UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO JOÃO DEL REI – UFSJ

Departamento de Matemática e Estatística

Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT

LARA CRISTINA MENDONÇA

São João del–Rei

2019

Lara Cristina Mendonça

O ENSINO DAS FUNÇÕES MATEMÁTICAS e^x E $\ln x$: INVESTIGAÇÃO BIBLIOGRÁFICA SOBRE A AUSÊNCIA/PRESENÇA DESSAS FUNÇÕES E SUAS IMPLICAÇÕES NO ENSINO MÉDIO E SUPERIOR

Dissertação apresentada como requisito parcial à obtenção do grau de Mestre em Matemática ao Mestrado Profissional de Matemática – PROFMAT.

Orientadora: Profª. Mestra Marianna Resende Oliveira

São João del-Rei

2019

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO JOÃO DEL REI – UFSJ
Departamento de Matemática e Estatística
Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT

O ENSINO DAS FUNÇÕES MATEMÁTICAS e^x E $\ln x$: INVESTIGAÇÃO BIBLIOGRÁFICA SOBRE A AUSÊNCIA/PRESENÇA DESSSAS FUNÇÕES E SUAS IMPLICAÇÕES NO ENSINO MÉDIO E SUPERIOR

A Comissão Examinadora, abaixo assinada,
aprova a Dissertação de Mestrado

Elaborada por
Lara Cristina Mendonça

como requisito parcial para obtenção do grau de
Mestre em Matemática

Comissão Examinadora:

____
Carlos Alberto Raposo da Cunha (UFSJ)

____
Sandro Rodrigues Mazorche (UFJF)

São João del-Rei

2019

Ficha catalográfica elaborada pela Divisão de Biblioteca (DIBIB)
e Núcleo de Tecnologia da Informação (NTINF) da UFSJ,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Mendonça, Lara Cristina.
M539e O ensino das funções matemáticas e^x e lnx: Investigação bibliográfica sobre a ausência/presença dessas funções e suas implicações no ensino médio e superior. / Lara Cristina Mendonça ; orientadora Marianna Resende Oliveira. -- São João del-Rei, 2019.
73 p.

Dissertação (Mestrado - Programa de Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT) -- Universidade Federal de São João del-Rei, 2019.

1. Função Exponencial. 2. Função Logarítmica. 3. Logaritmo Natural. 4. Número de Euler. 5. Análises Bibliográficas. I. Oliveira, Marianna Resende, orient. II. Título.

AGRADECIMENTO

A **Deus** pela força, sabedoria e saúde para que eu conseguisse finalizar essa etapa.

À minha amada Mãe **Francisca Helena Rezende Mendonça** pelo apoio, incentivo e por sempre acreditar em mim, mesmo nos momentos em que não acreditei.

Ao meu pai **Licínio José Mendonça**, aos meus irmãos **Wanderson Luiz Mendonça** e **Gustavo Henrique Rezende Mendonça** e aos meus sobrinhos **Yuri** e **Rhayssa** por estarem sempre ao meu lado.

Ao namorado **Adriano Galvão** pelo apoio, compreensão e ajuda para que essa dissertação se tornasse ainda melhor.

À minha pequena **Pepita**, que passou noites em claro comigo.

Aos amigos **Telma**, **Anderson**, **Ana Cristina** e **Mariana**, com vocês os momentos de tensão se tornaram suportáveis e divertidos.

À minha orientadora, **Prof. Marianna Resende Oliveira (DEMAT/UFSJ).** Obrigada pelo profissionalismo, dedicação, compreensão e pela grande ajuda. Você brilha!

À **SBM** pela iniciativa do Profmat e a **CAPES** pelo apoio Financeiro.

RESUMO

O ensino da matemática tem desafiado educadores na busca de estratégias para apresentar a disciplina, visando despertar a curiosidade e o espírito exploratório de nossos alunos, mostrando que existe uma relação entre os conteúdos estudados e a vida prática. Neste trabalho procuramos condensar assuntos relacionados aos casos especiais de funções, e^x e $\ln x$, que fazem parte das Funções Exponenciais e Funções Logarítmicas. Com tal intuito, o objetivo geral desta pesquisa é investigar, através de diferentes bibliografias, a ausência/presença do estudo das Funções Exponenciais e Logarítmicas e^x e $ln\, x$ no ensino básico e superior, por meio da análise de documentos oficiais, ementas de cursos de matemática de três universidades federais em Minas Gerais bem como livros didáticos selecionados. É importante que essas funções sejam ensinadas no ensino médio, pois, do contrário, os alunos, ao ingressarem no ensino superior, vão apresentar dificuldades na assimilação de conteúdos que trazem como pré-requisito a compreensão das funções e^x e $\ln x$ e conceitos a elas relacionados. Desenvolvemos um trabalho voltado para análise de Parâmetros, Propostas e Diretrizes curriculares relacionadas ao ensino médio, quanto às diversas formas de aplicações das funções exponenciais e logarítmica, mais especificamente $\boldsymbol{e^x}$ e $\boldsymbol{ln\, x}$. Verificamos também como se dá a abordagem da metodologia da aplicação dessas funções em alguns livros didáticos do ensino médio.

Palavras-chave: Função exponencial. Função logarítmica. Número de Euler. Aplicações. Documentos oficiais. Pesquisa bibliográfica.

ABSTRACT

The mathematics teaching has been a challenger to the teachers in order to get strategies to show it with different forms and awakening a thought that correlates the content studied with the day by day. In this work, the purpose was to study subjects related to special cases that are detailed in the contents of exponential functions and logarithmic functions. The investigation was made using different bibliographic researchers presents in the literature and that investigate the use of exponential functions e^x and logarithmic functions *ln x* at the high school. Was made the investigation of tree mathematics courses at three different federal universities of Minas Gerais and didactic materials used in teaching mathematics in schools. Is very important teaching this kind of function as the high school due to the use of it in the university and other careers after the conclusion of the high school. Failure to learn these fundamental functions corroborates with the student's difficulties in understanding the use of the constant *e*. This work was made analyzing the parameters and laws related to Brasilian high school in relation to the applications of exponential and logarithmic functions. Was analyzed the methodology used to explore this content in the high school and in the books used in the university.

Keywords: Exponential function. Logarithmic function. Number of Euler. Applications. Official documents. Bibliographic research.

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

BNCC – Base Nacional Comum Curricular

CBC – Currículo Básico Comum

GIMPS - Great Internet Mersenne Prime Search

LDB – Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional

MAT – Matemática

PAAE – Programa de Avaliação da Aprendizagem Escolar

PCN - Parâmetros Curriculares Nacionais

PCNEM - Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio

PGMAT- Pós-Graduação em Matemática

PH – Potencial Hidrogeniônico

PROEB – Avaliação da Rede Pública de Educação Básica

PROFMAT – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

UFMG – Universidade Federal de Minas Gerais

UFSJ - Universidade Federal de São João del-Rei

UFV – Universidade Federal de Viçosa

LISTA DE TABELAS

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE SÍMBOLOS

! - Fatorial

$\ln(x)$ – Logaritmo Natural ou Neperiano

C^{14} – Carbono 14

H_a^b – Faixa de Hipérbole

Log_e – Logaritmo Natural ou Neperiano

$\frac{d}{dx}$ – Derivada

$\frac{dv}{dt}$ – Proporção entre duas diferenciais

e^x – Função Exponencial

$<$ - Menor

$\neq$ - Diferente

$>$ - Maior

$\in$ - Pertence

$\leq$ - Menor ou igual

$\geq$ - Maior ou igual

$\leftrightarrow$ - Se e Somente Se

∞ - Infinito

e – Número de Neper ou Número de Euler

N – Números Naturais

Q – Números Racionais

R – Números Reais

Z - Números Inteiros

Cos – Cosseno

$Cosh$ – Cosseno Hiperbólico

Log – Logaritmo na base 10

Sen - Seno

$Senh$ – Seno Hiperbólico

$f(x)$ - Função

ix – Expressão Imaginária

lim – Limite

α – Letra grega Alfa

π – Número Pi

φ – Variável Independente

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

Atuo como docente, desde 2014, ministrando a disciplina de Matemática para as turmas da Educação Básica, Ensino Fundamental e Ensino Médio em Escolas Públicas das cidades de São João del-Rei e Tiradentes.

Deparei-me com alunos que demonstravam e ainda demonstram dificuldades na compreensão do conceito de Funções Exponenciais e Funções Logarítmicas e, mais especificamente, naquelas que envolvem o número de Euler, $\boldsymbol{e}$. Devido a essas dificuldades, pude perceber, por parte dos alunos em geral, certo desinteresse pelo assunto. Os casos especiais e^x e $\ln x$, que também fazem parte dessas funções, encontram-se de forma implícita nas mesmas, mas, não são desenvolvidos. Como esses casos normalmente não são estudados no Ensino Médio, os alunos saem da escola sem ter o conhecimento da importantíssima constante e, conhecida como número de Euler. Muitos desses alunos encontrarão dificuldades ao ingressarem em um curso universitário que contemple em sua grade curricular o estudo dessas funções.

A partir dessa situação, iniciei o estudo dessas funções e encontrei algumas barreiras, tais como: Como ensinar as funções e^x e $\ln x$ de forma significativa? Quais os pontos básicos no estudo dessas funções? Qual sua importância para aqueles alunos que pretendem ingressar no ensino superior, na área de exatas? Como transmitir o conceito do número $\boldsymbol{e}$, as funções e^xe $\ln x$ e suas principais aplicações, de forma adequada para alunos do ensino básico? Foi a partir dessas indagações que resolvi propor a elaboração e a construção desta pesquisa "sob uma perspectiva conceitual" e de cunho bibliográfico, analisando a literatura disponível.

A investigação proposta nesta pesquisa refere-se à importância de se estudar o formal de "e^x" e "$\ln x$" e a dedução de "e", no Ensino Médio (de forma pertinente e adequada aos conhecimentos desses alunos) e, posteriormente, no Ensino Superior.

Deduzir e entender o que é a constante e não é uma tarefa fácil para os discentes. Por não terem domínio sobre essas funções que envolvem tal constante, na maioria das vezes, esses alunos, quando chegarem ao ensino superior, certamente, apresentarão dificuldades nos estudos das disciplinas cuja base é a Matemática. Isso ocorre por causa dos problemas enfrentados na compreensão dos conceitos envolvendo e^xe $\ln x$.

2. JUSTIFICATIVA

Tanto nos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (PCNEM), Currículo Básico Comum (CBC) e na Base Nacional Comum Curricular (BNCC) são abordadas as Funções Exponenciais e Logarítmicas em geral, mas não estão registrados os casos especiais e^x, $\ln x$ e a dedução do número $\boldsymbol{e}$**.** Os casos citados acima são importantíssimos para quem pretende ingressar no Ensino Superior.

Como as funções, em sua forma geral, são mencionadas no PCNEM, CBC, BNCC, e os casos especiais fazem parte da mesma, subtende-se que os alunos já tenham conhecimento desses casos e, com isso, o conteúdo não é ensinado no Ensino Superior pelos professores, pois os mesmos pressupõem que os alunos já tenham estudado esses tópicos anteriormente.

Na ementa dos cursos do ensino superior, os casos relacionados ao estudo das funções e^xe $\ln x$ vêm implícitos no estudo das funções exponenciais e logarítmicas. Dentro desse contexto aparece o número de Euler ***(e)***, que é também de suma importância em disciplinas da área de exatas.

Dessa forma, os alunos, ao ingressarem no ensino superior, podem apresentar dificuldades na assimilação de conteúdos que trazem como pré-requisito a compreensão da constante *e.* Uma possível solução para esse problema seria que, logo no ensino médio, fossem apresentadas, dentro das funções exponenciais e logarítmicas, as definições e as aplicações das funções e^x e $\ln x$. A grande questão é como seria essa apresentação das funções e^x e $\ln x$ de forma didática e consistente, dentro das possibilidades para alunos do ensino médio. Esse é um tópico que não foi abordado neste trabalho, porém consideramos de extrema importância e uma boa oportunidade para trabalhos futuros.

3. OBJETIVOS:

3.1. Objetivo Geral

O objetivo geral desta pesquisa é investigar, através de diferentes bibliografias, a ausência/presença do estudo das Funções Exponenciais e Logarítmicas e^x e $ln\,x$ no ensino básico/superior.

3.2. Objetivos Específicos:

3.2.1 - Analisar e discutir os Parâmetros, Propostas e Diretrizes curriculares relacionadas ao ensino médio, quanto às diversas formas de aplicações.
3.2.2 - Verificar, em livros didáticos do ensino médio, como é abordada a metodologia da aplicação das funções exponenciais e logarítmicas, mais especificamente e^x e $ln\,x$.
3.2.3 - Verificar, em ementas de cursos de matemática, no ensino superior, como estão dispostos os tópicos sobre funções exponenciais e logarítmicas e se há registros explícitos das funções e^x e $ln\,x$.
3.2.4 - Apresentar em quais situações os alunos podem se deparar com tais funções, em aplicações e/ou definições que envolvam esses conceitos.

4. APORTES TEÓRICOS

Nesse capítulo apresentaremos os principais resultados (definições e teoremas) referentes às funções exponenciais e logarítmicas bem como a constante de Euler e as funções e^x e ln x.

4.1 - Função Exponencial

Definição: Seja $a > 0$ um número real diferente de 1. *A função exponencial* de base a, $f: R \rightarrow R_+^*$ é indicada pela notação $f(x) = a^x$ e deve satisfazer as seguintes propriedades, para quaisquer $x, y \in R$:

1. $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$

2. $a^1 = a$

3. $x < y \Rightarrow a^x < a^y$ quando $a > 1$.

$x < y \Rightarrow a^y < a^x$ quando $0 < a$ <1.

4. A função $f: R \rightarrow R_+^*$ definida por $f(x) = a^x$ é ilimitada superiormente.

5. A função $f(x) = a^x$ é contínua.

6. A função $f(x) = a^x$é sobrejetiva

Dessa forma, para todo número real $a > 0$, diferente de 1, a função exponencial $f: R \rightarrow R_+^*$ definida por $f(x) = a^x$ é uma correspondência biunívoca entre R e R_+^*, crescente se $a > 1$, decrescente se $0 < a < 1$, com a propriedade de transformar somas em produtos, isto é, $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$. A função exponencial $f(x) = a^x$ é injetiva devido a sua monotonicidade.

Temos, portanto, que a função exponencial $f(x) = a^x$ possui uma função inversa, a ser apresentada a seguir.

4.2 - Função Logarítmica

Definição: A *função logarítmica* de base a é a função $\log_a : R_+^* \rightarrow R$, inversa da função exponencial $f(x) = a^x$, que associa a cada número real positivo x o número real $\log_a x$, chamado o *logaritmo* de x na base a. Por definição de função inversa temos

$$a^{\log_a x} = x \text{ e } \log_a(a^x) = x.$$

Segue da relação $a^u \cdot a^v = a^{u+v}$ que $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$ para x e y positivos quaisquer.

De fato, se u $= \log_a x$ e v $= \log_a y$ então $a^u = x$ e $a^v = y$, logo

$$xy = a^u \cdot a^v = a^{u+v}$$

ou seja,

$$\log_a xy = u + v = \log_a x + \log_a y$$

A seguir apresentaremos resultados que nos levarão à dedução de uma base especial para funções exponenciais e logarítmicas: o número e (número de Euler).

4.3 - Teorema da Caracterização das Funções Logarítmicas

Seja f: $R_+^* \to R$ uma função monótona injetiva (isto é, crescente ou decrescente) tal que $f\,(xy) = f(x) + f(y)$ para quaisquer $x, y \in R_+^*$**.** Então existe $a > 0$ tal que $f(x) = \log_a x$ para todo $x \in R_+^*$.

Demonstração:

Sem perda de generalidade, vamos admitir f crescente. O outro caso é tratado igualmente. Temos $f\,(1) = f\,(1\,.\,1) = f\,(1) + f\,(1)$, logo $f\,(1) = 0$. Provemos o teorema inicialmente supondo que exista $a \in$ R tal que $f\,(a) = 1$. Depois mostraremos que isto sempre acontece, logo não é uma hipótese adicional. Como f é crescente e $f\,(a) = 1 > 0 = f\,(1)$, tem-se a > 1. Para todo $m \in$ N vale

$$f(a^m) = f\,(a.a.a.\dots a)$$
$$= f\,(a) + f\,(a) + f\,(a) + \dots + f\,(a)$$
$$= 1 + 1 + 1 + \dots + 1 = m.$$

Assim:

$$0 = f\,(1) = f\,(a^m . a^{-m})$$

$$= f\ (a^{m})\ +\ f\ (a^{-m})\ =\ m\ +\ f\ (a^{-m}),$$

Donde $f\ (a^{-m})\ =\ -m$.

Se $r\ =\ m/n$ com $m \in$ Z e $n\ \in$ N então $r\,n\ =\ m$, portanto

$$m\ =\ f\ (a^{m})\ =\ f\ (a^{rn})\ =\ f\ ((a^{r})^{n}\ \ =\ n\,.f\ (a^{r})$$

e daí $f\ (a^{r})\ =\ \frac{m}{n}\ =\ r$.

Se $x \in$ R é irracional então, para r e s racionais tem-se:

$$r\ <\ x\ <\ s\ \rightarrow a^{r} < a^{x} < a^{s}\ \ \rightarrow\ \ f(a^{r}) <\ f(a^{x}) <\ f\ (\ a^{s})\ \ \ \rightarrow\ \ r\ < f(a^{x}) <\ s.$$

Assim todo número racional r, menor do que x, é também menor do que $f(a^{x})$ e todo número racional s maior do que x é também maior do que $f(a^{x})$. Com isto, $f(a^{x}) =\ x$. Caso contrário, $f(a^{x}) <\ x$ ou $x\ <\ f(a^{x})$. Se $f(a^{x}) <\ x$, pela densidade de Q em R, existiria $s\ \in$ Q com $f(a^{x}) < r <\ \ x$. Como todo racional menor do que x é também menor do que $f(a^{x})$, isto é, não pode ocorrer.

De modo análogo, não pode ocorrer $x\ < f(a^{x})$.

Consideremos agora o caso geral, em que se tem uma função crescente $g{:}R_{+}^{*}\ \rightarrow R$ tal que

$$g\ (xy)\ =\ g\ (x)\ +\ g\ (y),$$

sem mais nenhuma hipótese. Então $g\ (1)\ =\ 0$ e, como $1\ <\ 2$, devemos ter $g\ (2)\ =\ b\ >\ 0$. A nova função $f\colon R_{+}^{*}\ \rightarrow R$, definida por $f\ (x)\ =\ \frac{g(x)}{b}$, é crescente, transforma somas em produtos e cumpre $f\ (2)\ =\ 1$. Logo, pela primeira parte da demonstração, tem-se $f\ (x) = \log_{2} x$ para todo $x\ >\ 0$. Isto significa que, para todo $x\ >\ 0$, vale:

$$x\ =\ 2^{f(x)}\ =\ 2^{g(x)/b}\ =\ (2^{\frac{1}{b}})^{g(x)}\ =\ a^{g(x)},$$

com $a\ =\ 2^{\frac{1}{b}}$. Tomando logaritmo na base a de ambos os membros da igualdade $a^{g(x)} =\ x$ vem, finalmente,

$$g(x) = \log_{a} x.$$

4.4 - Logaritmos Naturais

Mostraremos como os logaritmos naturais podem ser apresentados de forma geométrica, usando para isso o Teorema de Caracterização das funções logarítmicas, demonstrado na seção anterior.

Começamos pelo estudo de uma transformação geométrica bastante simples, que se revela útil para os nossos propósitos.

Para cada número real $k > 0$, definimos a transformação (= função) $T = T_K$: R² → R², que associa a cada ponto (x, y) ∈ R² o ponto $T(x, y) = (kx, y/k)$, obtido de (x, y) multiplicando a abscissa por k e dividindo a ordenada pelo mesmo k, conforme a Figura 1.

Um retângulo X de lados paralelos aos eixos, com base medindo b e altura medindo a, é transformado por T num retângulo $X' = T(X)$, ainda com lados paralelos aos eixos, porém com base kb e altura a/k. Portanto X e seu transformado $X' = T(X)$ têm áreas iguais. Mais geralmente, T transforma toda figura F do plano numa figura $F' = T(F)$, cujas dimensões em relação a F são alteradas pelo fator k na horizontal e $1/k$ na vertical. Logo F e F' têm a mesma área.

Podemos observar que todo polígono regular contido em F é transformado por T num polígono retangular de mesma área contido em F' enquanto T^{-1} faz o mesmo com os polígonos retangulares contidos em F'.

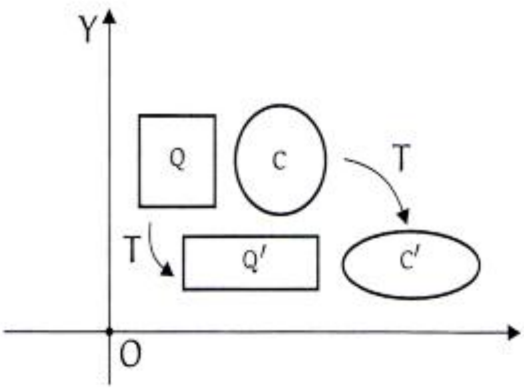

Figura 1- Um quadrado, um círculo e suas imagens $T(x, y) = (2x, y/2)$.

Nosso interesse está no efeito da transformação T nas faixas de hipérbole.

Seja:

$$H = \{(x, 1/x);\ x > 0\}$$

o ramo positivo da hipérbole equilátera $xy = 1$. Note que H é o gráfico da função

$$h: R_{+}^{*} \rightarrow R, h(x) = 1/x.$$

Dados a, b ∈ R^{+}, o conjunto H_{a}^{b} dos pontos (x, y) do plano tais que $a \leq x \leq b$ e $0 \leq y \leq 1/x$ chama-se uma faixa de hipérbole. Observe que H_{a}^{b} é o conjunto do plano limitado pelas retas verticais $x = a$ e $x = b$, pelo eixo das abscissas e por H, como mostra a Figura 2.

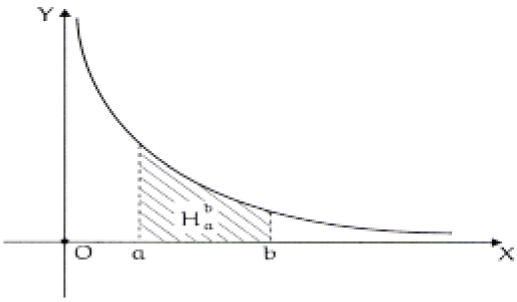

Figura 2 - A região H_{a}^{b}.

A transformação $T = T_{K}: R^{2} \rightarrow R$ leva a faixa H_{a}^{b} na faixa H_{ak}^{bk}, conforme a Figura 3.

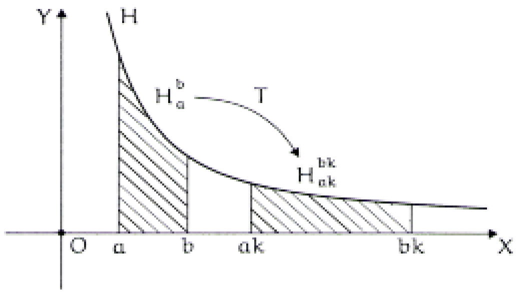

Figura 3- Imagem por T_{K} da faixa H_{a}^{b}.

Como T preserva áreas, segue que, para todo $k > 0$, as faixas H_{a}^{b} e H_{ak}^{bk} têm a mesma área.

A área de uma figura não é um número negativo. Mas às vezes é conveniente usar "áreas orientadas", ou seja, providas de sinal $+$ ou $-$. É o que faremos agora.

Convencionaremos que a área da faixa de hipérbole será positiva quando $a < b$, negativa quando $b < a$ e zero quando $a = b$.

Para deixar mais clara esta convenção, escreveremos:

$$ÁREA\ H_a^b,$$

com letras maiúsculas, para indicar a área orientada (provida de sinal). A área usual, com valores ≥ 0 , será escrita como área H_a^b. Assim, temos:

$$ÁREA\ H_a^b = área\ H_a^b > 0 \text{ se } a < b\ ;$$

$$ÁREA\ H_a^b = -\ área\ H_a^b < 0 \text{ se } b < a\ ;$$

$$ÁREA\ H_a^a = 0.$$

É óbvio que quando $a < b < c$, tem-se:

$$área\ H_a^b + área\ H_b^c = área\ H_a^c.$$

Uma consequência da adoção de áreas orientadas é que se tem

$$ÁREA\ H_a^b = -\ ÁREA\ H_b^a.$$

Daí segue que vale a igualdade

$$ÁREA\ H_a^b + ÁREA\ H_b^c = ÁREA\ H_a^c$$

em qualquer dos seis casos $a \leq b \leq c, a \leq c \leq b, b \leq a \leq c, b \leq c \leq a, c \leq a \leq b$ e $c \leq b \leq a$. Para provar tal igualdade basta considerar separadamente cada uma destas seis possibilidades.

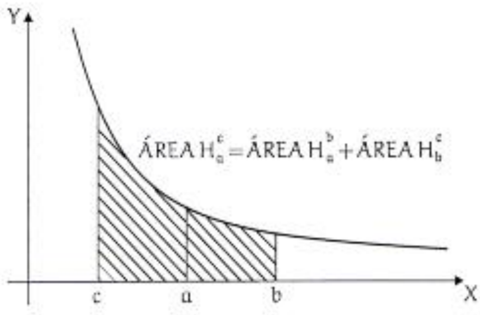

Figura 4- Aditividade das áreas orientadas.

Definimos uma função $f\colon R_+^* \to$ R pondo, para cada número real $x > 0$,

$$f(x) = ÁREA\ H_1^x.$$

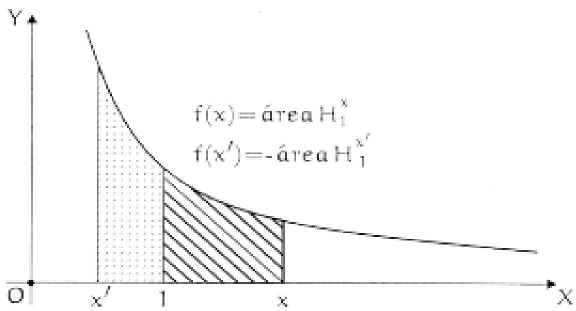

Figura 5- $f(x') = -$ área da região pontilhada.

Resultam imediatamente da definição as seguintes propriedades:

$$f(x) > 0 \leftrightarrow x > 1;$$
$$f(x) < 0 \leftrightarrow 0 < x < 1;$$
$$f(1) = 0\ e\ f \text{ é crescente.}$$

Além disso, observamos que, para $x, y \in R^+$quaisquer,

$$f(xy) = ÁREA\ H_1^{xy} = ÁREA\ H_1^x + ÁREA\ H_x^{xy}.$$

Como a transformação T_x preserva áreas, segue que $ÁREA\ H_x^{xy} = ÁREA\ H_1^y$.

Logo $f\ (xy) = \ ÁREA\ H_1^x + ÁREA\ H_1^y$, ou seja,

$$f\ (xy)\ =\ f\ (x)\ +\ f\ (y).$$

Pelo Teorema da Caracterização das funções logarítmicas, existe um número real positivo, que chamaremos de e, tal que $f(x)\ = \log_e x$ para todo $x \in\ R_+^*$.

Escreveremos $\ln x$ em vez de $\log_e x$ e chamaremos o número $\ln x$ de logaritmo natural de x.

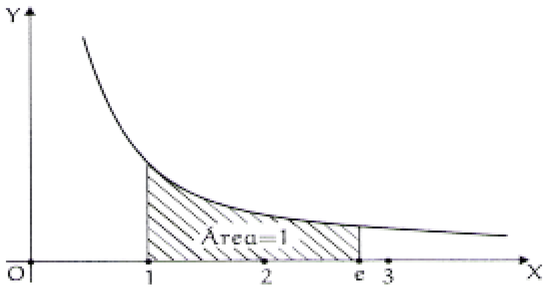

Figura 6- Definição do número e.

O número e, base dos logaritmos naturais, é caracterizado pelo fato de que seu logaritmo natural é igual a 1, ou seja $ÁREA\ H_1^e\ =\ 1$, conforme a figura 6. O número e é irracional.

Um valor aproximado dessa importante constante é $e\ =\ 2{,}718281828459$.

Os logaritmos naturais, de base e, são os mais importantes nas aplicações, especialmente aquelas que envolvem o uso do Cálculo Infinitesimal.

Alguns autores chamam o logaritmo natural de “logaritmo neperiano”, em homenagem a John Napier, autor da primeira tábua de logaritmos, em 1614. Entretanto, tal denominação não é inteiramente apropriada, pois o logaritmo originalmente definido por Napier não coincide com o logaritmo natural.

Usualmente, o número e é apresentado como o limite da expressão $(\ 1 + \frac{1}{n})^n$ quando n tende ao infinito. Noutras palavras, costuma-se introduzir e como o número real cujos valores aproximados por falta são os números racionais da forma $(\ 1 + \frac{1}{n})^n$, $n \in N$. Essas aproximações são tanto melhores quanto maior for o número n. Mostraremos agora que o número e, que acabamos de caracterizar pela propriedade $ÁREA\ H_1^e = 1$, é mesmo o valor daquele limite.

O argumento que usaremos para essa prova se baseia na Figura 7:

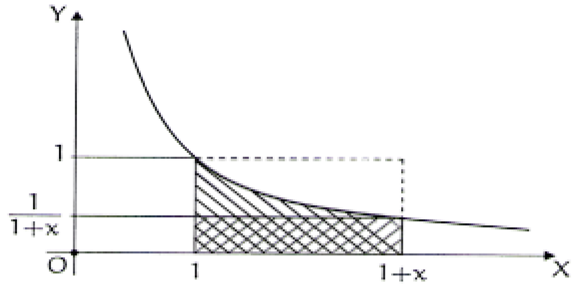

Figura 7- Estimando $ln\ (1 + x)$.

Nela temos um retângulo menor, cuja base mede x e cuja altura mede $\frac{1}{1+x}$, contido na faixa H_1^{1+x} e esta faixa, por sua vez, contida no retângulo maior, com a mesma base de medida x e altura igual a 1. Comparando as áreas dessas três figuras, podemos escrever, para todo $x > 0$

$$\frac{\mathrm{x}}{1+\mathrm{x}} < \ln(1 + \mathrm{x}) < \mathrm{x}$$

Dividindo por x:

$$\frac{1}{1+x} < \frac{\ln(1+x)}{x} < 1$$

Tomando $x = \frac{1}{n}$

$$\frac{n}{n+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 1$$

Portanto:

$$e^{\frac{n}{n+1}} < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e,$$

para todo $n \in$ N. Quando n cresce indefinidamente, $\frac{n}{n+1}$ se aproxima de 1, logo $e^{\frac{n}{n+1}}$ tende a e. Segue então destas últimas desigualdades que:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Este argumento ilustra claramente a vantagem que advém de se interpretar o logaritmo natural geometricamente: a noção de área é visualmente intuitiva, permitindo que se obtenham desigualdades como a que foi usada aqui.

A igualdade $e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ foi obtida a partir da desigualdade

$$\frac{1}{1+x} < \frac{\ln(1+x)}{x} < 1, \qquad (1)$$

válida para todo $x > 0$. Se considerarmos $-1 < x < 0$, teremos $-x > 0$ e $1 + x > 0$.

Portanto é válido ainda falar de $ln\,(1+x)$. Observamos que o retângulo cuja base mede $-x$ e cuja altura mede 1 está contido na faixa H_{1+x}^{1} e esta, por sua vez, está contida no retângulo de mesma base e altura $1/(1+x)$.

Comparando as áreas destas figuras, vem:

$$-x < -ln\,(1+x) < -\frac{x}{1+x}$$

Dividindo os 3 membros pelo número positivo $-x$ obtemos:

$$1 < \frac{\ln(1+x)}{x} < \frac{1}{1+x} \qquad (2)$$

As desigualdades (1) e (2) nos dão:

$$\frac{1}{1+x} < \ln(1+x)^{1/x} < 1 \quad \text{ou} \quad 1 < \ln(1+x)^{1/x} < \frac{1}{1+x}$$

ou seja:

$$e^{\frac{1}{1+x}} < (1+x)^{1/x} < e \quad \text{ou} \quad e < (1+x)^{1/x} < e^{\frac{1}{1+x}},$$

conforme seja $x > 0$ ou $-1 < x < 0$. Em qualquer hipótese, daí segue que

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x} = e. \qquad (3)$$

Isto significa que é possível tornar o valor da expressão $(1+x)^{1/x}$ tão próximo de e quanto se deseje, desde que se torne o número não-nulo x suficientemente pequeno em valor absoluto. (O próprio x pode ser >0 ou <0).

A igualdade (3) se exprime dizendo que $(1+x)^{\frac{1}{x}}$ tende a e quando x tende a zero. Tomando, por exemplo, $x = \frac{\alpha}{n}$, vemos que $\frac{1}{x} = \frac{n}{\alpha}$ e que $x \to 0$ se, e somente se $n \to \infty$. Logo (3) nos dá:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^{\frac{n}{\alpha}}\right]^\alpha = \lim_{x\to 0}\left[(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]^\alpha = e^\alpha .$$

Como caso particular da igualdade;

$$e^\alpha = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^n ,$$

válida para todo $\alpha \in$ R, obtemos:

$$\frac{1}{e} = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n.$$

5. SURGIMENTO DOS LOGARITMOS: CONTEXTO HISTÓRICO

No final do século XVI, exigiam-se longos e complexos cálculos aritméticos. Com a descoberta dos logaritmos, esses cálculos foram simplificados, pois tais funções permitiam que se efetuassem com presteza operações complicadas como a multiplicação, divisão, potenciação e extrações de raízes. De acordo com Lima (1996):

> Uma grande descoberta científica é feita simultaneamente por duas ou mais pessoas trabalhando independentemente. Não se trata de simples coincidência: tal descoberta corresponde à solução de um problema importante, do qual muitos se vinham ocupando. Assim aconteceu com os logaritmos. Jost Burgi (1552-1632), suíço, fabricante de instrumentos astronômicos, matemático e inventor, e John Napier (1550-1617), um nobre escocês, teólogo e matemático, cada um deles desconhecendo inteiramente o outro, publicaram as primeiras tábuas de logaritmos. (LIMA, 1996, p.1).

Uma tábua de logaritmos é composta por duas colunas de números. A cada número da coluna à esquerda corresponde um número à sua direita. Através dessa tábua, é possível calcular a multiplicação e divisão de dois números, a potenciação e raiz n-ésima de um número, utilizando a soma, subtração, multiplicação e divisão. Desse modo, para multiplicar dois números, basta somar os logaritmos; para dividir dois números, basta subtrair os logaritmos; para elevar um número a uma potência, basta multiplicar o logaritmo do número pelo expoente e para extrair a raiz n-ésima de um número, basta dividir o logaritmo do número pelo índice da raiz. Segundo Lima (1996).

> A utilidade original dos logaritmos resulta, portanto da seguinte observação: o trabalho de elaborar uma tábua de logaritmos, por mais longo e cansativo que seja, é um só. Depois dele executado, ninguém precisa mais, digamos efetuar multiplicações; adições bastam. (LIMA, 1996, P.2).

Contudo, com a utilização das máquinas de calcular e dos computadores, as tábuas de logaritmos perderam a sua importância como instrumento de cálculo, uma vez que, com o uso dessas máquinas, conseguimos obter de forma rápida e precisa a resposta desejada.

JOHN NAPIER

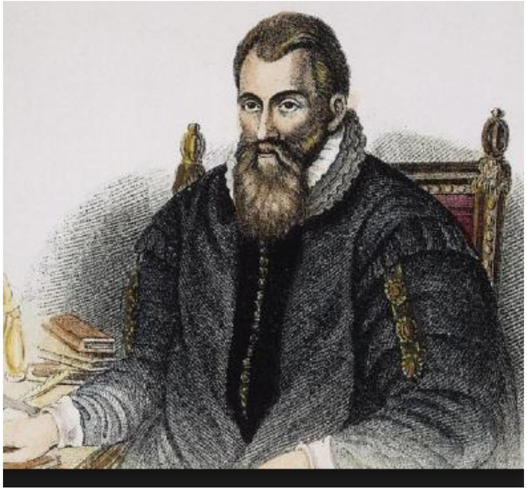

Figura 8- Disponível em: https://www.colegioweb.com.br/biografia-letra-j/quem-foi-john-napier.html. Acesso em: 12 Fev 2019

O contexto histórico que será abordado nesta seção é baseado na obra “e: A história de um número” de Eli Maor, para quem:

> A invenção dos logaritmos, uma ideia matemática abstrata, foi recebida de modo entusiástico por toda a comunidade científica, isso raramente ocorreu na história da ciência. E dificilmente podemos imaginar uma pessoa com menos probabilidade de realizar essa invenção. Seu nome era John Napier. (MAOR, 2008, p.11).

John Napier era filho de Filho de Sir Archibald Napier e de sua primeira esposa, Janet Bothwell. Nasceu em 1550 (não há uma data precisa) no castelo Merchiston, perto de Edimburgo, na Escócia.

Embora ele tivesse desenvolvido outras atividades, incluindo campanhas religiosas, ele levou 20 anos para desenvolver a ideia matemática abstrata que marcaria seu nome na história da matemática: os logaritmos.

A princípio ele chamou o expoente de cada potência de “número artificial”, mas, depois, decidiu pelo termo logaritmo, que significa “número proporcional”. Na notação moderna, significa dizer que se $N = 10^7(1 - 10\,-^7)^L$, então o expoente L é o logaritmo neperiano de N. A definição de logaritmos feita por Napier é diferente, em alguns aspectos, das definições modernas. Uma das propriedades básicas das operações com logaritmos é: o logaritmo do produto é igual a soma dos logaritmos, sendo que essa não se mantém para as definições de Napier.

Como $1 - 10^7$ é menor do que 1, os logaritmos de Napier diminuem com o aumento dos números, enquanto os logaritmos de base 10 (comuns) aumentam. Depois de muito estudo, Napier chegou muito perto de descobrir um número que seria reconhecido como a base universal dos logaritmos, sendo esse número o e, limite de
$(1 + 1/n)^n$ quando n tende ao infinito.

Napier publicou sua invenção em 1614 num tratado em latim intitulado "Mirifici logarithmorum canonis descriptio", obtendo sucesso imediato.

Um dos primeiros a utilizar os logaritmos foi o astrônomo Johannes Kepler, que os utilizou com grande sucesso em seus cálculos das órbitas planetárias.

Henry Briggs era professor de geometria do Colégio Gresham em Londres. Ele se interessou pela nova invenção e resolveu ir até a Escócia e se encontrar com Napier.

Nesse encontro Napier e Briggs decidiram que o logaritmo de 1 deveria ser zero e que o logaritmo de 10 deveria ser um. Mas, infelizmente Napier já não tinha mais energia para colocar essa ideia em prática, vindo a falecer em 1617.

5.1. A família Bernoulli e o problema da catenária

Ainda de acordo com Maor, "no mundo intelectual é raro encontrar uma família que, geração após geração, produz mentes criativas do mais alto nível, todas no mesmo campo." (MAOR, 2008, p.151). A família Bernoulli é um exemplo dessas mentes criativas. No século XVII, os Bernoullis mais jovens se destacaram no cenário matemático da Europa. Essa família ficou conhecida por suas rivalidades e brigas entre eles e com os outros.

O problema da *catenária* – a corrente suspensa, representou um importante e desafiador problema para a comunidade matemática nas décadas seguintes à invenção do cálculo. Este problema foi proposto por Jakob, um dos irmãos da família Bernoulli.

O problema proposto trata de determinar a curva (Figura 9) formada por um fio pendente, livremente suspenso a partir de dois pontos fixos.

Figura 9- A catenária: a curva de uma corrente suspensa. In.: e: A história de um número.

Para Jakob, o fio tem uma espessura constante e é ajustável em todas as suas partes. Já Galileu, imaginava que a curva era uma parábola. Mas foi Christian Huygens, cientista holandês que provou que a catenária não podia ser uma parábola. Porém, o problema maior ainda não tinha solução: encontrar a curva correta era um mistério, uma vez que só o cálculo poderia ajudar a desvendá-lo e consequentemente, resolvê-lo.

Um ano após o problema ser apresentado, apareceram três soluções corretas apresentadas por Huygens, Leibniz e Johann Bernoulli. As resoluções são diferentes, porém, os três matemáticos chegaram a uma única solução. Podemos observar que o autor do problema proposto não conseguiu resolvê-lo.

A descoberta da equação da curva da catenária foi anunciada como algo de extrema importância para o cálculo diferencial e os três matemáticos se orgulharam, pois, esse problema representava um dos maiores desafios matemático do século XVII.

Atualmente, esse problema é trabalhado nos cursos de cálculo avançado.

A tão famosa curva é representada pela equação $y = \frac{(e^{ax} + e^{-ax})}{2a}$, onde a é uma constante cujo valor depende dos parâmetros físicos da corrente, sua identidade linear (massa por unidade de comprimento) e a tensão com a qual ela é segura. Segundo Maor (2008):

> Devemos mencionar que a equação da catenária não foi apresentada originalmente na forma acima. O número e ainda não tinha um símbolo especial, e a função exponencial não era considerada função independente e sim um inverso da função logarítmica. (MAOR, 2008, p.185).

Segundo Leibniz, a catenária também poderia ser usada como um engenho para o cálculo dos logaritmos. Ela atuaria como uma espécie de tabela de logaritmos “analógica” para o caso de se perderem as tabelas de logaritmos.

Saindo do contexto exclusivamente matemático, temos que na arquitetura a catenária também se faz presente. O monumento Gateway Arch (Arco do Portal) em St. Louis, Missouri, um dos mais grandiosos do mundo, tem a forma de uma catenária invertida, conforme a Figura 10.

Figura 10-- O Arco do Portal em St. Louis, Missouri. Cortesia de Jeferson National Expansion Memorial / National Park Service. In.: e: A história de um número.

Utilizando a equação da catenária, temos que para $a = 1$

$$y = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad (1)$$

Podemos considerar uma segunda equação, em complemento à equação (1)

$$y = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad (2)$$

Quando as equações (1) e (2) são consideradas como funções da variável x, elas apresentam semelhanças para com as funções circulares $sen\, x$ e $cos\, x$ estudadas em trigonometria. O jesuíta italiano Vincenzo Riccati, primeiro a notar tais semelhanças, adotou a notação $Ch\, x$ e $Sh\, x$ para essas funções:

$$Ch\, x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad Sh\, x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad (3)$$

Riccati demonstrou que essas funções

> satisfazem a identidade $(Ch\,\varphi)^2 - (Sh\,\varphi)^2 = 1$(onde usamos a letra φ para simbolizar a variável independente), a qual, exceto pelo sinal de menos no segundo termo, é análoga a identidade trigonométrica $(cos\,\varphi)^2 + (sen\,\varphi)^2 = 1$.Isso mostra que $Ch\,\varphi\; e\; Sh\,\varphi$ estão relacionados com a hipérbole $x^2 - y^2 = 1$, do mesmo modo como $cos\,\varphi\; e\; sen\,\varphi$ se relacionam com o círculo unitário $x^2 + y^2 = 1$. (MAOR, 2008, p.188)

As notações adotadas por Riccati permaneceram quase as mesmas; hoje essas funções são representadas por $cosh\,\varphi\; e\; senh\,\varphi$ e conhecidas como “cosseno hiperbólico de φ” e “seno hiperbólico de φ”. O matemático mostrava-se interessado e curioso pela semelhança entre as equações $x^2 - y^2 = 1$ e $x^2 + y^2 = 1$ da hipérbole e do círculo unitário.

Sua teoria foi desenvolvida a partir da geometria da hipérbole, sendo que atualmente adota-se uma “abordagem analítica que usa as propriedades das funções e^x e e^{-x}. Percebe-se que a maioria das fórmulas usadas na trigonometria comum possuem equivalentes hiperbólicos” (MAOR, 2008, p.189). Ou seja, se substituirmos $sen\,\varphi$ e $cos\,\varphi$ por $senh\,\varphi$ e $cosh\,\varphi$ em uma identidade trigonométrica, a mesma permanecerá correta, com uma provável mudança de sinal em um dos termos. Por exemplo, as funções circulares acatam as fórmulas da derivada:

$$d/dx \;\; (cos\,x) = -\,sin\,x \qquad d/dx\,(sin\,x) = cos\,x \qquad (4)$$

E as fórmulas equivalentes para as funções hiperbólicas são:

$$d/dx\,(cosh\,x) = \; sinh\,x \qquad d/dx\,(sinhx) = cosh\,x \qquad (5)$$

A equivalência entre funções trigonométricas e hiperbólicas é altamente desejável e vantajosa para o estudo e manipulação das mesmas. Segundo Maor (2008)

> Poderíamos desejar que *todas* as relações entre as funções circulares tivessem um equivalente hiperbólico. Isto colocaria as funções circulares e hiperbólicas em uma base completamente igual, e, por implicação, daria à hipérbole um status igual ao do círculo. Infelizmente, este não é o caso. Diferente da hipérbole, o círculo é uma curva fechada; à medida que seguimos ao seu redor, as coisas devem retornar ao estado original. Em consequência, as funções circulares são *periódicas* – seus valores se repetem a cada 2π radianos.Esta é uma das características que torna as funções circulares importantes para o estudo dos fenômenos periódicos – da análise dos sons musicais à propagação das ondas eletromagnéticas. As funções hiperbólicas não possuem esta característica e seu papel na matemática é menos fundamental. (MAOR, 2008, p.190)

5.2. Euler, o número e e a mais famosa de todas as fórmulas

O matemático Leonhard Euler contribuiu em diversas áreas da matemática, como por exemplo, análise, teoria dos números, mecânica, hidrodinâmica, cartografia, topologia e teoria do movimento lunar. Além disso, ele foi o criador de muitos símbolos matemáticos, entre eles $i, \pi, e, f(x)$.

Filho de um clérigo, Leonhard Euler, nasceu na Basiléia em 1707. Sua carreira o levou ao exterior por longos períodos. Em 1733 obteve o diploma de professor de matemática, casou-se pela primeira vez e teve treze filhos, mas apenas cinco sobreviveram à infância.

Em 1766, Euler perdeu a visão do olho direito. Segundo relatos, para uns, a causa foi o excesso de trabalho e, para outros, o motivo seria o fato de observar o sol sem proteger os olhos. Em 1771, a sua casa pegou fogo, perdendo muitos dos seus manuscritos e, nesse mesmo ano, perdeu a outra visão.

Mesmo sem enxergar, Euler não parou de trabalhar, ele ditava os resultados para seus filhos e alunos registrarem.

> Dizem que Euler era capaz de fazer contas, mentalmente, com números de cinquenta dígitos e podia memorizar uma longa sequência de argumentos matemáticos sem precisar escrevê-los no papel. Tinha enorme poder de concentração e frequentemente trabalhava num problema difícil com os filhos no colo. (MAOR, 2008, p. 201).

O matemático veio a falecer à noite, quando estava brincando com os seus netos. Ele teve um derrame cerebral, em 18 de setembro de 1783.

Duas áreas de pesquisa foram fundadas por Leonhard Euler, a primeira foi a Teoria dos Números e a outra a Mecânica Analítica. Em relação à teoria dos números, podemos classificá-la como o mais “puro” de todos os ramos da matemática e em relação à mecânica analítica, a mais “aplicada” das matemáticas clássicas.

Um dos trabalhos de Euler que mais se destacou, foi a sua obra *Introduction in analys ininfinitorum* publicada em 1748. Essa obra chamava atenção para o número e e para a função e^x na análise. Como a função exponencial era considerada a inversa da função logarítmica, Euler colocou essas duas funções em uma base igual, com definições independentes.

$$e^x = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \qquad (1)$$

$$\ln x = \lim_{n\to\infty} n\left(x^{\frac{1}{n}}-1\right). \qquad (2)$$

Um indicador de que as duas funções são realmente inversas é que: se resolvermos a expressão $y = (1+x/n)^n$ para x, vamos obter $x = n(y^{\frac{1}{n}} - 1)$. O mais difícil é mostrar que os limites das expressões acima, à medida que $n \to \infty$ definem funções inversas. Para que isso aconteça, é preciso de alguns conhecimentos referentes ao processo de limite. Por exemplo, Euler usou a letra *i* para apontar um "número infinito", escrevendo o lado direito da equação (1) como $(1+\frac{x}{i})^i$.

A letra *e*, que representa 2,71828..., já tinha sido usada pelo matemático em um dos seus primeiros trabalhos, chamado "Meditação sobre Experimentos feitos recentemente sobre disparo do Canhão", em 1727. Euler define esse número, como sendo "o número cujo logaritmo hiperbólico é igual a 1". Em relação à escolha da letra, segundo Maor (2008)

> Não existe um consenso geral. De acordo com um ponto de vista, Euler a escolheu porque *e* é a primeira letra da palavra *exponencial*. Mais provavelmente a escolha ocorreu-lhe naturalmente, como a primeira letra "não usada" do alfabeto, já que as letras a, b, c e d aparecem frequentemente em outras partes matemática. Parece improvável que Euler tenha escolhido a letra e por ser a inicial de seu próprio nome. Ele era um homem muito modesto e amiúde atrasava a publicação de seu trabalho para que um colega ou estudante pudesse receber o devido crédito. De qualquer forma sua escolha do símbolo e, como vários de seus símbolos, foi aceita universalmente. (MAOR, 2008, p. 203).

Euler usou sua definição da função exponencial (equação 1) para desenvolvê-la como uma série infinita de potências. Para $x = 1$, temos a seguinte série numérica:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots \qquad (3)$$

Se repetirmos os passos que levam à equação (3) com x/n substituindo $1/n$ obteremos a série infinita

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots \qquad (4)$$

que é uma série familiar de potências para e^x. Pode-se mostrar que esta série converge para todos os valores reais de x; de fato, o rápido aumento dos denominadores faz a série convergir muito rapidamente. É desta série que os valores numéricos dos e^x são geralmente obtidos; os primeiros termos são, em geral, suficientes para se obter a precisão necessária.

Euler "brincava" com as fórmulas, fazendo vários tipos de substituições, até encontrar algo interessante. Utilizando a equação (4), ele substituiu sua variável real x pela expressão imaginária ix, onde $i = \sqrt{-1}$. Essa substituição foi extremamente audaciosa, pois em todas as definições da função e^x, a variável x sempre representou um número real. Ao substituí-la por um termo imaginário Euler estaria entrando em um contexto sem significados e sem garantias. Segundo Maor (2008), "substituir x por um número imaginário é brincar com símbolos sem sentido, mas Euler tinha suficiente fé em suas fórmulas para dar sentido ao sem significado."

Substituindo o x pelo ix na equação (4), teremos:

$$e^{ix} = 1 + ix + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \ldots \qquad (5)$$

O símbolo i, definido como raiz quadrada de -1, tem a prioridade de que suas potências inteiras se repetem em ciclos de quatro: $i = \sqrt{-1}$, $i^2 = -1, i^3 = -i, i^4 = 1$, e assim por diante. Em consequência, podemos escrever a equação (5) como:

$$e^{ix} = 1 + ix - \frac{x^2}{2!} - \frac{ix^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + - \ldots \qquad (6)$$

Euler mudou a ordem dos termos na equação (6), separando os termos reais dos termos imaginários. Isso pode ser perigoso, pois diferente das somas finitas, em que sempre podemos modificar a ordem dos termos sem afetar o resultado, fazer o mesmo com uma série infinita pode atingir o somatório, ou mesmo mudar a série de convergente para divergente. Ao modificar a ordem dos termos da equação (6) vamos obter a seguinte série:

$$e^{ix} = \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{4}{4!} - + \ldots\right) + i\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - + \ldots\right). \qquad (7)$$

Na época de Euler já se sabia que as duas séries que apareciam entre parênteses eram as séries de potências das funções trigonométricas cosseno x e seno x, respectivamente. E assim, chegou-se à notável fórmula:

$$e^{ix} = cos\, x + i\, sen\, x \qquad (8)$$

que liga de uma vez a função exponencial à trigonometria ordinária. Substituindo ix por $-\,ix$ na equação (8) e usando as identidades $cos(-x) = cos\,x \;\; e \;\; sen(-x) = -sen\;x$, Euler obteve a equação semelhante:

$$e^{-ix} = cos\,x\, - i\,sen\,x\,. \quad (9)$$

Finalmente, somando-se e subtraindo as equações (8) e (9) permitiu que ele expressasse $cos\,x$ e $sen\,x$ em termos das funções exponenciais e^{ix} e e^{-ix}.

$$cos\,x\, = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\,,\;\; sen\,x\, = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\,. \qquad (10)$$

As relações acima são conhecidas como fórmulas de Euler para funções trigonométricas.

Com a descoberta de um notável vínculo entre as funções exponenciais e trigonométricas, surgiram outras relações matemáticas. Assim, tomando $x = \pi$ na equação (8) e sabendo que $cos\,\pi\, = -1$ e $sen\,\pi\, = \,0$, Euler obteve a fórmula

$$e^{\pi i} = \,-1. \qquad (11)$$

Segundo MAOR(2008):

> Se “notável” é a opinião adequada para as equações 8 e 9, então devemos procurar uma palavra mais apropriada para descrever a equação (11) – que certamente se coloca entre as mais belas fórmulas de toda matemática. De fato, ao reescrevê-la como $e^{\pi i}\, + 1\, = 0$ obtemos uma fórmula que liga as cinco constantes mais importantes da matemática (e também as três operações matemáticas mais importantes – adição, multiplicação e exponenciação). Estas cinco constantes simbolizam os quatro grandes ramos da matemática clássica: aritmética, representada pelo 0 e pelo 1; a álgebra representada pelo i; a geometria pelo π e a analise pelo e. Não é de admirar que muitas pessoas tenham encontrado na fórmula de Euler todo tipo de significado místico. (MAOR, 2008, p. 208).

5.3. Um Episódio Curioso na História do e

Motivado pela fórmula de Euler $e^{\pi i} = -1$, o professor de matemática Benjamin Peirce criou novos símbolos para π e e. Para ele “os símbolos que usamos para denotar a base neperiana e a proporção da circunferência do círculo para com seu diâmetro são, por muitos motivos, inconveniente e a relação próxima entre estas duas quantidades deve ser indicada em sua notação”. (MAOR, 2008, p. 210).

O matemático propôs substituirmos os símbolos π e e (Figura 11) por:

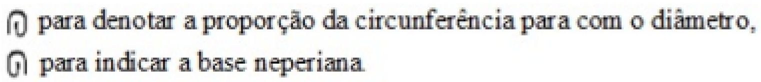

Figura 11- Novos símbolos. In.: e: A história de um número.

A escolha dos símbolos foi feita da seguinte maneira: o primeiro símbolo é uma modificação da letra c (circunferência), e o segundo é uma modificação da letra b (base). A união entre estas quantidades é mostrada pela equação representada na Figura 12.

Figura 12- Equação: Um episódio curioso da história de e. In.: e: A história de um número.

Os dois filhos de Benjamin Peirce, Charles Saunders Peirce e James Mills, também matemáticos usaram essa notação em seus livros, conforme a figura 13. James Mills ilustrou sua *Three and Four Place Tables* (1871) com a equação $\sqrt{e^{\pi}} = \sqrt[i]{i}$:

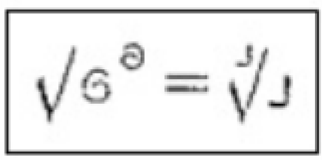

Figura 13- Os símbolos de Benjamin Peirce para π, e e i. A fórmula $e^{\pi i} = -1$ disfarçada. In.: e: A história de um número.

A sugestão dos símbolos não obteve sucesso, pois é preciso um pouco de atenção para saber diferenciá-los além das dificuldades tipográficas para imprimi-los.

5.4. Os números primos e sua incrível relação com o logaritmo natural

Um número primo é um número inteiro maior do que 1 que é divisível por um e ele mesmo. Os dez primeiros números primos são $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23\ e\ 29$. Quando o número não é primo, ele é chamado de *múltiplo*. (O número 1 não é primo e nem múltiplo). Os números primos têm uma grande importância na teoria dos números, pois todo inteiro maior do que 1 pode ser fatorado de maneira única, obtendo ainda assim um produto de números primos. Este fato é conhecido como *Teoria Fundamental da Aritmética*. Por exemplo, o número 60 pode ser fatorado em $60 = 4\ x\ 15$; mas $4 = 2\ x\ 2$ e $15 = 3\ x\ 5$, assim teríamos $60 = 2\ x\ 2\ x\ 3\ x\ 5$.

Um fato demonstrado no livro IX dos *Elementos* de Euclides é que existem infinitos números primos. O menor número primo é o 2, sendo também o único número primo par.

No ano de 2019 o projeto de pesquisa mundial Great Internet Mersenne Prime Search (GIMPS) trouxe para a área das ciências matemáticas a descoberta relacionada ao maior número primo conhecido. O novo número tem $24.862.048$ dígitos, mais de 1,5 milhão do que o número primo recorde outrora descoberto no ano de 2017. Apelidado de M82589933, é o 51º primo de Mersenne, assim nomeado em homenagem ao monge francês Marin Mersenne.

Os fabricantes de computadores e companhia de software encontraram uma utilidade impensada em relação à segurança nacional. "A dificuldade em se fatorar o produto de dois números primos bem grandes, se esses números forem desconhecidos pelo usuário, é a base da *criptografia de chave pública."* (MAOR, 2008, p.237). A descoberta de um novo número primo, era comemorada com champanhe ou com um selo postal.

Existem mistérios em algumas questões sobre os números primos. Por exemplo:

> Os primos têm a propensão de se arrumarem em pares de forma $p, p + 2$; alguns exemplos sendo $3\ e\ 5, 5\ e\ 7, 11\ e\ 13, 17\ e\ 19, 101\ e\ 103$. Encontramos esses pares mesmo entre os números maiores: 29.879 e $29.881, 140.737.488.353.699$ e $140.737.488.353.701$. O maior par conhecido em 1990 era $1.706.595\ x\ 2^{11.235} \pm 1$, cada um deles tendo 3.389 dígitos. Não se sabe se existe um número infinito

desses “primos gêmeos”, a maioria dos matemáticos acredita que sim, mas ninguém conseguiu provar ainda esta conjectura. (MAOR, 2008, p.237).

O que mais chama atenção em relação aos números primos é que não existe um padrão visível que oriente sua distribuição. De fato, todas as tentativas para descobrir uma fórmula que produza apenas primos falharam. Quando os matemáticos tiraram sua atenção dos primos individuais para uma distribuição média, obtiveram um grande sucesso. Em 1792, Carl Friedrich Gauss estudou uma tabela de primos selecionada pelo matemático suíço-alemão Johann Heinrich Lambert. A pretensão de Gauss era encontrar

> a regra que governa o número de primos abaixo de um dado inteiro *x*; mais precisamente, o número de primos $\leq x$. Hoje indicamos este número pela letra л e, como se trata de uma função de *x*, escrevemos π (x) (a letra л aqui não tem relação alguma com o número $л = 3{,}14\ldots$. Por exemplo, como existem cinco primos menores do que 12 (ou seja, 2, 3, 5, 7 e 11), teremos π (12) = 5. De modo semelhante π (13) = 6, já que o próprio 13 é primo. (MAOR, 2008, p.238).

Observa-se que o valor π (x) não se altera até que *x* chegue ao próximo número primo, ou seja, π (14) = π (15) = π (16) = 6 e que π (x) aumenta em saltos de 1, sendo que o intervalo desse salto é irregular. “Entretanto, mesmo uma olhada rápida nos inteiros mostra que, em média, esses intervalos tornam-se cada vez maiores, isto é, a chance de que um número escolhido ao acaso seja primo torna-se menor, em média, à medida que avançamos para os números maiores.” (MAOR, 2008, p.238). Gauss ficou na dúvida se para um valor grande de x o comportamento de л (x) não seria aproximado de alguma função já conhecida. Após essa dúvida, Gauss verificou a tabela de Lambert e supôs o seguinte:

> para um valor elevado de x, $\pi\,(x) \sim x/lnx$, onde $ln\,x$ é o logaritmo natural (logaritmo na base *e*)de *x*. O símbolo $\sim$ significa que a proporção entre $л\,(x)$ e $x/ln\,x$ tende para 1 à proporção que x tende a infinito. Em símbolos escrevemos $\lim_{x\to\infty}\frac{\pi\,(x)}{(\frac{x}{lnx})} = 1$. Esta famosa expressão ficou conhecida como *Teorema dos Números Primos*. (MAOR, 2008, p.238).

Se o Teorema dos Números Primos for escrito equivalente a$\frac{л\,(x)}{x} \sim \frac{1}{\ln x}$, podemos dizer que dado um número inteiro, a probabilidade dele ser primo aproxima-se de $\frac{1}{\ln x}$ à medida que

x aumenta sem limites. Mostraremos na Tabela 1, uma tabela (arredondando até quatro casas decimais) que compara as proporções $\frac{л\,(x)}{x}$ e $\frac{1}{\ln x}$ para valores crescentes de x.

Tabela 1- Tabela de proporções $\frac{л\,(x)}{x}$ e $\frac{1}{ln\,x}$ para valores crescentes de x. Retirado e adaptado de *e*: A história de um número. P.234

X	**л(x)**	**л(x)/x**	**1/lnx**
10	4	0.4000	0,4343
100	25	0.2500	0,2171
1.000	168	0.1680	0,1448
10.000	1.229	0.1229	0,1086
100.000	9.592	0.0959	0,0869
1.000.000	78.498	0.0785	0,0724
10.000.000	664.579	0.0665	0,062
100.000.000	5.761.455	0.0576	0,0543

Essa conjectura foi registrada no verso da tabela de logaritmos de Gauss, sendo ele mesmo o registrador e lá foi encontrada a declaração:

Primzahlen unter a (= ∞) a /la.

O próprio Gauss não tentou provar a sua conjectura, causando frustração em vários matemáticos. Foi Jacques Salomon Hadamard, da França e Charles de la Vallée-Poussin, da Bélgica que conseguiram demonstrar independentemente, a conjectura de Gauss.

O número *e* está ligado indiretamente aos números primos, uma vez que a presença do logaritmo natural faz parte da Teoria dos Números Primos. “E que tal associação possa ocorrer é notável: os primos pertencem ao domínio dos inteiros, a quintessência da matemática discreta, enquanto *e* pertence ao reino da análise, ao domínio dos limites e da continuidade.” (MAOR, 2008, p.239).

Richard Courant e Herbert Robbins fizeram uma citação em *What is Mathematics?:*

“Que a distribuição media de números primo possa ser descrita pela função logarítmica constitui uma descoberta notável, pois é surpreendente que dois conceitos matemáticos que parecem tão distantes um dos outro estejam de fato ligados de modo tão íntimo” (COURANT e ROBBINS apud MAOR, 2008, p.239).

6. A IMPORTÂNCIA DAS FUNÇÕES e^x e $\ln x$ EM DIVERSAS ÁREAS DO CONHECIMENTO

Apresentaremos nesse capítulo alguns exemplos de problemas em que são usadas as funções e^{x} e $\ln x$. Dessa forma, o possível desconhecimento de tais funções gera insegurança na tentativa de resolver tais problemas. Além disso, esse desconhecimento gera prejuízos para alunos de cursos de graduação na área de exatas, já que os mesmos certamente terão contato frequente com esses tipos de função em diversas disciplinas ao longo do curso. Nossa pretensão aqui é mostrar algumas situações problema em que as funções e^{x} e $\ln x$ são utilizadas, justificando assim sua importância.

Essas funções são amplamente utilizadas para modularmos problemas que envolvam:

- Crescimento ou decrescimento populacional
- Meia-vida de uma substância
- Medida da pressão atmosférica
- Resfriamento de um corpo
- Aplicações financeiras a juros compostos
- Crescimento ou decaimento radioativo
- Nível de intensidade sonora
- Terremoto
- Cálculo do ph das substâncias

6.1 - Aplicações

6.1.1. Juros Contínuos

(LIMA, Elon Lages. Logaritmos. Coleção do Professor de Matemática. SBM. 2ª edição, Rio de Janeiro, 1996, pág. 93)

Um capital c, empregado a uma taxa de k por cento ao ano, rende, no fim de um ano, juros no valor de $kc/100$. Ponhamos $\alpha = k/100$. Então c renderá, no final de um ano, juros no valor de αc. Decorrido um ano, o capital torna-se igual a $c + \alpha c$, ou seja, $c\,(1 + \alpha)$. Passados dois anos, o novo capital $c_1 = c\,(1 + \alpha)$, empregado à mesma taxa, tornar-se-á igual a $c_1\,(1 + \alpha) = c\,(1 + \alpha)^2$. Em m anos, teremos $c\,(1 + \alpha)^m$.

Se tomarmos uma fração $1/n$ de ano, o capital c, empregado à mesma taxa de juros, deverá render $\alpha c/n$ de juros, de modo que, decorrido a fração $1/n$ de ano, o capital c transforma-se em $c_1 = c + \frac{\alpha c}{n} = c\ (1 + \frac{\alpha}{n})$.

Empregando este novo capital c_1e esperando mais $1/n$ de ano, obtemos $c_1(1 + \frac{\alpha}{n})$, ou seja, $c\ (1 + \frac{\alpha}{n})^2$.

Prosseguindo assim, vemos que, se dividirmos o ano em n partes iguais e, depois de decorrido cada um desses períodos de $1/n$ de ano, capitalizarmos os juros rendidos, reinvestindo sucessivamente à mesma taxa, quando chegar o fim do ano, em vez de $c\ (1 + \alpha)$, obteremos um capital maior, ou seja, possuiremos $c\ (1 + \frac{\alpha}{n})^n$.

Um investidor exigente desejará que seus juros sejam capitalizados (isto é, juntando ao capital) a cada instante. Se isto ocorrer, no fim do ano ele receberá, em troca do investimento c, o total de

$$\lim_{n\to\infty} c\ (1 + \frac{\alpha}{n})^n = c.\, e^{\alpha}.$$

Este tipo de transação, em que os juros são capitalizados continuamente, é o que se chama *juros contínuos.*

Se a taxa de juros é referida a anos(k% ao ano, $\alpha = k/100$), então um capital c empregado a essa taxa será transformado, depois de t anos em

$$\lim_{n\to\infty} c\ (1 + \frac{\alpha t}{n})^n = c.\, e^{\alpha t}.$$

Exemplo de aplicação

(LIMA, Elon Lages. Logaritmos. Coleção do Professor de Matemática. SBM. 2ª edição, Rio de Janeiro, 1996, pág. 94)

Empregando-se um capital c a juros contínuos de 20% ao ano, em quanto tempo este capital será dobrado?

Resolução: Seja c o capital e k a taxa de juros contínuos. Como $\alpha = k/100$, temos que $\alpha = 20/100 = 0{,}2$. Queremos encontrar o tempo (t, em anos). Como o exercício procura o tempo em que o capital será dobrado, vamos igualar a $2c$.

$$c.\, e^{\alpha t} = 2c$$

Substituindo $\alpha = 0{,}2$ e cancelando c em ambos os membros, temos:

$$e^{0,2t} = 2$$

Aplicando ln nos dois membros dessa igualdade, obtemos

$$0,2t \; ln\, e = ln\, 2$$

Como $ln\, e = 1$ e $ln\, 2 = 0,693$ segue que

$$t = \frac{0,693}{0,2} = 3,46$$

Assim o tempo necessário para dobrar o capital é de 3,46 anos, ou seja, aproximadamente 3 anos e meio.

Nessa questão, primeiramente o aluno precisaria ter conhecimento de que a equação $C = C_0 . e^{\alpha t}$ é adequada para resolução do problema, ou seja, deveria ter conhecimento da equação e consequentemente da função exponencial que nela aparece para manipulá-la. Portanto, faz-se necessário um mínimo de conhecimento prévio da mesma.

Na sequência, para resolução do problema o aluno precisaria usar logaritmos naturais para determinar o valor de t procurado. Então é necessário que ele saiba por que usar justamente logaritmos naturais (saber que as funções $\ln x$ e e^x são inversas) e assim chegar à resposta final desejada. Sem esse conhecimento sobre funções exponencial e logarítmica o entendimento e resolução do exercício provavelmente não seriam alcançados.

6.1.2. Decaimento Radioativo e Tempo de Meia-Vida

(SAHA, G.B., Fundamentals of Nuclear Pharmacy. Springer, 410 p., Hancover, 2010)

Dentro da química nuclear os radionuclídeos apresentam um papel de fundamental importância. Desde o final do século XIX quando o Francês Henri Becquerel observou um comportamento diferenciado de uma amostra de óxido de urânio próxima de placas fotográficas, a química relacionada ao decaimento nuclear tem despertado interesse no entendimento dessas novas partículas. Os núcleos atômicos são partículas extraordinárias. Dentro do seu interior encontramos quantidades variadas de duas partículas fundamentais, prótons (Z) e nêutrons (N). Os diferentes elementos químicos na natureza apresentam quantidades variadas dessas partículas subatômicas no interior dos seus núcleos. A variação do número de prótons (também denominado como número atômico) consta nas propriedades particulares de cada elemento presente na tabela periódica.

O aumento do número de prótons e nêutrons dentro do núcleo atômico favorece o aumento da massa do elemento químico. Elementos químicos com massas elevadas apresentam um grande valor de Z. O aumento da quantidade de prótons dentro do núcleo atômico induz a repulsão dessas partículas a qual é minimizada pela desintegração natural do núcleo e a consequente formação de novos elementos químicos como menores valores de número atômico (decaimento radioativo). Cada substância radioativa possui a sua constante de desintegração (α) que é determinada empiricamente pela obtenção do tempo de meia-vida de cada radionuclídeo. O tempo de *meia-vida* representa o tempo necessário para que metade da massa original do elemento radioativo se desintegre. Durante a desintegração muitas partículas e radiações podem ser observadas, sendo as principais as partículas α, β e os raios γ,sendo essas últimas radiações de elevada energia.

Como a desintegração se processa continuamente ao longo do tempo, a massa $M(t)$ no instante t é uma lei de decaimento exponencial dada por:

$$M(t) \; = M_0 \, e^{-\alpha t},$$

Em que M_0 é a massa no momento inicial.

Para se calcular a meia vida, basta considerar $M(t) \; = \frac{M_0}{2}$. Logo,

$$\frac{M_0}{2} = M_0 \, e^{-\alpha t_0}$$

$$\frac{1}{2} = e^{-\alpha t_0}$$

$$ln \frac{1}{2} = ln \; e^{-\alpha t_0}$$

$$-\, ln \, 2 = \, -\, \alpha t_0$$

$$t_0 = \frac{ln 2}{\alpha}$$

Em que t_0 é a meia vida de uma substância cuja taxa de desintegração é α.

Exemplo de aplicação

(TAN, S. T. Matemática aplicada à administração e economia. 2ª Ed. São Paulo: Cengage Learning, 2011, p. 374).

Substâncias radioativas decaem exponencialmente. Por exemplo, a quantidade existente de rádio no instante t varia de acordo com a fórmula $M(t) \; = M_0 \, e^{-\alpha t}$,onde M_0 é a quantidade inicial de rádio e α é uma constante positiva apropriada. A meia-vida de uma substância radioativa é o tempo necessário para dada quantidade da substância ser reduzida pela metade. Agora, é sabido que a meia-vida do rádio é de aproximadamente 1.600 anos.

Suponha inicialmente que haja 200 miligramas de rádio puro. Encontre a quantidade existente da substância após t anos. Qual é a quantidade existente após 800 anos?

Resolução: Vamos determinar o valor da constante α.

Temos que $M_0 = 200$ miligramas é a quantidade inicial de rádio e que o tempo referente à meia-vida do rádio é $M(t) = M(1600) = 100$, e isso fornece:

$$M(t) = M_0\, e^{-\alpha t}$$

$$100 = 200\, e^{-1.600\alpha}$$

$$e^{-1.600\alpha} = \frac{100}{200} = \frac{1}{2}$$

Aplicando o logaritmo natural aos dois lados dessa equação obtemos

$$lne^{-1.600\alpha} = ln\frac{1}{2}$$

$$-1600\alpha\, lne = ln\, 1 - ln\, 2$$

Como $lne = 1\ e\ ln\, 1 = 0$, temos

$$-1600\alpha = -\, ln2$$

Substituindo $\ln 2$ por $0{,}693$ e isolando a constante α obtemos

$$-1600\alpha = -\, 0{,}693$$

$$\alpha = \frac{-\,0{,}693}{-1600} = 0{,}0004332$$

Portanto a quantidade de rádio após *t* anos é de

$$M(t) = 200\, e^{-0{,}0004332t}$$

Em particular, a quantidade de rádio após 800 anos é de

$$M(800) = 200\, e^{-0{,}0004332(800)} \sim 141{,}42$$

ou aproximadamente, 141 miligramas.

Nessa questão, o aluno precisaria ter conhecimento de que a equação adequada para a resolução do exercício seria $M(t) = M_0\, e^{-\alpha t}$.

Em seguida, o aluno precisaria usar logaritmos naturais, sendo necessário saber que as funções $\ln x$ e e^x são inversas e, na sequência, ter o conhecimento das propriedades do logaritmo para o desenvolvimento do exercício. Com esses conhecimentos, espera-se que o aluno consiga finalizar a resolução do exercício.

6.1.3. Resfriamento de Um Corpo

(LIMA, Elon Lages. Logaritmos. Coleção do Professor de Matemática. SBM. 2ª edição, Rio de Janeiro, 1996, pág. 98)

Uma situação análoga à da desintegração radioativa é a de um objeto aquecido, colocado num meio mais frio (ar ou água, por exemplo) cuja grande massa faz com que a temperatura desse meio permaneça constante, sem ser afetada pela presença do objeto mais quente. *A lei do resfriamento de Newton* afirma que, nessas condições, a diferença de temperatura *D*, entre o objeto e o meio que o contém, decresce com uma taxa de variação proporcional a essa própria diferença. Como no caso da desintegração radioativa, esta lei se traduz matematicamente assim: chamando D_0 a diferença de temperatura no instante $t = 0$ e $D(t)$ a diferença num instante *t* qualquer, tem-se $D(t) = D_0 \ .e^{-\alpha t}$, onde a constante α depende do material de que é constituída a superfície do objeto.

Exemplo de aplicação:

(LIMA, Elon Lages. Logaritmos. Coleção do Professor de atemática. SBM. 2ª edição, Rio de Janeiro, 1996, pág. 99)

Num certo dia, a temperatura ambiente é de 30º. A água que fervia numa panela, cinco minutos depois de apagado o fogo tem a temperatura de 65º. Quanto tempo depois de apagado o fogo a água atingirá a temperatura de 38º?

Resolução: No momento em que se apagou o fogo ($t = 0$), a temperatura da água era de 100º e a do ambiente 30º. Então temos $D_0 = 100 - 30 = 70$. Passados5 cinco minutos, a diferença da temperatura da água para o meio ambiente é dada por $D(5) = 70 \, . \, e^{-5\alpha}$. Sabemos que após cinco minutos de apagado o fogo, a temperatura é de 65º, portanto teremos $65 - 30 = 35$.

$$D(5) = 70 \, .e^{-5\alpha}$$

$$35 = 70 \, .e^{-5\alpha}$$

$$e^{-5\alpha} = \frac{35}{70} = \frac{1}{2}$$

Tomando o logaritmo natural nos dois membros da equação, vem:

$$ln e^{-5\alpha} = ln \frac{1}{2}$$

$$-5\alpha = -ln 2$$

Substituindo $ln\ 2$ por 0,693, temos

$$\alpha = \frac{-0{,}693}{-5} = 0{,}1386.$$

Queremos saber o valor de t para

$$D(t) = 70\,.e^{-0{,}1386t} = 38 - 30 = 8$$

$$8 = 70\,.e^{-0{,}1386t}$$

Tomando novamente o logaritmo natural e manipulando algebricamente, temos:

$$lne^{-0{,}1386t} = ln\left(\frac{8}{70}\right) = -ln\left(\frac{70}{8}\right)$$

$$t = \frac{\ln(\frac{70}{8})}{0{,}1386} = \frac{2{,}1691}{0{,}1386} = 15{,}65\ minutos.$$

Nessa questão, é necessário que aluno use o raciocínio lógico para definir a variação da temperatura da água e do ambiente. É preciso que ele tenha o mínimo de conhecimento da função exponencial para determinar a equação adequada para a resolução do problema e é fundamental que ele saiba manipular algebricamente os termos dessa equação.

Na sequência, é preciso que o aluno saiba aplicar logaritmo natural e reconhecer que as funções $\ln x$ e e^x são inversas e em seguida aplicar as propriedades do logaritmo para determinar o valor de t procurado. Espera-se que com esses conhecimentos, o aluno consiga finalizar o exercício, obtendo a resposta desejada.

6.1.4. O Método do Carbono 14

(LIMA, Elon Lages. Logaritmos. Coleção do Professor de Matemática. SBM. 2ª edição, Rio de Janeiro, 1996, pág. 97 e 98)

O carbono 14, indicado por C^{14}, é um isótopo radioativo do carbono, formado na atmosfera devido ao bombardeio da terra por raios cósmicos. Através dos tempos, a quantidade de C^{14} na atmosfera tem-se mantido constante porque sua produção é compensada por sua desintegração. Os seres vivos absorvem e perdem C^{14} de modo que, em cada espécie, a taxa de C^{14} também se mantém constante. (O carbono 14 é criado nos vegetais durante o processo da fotossíntese e absorvido pelos animais através da ingestão, direta ou indireta, de vegetais.) Quando o ser morre, a absorção cessa, mas o C^{14} nele existente continua a desintegrar-se. Este fato pode ser usado para determinar a idade de um fóssil ou de um objeto muito antigo feito de madeira. Para isto, precisamos saber que a meia-vida do C^{14} é de 5570 anos. Como vimos no decaimento radioativo, segue-se daí que a constante de desintegração do C^{14}é:

$$\alpha = \frac{\ln 2}{5570} = \frac{0{,}6931}{5570} = 0{,}0001244.$$

Exemplo de aplicação:
(LIMA, Elon Lages. Logaritmos. Coleção do Professor de Matemática. SBM. 2ª edição, Rio de Janeiro, 1996, pág. 98)

Vejamos como esse conhecimento foi usado para dirimir uma controvérsia. Num castelo inglês existe uma velha mesa redonda de madeira que muitos afirmavam ser a famosa Távola Redonda do Rei Artur, soberano que viveu no século V. Por meio de um contador Geiger (instrumento que mede radioatividade) constatou-se que a massa $M = M(t)$ do C^{14}de hoje existente na mesa é $0{,}894$ vezes a massa M_0 de C^{14} que existe num pedaço de madeira viva com o mesmo peso da mesa. M_0 é também a massa de C^{14} que existia na mesa quando ela foi feita, há t anos.

Sabemos que:

$$M = M_0 .e^{-\alpha t},$$

Donde $\frac{M}{M_0} = e^{-\alpha t}$. Isto significa que $0{,}894 = e^{-0{,}0001244t}$.
Daí tiramos:

$$t = -\frac{\ln(0{,}894)}{0{,}0001244} = \frac{0{,}1121}{0{,}0001244} = 901\ anos.$$

Se a mesa fosse mesmo a Távola Redonda, ela deveria ter mais de 1500 anos.

Nessa questão, o aluno precisaria ter conhecimento de que a equação adequada para a resolução do problema seria $M = M_0.e^{-\alpha t}$, ou seja, deveria reconher a função exponencial que nela aparece.

Na sequência, é necessário o uso do logaritmo natural para determinar o valor de t procurado. É fundamental que o aluno saiba o porquê do uso desse logaritmo, ou seja, precisaria ter conhecimento que as funções $\ln x$ e e^x são inversas. Em seguida, o aluno desenvolverá os cálculos e com o uso da calculadora chegará à resposta desejada.

6.1.5. O Paraquedista

(MAOR, Eli. e: a história de um número. 4ª Ed. Rio de Janeiro: Record, 2008. P. 145)
Um paraquedista salta de um avião e em t = 0 abre o seu para – quedas. Com que velocidade ele chegará ao solo?

Resolução: Para velocidades relativamente pequenas, podemos considerar que a força de resistência exercida pelo ar é proporcional à velocidade da queda. Vamos chamar a constante de proporcionalidade de k e a massa do paraquedista de m. Duas forças opostas estarão agindo sobre o paraquedista: seu peso mg (onde g é a aceleração da gravidade, cerca de 9,8 m/s^2), e a resistência do ar kv (onde $v = v(t)$ é a velocidade de queda no tempo t). A força resultante na direção do movimento é assim $F = mg - kv$, onde o sinal de menos indica a força de resistência age em uma direção oposta à direção do movimento.

A segunda lei do movimento de Newton diz que $F = ma$, onde $a = dv/dt$ é a aceleração ou taxa de variação da velocidade em relação ao tempo. Assim, teremos:

$$m \frac{dv}{dt} = mg - kv. \qquad (1)$$

A equação (1) é a *equação de movimento* do problema. Ela é uma equação diferencial linear tendo $v = v(t)$ como função desconhecida. Podemos simplificar a equação (1) dividindo-a por m e chamando de a a proporção k/m:

$$\frac{dv}{dt} = g - av \qquad \left(a = \frac{k}{m}\right) \qquad (2)$$

Se considerarmos a expressão dv/dt como a proporção entre duas diferenciais, poderemos reescrever a equação (2) de modo que as duas variáveis, v e t, fiquem separadas, uma em cada lado da equação:

$$\frac{dv}{g-av} = dt. \qquad (3)$$

Agora integrando cada lado da equação (3) – isto é, encontrarmos sua antiderivada. Isto nos dá

$$-\frac{1}{a}\, ln(g - av\,) \,=\, t \,+\, c, \qquad (4)$$

Em que ln significa logaritmo natural (logaritmo de base e) e c é a constante de integração. Podemos determinar c a partir da *condição inicial*: a velocidade no instante em que o paraquedas se abre. Chamando esta velocidade v_0, teremos $v = v_0$ quando $t = 0$. Colocando isso na equação (4) encontraremos $-\,1/a\, ln\,(g - av_0) = 0 + c = c$. Colocando este valor de c de volta na equação (4), teremos, depois de uma ligeira simplificação,

$$-\,\frac{1}{a}\,[ln(g - av) - ln(g - av_0)] = t.$$

Mas, pelas regras dos logaritmos temos que $ln\, x - ln\, y = ln\, x/y,$ de modo que podemos escrever a última equação como:

$$ln\,[\frac{g-av}{g-av_0}] \,=\, -at \qquad (5)$$

Finalmente, resolvendo a equação (5) para v em relação a t, obtemos:

$$v \,=\, \frac{g}{a}\,(1 - e^{-at}\,) \,+\, v_0 e^{-at}. \qquad (6)$$

Esta é a solução pedida $v = v(t)$.

Duas conclusões podem ser obtidas da equação (6). Primeira; se o paraquedista abrir o seu paraquedas imediatamente após saltar do avião, teremos $v_0 = 0$, de modo que o último termo da equação (6) é eliminado. Mas mesmo se ele cair livremente, antes de abrir seu para – quedas, o efeito da velocidade inicial $v_0 = 0$ diminui exponencialmente conforme o tempo avança. De fato, para $t \to \infty$, a expressão e^{-at} tende a 0 e a *velocidade limite* $v_\infty = g/a = mg/k$ será atingida. Esta velocidade limite é independente de v_0; ela depende apenas do peso mg do paraquedista e do coeficiente de resistência k. É este fato que torna possível um pouso seguro. Um gráfico da função $v = v(t)$ é mostrado na Figura 14.

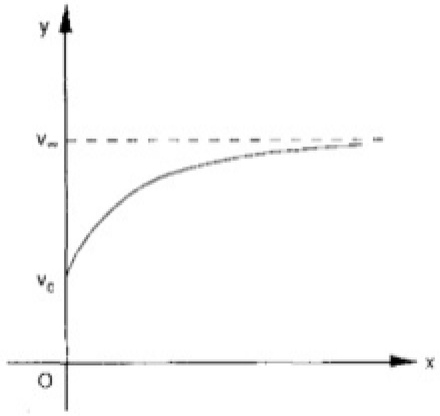

Figura 14- Um paraquedista em queda através do ar atinge uma velocidade limite v_∞.

7. ANÁLISES BIBLIOGRÁFICAS

O presente estudo visa fazer uma investigação bibliográfica sobre a ausência/presença do ensino das funções matemáticas e^x e $\ln x$ no ensino médio e superior. Com tal intuito, foi feita uma análise no PCNEM, PCN, CBC e BNCC, em alguns livros adotados no ensino médio e três grades curriculares e ementas do primeiro semestre do curso de Matemática de três instituições de ensino de Minas Gerais para uma possível verificação sobre o ensino dessas funções.

7.1 - PCNEM, PCN, CBC e BNCC

Antes de dar início ao estudo desse capítulo, é importante fazer algumas considerações sobre o significado e função de alguns parâmetros, currículos e bases.

O primeiro a ser abordado é o PCNEM **(**Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio), fruto de meses de trabalho de especialistas e educadores de todo o país. Foram feitos para auxiliar as equipes escolares na execução de seus trabalhos. Eles atuam no sentido de estimular e apoiar a reflexão sobre a prática diária, ao planejamento de aulas e, sobretudo, desenvolver o currículo da escola. Desse modo, eles contribuem também para a atualização profissional.

Já os PCN's (Parâmetros Curriculares Nacionais) têm como objetivo auxiliar o professor na tarefa de reflexão e discussão de sua prática pedagógica. Dentre suas funções podemos mencionar:

1. Rever objetivos, conteúdos, formas de encaminhamento das atividades, expectativas de aprendizagem e maneiras de avaliar; refletir sobre a prática pedagógica, tendo em vista uma coerência com os objetivos propostos;
2. Preparar um planejamento que possa, de fato, orientar o trabalho em sala de aula;
3. Discutir com a equipe de trabalho as razões que levam os alunos a terem maior ou menor participação nas atividades escolares;
4. Identificar, produzir ou solicitar novos materiais que possibilitem contextos mais significativos de aprendizagem; subsidiar as discussões de temas educacionais com os pais e responsáveis.

Em relação ao Ensino Médio, os parâmetros curriculares nacionais foram divididos em: Linguagem, Código e suas Tecnologias; Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias; e Ciências Humanas e suas Tecnologias.

Os PCN's e os PCNEM's são excelentes norteadores para desenvolvimento, inclusão e formação da educação básica, desde que, se ofereçam meios adequados para sua execução. Trata-se de uma proposta inovadora e necessita do comprometimento da sociedade para tenhamos não só um excelente ensino de Língua Portuguesa e Língua Estrangeira, mas também de todas as outras disciplinas que compõem o currículo escolar, desde a Educação Infantil até o Ensino Médio.

Por sua vez o CBC (Currículo Básico Comum) expressa aspectos fundamentais de cada disciplina, que não podem deixar de ser ensinados e aprendidos. Esse documento serve de base para a elaboração das avaliações anuais (PROEB, PAAE) e para o estabelecimento de um plano de metas para as escolas, já que os progressos dos alunos são referências para o sistema de responsabilização e premiação das escolas.

De acordo com Moura e Candau (2006), o currículo é o conjunto de "experiências escolares que se desdobram em torno do conhecimento, permeadas pelas relações sociais, buscando articular vivência e saberes dos alunos com os saberes historicamente acumulados e contribuindo para construir as identidades dos estudantes".

Dessa forma, por meio desse currículo, é possível contribuir com os professores na realização do trabalho pedagógico da escola, ajudar na consolidação das competências fundamentais das quais os alunos necessitam para que eles desenvolvam habilidades intelectuais e desenvolvam atitudes e comportamentos necessários para a vida em sociedade.

Por fim, a BNCC (Base Nacional Comum Curricular) apresenta caráter normativo e define o conjunto orgânico e progressivo de aprendizagens essenciais que todos os alunos devem desenvolver ao longo da Educação Básica.

De acordo com a LDB nº 9.394/1996 (Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional), a BNCC deve nortear os currículos dos sistemas e redes de ensino das Unidades Federativas e também as propostas pedagógicas de todas as escolas públicas e privadas de Educação Infantil, Ensino Fundamental e Ensino Médio no Brasil.

Para tal intuito, a Base estabelece conhecimentos, competências e habilidades que todos os estudantes devem desenvolver ao longo do ensino básico. Dessa forma, obedecendo aos princípios éticos, políticos e estéticos traçados pelas Diretrizes Curriculares Nacionais da Educação Básica, a Base segue aos propósitos de direcionar a educação brasileira para a formação humana integral e para a construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva.

De acordo com as orientações curriculares para o ensino médio (2006), os PCNEM (2002) e os PCN+ (2002), além de proporcionar aos alunos o desenvolvimento de habilidades relacionadas à representação, compreensão, comunicação, investigação, o ensino da Matemática ainda promove a contextualização sociocultural.

Quando se trata do estudo da Matemática Financeira, interessante tópico dentre as aplicações da Matemática, a função exponencial é um fator essencial a ser tratado, uma vez que os conteúdos juros e correção monetária se relacionam com essa função. Geralmente, é preciso resolver uma equação exponencial nos problemas de aplicação em geral, e isso pede o uso da função inversa – a função logaritmo. No entanto, é preciso pontuar que o trabalho de resolver equações exponenciais é pertinente quando associado a algum problema de aplicação em outras áreas de conhecimento, como Química, Biologia, Matemática Financeira, etc. Assim, procedimentos de resolução de equações sem um propósito maior devem ser evitados.

Ao estudar as funções, conforme é afirmado no PCNEM, o aluno terá condições de adquirir tanto a linguagem algébrica como a linguagem das ciências. Essa linguagem se faz necessária, pois expressa a relação entre grandezas e modela situações-problema. Assim, ao construir modelos descritivos de fenômenos, viabiliza, portanto, várias conexões dentro e fora da própria matemática.

No que diz respeito à tradição, para o PCNEM, o ensino de funções estabelece alguns pré-requisitos como o estudo dos números reais, conjuntos e suas operações e, posteriormente, definirá relações com o intuito de identificar as funções como relações particulares. Contudo, todo esse percurso deve ser descartado assim que a definição de função é estabelecida, já que para a análise dos diferentes tipos de funções todo o estudo que se relaciona a conjuntos e relações é desnecessário.

Segundo o PCNEM, toda a linguagem que apresenta um excesso de formalidade sobre o tema em questão deve ser relativizada e até mesmo abandonada da mesma forma que os estudos relacionados às funções injetoras, sobrejetoras, compostas e modulares.

Dessa forma, nomenclaturas excessivas ou detalhamentos devem ser evitados. De acordo ainda com o PCNEM, se o único caso de funções inversas que os alunos irão aprender no ensino médio forem as funções exponencial e logarítmica, não é necessário estudar tudo sobre funções injetoras, sobrejetoras e inversíveis. É questionado ainda o porquê de se estudar cologaritmos, característica e mantissa, se o foco do conteúdo for a análise de gráficos e as aplicações da função logarítmica.

Durante o processo de ensino-aprendizagem, é preciso que os alunos desenvolvam um olhar mais crítico e analítico em relação ao estudo de casos especiais de funções. É necessário que se tenha o cuidado de mostrar o que está sendo aprendido. As funções exponencial e logarítmica são usadas, por exemplo, para descrever a variação de duas grandezas em que o crescimento da variável independente é muito rápido, sendo aplicada em áreas do conhecimento como matemática financeira, crescimento de populações, intensidade sonora, ph de substâncias e outras. Assim, como se pontua no PCNEM, a resolução de equações logarítmicas e exponenciais e o estudo das propriedades de características e mantissas exercem papel secundário e podem, até mesmo, serem extintos.

De acordo com o PCNEM, o estudo das funções é trabalhado no primeiro ano do ensino médio, incluindo a função exponencial e logarítmica que é o objetivo do presente estudo. Ressalto que “a distribuição dos temas pode variar em função do número de aulas e do projeto da escola para aprofundamento de temas ou inclusão de outros.” (PCNEM, 2002,p. 128).

A Tabela 2 apresenta a organização dos temas estruturadores para as três séries do ensino médio com quatro aulas semanais proposta pelo PCNEM, sendo os temas:

1) Álgebra: números e funções
2) Geometria e medidas
3) Análise de dados

Tabela 2- Temas estruturadores para as três séries do ensino médio com quatro aulas semanais propostas pelo PCNEM. Tabela retirada do PCNEM, p. 128.

1ª Série	2ª série	3ª Série
1. Noção de função; Funções analíticas e não-analíticas, análise gráfica; sequências numéricas; função exponencial e logarítmica. 1. Trigonometria no triângulo retângulo.	1. Funções seno, cosseno e tangente. 1. Trigonometria do triângulo qualquer e da primeira volta.	1. Taxas de variação de grandezas.
2. Geometria plana: Semelhança e congruência; representações de figuras.	2. Geometria espacial: Poliedros, sólidos redondos; propriedades relativas à posição; inscrição e circunscrição de sólidos. 2. Métrica: áreas e volumes; estimativas.	2. Geometria analítica: representações no plano cartesiano e equações; intersecção e posições relativas de figuras.
3. Estatística: Descrição de dados; representações gráficas.	3. Estatística: Análise de dados. 3. Contagem.	3. Probabilidade.

Ele nos traz que o primeiro ano do ensino médio é um ano de formação básica, onde constam todos os métodos estruturados, o segundo ano é um ano de aprofundamento e o terceiro ano é o ano da complementação de formação.

Como o nosso objetivo é analisar algumas funções específicas, segue abaixo alguns registros constando o ano em que essas funções são trabalhadas.

As funções exponenciais, apresentadas na Tabela 3, são trabalhadas no primeiro ano do ensino médio, eixo temático II, tema 5: Funções.

Tabela 3- Conteúdo relacionado às funções exponenciais trabalhados no primeiro ano do ensino médio. Adaptado de Registro do CBC, p. 12

Tópico	Habilidade
12. Função exponencial	12.1. Identificar exponencial crescente e exponencial decrescente. 12.2 Resolver problemas que envolvam uma função do tipo $Y(x) = Kax$. 12.3. Reconhecer uma progressão geométrica como uma função de forma $Y(x) = Kax$ definida no conjunto dos números inteiros positivos.

Com base nas informações acima, podemos perceber que embora as funções exponenciais e logarítmicas devam ser ensinadas, não há registro específico sobre os casos especiais e^x e $\ln x$.

De acordo com o PCNEM [p.128], os temas para a primeira série dificilmente serão muito diferente dos que foram propostos, mas vale observar que:

> Se o número de aulas semanais for inferior a quatro, o professor deve elaborar seu planejamento tendo como foco as idéias centrais de cada tema. No primeiro tema, a ênfase deve estar no conceito de função e em seu uso para modelar situações contextualizadas e na interpretação de gráficos; em trigonometria é possível deter-se na resolução de problemas que usem as razões trigonométricas para cálculo de distâncias. (PCNEM, p. 129)

O CBC visa à obtenção de um desempenho satisfatório na rede estadual de ensino de Minas Gerais. Visa também especificar e dar maiores detalhes sobre as unidades, temáticas e ainda sugerir novas estratégias de ensino-aprendizagem. Dessa forma, podemos afirmar que "os CBCs não esgotam todos os conteúdos a serem abordados na escola, mas expressam os aspectos fundamentais de cada disciplina, que não podem deixar de ser ensinados e que o aluno não pode deixar de aprender." (PROPOSTA CURRICULAR – CBC ENSINO MÉDIO, 2007 p. 1)

É importante ressaltar que alguns tópicos e temas apresentados no CBC são considerados essenciais para a aprendizagem e desenvolvimento do aluno. Contudo, é preciso lembrar que se trata de um documento aberto a aperfeiçoamentos e reformulações. Assim, as habilidades e as competências apresentadas no CBC:

> foram feitas a partir de uma revisão do primeiro documento sobre a Proposta Curricular para a Matemática no Ensino Médio do Estado de Minas Gerais, publicado em 2005 pela SEE. Esta revisão está baseada nas sugestões obtidas, durante os anos de 2005 e 2006, por meio de contatos diretos com professores da rede estadual (nos cursos de capacitação, palestras e debates, no Fórum Virtual), e com estudantes de licenciatura em Matemática e docentes de várias instituições de ensino superior (PROPOSTA CURRICULAR – CBC ENSINO MÉDIO, p.3).

Analisando as habilidades acima, podemos perceber que não aparece nenhum registro específico do número de Euler e nem da função e^x.

Já as funções logarítmicas (Tabela 4) são trabalhadas no segundo ano do ensino médio, eixo temático V, tema 11: Funções.

Tabela 4 - Conteúdo relacionado às funções logarítmicas trabalhados no segundo ano do ensino médio. Adaptado de Registro do CBC, p. 14.

Tópico	Habilidade
26. Função logarítmica	26.1. Reconhecer a função logarítmica como a inversa da função exponencial. 26.2. Utilizar em problemas as propriedades operatórias da função logarítmica. 26.3. Resolver problemas que envolvam a função logarítmica. 26.4. Reconhecer o gráfico de uma função logarítmica.

Fazendo uma análise da tabela acima, percebe-se que logaritmo natural, *ln(x)*, não é mencionado especificamente nas habilidades do conteúdo programático para o segundo ano do ensino médio.

De acordo com a BNCC, na competência específica número 3, habilidade (EM13MAT305) temos: “Resolver e elaborar problemas com funções logarítmicas nos quais é necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como os de abalos sísmicos, ph, radioatividade, Matemática Financeira, entre outros.” (BNCC, p. 536,2018).

Conforme a habilidade acima, citamos o exemplo do ph. Em química, ph é uma escala numérica adimensional utilizada para especificar a acidez de uma solução aquosa. Para calcularmos essa acidez, utiliza-se o logaritmo na base 10, sendo esse ensinado no ensino médio. Já na matemática financeira, utiliza-se também o logaritmo na base 10 na aplicação do cálculo do montante em um sistema de juros compostos.

De acordo com a BNCC, na competência específica número 4, habilidade (EM13MAT403) temos: “Analisar e estabelecer relações, com ou sem apoio de tecnologias digitais, entre as representações de funções exponencial e logarítmica expressas em tabelas e em plano cartesiano, para identificar as características fundamentais (domínio, imagem, crescimento) de cada função.” (BNCC, p.539,2018).

Em relação a essa competência, no ensino médio, ensina-se a diferença entre uma função exponencial crescente ou decrescente, o gráfico de uma função exponencial e logarítmica, qual delas cresce ou decresce mais rapidamente, o domínio e a imagem das mesmas.

Após a análise das competências e habilidades citadas, percebe-se, mais uma vez, que os casos especiais e^x e $\ln x$ permanecem implícitos nas habilidades (EM13MAT305) e (EM13MAT403).

Portanto, pelo que foi visto anteriormente, não há registros específicos do estudo das funções e^x e $\ln x$ no CBC, no PCNEM e na BNCC.

7.2 - Ementas e Grades Curriculares do Ensino Superior

Como o objetivo do nosso estudo, são as Funções Exponenciais e Logarítmicas, em especial os casos e^x e $\ln x,$ será analisado somente o primeiro semestre do curso de Matemática de algumas Universidades Federais para verificarmos se esses casos constam nas ementas.

7.2.1- Universidade Federal de São João del-Rei (UFSJ)

Na Universidade Federal de São João del-Rei, as disciplinas oferecidas no primeiro semestre são Fundamentos da Matemática Elementar I, Geometria Analítica, Introdução ao Cálculo e Introdução à Lógica. Tais informações acerca das disciplinas do curso citado, são apresentadas na Tabela 5.

As funções em estudo encontram-se no componente curricular de Introdução ao Cálculo (Tabela 6). Na ementa dessa disciplina, aparecem somente as Funções Exponenciais e Logarítmicas em geral. Os casos e^x e $\ln x$ não são especificados. Portanto não podemos concluir se esses casos são e como são abordados pelos professores em sala de aula. Vale a pena lembrar que esses casos deveriam ser ensinados de forma cautelosa, uma vez que os mesmos são de grande importância para o desenvolvimento de outras disciplinas no decorrer da graduação.

Tabela 5 - Grade curricular do curso de matemática noturno – UFSJ – 1º Semestre. Retirado e adaptado de: https://goo.gl/5Futmi.

1º Semestre				
Componentes Curriculares	Aulas Semanais	Carga Horária		
		Total	Teórica	Prática
Geometria Analítica	6	108	108	-
Introdução à Lógica	2	36	36	-
Introdução ao Cálculo	6	108	108	-
Fundamentos da Matemática Elementar I	4	72	36	36
Total	18	324	288	36

Tabela 6 - Ementa do curso de matemática noturno – UFSJ – 1º Semestre. Retirado e adaptado de: https://goo.gl/KeQ4t5.

INFORMAÇÕES BÁSICAS				
Currículo 2011	Unidade Curricular Introdução ao cálculo			Unidade acadêmica DEMAT
Período 1º	Carga horária			Código CONTAC (a ser preenchido pela DICON)
	Teórica 108	Prática -	Total 108	
Natureza Obrigatória	Grau acadêmico/habilitação licenciatura		Prerrequisito não há	Correquisito não há
Ementa				

1. Conjuntos;
2. Conjunto dos números naturais e conjunto dos números inteiros;
3. Conjunto dos números racionais e conjunto dos números irracionais;
4. Conjunto dos números reais;
5. Relações;
6. Funções
6.1. O conceito de função.
6.2. Funções reais de uma variável real:
6.2.1. Domínios, contradomínio e imagem direta e imagem inversa.
6.2.2. Raízes.
6.2.3. Estudo de sinais.
6.3. Exemplos de funções.
6.4. Gráfico de uma função.
6.5. Funções pares, ímpares, constantes, crescentes, decrescentes e periódicas.
6.6. Funções injetivas, funções sobrejetivas e funções bijetivas.
6.7. Composição de funções e a função inversa.
6.8. Principais funções elementares e propriedades:
6.8.1. Função linear.
6.8.2. Função quadrática.
6.8.3. Função polinomial.
6.8.4. Função racional.
6.8.5. Função potência.
6.8.6. Função maior inteiro.
6.8.7. Função exponencial.
6.8.8. Função logarítmica.
6.8.9. Funções trigonométricas.
6.8.10. Funções trigonométricas inversas.
6.8.11. Funções hiperbólicas.

7.2.2- Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG)

Já na Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG), as Funções Exponenciais e Logaritmicas não aparecem especificamente na ementa. Certamente, essas funções, inclusive os casos especiais e^x e $\ln x$ estão implícitos no conteúdo de Funções, como é apresentado na ementa. A estrutura curricular do primeiro semestre da graduação em Matemática trabalha as disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral, Resolução de Problemas, Iniciação a Matemática, Geometria Analítica e Álgebra Linear, conforme a Figura 15. O estudo das funções é visto na disciplina Iniciação à Matemática (Figura 16).

Figura 15- Estrutura Curricular do Curso de Matemática – UFMG – 1º Semestre. Retirado de: https://goo.gl/KCy6SF.

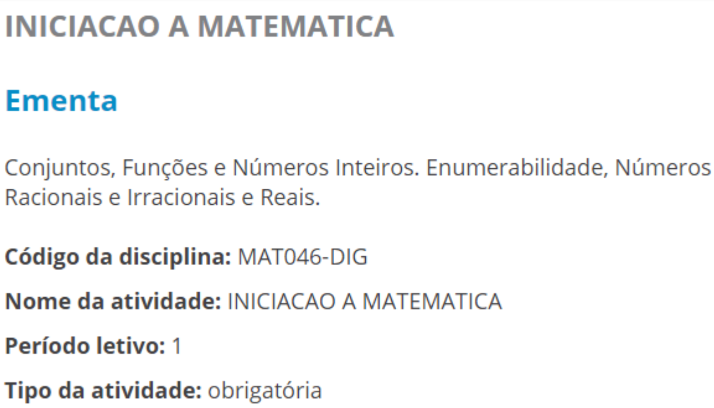

Figura 16- Ementa do curso de Matemática – UFMG – 1º Semestre. Retirado de https://goo.gl/Mpxdav.

7.2.3- Universidade Federal de Viçosa (UFV)

Ao analisar a matriz curricular, as disciplinas oferecidas no primeiro semestre do curso de Matemática da Universidade Federal de Viçosa(UFV), de acordo com a Tabela 7, são Desenho Geométrico, Colóquios Matemática, Fundamentos de Matemática Elementar I, Fundamentos de Matemática Elementar II e Introdução a Programação I. Deparamos com o estudos das funções na disciplina Fundamentos da Matemática Elementar I, conforme a Tabela 8. Nessa ementa, assim como da UFSJ, aparecem as Funções Exponenciais e Logarítmicas. Mais um vez, os casos especiais que fazem parte das funções citadas acima não são mencionados na ementa, deixando assim uma lacuna mistério para o pesquisador.

Tabela 7 - Matriz Curricular do Curso de Matemática Noturno – UFV – 1 Semestre. Retirado e adaptado de: https://goo.gl/iZM81N.

1º SEMESTRE				
ARQ102 Desenho Geométrico 60H	MAT 100 Colóquios Matemática 30H	MAT 105 Fundamentos de Mat. Elem. I 60H	MAT 206 Fundamentos de Mat. Elem. II 60H	INF 100 Introdução à Programação I 60H

Tabela 8- Ementa do curso de Matemática – UFV – 1º Semestre. Retirado e adaptado de: https://goo.gl/iZM81N.

MAT 105
Fundamentos de Matemática Elementar 1 4(3-1) 1. Noções sobre conjuntos. Funções elementares. Função exponencial. Função logarítmica.

7.3 - Livros adotados no Ensino Médio

A fim de verificarmos se as funções exponenciais e logarítmicas, mais especificamente o estudo das funções e^x e $\ln x$ são, de fato, trabalhadas no Ensino Médio, foi feita uma análise em seis livros didáticos com o intuito de verificar se essas funções específicas são realmente abordadas e a maneira de como são trabalhadas no ensino médio.

O primeiro a ser analisado será “Matemática Paiva” de Manoel Paiva (2015). No capítulo de Função Exponencial, não é mencionado o número e e, consequentemente, a função $f(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{x}}$. Já no capítulo de Função Logarítmica, o autor lança um exercício na última página do capítulo, na parte “Trabalhando em equipe” para que o aluno o corrija. Esse exercício é o único em que aparece o logaritmo natural. Após o enunciado do mesmo, Paiva cita uma simples explicação do significado do número e, sendo ela: “O número e, conhecido como número de Neper ou número de Euler, é um número irracional que vale aproximadamente 2,7. Na calculadora científica, o logaritmo de base e, corresponde à tecla ln.” (PAIVA, 2015, P. 257). Em seguida, tem uma atividade com duas questões que, segundo o autor, o aluno deverá usar a calculadora para desenvolvê-la.

Já no livro “Matemática Fundamental: Uma Nova Abordagem” José Ruy Giovanni, José Roberto Bonjorno e José Ruy Giovanni Jr.(2002), os autores reveem o conteúdo de potenciação e, em seguida, inicia-se o ensino da Função Exponencial. A parte específica do nosso estudo que é $f(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{x}}$ e o número e, não é abordada nesse capítulo. O próximo capítulo a ser estudado são as Funções Logarítmicas. Os autores definem o Logaritmo, de forma geral e há um pequeno destaque para o número e. Nessa parte, menciona-se que:

> o número *e* é um número fascinante dentre outros na matemática. Ele foi criado pelo matemático Leonhard Euler (1707 - 1783) sendo definido pelo limite de $(1 + \frac{1}{\mathrm{x}})^{\mathrm{x}}$ quando x cresce infinitamente. O valor aproximado de *e* (com 9 casas decimais) pode ser de fácil memorização, quando usamos um artifício: $e = 2{,}7\ 1828\ 1828 \ldots$. Esse número não pode ser confundido com uma dízima periódica. (GIOVANNI, J. R.; BONJORNO, J. R.; GIOVANNI JÚNIOR, 2002, P.178)

Observa-se que após esse destaque, os autores não trabalham com exemplos e exercícios correspondentes a esse número. Na sequência, abordam-se as equações logarítmicas, as propriedades dos logaritmos e cologaritmos.

Os autores José Carlos Teixeira, Vincenzo Bongiovanni, Roberto Benedicto Aguiar Filho, Benedito Cardoso da Silva e Vera Lúcia Oliveira das Neves no livro “Aulas Práticas de Matemática” não mencionam o caso específico do nosso estudo. Eles tratam somente das Funções Exponenciais e das Funções Logarítmicas em geral.

Na análise do livro “Matemática Contexto e Aplicações” de Luiz Roberto Dante, no capítulo de Funções Exponenciais, encontra-se um tópico cujo subtítulo é “O número irracional e e a função exponencial e^x”. Esse tópico vem como assunto opcional. Dante explica muito resumidamente que, na matemática, existe uma função importante cuja base é o número e. Essa função é definida por $f(x) = e^x$. Segundo o autor:

> As funções que envolvem essa função exponencial e^x, como $f(x) = b \,.\, e^{ax}$, aparecem com muita frequência nas aplicações da Matemática e na descrição de fenômenos naturais. Algumas calculadoras possuem uma tecla com o número irracional e, cujo valor é 2,718... (DANTE, 2014, P.170)

Esse tópico é composto por apenas um exercício. No próximo tópico, são citadas Aplicações da função exponencial e alguns exercícios. Dos seis exercícios propostos por Dante, dois deles resolvem-se aplicando a função cuja base é o número e.

No capítulo sobre Logaritmo e Função Logarítmica, não são apresentados a definição, exemplos e exercícios envolvendo o logaritmo natural. A única parte em que aparece $\ln x$, é vista como Leitura, cujo título é “Vendo o logaritmo natural como área”. Dante explica essa parte muito objetivamente, utilizando a área da hipérbole e ressalta que para mais detalhes o aluno deverá consultar o livro: a Matemática do Ensino Médio – v.1, cap.8, de Elon Lages Lima e outros. Rio de Janeiro, SBM. (Coleção do Professor de Matemática).

Os autores Elon Lages Lima, Paulo Cezar Ponto Carvalho, Eduardo Wagner e Augusto César Morgado, no livro “A Matemática do Ensino Médio” abordam detalhadamente a função exponencial. Algumas propriedades são definidas por eles, sendo elas: a função exponencial é ilimitada superiormente, contínua e sobrejetiva. É demonstrado também o teorema da caracterização da Função Exponencial, sendo esse pré-requisito para outros aprendizados.

Em seguida, o livro traz a definição de Função Inversa e por fim Função Logarítmica, sendo definida como a inversa da Função Exponencial. Segundo os autores, a propriedade de transformar produtos em somas foi a motivação original para a introdução dos logaritmos, no início do século XVII, sendo essa um eficiente instrumento de cálculo. Assim, afirma-se que:

> O uso generalizado das calculadoras, cada vez mais desenvolvidas, fez com que essa utilidade inicial dos logaritmos perdesse o sentido. Entretanto, a função logaritmo continua extremamente importante na Matemática e em suas aplicações. Essa

> importância é permanente; jamais desaparecerá porque sendo a inversa da função exponencial, a função logaritmo está ligada a um grande número de fenômenos e situações naturais [...] (ELON, PAULO CEZAR, WAGNER E MORGADO, 2004, P.191).

Como foi mencionada acima a importância dessa função, os autores não poderiam deixar de citar os logaritmos naturais, sendo esses apresentados de forma geométrica, tal como no capítulo 4, no início desse trabalho. O número irracional e é citado como sendo à base desse logaritmo, em homenagem a John Napier, autor da primeira tábua de logaritmos em 1614.

No livro "A Matemática do Ensino Médio" constata-se que, "usualmente, o número e é apresentado como o limite da expressão $(1+\frac{1}{n})^n$ quando n tende ao infinito." (ELON, PAULO CEZAR, WAGNER E MORGADO, 2004, P.200). Vale ressaltar que torna-se inviável definir esse número como sendo o limite da expressão $(1+\frac{1}{n})^n$ quando n tende ao infinito, visto que o conceito de limites não é abordado no ensino médio.

No final de seu trabalho, o autor define a Função Exponencial de base e utilizando novamente o conceito de limite.

Por fim, foi analisado o livro "Matemática Aula por Aula" de autoria de Benigno Barreto Filho e Claudio Xavier da Silva utilizado por muitos professores do Ensino Médio. Analisando o capítulo das funções exponenciais, notamos que o número e e a função $f(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{x}}$ não são citados pelos autores. Já no capítulo de função logarítmica, os autores apresentam os sistemas de logaritmos, sendo eles:

1) Sistema de Logaritmos Decimais
2) Sistema de Logaritmos Neperianos.

Como o nosso objetivo é analisar a parte que envolve as funções e^{x} e $\ln x$, a análise será baseada apenas no Sistema de Logaritmos Neperianos. Os autores expõem que um sistema de logaritmos de base e ($e = 2{,}718\ldots$, denominado número de Euler) é apresentado escrevendo-se: $\log_{\mathrm{e}}$ ou ln. Na sequência aparecem apenas três exemplos; $\log_{\mathrm{e}} 7 = ln\, 7$; $\log_{\mathrm{e}} 10 = ln\, 10$ e $\log_{\mathrm{e}} 35 = ln\, 35$. Uma observação deve ser considerada: esse livro é composto por vários exercícios, de diferentes graus de complexidade, mas as funções e^{x} e $\ln x$ não aparecem em nenhum deles.

Em suma, nos livros didáticos analisados, percebemos que os casos especiais e^x e $\ln x$ são mencionados, exceto por um deles, mas todos os demais tratam do assunto de forma bem superficial.

8. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Procuramos apresentar ao longo dessa dissertação todo o contexto teórico e histórico das funções e^xe $\ln x$, bem como as aplicações de tais funções. Na sequência, apresentamos um estudo dos documentos oficiais que norteiam o ensino de Matemática no Ensino Básico, ementas de disciplinas do primeiro período do curso de Matemática de três universidade de Minas Gerais e também seis livros didáticos adotados para o ensino médio, verificando de que forma são (ou não) apresentadas as funções e^xe $\ln x$ com suas aplicações e, também, a constante de Euler.

Após todas essas análises e com base em experiências pessoais podemos verificar que os casos especiais tem grande chance de não serem estudados no Ensino Médio: não aparecem no PCNEM, PCN, CBC e BNCC e nem são especificamente mencionados nas ementas do curso superior em Matemática. E nos livros analisados, com exceção do livro “A Matemática do Ensino Médio”, volume 1, esses conceitos são apresentados de forma superficial. Como não há uma menção específica para o ensino dessas funções nos documentos oficiais e nas ementas, ficará a cargo do professor apresentar tais conteúdos, havendo tempo suficiente para tal . Dessa forma não há garantias de que esses tópicos serão apresentados aos alunos, existindo grande possibilidade que os mesmos ingressem no ensino superior sem saber o significado da constante e e das funções e^{x} e $\ln x$, as quais aparecem com muita frequência em disciplinas dos cursos de exatas no ensino superior.

Com base em tudo que mencionamos anteriormente, ficam as perguntas: Como alunos que desconhecem o significado das funções e^x e $\ln x$ poderão manipulá-las de forma adequada nas disciplinas dos cursos de exatas no ensino superior? Qual o caminho mais adequado para aqueles que já passaram pelo ensino médio e não adquiriram tais conceitos? Como os professores do ensino superior poderiam fazer essa abordagem de forma a diminuir os impactos negativos, sem prejudicar cumprimento do cronograma da discplina?

Ao início do processo de proposta e consequente execução desse trabalho, levantamos todos esses questionamentos. Porém, antes de qualquer busca efetiva por formas de ensino dessas funções e da constante de Euler precisávamos saber como tais conceitos estariam dispostos nos documentos oficiais, livros didáticos e ementas dos cursos superiores, para termos a confirmação (ou não) da possibilidade de alunos saírem do ensino médio sem terem aprendido sobre as funções e^xe $\ln x$ e ao ingressar no ensino superior terem que manipular tais funções. E vale salientar que nossa pesquisa não é suficiente para garantir, com plena certeza, que os alunos não estudarão tais assuntos no ensino médio, visto que esses estudos dependerão da disponibilidade e possibilidade dos professores (com um cronograma, pré estabelecido, a ser cumprido), apresentarem tais conceitos. O que procuramos aqui, com nossa pesquisa, foi mostrar que nosso incômodo sobre essa possibilidade, com base nas experiências pessoais em sala de aula, tem fundamento em certos contextos. E acreditamos, portanto, que conseguimos antingir nossos objetivos inicialmente propostos.

Toda essa reflexão levanta questões importantes para trabalhos futuros, num doutorado, por exemplo. Através de pesquisas de campo e desenvolvimento/criação de atividades que visam a apresentar esses conceitos de forma mais precisa, poderiam ser apresentadas estratégias e oportunidades para professores do ensino médio e superior que ensinam as funções exponenciais e logarímicas e que compartilham do mesmo pensamento exposto nesse trabalho.

9. REFERÊNCIAS

ÁVILA, G. S. S. Cálculo das Funções de uma Variável. Vol. 1. 7ª ed. Rio de Janeiro: LTC, 2011.

BARRETO Filho Benigno; SILVA, Cláudio Xavier. Matemática aula por aula: volume único. São Paulo: FTD, 2000.

BRASIL. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. PCN+ Ensino Médio. Parâmetros curriculares nacionais do ensino médio. Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais - Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília, 2006.

DANTE, Luiz Roberto. Matemática: Contexto e aplicações: volume 1. São Paulo: Ática, 2014.

GIOVANNI, J. R.; BONJORNO, J. R.; GIOVANNI JÚNIOR, J. R. Matemática fundamental: uma nova abordagem: volume único. São Paulo: FTD, 2002.

LIMA, Elon Lages, Números e Funções Reais. 1ª edição, Rio de Janeiro, 2013.

LIMA, Elon Lages, et al. A matemática do ensino médio. 7ª edição, Rio de Janeiro, 2004.

LIMA, Elon Lages. Logaritmos. Coleção do Professor de Matemática. SBM. 2ª edição, Rio de Janeiro, 1996.

MAOR, Eli. e: a história de um número. 4ª Ed. Rio de Janeiro: Record, 2008.

SAHA, G.B., Fundamentals of Nuclear Pharmacy. Springer, 410 p., Hancover, 2010.

SILVA, Sebastião Medeiros da Matemática: para os cursos de economia, administração, ciências contábeis. 3. Ed. São Paulo: Atlas, 1988.

TAN, S. T. Matemática aplicada à administração e economia. 2ª Ed. São Paulo: Cengage Learning, 2011.

TEIXEIRA, José Carlos, et al. Aulas práticas de matemática: 2º grau.3ª Ed. São Paulo: Ática, 1993. 304p.

Referências Eletrônicas:

BNCC: Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/wpcontent/uploads/2018/12/BNCC_19dez2018_site.pdf>. Acesso em: 05 dez. 2018.

CBC: Disponível em: <http://www.professores.im-uff.mat.br/hjbortol/disciplinas/2016.2/esp00001/biblioteca/2011-minas-gerais-ensino-medio.pdf>. Acesso em: 05 dez. 2018.

Descoberto número primo com quase 25 milhões de dígitos. Disponível em: <https://impa.br/page-noticias/descoberto-numero-primo-com-quase-25-milhoes-de-digitos/?utm_source=facebook&utm_medium=post-link&utm_campaign=numero_primo&utm_term=numero_primo%2C%20primo_marsenne%2C%20gimps>. Acesso em: 10 Mar. 2019.

Ementa do curso de Matemática – UFMG – 1º Semestre. Disponível em: <https://ufmg.br/cursos/graduacao/2345/90301/58946>. Acesso em: 26 Dez. 2018.

Ementa do curso de Matemática – UFV – 1º Semestre. Disponível em: <http://www.pre.ufv.br/catalogo/2014/59%20Ement+%C3%ADrio.pdf> . Acesso em: 26 Dez. 2018.

Ementa do curso de Matemática Noturno – UFSJ – 1º Semestre. Disponível em: <https://ufsj.edu.br/portal2-repositorio/File/comat/ementas/introducao_ao_calculo.pdf> Acesso em: 21 Jan. 2019.

Estrutura Curricular do Curso de Matemática – UFMG – 1º Semestre. Disponível em: <https://ufmg.br/cursos/graduacao/2345/90301>. Acesso em: 26 Dez. 2018.

Grade do curso de matemática noturno da Universidade Federal de São João del-Rei (UFSJ). Disponível em: <https://ufsj.edu.br/comat/grade_curricular.php>. Acesso em: 21 Jan. 2019.

Matriz Curricular do Curso de Matemática Noturno – UFV – 1 Semestre. Disponível em: <http://www.novoscursos.ufv.br/graduacao/ufv/mtm/www/wpcontent/uploads/2011/05/Matriz-Licenciatura-Noturno.pdf>. Acesso em: 26 Dez. 2018.

Orientações Curriculares para o Ensino Médio: Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/book_volume_02_internet.pdf,.> Acesso: 26 Dez. 2018.

PCNEM: Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf>. Acesso em: 05 dez. 2018.