Universidade Federal de Mato Grosso do Sul
Instituto de Matemática- INMA
Programa de Pós-Graduação em
Matemática em Rede Nacional
Mestrado Profissional

Eder Rodrigo de Matos Pereira

# Sobre análise combinatória no ensino médio: Uma atividade de interpretação.

Campo Grande - MS
Novembro de 2018

**Universidade Federal de Mato Grosso do Sul**

**Instituto de Matemática- INMA**

**Programa de Pós-Graduação em**

**Matemática em Rede Nacional**
**Mestrado Profissional**

**Eder Rodrigo de Matos Pereira**


# Sobre análise combinatória no ensino médio: Uma atividade de interpretação.


**Orientador(a): Prof.ª Dr.(a) Elen Viviani Pereira Spreafico**


Dissertação de Conclusão de Curso apresentado ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional do Instituto de Matemática da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul - INMA/ UFMS, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática.


**Campo Grande - MS**

**Novembro de 2018**

**SOBRE ANÁLISE COMBINATÓRIA NO ENSINO MÉDIO: UMA ATIVIDADE DE INTERPRETAÇÃO.**

**Eder Rodrigo de Matos Pereira**

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional do Instituto de Matemática da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul - INMA/UFMS, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre.

Aprovado pela banca examinadora:

Prof. Dr. Elen Viviani Pereira Spreafico (Orientadora)
Universidade Federal de Mato Grosso do Sul - UFMS

Prof. Dra. Elisabete Sousa Freitas
Universidade Federal de Mato Grosso do Sul - UFMS

Prof. Dr. Mustapha Rachidi
Universidade Federal de Mato Grosso do Sul - UFMS

Prof. Dra. Julianna Pinele Santos Porto
Universidade Federal do Recôncavo da Bahia - UFRB

Campo Grande - MS, 14 de Novembro de 2018

# Agradecimentos

Agradeço primeiramente à Deus por ter me dado a curiosidade e a capacidade intelectual para perseguir os conhecimentos matemáticos. Agradeço a minha esposa Cynthia Barbosa da Silva de Matos que me incentivou e me apoiou por toda essa jornada, só ela sabe o quão longa e árdua foi a caminhada durante o mestrado, sempre apoiando e dando suporte para a conclusão dos meus estudos.

Agradeço a minha mãe Rosângela Araújo de Matos que sempre acreditou na minha capacidade, sempre priorizou os meus estudos e sempre me apoiou por toda a minha vida.

Agradeço aos meus colegas de mestrado André Matos, Thiago Spontoni, Clayton, Maiara e Vinicíus Candia. Nosso grupo de estudos e as nossas noites de estudo cujo combustível eram duas pizzas e uma enorme ânsia pelo conhecimento, foram primordiais para essa conquista.

Agradeço a minha professora orientadora pela paciência e pela transmissão de seus conhecimentos, posso afirmar com certeza, que sem a sua orientação esse trabalho não seria possível.

# Resumo

Neste trabalho é apresentado uma proposta de atividade que analisou a capacidade de interpretação dos alunos do ensino médio, diante de um de enunciado de questões em quatro classes de análise combinatória. Para tal, também foram apresentados os princípios básicos das metodologias de contagem, além de métodos não encontrados nos materiais do ensino básico.

**Palavras-chave:** Análise combinatória, Métodos de contagem, Soluções inteiras de uma equação.

# Abstract

The goal of this work is a proposal of activity that analyzed the ability of interpretation of high school students, before a statement in four classes of combinatorial analysis. For this, the basic principles of counting methodologies were presented, as well as methods not found in basic education materials

**Keywords:**

Combinatorial analysis, Counting methodologies, Integer solutions of an equation.

# Sumário

# Lista de Figuras

# Introdução

A análise combinatória é um conjunto de métodos e técnicas de contagem, que nos auxiliam de forma direta ou indireta a saber a quantidade de elementos de um certo grupo finito.

Saber as possibilidades dos eventos acontecerem é o que propiciou o estudo da análise combinatória, tendo como grande importância simplesmente o fato de queremos saber o resultados possíveis dos jogos.

Em [4] temos que pela forma que solucionavam problemas de jogos de azar, Blaise Pascal (1623-1662) e Pierre de Fermat (1601-1665) estimularam essa área. Pascal escreveu, em 1654, o Tratado do Triângulo Aritmético, uma exposição das propriedades dos coeficientes binomiais e das relações entre eles.

Muitos outros matemáticos também estudavam a teoria das probabilidades, porém, o primeiro a tratá-la como ciência foi Christiaan Huygens (1629-1695). Pouco tempo depois Jakob Bernoulli (1654-1705) e Abraham de Moivre (1667-1754) começaram a descrever a probalidade como um ramo da matemática em suas obras: Arte da Conjectura de 1713 e Doutrina das Chances de 1718, respectivamente também visto em [4].

Figura 1: Blaise Pascal a esquerda e Pierre de Fermat a direita,[4].

Problemas de contagem para conjuntos finitos são um tabu para parte dos profissionais na área de matemática no ensino básico. Um dos motivos para a existência desse problema é a vasta classe de exercícios existentes nessa esfera. Uma forma de simplificar os métodos de contagem consiste em realizar a conexão entre os métodos de contagem e e as situações na vida real. Essa conexão é feita através das representações. No contexto escolar, o uso de diferentes formas de simbologia, está totalmente relacionado ao ensino-aprendizagem e toda a construção do conhecimento.

Neste trabalho é apresentado uma proposta de atividade que analisou a capacidade de interpretação dos alunos do ensino médio, diante de um de enunciado de questões em quatro classes de análise combinatória. Para tal, também foram apresentados os princípios básicos das metodologias de contagem, além de métodos não encontrados nos materiais do ensino básico.

No capítulo um apresentarei tais princípios e, a partir deles, desenvolverei alguns métodos de contagem de grupos de elementos específicos: (Permutação, Arranjo e Combinação). Nos capítulos seguintes apresentamos outras formas de contagem que merecem uma atenção especial pela repetição dos seus elementos. Em seguida exibirei duas classes de problemas pouco trabalhadas no ensino médio: (Problemas com objetos e caixas e solução inteira de uma equação linear com coeficiente unitário).

Por fim, temos nos últimos capítulos uma proposta de atividades sobre a capacidade de interpretação de alunos do ensino médio e a análise dos resultados, com referência nas categorias semióticas de Pierce, dessa atividade quando aplicada a alunos do ensino médio de uma escola privada de Campo Grande.

Quando um indivíduo é colocado diante da Análise Combinatória, tem-se logo questões clássicas ligadas a loterias ou números de placas de carros. Parece um entendimento geral que essa área é importante pois consta no currículo da escola básica, mas não se dá a tal importância em seu ensino.

Neste contexto, análise combinatória é um conteúdo importante pois trata não somente de expor a possibilidade ao indivíduo, como também, lhe proporcionar uma visão geral e opções diante de um problema vivenciado.

Dessa forma, bate-se nessa tecla novamente com uma proposta de atividade diferente das existentes na literatura.

# Capítulo 1

# Princípio Fundamental da Contagem

Este capítulo tem como base os títulos [1], [2] e [3].

É comum em sites da internet, em bancos ou em qualquer sistema de segurança, que seja solicitado uma senha para o usuário proteger seus dados. Imagine que essa senha contenha duas letras e cinco algarismos e que em cada senha não tenhamos algarismos ou letras repetidas. Qual seria o total de senhas distintas possíveis? O que torna uma senha forte?

Para entendermos melhor essas perguntas, podemos escrever todas as senhas possíveis e contá-las, porém isso pode ser muito trabalhoso. Ao tentar resolver explicitando todos os casos, constata-se que, quanto maior o número de caracteres, mais forte é a sua senha pois maior é o número de senhas possíveis. Assim, se nosso intuito é saber somente quantas são, uma solução é utilizarmos o Princípio Fundamental da Contagem. Vejamos tal princípio.

## 1.1 Princípio Multiplicativo ou P.F.C

Se um evento A pode ocorrer de m maneiras diferentes e, se para cada uma dessas m maneiras possíveis de A ocorrer, um outro evento B pode ocorrer de n maneiras diferentes, então o número de maneiras de ocorrer o evento A seguido do evento B é $m \cdot n$. Assim, suponhamos que as m maneiras diferentes do evento A são $(a_1; a_2; \cdots; a_m)$ e que as n maneiras do evento B ocorrer são $(b_1; b_2; \cdots; b_n)$ fixando o e vento A e variando o evento B obtemos:

$$A \times B = \begin{cases} (a_1, b_1);\ (a_1, b_2); \cdots; (a_1, b_n) \\ (a_2, b_1);\ (a_2, b_2); \cdots; (a_2, b_n) \\ \quad . \quad ; \quad . \quad ; \quad ; \quad . \\ \quad . \quad ; \quad . \quad ; \quad ; \quad . \\ (a_m, b_1); (a_m, b_2); \cdots; (a_m, b_n) \end{cases}$$

Note que para cada uma das m maneiras que possuímos para o evento A acontecer, temos n maneiras de o evento B acontecer, totalizando $(m \cdot n)$ possibilidades.

Vejamos alguns exemplos.

**Exemplo: 1** *Um rapaz vai as compras e acaba comprando duas calças e 3 camisetas. No dia seguinte ele vai sair e quer se vestir com as roupas que comprou no dia anterior. De quantas formas ele pode se arrumar?*

**Solução: 1** *O processo é feito em dois eventos o primeiro deles, escolher a calça, com duas possibilidades e o segundo, escolher a camiseta. Logo pelo P.F.C temos* $2 \cdot 3 = 6$.

*Portanto, temos 6 possibilidades para ele se arrumar.*

**Exemplo: 2** *Em uma lanchonete que prepara sucos naturais, os clientes possuem três opções de copos (300ml, 500ml, 1000ml) e cinco frutas (laranja, banana, morango, acerola e melancia). Assim quantas possibilidades de escolhas distintas nós temos ao pedir um suco?*

**Solução: 2** *Note que a escolha do suco é feita em dois eventos, o primeiro deles, a escolha do copo, com três possibilidades e o segundo, a escolha da fruta com 5 possibilidades. Logo, pelo P.F.C, temos:* $3 \cdot 5 =$ *15.*

*Portanto, 15 tipos de sucos diferentes.*

**Exemplo: 3** *Em uma família com 5 pessoas, somente duas delas podem dirigir. Assim, de quantos modos elas podem se organizar em um carro com cinco lugares?*

**Solução: 3** *Temos que esse caso pode ser dividido em 5 eventos, sendo o primeiro, a escolha do motorista com 2 possibilidades, pois temos somente 2 pessoas habilitadas. O restante conforme as pessoas vão ocupando os lugares temos 4,3,2,1 possibilidades, respectivamente. Logo, pelo P.F.C, temos:* $2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 =$ *48.*

*Portanto, temos 48 possibilidades distintas dessa família ocupar o carro.*

## 1.2 Princípio Aditivo

Se um evento é composto de $n$ estágios sucessivos, excludentes e independentes de maneira que o número de possibilidades do primeiro estágio é $a_1$ do segundo estágio é $a_2$ até o último estágio $a_n$, logo, o número total de possibilidades de o evento ocorrer é dado pela soma $(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)$. Nesse texto mencionaremos o Princípio aditivo por P.A.

Note que o número de possibilidades do primeiro estágio é $a_1$, do segundo $a_2$ até o último que é $a_n$ como os estágios são excludentes, isto é, não possuem elementos em comum, o número total de escolhas que podemos fazer é dado pela soma das possibilidades de cada estágio, logo $(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)$.

Vejamos agora alguns exemplos em que o Principio Aditivo é abordado.

**Exemplo: 4** *Uma lanchonete possui dois tipos de bebidas, sucos e refrigerantes. Uma pessoa pode escolher entre cinco sabores de suco ou então escolher entre três sabores de refrigerante. De quantas maneiras essa pessoa pode escolher a sua bebida?*

**Solução: 4** *Note que temos cinco sabores de sucos, sendo eles:* $S_1; S_2; S_3; S_4$ *e* $S_5$*, temos três tipos de refrigerantes, sendo eles* $R_1; R_2; R_3$*. Devemos fazer a escolha de um desses elementos, num total de* $5 + 3 = 8$ *possibilidades.*

*Portanto, pelo P.A. temos 8 possibilidades.*

**Exemplo: 5** *Supondo que exista cinemas, e teatros em sua cidade, e que tenham entrado em cartaz 3 filmes e 2 peças de teatro diferentes para passarem no próximo sábado, porém nesse dia também haverá um show e que você tenha dinheiro para assistir a apenas 1 evento destes que foram descritos anteriormente. Quantos são os programas que você pode fazer neste sábado?*

**Solução: 5** *Note que temos 3 filmes, 2 peças de teatro e 1 show, como iremos escolher um e apenas um desses eventos temos então* $3 + 2 + 1 = 6$ *possibilidades.*

*Portanto temos pelo P.A 6 possibilidades.*

**Definição 1** *(Fatorial) Definimos o fatorial de um número natural n, tradicionalmente denotado por n!, o número definido por: n!=*$n \cdot (n-1) \cdot ... \cdot 2 \cdot 1$, *em que 0! = 1.*

**Exemplo: 6** *Calcule o fatorial de 3, 5 e 10.*

**Solução: 6** *De fato temos:*

- *3!*$=3 \cdot 2 \cdot 1=$*6*
- *5!*$=5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1=$*120*
- *10!*$=10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 =$ *3628800*

Ao desenvolver um fatorial, colocando os fatores em ordem decrescente, podemos parar a operação onde for mais conveniente, sendo que o último fator também será um fatorial.

**Exemplo: 7** *Façamos n!*

**Solução: 7** $n! = n \cdot (n-1)! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2)!$

**Exemplo: 8** *Façamos* $\dfrac{8!}{5!}$

**Solução: 8** $\dfrac{8!}{5!} = \dfrac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5!}{5!} = 8 \cdot 7 \cdot 6 =$ *336*

## 1.3 Permutação

Nesta seção iremos estudar o agrupamento chamado Permutação e iremos utilizar o P.F.C para obtermos uma contagem dos elementos desse agrupamento.

**Definição 2** *(Permutação) Dado o conjunto* $A = \{a_1, a_2, a_3, ..., a_n\}$ *com n elementos distintos, sendo n um número natural, chamamos de permutação simples dos n elementos de A a qualquer conjunto ordenado com esses n elementos distintos. Indica-se por* $P_n$ *o número de permutações com n elementos.*

Consideremos os n elementos distintos $x_1, x_2, ...x_n$ e as n posições $p_1, p_2, ..., p_n$:

$$\frac{-}{p_1}, \frac{-}{p_2}, \frac{-}{p_3}, ..., \frac{-}{p_n}$$

Enumerando todas as permutações dos n objetos distintos $x_1, x_2, ...x_n$ temos que o número de tais permutações é igual ao número de modos possíveis de se ocupar, com esses n objetos, as n posições $p_1, p_2, ..., p_n$. Assim temos para a posição $p_1$ temos n escolhas possíveis, para a posição $p_2$ temos (n-1) escolhas possíveis, pois já escolhemos um elemento na posição $p_1$. Para a posição $p_3$ temos agora (n-2) possibilidades, pois já escolhemos um elemento para a posição $P_1$ e outro para a posição $P_2$. Seguindo assim até a última posição $p_n$ onde teremos apenas 1 escolha possível, uma vez que todos os demais elementos já foram escolhidos.

$$\frac{n}{p_1}, \frac{n-1}{p_2}, \frac{n-2}{p_3}, ..., \frac{1}{p_n}$$

portanto pelo P.F.C. temos $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot ... \cdot 1 = n!$

Concluímos então que o número de maneiras de ordenar n objetos é igual a n! logo,

$$P_n = n!$$

**Exemplo: 9** *Um grupo com 4 amigos chegando ao cinema percebem que existem apenas 4 cadeiras livres. Pergunta-se quantas maneiras distintas eles podem se sentar?*

**Solução: 9** *Trata - se um grupo com 4 elementos que dever ocupar 4 espaços logo:*

$$P_4 = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$$

*Portanto, temos 24 maneiras de permutar 4 elementos em 4 espaços.*

**Exemplo: 10** *Os resultados de um sorteio da Mega-Sena foram os números 40, 11, 21, 33, 47 e 67. De quantas maneiras distintas pode ter ocorrido essa sequência de resultados?*

**Solução: 10** *Temos um grupo com 6 elementos que dever ocupar 6 espaços logo temos:*

$$P_6 = 6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$$

*Logo, temos 720 maneiras desses elementos ocupares os 6 espaços.*

**Exemplo: 11** *Quantos são os anagramas da palavra CAMPO?*

**Solução: 11** *O anagrama de uma palavra trata-se de uma nova palavra obtida a partir das letras da palavra inicial. Temos que a palavra CAMPO possui 5 letras, ou seja, para calcularmos a quantidade de anagramas distintos, devemos permutar essas 5 letras:*

$$P_5 = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$$

*Assim, temos 120 anagramas da palavra CAMPO.*

## 1.4 Arranjos

Nesta seção iremos estudar o agrupamento chamado Arranjo e iremos utilizar o P.F.C para obtermos uma contagem dos elementos desse agrupamento.

**Definição 3** *(Arranjos) Dado um conjunto* $A = \{a_1, a_2, a_3, ..., a_n\}$ *com* $n$ *elementos distintos sendo* $n$ *natural e um número* $p$ *também natural, tal que*

*$p \leq n$. Chamaremos de Arranjos Simples dos n elementos distintos tomados p a p, qualquer conjunto ordenado com p elementos sem repetição escolhidos entre os n elementos de A. Indicaremos como $A_{n,p}$ o número de arranjos simples de n elementos distintos tomados p a p.*

Obteremos o número total de agrupamentos para elementos tomados p a p, com $p \leq n$ da seguinte maneira:

Temos n elementos dos quais queremos tomar p elementos. Este é um problema equivalente a termos n pessoas e acomodá-los em p lugares. Da mesma forma que fazemos com a permutação simples utilizaremos os traços para marcar as posições.

$$\frac{}{p_1}, \frac{}{p_2}, \frac{}{p_3}, ..., \frac{}{p_p}$$

Assim temos para a posição $p_1$ temos n escolhas possíveis, para a posição $p_2$ temos (n-1) escolhas possíveis, pois já escolhemos um elemento na posição $p_1$. Para a posição $p_3$ temos agora (n-2) possibilidades, pois já escolhemos um elemento para a posição $p_1$ e outro para a posição $p_2$. Seguindo assim sucessivamente, até a última posição $p_p$ onde teremos apenas (n-(p-1)) escolhas possíveis. Ficando com a seguinte expressão:

$$\frac{n}{p_1}, \frac{n-1}{p_2}, \frac{n-2}{p_3}, ..., \frac{(n-(p-1))}{p_p}$$

Aplicando o P.F.C. obtemos:

$$A_{n,p} = [n(n-1)(n-2)\cdots(n-(p-1))]$$

Multiplicando e dividindo essa expressão por $[(n-p)(n-p-1)\cdots 2 \cdot 1]$ obtemos:

$$A_{n,p} = \frac{[n(n-1)(n-2)\cdots(n-(p-1))] \cdot [(n-p)(n-p-1)\cdots 2 \cdot 1]}{[(n-p)(n-p-1)\cdots 2 \cdot 1]}$$

Obtendo assim:

$$A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Importante notar que para $n = p$ temos:

$$A_{n,p} = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = \frac{n!}{1} = n! = P_n$$

ou seja, as permutações simples com n elementos são um caso particular dos arranjos simples.
Para $p = 0$, $A_{n,0} = \dfrac{n!}{(n-0)!} = \dfrac{n!}{n!} = 1$

Para $n = p = 0$, $A_{0,0} = \dfrac{0!}{(0-0)!} = \dfrac{1}{1} = 1$

**Exemplo: 12** *Quatro atletas $(A, B, C, D)$ estão em uma corrida. Ao final se todos terminarem, quantas são as possibilidades para os dois primeiros lugares?*

**Solução: 12** *Primeiramente vamos escrever todas as possibilidades existentes:*

$$(A, B); (B, A); (A, C); (C, A); (A, D); (D, A)$$
$$(B, C); (C, B); (B, D); (D, B); (C, D); (D, C)$$

*Totalizando assim 12 possibilidades para os dois primeiros lugares.*

Nota-se que, se o número de elementos for relativamente grande, fica inviável enumerarmos todas as possibilidades. Abordando o mesmo problema, porém, resolvendo - o a partir da fórmula para arranjo deduzida.
**Solução 12.1** *Devemos calcular o arranjo de quatro elementos (os quatro atletas), tomados 2 a 2 (possíveis lugares).*

$$A_{4,2} = \tfrac{4!}{(4-2)!} = \tfrac{4 \cdot 3 \cdot 2!}{2!} = 4 \cdot 3 = 12.$$

*Portanto temos 12 possibilidades para os dois primeiros lugares.*

Existe ainda uma terceira solução para esse mesmo problema, que utiliza-se apenas o P.F.C. que acaba facilitando o problema. Para isso basta tomarmos na essência a definição de arranjo.

**Solução 12.2** *Devemos escolher duas posições $P_1$ e $P_2$. Para $P_1$ temos 4 possibilidades e para $P_2$ 3 possibilidades, visto que já escolhemos um elemento para a posição $P_1$ ficando assim:*

$$\frac{4}{P_1} \cdot \frac{3}{P_2}.$$

*Aplicando P.F.C. temos* $4 \cdot 3 = 12$.

*Logo, temos 12 possibilidades para os dois primeiros lugares.*

Essa última solução em particular torna-se muito eficaz para a solução de alguns problemas em que temos certas restrições, facilitando assim a organização e a tomada de decisão para a solução do problema.

**Exemplo: 13** *Considere os algarismos* $(1; 2; 3; 4; 5; 9)$. *Quantos números pares com 3 algarismos distintos, podemos obter?*

**Solução: 13** *Devemos escolher 3 algarismos para formar o número, sendo assim temos 3 posições para preencher:*

$$\overline{P_1}, \overline{P_2}, \overline{P_3}$$

*Como o número deve ser par, devemos começar da posição $P_3$, pois o que define se um número é par ou não, é o fato de seu último algarismo ser par ou não. Logo, temos 2 possibilidades para $P_3$ (o número 2 ou o número 4). Como os algarismos devem ser distintos, nos restam 5 opções para $P_1$ e 4 opções para $P_2$.*

$$\frac{5}{P_1}, \frac{4}{P_2}, \frac{2}{P_3}$$

*Aplicando P.F.C. obtemos:*

$$5 \cdot 4 \cdot 2 = 40$$

*Logo temos 40 números pares com os algarismos distintos.*

**Exemplo: 14** *Em uma sala, temos 6 cadeiras numeradas de 1 a 6 em que quatro pessoas deverão sentar-se. De quantas maneiras essas pessoas podem se organizar?*

**Solução: 14** *Basta tomarmos um arranjo de 6 elementos tomados 4 a 4.*

$$A_{6,4} = \frac{6!}{(6-4)!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2!}{2!} = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$$

*Logo, temos 360 maneiras em que essas pessoas podem se organizar.*

**Exemplo: 15** *Em uma empresa, dez funcionários se candidataram para as vagas de diretor e vice-diretor financeiro. Eles serão escolhidos através do voto individual dos membros do conselho da empresa. Vamos determinar de quantas maneiras distintas essa escolha pode ser feita.*

**Solução: 15** *Trata-se de um arranjo de 10 tomados 2 a 2*

$$A_{10,2} = \frac{10!}{(10-2)!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8!}{8!} = 10 \cdot 9 = 90$$

*Logo, temos 90 possibilidades para a escolha do Diretor e Vice-diretor.*

Quando trabalhamos com arranjos simples ou permutações, em sua grande maioria, os execícios são resolvidos mais facilmente utilizando apenas P.F.C., incentive seus alunos a tentar uma solução que não se prenda a fórmulas, ensine-os a pensar em alguns elementos básicos, que podem ser vistos em [2].

- Postura: Exercícios diferentes exigem posturas diferentes, as vezes, devemos organizar pessoas em cadeiras. As vezes, precisamos organizar cadeiras em pessoas. Tudo depende do que o problema pede para ser calculado e da estratégia utilizada para resolve-lo.
- Divisão: Sempre que possível devemos dividir o problema em problemas menores e de mais fácil solução. Por exemplo escolher um casal, dividimos essa escolha em dois eventos. A escolha do homem e a escolha da mulher. No exemplo 3, dividimos a escolha em quem pode dirigir e quem não pode, facilitando assim o cálculo das possibilidades.
- Não adiar dificuldades: Explique aos seus alunos que para obtermos uma contagem precisa, devemos atender as necessidades do problema que estamos tentando solucionar. Devemos começar pela dificuldade imposta, como feito no Exemplo 13, começamos pelo fato de o número ser par, ou seja, começamos pelo último dígito, fazendo isso garantimos que estamos contando apenas as possibilidades desejadas, sem haver a necessidade de exclusão de casos.

## 1.5 Combinação

Nesta seção iremos estudar o agrupamento chamado combinação que trata de um agrupamento feito pela natureza dos seus elementos e não pela ordem dos mesmos. Iremos utilizar P.F.C para obtermos uma contagem dos elementos desse agrupamento.

**Definição 4** *(Combinação) Uma Combinação Simples de $n$ elementos distintos, tomados $p$ a $p$ com $p \leq n$, é todo agrupamento não ordenado formado por $p$ elementos escolhidos entre os $n$ elementos dados. Escreveremos $C_{n,p}$ o número de agrupamentos desse tipo.*

Para entendermos melhor as combinações vamos analisar o seguinte caso:

Temos 5 elementos $\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$ dos quais devemos escolher 3. Portanto, temos as seguintes possibilidades:

$$\{a_1, a_2, a_3, \}; \{a_1, a_2, a_4\}; \{a_1, a_2, a_5\};$$
$$\{a_1, a_3, a_4\}; \{a_1, a_3, a_5\}; \{a_1, a_4, a_5\};$$
$$\{a_2, a_3, a_4\}; \{a_2, a_3, a_5\}; \{a_2, a_4, a_5\} e \{a_3, a_4, a_5\}$$

Observe que esses agrupamentos se diferenciam pela natureza dos elementos e não pela ordem. Ainda de acordo com o exemplo, ao permutar todas as maneiras possíveis, os elementos de cada uma dessas combinações serão 3! arranjos. Por exemplo, para o agrupamento $(a_1, a_2, a_3)$ teremos:

$$\{a_1, a_2, a_3\}; \{a_1, a_3, a_2\}; \{a_2, a_1, a_3\}; \{a_2, a_3, a_1\}; \{a_3, a_1, a_2\} e \{a_3, a_2, a_1\}$$

Daí decorre que, multiplicando o número de combinações de 5 elementos, tomados 3 a 3, podemos obter o número de arranjos de 5 elementos tomados 3 a 3:

$$C_{5,3} \cdot 3! = A_{5,3}$$

Generalizando a maneira das escolhas obtemos para $p \leq n$ :

$$C_{n,p} \cdot p! = A_{n,p} \Rightarrow C_{n,p} = \frac{A_{n,p}}{p!} \Rightarrow C_{n,p} = \frac{\frac{n!}{(n-p)!}}{p!} = \frac{n!}{(n-p)! \cdot p!}.$$

**Exemplo: 16** *Em um grupo de 8 jogadores devemos escolher 2 para serem indicados ao prêmio de destaque da rodada. Quantas são as possibilidades de escolha dessa dupla?*

**Solução: 16** *Basta escolhermos 2 em um grupo de 8, isto é:*

$$C_{8,2} = \frac{8!}{2! \cdot (8-2)!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6!}{2! \cdot 6!} = \frac{8 \cdot 7}{2 \cdot 1} = 4 \cdot 7 = 28$$

*Logo, temos 28 maneiras distintas de escolhermos os jogadores.*

**Exemplo: 17** *Quinze pessoas vão fazer uma viagem e irão se dividir em três carros. O primeiro com seis lugares o segundo com cinco lugares e o terceiro com quatro lugares. De quantas maneiras elas podem se distribuir nos três carros?*

**Solução: 17** *Começando com o carro com seis lugares. Temos 15 pessoas para escolher 6 logo $C_{15,6}$. Em segundo devemos preencher o carro com cinco lugares. Temos agora 9 pessoas restantes para escolhermos 5 logo, $C_{9,5}$. Por fim sobram 4 pessoas para o último carro. Daí $C_{4,4}$.*
*Pelo princípio multiplicativo temos:* $C_{15,6} \cdot C_{9,5} \cdot C_{4,4} = 5005 \cdot 126 \cdot 1 = 630630$

*Logo, temos 630630 maneiras das 15 pessoas se dividirem nos carros.*

**Exemplo: 18** *No congresso Nacional, uma comissão de 5 membros será formada a partir de 8 senadores e 6 deputados, sendo que pelo menos um deputado deverá pertencer à comissão. Calcule o número de comissões que poderão ser formadas:*

**Solução: 18** *Nesse caso, a condição: "Pelo menos um deputado"nos deixa com as seguintes possibilidades:*

- *1 deputado e 4 senadores*
- *2 deputados e 3 senadores*
- *3 deputados e 2 senadores*
- *4 deputados e 1 senadores*
- *5 deputados e 0 senadores*

*Podemos sim resolver o problema calculando separadamente cada item e depois, somar os resultados aplicando o P.A. Entretanto, aqui se inicia uma nova estratégia para a resolução de exercícios. Podemos analisar o problema da seguinte maneira:*

*Devemos escolher uma comissão de 5 pessoas dentre um total de 14 pessoas, 8 senadores e 6 deputados, isso nos gera um total de:*

$$C_{14;5} = \frac{14!}{9! \cdot 5!} = 2002 \textit{ possibilidades.}$$

*Entretanto nessas 2002 possibilidades temos as comissões em que não se tem deputado algum. Calculando essas possibilidades temos:*

$$C_{8;5} = \frac{8!}{3! \cdot 5!} = 56 \textit{ possibilidades.}$$

*Logo temos 2002 comissões no total e 56 comissões em que não temos deputado algum, ou seja, o número de comissões procurado é:*

$$2002 - 56 = 1946$$

*Portanto, temos 1946 comissões em que nelas existe pelo menos 1 deputado.*

Ambos agrupamentos permutação e combinação, possuem como base elementos distintos. Vejamos no próximo capítulo como tratar dos casos onde os elementos se repetem.

# Capítulo 2

# Outros tipos de contagem

Como aplicação dos métodos aprendidos nos capítulos 1 e 2, vejamos outros tipos de contagem. Esse texto tem como base [1].

## 2.1 Permutação com repetição

Quando estudamos as permutações simples de n elementos, contamos as maneiras distintas de colocar os n elementos distintos, em fila. Como consequência imediata do princípio multiplicativo temos n! filas distintas.

Vamos considerar agora o caso de n elementos existirem $n_1$ iguais a $a_1; n_2$ iguais a $a_2, ..., n_r$ iguais a $a_r$. Para facilitar o entendimento e a definição, vamos analisar o seguinte exemplo:

**Exemplo: 19** *De quantas maneiras podemos colocar em fileira 7 letras, sendo 3 letras x, 2 letras y e 2 letras z?*

**Solução: 19** *Listaremos a seguir algumas possibilidades:*

$$xxxyyzz$$
$$xxyyxzz$$

$$xzyyxxz$$

$$zyyxxxz$$

$$zxyxzxz$$

*Logo dentre 7 lugares podemos escolher 3 lugares para neles colocarmos as letras x, uma vez feito isso nos sobram 4 lugares para colocarmos as 2 letras y e por último nos sobram 2 lugares para colocarmos os 2 z restantes.*

*Primeiramente temos que escolher os 3 lugares para a letra x, isso pode ser feito $C_{7,3}$ maneiras, feito isso nos sobram 4 lugares nos quais devemos escolher 2 para a letra y, isso pode ser feito de $C4,2$ maneiras e por fim sobram 2 lugares para colocarmos a letra z, isso pode ser feito $C_{2,2}$ maneiras. Portanto temos pelo P.F.C.*

$$C_{7,3} \cdot C_{4,2} \cdot C_{2,2} = \frac{7!}{3!4!} \cdot \frac{4!}{2!2!} = \frac{7!}{3!2!2!} = 210$$

*Temos então, 210 maneiras de enfileirarmos 3 letras x, 2 letras y e 2 letras z.*

**Definição 5** *(Permutação com repetição) Seja um conjunto com n elementos sendo que temos $n_1$ elementos iguais a $a_1$, $n_2$ elementos iguais a $a_2$, ... , $n_r$ elementos iguais a $a_r$ com $r < n$, a permutação desses n elementos em que há repetição dos $a_1, a_2, .., a_r$ elementos é todo agrupamento orientado dos n elementos. Indicamos por $PR_{n;n_1,n_2,...,n_r}$ a permutação dos n elementos em que se repetem os elementos $a_1, a_2, ..., a_r$.*

Para calcularmos a quantidade de permutações com repetições seguiremos o exemplo anterior. Temos n elementos sendo que $n_1$ elementos iguais a $a_1$, $n_2$ elementos iguais a $a_2$, ... , $n_r$ elementos iguais a $a_r$. Precisamos escolher $n_1$ lugares para a escolha dos elementos $a_1$, isso pode ser feito de $C_{n;n_1}$ maneiras. Feito isso temos agora $n - n_1$ espaços para a escolha dos $n_2$ elementos iguais a $a_2$, isso pode ser feito de $C_{n-n_1;n_2}$ maneiras. E assim por diante obtendo.

$$C_{n;n_1} \cdot C_{n-n_1;n_2} \cdot C_{n-n_1-n_2;n_3} \cdots C_{n-n_1-n_2-\ldots-n_{r-1};n_r} =$$
$$\frac{n!}{n_1!(n-n_1)!} \cdot \frac{(n-n_1)!}{n_2!(n-n_1-n_2)!} \cdots \frac{n-n_1-n_2-\cdots-n_{r-1}!}{n_r!(n-n_1-\cdots-n_r)!}$$
$$= \frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_r!}$$

**Exemplo: 20** *Determine a quantidade de anagramas distintos da palavra MATEMÁTICA:*

**Solução: 20** *Primeiramente devemos permutar as 10 letras da palavra MATEMÁTICA, entretanto temos letras repetidas, a letra A aparece 3 vezes, a letra T aparece 2 vezes e a letra M aparece 2 vezes. Logo, temos:*

$$PR_{10;3;2;2} = \frac{10!}{3!2!2!} = 151200$$

*Ou seja, temos 151200 anagramas da palavra matemática.*

**Exemplo: 21** *Se um time de futebol jogou 15 partidas em um campeonato, tendo perdido 4 jogos, empatado 6 e ganhado 5 partidas. De quantos modos isso pode ter acontecido?*

**Solução: 21** *Temos uma permutação de 15 elementos em que 4;6;5 se repetem. O que nos resulta:*

$$PR_{15;4;6;5} = \frac{15!}{4!6!5!} = 630630$$

*Portanto, temos 630630 maneiras.*

Uma outra explicação para a fórmula de permutação com repetição envolve um dos conceitos principais da análise combinatória que é o fato de que para eliminarmos casos, devemos dividir. Seguiremos o exemplo abaixo.

**Exemplo: 22** *Determine a quantidade de anagramas da palavra carro.*

**Solução: 22** *Vamos dessa vez listar todos os possíveis anagramas:*

*acorr; acror; acrro; aocrr;*

*aorcr; aorrc; arcor; arcro;*

*arocr; arorc; arrco; arroc;*

*caorr; caror; carro; coarr;*

*corar; corra; craor; craro;*

*croar; crora; crrao; crroa;*

*oacrr; oarcr; oarrc; ocarr;*

*ocrar; ocrra; oracr; orarc;*

*orcar; orcra; orrac; orrca;*

*racor; racro; raocr; raorc;*

*rarco; raroc; rcaor; rcaro;*

*rcoar; rcora; rcrao; rcroa;*

*roacr; roarc; rocar; rocra;*

*rorac; rorca; rraco; rraoc;*

*rrcao; rrcoa; rroac; rroca;*

*Note que se fossemos permutar as 5 letras da palavra CARRO teríamos* $P_5 = 5! = 120$ *anagramas, porém para cada anagrama gerado temos 2 letras rr que permutam entre si e não formam uma palavra nova, apenas uma repetição de uma palavra já listada. Para cada palavra gerada temos* $2!$ *(permutação dos 2 r's) de palavras repetidas e que não devem ser contabilizadas. Para tal vamos dividir o número total de anagramas que é 120 pela quantidade de permutações entre si das letras repetidas que é 2! obtendo:*

$$\frac{5!}{2!} = PR_{5;2}$$

Seguindo esse raciocínio também podemos melhorar a maneira em que fazemos combinações simples.

**Exemplo: 23** *Em um grupo de 10 pessoas, de quantas maneiras podemos formar um grupo com três pessoas para liderar um projeto?*

**Solução: 23** *Como queremos formar um grupo com 3 pessoas, nesse caso a ordem não importa logo temos uma combinação de 10 pessoas tomadas 3 a 3.*

$$C_{10;3} = \frac{10!}{7!3!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7!}{7! \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 120.$$

*Portanto temos 120 maneiras de escolhermos esse grupo com 3 pessoas.*

Podemos solucionar o exemplo 23 de outra maneira, usando o P.F.C.

**Solução: 23.1** *Dentre o total de 10 pessoas, devemos escolher 3 ocupar 3 lugares. Para o primeiro lugar temos 10 possibilidades. Uma vez escolhido o primeiro lugar nos restam 9 possibilidades para o segundo e por fim 8 possibilidades para o terceiro lugar.*

$$\frac{10}{p_1}\frac{9}{p_1}\frac{8}{p_3},$$

*O que pelo P.F.C nos gera* $10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$ *possibilidades, no entanto, os 3 elementos de cada grupo, permutam entre si e essa permutação não gera um grupo novo, apenas uma repetição de um grupo já existente. Para cada grupo gerado temos 3! de grupos repetidos. Eliminando esses casos temos:*

$$10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot \frac{1}{3!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{720}{6} = 120.$$

*Portanto temos 120 maneiras de escolhermos esse grupo com 3 pessoas.*

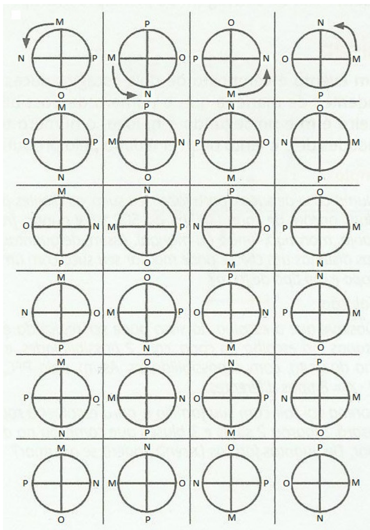
## 2.2 Permutação Circular

Nesta seção iremos estudar uma variação da Permutação chamada de Permutação Circular. Iremos utilizar o P.F.C para obtermos uma contagem dos elementos desse agrupamento.

**Definição 6** *(Permutação Circular) Sejam n objetos distintos. Chamaremos de Permutação circular, qualquer arrumação entre esses objetos ao longo de um círculo.*

Se $n > 3$ podemos imaginar esses objetos nos vértices de um polígono regular.

Figura 2.1: Possibilidades de uma roda.



A figura 2.1 mostra uma disposição de 4 elementos M,N,O,P em torno de um círculo. Podemos observar que: A primeira coluna foi obtida fixando-se o elemento M e permutando os elementos N, O, P de todas as maneiras possíveis, logo $3! = 6$ maneiras. Em cada linha temos uma rotação conveniente da posição anterior, note que dada duas posições em linhas diferentes, nenhuma pode ser obtida da outra por rotação. Assim duas permutações serão ditas iguais, se e somente se, uma delas poder ser obtida a partir de uma rotação conveniente da outra e serão ditas distintas, se e somente se, uma não pode ser obtida da outra a partir de qualquer rotação.

Portanto, o número de permutações circulares que nos interessa são as permutações distintas, isto é, nos interessa apenas a posição dos objetos entre si. Logo, se temos n elementos já vimos anteriormente que teremos n! permutações possíveis, porém como se trata de um círculo teremos para cada círculo formado teremos n repetições dessa mesma configuração, logo número de permutações circulares de n elementos é denotado por $PC_n$ e é calculado:

$$PC_n = \frac{n!}{n} = \frac{n \cdot (n-1)!}{n} = (n-1)!.$$

**Exemplo: 24** *De quantas maneiras 6 pessoas podem se sentar em uma mesa redonda?*

**Solução: 24** *Temos que permutar 6 pessoas em um círculo, logo:*

$$PC_6 = \frac{6!}{6} = \frac{6 \cdot (6-1)!}{6} = (6-1)! = 5! = 120 \ \textit{maneiras.}$$

*Portanto temos 120 maneiras dessas 6 pessoas se sentarem em uma mesa redonda.*

## 2.3 Combinação com Repetição

Nesta seção iremos estudar uma variação da Combinação simples chamada de Combinação com repetição. Iremos mostrar que podemos realizar a contagem desses casos através de uma permutação com repetição.

**Definição 7** *(Combinação com repetição) Chamamos de combinação com repetição uma relação de n objetos não necessariamente distintos, que serão agrupados p a p, podendo ser p menor, igual ou maior que n. Escrevemos* $CR_{n;p}$ *o número de combinações com repetição.*

Note que os agrupamentos que possuem os mesmo objetos em uma mesma quantidade e em ordem diferente, não são considerados agrupamentos distintos. Para entendermos a contagem desses casos, vamos seguir o seguinte exemplo:

**Exemplo: 25** *Em uma sorveteria são oferecidos seis sabores distintos de picolé para a venda. Uma pessoa deseja levar 8 picolés, de quantas maneiras essa compra pode ser feita?*

**Solução: 25** *Para nos ajudar com a solução desse problema vamos representar os 8 picolés com palitinhos.*

$$IIIIIII$$

*Sabemos que existem seis sabores serão eles* $(S_1; S_2; S_3; S_4; S_5; S_6)$. *Vamos fazer uma possível distribuição dos sabores.*

$$\frac{S_1}{I} + \frac{S_2}{II} + \frac{S_3}{\phantom{I}} + \frac{S_4}{III} + \frac{S_5}{I} + \frac{S_6}{I};$$

*isto é:*

$$(S_1; S_2; S_3; S_4; S_5; S_6) = (1; 2; 0; 3; 1; 1).$$

*Concluímos dessa distribuição que a pessoa comprou: 1 picolé do sabor* $S_1$*, 2 picolés do sabor* $S_2$*, nenhum picolé do sabor* $S_3$*, 3 picolés do sabor* $S_4$*, 1 picolé do sabor* $S_5$*, 1 picolé do sabor* $S_6$*. Observemos então que a cada distribuição desse tipo, obtemos uma solução e vice versa. Logo, cada solução é associada a uma distribuição desse tipo. O que está sendo feito é a intercalação de 5 sinais de soma no meio dos 8 palitinhos (que são os picolés). Assim precisamos pensar que temos 13,* $(8 + 6 - 1) = 13$*, elementos para permutar: 8 palitinhos e 5 sinais* $+$*, fazendo isso encontramos o número total de compras possíveis.*

*Por fim, para calcular o número de permutações destes elementos, devemos utilizar a fórmula da permutação com repetição. Temos um total de 13,* $(8+6-1)=13$, *elementos com repetição de 8 elementos e repetição de 5 elementos:*

$$PR_{13;8;5}=\frac{P_{13}}{P_8\cdot P_5}=\frac{13!}{8!\cdot 5!}=\frac{13\cdot 12\cdot 11\cdot 10\cdot 9\cdot 8!}{8!\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}=13\cdot 11\cdot 19=1287.$$

*Note que o quociente* $\dfrac{13}{8!\cdot 5!}$ *equivale a* $C_{13;8}$ *e podemos associar a combinação de 8 elementos com repetição de 6 da seguinte maneira:*

$$CR_{8;6}=C_{8+6-1;8}=C_{13;8}=\frac{13}{8!\cdot 5!}=1287.$$

Logo, temos a contagem. Combinação de n elementos agrupados p a p, com repetição:

$$CR_{n;r}=C_{n+r-1;r}.$$

**Exemplo: 26** *Imagine que você está em um supermercado e deseja comprar 8 refrigerantes para uma festa. Você pode escolher entre três sabores cola, guaraná e laranja. Você pode comprar os refrigerantes da maneira que quiser, como no exemplo, somente cola, somente guaraná, 7 cola e 1 laranja. Quantas maneiras você tem pra fazer essa escolha?*

**Solução: 26** *Temos uma combinação de 8 elementos em que 3 se repetem, logo temos:*

$$CR_{3;8}=C_{3+8-1;8}=C_{10;8}=45.$$

*Logo, temos 45 maneiras de comprar os refrigerantes.*

Analisando o exemplo 26 de outra forma temos a seguinte solução:

***Solução: 26.1*** *Os refrigerantes são os palitos, então queremos enfileirar*

*8 palitinhos e 2 sinais +. Se organizarmos na ordem: Cola + guaraná + laranja, temos que a organização:* $III + III + II$ *Significa: 3 refrigerantes de cola, 3 refrigerantes de guaraná e 2 refrigerantes de laranja. Temos que a organização:* $IIII + +IIII$ *Significa: 4 refrigerantes de cola, 0 refrigerante de guaraná e 4 refrigerantes de laranja.*

*Assim podemos calcular facilmente o total de combinações permutando 10 elementos (8 Palitos e 2 sinais +) em que se repetem 8 palitos e 2 sinais + tendo assim:*

$$PR_{10;8;2} = \frac{10!}{8! \cdot 2!} = 45$$

*Logo, temos 45 maneiras de comprar os refrigerantes.*

Resolvendo o exercício dessa segunda maneira, pode facilitar o entendimento para o aluno. Pois, entender o funcionamento de uma permutação com repetição é bem simples e ele não ficará em dúvida na escolha de n e p na fórmula de combinação com repetição.

# Capítulo 3

# Soluções inteiras de equações lineares com os coeficientes unitários

Nos capítulos anteriores analisamos algumas estratégias de contagem sempre nos baseando no princípio fundamental da contagem e no princípio aditivo. Discutiremos agora uma outra maneira para solucionarmos problemas de contagem que consiste em transformá-los em uma equação literal e analisar as suas soluções. Nosso objetivo nesse capítulo será encontrar o número de soluções inteiras de uma equação na forma:

$$x_1 + x_2 + x_3 + \cdots x_n = m$$

em que $x_i$ onde $i = 1; 2; 3; ...; n$, e m são números inteiros. E em seguida utilizar o raciocínio para resolvermos problemas de contagem.

Este capítulo foi pensado para melhorar o entendimento do método de contagem das combinações com repetições e entender a relação entre as soluções inteiras de equações lineares com os coeficientes unitários com problemas de contagem.

Além disso este capítulo se constitui de um material de consulta para o professor, dado que o conteúdo não é apresentado no ensino regular e por esse motivo, é pouco utilizado.

Para iniciarmos os estudos, vamos considerar a seguinte equação:

$$x_1 + x_2 = 7,$$

Note que se exigirmos que $x_1; x_2$ sejam números inteiros, teríamos infinitas soluções para essa equação. Podemos verificar facilmente isso. Temos alguns exemplos de soluções:

$$(x_1; x_2) = \{(4; 3); (-3; 10); (-10; 17)...\}$$

Para que possamos ter um número finito de soluções, devemos restringir os valores que as variáveis $x_1; x_2$ podem assumir. Por exemplo se quisermos o número de soluções inteiras não negativas teremos:

$$(x_1; x_2) = \{(0; 7); (1; 6); (2; 5); (3; 4); (4; 3); (5; 2); (6; 1); (7; 0)\}$$

Logo, temos um total de 8 soluções.

Percebemos então que trata-se de um problema de contagem e também concluímos que nem sempre será viável listar todas as soluções possíveis. Portanto precisamos de um método de contagem. Vejamos um exemplo.

**Exemplo: 27** *Determine o número de soluções não negativas para a equação:*

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 15$$

**Solução: 27** *Queremos então uma quadra de valores* $(x_1; x_2; x_3; x_4)$ *cuja soma seja 15. Vamos então separar então uma solução particular:*

$$(x_1; x_2; x_3; x_4) = (2; 5; 7; 1)$$

*afim de encontrar todas as soluções não negativas da equação* $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 15$ *vamos escrever o resultado 15 como soma de 15 palitinhos,*

$$| + | + | + | + | + | + | + | + | + | + | + | + | + | + | = 15$$

*Note que queremos separar o número 15 em 4 parcelas, ou seja, basta separarmos os 15 palitinhos com 3 sinais* $+$.
*Uma organização como:*

$$|| + ||||| + ||||||| + | \text{ \textit{nos gera a solução particular} } (2; 5; 7; 1)$$

*Uma organização como:*

$$+||||||| + ||||||| + | \text{ \textit{nos gera a solução particular} } (0; 7; 7; 1)$$

*Uma organização como:*

$$+ + |||||||||||||| + | \text{ \textit{nos gera a solução particular} } (0; 0; 14; 1)$$

*Observando esse tipo de organização, percebemos que estamos permutando os sinais* $+$ *e os palitinhos afim de formar uma nova solução. Nota-se que temos uma permutação com repetição em que permutam 15 palitinhos com 3 sinais* $+$*, ou seja, temos uma permutação de 18* $= (15 + 3)$ *elementos, em que há a repetição de 15 e 3 elementos. Isto é:*

$$PR_{18;3;5} = \frac{18!}{3! \cdot 5!} = 816$$

*Logo, temos 816 soluções não negativas para a equação* $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 15$.

Assim temos o teorema abaixo:

**Teorema 1** *O número de soluções não negativas para a equação:*

$$x_1 + x_2 + x_3 + \cdots x_n = m$$

*em que* $x_i$ *onde* $i = 1; 2; 3; ...; n$, *e* $m > 0$ *são números inteiros. é igual a:*

$$PR_{n+m-1;m;n-1}$$

**Demonstração:** Queremos escrever o número m como uma soma de n parcelas de inteiros não negativos. Note que podemos adotar a mesma estratégia utilizada no exemplo anterior, vamos escrever o número m como soma de m palitinhos:

$$| + | + | + | + | + | + | + | + | + | + ... + | + | + | + | + | = m$$

Note que queremos separar o número m em n parcelas, ou seja, basta separarmos os m palitinhos com $n - 1$ sinais $+$.

$$| + | + ... + | + | + ... + | + | + | + ... + | + | + | + ... + | + | + | + | + | = m$$

Note também que o valor de $x_1$ corresponde a quantidade de palitinhos antes do primeiro $+$, o valor de $x_2$ corresponde a quantidade de palitinhos entre o primeiro e o segundo $+$ e assim segue até o valor de $x_n$ que corresponde a quantidade de palitinhos após o último sinal $+$. Logo, temos que cada distribuição distinta dos palitinhos e dos sinais $+$ nos gera uma nova solução, basta permutarmos os $m + n - 1$ elementos em que há a repetição de $m$ e $n - 1$ elementos. isto é:

$$PR_{m+n-1;m;n-1}.$$

**Exemplo: 28** *Determine o número de soluções não negativas para a equação:*

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 11$$

**Solução: 28** *Temos que m= 11 e n=4 logo temos:*

$$PR_{11+4-1;11;4-1} = PR_{14;11;3} = \frac{14!}{11!3!} = 364$$

*Logo, temos 364 soluções não negativas para a equação:* $x_1+x_2+x_3+x_4 = 11$.

Podemos ainda estender a aplicação desse teorema para a solução em inteiros positivos de uma equação do tipo $x_1 + x_2 + x_3 + \cdots x_n = m$ para isso basta fazermos um ajuste nas soluções. Para o entendimento, vamos analisar o seguinte exemplo:

**Exemplo: 29** *Determine o número de soluções em inteiros positivos da equação* $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 15$.

**Solução: 29** *Como vimos no exemplo 27, uma organização como:*

$$|| + ||||| + ||||||| + | \text{ nos gera a solução particular } (2; 5; 7; 1).$$

*Uma organização como:*

$$+||||||| + ||||||| + | \text{ nos gera a solução particular } (0; 7; 7; 1).$$

*Uma organização como:*

$$+ + |||||||||||||| + | \text{ nos gera a solução particular } (0; 0; 14; 1).$$

*Note que as quadras* $(0; 7; 7; 1)$ *e* $(0; 0; 14; 1)$ *não representam soluções para o nosso problema pois possuem casos em que uma variável é zero, ou seja, não é positiva. Entretanto podemos utilizar essas soluções pois existe uma correspondência entre as soluções em inteiros não negativos dessa equação e a solução em inteiros positivos de outra equação.*

*Note que na equação:*

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 15.$$

*com* $x_i > 0$, *para* $i = 1; ...; 4$, *podemos fazer uma mudança de variável em que* $x_i = y_i + 1$ *teremos* $y_i \geq 0$. *Portanto ficaremos com a equação:*

$$y_1 + 1 + y_2 + 1 + y_3 + 1 + y_4 + 1 = 15.$$

*o que corresponde a equação:*

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 11.$$

Note algumas soluções listadas abaixo:

| Soluções não negativas | Soluções Positivas |
|---|---|
| $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 11$ | $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 15$ |
| (0; 5; 5; 1) | (1; 6; 6; 2) |
| (2; 7; 1; 1) | (3; 8; 2; 2) |
| (0;0;10;1) | (1; 1; 11; 2) |

Figura 3.1: Tabela com algumas soluções inteiras.

Observando a mudança de variável, percebemos que para cada solução inteira não negativa de $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 11$, obtemos uma única solução inteira positiva de $x_1+x_2+x_3+x_4 = 15$ e vice - versa. Dessa forma o número de soluções em inteiros positivos de $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 15$ é igual ao número de soluções não negativas de $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 11$.

Assim podemos até refinar as nossas exigências para o problema. Segue o exemplo abaixo.

**Exemplo: 30** *Determine o número de soluções em inteiros maiores ou iguais do que 4 para a equação:* $x_1 + x_2 + x_3 = 15$.

**Solução: 30** *Tomando* $x_i = y_i + 4$ *obtemos:*

$$y_1 + 4 + y_2 + 4 + y_3 + 4+ = 15.$$

*ou seja:*

$$y_1 + y_2 + y_3 = 3.$$

*Calculando o número de soluções não negativas obtemos:*

$$PR_{3+3-1;3;3-1} = PR_{5;3;2} = \frac{5!}{3!2!} = 10$$

*Logo, temos 10 soluções inteiras positivas maiores ou iguais a 4 para a equação* $x_1 + x_2 + x_3 = 15$.

**Exemplo: 31** *Determine o número de soluções em inteiros não negativos da equação:* $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 21$, *em que exatamente 3 dessas incógnitas são nulas.*

**Solução: 31** *Precisamos escolher 3 dessas variáveis para serem nulas, logo, temos* $C_{6;3} = 20$. *Como 3 delas serão nulas as outras 3 não podem ser. Daí, precisamos calcular as soluções em inteiros positivos da equação:* $y_1 + y_2 + y_3 = 21$, *uma vez que escolhemos 3 incógnitas para assumirem valor nulo. Para tal faremos a seguinte substituição* $y_i = z_i + 1$ *ficando assim com a equação* $z_1 + 1 + z_2 + 1 + z_3 + 1 + = 21$, *logo,*$z_1 + z_2 + z_3 = 18$, *que possui:*

$$PR_{18+3-1;18;3-1} = PR_{20;18;2} = \frac{20!}{18!2!} = 190 \textit{ soluções.}$$

*Logo temos 190 soluções para* $y_1 + y_2 + y_3 = 21$ *portanto pelo P.F.C temos* $190 * 20 = 3800$ *soluções para* $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 21$, *em que exatamente 3 dessas incógnitas são nulas.*

# Capítulo 4

# Problemas com objetos e caixas

Neste capítulo trataremos da classe de exercícios que consiste em colocar objetos em caixas. Para cada um temos duas opções, ser distinto ou não.

Uma pergunta que o leitor pode estar se fazendo é por que fazer a explicação dessas classes e por que tratá-los assim?

Com uma visão geral, muitos problemas de análise combinatória podem ser encaixados em uma dessas classes assim, acreditamos que se tratarmos dos mesmos de forma geral e separadamente, melhoraremos o entendimento do leitor diante de certos problemas de análise combinatória.

Essa é uma nova maneira de também apresentar o conteúdo, dando uma ideia nova de metodologia para o professor do ensino médio.

Este capítulo tem como base [1] e [2].

## 4.1 Objetos distintos em caixas distintas

Para iniciarmos essa seção vamos analisar os seguintes exemplos:

**Exemplo: 32** *De quantas maneiras podemos distribuir 6 brinquedos distintos para duas crianças?*

**Solução: 32** *Tomando os 6 brinquedos como* $(B_1; B_2; B_3; B_4; B_5; B_6)$ *e as crianças como* $C_1; C_2$ *temos que para o brinquedo* $B_1$ *existem duas possibilidades,* $C_1$ *ou* $C_2$*, o mesmo acontece para o brinquedo* $B_2$ *duas possibilidades* $C_1$ *ou* $C_2$*, o mesmo acontece com todos os brinquedos até o último deles logo:*

$$\frac{B_1}{2} \cdot \frac{B_2}{2} \cdot \frac{B_3}{2} \cdot \frac{B_4}{2} \cdot \frac{B_5}{2} \cdot \frac{B_6}{2}.$$

*Assim esse problema já havia sido retratado aplicando P.F.C obtendo*

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 64.$$

*logo, temos 64 maneiras de distribuir 6 brinquedos distintos para duas crianças.*

**Exemplo: 33** *De quantas maneiras podemos distribuir 6 brinquedos distintos para duas crianças de tal maneira que nenhuma delas fique sem brinquedo?*

**Solução: 33** *Note que na solução do exemplo anterior temos os casos em que ou a criança* $C_1$ *ou a criança* $C_2$ *ficou sem brinquedo, sendo que todos os 6 brinquedos foram dados para a outra criança. Devemos eliminar esses dois casos em que aparecem uma criança sem brinquedo, portanto temos:*

$$64 - 2 = 62 \text{ } maneiras.$$

*logo, temos 62 maneiras de distribuir os 6 brinquedos entre duas crianças de tal maneira que nenhuma delas ficará sem brinquedo.*

O exemplo 32 e 33 representam uma classe de problemas de distribuição de objetos distintos em caixas distintas. Generalizando obtemos os exemplos 34 e 35.

**Exemplo: 34** *De quantas maneiras podemos distribuir* $n$ *objetos distintos em duas caixas distintas?*

**Solução: 34** *Podemos analisar este caso de maneira análoga as anteriores, cada um dos n objetos possui duas possibilidades para a distribuição entre as caixas, sendo assim:*

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdots 2 = 2^n$$

*logo temos $2^n$ maneiras de distribuir os n objetos em duas caixas.*

**Exemplo: 35** *De quantas maneiras podemos distribuir n objetos distintos em duas caixas distintas, sem que nenhuma fique vazia?*

**Solução: 35** *Analisando o caso anterior, temos que são ao todo $2^n$ maneiras, como temos 2 casos em que temos a primeira caixa vazia ou a segunda caixa vazia devemos eliminar esses dois casos, portanto obtemos:*

$$2^n - 2 = 2(2^{n-1} - 1)$$

*maneiras de distribuir os n objetos sem que fique uma caixa vazia.*

Para um caso mais geral, ainda com o P.F.C conseguimos resposta. Segue o exemplo 36.

**Exemplo: 36** *De quantas maneiras podemos separar n objetos distintos em m caixas distintas?*

**Solução: 36** *Para o primeiro objeto temos m caixas, para o segundo objeto, novamente m caixas, isso acontece até o n-ésimo objeto, que também tem m possibilidades sendo assim:*

$$m \cdot m \cdot m \cdots m = m^n$$

## 4.2 Objetos iguais em caixas distintas

Para este caso vamos estudar o seguinte exemplo:

**Exemplo: 37** *De quantas maneiras podemos distribuir 6 laranjas (iguais) entre duas pessoas.*

**Solução: 37** *Queremos distribuir 6 laranjas para duas pessoas. Podemos simplesmente listar os casos:*

| Pessoa | Número de laranjas recebidas | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 2 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | 0 |

Figura 4.1: Tabela da distribuição das laranjas entre duas pessoas.

*Analisando os casos da tabela, verificamos que existem 7 possibilidades para distribuirmos 6 laranjas entre duas pessoas.*

**Solução: 37.1** *Podemos abordar esse problema como uma combinação com repetição, em que temos.*

$$CR_{2;6} = C_{2+6-1;6} = C7;6 = \frac{7!}{6!1!} = 7$$

*Logo, temos 7 possibilidades para distribuirmos 6 laranjas entre duas pessoas.*

**Solução: 37.2** *Uma outra abordagem seria tomar as laranjas como palitinhos que devem ser separados por um sinal de +, por exemplo temos a solução particular:*

$$I + IIIII$$

*Nessa organização temos a pessoa 1 com 1 laranja e a pessoa 2 com 5 laranjas.*

Analisando essa solução particular, vemos que estamos permutando 7 objetos em que 6 se repetem, logo temos:

$$PR_{7;6} = \frac{7!}{6!} = 7$$

Logo, temos 7 possibilidades para distribuirmos 6 laranjas entre duas pessoas.

O exemplo 37 trata-se de um problema de distribuição de objetos iguais em caixas distintas.

Tomando a primeira solução, vamos generalizar no exemplo 38 a seguir.

**Exemplo: 38** *De quantas maneiras podemos separar p objetos iguais em n caixas distintas?*

**Solução: 38** *Trata-se de uma combinação de p com repetição, tomados n a n, logo temos* $CR_{n;p} = C_{n+p-1;p} = \dfrac{(n+p-1)!}{p!(n-1)!}$

## 4.3 Objetos distintos em caixas iguais

Quando pensamos em caixas iguais, temos que levar em consideração que existem repetições, para tal, vamos pensar nas caixas como conjuntos. Vejamos o 39 a seguir para fixar ideias.

**Exemplo: 39** *De quantas maneiras podemos separar 5 objetos em dois conjuntos não vazios?*

**Solução: 39** *Vamos chamar os objetos de* $\{O_1; O_2; O_3; O_4; O_5\}$ *e os conjuntos de* $C_1; C_2$ *Tomemos a seguinte solução particular:*

- *Caso 1: Os objetos* $\{O_1; O_2\}$ *vão para o conjunto* $C_1$ *e os objetos* $\{O_3; O_4; O_5\}$ *vão para o conjunto* $C_2$*.*

  $C_1 = \{O_1; O_2\}$ *e* $C_2 = \{O_3; O_4; O_5\}$

- *Caso 2: Os objetos* $\{O_1; O_2\}$ *vão para o conjunto* $C_2$ *e os objetos* $\{O_3; O_4; O_5\}$ *vão para o conjunto* $C_1$*.*

  $C_1 = \{O_3; O_4; O_5\}$ *e* $C_2 = \{O_1; O_2\}$

*Esses são dois casos que não podemos considerar distintos, pois formam o mesmo conjunto apenas com nomes diferentes. Ou seja, para cada objeto temos 2 possibilidades de conjuntos $C_1$ ou $C_2$) utilizando o raciocínio anterior temos a seguinte contagem, $2^5 - 2 = 30$. Sendo esses dois excluídos, os casos em que temos um dos conjuntos vazios. Porém, como analisado na nossa solução particular, uma solução aparece duas vezes, logo temos:*

$$\frac{2^5 - 2}{2} = \frac{30}{2} = 15 \textit{ possibilidades.}$$

*Portanto, temos 15 possibilidades de separar 5 objetos em dois conjuntos não vazios.*

## 4.4 Objetos iguais em caixas iguais

Para este caso vamos estudar o seguinte exemplo:

**Exemplo: 40** *De quantas maneiras podemos distribuir 6 laranjas em duas caixas iguais?*

**Solução: 40** *Queremos distribuir 6 laranjas entre duas caixas. Podemos simplesmente listar os casos:*

| Caixa | Número de laranjas recebidas | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 2 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | 0 |

Figura 4.2: Tabela da distribuição das laranjas em caixas iguais.

*Como sabemos pelo enunciado não há distinção entre as caixas, logo dos 7 casos descritos na tabela acima, os casos* $(0;6)$ *e* $(6,0)$ *;*$(1,5)$ *e* $(5,1)$ *e* $(2,4)$ *e* $(4,2)$ *são repetições e devem ser eliminados. Logo, das possibilidades originais temos* $7 - 3 = 4$ *maneiras de distribuirmos 6 laranjas em 2 caixas iguais.*

Note uma sutil diferença entre a paridade do número de objetos.

**Exemplo: 41** *De quantas maneiras podemos distribuir 7 laranjas (iguais) em duas caixas iguais?*

**Solução: 41** *Queremos distribuir 7 laranjas entre duas caixas. Podemos simplesmente listar os casos:*

| Caixa | Número de laranjas recebidas | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| 2 | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | 0 |

Figura 4.3: Tabela da distribuição das laranjas em caixas iguais.

*Note que dos 8 casos possíveis, temos 4 que são repetições de casos anteriores, como por exemplo,* $(1;6)$ *e* $(6;1)$*. Note que nesse caso temos exatamente a metade dos casos sendo repetidos. Logo, das 8 possibilidades originais temos* $\frac{8}{2} = 4$ *maneiras de distribuirmos 7 laranjas em 2 caixas iguais.*

*Temos que há uma pequena diferença entre os casos, se o número de laranjas for par ou for ímpar. Desta forma seguem as generalizações nos exemplos 42 e 43.*

**Exemplo: 42** *De quantas maneiras podemos dividir um número $n$ par de objetos iguais em duas caixas iguais?*

**Solução: 42** *Analisando os exemplos anteriores, percebemos que há sempre* $(n+1)$ *maneiras de distribuir $n$ objetos em duas caixas distintas. Note que se $n$ é par,* $(n+1)$ *é ímpar, logo se as caixas são iguais teremos* $\frac{n}{2}$ *repetições e serão elas:* $(0;n)$ *e* $(n;0)$*;* $(1;n-1)$ *e* $(n-1;1)$*; e assim por diante. Assim dos* $(n+1)$ *casos existentes devemos eliminar* $\frac{n}{2}$ *casos repetidos. Logo temos:*

$$(n+1) - \frac{n}{2} = \frac{n}{2} + 1$$

*Interpretando esse resultado percebemos que são* $\frac{n}{2}$ *que se repetiram acrescidos do único caso que isso não aconteceu, que é o caso de ter metade das laranjas em um caixa e metade na outra.*

**Exemplo: 43** *De quantas maneiras podemos dividir um número n ímpar de objetos iguais em duas caixas iguais?*

**Solução: 43** *Analisando os exemplos anteriores, percebemos que há sempre* $(n+1)$ *maneiras de distribuir n objetos em duas caixas distintas. Note que se n é ímpar,* $(n+1)$ *é par, logo se as caixas são iguais teremos* $\frac{n+1}{2}$ *repetições e serão elas:* $(0;n)$ *e* $(n;0)$*;* $(1;n-1)$ *e* $(n-1;1)$*; e assim por diante. Assim dos* $(n+1)$ *casos existentes devemos eliminar* $\frac{n+1}{2}$ *casos repetidos. Logo temos:*

$$(n+1) - \frac{n+1}{2} = \frac{n+1}{2}$$

*Interpretando esse resultado percebemos que são* $\frac{n+1}{2}$ *que se repetiram e como n é um número ímpar, não existe a possibilidade de ambas as caixas terem o mesmo número de laranjas.*

O leitor pode conjecturar que no caso geral onde temos que distribuir n objetos distintos em m caixas iguais teríamos o número:

$$\frac{m^n - m}{m}$$

No entanto, consideremos o caso onde temos $n = 5$ e $m = 3$. Nesta conjectura teríamos:

$$\frac{3^5 - 3}{3} = \frac{3^4 - 1}{1} = 80 \text{ elementos.}$$

Assim, vejamos como seriam, no caso explícito, tais elementos na nomenclatura usada no exemplo 39. Teríamos os elementos $\{O_1; O_2; O_3; O_4; O_5\}$ e as caixas $C_1; C_2; C_3$

- Caso 1: $\{O_1\}$ para a caixa $C_1$;$\{O_4; O_3\}$ para a caixa $C_2$ e $\{O_2; O_5\}$ para a caixa $C_3$
- Caso 2: $\{O_2; O_3\}$ para a caixa $C_1$;$\{O_1; O_4\}$ para a caixa e $C_2$ e$\{O_5\}$ para a caixa $C_3$

Analisando esses casos percebemos que os elementos permutam entre si e não formam uma nova configuração. Logo ao invés de termos o número 3 no denominador, temos que ter o número $3! = 6$, com o mesmo argumento do exemplo 39. Assim, mudaríamos a nossa conjectura para.

$$\frac{3^5 - 3}{3!} = \frac{3^4 - 1}{2} = 40 \text{ elementos.}$$

E no caso geral.

$$\frac{m^n - m}{m!} = \frac{m(m^{n-1} - 1)}{m!} = \frac{(m^{n-1})}{(m-1)!} \text{ elementos.}$$

Agora, o leitor atento verifica que no caso de m par, teremos $m^{n-1} - 1$ um número ímpar e no entanto $(m-1)!$ é um número par, o que quebra nossa conjectura pois não teríamos uma divisão inteira. Vejamos as contas para $m = 4$.

$$\frac{4^5 - 4}{4!} = \frac{4^4 - 1}{3!} = \frac{255}{6} = 42,5 \text{ elementos.}$$

Concluímos então que a nossa conjectura realmente esta errada. Ainda assim podemos ficar tentados a tratar do assunto visando a paridade do número de objetos do processo. No entanto a ideia gerada no exemplo 39 não caberia na resolução desse problema.

O tratamento deste caso e do capítulo posterior com todas as suas generalizações é necessário um conteúdo que vai além do apresentado no ensino médio e pode ser viso em [1].

Em vários exemplos usamos a palavra laranja com conotações de objetos iguais. Nem sempre isso fica claro ao leitor. Esse problema de interpretação é tratado no capítulo 5.

# Capítulo 5

# Proposta de atividades

A proposta de atividades a seguir têm como propósito, fazer com que o aluno, veja a diferenciação dos tipos de problemas com contagem. Fazer com que ele perceba que uma simples palavra pode mudar a maneira de contagem e ainda que identifique certas palavras e faça a contagem de uma maneira correta e objetiva, utilizando os métodos de contagem explicados nesse trabalho. Os exercícios listados abaixo, têm como público alvo os alunos do 2° e 3° anos do ensino médio, turmas que já viram os métodos de contagem e precisam de uma segurança para a resolução dos mais variados exercícios. Este capítulo tem como base os textos [5] e [6].

## 5.1 Semiótica Peirceana

Nesta seção vamos dissertar sucintamente um pouco sobre signos e seus significados no sentido amplo. Este referencial teórico servirá de base para a nossa avaliação sobre o material coletado na aplicação das atividades.

Em um sentido amplo, o estudo de representações remete à Semiótica - ciência de toda e qualquer linguagem que usa de signos para realizar estas representações. As argumentações mais atuais sobre Semiótica atribuem - se ao norte-americano Charles Sanders Peirce (1839 - 1941). Na Semiótica Peirceana existem duas frentes de construção teórica, uma se ocupa da sistematização e classificação dos diferentes signos possíveis, já a outra se ocupa do seu funcionamento e o papel que os signos desempenham na cognição humana.

Na Semiótica Peirceana entende-se que signo é algo que representa outro algo-seu objeto. Esta definição de signo é considerada ampla, podendo ser uma ação ou reação verbalizada.

Pierce estabeleceu as seguintes categorias fenomenológicas:

- Primeiridade (qualidade)
- Secundidade (reação)
- Terceiridade (representação)

Em uma sala de aula a Primeiridade acontece no primeiro contato visual do aluno com o problema, podendo ser ele em um papel ou na própria lousa. É nesse momento que eles identificam qual o problema a ser investigado. A Secundidade diz respeito a sensação sentida pelo aluno. Surpresa, medo, alívio. A Terceriedade corresponde ao vínculo entre o signo, o objeto e o interpretante. É o momento do desenvolvimento matemático, interpretação do resultado e confronto com a realidade.

Para investigar a semiose em atividades envolvendo contagem, analisamos uma atividade desenvolvida por alunos do ensino básico, cursando o ensino médio em uma escola privada de Campo Grande MS.

## 5.2 Objetivos

- Identificar a classe do problema.

- Pensar em uma solução particular.
- Criar a melhor estratégia para a solução do problema.
- Analisar as diferenças entre as soluções.
- Investigar as dificuldades e os erros cometidos pelos alunos, com o objetivo de melhorarmos nossa capacidade como ensinadores.

## 5.3 Recusos Metodológicos

Quadro-negro, Aparelho Data-Show e uma ficha onde deve ser anotada a resposta.

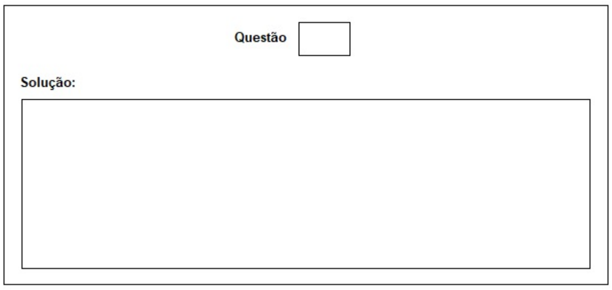



Figura 5.1: Ficha na qual os alunos colocaram seus pensamentos.

## 5.4 Procedimentos Metodológicos:

A ficha onde a questão 1 será resolvida é entregue. Após todos os alunos receberem, a questão 1 é exposta na tela do data-show. Passado um período de 5 minutos a ficha é recolhida. Logo após é entregue a ficha para a questão 2 e o processo se repete até a última questão. Esse processo se vê necessário, visando que os alunos não alterem suas respostas ao se derem conta dos próximos exercícios e façam a comparação entre os enunciados.

## 5.5 Lista de Exercícios

**Exercício: 1** *Um patrão deve distribuir 6 tarefas distintas entre 3 funcionários, ficando a escolha livre, isto é um funcionário pode fazer tudo, pode dividir entre 2 ou até os três. Quantas são as possibilidades para a realização dessa tarefa?*

**Exercício: 2** *Dividir 6 objetos distintos em três caixas distintas.*

**Exercício: 3** *Dividir 5 objetos iguais em duas caixas iguais.*

**Exercício: 4** *Dividir 4 objetos distintos em duas caixas iguais.*

**Exercício: 5** *Lançamento de dois dados iguais.*

**Exercício: 6** *Lançamento de dois dados distintos.*

**Exercício: 7** *Lançar um dado duas vezes.*

**Exercício: 8** *Lançar dois dados distintos e obter soma 8.*

# Capítulo 6

# Análise da atividade

Assim que recebem a ficha, os alunos logo ficam agitados, ficam perguntando onde está a questão e o que é para ser feito. A questão 01 como trata - se de uma questão com mais informações, logo de início, ocorreu a visualização da questão, quase que imediatamente após a leitura do enunciado, alguns alunos prontamente já estavam fazendo desenhos, contas, esquematizando algum esboço de solução essa foi a primeiridade que Peirce menciona.

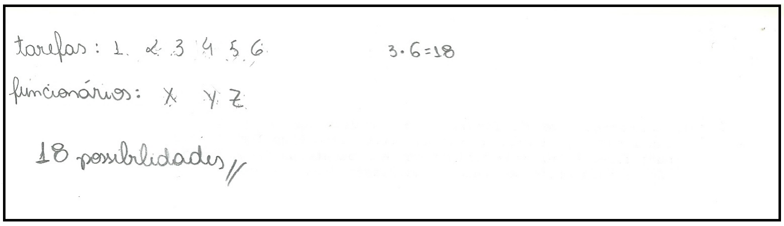



Figura 6.1: Exemplo 1 de uma solução da atividade número 1

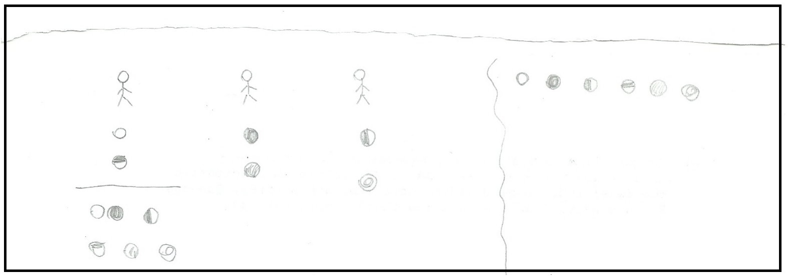


Figura 6.2: Exemplo 2 de uma solução da atividade número 1

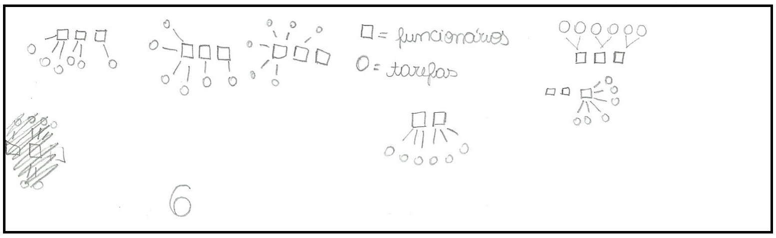



Figura 6.3: Exemplo 3 de uma solução da atividade número 1

Nota-se que mesmo sem ter uma ideia ou um raciocínio matemático os alunos tentam criar algo para apresentar como solução. Conforme as questões foram passando, os enunciados ficando mais curtos, começou uma indagação quanto ao tamanho das caixas, quanto ao formato delas, se havia a possibilidade de os objetos não caberem na caixa. Como na primeira questão é pedido um número de possibilidades, os alunos em sua grande maioria começaram a tentar contar todos os casos, alguns de uma maneira mais eficiente, outros nem tanto. Tivemos desenhos, traços, esquemas, bolinhas, todo tipo de diagramação, o que mostra uma atenção quando a palavra DISTINTOS aparece no enunciado.

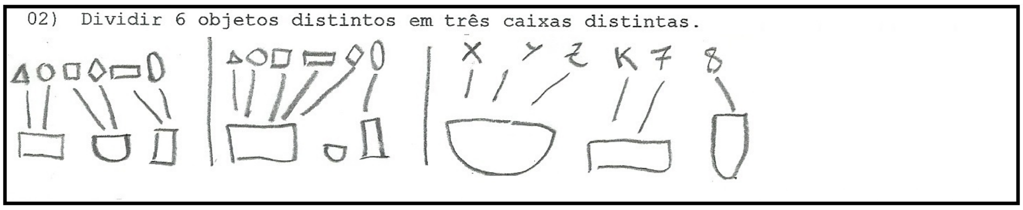



Figura 6.4: Exemplo 1 de uma solução da atividade número 2

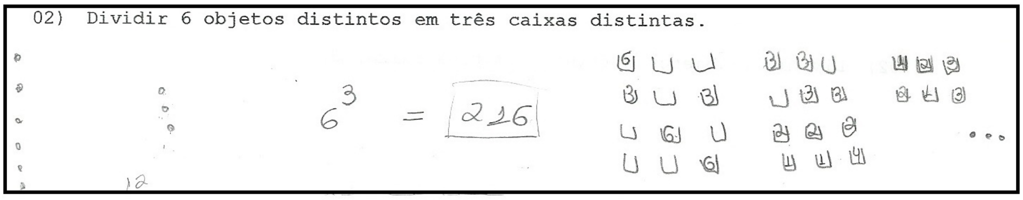



Figura 6.5: Exemplo 2 de uma solução da atividade número 2

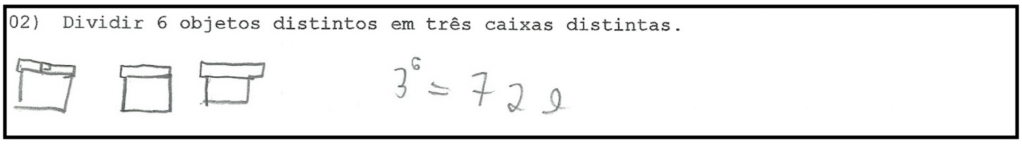



Figura 6.6: Exemplo 3 de uma solução da atividade número 2

Começaram a aparecer todo tipo de caixa, percebe-se que o entendimento foi, as caixas são diferentes, então devo tomar cuidado quando tenho a mesma quantidade de elementos em caixas diferentes. Alguns começaram a se indagar se a ordem importava. (Quando são iguais importa?) (Quando são distintos importa?)

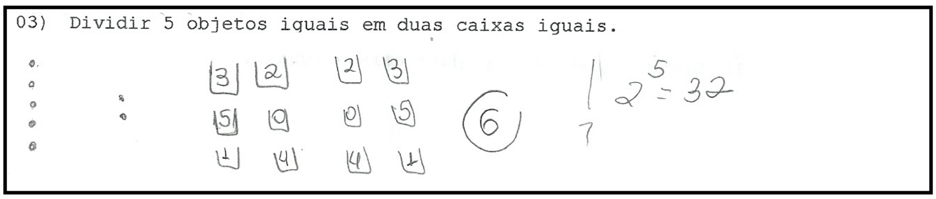



Figura 6.7: Exemplo 1 de uma solução da atividade número 3


Figura 6.8: Exemplo 2 de uma solução da atividade número 3

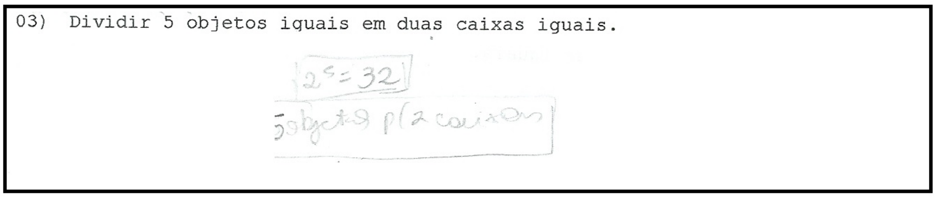



Figura 6.9: Exemplo 3 de uma solução da atividade número 3

Quando chegamos a questão 4, caixas iguais, já percebe-se o entendimento que os objetos que estão em cada caixa importam, logo os alunos fazem questão de mostrar que estão colocando objetos distintos.

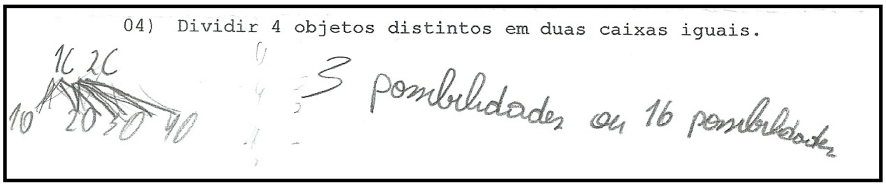



Figura 6.10: Exemplo 1 de uma solução da atividade número 4

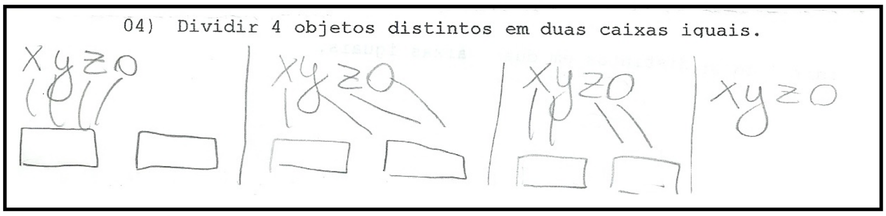



Figura 6.11: Exemplo 2 de uma solução da atividade número 4

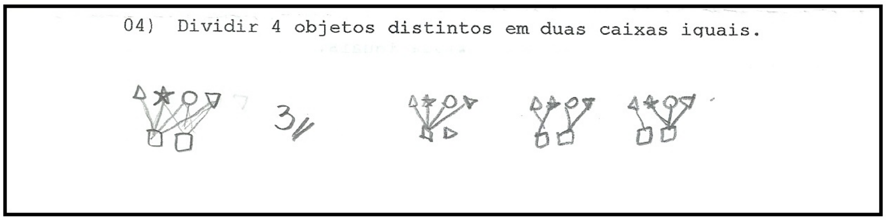



Figura 6.12: Exemplo 3 de uma solução da atividade número 4

Quando chegamos nas questões sobre dados, ai sim começaram a perder o foco. Apareceu todo tipo de dado, dado com cores diferentes, dado com 20 faces, com 12 faces. Eles estavam mais preocupados em usar um dado diferente do comum do que pensar no problema em si. Essa é a Secundidade de Peirce. Na incerteza do que era permitido ou não, todo tipo de solução apareceu. Ao chegar no último exercício percebe - se um sentimento de mais do mesmo, poucos alunos percebem a diferença sutil de um exercício para o outro. Os alunos que percebem começam a fazer esquemas objetivos, visando procurar a cardinalidade do conjunto procurado, a Terceidade de Peirce. Nesse momento aparece o primeiro espaço amostral.

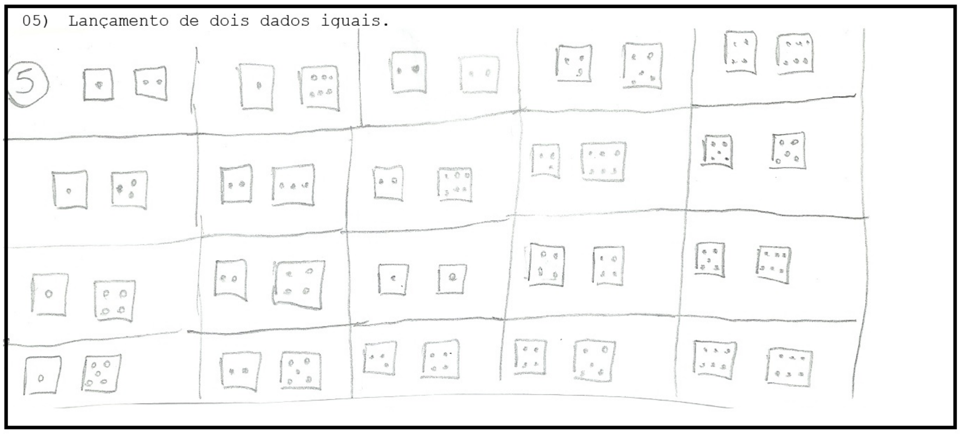



Figura 6.13: Exemplo 1 de uma solução da atividade número 5

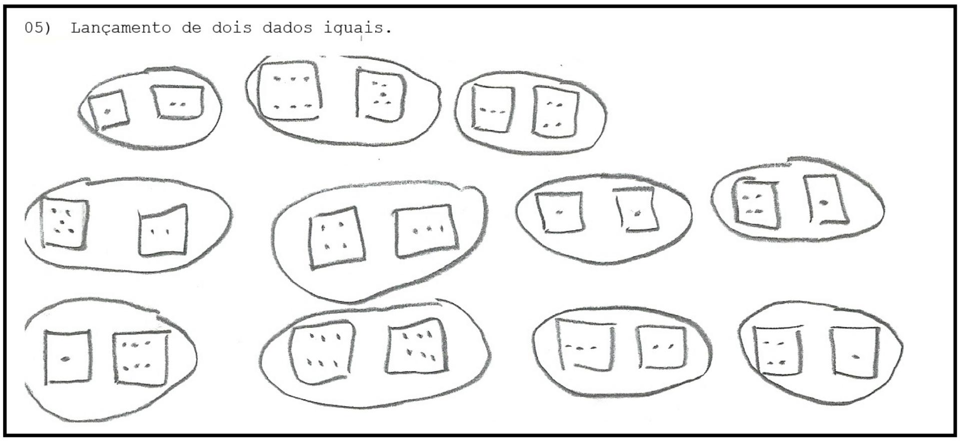



Figura 6.14: Exemplo 2 de uma solução da atividade número 5

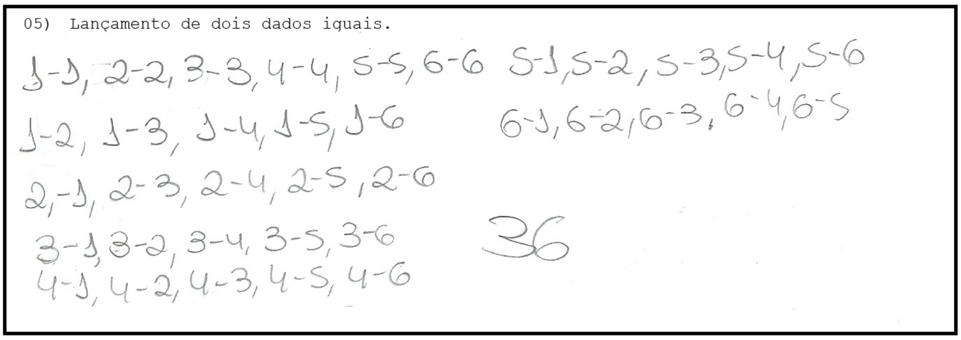



Figura 6.15: Exemplo 3 de uma solução da atividade número 5

Quando o exercício muda para dois dados distintos, estamos interessados na reação dos alunos aos pares ordenados em que aparecem o mesmo número. Percebe-se a noção que se os dados são distintos, então eles têm cores ou até formados diferentes, isso foi representado muito bem, entretanto os alunos não perceberam que a real mudança estava no espaço amostral dessa formação.

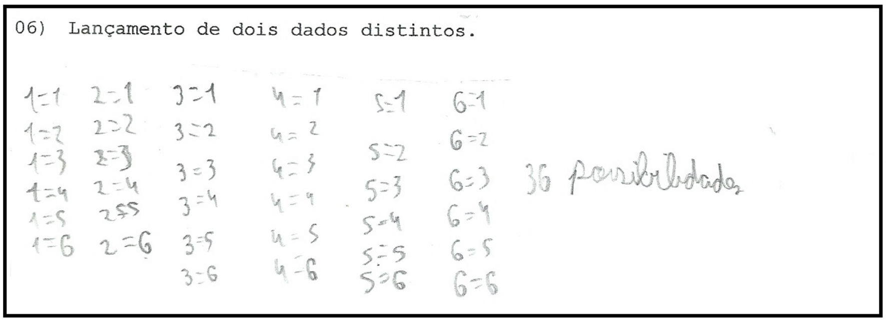



Figura 6.16: Exemplo 1 de uma solução da atividade número 6

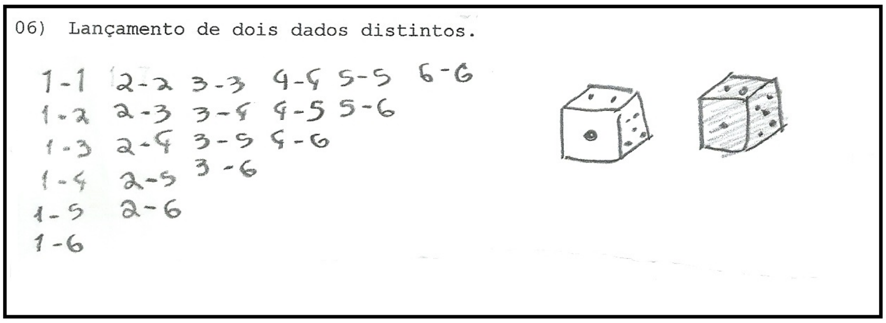



Figura 6.17: Exemplo 2 de uma solução da atividade número 6

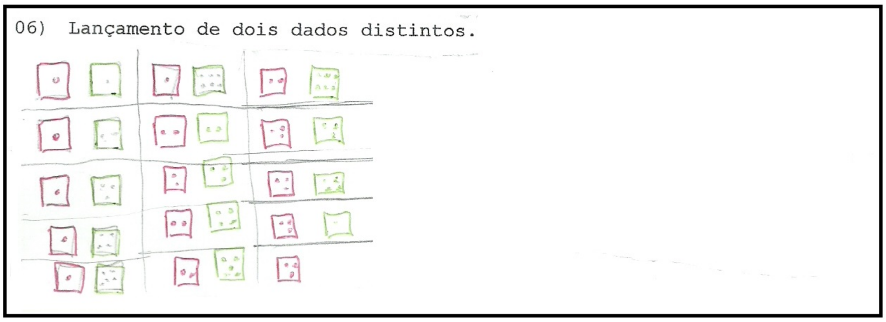



Figura 6.18: Exemplo 3 de uma solução da atividade número 6

Ao serem questionados sobre a diferença entre jogar dois dados iguais ou jogar um dado duas vezes, houve uma confusão geral, alguns argumentando que era mesma coisa, outros falando que não. Apesar da confusão percebe-se que o aluno entende que uma sutil diferença no enunciado pode mudar todo o seu espaço amostral e como consequência o seu resultado.

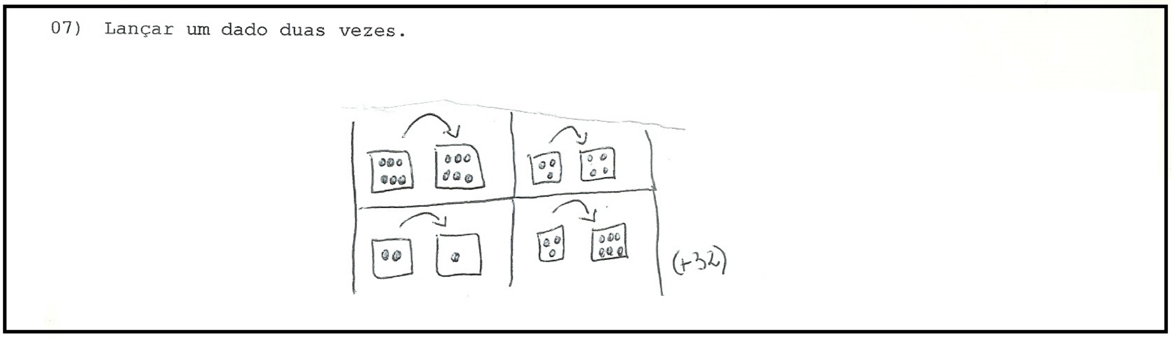



Figura 6.19: Exemplo 1 de uma solução da atividade número 7

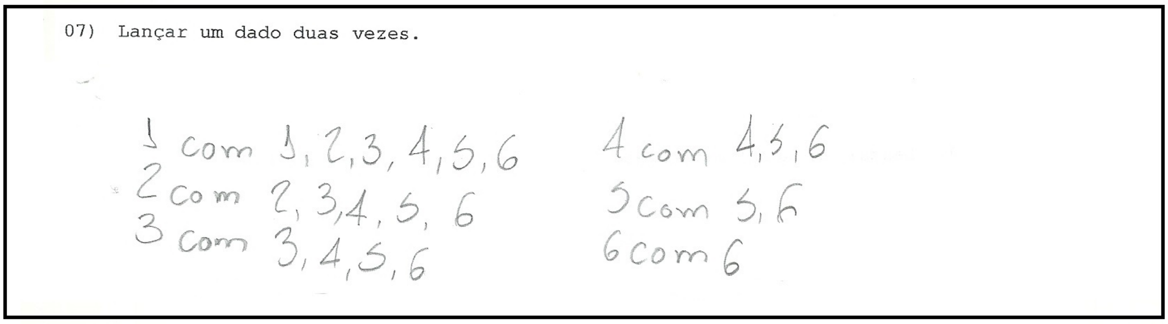



Figura 6.20: Exemplo 2 de uma solução da atividade número 7

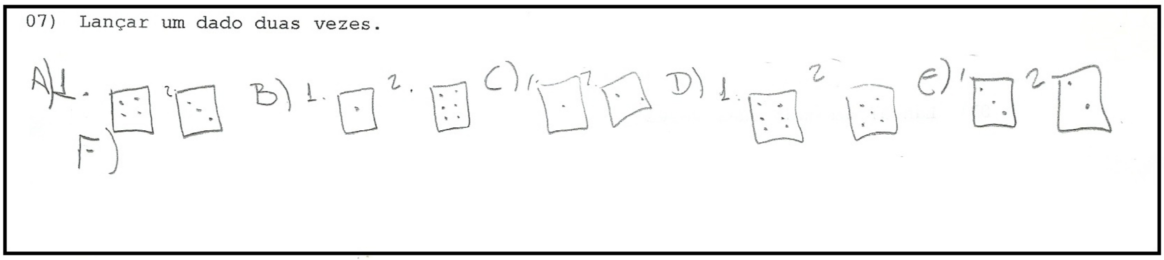



Figura 6.21: Exemplo 3 de uma solução da atividade número 7

Quando chegamos na última questão, percebemos que a maioria dos alunos já percebem o que deve ser feito e a última questão leva menos tempo do que as demais, percebe-se uma nítida mudança na atitude na estratégia de solução. Também nota-se que a falta de interpretação e até a simples leitura de um exercício, ainda é um grande entrave na solução dos problemas.

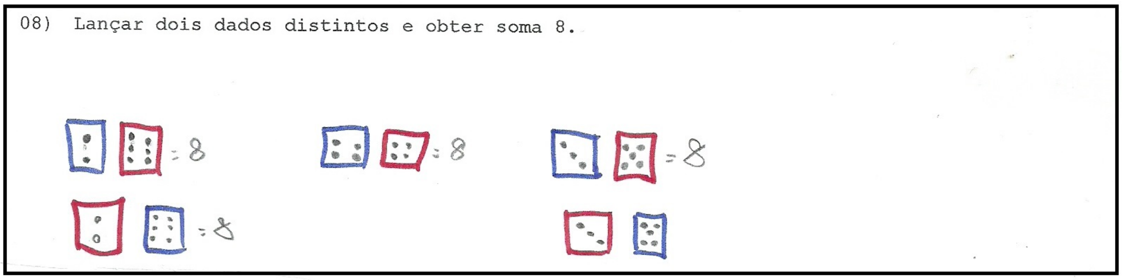



Figura 6.22: Exemplo 1 de uma solução da atividade número 8

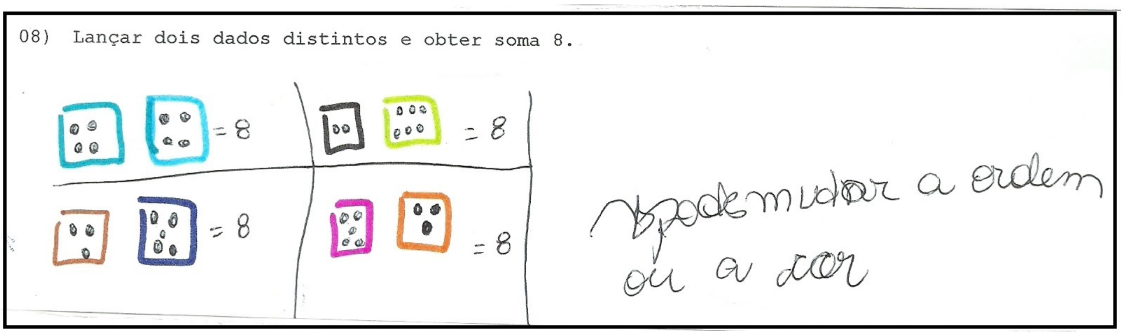



Figura 6.23: Exemplo 2 de uma solução da atividade número 8

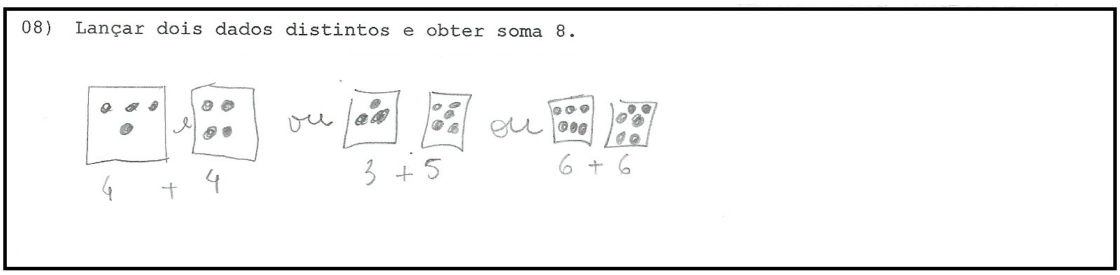



Figura 6.24: Exemplo 3 de uma solução da atividade número 8

Um comentário interessante é que, claramente os alunos utilizavam um raciocínio passado (o que foi usado na questão anterior), para otimizar o próximo exercício. Não anulando o primeiro contato com a questão. Sendo perfeitamente distinguível os três estados descritor por Peirce: Uma formação mental de uma caixa ou um dado, um sentimento de dúvida, obrigando a releitura do enunciado e por fim a concretização de um esquema para a proposta de solução, sendo ele viável ou não.

Percebi com essa atividade que, quando se trata de análise combinatória, é exigido uma ótima interpretação textual dos alunos. Alunos que costumam ler mais livros ou que prestam atenção em certas palavras chave, não tinham tanta dúvidas quanto outros. Também é notória a diferença nas estratégias utilizadas no primeiro exercício, quando comparadas com os últimos. Percebe - se que quanto maior o contato do aluno com os exercícios, mais eficiente ele vai ficando em desenvolver variadas estratégias para a solução do problema. Além de ensinar os métodos de contagem é de suma importância que o professor ensine seus alunos a criar estratégias para a solução dos exercícios, bem como, mostrar as palavras chave que podem mudar completamente a solução.

# Conclusão

Concluo com esse trabalho que para melhorarmos o ensino de análise combinatória, devemos incentivar a leitura dos nossos alunos. Devemos fazer com que ele desenvolva esse raciocínio crítico, visando que ele identifique palavras chave e saiba o que fazer com os dados que coleta. Devemos mostrar a importante relação que a matemática tem com a interpretação textual, pois de nada adianta um aluno cheio de ferramentas e estratégias matemáticas, se ele aluno não foca na pergunta principal do problema e não o soluciona. Conclui também que quanto maior o leque de exercícios resolvidos pelo aluno, maior é a sua eficiência em resolver o próximo problema, visto que os raciocínios usados no passado não desaparecem e pelo contrário, contam como experiência e ajudam até na memorização de certos resultados, como o fatorial de um número menor que 10, por exemplo. Vejo que métodos alternativos para a resolução de exercícios são sempre bem vindos e que quando o aluno entende na essência qual o tipo de contagem que ele está fazendo, ele se desprende de fórmulas e desenvolve o tão buscado raciocínio lógico e objetivo para a solução de problemas.

# Referências Bibliográficas


[1] *SANTOS, José Plínio O.; Mello, Margarida P. e MURARI, Idani T. C.* Introdução à análise Combinatória. 4. ed. revisada. Rio de Janeiro, RJ: 2007.

[2] *MORGADO, Augusto Cesar; PINTO, Paulo Cesar.* Matemática discreta. 2. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2015.

[3] *Iezzi, Gelson.* Matemática Volume Único. 1. ed. São Paulo, SP: 2002.

[4] *João Carlos Cataldo.* Análise Combinatória: a importância dos métodos de contagem - parte 1. Revista Eletrônica do Vesrtibular UERJ. Rio de Janeiro. Disponível em *http : //www.revista.vestibular.uerj.br/artigo/artigo.php?seq_artigo* = 31. Acesso em 18/03/2018

[5] *GODINO, Juan D. et al.* Um enfoque onto-semiótico do conhecimento e a instrução Matemática. Disponível em http://www.ugr.es/local/jgodino capturado em 1/5/2006.

[6] *Lourdes Maria Werle de Almeida* MODELAGEM MATEMÁTICA E SEMIÓTICA: ALGUMAS RELAÇÕES Silva, Karina Alessandra Pessôa da. Modelagem matemática e semiótica : algumas relações / Karina Alessandra Pessôa da Silva. Londrina, 2008. 218 f. : il. Orientador: . Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) Uni-

versidade Estadual de Londrina, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, 2008. Inclui bibliografia.

[7] BRASIL ESCOLA. Permutação com repetição. Disponível em *https : //brasilescola.uol.com.br/matematica/permutacao − com − elementos − repetidos.htm* Acesso em: 24 de Julho de 2018.

[8] UEL. Análise Combinatória. Disponível em *http : //www.uel.br/projetos/matessencial/medio/combinat/combinat.htm#comb*10 Acesso em: 14 de Junho de 2018

[9] . BRASIL ESCOLA. Fatorial. Disponível em *https : //exercicios.brasilescola.uol.com.br/exercicios − matematica/exercicios − sobre − fatorial − principio − fundamental − contagem.htm#resp* − 5 Acesso em: 24 de Julho de 2018.

[10] CENTRAL EXATAS. Combinatória. Disponível em *http : //www.centralexatas.com.br/matematica/analise − combinatoria*/959184 Acesso em: 24 de Julho de 2018.

[11] TUDO DE CONCURSOS. Questões combinações simples. Disponível em *http : //tudodeconcursosevestibulares.blogspot.com*/2012/11/*questoes − combinacoes − simples − matematica.html* Acesso em: 04 de Março de 2018.