,4$

L.

O volume de 22,4 L corresponderia ao volume de um cubo com 28,2 cm de aresta,



pois,  $V_{cubo} = a^3 = (28,2)^3 = 22425,768 \text{ cm}^3$  e como sabemos:

$1\text{m} = 100\text{cm} \Rightarrow 1\text{m}.1\text{m}.1\text{m} = 100\text{cm}.100\text{cm}.100\text{cm} \Rightarrow 1\text{m}^3 = 1000000 \text{ cm}^3 \Rightarrow 1\text{m}^3 = 1000 \text{ L}$

daí, teremos:  $1000000 \text{ cm}^3 = 1000\text{L}$

Usando regra de três simples, obtemos:

Figura 2.6: Cubo de volume 22,4 L.

$$\left. \begin{array}{l} 1000000 \text{ cm}^3 = 1000 \text{ L} \\ 22425,768 \text{ cm}^3 = x \text{ L} \end{array} \right\} \Rightarrow x \approx 22,4 \text{ L}$$

Portanto,  $V_{cubo} = 22,4\text{L}$

De acordo com Nobrega et al. (2007):

O fato de quantidades iguais de moléculas (1 mol), embora tendo massas diferentes, ocuparem o mesmo volume no estado gasoso se deve à distância entre as partículas, que é aproximadamente mil vezes maior que o tamanho de cada partícula. Isso significa que o tamanho e, conseqüentemente, a massa da partícula não interferem no volume ocupado pelo gás, que, de maneira análoga ao átomo, apresenta grande vazão de matéria.

A massa molecular (MM) do  $\text{CO}_2$  é 44g/mol, pois ela é a soma das massas atômicas dos átomos que compõem esta molécula.

O dióxido de carbono, também conhecido como gás carbônico, é uma substância química formada por dois átomos de oxigênio (O) e um de carbono (C), unidos por ligações covalentes. Sua fórmula química é  $\text{CO}_2$ .

Tabela 2.9: Composição química do  $\text{CO}_2$

Elemento químico	Carbono	Oxigênio
Símbolo	C	O
Número atômico (Z) $Z = p$	6	8
Número de Massa (A) $A = p + n$	12	16
Número de prótons (p)	6	8
Número de elétrons (e)	6	8
Número de nêutrons (n) $n = A - Z$	6	8
Camada de valência	4	6
Família	4A - Família do Carbono	6A - Família dos Calcogênios
Período	2°	2°
Grupo	14	16

O  $\text{CO}_2$  tem fórmula estrutural:  $\text{O} = \text{C} = \text{O}$

Note que o átomo de carbono estabelece duas duplas ligações, uma dupla ligação com cada átomo de oxigênio. A molécula de  $\text{CO}_2$  também pode ser representada na forma:  
:  $\ddot{\text{O}}$  :: C ::  $\ddot{\text{O}}$  :

Se a molécula possui duas duplas ligações covalentes e não possui elétrons livre no átomo central, a molécula assume a disposição **geométrica linear**, conforme a figura 2.7.



Figura 2.7: Disposição geométrica da molécula de  $\text{CO}_2$ .

Vale também ressaltar que a geometria linear acontece em toda molécula biatômica (que possui dois átomos) ou em toda molécula em que o átomo central possui no máximo duas nuvens eletrônicas em sua camada de valência. Uma nuvem eletrônica pode ser representada por uma ligação simples, dupla, tripla ou mesmo por um par de elétrons que não estão a fazer ligação química.

## 2.5 Retas, semirretas e segmentos de reta

A seguir apresentamos os conceitos essenciais associados à reta.

### 2.5.1 Retas

A reta é formada por infinitos pontos que estão alinhados. Ela é ilimitada nos dois sentidos. Quando construímos uma reta devemos utilizar letras minúsculas para representá-la, como pode ser observado na figura 2.8.



Figura 2.8: Representação geométrica de uma reta  $r$ .

Vale ressaltar um importante postulado da geometria euclidiana que afirma “Dois pontos distintos determinam uma reta”.

Uma reta pode ser construída em três posições relativas no plano, conforme a figura 2.9, a saber: horizontal ( $h$ ), vertical ( $v$ ) ou inclinada ( $i$ ).

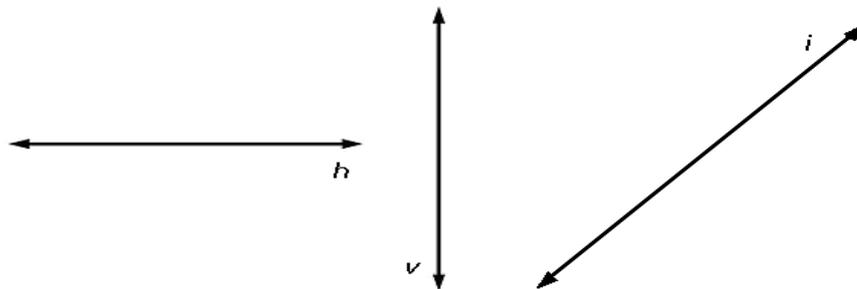


Figura 2.9: Posições relativas de uma reta no plano.

Duas ou mais retas coplanares podem ter as seguintes posições:

**Concorrentes** – Duas retas são concorrentes se, e somente se, têm um único ponto em comum (ver figura 2.10).

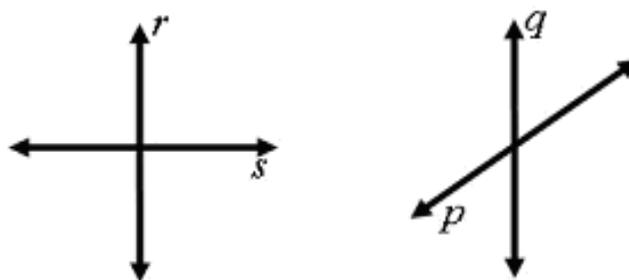


Figura 2.10: Exemplos de retas concorrentes.

**Paralelas** – Duas retas coplanares são paralelas se, e somente se, não têm ponto em comum ou têm todos os seus pontos em comum.

Vejamos:

-  $r$  e  $s$  são retas **paralelas distintas**, pois  $r // s$  e  $r \neq s$ , conforme pode ser visto na figura 2.11.

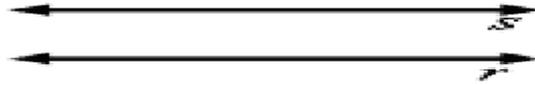


Figura 2.11: Exemplo de duas retas paralelas.

-  $r$  e  $s$  são retas **paralelas coincidentes**, pois  $r // s$  e  $r \equiv s$

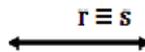


Figura 2.12: Exemplo de duas retas coincidentes.

**Observação:** O símbolo  $//$  foi usado para indicar paralelismo e os símbolos  $\equiv$  e  $\neq$  são lidos como “coincide” e “distinto”, respectivamente.

### 2.5.1.1 Semirreta

A semirreta possui origem, mas é ilimitada no outro sentido, isto é, possui início, mas não tem fim (ver representação na figura 2.13).

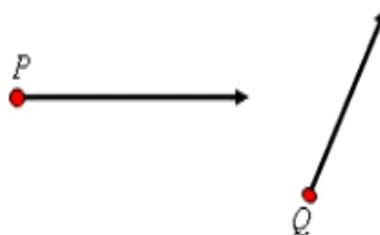


Figura 2.13: Representação geométrica de semirretas.

### 2.5.1.2 Segmento de Reta

De acordo com Paiva (1996): “Dados dois pontos distintos A e B, chama-se “segmento de reta de extremos A e B” a reunião do conjunto  $\{A, B\}$  com o conjunto dos pontos entre A e B”.

Sendo assim, o segmento de reta é limitado por dois pontos da reta, conforme pode ser visto na figura 2.14



Figura 2.14: Representação de segmentos de reta.

A parte entre os pontos A e B é chamado de segmento de reta. Veja mais exemplos de segmentos de reta na figura 2.15.

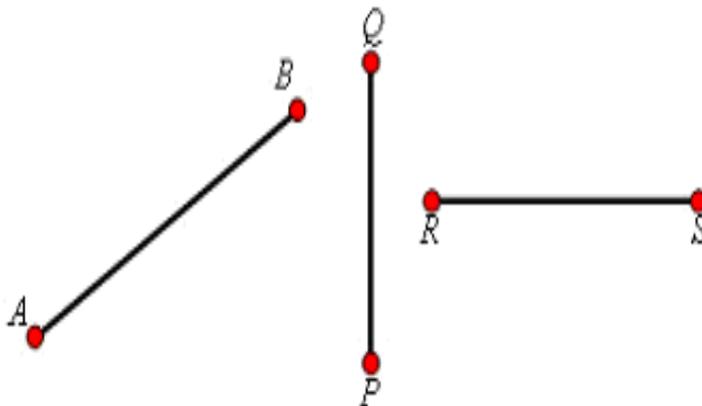


Figura 2.15: Exemplos de segmentos de reta.

Segmentos de reta que possuem apenas um extremo em comum são chamados de **segmentos consecutivos**.

Segmentos de reta contidos em uma mesma reta são chamados de **segmentos colineares**.

Analisando matematicamente a geometria da molécula de  $\text{CO}_2$ , observamos que:

- As ligações duplas na sua fórmula estrutural são representadas por segmentos de retas paralelas, pois conforme nos diz Diniz e Smole (2005): “duas retas são paralelas distintas, se são coplanares e não têm ponto comum”, também, podem ser classificados como **segmentos consecutivos e colineares**, pois OC e CO têm extremidades coincidentes e estão numa mesma reta.
- O ângulo da molécula é um ângulo de  $180^\circ$ , chamado de ângulo raso, que é a metade de uma circunferência (ver figura 2.16).

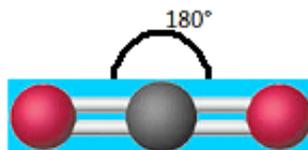


Figura 2.16: Representação angular da molécula de CO<sub>2</sub>.

De acordo com Dolce e Pompeo (2005): “ângulo é a reunião de duas semirretas de mesma origem”.

## 2.5.2 Classificação dos Ângulos

Os ângulos podem ser classificados em:

**Ângulo Raso:** vale  $180^\circ$  e é formado por duas semirretas opostas que têm a mesma origem (ver figura 2.17).

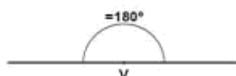


Figura 2.17: Representação geométrica do ângulo raso.

**Ângulo Reto:** vale  $90^\circ$  e é a metade do ângulo raso (figura 2.18).

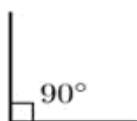


Figura 2.18: Representação geométrica do ângulo reto.

**Ângulo Agudo:** ângulo menor que o ângulo reto, ou seja, menor que  $90^\circ$  e maior que  $0^\circ$  ( $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ );

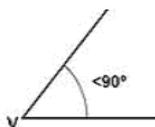


Figura 2.19: Representação geométrica do ângulo agudo.

**Ângulo Obtuso:** ângulo maior que o ângulo reto e menor que o ângulo raso, ou seja, maior que  $90^\circ$  e menor que  $180^\circ$  ( $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ );

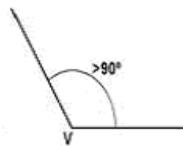


Figura 2.20: Representação geométrica do ângulo obtuso.

### 2.5.2.1 Demonstrando o ângulo do $\text{CO}_2$

O ângulo desta molécula pode ser demonstrado assim:

Construa uma circunferência como mostrada na figura 2.21;

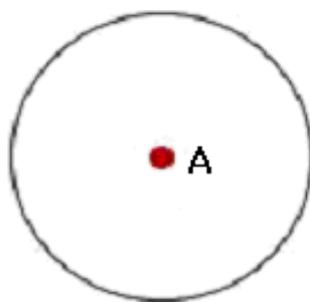


Figura 2.21: Circunferência de centro A.

Divida a circunferência ao meio, ou seja, trace uma reta de uma extremidade à outra da circunferência passando pelo centro (fig.2.22) e como sabemos que ela mede  $360^\circ$ , quando a dividimos ao meio, estamos dividindo  $360^\circ$  por dois, que é igual a  $180^\circ$ , assim concluímos que a molécula do  $\text{CO}_2$  é linear e tem ângulo igual a  $180^\circ$ .

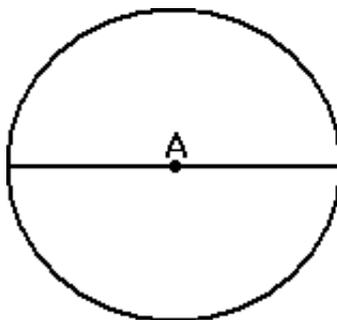
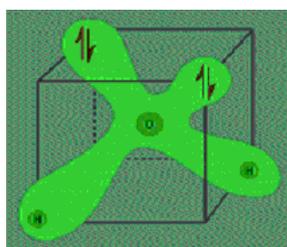


Figura 2.22: Circunferência dividida ao meio

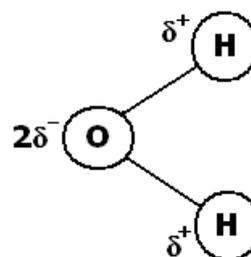
## 2.6 Molécula da água

A água é um composto molecular, e em 1 litro de água existem mais de  $3 \times 10^{25}$  moléculas. Cada molécula é formada por um átomo de oxigênio (O) e dois átomos de hidrogênio (H), unidos por ligações covalentes. Esta ligação existe graças à atração existente entre os elétrons de um átomo e o núcleo do outro, e vice-versa.

O ângulo entre as duas ligações O-H é de  $104,5^\circ$ . O ângulo esperado seria de  $109^\circ$ , uma geometria tetraédrica; a repulsão entre estes pares eletrônicos, entretanto, pode provocar este pequeno desvio (ver figura 2.23).



(a) Representação da molécula da água.



(b) Representação atômica da água.

Figura 2.23: Diferentes representações da molécula da água.

A distância O-H (o comprimento da ligação) é de 95,7 pm ( $1 \text{ pm} = 1 \times 10^{-12} \text{ m}$ ). Os elétrons que formam os orbitais moleculares, na água, não são igualmente compartilhados entre os átomos: o oxigênio é mais eletro-negativo - exerce uma maior atração sobre os elétrons. A consequência é uma distribuição eletrônica heterogênea na molécula, resultando uma densidade de carga negativa (-) sobre o átomo de oxigênio e densidades de carga positiva (+) sobre os átomos de hidrogênio, conforme figura 2.23(b).

Isto revela a importância do ângulo da ligação nas propriedades da água: se a molécula fosse linear (ângulo =  $180^\circ$ ) ela não seria um líquido à temperatura ambiente; mesmo que fosse, não seríamos capazes de dissolver sal ou açúcar nela. Por outro lado, ela seria miscível com azeite, gasolina, gorduras... E, ainda, não seríamos capazes de aquecê-la no forno de micro-ondas.

A água é, sem dúvida, o mais comum e mais importante de todos os compostos. Graças às propriedades da água, a vida foi capaz de surgir e se desenvolver em nosso planeta. Estas propriedades são extremamente peculiares: a água sólida (gelo) é menos densa do que o líquido - por esta razão, o gelo bóia sobre a água líquida. Embora extremamente trivial, é exatamente o oposto do observado na grande maioria das substâncias. E, graças a esta habilidade, os peixes e plantas de lagos e rios que congelam, no inverno, não morrem, pois a capa de gelo que se forma sobre o lago funciona como uma barreira de proteção contra o frio. Se o gelo fosse mais denso, os peixes teriam um piso congelado, embaixo, e acima uma atmosfera fria. Uma situação muito mais desfavorável!

O simples fato da água ser líquida à temperatura ambiente já é completamente intrigante. Todos os compostos análogos à molécula  $H_2O$  são gases. Se não conhecêssemos a água, certamente iríamos deduzir que ela seria um gás, e iria se tornar líquido somente em temperaturas muito inferiores a  $0^\circ C$ . Isto é extremamente importante para que ela possa ser usada por organismos vivos; além de promover a vida diretamente, ainda serve como meio de transporte, para recreação, e como um habitat para plantas e animais. Como é facilmente transformada em vapor (gás), pode ser transferida, pela atmosfera, dos oceanos até os continentes, onde pode precipitar sob a forma de chuva.

A água é tão importante, que os gregos antigos consideravam-na como sendo um dos elementos fundamentais da matéria. Aristóteles achava que a água fosse um dos quatro elementos fundamentais. Por mais de 2000 anos ainda pensou-se que a água era um elemento; somente no século 18 é que experimentos evidenciaram que a água era um composto formado por hidrogênio e oxigênio.

Cerca de 97% de toda a água encontrada na superfície de nosso planeta está nos oceanos. Como a população dos continentes está aumentando, a demanda por água fresca cresce a cada ano. Processos de purificação e reciclagem da água tornam-se cada vez mais importantes. A água exibe uma capacidade de dissolver compostos, tanto iônicos como moleculares, como nenhum outro líquido exibe (Dept<sup>o</sup> Química, 2012).

A fórmula estrutural e a eletrônica da água estão apresentadas na figura 2.24.

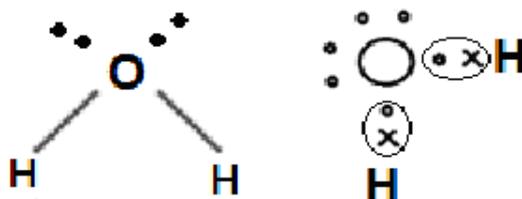


Figura 2.24: Representação estrutural e eletrônica da molécula da água.

Como a molécula da água possui duas ligações simples e possui elétrons livres no átomo central, a molécula assume a disposição geométrica angular, conforme a figura 2.25.

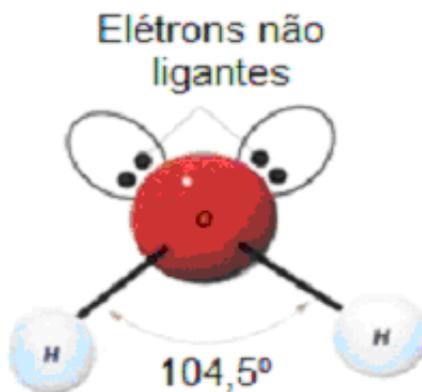


Figura 2.25: Disposição atômica da molécula da água.

Como vimos na molécula da água ( $H_2O$ ), os átomos de hidrogênio se posicionam formando ângulos de  $104,5^\circ$  entre as duas ligações O-H. Este ângulo é obtuso, uma vez que  $90^\circ < \alpha < 180^\circ$  e ele é formado por dois segmentos de retas que possuem um vértice comum, ou seja, os átomos de H estão ligados ao átomo de O, que neste caso exerce a função de vértice do ângulo.

O ângulo da molécula de água é encontrado experimentalmente e, conseqüentemente, tentar demonstrá-la matematicamente é um trabalho árduo e desnecessário.

## 2.7 Molécula de Trifluoreto de Boro

O trifluoreto de boro é um gás altamente tóxico, altamente irritante, corrosivo na presença de umidade, incolor, não inflamável, com odor desagradável e sufocante. Ele é mais denso que o ar atmosférico e reage espontaneamente em contato com a umidade do ar atmosférico, formando uma névoa branca e espessa. É altamente solúvel em água e se hidroliza rapidamente na presença de ar úmido ou água formando ácido fluorídrico (HF) que é extremamente corrosivo.

O gás trifluoreto de boro (enriquecido em mais de 90% de boro-10) é produzido em grandes quantidades para detectores de radiação gasosas, aplicados na monitorização dos níveis de radiação na atmosfera terrestre e no espaço. Algumas organizações usam estes dispositivos para assegurar a melhor localização das perfurações petrolíferas. Também é um importante catalisador industrial em muitas reações orgânicas, dentre os quais são exemplos algumas polimerizações. Tem um papel importante nas reações de eletrodeposição do níquel, do chumbo e do estanho.

Acima de 1,5 ppm sua presença no ar é imediatamente detectada devido ao seu odor irritante e penetrante. A exposição ao  $\text{BF}_3$  em concentrações baixas causa irritação dos olhos, nariz e garganta, tosse, dificuldades respiratórias e coceira na pele. Exposições mais sérias podem ocasionar forte irritação dos olhos e pálpebras, inflamação e congestão dos sistemas respiratório e cardiovascular. A inalação de ar contaminado com 50 ppm de  $\text{BF}_3$ , durante cerca de 30 a 60 minutos pode ser fatal. O contato da pele com o  $\text{BF}_3$  líquido ou vapor pode causar queimaduras graves.

Qualquer pessoa que tenha sido vitimada por  $\text{BF}_3$ , ainda que a exposições aparentemente de menor importância, devem ser enviadas a um médico logo após os primeiros socorros serem ministrados (Gama Gases, 2013).

O trifluoreto de boro ( $\text{BF}_3$ ) é composto por 3 átomos de Flúor (F) e um átomo de Boro (B), conforme apresentado na tabela 2.10.

Tabela 2.10: Composição química do trifluoreto de boro.

Elemento químico	Boro	Flúor
Símbolo	B	F
Número atômico (Z)	5	9
Z = p		
Número de Massa (A)	11	19
A = p + n		
Número de prótons (p)	5	9
Número de elétrons (e)	5	9
Número de nêutrons (n)	6	10
n = A - Z		
Camada de valência	3	7
Família	3A - Família do Boro	7A - Família dos Halogênios
Período	2 °	2 °
Grupo	13	17

O  $\text{BF}_3$  tem fórmula estrutural de acordo com a figura 2.26:

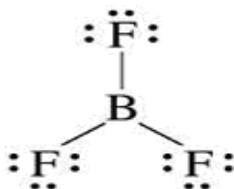
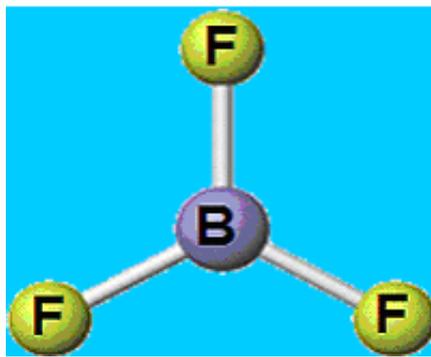


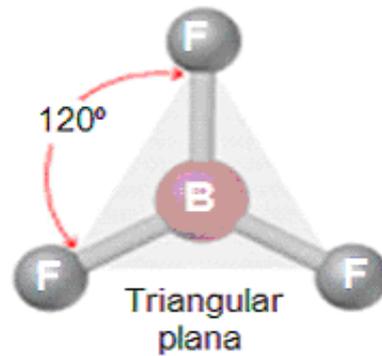
Figura 2.26: Fórmula estrutural do trifluoreto de boro.

Como vemos o átomo de boro forma três ligações simples, uma com cada átomo de flúor e como não possui elétrons livres a sua geometria molecular é triangular plana ou trigonal plana, conforme a figura 2.27(a).

Podemos ver ainda que as ligações simples são representadas por retas, as quais unem o átomo central Boro (B) com os outros átomos de Fluor (F) e pela teoria VESPR, podemos determinar o ângulo formado por estes átomos como sendo um ângulo de  $120^\circ$ , pois o triângulo formado ao ligar os três átomos de F é equilátero, ou seja, cada ângulo possui  $60^\circ$ , logo para demonstrar esse ângulo, basta encontrar o centro desse triângulo e usar as propriedades dos triângulos que teremos três ângulos centrais de  $120^\circ$ , como mostram as figuras 2.27(a) e 2.27(b).



(a) Geometria molecular do  $\text{BF}_3$ .



(b) Representação molecular do  $\text{BF}_3$ .

Figura 2.27: Geometria da molécula do trifluoreto de boro.

### 2.7.1 Triângulo

O triângulo é um polígono com três lados, conforme a figura 2.28

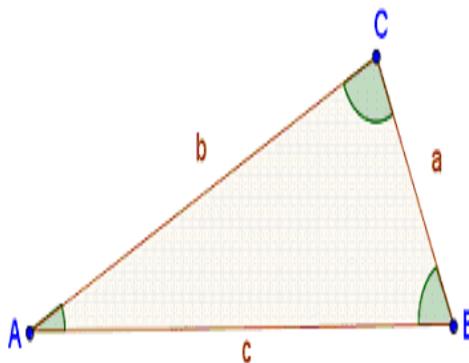


Figura 2.28: Representação geométrica do triângulo.

Os três pontos não colineares são os vértices do triângulo: A, B e C. As linhas que os unem são os lados do triângulo:  $[AB]$ ,  $[BC]$  e  $[AC]$ . Um vértice e o lado (oposto) que o não contém dizem-se opostos: o lado  $a$  é oposto a A. O lado  $b$  é oposto a B e o lado  $c$  é oposto a C.

Os ângulos  $\angle A = \widehat{BAC}$ ,  $\angle B = \widehat{ABC}$  e  $\angle C = \widehat{ACB}$  (ou suas medidas  $\hat{A} = \widehat{BAC}$ ,  $\hat{B} = \widehat{ABC}$ , e  $\hat{C} = \widehat{ACB}$ ) são os ângulos internos do triângulo.

Há ainda a considerar os ângulos formados por cada lado e pelo prolongamento do outro lado, são os ângulos externos do triângulo:  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  (ver figura 2.29).

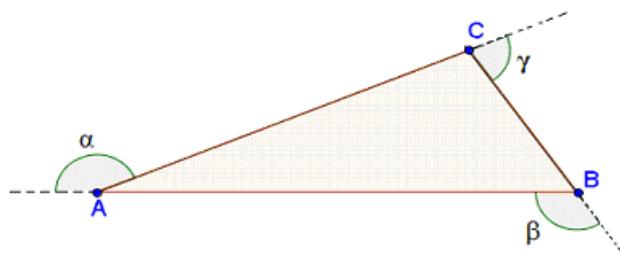
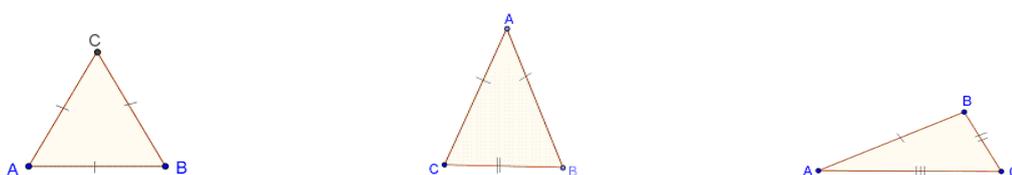


Figura 2.29: Ângulos externos de um triângulo.

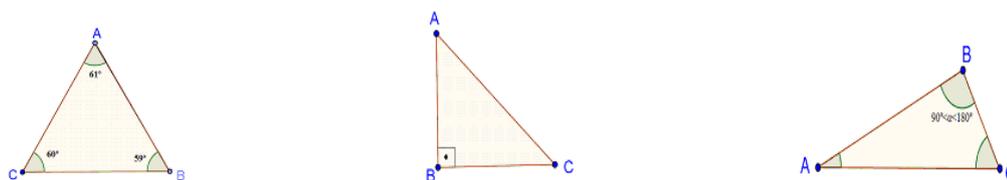
Com relação aos lados, os triângulos se classificam de acordo com o quadro da figura 2.30.



3 lados congruentes é o triângulo equilátero	2 lados congruentes e 1 distinto é o triângulo isósceles	3 lados distintos é o triângulo escaleno
--	--	--

Figura 2.30: Classificação dos triângulos em relação aos lados.

Quanto aos ângulos, a classificação é feita de acordo com a figura 2.31:



3 ângulos agudos é o triângulo acutângulo	1 ângulo reto é o triângulo retângulo	1 ângulo obtuso é o triângulo obtusângulo
---	---------------------------------------	---

Figura 2.31: Classificação do triângulo de acordo com seus ângulos.

A soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo é igual a  $180^\circ$ , ou seja, um ângulo raso (ver figura 2.32).

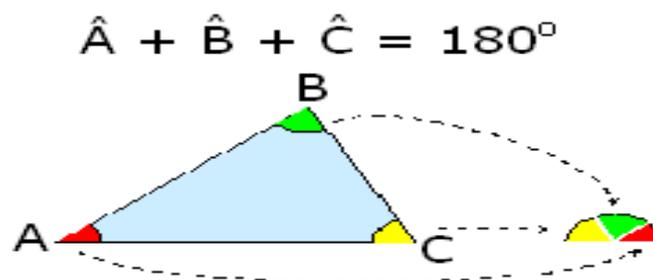


Figura 2.32: Soma dos ângulos internos de um triângulo.

## 2.7.2 Área e perímetro de um triângulo

Conforme Dolce e Pompeo (2005): “Todo triângulo é equivalente à metade de um paralelogramo de base congruente à do triângulo”. Sendo assim, a área (A) de um triângulo é a metade da área do paralelogramo (ver figura 2.33).

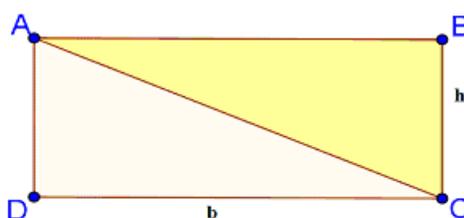


Figura 2.33: Paralelogramo ABCD subdividido em dois triângulos: ABC e ADC

Como a área de um paralelogramo é igual ao produto entre a sua altura ( $h$ ) e a sua base ( $b$ ), ou seja,  $A_{\text{paralelogramo}} = h \cdot b$ , temos que a área de um triângulo é igual à metade do produto entre a altura e a base de um triângulo, ou seja,  $A_{\text{triângulo}} = \frac{b \cdot h}{2}$ .

No triângulo equilátero de lado  $a$  e altura  $h = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow A = \frac{1}{2}a \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow A = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ .

Num polígono qualquer o perímetro é dado pela soma das medidas de todas as suas arestas.

## 2.7.3 Pontos notáveis de um triângulo

A seguir, descrevemos os pontos notáveis de um triângulo qualquer, caracterizando suas propriedades.

### 2.7.3.1 Circuncentro

A mediatriz do lado de um triângulo é uma reta perpendicular ao lado no seu ponto médio.

Se traçarmos as mediatrizes dos três lados de um triângulo, elas intersectam-se num ponto  $O$ , chamado **circuncentro (O)**.

Este ponto está equidistante dos três vértices do triângulo e é o centro duma circunferência circunscrita ao mesmo, conforme pode ser visto na figura 2.34.

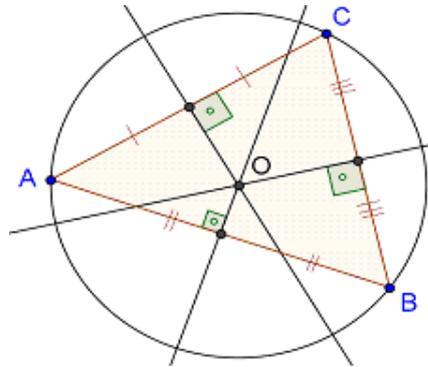


Figura 2.34: Construção geométrica do circuncentro.

Portanto, de acordo com Dolce e Pompeo (2005): “As mediatrizes dos lados de um triângulo interceptam-se num mesmo ponto que está a igual distância dos vértices do triângulo”.

### 2.7.3.2 Incentro

A bissetriz de um ângulo interno de um triângulo é a semirreta interior do ângulo que o divide em dois ângulos geometricamente iguais.

As bissetrizes dos ângulos internos de um triângulo intersectam-se num ponto chamado **incentro (I)**, que está equidistante dos lados do mencionado triângulo e é o centro de uma circunferência inscrita no mesmo (ver figura 2.35).

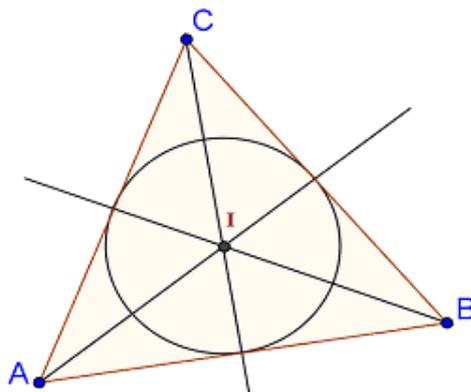


Figura 2.35: Construção geométrica do incentro

Sendo assim, conforme nos diz Dolce e Pompeo (2005): “As três bissetrizes internas de um triângulo interceptam-se num mesmo ponto que está a igual distância dos lados do triângulo”.

### 2.7.3.3 Ortocentro

A altura de um triângulo é o segmento perpendicular compreendido entre o vértice e o lado oposto.

Um triângulo admite três alturas, as quais são:  $H_a$ ,  $H_b$  e  $H_c$  e intersectam-se num ponto **H**, chamado **ortocentro** – ver figura 2.36.

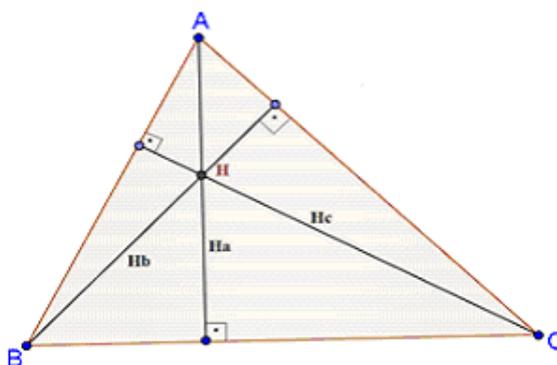


Figura 2.36: Construção geométrica do ortocentro

Portanto, de acordo com Dolce e Pompeo (2005): “As três retas suportes das alturas de um triângulo interceptam-se num mesmo ponto”.

### 2.7.3.4 Baricentro

A mediana de um triângulo é o segmento de reta que une um vértice e o ponto médio do lado oposto.

Um triângulo admite três medianas, as quais interceptam-se num ponto chamado **baricentro (G)** que dista dois terços do vértice da mediana correspondente, conforme a figura 2.37.

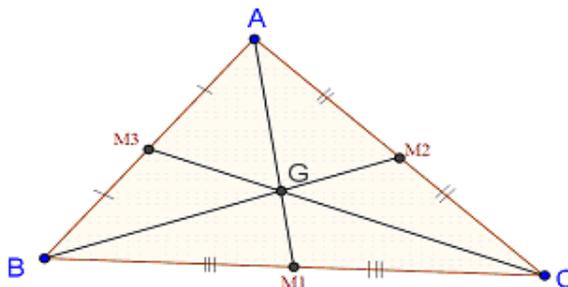


Figura 2.37: Construção geométrica do baricentro

Sendo assim, de acordo com Dolce e Pompeo (2005): “As três medianas de um triângulo interceptam-se num mesmo ponto que divide cada mediana em duas partes tais que a parte que contém o vértice é o dobro da outra”.

O baricentro é o centro de gravidade do triângulo. Isto quer dizer que, se suspendermos um triângulo de material homogêneo pelo seu baricentro, ele fica em equilíbrio.

#### 2.7.4 Demonstração do ângulo do $\text{BF}_3$

Diante de todas as propriedades dos triângulos, podemos destacar que há duas formas básicas para demonstrar o ângulo de  $120^\circ$  da molécula do  $\text{BF}_3$ :

- 1<sup>a</sup> – Dividir o átomo central em três partes, pois ele representa uma circunferência e como uma circunferência mede  $360^\circ$ , dividindo-a em três, teremos  $120^\circ$ .
- 2<sup>a</sup> – Encontrar o incentro desse triângulo.
  - Encontrar as suas bissetrizes, pois o encontro delas é o centro de uma circunferência e o raio é a medida entre o centro e o ponto médio dos lados desse triângulo.
  - Apagar as retas que ligam o centro ao ponto médio dos lados, pois assim teremos o triângulo maior subdividido em três triângulos menores e iguais.
  - Esses três novos triângulos formados serão isósceles, cujo ângulo maior está no vértice do incentro.

- Os ângulos menores desses triângulos serão de  $30^\circ$ , pois cada um deles é uma parte da bissetriz que foi baixada, que era  $60^\circ$ .

Como a soma dos ângulos internos de um triângulo é  $180^\circ$ , basta fazer a diferença entre a soma dos ângulos internos de um triângulo e soma dos seus dois ângulos menores, ou seja,  $180^\circ - (30^\circ + 30^\circ) = 120^\circ$ .

## 2.8 Molécula da Amônia

A **amônia** ou **amoníaco** ( $\text{NH}_3$ ) é uma molécula formada por um átomo de nitrogênio ligado à três de hidrogênio.

À temperatura ambiente e pressão atmosférica, a amônia é um **gás incolor**, tóxico e corrosivo na presença de umidade. O que o torna altamente perigoso em caso de inalação. É também inflamável, de um odor muito irritante (em concentrações não muito elevadas, tem semelhança ao odor de urina) e solúvel em água. Transporta-se esse gás na sua forma liquefeita dentro de cilindros de aço sob muita pressão.

Utilizada em compostos de agente refrigerante, na preparação de fertilizantes como **nitrato de amônia**, superfosfatos e nitrogenantes que são soluções de amônia e nitrato de amônia, sais de amônia e uréia. Na indústria petroquímica a amônia é utilizada como base para neutralizar ácidos provenientes do óleo cru a fim de proteger da corrosão os equipamentos pelos quais esse óleo vai passar. Largamente utilizada para a extração de metais como cobre, níquel e molibdênio de seus respectivos minérios (Lorena, 2012).

A molécula de amônia é composta por 3 átomos de hidrogênio e 1 átomo de nitrogênio, conforme apresentado na tabela 2.11

Tabela 2.11: Composição química da amônia.

Elemento químico	Hidrogênio	Nitrogênio
Símbolo	H	N
Número atômico (Z)	1	7
$Z = p$		
Número de Massa (A)	1	14
$A = p + n$		
Número de prótons (p)	1	7
Número de elétrons (e)	1	7
Número de nêutrons (n)	0	7
$n = A - Z$		
Camada de valência	1	5
Família	1A - Família dos Alcalinos	5A - Família do Nitrogênio
Período	1°	2°
Grupo	1	15

Como visto acima, o átomo de nitrogênio tem cinco elétrons de valência e, na molécula da amônia, está ligado por covalência a três átomos de hidrogênio, para completar as oito posições eletrônicas na camada externa. Isto deveria resultar numa geometria tetraédrica regular com ângulos de ligação de aproximadamente  $109,5^\circ$ , como podemos ver nas ilustrações da figura 2.38.

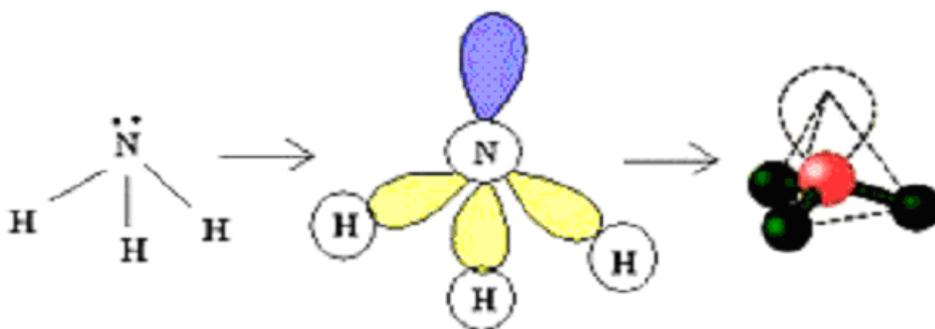


Figura 2.38: Ligações dos átomos da amônia.

Porém, os três átomos de H são repelidos pelo par de elétrons isolados do nitrogênio, modificando a geometria da molécula para uma forma piramidal de base triangular: o ângulo das ligações passa a ser aproximadamente  $107^\circ$ , com o átomo de nitrogênio no ápice e os de H nos vértices da base, conforme podemos ver na figura 2.39.

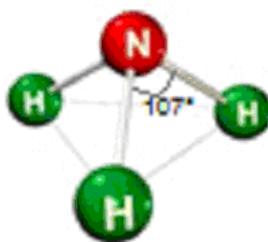


Figura 2.39: Ângulos da molécula da amônia.

A amônia tem geometria piramidal, ou seja, é uma figura espacial cujo formato é uma pirâmide de base triangular, onde de acordo com a figura abaixo, a distância entre os átomos de N e H é de 101,7 pm ( $1\text{pm} = 10^{-12}\text{m}$ ) e o ângulo é de  $107^\circ$ , ver figura 2.40.

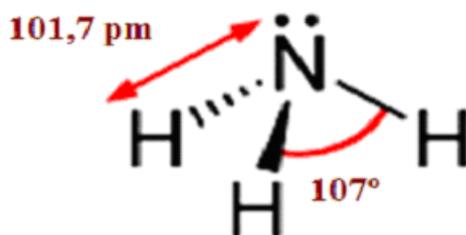


Figura 2.40: Medidas da molécula da amônia.

### 2.8.1 Pirâmide

De acordo com Paiva (2009):

No terceiro milênio antes da Era Cristã, os egípcios construíram monumentos para servir de tumbas aos seus faraós. Esses monumentos têm a forma de um poliedro chamado **pirâmide**. As pirâmides do Egito são monumentos de alvenaria construídos no Antigo Egito e elas são formadas por uma base quadrada de quatro faces triangulares que convergem para um vértice.



Figura 2.41: As pirâmides de Gizé.

Mas será que todas as pirâmides são iguais às do Egito?

A resposta é não, o conceito de pirâmide é mais amplo e vamos desvendá-lo agora.

Paiva (2009), define pirâmide assim:

Sejam um polígono convexo  $A_1A_2A_3\dots A_n$  contido em um plano  $\alpha$  e um ponto  $V$ , não pertencente a  $\alpha$ . Consideremos todos os segmentos de reta que possuem um extremo pertencente ao polígono e o outro extremo  $V$ . A reunião de todos esses segmentos de reta é um poliedro chamado pirâmide convexa limitada ou, simplesmente pirâmide (conforme figura 2.42).

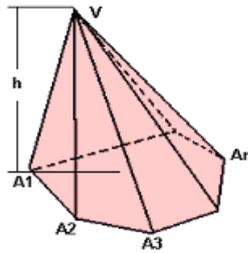


Figura 2.42: Representação geométrica de uma pirâmide de base  $A_1A_2A_3\dots A_n$ .

Na pirâmide representada na figura 2.43, temos que:

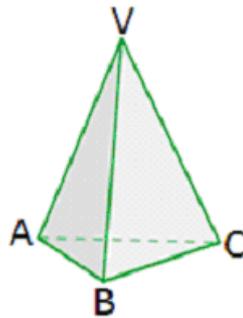


Figura 2.43: Representação geométrica de uma pirâmide de base triangular.

- O ponto  $V$  é chamado vértice da pirâmide.
- O polígono  $ABC$  é chamado de base da pirâmide, sendo  $A$ ,  $B$  e  $C$  os vértices da base.
- Os segmentos  $\overline{AB}$ ,  $\overline{BC}$  e  $\overline{CA}$  são as arestas da base.
- Os segmentos  $\overline{VA}$ ,  $\overline{VB}$  e  $\overline{VC}$  são as arestas laterais.
- Os triângulos  $VAB$ ,  $VBC$  e  $VCA$  são as faces laterais.

- A distância de  $V$  ao plano da base é a altura ( $h$ ) da pirâmide.

As pirâmides são classificadas de acordo com:

- O polígono da base:
  - **triangular**, se a base for um triângulo;
  - **quadrangular**, se a base for um quadrilátero;
  - **pentagonal**, se a base for um pentágono;
  - **hexagonal**, se a base for um hexágono;

e assim por diante.

- Posição de projeção ortogonal do vértice da pirâmide sobre a base:
  - **pirâmide reta**, se a projeção ortogonal do vértice coincide com o centro do polígono da base;
  - **pirâmide oblíqua**, se a projeção ortogonal do vértice não coincide com o centro do polígono da base.

De acordo com Mello (2005): “Uma pirâmide reta é classificada como pirâmide regular se sua base é uma superfície poligonal regular, ou como pirâmide não regular, caso contrário”.

- Em uma pirâmide regular:
  - as arestas laterais são congruentes e as faces laterais são triângulos isósceles congruentes;
  - o apótema do polígono regular da base é chamado apótema da base, que é o segmento que determina o raio da circunferência inscrita no polígono da base (seu comprimento será designado por  $m$ );
  - a altura de qualquer face lateral relativa à aresta da base é chamada de apótema lateral (seu comprimento será designado por  $g$ );
  - o raio da circunferência circunscrita ao polígono da base é chamado raio da base (será identificado por  $r$ ).

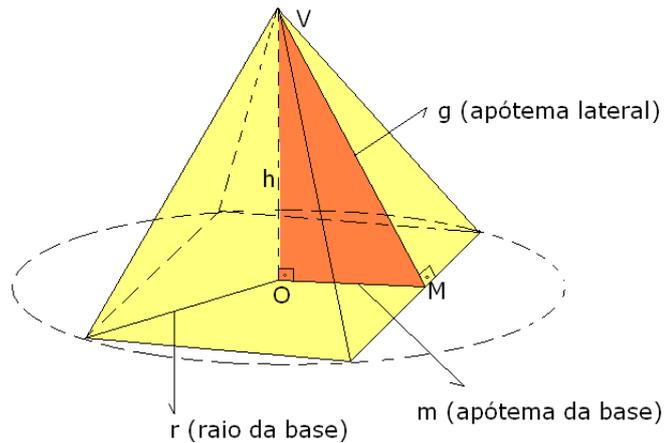


Figura 2.44: Elementos de uma pirâmide regular

- As pirâmides regulares apresentam algumas propriedades que decorrem do fato de serem pirâmides retas e de possuírem a base regular.
  - Observando a pirâmide abaixo, de altura  $h$ , aresta da base medindo  $\ell$  e arestas laterais medindo  $a$ , podemos deduzir, com base na figura 2.45 e usando o teorema de Pitágoras, temos que:

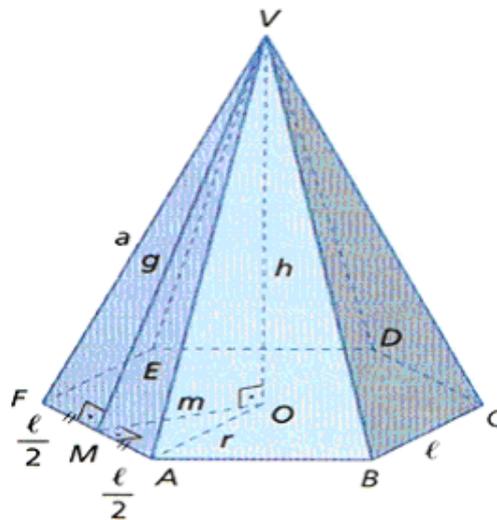


Figura 2.45: Relação entre os elementos de uma pirâmide regular

- no triângulo retângulo VOA, temos:  $a^2 = h^2 + r^2$ ;
- no triângulo retângulo MOA, temos:  $r^2 = m^2 + \left(\frac{\ell}{2}\right)^2$ ;
- no triângulo retângulo VMO, temos:  $g^2 = h^2 + m^2$
- no triângulo retângulo VMA, temos:  $a^2 = g^2 + \left(\frac{\ell}{2}\right)^2$ .

Além disso, há relações entre as medidas da aresta da base e as do apótema da base de algumas pirâmides regulares, apresentadas a seguir.

### 2.8.2 Base triangular (Triângulo equilátero)

Como o triângulo ABC é equilátero (ver figura 2.46), G é o baricentro; logo:  
 $m = \frac{1}{3}AM$  e  $BM = \frac{\ell}{2}$ .

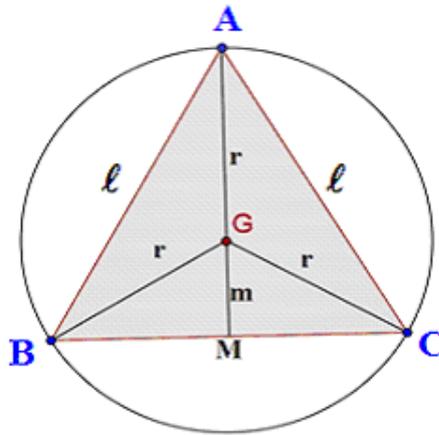


Figura 2.46: Triângulo equilátero inscrito numa circunferência de raio r.

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo AMB, teremos:

$$(AM)^2 = (AB)^2 - (BM)^2 \Rightarrow (AM)^2 = \ell^2 - \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 \Rightarrow (AM)^2 = \frac{3\ell^2}{4} \Rightarrow AM = \frac{\ell\sqrt{3}}{2},$$

daí segue que  $m = \frac{1}{3} \frac{\ell\sqrt{3}}{2} \therefore m = \frac{\ell\sqrt{3}}{6}$ .

Como  $m = \frac{1}{3} \cdot AM$  e  $AM = r + m$ , temos pela definição de baricentro que

$$r = 2m, \text{ logo, } m = \frac{r}{2}.$$

### 2.8.3 Base quadrada

Na figura 2.47, o triângulo OMC é semelhante ao triângulo ADC.

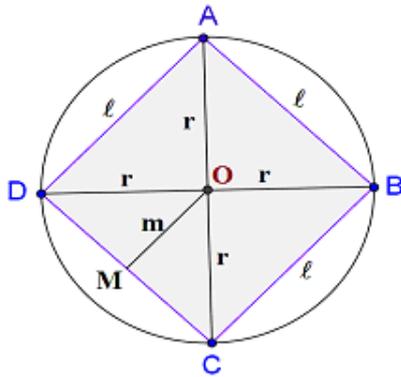


Figura 2.47: Quadrado inscrito numa circunferência de raio  $r$ .

Logo,  $\frac{OM}{AD} = \frac{MC}{DC} \Rightarrow \frac{m}{\ell} = \frac{\frac{\ell}{2}}{\ell} \Rightarrow m = \frac{\ell}{2}$ .

Como o triângulo OMC é retângulo em M, então temos:

$$r^2 = m^2 + \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 \Rightarrow r^2 = m^2 + m^2 \Rightarrow 2m^2 = r^2 \therefore m = \frac{r\sqrt{2}}{2}$$

### 2.8.4 Base hexagonal (regular)

Na figura 2.48, o triângulo OAB é equilátero

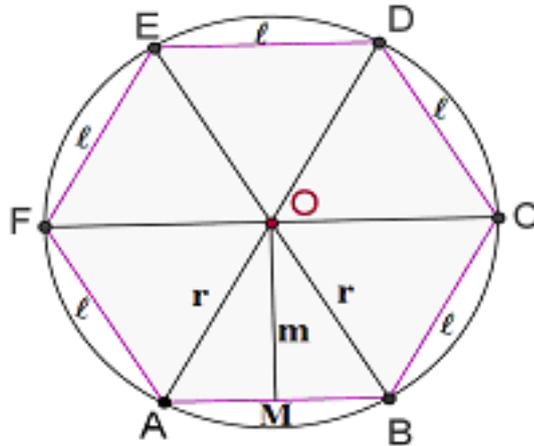


Figura 2.48: Representação de uma base hexagonal.

e  $\overline{OM}$  é a altura ( $m$ ), então  $AO = r = \ell$  e  $AM = \frac{\ell}{2}$ .

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo AMO, teremos:

$$(OM)^2 = (AO)^2 - (AM)^2 \Rightarrow m^2 = \ell^2 - \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 \Rightarrow m^2 = \frac{3\ell^2}{4} \Rightarrow m = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}$$

Por fim, como  $r = \ell$ , temos que  $m = \frac{r\sqrt{3}}{2}$ .

### 2.8.5 Área de uma pirâmide

De acordo com Iezzi et al. (2010): “A superfície total de uma pirâmide é a reunião do polígono de sua base com os triângulos que compõem sua superfície lateral”. Sendo assim, a área de uma pirâmide é a sua área total ( $A_t$ ), ou seja, é soma da área da base ( $A_b$ ) com a área de sua área lateral ( $A_\ell$ ):  $A_t = A_b + A_\ell$ , onde:

– **Área da base:** é a área da superfície do polígono que a compõe, então:

$A_b =$  área do polígono da base

– **Área lateral:** é a reunião das áreas de suas faces laterais (triângulos), então:

$A_\ell =$  soma das áreas das faces laterais

### 2.8.6 Volume de uma pirâmide

Antes de encontrarmos a fórmula para calcular o volume de uma pirâmide, vamos demonstrar duas propriedades delas.

- **1ª propriedade** – A razão entre a área  $S'$  de uma secção transversal de uma pirâmide feita a uma altura  $h'$  em relação ao vértice, e a área  $S$  da base desta pirâmide de altura  $h$  (ver figura 2.49) é  $\frac{S'}{S} = \left(\frac{h'}{h}\right)^2$

Considerando uma pirâmide de altura  $VO = h$ , cuja base tem área  $S$ . Seja uma secção transversal dessa pirâmide, de área  $S'$ , a uma distância  $VO' = h'$  do vértice, de acordo com a figura 2.49.

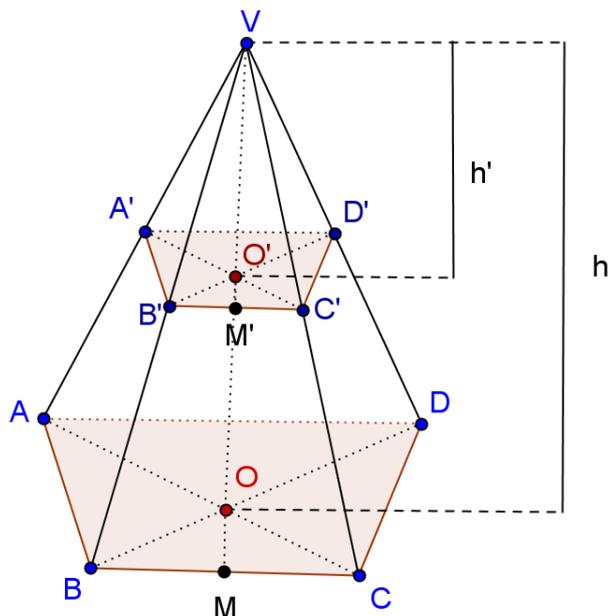


Figura 2.49: Pirâmide e sua secção transversal.

Vamos decompor a base da pirâmide e a secção transversal nos triângulos OAB, OBC, COD, etc. e O'A'B', O'B'C', C'O'D', etc., respectivamente.

Temos que:

$$- \overline{O'C'} \parallel \overline{OC} \Rightarrow \Delta VO'C' \sim \Delta VOC \Rightarrow \frac{VC'}{VC} = \frac{VO'}{VO} \Rightarrow \frac{VC'}{VC} = \frac{h'}{h}$$

$$- \overline{B'C'} \parallel \overline{BC} \Rightarrow \Delta VB'C' \sim \Delta VBC \Rightarrow \frac{B'C'}{BC} = \frac{VC'}{VC} = \frac{h'}{h}$$

$$\text{Com o mesmo raciocínio chegaremos a } \frac{O'M'}{OM} = \frac{h'}{h}$$

$$\text{Área do } \Delta OBC: S_{OBC} = \frac{BC \cdot OM}{2}$$

$$\text{Área do } \Delta O'B'C': S'_{O'B'C'} = \frac{B'C' \cdot O'M'}{2}$$

Fazendo a razão entre as duas áreas, temos:

$$\frac{S_{O'B'C'}}{S_{OBC}} = \frac{\frac{B'C' \cdot O'M'}{2}}{\frac{BC \cdot OM}{2}} = \frac{B'C'}{BC} \cdot \frac{O'M'}{OM} = \frac{h'}{h} \cdot \frac{h'}{h} \Rightarrow \frac{S_{O'B'C'}}{S_{OBC}} = \left(\frac{h'}{h}\right)^2.$$

Analogamente, é possível mostrar que:

$$\frac{S_{O'C'D'}}{S_{OCD}} = \frac{S_{O'D'A'}}{S_{ODA}} = \frac{S_{O'A'B'}}{S_{OAB}} = \left(\frac{h'}{h}\right)^2$$

Assim, temos que:

$$S = S_{OAB} + S_{OBC} + S_{OCD} + S_{ODA} \text{ e}$$

$S' = S'_{O'A'B'} + S'_{O'B'C'} + S'_{O'C'D'} + S'_{O'D'A'}$  e, sabendo que numa proporção, a soma dos antecedentes está para a soma dos consequentes assim como qualquer

antecedente está para seu conseqüente, ou seja:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a+c}{b+d} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d},$$

temos que:

$$\frac{S'}{S} = \frac{S'_{O'A'B'} + S'_{O'B'C'} + S'_{O'C'D'} + S'_{O'D'A'}}{S_{OAB} + S_{OBC} + S_{OCD} + S_{ODA}} = \frac{S'_{O'A'B'}}{S_{OAB}} = \left(\frac{h'}{h}\right)^2.$$

- **2ª propriedade** – Se duas pirâmides têm mesma altura e mesma área da base, então elas têm mesmo volume.

Sejam duas pirâmides de vértices  $V_1$  e  $V_2$ , conforme indicado na figura 2.50

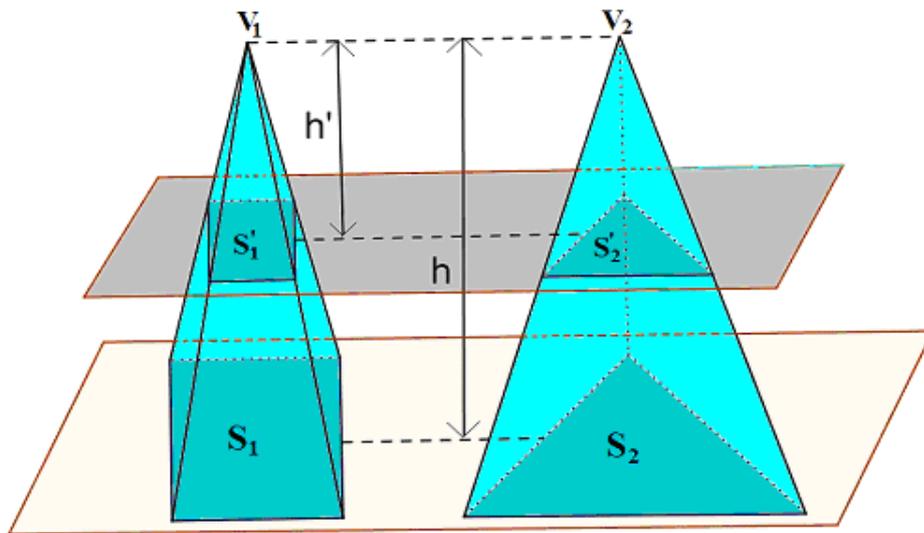


Figura 2.50: Pirâmides de mesma volume.

Vamos chamar de:

- $S_1$  e  $S_2$  as áreas das bases destas pirâmides, tais que  $S_1 = S_2$ ;
- $S'_1$  e  $S'_2$  as áreas das seções transversais;
- $h$  a altura das duas pirâmides e  $h'$  a distancia das seções transversais aos vértices  $V_1$  e  $V_2$ , respectivamente.

Pela 1ª propriedade, obtemos:

$$\frac{S'_1}{S_1} = \frac{h'}{h} \Rightarrow S'_1 = S_1 \cdot \left(\frac{h'}{h}\right)^2$$

$$\frac{S'_2}{S_2} = \frac{h'}{h} \Rightarrow S'_2 = S_2 \cdot \left(\frac{h'}{h}\right)^2$$

Como  $S_1 = S_2$ , temos que  $S'_1 = S'_2$  e, portanto, pelo principio de Cavalieri as duas pirâmides tem o mesmo volume.

Agora para calcular o volume de uma pirâmide ( $V_{pirâmide}$ ), vamos considerar um prisma triangular e decompô-lo em três pirâmides triangulares, como mostra a figura 2.51.

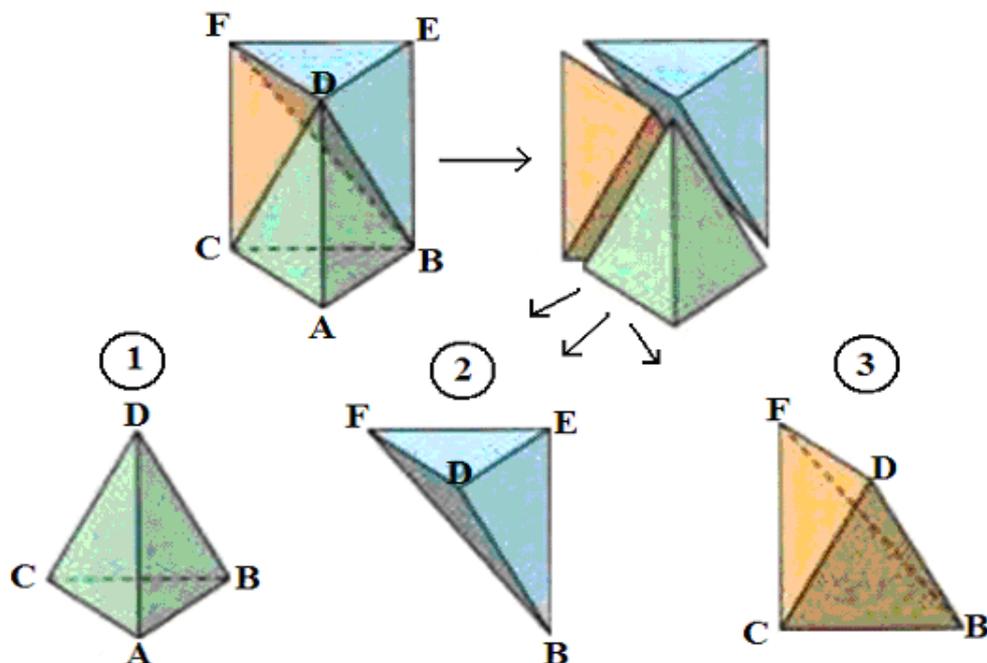


Figura 2.51: Prisma decomposto em três pirâmides.

Observando a decomposição da figura 2.51, podemos notar que as pirâmides 1 e 2 têm o mesmo volume, pois:

- as bases  $ABC$  e  $DEF$  são congruentes ( $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$ ), visto que correspondem às bases do prisma;
- têm a mesma altura, que é igual à altura do prisma.

Podemos notar que as pirâmides 2 e 3 também têm o mesmo volume, pois:

- as bases  $BEF$  e  $BFC$  são congruentes ( $\triangle BEF \equiv \triangle BFC$ ), visto que correspondem à metade do paralelogramo  $BEFC$  do prisma;
- têm a mesma altura, que corresponde a distância do ponto  $D$  ao paralelogramo  $BEFC$ .

Assim, concluímos que as três pirâmides têm o mesmo volume ( $V$ ):

$$V_1 = V_2 = V_3 = V_{pirâmide}$$

Logo, o volume da pirâmide triangular corresponde a terça parte do volume do prisma ( $V_{\text{prisma}}$ ):

$$V_{\text{prisma}} = V_1 + V_2 + V_3 \Rightarrow V_{\text{prisma}} = 3 \cdot V_{\text{pirâmide}} \Rightarrow V_{\text{pirâmide}} = \frac{V_{\text{prisma}}}{3}$$

e como o  $V_{\text{prisma}} = A_b \cdot h$ , temos que

$$V_{\text{pirâmide}} = \frac{A_b \cdot h}{3}.$$

De acordo com Ribeiro (2011): “ $V_{\text{pirâmide}} = \frac{A_b \cdot h}{3}$  é válida para o cálculo de uma pirâmide de base qualquer. Isso é garantido pelo princípio de Cavalieri, pois duas pirâmides de mesma altura e com as áreas das bases iguais têm volumes iguais”.

### 2.8.7 Demonstração do ângulo da amônia

Como visto anteriormente, o ângulo da molécula da amônia é encontrado experimentalmente e para demonstrar matematicamente este ângulo seria necessário saber o quanto os pares não ligantes afastam-se dos pares ligantes, mas esta informação não pode ser encontrada.

## 2.9 A Molécula de Metano

Nesta seção apresentamos o estudo feito sobre o gás metano.

### 2.9.1 Caracterização do gás metano

O composto orgânico Metano tem a fórmula molecular  $\text{CH}_4$  e se apresenta como um gás incolor, inodoro e muito inflamável.

Gás Natural, encontrado no subsolo terrestre ou marítimo, é constituído por uma mistura de hidrocarbonetos (composto químico formado por átomos de carbono e hidrogênio). Grande parte do gás natural (cerca de 70%) é formada pelo gás metano.

Fazem também parte da composição do gás natural o propano, nitrogênio, oxigênio, etano e enxofre.

O metano pode ser formado em pântanos através da fermentação anaeróbica. Vegetais em processo de deterioração e outros resíduos orgânicos constituem o chamado gás dos pântanos.

Entende-se por fermentação anaeróbica aquela que se dá pela ausência de oxigênio, ela também ocorre em depósitos de lixo e nos esgotos pela atividade de bactérias que se multiplicam nesses ambientes. Por isso, nestes locais o gás metano se faz presente. A extração do metano pode ser feita ainda a partir de derivados do petróleo como: gás natural, petróleo, xisto betuminoso e hulha.

O gás natural é muito usado como fonte de energia (combustível) nas indústrias, residências e veículos.

O GNV (Gás Natural Veicular) tem sido muito utilizado como combustível para veículos. Além de ser mais barato do que o álcool e a gasolina, o GNV gera um baixo índice de poluentes atmosféricos em comparação aos combustíveis fósseis. Portanto é considerada uma fonte de energia limpa.

É importante lembrar que 60% da emissão de metano no mundo é produto da ação humana. Essa emissão tem origem na agricultura, com grande destaque para a rizicultura, e na criação de bovinos. Durante os últimos 200 anos, a concentração deste gás na atmosfera aumentou de 0,8 para 1,7 ppm (partes por milhão).

O **efeito estufa** ou **efeito de estufa** é um processo que ocorre quando uma parte da radiação infravermelha emitida pela superfície terrestre é absorvida por determinados gases presentes na atmosfera. Como consequência disso, o calor fica retido, não sendo libertado para o espaço. O **efeito estufa** dentro de uma determinada faixa é de vital importância, pois, sem ele, a vida como a conhecemos não poderia existir. Serve para manter o planeta aquecido, e assim, garantir a manutenção da vida.

O que se pode tornar catastrófico é a ocorrência de um agravamento do efeito estufa que desestabilize o equilíbrio energético no planeta e origine um fenômeno conhecido como aquecimento global. O IPCC (Painel Intergovernamental para as Mudanças Climáticas, estabelecido pela Organização das Nações Unidas e pela Organização Meteorológica Mundial em 1988) no seu relatório mais recente diz que a maior parte deste aquecimento observado durante os últimos 50 anos, se deve muito provavelmente a um aumento dos gases do efeito estufa.

Os gases de estufa (dióxido de carbono ( $\text{CO}_2$ ), metano ( $\text{CH}_4$ ), Óxido nitroso ( $\text{N}_2\text{O}$ ), CFC's ( $\text{CF}_x\text{Cl}_x$ ) absorvem alguma radiação infravermelha emitida pela superfície da Terra e radiam por sua vez alguma da energia absorvida de volta para a superfície.

Como resultado, a superfície recebe quase o dobro de energia da atmosfera do que a que recebe do Sol e a superfície fica cerca de  $30^\circ\text{C}$  mais quente do que estaria sem a presença dos gases “de estufa”.

Um dos piores gases é o metano, cerca de 20 vezes mais potente que o dióxido de carbono, é produzido pela flatulência dos ovinos e bovinos, sendo que a pecuária representa 16% da poluição mundial. Cientistas procuram a solução para esse problema e estão desenvolvendo um remédio para tentar resolver o caso. Na Nova Zelândia pensou-se em cobrar taxas por vaca, para compensar o efeito dos gases emitidos (Grunkraut, 2012).

A molécula do metano é composto por 4 átomos de Hidrogênio e 1 átomo de Carbono, cujas propriedades químicas estão descritas na tabela 2.12.

Tabela 2.12: Propriedades dos átomos do Hidrogênio e do Carbono

Elemento químico	Hidrogênio	Carbono
Símbolo	H	C
Número atômico (Z)	1	6
Z = p		
Número de Massa (A)	1	12
A = p + n		
Número de prótons (p)	1	6
Número de elétrons (e)	1	6
Número de nêutrons (n)	0	6
n = A - Z		
Camada de valência	1	4
Família	1A - Família dos Alcalinos	4A - Família do Carbono
Período	$1^\circ$	$2^\circ$
Grupo	1	14

O metano tem fórmula estrutural conforme apresentada na figura 2.52.

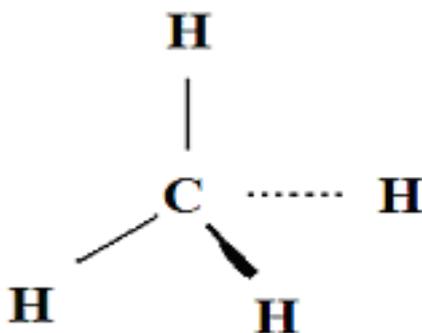
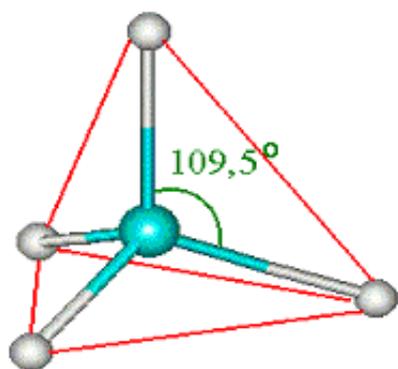
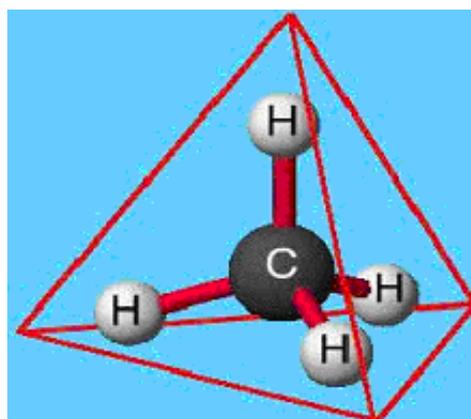


Figura 2.52: Fórmula estrutural do  $\text{CH}_4$

O carbono estabelece quatro ligações simples, uma com cada átomo de hidrogênio, logo não há elétrons livres no átomo central e a geometria molecular é tetraédrica, conforme figuras 2.53(a) e 2.53(b).



(a) Geometria molecular do  $\text{CH}_4$ .



(b) Molécula do  $\text{CH}_4$  formando um tetraedro

Figura 2.53: Geometria da molécula do metano.

A molécula do metano tem a forma de uma pirâmide de base triangular, ou seja, é um caso especial deste tipo de pirâmide, pois todas as suas bases são triângulos equiláteros congruentes, cujo nome é tetraedro.

## 2.9.2 Tetraedro

De modo geral, chama-se tetraedro uma pirâmide de base triangular.

Segundo Iezzi et al. (2010): “Se as quatro faces de um tetraedro são triângulos equiláteros congruentes, ele é chamado **tetraedro regular**”.

Observando a figura 2.54, se conclui que em um tetraedro regular.

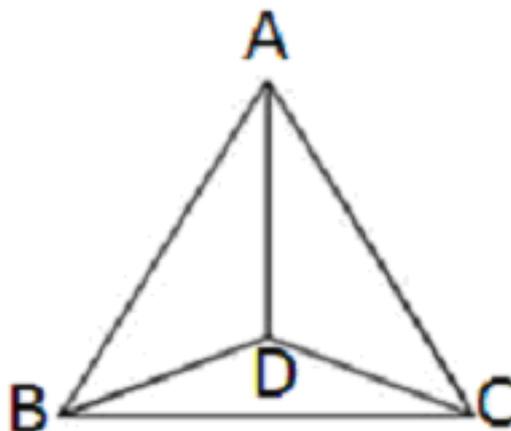


Figura 2.54: Tetraedro regular

As seis arestas são congruentes, ou seja,  $AB = AC = AD = BC = CD = DB$ .

Qualquer face – ABC, ACD, ABD ou BCD – pode ser considerada como base, já que são triângulos equiláteros.

### 2.9.2.1 Área

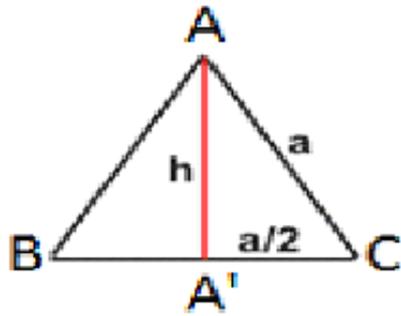
Consideremos um tetraedro regular de aresta  $\mathbf{a}$ . Portanto, as faces do tetraedro são triângulos equiláteros de lado  $\mathbf{a}$ . A área do tetraedro ( $A_t$ ) é a soma das áreas dos triângulos que formam suas faces, ou seja,

$$A_t = 4 \cdot A_{\text{face}}, \text{ e como } A_{\text{face}} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow A_t = 4 \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow A_t = a^2\sqrt{3}$$

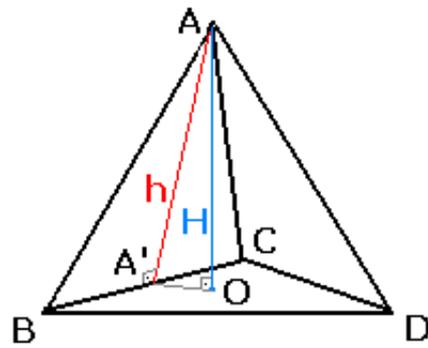
### 2.9.2.2 Volume

Como já vimos, o volume de uma pirâmide é:  $V_{\text{pirâmide}} = \frac{A_b \cdot h}{3}$  e como  $A_b = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ , resta encontrar a medida da altura ( $h$ ) do tetraedro. Para isso, primeiro temos que encontrar a apótema do tetraedro (ver figuras 2.55(a) e 2.55(b)).

**Apótema:** apótema do tetraedro é a altura  $h$  do triângulo equilátero de lado  $\mathbf{a}$ .



(a) Apótema (h) e altura (H) do tetraedro.



(b) Ilustração da face de um tetraedro

Figura 2.55: Elementos do tetraedro.

O triângulo AA'C é retângulo em A', logo, usando o teorema de Pitágoras, temos que

$$(AC)^2 = (AA')^2 + (A'C)^2 \Rightarrow a^2 = h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \Rightarrow h = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Para calcular a altura H, consideremos o ponto O, projeção ortogonal do vértice A sobre o plano da base BCD, como mostra a figura 2.56.

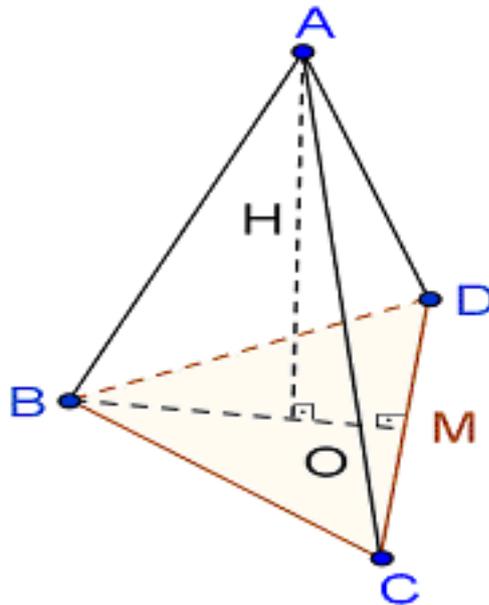


Figura 2.56: Localização da altura (H) do tetraedro.

Como o triângulo AOB é retângulo em O, temos pelo teorema de Pitágoras que:

$$AB^2 = AO^2 + OB^2 \tag{2.1}$$

Como  $AB = a$ ,  $AO = H$  e  $OB = \frac{2}{3}h$  e O é o baricentro do triângulo BCD, então  $OB =$

$\frac{2 a \sqrt{3}}{3} \Rightarrow OB = \frac{a \sqrt{3}}{3}$ , daí substituindo na equação 2.1, temos que

$$a^2 = H^2 + \left(\frac{a \sqrt{3}}{3}\right)^2 \Rightarrow H^2 = a^2 - \frac{3a^2}{9} \Rightarrow H = \frac{a \sqrt{6}}{3}.$$

Portanto,

$$V_{\text{tetraedro}} = \frac{A_b \cdot H}{3} \Rightarrow V_{\text{tetraedro}} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a \sqrt{6}}{3} \Rightarrow V_{\text{tetraedro}} = \frac{a^3 \sqrt{2}}{12}$$

### 2.9.2.3 Demonstração do ângulo do metano

Analisando a molécula do metano ( $\text{CH}_4$ ), veremos que o átomo de carbono ocupa o centro de um tetraedro regular em cujos vértices estão os átomos de hidrogênio, como podemos observar na figura 2.57. Com o uso da geometria analítica e produto escalar, é possível determinar o ângulo entre duas das valências do carbono.

Com base na figura 2.57, podemos ver que:

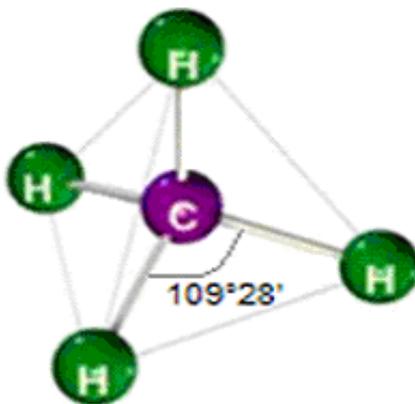


Figura 2.57: Molécula do  $\text{CH}_4$  e sua geometria tetraédrica

Num sistema de coordenadas no espaço, consideremos inicialmente um cubo de aresta  $2a$  (ver figura 2.58) com um vértice na origem, outro no eixo  $X$ , outro no eixo  $Y$  e outro no eixo  $Z$ . Escolhemos quatro vértices deste cubo de modo que formem um tetraedro regular:  $O$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$ .

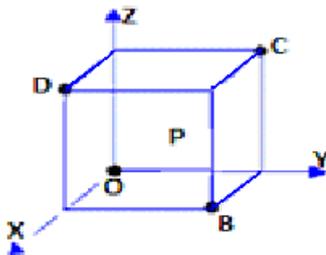


Figura 2.58: Cubo de aresta  $2a$ .

Sendo assim, calculando o centro do cubo, teremos  $P(a,a,a)$  e os pontos  $O(0,0,0)$ ,  $B(2a,2a,0)$ ,  $C(0, 2a, 2a)$  e  $D(2a,0,2a)$  formam um tetraedro regular (uma vez que as distâncias entre dois quaisquer deles são diagonais de faces do cubo) e são ocupados pelos hidrogênios.

O ponto  $P(a,a,a)$ , centro do cubo e também centro do tetraedro, está ocupado pelo carbono.

De acordo com Lima (2012):

O ângulo  $\angle(\vec{u}, \vec{v})$  entre dois vetores não nulos  $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$  e  $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ , é o menor ângulo formado pelos segmentos AB e AC (ver figura 2.59, medido no plano  $\pi_{ABC}$ , que contém os pontos A, B e C).

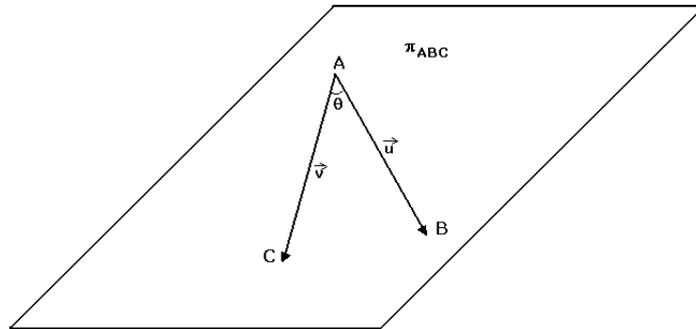


Figura 2.59: Ângulo  $\theta$ .

O produto interno entre os vetores (não nulos)  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  no espaço, é o número real  $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos \theta$ , onde  $\theta = \angle(\vec{u}, \vec{v})$ .

A norma ou comprimento do vetor  $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$  no espaço, é o número  $\|\vec{u}\| = d(A, B)$ . Se  $\vec{u} = (\alpha, \beta, \gamma)$  e  $\vec{v} = (\alpha', \beta', \gamma')$  são vetores no espaço, então  $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma'$ .

Considerando os segmentos PO e PB como vetores, vemos que formam um ângulo ( $\theta$ ) cujo vértice é o ponto P, conforme mostra a figura 2.60.

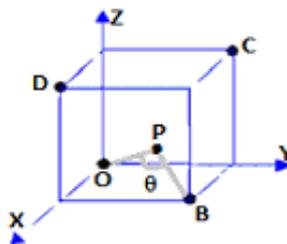


Figura 2.60: PO e PB formando um ângulo  $\theta$ .

Calculando PO e PB, teremos:

$$PO = O - P = (-a, -a, -a)$$

$$PB = B - P = (a, a, -a).$$

$$PO \cdot PB = (-a, -a, -a) \cdot (a, a, -a) = -a^2$$

Calculando as normas, teremos:

$$\|PO\| = \sqrt{(-a)^2 + (-a)^2 + (-a)^2} = a\sqrt{3}$$

$$\|PB\| = \|PO\| = a\sqrt{3}$$

$$\text{O cosseno do ângulo entre eles é } \cos \theta = \frac{PO \cdot PB}{\|PO\| \|PB\|} \Rightarrow \cos \theta = -\frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \theta = \arccos -\frac{1}{3} \therefore \theta = 109,47^\circ.$$

## Capítulo 3

# Aplicação da sequência didática

As aulas foram desenvolvidas na Escola Estadual “13 de Maio” em duas salas do 3° ano do ensino médio, sendo ambas com aproximadamente 30 alunos cada; uma no período vespertino e outra no período noturno. A escola localiza-se no município de Porto Esperidião no estado de Mato Grosso e tem aproximadamente 1200 alunos distribuídos em três períodos.

As atividades foram desenvolvidas em sete aulas de 2 horas cada, mas com um tempo maior, os conteúdos poderiam ter sido melhor aprofundados, conforme constatamos na avaliação de uma das alunas: “Foi muita matéria em pouco tempo de aula, pois apesar de entender, a gente acaba confundindo e misturando coisas. A gente devia ter feito mais questões pra ajudar a assimilar”.

Apesar de acreditar que as atividades são mais apropriadas para os alunos do 3° ano, devido à geometria analítica, elas também podem ser desenvolvidas nas outras séries do ensino médio.

### 3.1 As bexigas: 1ª atividade

A atividade começou com os alunos inflando bexigas de modo que elas tivessem basicamente o mesmo tamanho. Quando cheias, elas foram agrupadas em 2, 3 e 4 bexigas e amarradas umas nas outras (ver figura 3.1).



Figura 3.1: Alunas analisando as moléculas representadas por bexigas

O uso de bexigas nesta atividade teve como objetivo propiciar aos alunos uma visão das moléculas, pois as bexigas funcionam como nuvens, onde o átomo central fica no centro delas. Por exemplo, em uma molécula que possui apenas duas nuvens eletrônicas ao redor do átomo central, ou seja, 2 bexigas soltas, a maior distância possível entre elas é um ângulo de  $180^\circ$  (se o átomo central não possuir elétrons livres), conseqüentemente, a geometria da molécula será linear.

Um dos objetivos desta atividade foi identificar o nível de conhecimento dos alunos sobre o assunto trabalhado e os resultados foram os seguintes:

- A maioria dos alunos tem noção do que seja molécula, mas nenhum respondeu corretamente. Provavelmente isto aconteceu porque erroneamente, na maioria das vezes, molécula é usada tanto para compostos resultantes de ligações iônicas, quanto os de ligações covalentes. Mas há aqueles, que não tem a mínima noção do que seja molécula.
- 35,7% dos alunos do vespertino e 25% dos alunos do noturno possuem uma noção distorcida sobre o que é figura geométrica.
- 82,8% dos alunos das duas salas preencheram corretamente as tabelas que continham as diversas informações sobre cada átomo usado nas moléculas, tendo o restante, apenas trocado alguns dos itens.
- Quando foram desenhar as moléculas na fórmula estrutural ou eletrônica, usando a

tabela periódica, houve um lapso por parte dos alunos do vespertino, pois 49,14% deles desenharam-nas com o formato das bexigas. Já os alunos do noturno, 67,33%, desenharam coerentemente como fora pedido.

- Apesar de serem avisados da existência de um átomo no encontro das bexigas, mais da metade dos alunos não conseguiu fazer a associação correta entre a quantidade de átomos em cada molécula dada e à quantidade de bexigas que já haviam sido esquematizadas.

Quando esta atividade foi pensada, imaginamos que rapidamente eles conseguiriam desenvolvê-la e assim teria mais tempo para corrigí-las com os alunos, para que assim pudéssemos discutir com mais detalhes sobre cada item pedido, mas aconteceu o contrário.

Demoraram muito para responder as questões e, conseqüentemente, o tempo reservado para discutirmos as respostas foi pouco. Com isso, na próxima vez que aplicar esta atividade, será melhor trocar a avaliação escrita a respeito dos conhecimentos prévios sobre o assunto abordado, por uma avaliação mais dinâmica, onde todos possam participar ao mesmo tempo e, assim, sanar as dúvidas que forem surgindo, para que o aprendizado seja melhor.

Entretanto, também houve pontos positivos, pois eles conseguiram enxergar e, principalmente, entender as diferenças entre as geometrias de moléculas, que aparentemente deveriam ser a mesma, como por exemplo, o  $\text{CO}_2$  e  $\text{H}_2\text{O}$ , apesar de ambas possuírem 3 átomos, elas têm geometria molecular diferente devido a presença ou ausência de elétrons livres. Usaram as próprias mãos para representar a presença dos elétrons livres, o que faz com que as bexigas fossem pressionadas a diminuir o ângulo devido à pressão que a mão (elétrons livres) fazia sobre as bexigas (moléculas). Todos participaram ativamente da atividade.

## 3.2 Bolas e varetas: 2<sup>a</sup> atividade

Esta atividade começou no mesmo ritmo da primeira, mas os grupos agora eram de 4 alunos.

Construíram as moléculas do  $\text{CO}_2$ ,  $\text{H}_2\text{O}$  e  $\text{BF}_3$  usando bolas de isopor e varetas, conforme mostrado na figura 3.2. Daí foram respondendo as questões, para depois corrigir

todas de uma só vez, mas percebemos que o mesmo erro estava sendo cometido, pois as dúvidas que iam surgindo deveriam ser respondidas no momento do questionamento. Portanto, paramos a construção das moléculas e fomos mostrar slides sobre: massa molecular, volume molar, retas, semirretas, segmentos de retas, ângulos e triângulos.

Deste modo, foi possível questionar com os alunos os conceitos mostrados e, assim, houve uma socialização de conhecimentos além de poder sanar suas dúvidas. Com isto, houve um melhor rendimento dos alunos.



Figura 3.2:  $\text{CO}_2$ ,  $\text{H}_2\text{O}$  e  $\text{BF}_3$  representados por bolas e varetas.

A partir deste momento, em vez de trabalhar as 5 moléculas concomitantemente, resolvemos refazer o roteiro das atividades, investigando uma molécula de cada vez.

Nas explicações, sempre fizemos a associação entre as moléculas de bexigas e as de bolas de isopor e varetas para que houvesse a compreensão de que ambas representavam a mesma molécula, mas de um ponto de vista diferente.

Após as explicações, pedimos para ligarem as extremidades do  $\text{BF}_3$  com barbante (ver figura 3.3), para que pudessem visualizar melhor a geometria que ele formava e, assim, conseguissem responder com mais convicção os questionamentos, que estão abaixo relacionados.



Figura 3.3: Geometria trigonal do  $\text{BF}_3$

1. Classifique o triângulo formado quanto aos lados e quanto aos ângulos.
2. Meça a aresta deste triângulo e calcule a sua área e o seu perímetro.
3. Qual a massa molecular do  $\text{BF}_3$ ?

Um dos objetivos era demonstrar o ângulo de  $120^\circ$  formado entre os átomos desta molécula de duas formas diferentes, mas para que pudessem fazê-lo, percebemos que antes era necessário que aprendessem ou relembassem alguns conceitos sobre: incentro, circuncentro, ortocentro e baricentro. Para isso, começamos subdividindo duplas em três diferentes grupos. Cada dupla ficou com um tipo de triângulo: isósceles, escaleno ou equilátero.

Distribuímos folhas, régua, compasso e transferidor e fomos para o quadro mostrando como deveriam prosseguir para encontrar primeiramente o circuncentro de cada triângulo, depois o incentro, e assim por diante. Para que depois cada grupo pudesse mostrar e explicar como ficou o seu triângulo em relação a estes pontos notáveis e levá-los a perceber as diferenças e as semelhanças entre os triângulos com relação a estes pontos notáveis.

A maioria não conseguiu acompanhar o processo de construção destes pontos e logo percebemos que deste modo o objetivo não seria alcançado. Então, distribuímos novas folhas e escolhemos o triângulo equilátero para começar a refazer a construção dos pontos notáveis (figura 3.4). Desta vez, fizemos passo a passo juntos e percebemos que conseguiram acompanhar, tendo um aprendizado efetivo.

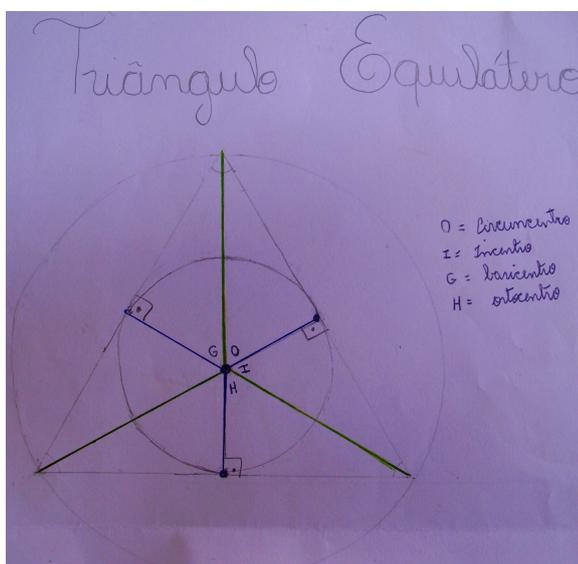


Figura 3.4: Pontos notáveis do triângulo equilátero

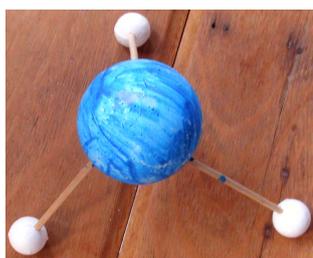
Eles foram percebendo ao longo da construção que os pontos iam coincidindo e, assim, fomos discutindo o porque disto acontecer. Fizemos a mesma coisa com o triângulo isósceles. Sempre procurando destacar os conceitos que já havíamos estudado anteriormente e, assim, o objetivo foi alcançado, pois conseguiram concluir que no triângulo escaleno os pontos não iriam coincidir, sem precisar construí-lo. Com os alunos do noturno pulamos a etapa da construção em grupo e a atividade rendeu consideravelmente.

A par destes pontos notáveis dos triângulos, os alunos conseguiram demonstrar o ângulo da molécula de  $\text{BF}_3$  é  $120^\circ$ , sem muita dificuldade.

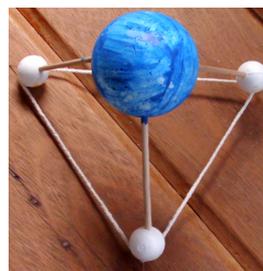
Deixamos como tarefa de casa, uma breve pesquisa sobre como os cientistas conseguiram encontrar os ângulos das moléculas de  $\text{H}_2\text{O}$  e  $\text{NH}_3$  e, também, sobre a utilização de todas as moléculas estudadas. No dia seguinte, fizemos um pequeno fórum para debater as pesquisas e todos puderam socializar o que descobriram com as pesquisas.

### 3.3 Amônia e as pirâmides: 3ª atividade

Construímos a molécula da amônia com bolas de isopor e varetas, e ligamos as extremidades com barbantes (figuras 3.5(a) e 3.5(b)). Sempre fazendo com que eles analisassem a molécula sobre o olhar químico e, principalmente, matemático.



(a)  $\text{NH}_3$  representada por bolas de isopor e varetas.



(b) Átomos de H ligados por bolas, varetas e barbante

Figura 3.5: Representação da molécula da amônia.

Como a molécula da amônia tem geometria piramidal, explicamos sobre as pirâmides e suas propriedades. Os alunos participaram fazendo perguntas e/ou comentários. Depois colocaram em prática o que tinham aprendido ou lembrado, resolvendo as seguintes questões:

1. Qual a massa molecular de 1 mol de amônia? E de 2 mols de amônia?

2. Qual o volume molar de 1 mol de amônia? E de 3 mols de amônia?
3. A molécula da amônia tem a geometria molecular ....., como mostra a figura 3.6, sendo assim, utilizando as informações nela contidas, resolva as atividades:

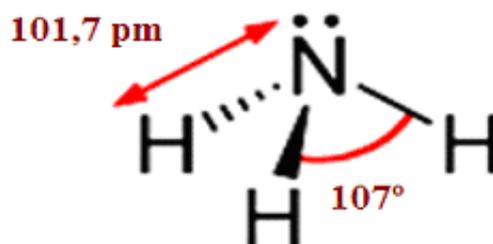


Figura 3.6: Molécula da amônia.

- Classifique esta pirâmide.
- Determine a quantidade de arestas, vértices e faces desta pirâmide.
- Calcule a área da base desta pirâmide.
- Calcule a área lateral desta pirâmide.
- Calcule a área total desta pirâmide.
- Calcule o volume desta pirâmide.

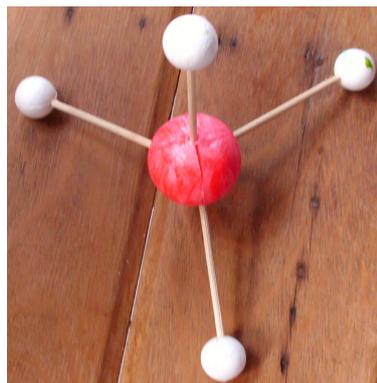
As atividades foram desenvolvidas com sucesso, sempre utilizando a molécula construída para poder visualizar melhor o que estavam fazendo.

Para encontrar a área da base foi necessário que eles relembassem os conteúdos já estudados como lei dos senos, lei dos cossenos e teorema de Pitágoras. Foi bom, pois assim fizemos uma bela revisão destes conteúdos.

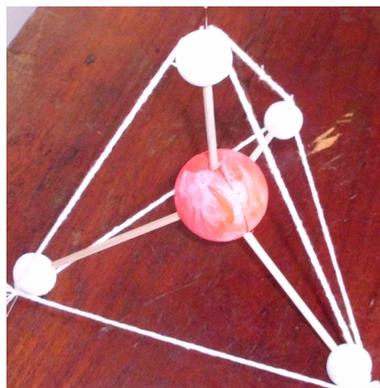
O cálculo do volume foi o que exigiu maior atenção e abstração, para atingir o objetivo, foram usadas varetas coloridas para mostrar onde fica a altura da pirâmide e o que deveria ser calculado para encontrar o seu valor, tais como raio da base, apótema lateral, de modo a encontrar o volume desta pirâmide.

### 3.4 Metano e o tetraedro: 4<sup>a</sup> atividade

Construímos a molécula do metano usando bolas de isopor e varetas (figura 3.7(a)) e ligamos as extremidades dos átomos com barbante (figura 3.7(b)) para conseguir visualizar melhor a geometria tetraédrica desta molécula.



(a)  $\text{CH}_4$  representado por bolas.



(b) Átomos de H ligados por e varetas barbante formando o tetraedro.

Figura 3.7: Representação da molécula da amônia.

O desenvolvimento desta atividade aconteceu da seguinte maneira:

- Construção com canudinhos, varetas e barbantes de um cubo de aresta  $2a$ , sendo um dos vértices o ponto de origem dos eixos e encontrar as coordenadas dos seus vértices. Foi preciso relembrar como encontrar coordenadas usando dois eixos:  $x$  e  $y$ , e desenhar um cubo no quadro, para que eles conseguissem enxergar quais eram as coordenadas que compunham o cubo. O fato de terem um cubo em mãos contribuiu muito na visualização das coordenadas.
- Encontro das coordenadas do centro deste cubo.
- Construção com canudinhos e barbante de um tetraedro cuja medida da aresta seja a mesma medida da diagonal do cubo (figura 3.8).

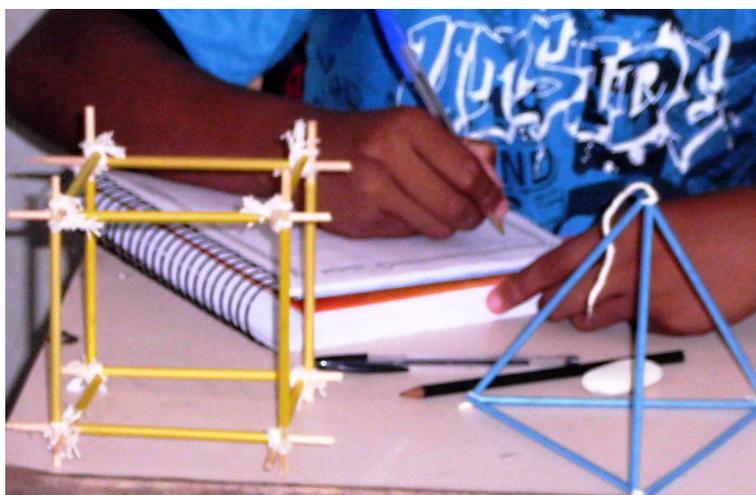


Figura 3.8: Aluno observando o cubo e o tetraedro.

- Encaixe do tetraedro dentro do cubo de modo que um dos seus vértices seja o ponto de origem dos três eixos (figura 3.9 e encontrar as coordenadas dos vértices e do centro deste tetraedro).

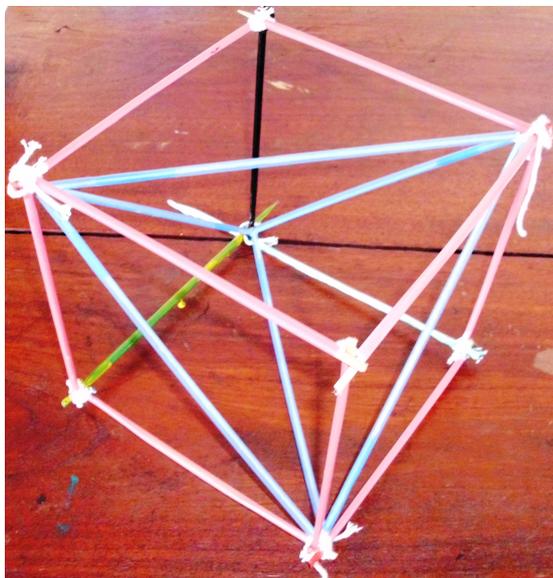


Figura 3.9: Tetraedro encaixado dentro do cubo.

- Como a molécula do metano e o tetraedro de canudinho se encaixam, usamos o carbono (átomo central da molécula do metano) para mostrar o centro do tetraedro e, conseqüentemente, do cubo também se encaixam (figura 3.10).

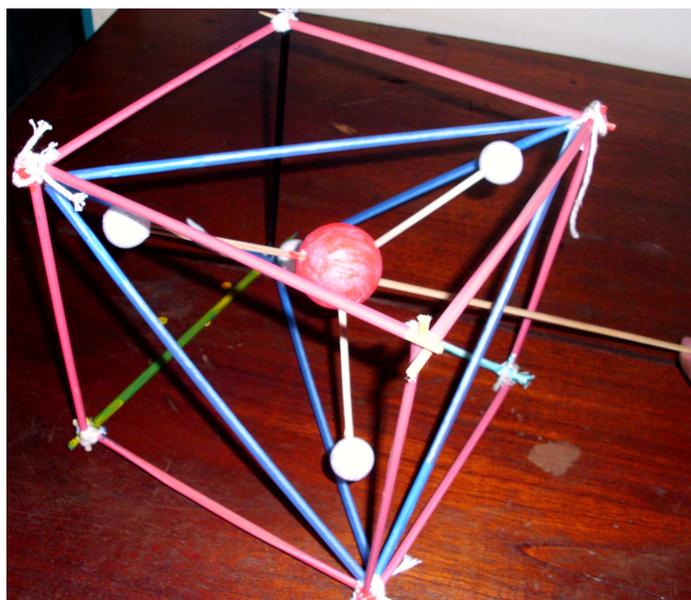


Figura 3.10:  $\text{CH}_4$  dentro do tetraedro que está dentro do cubo.

Para demonstrar o ângulo de  $109,5^\circ$  do metano, seguimos o roteiro descrito no

capítulo 2.

- Usando varetas coloridas e o tetraedro de canudinho (figura 3.11), auxiliamos os alunos a encontrar as fórmulas para calcular a área, a altura, a apótema e o volume do tetraedro, seguindo o roteiro descrito no capítulo 2.

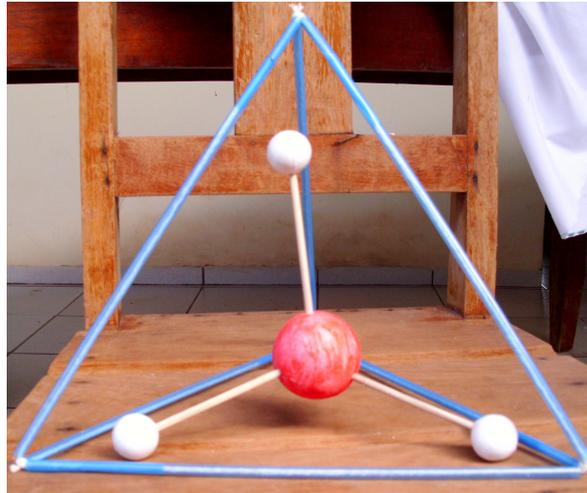


Figura 3.11: Geometria tetraédrica do  $\text{CH}_4$ .

Em seguida foram usar tudo o que haviam aprendido resolvendo as questões abaixo:

1. Qual a massa molar de 1 mol de metano? E de 3 mols de metano?
2. Qual o volume molecular de 1 mol de metano? E de 4 mols de metano?
3. A molécula do metano tem geometria molecular ....., como mostra a figura 3.12.

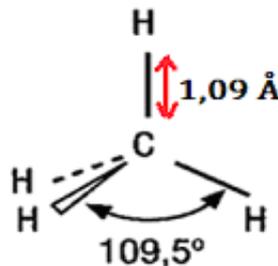


Figura 3.12: Molécula do metano ( $\text{CH}_4$ ).

Daí, utilizando as informações nela contidas e a molécula que construiu, resolva as seguintes atividades:

- a- Classifique esta pirâmide.

- b- Determine a quantidade de arestas, vértices e faces desta pirâmide.
  - c- Calcule a área da base desta pirâmide.
  - d- Calcule a área lateral desta pirâmide.
  - e- Calcule a área total desta pirâmide.
  - f- Calcule o volume desta pirâmide.
4. Meça a aresta do tetraedro de canudinho e calcule a sua área e o seu volume (conforme figura 3.13).

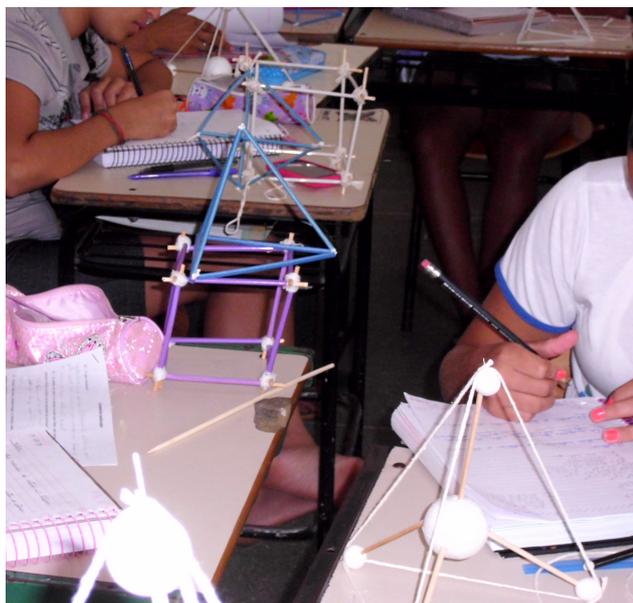


Figura 3.13: Alunos resolvendo as atividades com o auxílio das construções.

Como produto final, montamos uma apostila com todos os conteúdos ministrados durante os dias de aula para que os alunos possam revisar em casa e, assim, aprimorar todo o conhecimento adquirido.

### 3.5 Com a palavra: “o aluno”

Os objetivos foram alcançados, pois todos participaram das atividades questionando, resolvendo, colaborando com o colega e sempre procurando sanar as dúvidas que por ventura ainda existiam. Ao final das aulas pedimos aos alunos um relatório e a seguir estão alguns trechos. Como os relatórios não contêm os nomes dos alunos, optamos por colocá-los entre aspas, ou seja, o que está entre aspas é a opinião de cada um deles.

“A aula foi proveitosa do começo ao fim, com explicações e atividades criativas e teve a participação dos alunos e com o uso das bexigas, canudos, bolinhas, deu um ar mais ‘real’ e prático para a matéria. O uso das imagens no slide também colabora para o entendimento, ainda mais se tratando de matemática.”

“Eu gostei do modo de apresentação, com as formas, porque eu acho melhor um aluno estudar olhando as formas de perto, fazendo as formas.”

“As aulas foram produtivas e o que facilitou o entendimento foi os desenhos que fizemos, pois torna mais ‘real’ e dá pra entender melhor.”

“Gostei da forma criativa de passar o conteúdo, o que o tornou muito menos cansativo, e a idéia de mostrar como e porque chegamos a algumas fórmulas facilita porque ao invés de decorar, a gente aprende o caminho e o sentido das fórmulas.”

“Como ponto negativo, acho que o tempo foi curto e por isso tivemos que fazer tudo meio rápido, o que deixou a gente um pouco atordoado com tanta informação. Mas isso será compensado porque teremos tempo de relembrar e analisar tudo em casa com mais calma.”

“Achei bem interessante unir as duas matérias em um assunto só.”

“Achei interessante que através dos pequenos desenhos, entendi sobre bissetriz, incentro e circuncentro, que antes era difícil de entender e a sala toda interagiu.”

“Eu entendi mais o conteúdo que foi tratado, pois eu montei e desenhei as figuras, isso facilitou a compreensão da geometria molecular. Gostei muito da oportunidade de montar as figuras geométricas como o tetraedro e o cubo, isso facilitou o meu entendimento das fórmulas e das contas. Pena que o tempo foi curto para tanta informação.”

“Montando as estruturas moleculares eu entendi melhor porque uma molécula pode ter o mesmo número de átomos comparado à outra, só que elas necessariamente não vão ter a mesma estrutura molecular.”

“Durante as primeiras atividades envolvendo química e matemática foi meio confuso, mas depois foi organizando tudo.”

“Tive dificuldades nas primeiras aulas, mas consegui compreender nas aulas seguintes.”

“A idéia de construirmos o cubo e o tetraedro para descobrir o ângulo do metano foi uma experiência nova e de certa forma mais fácil de entender, já que com os objetos em mãos conseguimos olhar as dimensões dos objetos, o que torna mais fácil a compreensão.”

# Capítulo 4

## Sugestão para ampliar a sequência didática

Vivemos num país apaixonado por futebol, que atualmente, respira futebol diariamente, sendo assim a proposta para continuar a sequência didática já apresentada é envolver também esta paixão, ou seja, estudar a geometria molecular inspirada na bola de futebol.

### 4.1 Fulereno e a bola de futebol

O fulereno é um dos alótropos do carbono, e de acordo com Canto e Peruzzo (2003): “Alótropos são diferentes substâncias simples formadas por um mesmo elemento químico”.

O carbono, quimicamente, é o único elemento capaz de formar muitos compostos contendo cadeias e anéis apenas de átomos de carbono. Os átomos de Carbono podem se unir de várias formas diferentes, formando inúmeras substâncias, a esta propriedade denominamos de Alotropia.

O carbono possui basicamente três alótropos: o grafite, o diamante e o fulereno, que são compostos por carbono e se diferem pelo arranjo geométrico. Estas três formas são substâncias simples formadas apenas por carbono, porém, a grande diferença entre elas é a maneira como os átomos ficam organizados nas moléculas, ou seja, estas formas alotrópicas diferem ou no ambiente de coordenação dos átomos de carbono ou na sequência de empacotamento de camadas na rede cristalina e estas diferenças determinam

importantes diferenças nas propriedades físicas e químicas dos alótropos.

Por isso, antes de estudar o fulereno, vamos analisar o grafite e o diamante.

### 4.1.1 Grafite

O grafite é um sólido cinza, opaco, mole e escorregadio, que deixa marcas quando risca qualquer superfície, e, por isso, é a matéria-prima dos lápis de escrever. Conduz bem o calor e a eletricidade e é usado como eletrodo em pilhas eletroquímicas, como lubrificante e como moderador em reatores nucleares.

No grafite, os átomos de carbono ligam-se entre si também por ligações covalentes (figura 4.1), logo um cristal de grafite consiste em um empilhamento de camadas paralelas de átomos de carbono, sendo cada camada constituída por anéis hexagonais de átomos de carbono ligados entre si e que se estendem infinitamente.

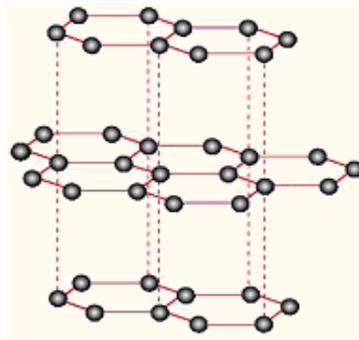


Figura 4.1: Grafite formado por camadas de átomos de carbono.

Entre as camadas, a distância é suficientemente grande, não permitindo nenhuma ligação localizada. As camadas são mantidas por forças fracas de van der Waals, o que facilita o deslizamento de umas sobre outras, possibilitando seu uso como lubrificante e marcador de superfícies (lápis).

### 4.1.2 Diamante

Ocorre naturalmente e pequenas quantidades podem ser produzidas sinteticamente. É a substância mais dura conhecida e forma cristais altamente refrativos. É incolor, transparente e um mau condutor de eletricidade.

Aquecido a  $1.000\text{ }^{\circ}\text{C}$  em atmosfera inerte converte-se em grafite lentamente e quando suas faces são lapidadas, tem-se o brilhante, que possui grande beleza e é a

mais valiosa das pedras preciosas. Também é utilizado industrialmente por sua dureza e propriedades abrasivas.

A dureza do diamante resulta da sua estrutura cristalina covalente (ver figura 4.2), na qual, de acordo com Rocha-Filho (1996): “cada átomo de carbono está rodeado tetraedricamente por quatro vizinhos equidistantes, resultando numa célula unitária cúbica”, como mostrado na figura 4.2.

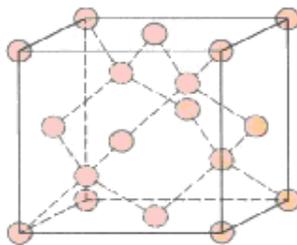


Figura 4.2: Estrutura do diamante.

### 4.1.3 Fulereno

Até 1985, as únicas formas conhecidas do carbono eram estas duas: grafite e diamante. Naquele ano, um grupo de cientistas que estava de olho no espaço pesquisando estrelas vermelhas – um tipo formado essencialmente por carbono – descobriu que os átomos de carbono podiam se organizar de uma maneira diferente, que não resultava nem no grafite nem no diamante. Essas novas formas de carbono foram chamadas fulerenos.

Em 1985, o inglês Harold W. Kroto (Universidade de Sussex, em Brighton, Inglaterra) e os americanos Robert F. Curl e Richard E. Smalley (Universidade Rice, em Houston, Texas, EUA), relataram a descoberta de mais uma forma alotrópica de carbono, sendo a primeira molecular: o buckminsterfulereno ( $C_{60}$ ). Isto lhes rendeu o Prêmio Nobel de Química de 1996.

O nome esquisito surgiu mais ou menos assim: um dos cientistas que participou da descoberta gostava muito das obras em estilo geométrico de um famoso arquiteto, chamado Richard Buckminster Fuller, (que projetou amplas abóbadas arredondadas de edifícios muito semelhantes a uma bola de futebol cortada ao meio) e quis homenageá-lo. Daí, o nome em inglês fullerene, mesmo sob os protestos de outros cientistas que queriam que as novas formas de carbono fossem chamadas de ... futebolenos, devido a semelhança com a bola de futebol, como podemos ver na figura 4.3.

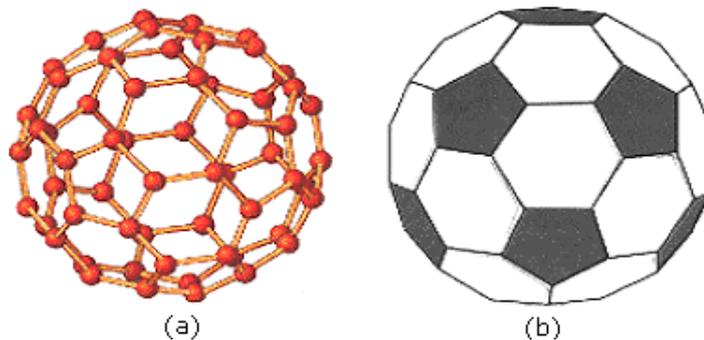


Figura 4.3: Estrutura do fulereno (a) e de uma bola de futebol (b).

De acordo com Rocha Filho (1996):

Os fulerenos são formados quando carbono vaporizado se condensa numa atmosfera de gás inerte (hélio); a vaporização do carbono pode ser feita, por exemplo, com lasers ou com arcos voltaicos usando eletrodos de grafite. Os átomos de carbono vaporizados são misturados ao hélio e se combinam para formar agregados moleculares que podem reunir alguns poucos átomos ou até centenas deles.

O representante mais conhecido da família dos fulerenos é o  $C_{60}$  (com 60 carbonos), é um icosaedro truncado, cuja forma é de uma bola de futebol, composta por 12 pentágonos e 20 hexágonos e sua fórmula é  $C_{60}$ .

Os hexágonos mantêm a planaridade (como no grafite que é plano por apresentar somente hexágonos) enquanto que cada pentágono inicia um ângulo de curvatura, sendo necessários 12 pentágonos para fechar a superfície sobre si mesma, formando uma bola (ver figura 4.4.

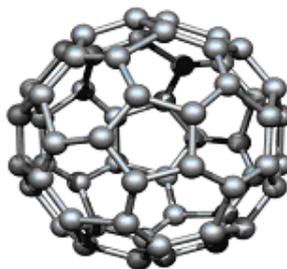


Figura 4.4: Modelo de uma molécula de Fulereno.

Conforme nos diz Paiva (2009): “O icosaedro truncado é um poliedro arquimedi-ano que teve destaques importantes no século XX: em 1970, no Campeonato Mundial de Futebol, usou-se pela primeira vez uma bola de futebol construída a partir deste poliedro”.

Os **sólidos de Arquimedes** ou poliedros semi-regulares são, a grosso modo, poliedros convexos cujas faces são polígonos regulares de mais de um tipo. Todos os seus vértices são congruentes, isto é, existe o mesmo arranjo de polígonos em torno de cada vértice.

Além disso, todo vértice pode ser transformado em outro vértice por uma simetria do poliedro. Existem apenas treze poliedros arquimedianos e são todos obtidos por operações sobre os sólidos platônicos. Um deles é o icosaedro truncado e que é usado na moderna **bola de futebol**: 32 faces, 12 pentágonos, 20 hexágonos.

Para se obter o icosaedro truncado tomamos um icosaedro sólido e “cortamos” suas “pontas”. Assim a cada vértice do icosaedro corresponde uma pequena pirâmide regular de base pentagonal que é retirada do icosaedro. Veja na figura 4.5, na figura 4.5 o processo:

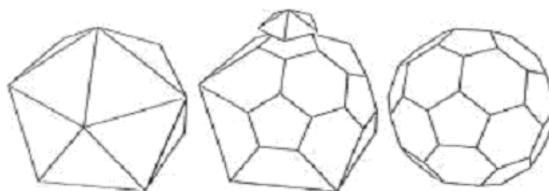


Figura 4.5: Construção da bola de futebol a partir do icosaedro.

No lugar de cada pirâmide retirada fica sua base pentagonal. Como o icosaedro tem 12 vértices, o poliedro resultante tem 12 faces pentagonais.

Retirado às pirâmides, as faces triangulares do icosaedro se transformam em faces hexagonais, ou seja, as 20 faces triangulares se transformam em 20 faces hexagonais.

Desta forma, o icosaedro truncado possui 12 faces pentagonais e 20 faces hexagonais.

Observe que nessa estrutura os vértices têm incidência de apenas 3 arestas. Isto influi na confecção da bola de futebol, facilitando a costura dos gomos, conforme figura 4.6.

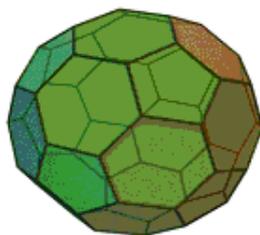


Figura 4.6: Icosaedro truncado (ou bola de futebol ou ainda a molécula do futeboleno  $C_{60}$ ).

#### 4.1.4 Lei de Euler

A relação criada pelo matemático suíço, Leonhard Euler (1707-1783), possui extrema importância na determinação do número de arestas, vértices e faces de qualquer poliedro convexo e alguns não convexos. Essa relação permite que os cálculos sejam realizados no intuito de determinarmos o número de elementos de um poliedro.

A fórmula criada por Euler é a seguinte:  $V - A + F = 2$ , onde  $V$  é o número de vértices,  $A$  é o número de arestas e  $F$  é o número de faces. Como cada aresta é compartilhada por 2 faces, para calcular o número de arestas basta multiplicar a quantidade de faces ( $n$ ) pelo tipo de polígono ( $p$ ) que compõe esta face e dividir por 2, ou seja,  $A = \frac{n \cdot p}{2}$ .

Segundo Rocha Filho (1996):

Uma molécula de fulereno é um poliedro de átomos de carbono nos vértices, formado somente por faces pentagonais e hexagonais.

No caso dos fulerenos, como cada átomo está ligado a três outros, em cada vértice há o encontro de três arestas (cada uma ligada a dois vértices); assim:

$V = \frac{2}{3}A$ , que substituindo na equação de Euler, se obtém

$$F = \frac{1}{3}A + 2. \quad (4.1)$$

O número de faces numa molécula fullerênica é:

$$F = P + H \quad (4.2)$$

onde  $P$  é o número de pentágonos e  $H$  é o número de hexágonos. Ao contar as arestas para todas as faces, sendo cada aresta compartilhada por duas faces, cada aresta é contada duas vezes; assim, numa molécula fullerênica se tem

$$A = \frac{1}{2} (5P + 6H) \quad (4.3)$$

Substituindo-se as equações (4.1) e (4.2) na equação (4.3), encontra-se simplesmente o número de pentágonos numa molécula fullerênica:

$$P = 12$$

Isto significa que a lei de Euler não impõe qualquer restrição quanto ao número de hexágonos nas moléculas fullerênicas, e que elas sempre têm exatamente 12 pentágonos.

Usando as relações acima, é possível deduzir que o  $C_{540}$  (540 vértices) tem 810 arestas e 272 faces (260 hexagonais e 12 pentagonais).

Empiricamente, encontrou-se que  $C_{60}$  (32 faces) e  $C_{70}$  (37 faces) são os menores fullerenos suficientemente estáveis, os quais correspondem às duas menores estruturas possíveis em que todas as 12 faces pentagonais estão isoladas uma da outra. Daí a *regra do pentágono isolado*, que afirma que o isolamento entre as 12 faces pentagonais é um requisito para a estabilidade de uma molécula fullerênica. Até agora, não se conhece exceção a esta regra.

No caso do  $C_{60}$ , cada pentágono está rodeado por um colar de cinco hexágonos. Se o número desses colares ao redor de cada pentágono for aumentado para 2, 3 ou mais, obtém-se uma família de fullerenos gigantes que começa com  $C_{240}$  e  $C_{540}$  (a família é dada por  $C_{60n^2}$ , onde  $n = 1, 2, 3$  etc.).

Essas moléculas, à medida que se tornam maiores, ficam menos esféricas.

#### 4.1.5 Atividade

Esta atividade tem como objetivos:

- Ampliar os conhecimentos sobre os avanços da geometria molecular.
- Conhecer sobre sólidos de Arquimedes.

- Aprender a utilizar a Lei de Euler.
- Identificar a diferença entre diagonais das faces e diagonais do poliedro.
- Deduzir a fórmula da área do fullereno.

Construa a molécula do fullereno  $C_{60}$  usando bolas de isopor e varetas e responda as questões abaixo:

1. Use a lei de Euler e determine a quantidade de arestas, vértices e faces do  $C_{60}$ .
2. Quantas diagonais têm as faces pentagonais?
3. Quantas diagonais têm as faces hexagonais?
4. Quantas diagonais têm o poliedro fullereno  $C_{60}$ ?
5. Encontre a fórmula para calcular a área do  $C_{60}$  em função da aresta.
6. Pesquise sobre os outros fullerenos.

## Considerações finais

Será que estamos ensinando nossos alunos a identificar e usar toda essa geometria que está a nossa disposição?

Este foi um dos questionamentos que fizemos durante a elaboração deste trabalho, pois vemos que os alunos apresentam muitas dificuldades para identificar geometricamente um determinado objeto, ou seja, alguns não possuem os conceitos básicos que permeiam o estudo da geometria.

Analisando criticamente, provavelmente, o problema esteja no currículo e nos livros didáticos que as escolas adotam, pois a geometria é colocada lá no final do livro e com tanta álgebra que precisamos ensinar aos alunos, acabamos por deixar de lado o estudo dos conceitos geométricos. É preciso registrar também, que alguns professores, por não terem um bom conhecimento geométrico acabam “fugindo” deste conteúdo.

Outra consequência disto, é a falta de habilidade que os alunos demonstram quando precisam utilizar: régua, compasso e transferidor. Parece até que nunca lhes foram apresentados estes simples instrumentos. Tudo isso foi possível de ser observado durante a realização das atividades.

Durante a correção da primeira atividade chamou-nos a atenção às incoerências que os alunos escreveram nos itens que pediam para descrever o tipo de geometria que a disposição da molécula formava. Também apresentaram muita dificuldade para conseguir desenhar com o auxílio de régua, compasso e transferidor, bem como os pontos notáveis dos triângulos. A grande maioria precisou de auxílio para conseguir concluir.

Na realização da primeira atividade, alguns pareciam confusos, querendo saber se era química ou matemática que respondemos: eram as duas. Isto mostra, o quanto estão acostumados a separar o conhecimento com se fossem duas disciplinas que não interagem. Passado a estranheza do primeiro momento, tudo aconteceu naturalmente. Os alunos gostaram de poder sentir o objeto de estudo, pois normalmente só estudam olhando os

desenhos no papel.

Outra prova que normalmente são deixados de lado os conceitos geométricos, foi quando eles tiveram que deduzir as fórmulas para o cálculo da área e do volume das pirâmides, onde a maior dificuldade deles não era com os cálculos, mas em conseguir abstrair as informações necessárias para realizar os cálculos. A construção das moléculas ajudou muito neste sentido, pois quando conseguimos aliar teoria e prática, o aprendizado fica mais prazeroso e mais real, como disse a maior parte dos alunos.

As atividades desenvolvidas tiveram resultados satisfatórios, pois em duplas os alunos se soltaram mais, participaram ativamente de todo o processo de construção das moléculas e, principalmente, da construção dos conhecimentos ali envolvidos, alcançando assim os objetivos esperados.

Além dos conteúdos já elencados, é possível ainda, trabalhar: posição dos planos e das retas, distância entre dois pontos, ponto médio, etc.

Este trabalho, também, nos fez entender a necessidade de estudar e ensinar as demonstrações que envolvem os conteúdos matemáticos e químicos, pois depois que nos conscientizamos disto, passamos a olhar os livros didáticos de outra maneira e a preparar as aulas de modo que elas estejam sempre presentes.

Vale ressaltar, que a experiência que adquirimos na elaboração e execução deste trabalho, contribuiu de modo significativo para o nosso aperfeiçoamento pessoal e profissional, pois nos fez rever velhos conceitos, aprimorá-los e acrescentar novos.

# Referências Bibliográficas

- Almeida Filho, N. (1997). *Transdisciplinaridade e Saúde Coletiva*, volume II de *Ciência e Saúde Coletiva*.
- Ávila, G. (1995). Os objetivos do ensino da matemática. *Revista do Professor de Matemática*, 27.
- Barbosa, L. C. A. (2004). *Introdução à Química Orgânica*. Prentice Hall, São Paulo.
- Bochniak, R. (1992). *Questionar o conhecimento: interdisciplinaridade na escola*. Loyola, São Paulo.
- Brasil (1996). LDB – Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional. Lei nº 9.394, Brasília.
- Brasil (2000). PCNs Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino médio. Ministério da Educação – Sec. Educação Fundamental.
- Canto, E. L. e Peruzzo, F. M. (2003). *Química: Uma Abordagem do Cotidiano*, volume 1. Moderna, São Paulo.
- Clements, D. H. e Battista, M. T. (1992). *Geometry and spatial Reasoning in Handbook of Research of Mathematics Teaching and Learning*. National Council of Teacher of Mathematics, USA. Douglas A. Grows.
- Deptº Química (2012). Água. Revista Eletrônica do Departamento de Química, UFSC, Ano 4. Disponível em: [www.qmc.ufsc.br/qmcweb/artigos/agua.html](http://www.qmc.ufsc.br/qmcweb/artigos/agua.html). Acesso em: 12/12/2012.
- Dolce, O. e Pompeo, J. N. (2005). *Fundamentos da Matemática Elementar: Geometria Plana*, volume 9. Saraiva, São Paulo.

- Domingues, I. (2013). Transdisciplinaridade. Disponível em: [www.ufmg.br/diversa/2/entrevista.htm](http://www.ufmg.br/diversa/2/entrevista.htm). Acesso em: 22/02/2013.
- Gama Gases (2013). Trifluoreto de boro. Disponível em: [http://www.gamagases.com.br/propriedades\\_trifluoretodeboro.htm](http://www.gamagases.com.br/propriedades_trifluoretodeboro.htm). Acesso em: 15/01/2013.
- Gillespie, R. (1994). *Atoms, molecules and reactions: an introduction to chemistry*, volume 2. Prentice Hall, New Jersey.
- Grunkraut, M. (2012). Gás metano. Disponível em: [www.coopermiti.com.br/educacao/gasmetano](http://www.coopermiti.com.br/educacao/gasmetano). Acesso em: 13/11/2012.
- Iezzi, G., Dolce, O., e Dengenszajn, D. (2010). *Matemática: Ciência e Aplicações*, volume 2. Saraiva, São Paulo.
- Kishimoto, T. M. (1998). *O Jogo e a Educação Infantil*, volume 2. Pioneira, São Paulo.
- Lana, C. R. (2013). Geometria molecular. Disponível em: [educacao.uol.com.br/disciplinas/quimica/geometria-molecular-distribuicao-espacial-dos-atomos-em-uma-molecula.htm](http://educacao.uol.com.br/disciplinas/quimica/geometria-molecular-distribuicao-espacial-dos-atomos-em-uma-molecula.htm). Acesso em: 09/01/2013.
- Lima, E. L. (2012). *Geometria Analítica e Álgebra Linear*, volume 2. IMPA, Rio de Janeiro.
- Lira, J. C. L. (2012). Geometria molecular. Disponível em: [www.infoescola.com/quimica/geometria-molecular/](http://www.infoescola.com/quimica/geometria-molecular/) Acesso em: 16/11/2012.
- Lorena, S. (2012). Amônia. Disponível em: [www.infoescola.com/compostos-quimicos/amonia](http://www.infoescola.com/compostos-quimicos/amonia) Acesso em: 20/12/2012.
- Loyde, P., Peder, J., Passos, A. Q., e Barin, C. (2009). O ensino de geometria e a geometria molecular. 1º CPEQUI – 1º Congresso Paranaense de Educação em Química.
- Luckesi, C. C. e Luckesi, E. S. P. (2002). *Introdução a Filosofia: Aprendendo a Pensar*. Cortez, São Paulo.
- Mello, J. L. P. (2005). *Matemática: Construção e significado*. Moderna, São Paulo.

- Moraes, R. C. (2012). Imagens e reflexões – a linguagem da geometria nas escolas. Disponível em: [www.eca.usp.br/caligrama/n.4/10\\_ReginaKopke\\_COMP.pdf](http://www.eca.usp.br/caligrama/n.4/10_ReginaKopke_COMP.pdf). Acesso em: 15/12/2012.
- Neves, R. A. e Damiani, M. F. (2006). Vygotsky e as teorias da aprendizagem. *UNIrevista*, 1(2).
- Nobrega, O. S., da Silva, E. R., e da Silva, R. H. (2007). *Química*. Ática, São Paulo.
- Paiva, M. (2009). *Matemática*, volume 2. Moderna, São Paulo.
- Ribeiro, J. (2011). *Matemática: Ciência, Linguagem e Tecnologia*, volume 3. Scipione, São Paulo.
- Rocha Filho, R. C. (1996). *Fulerenos*. Número 4. SBQ, São Paulo. Química Nova na Escola.

# Apêndice A

## Conceitos e demonstrações

Neste apêndice, são apresentados alguns conceitos e demonstrações utilizados nos capítulos 2 e 3, de modo a facilitar e a complementar os conceitos ali empregados.

### A.1 Teorema de Pitágoras

Considere um triângulo retângulo cujos lados medem, numa dada unidade,  $b$  e  $c$ , e a hipotenusa mede  $a$ , de acordo com a figura A.1.

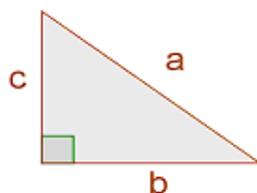


Figura A.1: Triângulo retângulo.

Construa dois quadrados iguais de lados  $b + c$  (figura A.2):

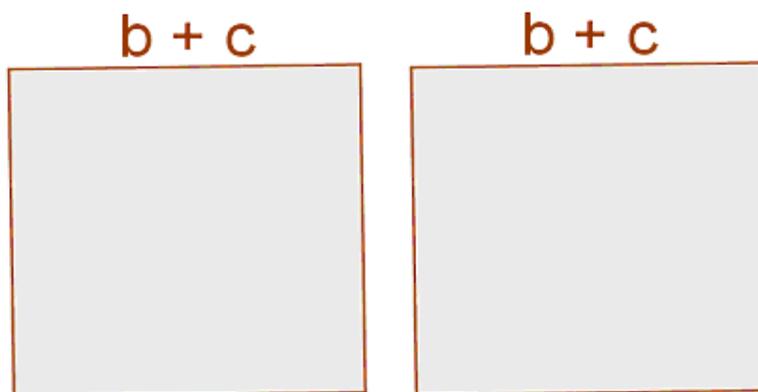


Figura A.2: Quadrados de lados  $b + c$ .

Num dos quadrados construa 4 triângulos da seguinte forma (ver figura A.3):

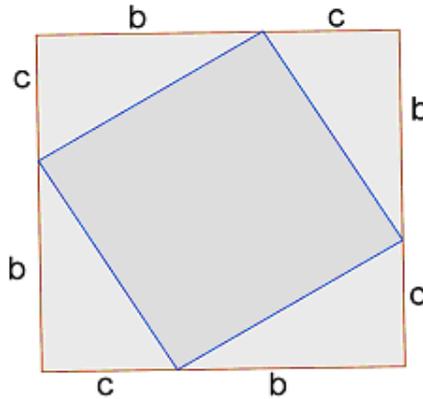


Figura A.3: Quatro triângulos inscritos num quadrado.

No outro retângulo, construa dois quadrados e 4 triângulos, conforme figura A.4:

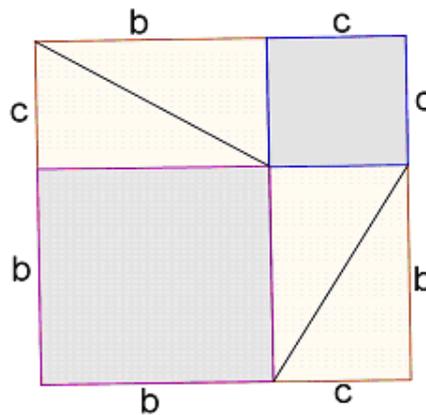


Figura A.4: Quatro triângulos inscritos num quadrado.

Como podemos constatar, em cada figura, o quadrado inicial tem de lado  $b + c$ . Um dos quadrados foi dividido em 4 triângulos e um quadrado com medida de lado igual a  $a$  (a medida da hipotenusa do triângulo considerado inicialmente).

O outro quadrado foi também dividido em 4 triângulos iguais aos do quadrado anterior.

E constata-se que temos dois quadrados iniciais geometricamente iguais e ambos contêm 4 triângulos geometricamente iguais ao triângulo retângulo considerado inicialmente então o que resta num quadrado tem que ser igual ao que resta no outro.

Se compararmos as áreas dos quadrados que restam, verificaremos que são iguais, ou seja,  $a^2 = b^2 + c^2$ , conforme podemos constatar na figura A.5.

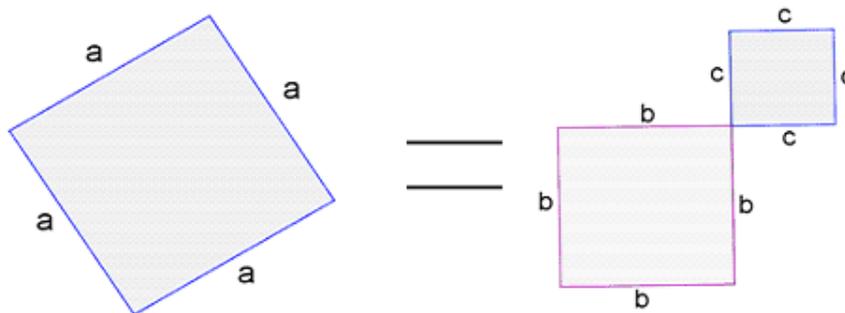


Figura A.5: Identidade geométrica de  $a^2 = b^2 + c^2$ .

## A.2 Princípio de Cavalieri

Bonaventura Francesco Cavalieri (1598-1647) foi um matemático italiano, discípulo de Galileu, que criou um método capaz de determinar áreas e volumes de sólidos com muita facilidade, denominado **princípio de Cavalieri**.

Imagine um conjunto de chapas retangulares de madeira, todas com as mesmas dimensões e, conseqüentemente, com o mesmo volume. Agora distribua estas chapas em duas pilhas diferentes, cada qual com a mesma quantidade de chapas, como mostra a figura A.6:

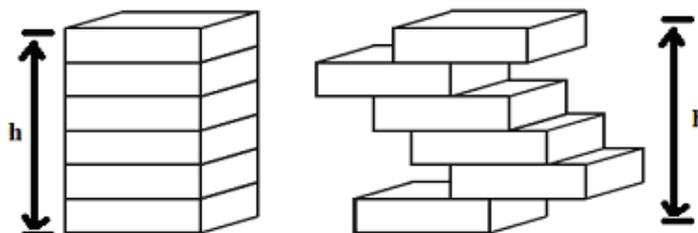


Figura A.6: Mesma quantidade de chapas em ambas as pilhas para ilustrar o princípio de Cavalieri.

Observe que, em ambas as pilhas, a quantidade de espaço ocupado pelas chapas é a mesma, isto é, as duas pilhas (sólidos) têm o mesmo volume.

Imagine agora, dois sólidos:  $S_1$  e  $S_2$  de mesma altura com base num mesmo plano  $\alpha$ , conforme figura A.7 e cortado horizontalmente por outro plano  $\beta$  paralelo ao plano  $\alpha$ . O que acontece com as áreas das bases destes sólidos?

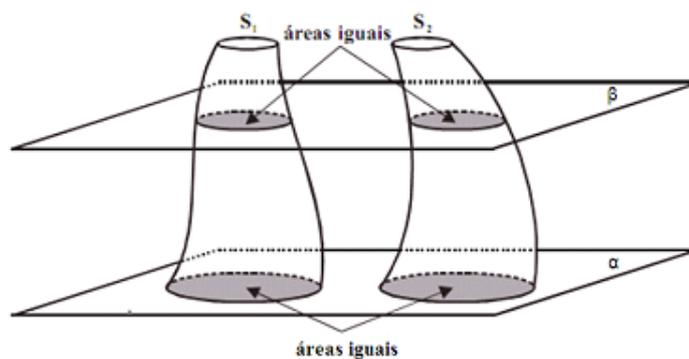


Figura A.7: Dois sólidos  $S_1$  e  $S_2$  de mesma altura.

Podemos observar que qualquer plano  $\beta$  paralelo ao plano  $\alpha$  e transversal aos sólidos  $S_1$  e  $S_2$  determina nestes sólidos, superfícies equivalentes, ou seja, de áreas iguais.

Esta mesma ideia pode ser estendida para as duas pilhas de chapas, cada qual com a mesma quantidade de chapas.

Neste sentido, o princípio de Cavalieri, segundo Lima (2006), pode ser enunciado assim: “São dados dois sólidos e um plano. Se todo plano paralelo ao plano dado secciona os dois sólidos segundo figuras de mesma área, então estes sólidos têm mesmo volume”.

## A.3 Lei dos senos e lei dos cossenos

A seguir, apresentamos as identidades conhecidas como lei dos senos e lei dos cossenos.

### A.3.1 Lei dos senos

As medidas dos lados de um triângulo são proporcionais aos senos dos respectivos ângulos opostos, e a constante de proporcionalidade é igual à medida do diâmetro da circunferência circunscrita ao triângulo.

Dado um triângulo  $ABC$ , consideremos a circunferência circunscrita a ele. Sejam  $O$  e  $R$ , respectivamente, o centro e a medida do raio desta circunferência.  $\hat{A}$ ,  $\hat{B}$  e  $\hat{C}$  são os ângulos do triângulo  $ABC$  com vértices em  $A$ ,  $B$  e  $C$ , respectivamente, conforme ilustra figura A.8.

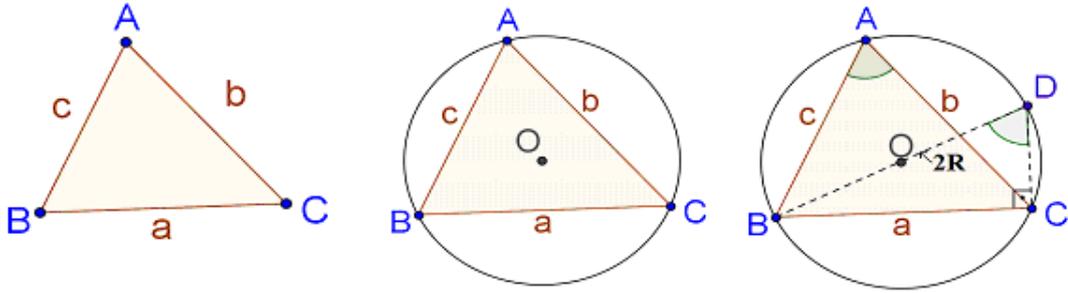


Figura A.8: Dois sólidos  $S_1$  e  $S_2$  de mesma altura.

Traçando o diâmetro  $\overline{BD}$ , temos:  $m(\widehat{BAC}) = m(\widehat{BDC})$ , pois  $\widehat{BAC}$  e  $\widehat{BDC}$ , como ângulos inscritos, tem o arco comum  $\widehat{BC}$  e determinam a mesma corda  $\overline{BC}$  na circunferência.

Como o  $\triangle BDC$  é inscrito em uma semicircunferência, ele é retângulo em  $C$ , daí:

$$\text{sen}(\widehat{BDC}) = \frac{a}{2R} \Rightarrow \text{sen}(\hat{A}) = \frac{a}{2R} \Rightarrow \frac{a}{\text{sen}(\hat{A})} = 2R$$

De modo análogo, conforme as figuras A.9(a) e A.9(b), temos:

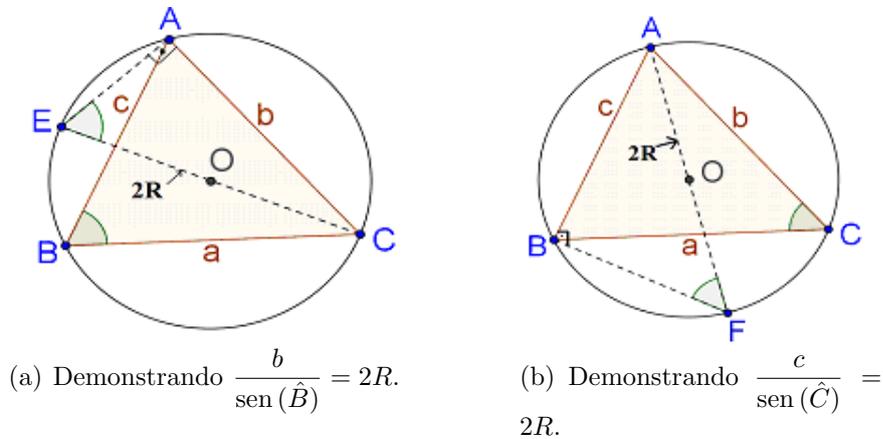


Figura A.9: Ilustração da lei dos senos para os ângulos  $\hat{B}$  e  $\hat{C}$ .

Assim:  $\frac{b}{\text{sen}(\hat{B})} = 2R$  e  $\frac{c}{\text{sen}(\hat{C})} = 2R$ .

Logo, temos que a lei dos senos é expressa assim:

$$\frac{a}{\text{sen}(\hat{A})} = \frac{b}{\text{sen}(\hat{B})} = \frac{c}{\text{sen}(\hat{C})} = 2R$$

Quando um dos ângulos for reto, a demonstração é análoga e mais imediata.

Quando um dos ângulos for obtuso, usa-se raciocínio análogo e a identidade  $\text{sen}(180 - A) = \text{sen} A$ .

### A.3.2 Lei dos cossenos

Em todo triângulo, o quadrado da medida de qualquer um dos lados é igual à soma dos quadrados das medidas dos outros dois, diminuída do dobro do produto da medida desses lados pelo cosseno do ângulo por eles formado.

Seja o triângulo acutângulo  $ABC$ , e  $CH = h$  a medida da altura relativa ao lado  $\overline{AB}$ , conforme a figura A.10.

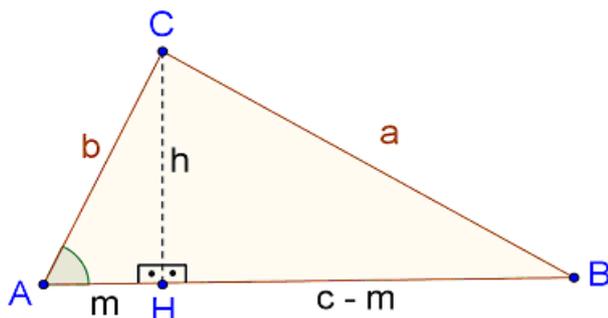


Figura A.10: Triângulo demonstrativo da lei dos cossenos.

Usando o teorema de Pitágoras temos:

$$\left. \begin{array}{l} \Delta BCH : a^2 = h^2 + (c - m)^2 \\ \Delta ACH : h^2 = b^2 - m^2 \end{array} \right\} \Rightarrow a^2 = b^2 - m^2 + cr - 2cm + m^2 \Rightarrow$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2cm \tag{A.1}$$

No triângulo  $\Delta ACH$  se tem que  $\cos \hat{A} = \frac{m}{b}$ , donde

$$m = b \cos \hat{A} \tag{A.2}$$

De (A.1) e (A.2), vem:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}$$

De modo análogo, podemos obter:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$

e

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos A$$

No caso do triângulo  $ABC$  ser retângulo, verifica-se que recai no teorema de Pitágoras.

No caso do triângulo  $ABC$  ser obtusângulo, usa-se o raciocínio análogo e a identidade:  $\cos(180 - A) = \cos A$ .

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

De modo análogo, podemos obter:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$

e

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos A$$

No caso do triângulo  $ABC$  ser retângulo, verifica-se que recai no teorema de Pitágoras.

No caso de o triângulo  $ABC$  ser obtusângulo, usa-se o raciocínio análogo e a identidade:  $\cos(180 - A) = \cos A$ .