

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação

**Geometria espacial no ensino médio: aspectos socioculturais,
resolução de problemas e o uso de materiais manipuláveis**

Ricardo Trindade Penha

Dissertação de Mestrado do Programa de Mestrado Profissional em
Matemática em Rede Nacional (PROFMAT)

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura: _____

Ricardo Trindade Penha

Geometria espacial no ensino médio: aspectos socioculturais, resolução de problemas e o uso de materiais manipuláveis

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ciências – Programa de Mestrado Profissional em Matemática VERSÃO REVISADA

Área de Concentração: Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Orientadora Profa Dra. Edna Maura Zuffi

**USP – São Carlos
Abril 2019**

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,
com os dados inseridos pelo(a) autor(a)

T833g Trindade Peña, Ricardo
Geometria espacial no ensino médio: aspectos
socioculturais, resolução de problemas e o uso de
materiais manipuláveis / Ricardo Trindade Peña;
orientadora Edna Maura Zuffi. -- São Carlos, .
91 p.

Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-Graduação
em Mestrado Profissional em Matemática em Rede
Nacional) -- Instituto de Ciências Matemáticas e de
Computação, Universidade de São Paulo, .

1. Resolução de Problemas. 2. Geometria Espacial.
3. Materiais Manipuláveis. 4. Sociocultural. 5.
Ensino Médio. I. Maura Zuffi, Edna, orient. II.
Título.

Ricardo Trindade Penha

**Spatial geometry in high school: sociocultural aspects,
problem solving and the use of manipulated materials**

Master dissertation submitted to the Institute of Mathematics and Computer Sciences- ICMC-USP, in partial fulfillment of the requirements for the degree of Mathematics Professional Master's Program. *FINAL VERSION*

Concentration Area: Professional Master Degree Program in Mathematics in National Network

Advisor: Profa Dra Edna Maura Zuffi

**USP – São Carlos
April 2019**

AGRADECIMENTOS

Agradeço e dedico esse trabalho a minha companheira de viagem nessa jornada e a na vida, Angelina, pelo apoio e compreensão, às minhas filhas Mariana e Maria Gabriela por estarem sempre presentes nesta caminhada.

Meus sinceros agradecimentos à minha orientadora, Professora Edna, pela dedicação e sabedoria com que conduziu essa orientação.

Não poderia deixar de exaltar a participação nesse trabalho dos meus alunos do Ensino Médio da escola pública no ano de 2017, pela disposição de participar dessa empreitada, com empenho e dedicação.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

Acknowledgements:

This study was financed in part by the *Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES)* - Finance Code 001.

“A Geometria faz com que possamos adquirir o hábito de raciocinar, e esse hábito pode ser empregado, então, na pesquisa da verdade e ajudar-nos na vida. ”

(Jacques Bernoulli)

RESUMO

PENHA, Ricardo Trindade. **Geometria espacial no Ensino Médio: aspectos socioculturais, resolução de problemas e o uso de materiais manipuláveis.** 2019. 91p. Dissertação (Mestrado em Ciências – Programa de Mestrado Profissional em Matemática) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2019.

O presente trabalho consiste na elaboração e aplicação de uma sequência didática para o ensino de geometria espacial, numa turma de terceiro ano do Ensino Médio. Ele procurou incorporar aspectos socioculturais dessa turma, métodos de resolução de problemas e a utilização de material manipulável. A proposta visa promover uma abordagem diferente da tradicional para o ensino de geometria, criando, assim, condições de aprendizagem e aproximando o ensino da Matemática da realidade dos alunos, ao propiciar um aprendizado mais significativo e dinâmico. Como resultados desse processo, observou-se o crescente interesse dos alunos em relação ao trabalho proposto: o que era resistência num primeiro momento tornou-se motivação para um novo processo de aprendizagem.

Palavras-chaves: Resolução de Problemas, Geometria Espacial, Materiais Manipuláveis.

ABSTRACT

PENHA, Ricardo Trindade. **Spatial geometry in High School: sociocultural aspects, problem solving and the use of manipulated materials.** 2019. 91p. Dissertation (Mestrado em Ciências – Programa de Mestrado Profissional em Matemática) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2019.

This work consists in the elaboration and application of a didactic sequence for the teaching of spatial geometry, in the third year of Brazilian High School. It sought to incorporate sociocultural aspects of students' daily experiences, problem solving methods, and the use of manipulated materials. Its main aim was to promote a different approach to geometry teaching, thus creating better learning conditions, and bringing Mathematics teaching closer to students' reality, by providing a more meaningful and dynamic learning experience. As a consequence of this process, the students' growing interest was observed: what was resistance at first became motivation for a new learning process.

Keywords: Problem Solving, Spatial Geometry, Manipulated Materials.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1: Gráfico das atividades remuneradas dos alunos.....	44
Figura 2: Profissões Almejadas pelos Alunos.....	45
Figura 3: Gráfico das profissões dos responsáveis pelos alunos.....	45
Figura 4: Problema da embalagem.....	47
Figura 5: Resolução do Grupo G3 para o problema das embalagens.....	48
Figura 6: Exercícios Propostos aos alunos.....	50
Figura 7: Modelos manipuláveis fornecidos pela escola.....	51
Figura 8: Formalização do problema da embalagem.....	52
Figura 9: Problema Contextualizando Profissões.....	53
Figura 10: Problema Contextualizando Profissões.....	54
Figura 11: Jogo das Planificações 1.....	56
Figura 12: Jogo das Planificações 2.....	56
Figura 13: Exercícios Propostos.....	71
Figura 14: Modelo Princípio de Cavalieri.....	72
Figura 15: Problema Contextualizando Profissões.....	73
Figura 16: Problema Contextualizando Profissões.....	74
Figura 17: Problema Contextualizando Profissões.....	75
Figura 18: Exercícios propostos aos alunos.....	76
Figura 19: Tetraedro.....	78
Figura 20: Prisma de Base Triangular.....	78
Figura 21: Prisma de Base Quadrada.....	79
Figura 22: Prisma de Base Pentagonal.....	79
Figura 23: Prisma de Base Hexagonal.....	80
Figura 24: Pirâmide de Base Triangular.....	80
Figura 25: Pirâmide de Base Quadrada.....	81
Figura 26: Pirâmide de Base Pentagonal.....	81
Figura 27: Pirâmide de Base Hexagonal.....	82
Figura 28: Cilindro.....	82
Figura 29: Cone.....	83
Figura 30: Icosaedro.....	83
Figura 31: Octaedro.....	84

Figura 32: Exercícios de Fixação	85
Figura 33: Problema inicial volume da esfera	88
Figura 34: Avaliação todo Conteúdo	89

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	19
1. ASPECTOS TEÓRICOS	23
1.1 AS TEORIAS DE VYGOTSKY	24
1.2 PENSAMENTO E LINGUAGEM NA TEORIA VYGOTSKIANA.....	26
1.3 A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS E O ENSINO DE MATEMÁTICA	28
2. ASPECTOS METODOLÓGICOS E A CONSTRUÇÃO DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA.....	31
2.1 CONSTRUINDO E APLICANDO A SEQUÊNCIA DIDÁTICA	34
2.2 CONTEÚDOS MATEMÁTICOS A SEREM DESENVOLVIDOS NA SEQUÊNCIA PROPOSTA	35
2.3 DETALHAMENTO DA METODOLOGIA DE ENSINO ATRAVÉS DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS.....	36
2.4 ASPECTOS DO USO DE MATERIAIS MANIPULÁVEIS NO ENSINO DE MATEMÁTICA	38
2.5 CONSTRUINDO UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA.....	39
3. APLICANDO A SEQUÊNCIA DIDÁTICA	43
3.1 CARACTERIZANDO A ESCOLA E OS ALUNOS E ASPECTOS DO CONTRATO DIDÁTICO	43
3.2 APLICAÇÃO DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA	46
4. ALGUMAS REFLEXÕES ACERCA DE TODO O PROCESSO DE INTERVENÇÃO E DA PESQUISA.....	59
4.1. CONCLUSÃO	63
REFERÊNCIAS.....	65
ANEXOS	67

Introdução

O ato de ensinar Matemática nem sempre é uma tarefa fácil, principalmente nos dias atuais, em que as novas tecnologias estão sempre presentes, em um mundo onde tudo é muito rápido e fica obsoleto em um clique.

Partindo, pois, dessas considerações, é preocupante que muitas escolas estejam estacionadas no século vinte, com seus quadros negros e giz e o professor como centro do processo de ensino e aprendizagem, uma vez que o mundo se transforma continuamente e a escola ainda não conseguiu acompanhar essas mudanças.

Nos últimos anos, apesar do crescente aumento no número de alunos matriculados nos Ensinos Fundamental e Médio, no Brasil, tem-se verificado que alguns exames nacionais (ENEM¹, SIMAVE², SAEB³) e internacionais (PISA⁴) apontam para resultados dramáticos com relação ao desempenho desses alunos, em Matemática. Os estudantes brasileiros, além de não adquirirem habilidades de leitura e interpretação, apresentam desempenho sofrível quanto à resolução de problemas simples. No que diz respeito à parte de Geometria do currículo do Ensino Básico, ainda se observa que, por anos, esta tem sido deixada em segundo plano, normalmente sendo alocada no último bimestre do ano letivo e, muitas vezes, completamente suprimida da sala de aula, o que causa resultados ainda mais alarmantes na avaliação desse conteúdo específico.

A educação não vem sendo efetivamente considerada, até o presente momento, como área estratégica para o desenvolvimento nacional. Vê-se grande ênfase nas áreas de desenvolvimento tecnológico, como se isto fosse possível sem que os alicerces de formação dos alunos em Matemática e ciências básicas sejam melhorados. O desenvolvimento tecnológico é, sim, importante e, mais ainda, se vier como ferramenta para auxiliar no processo de aprendizagem do aluno.

Experiências em outros países têm mostrado que o conhecimento científico e o desenvolvimento tecnológico têm fortes relações com uma sólida formação frente ao conhecimento básico, no desenvolvimento estudantil. Mas se sabe, também, que

1 Exame Nacional do Ensino Médio

2 Sistema Mineiro de Avaliação da Educação Pública

3 Sistema de Avaliação do Ensino Básico

4 Programa Internacional de Avaliação do Estudante (OCDE)

o público alvo desse nível escolar é extremamente conectado e tem um comportamento muito mais dinamizado que estudantes de décadas passadas. E se há alguns anos já era difícil ensinar Geometria, hoje fica muito pouco atrativa essa prática de forma tradicional.

Ainda, o anúncio de uma formação inicial de qualidade para professores e a continuidade dessa formação, tão desejada em documentos oficiais do país (Resoluções CNE/CP1 fev. /2002 e CNE/no. 2, 1º de julho de 2015), nem sempre tem sido suficiente para causar mudanças nesse quadro precário, principalmente com relação ao ensino e à aprendizagem de Matemática e, especificamente, da Geometria.

Frente a esse quadro geral, este professor-pesquisador, preocupado em dinamizar o ensino dessa área da Matemática, buscou alternativas às metodologias tradicionais, encontrando no ensino através da resolução de problemas e incluindo aspectos socioculturais e materiais manipuláveis, uma possibilidade de mudança em suas práticas.

Com vistas a uma aprendizagem mais significativa dos alunos na escola pública em que atua, este professor-pesquisador procurou uma formação mais profunda sobre os elementos acima citados e, apropriando-se desses conhecimentos didático-pedagógicos e, também, de uma nova maneira de ver os conteúdos da Geometria, elaborou uma sequência didática para aplicar na terceira série do Ensino Médio, com relação ao conteúdo específico de Geometria Espacial.

Assim, os objetivos desta pesquisa são: evidenciar o processo de construção dessa sequência didática, pautada no ensino através da resolução de problemas, de aspectos socioculturais e no uso de materiais manipuláveis, sua aplicação em sala de aula e a análise dessa experiência à luz do referencial teórico histórico-cultural Vygotskiano.

Para tanto, adotar-se-á uma perspectiva metodológica qualitativa, fundada na pesquisa-ação, a qual reflete a intervenção do professor-pesquisador na sala de aula, com vistas a uma mudança no processo de ensino e aprendizagem.

Na seção I deste texto, é apresentada uma descrição sobre os diversos aspectos que envolvem a Educação Básica nos dias atuais e alguns de seus aspectos mais relevantes, bem como uma análise dos principais aspectos sobre as teorias de Vygotsky, suas aplicações e implicações. Logo após, faz-se uma caracterização das principais teorias sobre a resolução de problemas, destacando-se suas principais fundamentações e aplicações.

Na Seção II, caracteriza-se alguns aspectos dos tipos de pesquisas qualitativas, bem como a escola onde foi aplicada a sequência didática. Em seguida, narra-se como foi desenvolvida a sequência didática, explicita-se como é abordado o conteúdo de Geometria Espacial no Ensino Médio, para as escolas de Minas Gérias, e finalmente, faz-se uma abordagem sobre os principais aspectos que foram abordados com a metodologia de ensino através da resolução de problemas.

Na seção III, faz-se a caracterização de como foi a aplicação da sequência didática e quais foram as suas principais implicações, como foi o desenvolvimento dos alunos e seus aspectos mais relevantes para a elucidação de todo o processo, e como estas atividades surtiram efeito no aprendizado da turma.

1. Aspectos Teóricos

Ingressando os portões de uma escola, nos dias atuais, depara-se com uma série de desafios que se apresentam de imediato. De acordo com Zuffi e Jacomelli (2010), a escola, ao manter-se isolada da realidade que a cerca e, principalmente, dos aspectos socioculturais da comunidade que a constitui, passa a sofrer o fenômeno de *encasulamento*, quando o conteúdo na sala de aula tem pouco, ou nada a ver com o cotidiano dos alunos.

Passando-se a compreender essa realidade dentro do ambiente escolar, pode-se entender, de forma mais justa, o desinteresse que nossos alunos possuem pela Matemática, algo que pode se tornar abstrato e completamente distante de sua realidade.

O ensino dessa disciplina é obrigatório no Brasil, e devido à sua importância, os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) indicam como um dos objetivos da mesma, desenvolver as capacidades de raciocínio e resolução de problemas, de comunicação, bem como o espírito crítico e criativo, Além da interdisciplinaridade, esses documentos destacam uma desejável relação com os problemas da realidade cotidiana dos alunos, bem como a importância da modelagem como alternativas ao modelo engessado e tradicionalista (BRASIL, 1997). Dentro desse contexto, encontra-se algumas metodologias que podem ser de fundamental importância para a construção de um conhecimento matemático que seja significativo ao aluno, dentre as quais se salienta o uso de aspectos socioculturais e a resolução de problemas para o desenvolvimento da aprendizagem. Ao aproximar os conteúdos escolares do cotidiano dos alunos, pode-se atingir um dos objetivos propostos para a aprendizagem em Matemática, qual seja, o de aplicar esses conhecimentos a situações diversas, utilizando-os na interpretação da ciência, na atividade tecnológica e na vida cotidiana (BRASIL, 1997).

Nesse contexto, a teoria de Vygotsky⁵ para o desenvolvimento e aprendizagem traz luz ao papel da escola atual, com sua aproximação às abordagens sócio-históricoculturais para o ensino. Também, o uso da resolução de problemas como uma metodologia de ensino vai ao encontro do que os PCN propõem, quanto às

5 Adota-se, neste texto, a grafia americana do nome deste autor. Outras grafias podem surgir nas referências bibliográficas.

competências que devem ser desenvolvidas para a aplicação do conhecimento matemático às diversas realidades da vida social.

A seguir, serão tratados aspectos que caracterizam os pilares da teoria de Vygotsky e que se fundam nas seguintes afirmações: i) as funções psicológicas têm um suporte biológico, pois são produtos da atividade cerebral; ii) o funcionamento psicológico fundamenta-se nas relações sociais entre o indivíduo e o mundo exterior, as quais se desenvolvem num processo histórico; iii) a relação homem/mundo é mediada por sistemas simbólicos (ZUFFI; JACOMELLI, 2010).

Na seção seguinte, serão abordados os aspectos teóricos da Metodologia de Ensino através da Resolução de Problemas.

1.1 As Teorias de Vygotsky

Lev Vygotsky (1896-1934), nasceu na cidade de Orsha, perto de Minsk, a capital da Bielo-Rússia. Vindo de família abastada, sempre conviveu em ambientes fortemente culturais. Concluiu o curso de Direito em 1917 e, concomitante a esse, tinha vários interesses de estudos, tais como, em Filosofia, Psicologia e História. Escreveu diversos trabalhos científicos sobre os mais variados temas, ficando mais conhecido no mundo ocidental pelos seus trabalhos na área de aprendizagem, como será destacado a seguir.

Segundo a teoria de Vygotsky (OLIVEIRA, 1995, p. 26), o desenvolvimento humano se baseia fundamentalmente no que se chama de *funções psicológicas superiores*, típicas dos seres humanos, que envolvem o controle consciente do comportamento, a ação intencional e antecipada, e a liberdade do indivíduo em relação às características do momento e do espaço presentes.

Para a compreensão dos conceitos adotados por Vygotsky, deve-se inicialmente entender o conceito de *mediação*. Em termos gerais, mediação é o processo de intervenção de um elemento intermediário numa relação, passando assim a ser mediada por esse elemento. Vygotsky definiu dois tipos de elementos mediadores: os *instrumentos* e os *signos*, sendo os primeiros intermediários entre o mundo exterior e o homem, aumentando a capacidade desse último em modificá-lo. Por exemplo, ao fazer uso de uma serra, o ser humano pode cortar árvores de maneira muito mais eficiente do que faria manualmente. Pode-se constatar que, na natureza,

alguns animais também fazem uso de instrumentos. Já o *signo* é algo inerente aos seres humanos (OLIVEIRA, 1995, p. 26-33).

Chama-se *signo* qualquer forma de representação de uma ideia. Por exemplo, as palavras, orais ou escritas, um laço amarrado ao dedo, quando representa a lembrança de um fato, uma seta na placa de sinal de trânsito, que representa uma direção obrigatória, etc. O homem tem-se utilizado desses signos e instrumentos desde os primórdios de sua existência, como facilitadores de tarefas, ou na transmissão de informações.

Temos, ainda, que a linguagem se constitui num sistema organizado de signos para representar objetos, ideias e situações. Ela assume duas funções essenciais: a de *intercâmbio social*, com a comunicação dessas ideias de um ser humano para outro, nas relações interpessoais, e também a de *pensamento generalizante*, ao ordenar o mundo real, agrupando as ocorrências de uma mesma classe de objetos, eventos, situações, sob uma mesma categoria conceitual, e gerando os significados, o que ocorre do nível social e externo para o intrapsicológico, interno ao indivíduo. (OLIVEIRA, 1995, p. 42 e 43).

Ao estudar o processo de *mediação simbólica*, Vygotsky percebeu que o mesmo sofre transformações ao longo do desenvolvimento e constitui as *funções psicológicas superiores*. Para esse autor, dentro do processo de mediação com a utilização de signos, ocorrem duas mudanças de caráter qualitativo: a utilização de marcas externas vai se transformar em um processo interno de mediação, conhecido como processo de internalização; e, de outra parte, a criação de sistemas simbólicos irá organizar os signos em estruturas complexas e articuladas. (OLIVEIRA, 1995). Outro objeto de destaque nas teorias de Vygotsky é a cultura, que não é pensada como algo pronto, mas como algo que está sendo sempre recriado e reinterpretado. A partir desse aspecto, Vygotsky destaca como o indivíduo internaliza a matéria-prima fornecida pela cultura, destacando-a como um processo de absorção não passiva, mas de transformação. Esse autor destaca que o fundamento do funcionamento psicológico tipicamente humano é o social e histórico. Os elementos mediadores são fornecidos pelas relações entre os homens, ou seja, a comunicação entre os indivíduos.

1.2 Pensamento e Linguagem na Teoria Vygotskiana

Em suas análises, Vygotsky estabelece a relação entre o pensamento e a linguagem, sendo o *significado*, componente primordial da palavra. O ato de gerar significados já é, em si, um processo de generalização.

Como já mencionado anteriormente, segundo esse autor, a linguagem apresenta duas funções básicas: a de intercâmbio social e a de pensamento generalizante, sendo este último o que compõe a base da mediação simbólica entre o indivíduo e o mundo.

Como as generalizações e os conceitos são atos do pensamento, Vygotsky os considera como um fenômeno do pensamento. Ao fazer uso da linguagem, o ser humano passa a ser capaz de pensar de forma diferente, destacando-se aí, a generalização e a abstração.

Vygotsky caracteriza o processo de desenvolvimento do pensamento e da linguagem, partindo esse percurso da atividade social, Inter psíquica, para a atividade individualizada (intrapíquica).

Um outro aspecto estruturante nas teorias de Vygotsky envolve a questão do aprendizado, que, para esse autor, tem grande importância nos processos de desenvolvimento. Para Vygotsky é o aprendizado, que se dá nas trocas interpessoais, que possibilita o despertar de processos internos do indivíduo (OLIVEIRA, 1995, p.58). Ele denomina a capacidade de realizar uma tarefa sem nenhum tipo de ajuda, da qual o indivíduo já apresenta pleno domínio, como *nível de desenvolvimento real*.

Vygotsky alerta para o fato de que, para compreender o nível de desenvolvimento de um sujeito, devemos não só considerar o desenvolvimento real, mas também o *nível de desenvolvimento potencial*, ou seja, a capacidade de desempenhar uma tarefa com a ajuda de um adulto, ou de companheiros.

A possibilidade de alteração no desempenho de uma pessoa por meio da interferência de outra é parte fundamental nos conceitos de Vygotsky. Justamente porque representa um momento de desenvolvimento do indivíduo, e deixa evidente a interação social no processo de construção das funções psicológicas humanas.

Assim, Vygotsky define a *zona de desenvolvimento proximal* (ZDP) como sendo “a distância entre o nível de desenvolvimento real, que se costuma determinar através da solução independente de problemas, e o nível de desenvolvimento potencial, determinado através da solução de problemas sob a orientação de um adulto, ou em

colaboração com companheiros mais capazes” (Oliveira,1995 p. 60). Com isso, estabelece-se a ligação entre o processo de desenvolvimento e a relação do indivíduo com seu meio sociocultural.

Para Oliveira (1995), essas implicações da concepção de Vygotsky são imediatas para o ensino escolar, pois se o aprendizado impulsiona o desenvolvimento, então a escola tem papel essencial na construção do ser psicológico.

Destaca-se, aqui, a relevância da teoria de Vygotsky para esta pesquisa, uma vez que se entende que o professor deve atuar nas zonas de desenvolvimento proximal de seus alunos, através da proposição de situações-problemas desafiadoras, dentro da cultura em que esses alunos se inserem, e que tragam um desenvolvimento dos conceitos matemáticos e a geração de novos significados para eles.

O uso de objetos manipuláveis, neste caso, modelos de sólidos geométricos, funciona como forma de mediação externa para quem aprende, com vistas a elevar o nível desse aprendizado, principalmente no que diz respeito à visualização dos objetos geométricos. Isso pode contribuir para alavancar a atenção dos aprendizes em relação aos conceitos geométricos e na memorização, permitindo um controle maior sobre os processos cognitivos superiores de atenção e memorização de significados matemáticos.

A seguir, tratar-se-á, então, da abordagem metodológica do ensino de Matemática através da resolução de problemas, de modo que esta faça sentido dentro das propostas vygotskianas.

1.3 A resolução de problemas e o ensino de Matemática

A resolução de problemas pode ser entendida como uma metodologia de ensino, à medida em que o professor, ou o aluno, propõe uma situação-problema, e a partir da mesma se constrói um conceito matemático.

Para D'Ambrósio (1989), a resolução de problemas:

[...] visa a construção de conceitos matemáticos pelo aluno através de situações que estimulam a sua curiosidade matemática; através de suas experiências com problemas de naturezas diferentes, o aluno interpreta o fenômeno matemático e procura explicá-lo dentro de sua concepção da Matemática envolvida. Nesse processo o aluno envolve-se com o fazer Matemática, no sentido de criar hipóteses e conjecturas e investiga-las a partir da situação-problema proposta (D'AMBRÓSIO, 1989, p.16).

No *ensino através da resolução de problemas* (EARP), de acordo com a proposta de Zuffi e Onuchic (2007), que será adotada aqui, o aluno, em comunicação com outros parceiros, é colocado diante de uma situação nova, com a qual eles poderão desenvolver algumas habilidades que ainda não possuem, sendo o problema o ponto de partida, e não as definições de conceitos em si.

González (1998, p. 67-80, apud Zuffi e Onuchic, 2007) propõe o uso de *tarefas intelectualmente exigentes* (TIE's), que envolvem a resolução de problemas não rotineiros e que são favoráveis ao desenvolvimento de processos metacognitivos. Esse autor propõe um modelo para a resolução de problemas que compreende quatro componentes fundamentais a serem enfatizados durante o processo:

- (i) os fins, representados pelos propósitos que se deseja alcançar e, no caso da resolução de problemas, a identificação do que seria obter de uma solução para os mesmos;
- (ii) as ações, que englobam os desdobramentos de ordem intelectual que o resolvidor faz para atingir os fins (análises minuciosas de dados e partes do problema para elaborar um modelo matemático correspondente para o mesmo; análises de possíveis recursos e estratégias disponíveis; realização das decisões tomadas em termos de operações e procedimentos; verificação de resultados, parciais ou finais, e das condições iniciais da situação-problema);
- (iii) os conhecimentos, que incluem as informações que a pessoa tem sobre si mesma como resolvidora de problemas; as exigências cognitivas para o processo de resolução e os fatores que os tornam mais ou menos difíceis; suas

crenças sobre si mesmo e o processo de resolução e os recursos de que dispõe para abordá-lo;

- (iv) as experiências, que se referem às vivências acumuladas, com base em seu envolvimento em tarefas análogas e à consciência do êxito ou fracasso experienciado ao aplicar alguma estratégia.

Observa-se, aqui, que esses componentes não ocorrem de forma linear e totalmente separada, mas todos estão envolvidos nos processos de resolução de problemas desafiadores, que se constituam em verdadeiras tarefas intelectualmente exigentes.

A metacognição pode ser definida como o conhecimento que cada um tem dos seus próprios processos e produtos cognitivos, ou de qualquer aspecto a eles relacionados; envolve monitoramento ativo e consequente regulação desses processos em relação à cognição; aí pode-se destacar a capacidade de organizar, monitorar e controlar o pensamento para a resolução de problemas. Assim, se o problema apresentado ao aluno for realmente desafiador para ele, estimulará que desenvolva maior controle sobre seus próprios processos cognitivos, monitorando seus conhecimentos prévios sobre o assunto, suas experiências com problemas semelhantes, os entraves que enfrenta nessa resolução, a constatação de um erro e, eventualmente, os caminhos tomados que o conduziram a uma solução correta ou errônea.

Desse modo, a escolha dos problemas, dentro da metodologia aqui assumida, deve ser bastante cuidadosa, pois eles devem ser desafiadores aos alunos, ao mesmo tempo em que devem despertar seu interesse. É partir do problema e do esforço de sua resolução que se abre a necessidade de novos conhecimentos e interpretações ao indivíduo.

O conceito de zona de desenvolvimento proximal (ZDP), de Vygotsky, vem elucidar essa escolha, pois os problemas devem se adequar nos limites entre o que os alunos já conseguem realizar sozinhos e o que conseguirão realizar com a ajuda de parceiros mais capazes. Aqui está envolvida a mediação do professor, nesse processo, bem como aquela promovida pelo acesso a outras fontes de conhecimento, como os colegas, os livros didáticos, materiais instrucionais (*software*, informações da rede mundial de computadores, jogos pedagógicos) que possam auxiliar a construção da solução do problema.

Um outro aspecto que devemos considerar no que tange à resolução de problema, nessa perspectiva metodológica, é que esta não se limita à mera assimilação de conteúdo, pois permite que o aluno seja questionado diante de suas respostas, que seja capaz de justificá-las, de reformulá-las, ou reconsiderá-las quando necessário, adaptando-as ao contexto em que o problema se insere. Com isso, se usada de maneira contínua, espera-se que o aluno passe a desenvolver uma visão crítica do fazer matemático.

Em resumo, a metodologia de ensino através da resolução de problemas (M.E.R.P.) é proposta com os seguintes passos: i) o professor propõe uma situação problema desafiadora para o momento de desenvolvimento do aluno (tarefa intelectualmente exigente, que esteja dentro de sua zdp); ii) os alunos realizam as leituras coletiva e individual do problema, identificando seus fins/objetivos; iii) em seguida, propõem uma estratégia de ação, baseados em seus conhecimentos e experiências prévias; iv) se a estratégia demandar, o aluno buscará novos conhecimentos para resolver o problema; v) após a resolução, o aluno verificará se a solução encontrada é pertinente aos objetivos do problema; vi) as soluções de cada grupo ou aluno serão apresentadas em uma plenária para a discussão; vii) após isso, o professor fará a síntese ou formalização dos conceitos novos e conhecimentos desenvolvidos.

Assim, a compreensão dos conceitos se dá no decorrer do processo de investigação do problema, e após essa etapa, o professor consolida os conceitos que o aluno utilizou, procedendo com sua formalização matemática e com a proposição de novos problemas relacionados a esses conceitos.

2. Aspectos Metodológicos e a Construção da Sequência Didática

Um dos objetivos desta seção, é fundamentar as bases para a diferenciação entre os métodos de pesquisa quantitativos e qualitativos.

Adotar-se-á, nesta investigação, uma abordagem qualitativa, inspirada nas pesquisas do tipo etnográfico (ANDRÉ, 2005). Essa abordagem se apresenta, num primeiro instante, sob a forma de questionamento dos métodos de investigação vigentes no início do século XX. Nesse contexto, destacam-se vários estudiosos, tais como Dilthey e Weber, que buscaram alternativas metodológicas para o estudo dos fenômenos humanos, os quais passaram a se preocupar com a interpretação dos significados contidos num contexto natural (social ou cultural).

Com o advento dessa nova visão, surgiu a corrente idealista subjetivista, a qual passou a valorizar a maneira como o indivíduo compreende sua realidade, buscando a interpretação em lugar da mensuração, fazendo com que o pesquisador saísse de sua postura de neutralidade.

A partir dessa nova postura é que surgiu uma nova abordagem de pesquisa, chamada de “qualitativa” e que trata do estudo do fenômeno em seu ambiente natural. Surgem, então, uma série de abordagens novas, como a fenomenologia e a etnografia, que têm como principal preocupação o significado que têm as ações e os eventos para as pessoas ou os grupos.

Tratar-se-á brevemente, aqui, apenas de algumas formas de pesquisa qualitativas, dividindo-as em quatro tipos principais: a etnográfica, o estudo de caso, a pesquisa participante e a pesquisa ação (ANDRÉ, 2005).

A pesquisa etnográfica foi desenvolvida por antropólogos com o objetivo de estudar a cultura e a sociedade. Podemos, nesse sentido, destacar dois aspectos: um conjunto de técnicas que eles usam para coletar dados sobre os valores, os hábitos, as crenças, as práticas e os comportamentos de um grupo social; o segundo é um relato resultante do emprego dessas técnicas.

A etnografia aplicada à educação tem como objetivo compreender os processos educativos, podendo, assim, não ser cumprida estritamente de acordo com sua concepção original para a Antropologia e outras ciências sociais. Nesse caso, o que se faz são estudos *do tipo etnográfico*, e não etnografia no seu sentido original.

Mas se cumprem os requisitos principais: a observação participante, a entrevista intensiva e a análise de documentos.

A observação participante é caracterizada pela interação com o objeto de estudo, ou seja, com o pesquisador se integrando ao processo que deseja investigar. As entrevistas têm por objetivo o aprofundamento e esclarecimentos dos problemas a serem observados. A análise de documentos tem a função de contextualizar o fenômeno e explicitar suas vinculações, completando as informações coletadas.

Dentro do contexto da pesquisa etnográfica, destaca-se o papel do pesquisador. Esse está sempre interagindo com a situação estudada, afetando-a e sendo afetado por ela, tornando-se o instrumento principal na coleta e na análise de dados.

Fortemente ligado à pesquisa etnográfica, surge outro tipo de pesquisa qualitativa, que é o *estudo de caso*, o qual, no contexto educacional, se caracteriza dentro de uma concepção bastante estrita, seja a uma escola, um professor, um aluno ou uma sala de aula.

Ainda dentro desse contexto, destaca-se a *pesquisa-ação*, sendo suas principais características: uma intervenção intencional do pesquisador, com análise e coleta de dados, conceituação dos problemas, planejamento da ação, execução e avaliação por meio de novas coletas.

No estudo aqui relatado, abriu-se a possibilidade para compreender aspectos quantitativos e qualitativos, envolvendo a mensuração de alguns dados quantitativos, mas que passaram a ser usados na interpretação do objeto de pesquisa. Desse modo, por se tratar da investigação de um momento específico do processo de ensino e aprendizagem em sala de aula, em uma única escola em que o professor se torna também pesquisador, a pesquisa-ação inspira-se aqui, também, no estudo de caso e se apresenta como uma possibilidade metodológica muito adequada, uma vez que haverá a intervenção intencional desse pesquisador sobre o processo, para sua posterior análise.

Com estes aspectos metodológicos configurados, concretizou-se o presente projeto de pesquisa, aproximando-se de uma pesquisa-ação de caráter qualitativo, que teve por objetivos, o planejamento, o desenvolvimento e a análise de uma sequência didática para o ensino de Geometria Espacial, numa sala de terceiro ano do Ensino Médio, de uma escola pública de Minas Gerais, onde este pesquisador atua como professor. A metodologia de ensino através da resolução de problemas

(M.E.R.P.) foi escolhida de maneira a também levar em consideração os aspectos socioculturais da vida dos alunos, tentando aproximar os conteúdos escolares da Geometria de sua vida cotidiana, usando como foco central a resolução de problemas e deixando sempre o aluno livre para fazer inferências.

Os conteúdos matemáticos a serem ensinados foram retirados do CBC-Conteúdo Básico Comum (MINAS GERAIS, 2006), implantado a partir de 2007, como parte do currículo a ser seguido dentro das escolas públicas desse Estado.

Este professor assumiu essa turma no segundo ano do Ensino Médio, em 2016 e ela apresentava grandes dificuldades no aprendizado de Matemática em conteúdos básicos, tais como a resolução de equações do primeiro grau e operações aritméticas elementares, os quais não estavam devidamente consolidados. Apesar dessas dificuldades, em termos de disciplina não era grande o problema: o maior desafio ficava com o uso social do celular em sala de aula: apesar de ser expressamente proibido pela escola, boa parte desses alunos insistiam no seu uso. Iniciou-se, num primeiro momento, um trabalho de reconstrução do conhecimento da disciplina de maneira tradicional, o que levou ao processo de revisão de diversos conteúdos. Com a possibilidade de permanecer com essa turma na terceira série, alguns conteúdos foram deixados para o ano seguinte e, sentindo a necessidade de uma mudança na condução desses conteúdos, iniciou-se as leituras sobre resolução de problemas e o uso de materiais manipuláveis no ensino, fundamentados também com as teorias de Vygotsky. Decidiu-se, então, que tais teorias seriam aplicadas para o ensino de Geometria, na expectativa de que se pudesse elevar os níveis de aprendizado dos alunos, já que, por várias vezes, a metodologia tradicional não surtiu o efeito esperado.

2.1 Construindo e Aplicando a Sequência Didática

Qualquer pessoa se depara, em sua vida, com várias formas geométricas presentes em objetos cotidianos, como, por exemplo, uma bola, uma caixa, um bloco, um cone, formas triangulares, quadriláteros, círculos, etc. E, muito cedo, já consegue distingui-las. De acordo com o documento *Conteúdo Básico Comum (CBC)*, que define o currículo proposto pela Secretaria de Educação do Estado de Minas Gerais (MINAS GERAIS, 2006), várias etapas devem ser cumpridas para o ensino de Geometria, desde o simples reconhecimento dessas figuras espaciais e/ou planas, até a construção de sólidos ou superfícies, que servem de modelos de estruturas arquitetônicas, construção de reservatórios para fins variados, modelagem geométrica de utensílios, aparelhos, órgãos para transplante, cápsulas espaciais, etc. Esse processo envolve a aquisição de diversos níveis de compreensão, que vão desde o senso comum até a realização de análises mais detalhadas, como estimativas de medidas e a construção e ajuste de modelos.

No Ensino Médio, a Geometria é estudada levando-se em conta três aspectos: o tratamento formal, lógico-dedutivo, dos fatos referentes a figuras planas e espaciais; o desenvolvimento de técnicas de medição indireta (usando semelhança de triângulos ou trigonometria) e a algebrização, através da introdução de um modelo para a geometria euclidiana plana (geometria analítica). Esses três aspectos são considerados fundamentais na formação do aluno, segundo o currículo de Minas Gerais (2006).

Ainda segundo esse documento, a Geometria estimula a capacidade de observação do aluno e sua criatividade, por meio do uso de formas geométricas para visualizar, representar ou descrever objetos. Propicia, ainda, a oportunidade de utilizar o raciocínio lógico-dedutivo para a validação de seus resultados, permite calcular e/ou fazer estimativas.

O raciocínio lógico-dedutivo, com o qual se provam fatos novos a partir de fatos conhecidos, é a base do conhecimento científico, sendo aplicado com frequência em discussões e debates. Isto também justifica o tratamento formal da Geometria no Ensino Médio, de modo que os alunos possam utilizá-lo para aprender a argumentar, deduzir ideias ou refutá-las.

Com o uso das técnicas de medição indireta, é possível calcular, por exemplo, a altura de montanhas, distâncias intergalácticas e, ao se incluir modelos de

algebrização para a compreensão e representação das ideias geométricas, é possível também desenvolver instrumentos de medição, de desenho e de modelagem de situações da vida prática.

2.2 Conteúdos matemáticos a serem desenvolvidos na sequência proposta

O conteúdo selecionado para sequência didática foi proposto para aplicação no primeiro bimestre de 2017. Apesar de parte dele ser proposto no currículo do Estado de Minas Gerais para o segundo ano do Ensino Médio, o mesmo não foi ministrado para essa turma, sendo assim executado, na sua totalidade, no terceiro ano, esgotando todo o conteúdo de geometria proposto para esse nível escolar. Segundo o documento CBC (MINAS GERAIS, 2006), para os segundo e terceiro anos do Ensino Médio, são assuntos relevantes da Geometria a serem tratados:

1) Prismas e cilindros

- identificar os vértices, as arestas e as faces de um prisma.
- resolver problemas que envolvam o cálculo da diagonal de um paralelepípedo retângulo.
- identificar as seções feitas por planos paralelos à base de um prisma ou de um cilindro.

2) Pirâmides e cones

- identificar os elementos de uma pirâmide e de um cone.
- identificar as seções feitas por planos paralelos à base de uma pirâmide ou um cone.

3) Esferas e bolas

- identificar os elementos de uma esfera e de uma bola.
- identificar as interseções entre planos e esferas.

4) Planificações de figuras tridimensionais

- reconhecer a planificação de figuras tridimensionais usuais: cubo, paralelepípedo retangular, prismas retos, pirâmide, cilindro e cone.

5) Posição relativa entre retas e planos no espaço

- reconhecer posições relativas entre retas: paralelas, concorrentes, perpendiculares e reversas.
 - reconhecer posições relativas entre retas e planos: concorrentes, perpendiculares e paralelos.
 - reconhecer posições relativas entre planos: paralelos, perpendiculares e concorrentes.
- 6) Áreas laterais e totais de figuras tridimensionais
- resolver problemas que envolvam o cálculo da área lateral ou total de figuras tridimensionais.
- 7) Volumes de sólidos
- resolver problemas que envolvam o cálculo de volume de sólidos.
 - utilizar o Princípio de Cavalieri para calcular volumes de sólidos.

Embora o documento CBC (MINAS GERAIS, 2006) indique a resolução de problemas apenas para o cálculo de volumes e de situações que envolvam diagonais, a proposta, aqui, será ampliar a aplicação desta metodologia para uma abordagem mais significativa de todo o conteúdo de Geometria Espacial.

2.3 Detalhamento da Metodologia de Ensino através da Resolução de Problemas

A seguir, serão apresentadas algumas considerações acerca da metodologia de ensino proposta, a fim de elucidar o leitor sobre as formas de ação docente em relação as técnicas de resolução de problemas.

A *mediação* do professor, durante a resolução dos problemas pelos alunos, deverá sempre ser de aproximação de seus raciocínios *com perguntas*, estimulando essa heurística nos alunos, *sem fornecer as respostas*.

Segundo o que se compreendeu dessa metodologia, o professor deverá:

- 1) começar com a leitura da situação proposta, levando os alunos a destacarem qual é a questão a ser resolvida (isto é, os objetivos a serem alcançados com a situação-problema);

2) pedir para os alunos destacarem os dados e relações que já conhecem e que, em suas experiências, poderiam representar o que o problema pede (devem registrar isso por escrito) (por exemplo: escreverem os dados que têm e se estes podem ser usados numa equação, numa tabela, num gráfico, etc., de modo a representarem matematicamente a situação que devem resolver);

3) depois dessa representação, indagar quais são os conhecimentos prévios e experiências que os alunos já tiveram, que sejam similares ao que o problema pede, para as ações matemáticas que deverão executar a fim de resolver a questão (por exemplo, se já resolveram algo parecido e como fizeram);

4) deixar os alunos tentarem com seus diferentes recursos. Caso cheguem à conclusão de que precisam de mais conhecimentos para resolver o problema, incentivá-los a buscar nos livros, ou apresentar algum conhecimento novo a eles, com alguma formalização teórica (sua ou de leituras deles nos livros, internet, etc.);

5) estimular os alunos a voltarem ao problema e tentar aplicar novos conhecimentos. Tentar achar todas as possíveis soluções para o problema, registrando essas tentativas (inclusive as que não deram certo);

6) solicitar que os alunos justifiquem por escrito por que a solução é válida (como se justifica matematicamente a sua obtenção).

7) estimular os alunos a voltarem ao enunciado do problema e ver se essa solução é adequada ao contexto em que o mesmo se situa, verificando se há adaptações a serem feitas nessa solução, para esse contexto.

8) pedir aos alunos para registrarem a solução final do grupo (todo esse registro do trabalho deve ser entregue ao professor, para avaliar o que o grupo fez).

9) depois desses passos, deve-se trazer algumas soluções diferentes que apareceram para a lousa (cada grupo pode copiar a sua, numa parte da lousa) e discutir em plenária com a classe, sobre quais são razoáveis e por que.

10) voltar às questões teóricas, fazendo uma síntese do conteúdo matemático envolvido, para depois retomar novos problemas e exercícios sobre o mesmo.

É importante salientar, nessa abordagem metodológica, que os registros dos alunos são importantes para que o professor possa avaliar a compreensão do problema pelos mesmos e também para estimular os processos metacognitivos, que devem ser estimulados, tanto com as suas orientações quanto com os registros dos estudantes. Esses registros auxiliam na organização do pensamento do aluno, com o planejamento das ações, a busca de conhecimentos prévios, a análise da

razoabilidade das respostas, que fazem parte dos processos de auto regulação que caracterizam a metacognição e as tarefas intelectualmente exigentes.

2.4 Aspectos do Uso de Materiais Manipuláveis no Ensino de Matemática

Dentro de um contexto sociocultural, há que ser pensar em diversos aspectos que podem influenciar no aprendizado de um indivíduo: ao apropriar-se dos objetos cujas origens apresentavam feições puramente naturais, o homem objetiva alcançar qualidades humanas e essa dinâmica, segundo Duarte (1993), passa a ser geradora do processo histórico.

O resultado disso, ainda segundo esse autor, é um conjunto de objetivações genéricas (i.é., do gênero humano), tanto de ordem material quanto da ordem das ideias e valores e que determina, para cada indivíduo singular, relações com essas objetivações em níveis qualitativamente distintos: o nível dos utensílios, da linguagem e costumes; e o da ciência, filosofia, arte, moral, etc. Assim, a educação especificamente escolar se origina desse processo transformador da realidade natural em uma realidade humanizada, à medida em que fez criar uma instituição própria para a formação cultural dos indivíduos (a escola).

Diante desse universo escolar, que aqui se coloca frente ao uso de materiais manipuláveis como forma de potencializar o aprendizado humano e, no caso deste trabalho, o do aluno, entende-se, como Lorenzato (2006), que os materiais didáticos manipuláveis podem desempenhar várias funções, dependendo do objetivo a que se prestam: apresentar um assunto, motivar os alunos, auxiliar a memorização de resultados e facilitar a compreensão.

Sob essa ótica, vale também ressaltar o processo de mudança entre o concreto e o abstrato: em se tratando de uma metodologia de ensino através da resolução de problemas, entende-se que se deve levar o aluno a se tornar capaz de abstrair a partir do problema. Este pode envolver material concreto/manipulável e partir para um contexto generalizante, o qual envolve os conceitos e propriedades, os quais podem ter sido preparados didaticamente ou já estarem presentes no contexto cultural desse aluno.

2.5 Construindo uma Sequência Didática

Após o esclarecimento desses aspectos acerca da Metodologia de Ensino através da Resolução de Problemas (M.E.R.P.) adotada e dos conteúdos curriculares a serem cumpridos na escola, bem como de uma breve análise da realidade dos alunos para os quais ela seria aplicada, este professor-pesquisador propôs a seguinte sequência didática:

1ª Aula: apresentar o professor e alunos entre si; esclarecer sobre o novo contrato didático que será usado na pesquisa (a participação em grupo, necessidade de registrar a resolução dos problemas por escrito, aceitação das regras do novo contrato); aplicar questionário sobre profissões dos familiares e dos próprios alunos, a fim de detectar aspectos sociais e culturais para aquele grupo.

2ª Aula: professor e alunos: levar para a sala de aula, objetos que caracterizam sólidos geométricos e construções com cartolina. Após isto, fazer a representação dos mesmos; pedir para classificarem em grupos semelhantes e verificar nomenclaturas do senso comum. A partir dessas, introduzir as classificações e nomenclaturas matemáticas; registrar as classificações no caderno.

3ª Aula: apresentar aos alunos o “Problema de embalagem” (veja figura 4); estimular o processo de resolução segundo a M.E.R.P.

4ª Aula: introduzir as ideias de área superficial e volume dos sólidos, através de diálogos significativos e registros no caderno.

5ª e 6ª Aula: apresentar exercícios de revisão das sínteses de áreas de figuras planas e formalização de cada uma.

7ª Aula: discutir sobre volume de prismas e retomada do “problema de embalagem”.

8ª e 9ª Aula: discutir sobre o volume do cilindro, relacionando-o ao do prisma pelo princípio de Cavalieri (mais detalhes podem ser encontrados no anexo 2).

10ª Aula: retomar o problema. Nesse ponto, criar um debate sobre as soluções encontradas, bem como mostrar a importância do conhecimento teórico para resolução de problemas. Destacar que às vezes também a intuição é válida para a consolidação do conceito e deve ser parte integrante no processo de ensino, pois é por meio desta que se pode criar padrões para o desenvolvimento de uma aprendizagem ampla.

11ª Aula: apresentar para a resolução dos alunos, outros problemas (relativos às profissões detectadas nos questionários aplicados na primeira aula) envolvendo volumes e áreas superficiais de prismas e cilindros.

12ª Aula: propor experimento com modelos manipuláveis de prismas e pirâmides/ cilindros e cones para a dedução da relação dos volumes. Formalização através do experimento.

13ª e 14ª Aula: propor problemas (relativos às profissões) envolvendo áreas de superfícies e volumes de cones e pirâmides

15ª e 16ª Aula: propor exercícios do livro a serem resolvidos pelos alunos.

17ª Aula: executar o jogo das planificações, aproveitando esse momento para salientar a transição do cálculo de áreas para o cálculo de volumes dos sólidos, observando também que o conceito de área pode ser utilizado tanto para medir a superfície desses sólidos, quanto para medir o volume dos mesmos, ao se relacionar a altura e a área da base. Isso poderá ser retomado no estudo do Princípio de Cavalieri.

18ª Aula: formalizar as planificações com registro no caderno

19ª e 20ª Aula: propor exercícios/problemas envolvendo todos os assuntos desenvolvidos até o momento, misturados.

21ª Aula: desenvolver conteúdos sobre circunferência, círculo e esfera: levar modelos manipuláveis e figuras associadas com a vida cotidiana. Distinguir a nomenclatura do senso comum dos alunos com a nomenclatura formal da Matemática e registrar no caderno.

22ª e 23ª Aula: propor um primeiro problema que envolva a necessidade de cálculo do volume da esfera.

24ª Aula: retomar o Princípio de Cavalieri e o modelo que relaciona o volume da esfera com o do cilindro e cone

25ª Aula: Revisar o cálculo da área de anel e deduzir a fórmula do modelo do volume da esfera, pelo Princípio de Cavalieri.

26ª Aula: retomar o problema do volume da esfera.

27ª e 28ª Aula: propor outros problemas/exercícios envolvendo volume da esfera.

29ª Aula: resolver problema envolvendo a área da superfície da esfera.

30ª Aula: apresentar a fórmula para a área superficial da esfera.

31ª e 32ª Aula: propor exercícios/problemas envolvendo todos os temas abordados.

Neste trabalho, chamamos de *problema* a todo desafio em que o aluno deve elaborar um cálculo não imediato, raciocinando sobre a relação entre os dados fornecidos e os dados a serem calculados, a partir da elaboração mais detalhada de equações e representações matemáticas dessas relações. Os *exercícios* são as atividades que geralmente envolvem algum cálculo, mas que não demandam uma elaboração maior por parte dos alunos para a obtenção do resultado.

A delimitação de onde termina essa denominação de *exercício* e onde se passa à denominação de *problema* não é precisa. Isto depende muito mais da fase de desenvolvimento do aluno, pois, o que é um problema para uma criança pequena, pode ser um exercício simples de cálculo para um adolescente.

3. Aplicando a Sequência Didática

Neste capítulo serão apresentadas as características da escola onde o trabalho foi aplicado. Segundo o que foi planejado para a primeira aula, foi elaborado um questionário para conhecer a vida e os sonhos dos alunos que estariam envolvidos no desenvolvimento da sequência didática, bem como sobre seus responsáveis, o qual será aqui apresentado. Ainda, será feito o detalhamento de como o trabalho foi realizado e se essa sequência produziu os resultados esperados.

As dificuldades de se fazer algo diferente do convencional nunca é tarefa fácil, pois a maioria das pessoas prefere permanecer na sua zona de conforto. Mas quando se busca algo novo, que seja capaz de provocar nos alunos a chama do conhecimento, percebe-se que o caminho a ser seguido pode ser esse.

A metodologia que foi desenvolvida nessa sequência didática se baseia em três pilares fundamentais: a resolução de problemas, os aspectos sócios culturais e a utilização de materiais manipuláveis.

A seguir, será detalhado como foi a aplicação da sequência didática, os desafios encontrados e os resultados obtidos.

3.1 Caracterizando a escola e os alunos e Aspectos do Contrato Didático

O presente projeto foi aplicado em uma escola pública de um pequeno município no interior de Minas Gerais, onde a imensa maioria dos habitantes provê seu sustento da atividade agrícola, ou como pequenos produtores, ou lavradores. A escola possui cerca de 300 alunos, normalmente filhos de trabalhadores rurais. O alvo desse projeto foi uma sala de terceira série do Ensino Médio, com vinte e quatro alunos, sendo a maioria na faixa etária de dezessete anos.

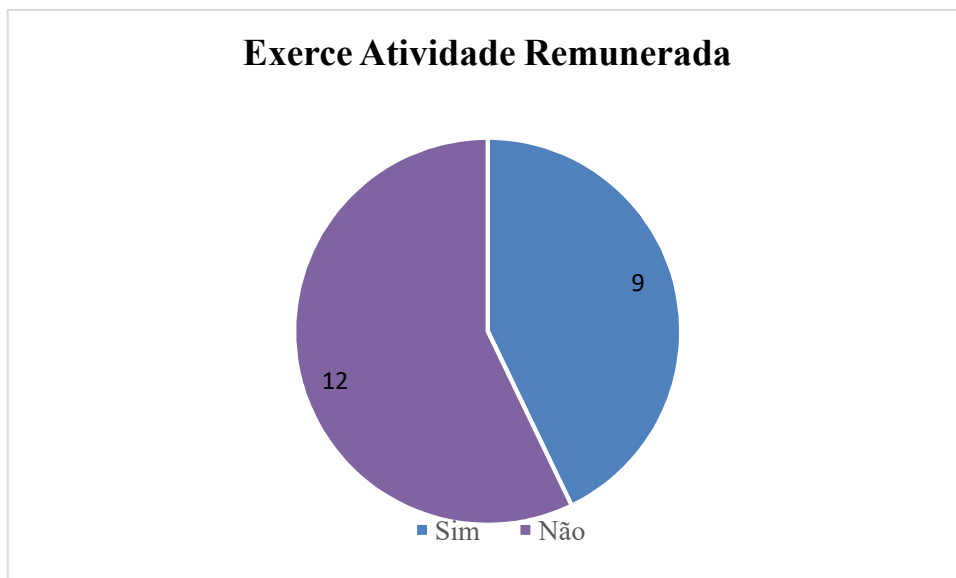
Quando do início dos trabalhos, foi apresentada a ideia do projeto aos alunos. Num primeiro instante, houve uma certa resistência por parte dos mesmos, que se mostraram um pouco receosos com a nova abordagem proposta para o ensino de Matemática. Com a explanação do professor, a apresentação da ideia e do contrato didático, os alunos aceitaram participar do projeto. Vale ressaltar a importância da aceitação por parte dos alunos para que o projeto obtenha os resultados que se

espera e, nesse aspecto, o contrato didático estabelecido entre o professor e os alunos se torna fundamental para que haja total confiança entre as partes.

Vale ressaltar a definição de contrato didático fornecida por Brosseau, como sendo o conjunto de comportamentos do professor que são esperados pelos alunos e o conjunto de comportamentos do aluno que são esperados pelo professor (BROUSSEAU, 1986). Essa relação define o comportamento do aluno para com o professor e do professor com o aluno. Com a nova metodologia proposta, houve a necessidade de mudanças nesses comportamentos, pois os alunos deveriam se engajar muito mais nas atividades propostas e o professor deixaria de ser um simples apresentador das informações na sala de aula para se tornar um questionador e instigar o raciocínio dos estudantes.

Como primeira ação, foi solicitado que eles respondessem a um questionário socioeconômico para verificar se exerciam atividades remuneradas, quais as profissões dos responsáveis e que tipo de profissão esses alunos desejavam para si. Os resultados são apresentados no gráfico que segue:

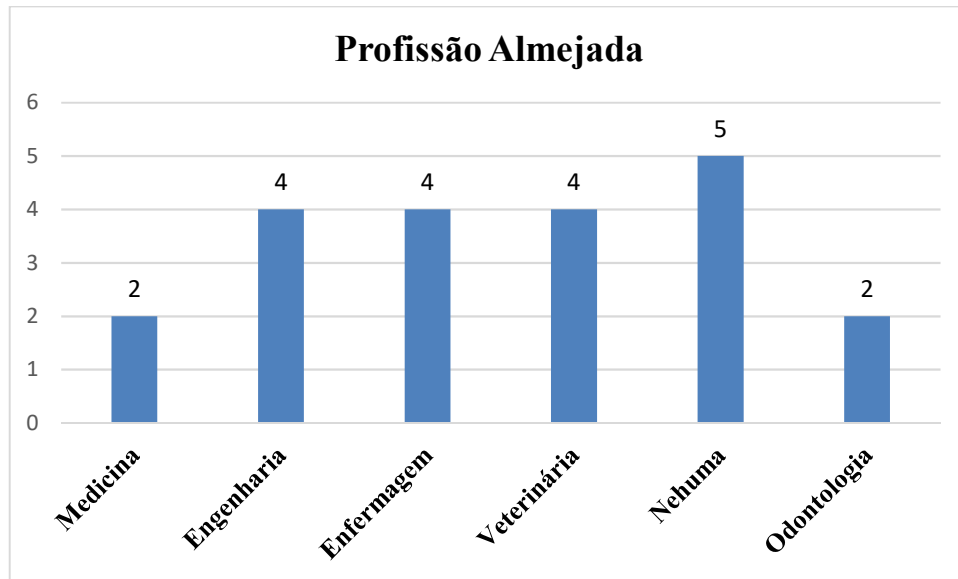
Figura 1: Gráfico das atividades remuneradas dos alunos:



Fonte: do autor.

Ao analisar as informações relativas às atividades remuneradas exercidas pelos alunos, percebeu-se que estas são realizadas em grande parte no comércio local, normalmente como atendente, além de cuidadores de crianças e idosos, caracterizando-se por atividades de baixa renda.

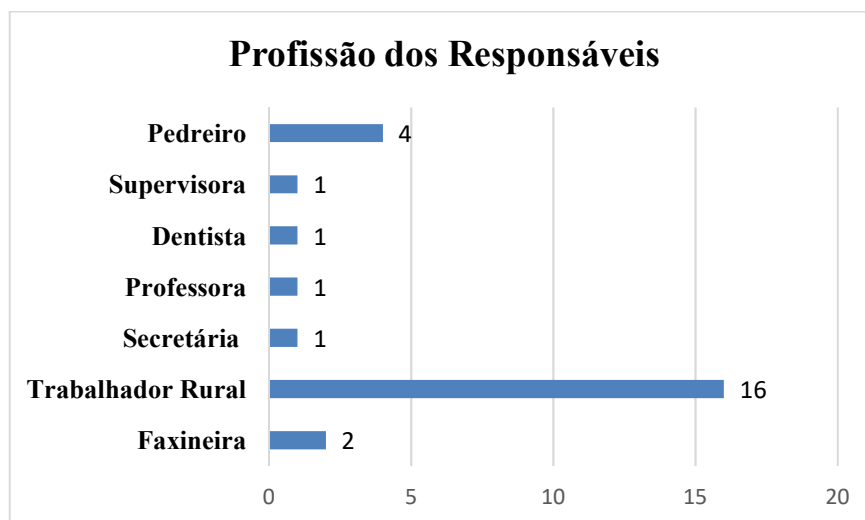
Figura 2: gráfico das profissões almeçadas pelos alunos:



Fonte: do autor.

Em relação ao questionário que aborda as expectativas dos alunos, especificamente quanto à profissão que almejavam, pode-se destacar que a maioria possuía grandes sonhos, mas eram poucos os que faziam alguma coisa para realizá-los: constatou-se que a grande maioria permanecia passiva diante de suas expectativas. Ainda, cinco (5) alunos responderam que não visualizavam nenhuma profissão. Questionados sobre isto, esclareceu-se que esses cinco alunos gostariam mesmo de sair para o mercado de trabalho logo após terminarem o Ensino Médio, seja no município de residência ou em outra localidade.

Figura 3: Gráfico das profissões dos responsáveis pelos alunos



Fonte: do autor.

Como se vê na figura 3, a grande maioria de seus responsáveis trabalha com a atividade rural ou na construção civil, sendo poucos os casos de outros prestadores de serviços do terceiro setor.

Com a ajuda do questionário aplicado, foi possível, então, conhecer alguns aspectos socioculturais do meio em que viviam os alunos e quais eram suas expectativas em relação ao término do Ensino Médio. De posse dessas informações, foi possível fazer um direcionamento bastante preciso sobre que caminhos seguir e sobre como motivar esses alunos a buscar algo novo, diferente da realidade em que viviam. O que se percebe nitidamente é que grande parte desses alunos, mesmo sem receberem incentivo algum dentro do ambiente familiar, ainda apresentavam boas expectativas quanto a prosseguirem em seus estudos (16, dentre os 24 respondentes ao questionário, desejavam seguir os estudos, após a conclusão do nível médio).

Dentre os alunos que responderam ao questionário e que não tinham interesse em continuar, quatro deles relataram que as condições financeiras eram o maior impedimento para que pudessem continuar estudando; já um aluno relatou que preferia trabalhar ao invés de prosseguir nos estudos; este, infelizmente, acabou não se formando e foi considerado desistente.

3.2 Aplicação da Sequência Didática

Como parte inicial da sequência didática, foram apresentados objetos que representassem sólidos geométricos; para isso aproveitou-se materiais que se encontrava na própria escola, tais como bolas, cilindros, cones, diferenciando a nomenclatura cotidiana da formal, matemática. Foi sugerido aos grupos que fizessem pesquisa na internet sobre sólidos geométricos, sendo esta acompanhada pelo professor. Procedeu-se, então, à diferenciação entre os sólidos pelos alunos que passaram a dividi-los em grupos característicos. Ao serem questionados sobre a nomenclatura, o erro mais comum foi o da esfera, que comumente foi chamada de bola; em relação ao cone, os alunos mostraram mais facilidade em reconhecê-lo. Foi-lhes solicitado que dividissem os objetos em classes que achassem convenientes, de acordo com suas principais características. O que mais foi evidenciado, nesse ponto, foram os corpos de base circular e os de bases quadrangulares, bem como a esfera.

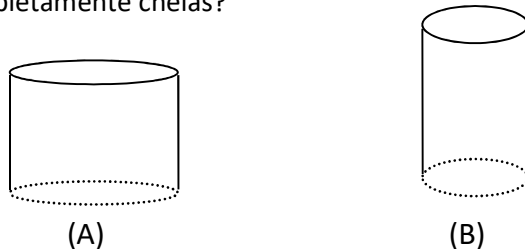
Já na terceira aula, com a divisão da sala em quatro grupos de seis alunos, passou-se para a aplicação do “problema das embalagens”, apresentado na figura 4,

e foi solicitado aos alunos que destacassem o que haviam entendido sobre o enunciado, se já possuíam alguma experiência que pudesse norteá-los à resolução daquele problema.

Figura 4: Problema da embalagem:

Um produto é embalado em latas cilíndricas (cilindros de revolução). O raio da embalagem (A) é igual ao diâmetro de (B) e a altura de (B) é o dobro da altura de (A).

- a) Sabendo que as duas embalagens são feitas do mesmo material, qual delas gasta mais material para ser montada?
- b) O preço do produto na embalagem (A) é de R\$780,00 e na embalagem (B), de R\$400,00. Qual das opções é mais econômica para o consumidor, supondo-se as duas latas completamente cheias?

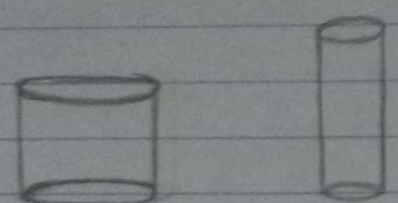


Fonte: da orientadora

Nesse momento, notou-se que os grupos tiveram um pouco de dificuldade para entender o objetivo do problema: o grupo que chamaremos de G4 alegou que a dificuldade na resolução era o desconhecimento sobre as fórmulas de volume e área; assim, foi sugerido que se fizesse uma pesquisa para a solução dessa questão; já o G2 teve dificuldade em caracterizar a relação raio/diâmetro, o que gerou atraso por parte do mesmo; já o G1 optou por uma análise sem o uso de cálculo, usando uma abordagem mais visual. O G3, de posse da fórmula da área do cilindro, apresentou dificuldade para trabalhar algebricamente (representar os dados com incógnitas), optando por atribuir valores numéricos para o raio e altura do cilindro, respeitando as proporções propostas. Após a socialização dos resultados com a turma, foi observado, para este último grupo, se os valores atribuídos mantiveram, sempre, mesmo que alterados, essa conclusão. Ainda diante deste questionamento, os alunos continuaram com resistência em utilizar uma representação generalizada algebricamente para esses valores, pois não tinham o hábito de trabalhar com esse tipo de representação. Note-se que isso é um fato bastante peculiar para o que se espera de um aluno da terceira série do Ensino Médio, o qual já passou por diversas experiências de representação algébrica nas várias séries anteriores.

Figura 5: Resolução do Grupo G3 para o problema das embalagens

R\$ 180,00 R\$ 400,00



A B

$r = 2 \cdot d(B)$ $r = ?$
 $h = ?$ $h = 2 \cdot h(A)$

A

$$A = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot (r + h)$$

$$A = 50,24 \cdot 18$$

$$A = 904,32$$

V = $\pi \cdot r^2 \cdot h$
 $V = 314 \cdot 64 \cdot 10$
 $V = 20096$

Supostas

A	B	B	
$r = 8$	$r = 2$	$A = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot (r + h)$	
$h = 10$	$h = 20$	$A = 12,56 \cdot 22$	$V = 314 \cdot 4 \cdot 20$
		$A = 276,32$	$V = 2512$

a) Mais material (A)

b) Pelos meus cálculos, a embalagem mais econômica é a embalagem A, ela pode ser mais cara, mais uma embalagem dela valem 8 embalagens da B

Fonte: caderno dos alunos

Pode-se perceber que os alunos tiveram bastante dificuldade para trabalhar dessa forma, apresentando certa resistência à proposta da metodologia de ensino através da resolução de problemas, já que a turma sempre seguiu uma maneira tradicional de aprendizagem, onde se apresenta o conceito, faz-se uma série de exemplos e posteriormente resolve-se exercícios similares.

Nesse ponto, iniciando a quarta aula, foi solicitado aos mesmos que expusessem suas noções de área e volume, relacionando-os com o problema da embalagem. Aqui, vale ressaltar que mesmo já tendo sido trabalhadas as ideias de áreas e volumes no Ensino Fundamental, a grande maioria não consegue definir exatamente esses dois conceitos. Novamente o G1 voltou a insistir que sua abordagem visual, de medir as figuras ou atribuir valores arbitrários nos problemas, poderia auxiliar na sua resolução envolvendo áreas e volumes. Nesse momento, este professor voltou a esclarecer que isso não era suficiente para resolver alguns tipos de problemas mais generalizados e que, ainda, a escala das figuras desenhadas poderia não ser fiel aos dados do enunciado.

Como nenhum grupo resolveu o problema da embalagem da forma esperada, indicando variáveis e procedendo os cálculos algebricamente de acordo com as fórmulas anteriormente pesquisadas, nesse ponto foi feita uma pequena inversão na sequência didática: ao invés de passar para a confecção de exercícios, como fora proposto para as aulas 5 e 6, passou-se a uma exposição teórica, pelo professor, sobre os conceitos de áreas de figuras planas, já que esta foi uma das dificuldades apresentadas pelos grupos. Nesse momento, destaca-se que os alunos também apresentaram grande dificuldade na compreensão da conceituação teórica dos conceitos ali abordados. Um aspecto relevante foi a falta de conhecimento em relação às razões trigonométricas, que foram trabalhadas no ano anterior pelo próprio professor, sendo necessária a retomada deste assunto em uma aula de revisão para que fossem sanadas as principais dificuldades encontradas pelos alunos.

Após essa introdução dos conteúdos sobre áreas, passou-se à apresentação e formalização do conceito de área superficial e volume do prisma. No primeiro momento, foi sugerida uma abordagem empírica, onde os alunos utilizaram material manipulável fornecido pela escola para a medição da área e do volume de alguns prismas (figura 7). Novamente houve questionamento por parte de um dos grupos, mais especificamente o grupo nomeado como G4; eles indagaram se haveria a necessidade de se fazer medições, pois se existe um modelo matemático que resolve o problema, então não seria preciso ficar fazendo tais medições. Justificou-se que a ideia era partir de uma situação real, com as medições, para depois se chegar a uma forma generalizada de se calcular as áreas e volumes. Após esse questionamento inicial, houve um crescente interesse da turma em verificar se os resultados encontrados na medição realmente poderiam ser verificados por meio de cálculos

matemáticos. Sendo assim, na aula seguinte, passou-se à formalização dos conceitos de área e volume dos prismas. Com a retomada da ordem da sequência didática, foi solicitado aos alunos que resolvessem uma lista de exercícios contendo cálculo de áreas de figuras planas, para que pudesse ser observado o grau de evolução dos mesmos, depois do trabalho de construção dos conceitos abordados.

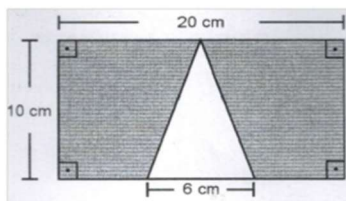
Figura 6: Exercícios Propostos aos alunos

Exercícios Cálculo de Área

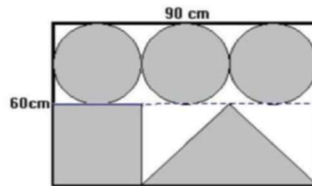
1) Observe a figura abaixo.

A medida, em cm^2 , da área sombreada é.

- A) 24
- B) 30
- C) 36
- D) 170
- E) 200



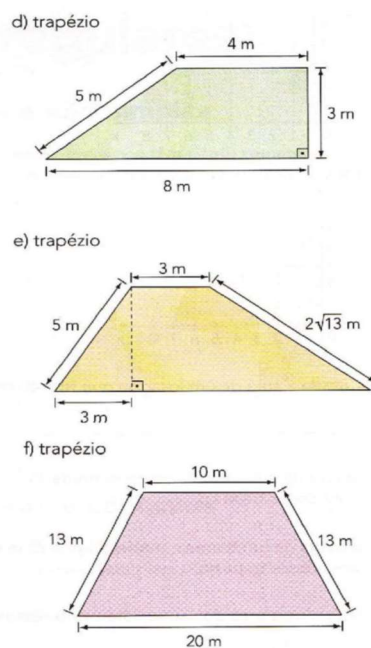
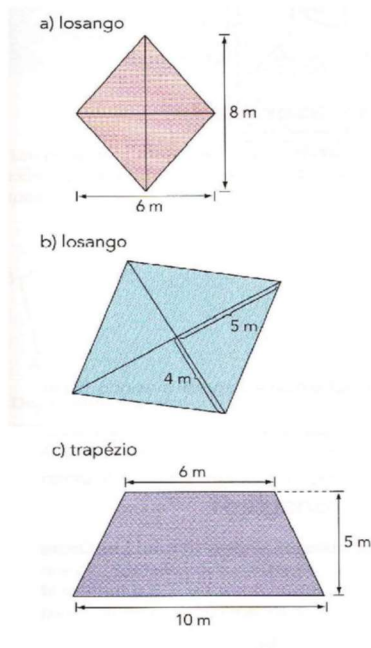
2) Na sua oficina de artesanato, Celso recortou, de um chapa de acrílico retangular 60 cm x 90 cm, três discos de mesmo raio, um quadrado e um triângulo retângulo isósceles, conforme mostra a figura em cinza.



Utilizando $\pi = 3,14$, Celso calculou a área da região restante - na cor branca - da chapa. O número, em centímetros quadrados, que Celso encontrou foi

- A) 1 480,5.
- B) 1 930,5.
- C) 3 317,4.
- D) 3 767,4.

3) Calcule as áreas dos polígonos a seguir:



Respostas: 1) D 2) A 3) a) 24 m^2 b) 40 m^2 c) 40 m^2 d) 18 m^2 e) 30 m^2 f) 180 m^2

Figura 7: modelos manipuláveis fornecidos pela escola



Fonte: foto do autor

Dando continuidade aos trabalhos, nas aulas de número 8 e 9, passou-se à demonstração das fórmulas da área superficial e do volume do cilindro, pelo professor, usando como técnica introdutória o princípio de Cavalieri, o que pareceu contribuir para a compreensão das ideias propostas. Com a definição de área e volume do cilindro, já iniciando a aula 10, aproveitou-se para retomar a resolução do problema da embalagem. Nesse momento, os alunos apresentaram para os outros grupos, na lousa, os seus resultados e qual abordagem haviam executado; após comentários da classe, procedeu-se à generalização do exercício, usando os conceitos formais de cálculo de área e volume do cilindro.

Diante da exposição por parte do professor, foi oportuno levantar com os alunos se o processo de generalização dos conceitos tornaria mais fácil o trabalho de cálculo de problemas como o apresentado. No geral, eles assimilaram as ideias propostas, mas alguns levantaram a questão de que são muitas fórmulas para serem memorizadas, sobre o que esse professor facilitador argumentou que, ao se generalizar o conceito, pode-se perceber que cálculo de volume de um cilindro pode ser caracterizado pela multiplicação de sua altura pela área da base. Isso permite, juntamente com os conhecimentos básicos de área, calcular o volume de diversas figuras geométricas, lembrando-se apenas dessa informação.

Figura 8: Formalização do problema da embalagem

• formalização do problema da embalagem

a)

★ embalagem A	embalagem B
raio $2r$	r
altura a	$2a$

Área total da embalagem A

$$A = 2\pi \cdot 2r (a + 2r)$$

$$A = 4\pi r (a + 2r)$$

$$A = 4\pi r a + 8\pi r^2$$

★ Área total da embalagem B

$$A = 2\pi r (2a + r)$$

$$A = 4\pi r a + 2\pi r^2$$

a embalagem A usa mais material

b) cálculo do volume do cilindro

★ $V_A = \pi (2r)^2 a$	$V_B = \pi r^2 \cdot 2a$
$V_A = 4\pi r^2 a$	$V_B = 2\pi r^2 a$

custo de cada embalagem

$C_A = 190 / 4\pi r^2 a$	$C_B = 400 / 2\pi r^2 a$
$C_A = 195 / \pi r^2 a$	$C_B = 200 / \pi r^2 a$

Fonte: Foto caderno do aluno

Encerrada esta parte das atividades, foi proposta, na aula de número 11, uma lista de exercícios com o objetivo de contribuir para a fixação dos conceitos adquiridos.

Vale ressaltar que foram propostos alguns que envolviam o cálculo de volumes e áreas, aproveitando a oportunidade de relacioná-los à realidade dos estudantes, como o da medição da quantidade de leite dentro de um latão, onde se usa uma régua graduada para medir o volume, explorando a ideia de que, ao conhecer a área da base de um cilindro, necessita-se apenas da altura para medir seu volume. Esse tipo de situação foi abordado, pois grande parte dos alunos convivem diretamente com esse processo, devido ao trabalho dos pais na agricultura. Mesmo assim, alguns alunos ainda tiveram bastante dificuldade em desenvolver os conceitos aplicados, mas no geral, os grupos se mostraram interessados em tentar resolver os problemas usando os conceitos formais de área e volume do cilindro. Observa-se que, aqui, os alunos haviam aceitado melhor a ideia de se empenharem na resolução dos exercícios e problemas, embora ainda trouxessem muitas dificuldades em relação aos conceitos abordados e seus pré-requisitos.

Figura 9: Problema Contextualizando Profissões

1) Um produtor rural perdeu a sua régua graduada para medir o volume de leite no latão que usava em sua propriedade. Como seu filho estava estudando geometria na escola, este produtor pediu sua ajuda. O filho, então, com uma régua simples, mediu o diâmetro da lata, encontrando 30 cm e depois mediu a altura até onde se encontrava o leite, obtendo 60 cm. Sabendo das medidas, qual foi o volume de leite encontrado (em litros)?

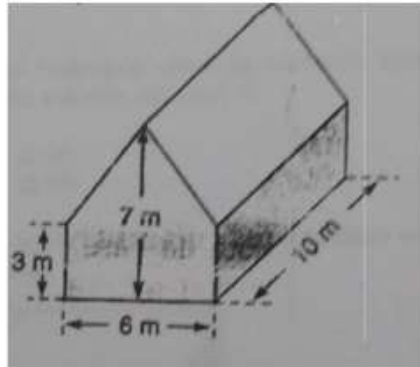


Fonte: Foto do autor

*Sugestão para o professor: Calcular o volume do cilindro, relacionando a área de sua base e sua altura. Desse modo temos: $A_b = \pi(15)^2 \rightarrow A_b \sim 706,5 \text{ cm}^2$,
 $v = 706,5 \times 60 \rightarrow v = 42390 \text{ cm}^3$ Assim temos volume em litros de aproximadamente é de 42,4 litros (foi utilizado para os cálculos: $\pi=3,14$).*

Figura 10: Problema Contextualizando Profissões

2) Fábio é um produtor rural e possui um galpão conforme as medidas descritas abaixo. Ele deseja saber qual é a capacidade de armazenamento desse galpão e, para isso, decidiu calcular o volume do mesmo. Como o senhor Fábio poderá fazer isso, conhecendo as dimensões do galpão?



Fonte: Foto do autor

Sugestão para o professor: Calcular o volume do prisma, podendo para isso dividi-lo em dois: um de base retangular e outro de base triangular. Desse modo temos:

$$v_{\text{retangular}} = 6 \times 3 \times 10 \rightarrow v_{\text{retangular}} = 180 \text{ m}^3,$$

$$v_{\text{triangular}} = \frac{4 \times 6 \times 10}{2} \rightarrow v_{\text{triangular}} = 120 \text{ m}^3.$$

Assim temos que o volume do galpão é a soma dos dois volumes encontrados, ou seja 300 m³

Além desses problemas contextualizados, outros podem ser verificados no anexo 2.

Com a finalização dos exercícios e sua devida correção, já na décima segunda aula, passou-se à experiência usando os sólidos geométricos da escola: os alunos deveriam pegar uma pirâmide de base igual ao prisma e passar a água da pirâmide para o prisma e ver qual resultado seria obtido na comparação dos mesmos. Os grupos perceberam rapidamente, por meio dessa experimentação, qual era a relação entre os volumes, ou seja, que o da pirâmide era 1/3 do volume do prisma. O mesmo procedimento foi adotado em relação ao cilindro e o cone. Com a percepção dessas relações, pôde-se passar para a formalização do volume, tanto da pirâmide como o do cone, sendo que dessa maneira o processo de aprendizagem pareceu mais

simples na visão dos alunos, fato esse relato pelos grupos. Nesse ponto, cabe ressaltar que algumas considerações feitas no início do trabalho ainda permaneceram, como a insistência do G1 em sua abordagem mais palpada em aspectos visuais, o que nem sempre contribuiu para a resolução de alguns problemas.

O passo seguinte, agrupando-se a aula 13 e 14, foi a confecção de alguns exercícios de aplicação, sendo os mesmos feitos em grupo. Nesse momento, pôde-se notar que os grupos estavam bem integrados, formando uma equipe de trabalho; a maior dificuldade em relação aos exercícios propostos foi a questão da interpretação dos enunciados dos problemas, e não necessariamente a utilização dos conhecimentos adquiridos. As equipes novamente apresentaram suas soluções no quadro para que todos pudessem analisar e os resultados encontrados foram satisfatórios. Em geral, todos os grupos conseguiram aplicar as fórmulas generalizadas para os cálculos de áreas e volumes, com algum apoio do professor na interpretação dos enunciados, exceto o G3, que tinha mais dificuldades também com as fórmulas.

No momento seguinte à aplicação dos exercícios de fixação, especificamente as aulas 15 e 16, foi sugerido que os alunos resolvessem alguns exercícios do livro didático adotado pela escola (Dante, 2016), como forma de melhorar a fixação dos temas abordados até aquele instante. O que se pôde notar, da mesma maneira que nos exercícios anteriores, foi a dificuldade de interpretação e, principalmente, em relação àqueles onde a manipulação de expressões algébricas era mais exigida. Ao final, foi feita a resolução por parte do professor, sendo nesse caso, uma abordagem mais tradicional em relação ao processo de ensino e aprendizagem.

Dando seguimento à sequência didática, na próxima aula, passou-se para a planificação dos sólidos geométricos, onde se aproveitou o material contido no livro didático (PAIVA, 2009, p. 283 - 299), para a confecção dos modelos planejados. Foi proposta uma pequena disputa, onde um grupo apresentava a figura planificada e o outro precisava descobrir qual era o sólido geométrico correspondente e, ainda, um terceiro grupo procedia a montagem com o recorte planificado. Os resultados, no geral, foram bem satisfatórios, pois os alunos se sentiram motivados diante da disputa.

Figura 11: Jogo das Planificações 1



Fonte: Foto do autor

Figura 12: Jogo das Planificações 2



Fonte: Foto do autor

Na aula de número 18, passou-se à formalização do conteúdo sobre planificação e suas principais características, com registro pelos alunos no caderno.

Com a finalidade de acompanhar o desenvolvimento dos alunos em relação ao conteúdo ministrado até aquele momento, foi utilizado como recurso a resolução de exercícios retirados do livro didático (DANTE, 2016, p. 213), sendo os mesmos feitos de forma individual e com posterior correção no caderno e aferição no quadro.

Dando sequência ao trabalho, iniciou-se a aula de número 21, onde se passou à apresentação das figuras circulares. Para isso, levou-se à sala de aula, alguns modelos manipuláveis de circunferências e esferas, aproveitando-se da noção intuitiva dos alunos para o início dos trabalhos. Quando novamente questionados sobre as nomenclaturas, percebeu-se que já mostravam um maior domínio. Nesse momento, vale uma ressalva, pois foi constatada pelos alunos, a importância do uso de materiais manipuláveis para uma melhor visualização dos aspectos característicos da geometria, bem como para a formalização da nomenclatura matemática.

Na aula 21, foi proposto aos grupos que resolvessem uma questão envolvendo o volume de uma esfera. Novamente a dificuldade foi a interpretação do problema e a falta de uma fórmula para a resolução do mesmo. Ainda que, nesse momento, se tenha percebido a dificuldade dos alunos para interpretação e para a busca de novos conceitos, com a escassez de tempo para a continuidade do trabalho, na aula seguinte já foi retomado o princípio de Cavalieri para a dedução da fórmula do volume da esfera, o que deixou os alunos encantados com tal sutileza e, principalmente, porque não estavam habituados com a demonstração de fórmulas matemáticas. Com isso, foi possível retomar o problema proposto nas aulas anteriores, que foi prontamente resolvido, agora com o conhecimento da fórmula do volume da esfera.

Após isto, passou-se à aplicação de alguns exercícios de fixação sobre o cálculo do volume da esfera para melhor assimilação do conteúdo, levando duas aulas para tal procedimento, uma para a resolução dos exercícios pelos alunos e outra para a correção dos mesmos.

Devido à falta de tempo para um maior aprofundamento dos conteúdos de geometria espacial, o assunto foi encerrado com o cálculo do volume da esfera e posterior avaliação do que foi ministrado, não tendo sido possível desenvolver as propostas originais da sequência didáticas para as cinco últimas aulas.

4. Algumas Reflexões Acerca de Todo o Processo de Intervenção e da Pesquisa

Durante o processo de aplicação da sequência didática construída, percebeu-se que o novo assusta e causa dificuldades, incomoda a estrutura que já se estabeleceu há muitos anos, mas com o quebrar das resistências, um universo amplo se abre diante desse outro fazer matemático, que não necessariamente é tão novo assim. Constatou-se que essa sequência, mesmo mesclada com momentos de abordagens tradicionais de exercícios para a fixação dos conteúdos, pôde, sim, gerar um maior interesse por parte dos alunos e conseqüentemente aumentou seu aprendizado.

Esse aprendizado foi verificado durante a aplicação dos exercícios, quando os alunos apresentaram melhor desempenho do que antes desse processo. É claro que é muito difícil se fazer mensuração quando não temos um parâmetro fixo de medição; então, leva-se em conta alguns aspectos subjetivos, tais como, o maior empenho e dedicação apresentados pelos estudantes dessa turma, comparando-a com ela mesma, em momentos anteriores à aplicação da sequência didática. Além desses aspectos, destaca-se a *performance* da turma na avaliação externa aplicada pelo governo de Minas Gerais (SIMAVE). Em 2015, as terceiras séries do Ensino Médio tiveram uma pontuação de 272,9, diante de 272 pontos de média do Estado. Em 2016, tiveram 262,4, diante da média 269,5 e, em contrapartida, em 2017, após a participação da turma nesta pesquisa, tiveram 276 pontos diante de 268,3 da pontuação média do Estado. Note-se ainda, que somados os níveis intermediário, recomendado e avançado (de maior desempenho na avaliação), em 2017, a escola teve aí 48,1% dos estudantes que foram avaliados, enquanto em 2016, apenas 25,1%. Dentre os 27 participantes do exame de avaliação do SIMAVE, destaca-se que 22 pertenciam à turma da terceira série que participou desta pesquisa e estes resultados surpreenderam positivamente os dirigentes da escola⁶. Considerando-se que o período de aplicação da sequência didática foi de apenas um bimestre, pode-se dizer que ela teve um impacto muito significativo na aprendizagem dos alunos, mesmo sem ter tido nenhum preparo específico para a realização da prova do SIMAVE.

⁶ Estes resultados podem ser conferidos em:

<http://resultados.caeduff.net/resultados/publicacao/publico/escola.jsf>

Um outro aspecto bastante relevante do trabalho das equipes foi o surgimento de lideranças naturais, onde alguns alunos assumiram o papel de levar o grupo ao cumprimento das tarefas propostas. Muitas vezes, esses líderes eram os que tinham obtido uma maior compreensão sobre as questões levantadas. Um fato relevante que passou a ser mais frequente foi que o nível de dispersão da turma caiu significativamente, parte disso por causa dessas lideranças que acabavam por integrar os alunos que antes se mostravam menos interessados. Infelizmente, nem todos os alunos tiveram um entrosamento perfeito em relação às atividades, ou mesmo mostrando interesse e melhoria em relação ao conteúdo matemático, principalmente alguns alunos mais faltosos. Houve um abandono e um aluno que necessitou realizar uma recuperação e reclassificação por motivo de excesso de ausências na escola.

Como não citar a percepção de Vygotsky sobre os aspectos socioculturais para o aprendizado do aluno? Dentro desse contexto, percebeu-se que a aproximação do conteúdo com algo que estava mais próximo de sua realidade fez com que o interesse dos alunos aumentasse. Assim o aprendiz se tornou capaz de buscar algo novo, conseguindo ele próprio, em algumas ocasiões, a formalização do conceito que estava sendo apresentado. Um exemplo interessante desse fato foi a dedução do volume das pirâmides: diante do processo de experimentação, alguns alunos, com base no que haviam aprendido sobre prismas, na experiência anterior, foram capazes de correlacionar esse entendimento para concluírem que o volume da pirâmide era $1/3$ do volume do prisma de mesma base, e um aluno ainda questionou se essa mesma relação poderia ser aplicada relacionando cilindro e cone, antes mesmo de ser tratado esse outro assunto. Uma outra relação que pareceu surgir naturalmente diante do processo, foi a extrapolação de áreas de figuras planas para o cálculo das áreas de figuras espaciais, fato iniciado com os prismas e posteriormente com os corpos de base circular. Outro fato interessante foi a facilidade que alguns alunos tiveram em relação à demonstração do cálculo do volume da esfera quando se adotou o princípio de Cavalieri para a formalização do conteúdo proposto.

Esses mesmos fatos endossam a percepção deste professor-pesquisador de que as atividades propostas na sequência didática estavam apropriadas para atuarem na *zona de desenvolvimento proximal* (zdp) dos alunos, em relação aos conteúdos de áreas e volumes. Estes foram capazes, com a mediação do professor, de realizar discussões sobre as novas situações-problemas apresentadas (mesmo não obtendo as soluções esperadas em alguns grupos) e depois, foram capazes de solucionar

sozinhos, outros problemas similares, por exemplo, deduzir a relação entre o volume do cone e do cilindro, a partir da experiência com a pirâmide e o prisma. Acredita-se que este fato foi também propiciado pelos aspectos da realidade cultural dos estudantes, que se apresentavam em várias situações-problema.

Deve-se destacar, ainda, que o uso da resolução de problemas, como uma metodologia para instigar a busca de novos conhecimentos, se tornou uma ferramenta poderosa nesse processo, envolvendo o questionamento, a escolha para se fazer as perguntas corretas e isto pôde, sim, motivar esse grupo de adolescentes a querer desvendar os mistérios da Matemática, com a aquisição de novos saberes, constatando que ela pode ser fascinante. Vale ressaltar uma fala de um aluno que marcou profundamente este professor e que foi anunciada para toda a sala: “eu nunca imaginei que fosse capaz de aprender isso”. Esse mesmo aluno manteve contato com este professor e hoje está cursando Engenharia Civil.

Outro fato importante que ocorreu com a mudança da metodologia de ensino e que foi verificado durante todo o trabalho, foi uma maior aproximação entre professor e alunos, estabelecendo-se uma relação de maior confiança entre os entes envolvidos. Aqui vale ressaltar a fala de um aluno em relação à própria aprendizagem, quando o mesmo observou o esforço por parte do professor para um melhor aprendizado da turma: “o senhor ajuda a gente sem ficar cobrando o tempo todo para ir bem na prova do Simave”. Um outro aspecto é que, no final de todo esse trabalho, o professor foi homenageado pela turma e convidado para ser paraninfo, o que também traz evidência dessa maior aproximação. Enfim, esta nova relação rendeu frutos para muito além do aprendizado, refletindo, inclusive, na disciplina em sala de aula, e em um maior interesse por parte da turma em relação aos conteúdos da Matemática.

É obvio que nem tudo são flores: nem todas as dificuldades foram sanadas e nem todos alunos passaram a gostar dessa disciplina. Por vezes este professor teve que chamar a atenção e pedir mais empenho, fazer valer o contrato didático proposto no início do projeto. Isso mostra também a importância do estabelecimento desse novo contrato *explicitamente*, quando foram explicados os novos papéis que seriam esperados dos alunos e do próprio professor, para que a metodologia diferenciada da tradicional pudesse ser aceita e ter um bom efeito sobre o desenvolvimento da turma.

Ao iniciar tal projeto, confesso que tinha minhas restrições quanto ao resultado que alcançaria, talvez influenciado pelo tempo já longo de trabalho dentro da sala de

aula. Faço aqui um relato pessoal a respeito de quando iniciei esse projeto: confesso que, com meus anos de magistério, não acreditei que tal abordagem pudesse surtir algum efeito; estava, sim, disposto a ir até o fim, mas pessimista quanto aos resultados. O que pude perceber com o desenvolvimento da sequência, é que, quando o professor se dispõe a estar em cooperação com os alunos, conhecendo-os e ouvindo-os mais, planejando e deixando-os participarem do processo de ensino e aprendizagem em sala de aula, o resultado pode e será positivo.

Algumas considerações adicionais devem ser feitas diante do trabalho realizado: a primeira, sobre a metodologia aplicada, envolvendo tanto os aspectos socioculturais quanto a resolução de problemas - diante do que foi observado na aplicação, se essa metodologia pudesse ser proposta para os alunos durante todo o seu ciclo escolar, possivelmente, já estaria mais consolidada, a resistência deles seria muito menor e os resultados poderiam ser ainda melhores. Em relação ao planejamento da sequência didática, foi um norte fundamental para a condução dos trabalhos, mas há que se ressaltar que ela poderia ter contemplado, no início, uma revisão maior dos conteúdos que são pré-requisitos para o estudo da Geometria Espacial, incluindo, nesse caso, uma pré-avaliação dos conhecimentos já adquiridos pelos estudantes.

Um outro fator relevante a se destacar é o tempo que se tem para concluir tamanha quantidade de assuntos, que muitas vezes são abordados de forma superficial. Vale aqui uma ressalva que pode ser interessante para ser compartilhada com outros colegas de profissão: a questão de criar uma sequência didática para várias aulas, favorece sobremaneira sua condução e deixa claro os objetivos a serem alcançados no curto e no longo prazo.

Hoje, com a finalização do projeto, percebe-se o quanto se pode melhorar dentro de um ambiente escolar, quando se tem disposição para aplicar algo que saia do padrão tradicional. Os desafios são muitos, inclusive no período de aplicação do projeto, a escola permaneceu sem aula por cerca de vinte dias, devido a uma greve dos professores. As dificuldades dos estudantes com as mudanças também são inúmeras, mas o que se consegue levar para a prática pedagógica deste professor-pesquisador é que não são necessários projetos grandiosos para se melhorar a qualidade da educação, mas sim, uma aproximação maior com as realidades dos nossos estudantes, conhecendo um pouco mais essas realidades e aceitando-se o desafio de estudar novas metodologias e experimentá-las na prática.

Com esta experiência, constatou-se que a prática pedagógica dos docentes nos dias atuais deve ser repensada e que não existe um modelo pronto, que vá funcionar em todos os lugares. Mas a busca por novas abordagens, novas ideias, deve permear o direcionamento desses profissionais, afinal, os alunos atuais não são mais passivos diante dos conteúdos. Nesse sentido, o espírito crítico, a curiosidade científica pode e vai contribuir para uma real evolução nessa tríade professor-aluno-conhecimento.

4.1. Conclusão

Não há que se duvidar que dentro de um ambiente escolar, muitos fatores podem e irão influenciar os aspectos de aprendizagem. Dentro do contexto em que este pesquisador-professor se insere, em relação ao trabalho realizado com essa turma de terceiro ano do Ensino Médio, muitos fatores e variáveis devem ser levados em consideração na realização do projeto, que podem refletir sobremaneira em seus resultados. Aqui se destacam alguns deles: a escola onde o trabalho foi realizado é de pequeno porte, propiciando um maior conhecimento sobre os alunos; a turma era relativamente pequena, com 24 estudantes. Ainda, para a mudança de atitude metodológica deste professor pesquisador, foram necessárias leituras sobre as teorias acerca do desenvolvimento e a aprendizagem (Vygotsky) e também sobre outras experiências com o uso da Metodologia de ensino através da Resolução de Problemas (M.E.R.P), além da orientação de um parceiro mais experiente com essas metodologias e estudos (no caso, a orientadora deste trabalho), com o incentivo para a mudança quanto ao contrato didático e às crenças nas potencialidades e capacidades reais dos alunos da escola pública.

Diante do exposto, destaca-se que a mudança no olhar do professor para a sua metodologia de ensino pôde permitir um maior engajamento dos alunos diante dessa nova escola que surge, clamando por novas perspectivas.

Um dos objetivos do presente projeto era verificar a viabilidade da aplicação de uma sequência didática para o ensino de Geometria Espacial no Ensino Médio. Pôde-se perceber que, apesar de alguns percalços, tais como uma greve de professores e a falta de tempo ocasionada, e mesmo não chegando ao fim da sequência proposta, ela obteve resultados bem significativos, principalmente no aspecto de um maior

controle por parte do professor em relação a seu trabalho e uma maior compreensão, por parte dos alunos, dos objetivos de cada aula.

Ao se adotar uma metodologia como o ensino através da resolução de problemas dentro de uma sala de aula, nesse caso específico, surgiram algumas dificuldades, tais como a resistência dos alunos e do próprio professor, que tem que ser parte da mudança do processo. Mas ao se conduzir o trabalho dessa maneira, notou-se que quando esses alunos passaram a ser parte integrante e ativa do processo de aprendizagem, e com a dinâmica que as aulas passaram a ter, verificou-se a potencialidade da metodologia adotada.

Ao se elencar, dentro de um sistema que ainda pode se mostrar tão engessado como uma sala de aula, elementos socioculturais da vida dos alunos, criou-se um ambiente que foi capaz de tornar o conteúdo mais próximo de sua realidade, possibilitando que os mesmos passassem a enxergar a Matemática como parte integrante da sua vida, ou mesmo como uma ferramenta que se pode usar em diversas ocasiões.

É claro que ainda há muito o que fazer, pois não se tem um modelo pronto, mas existe espaço para a inovação. Diante de tudo que foi vivido nesse projeto de pesquisa, pode-se dizer que um dos aspectos mais interessantes foi, sem dúvida, o estudo e a aplicação, em sala de aula, de alguns aspectos dessa abordagem sociocultural, interpretada a partir dos estudos de Vygotsky em seus trabalhos.

Referências

- ANDRÉ, Marli E.D.A. **Etnografia da Prática Escolar**. Campinas, SP: Papyrus, 1995.
- BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática**. Secretaria de Educação Fundamental - Brasília: MEC/SEF, 1997
- BROUSSEAU, G. Fondements et Méthodes de la Didactique des Mathématiques. **Recherches em Didactique des Mathématiques**, Grenoble, v. 7, n. 2, p. 33-116, 1986.
- DANTE, Luiz R. **Contexto e Aplicações Volume 2**. 2ª.ed. São Paulo: Ática, 2016.
- D' AMBRÓSIO, Beatriz Silva. **Como Ensinar Matemática Hoje? Coleção Temas e Debates**. Brasília: SBEM, 1989.
- DUARTE, Newton. **A individualidade para si: Contribuições a uma teoria histórico-social da formação do indivíduo. Debates**. Campinas: Autores Associados, 1993.
- LORENZATO, S. Laboratório de ensino de matemática e materiais didáticos manipuláveis. In: LORENZATO, Sérgio. **Laboratório de Ensino de Matemática na formação de professores**. Campinas: Autores Associados, 2006. p. 3-38.
- MINAS GERAIS (Estado). (CBC) Conteúdo Básico Comum: Matemática. Secretaria de Educação de Minas Gerais: 2006.
- OLIVEIRA, Marta K. **Vygotsky: aprendizado e desenvolvimento**. São Paulo: Scipione. 1995.
- PAIVA, Manoel. **Matemática**. Volume 2. 1ª. Ed. São Paulo: Moderna, 2009.
- ZUFFI, Edna M.; JACOMELLI, C. V. O uso de aspectos sócio-culturais para a motivação da aprendizagem em matemática no ensino fundamental, X Encontro de Educação Matemática, **Anais do X ENEM**. Salvador-Bahia, Julho de 2010.

Anexos

Anexo 1: Questionário aplicado aos alunos

Questionário sobre Profissões (24 respondentes)

- 1) Você exerce alguma atividade remunerada? Se sim, qual?

- 2) Seus responsáveis exercem alguma atividade remunerada? Se sim, qual?

- 3) Você pretende fazer Faculdade? Se sim, qual?

Anexo 2: Visão geral da sequência didática aplicada

1ª Aula: Faça um relato sobre a ideia do projeto e como o mesmo será conduzido. Exponha o contrato didático, deixando bem claro aos participantes qual o seu papel nesse processo e que o compromisso afirmado deve ser cumprido em todas as instâncias. (O Contrato didático se define como uma série de comportamentos que são esperados do aluno pelo professor e do professor pelo aluno (BROUSSEAU, 1986)). Logo em seguida, faça um questionário sobre as atividades geralmente executadas pelos alunos e seus responsáveis e quais são suas expectativas em termos da carreira acadêmica (veja a sugestão do Anexo1). Nesse momento, recomenda-se a divisão da sala em grupos que irão trabalhar juntos durante a aplicação da sequência.

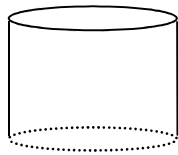
2ª Aula: Levar para a sala de aula, objetos que caracterizam sólidos geométricos e construções com cartolina. Após isto, fazer a representação dos mesmos; pedir para classificarem em grupos semelhantes e verificar nomenclaturas do senso comum. A partir dessas, introduzir as classificações e nomenclaturas matemáticas; registrar as classificações no caderno.

3ª Aula: Nesta aula, apresentar o problema da embalagem e solicitar aos alunos que se reúnam nos grupos já formados, e tentem resolver o problema; aqui o professor deve ser um facilitador no processo, usando as técnicas da metodologia de ensino através da resolução de problemas.

Observação: O problema poderá se mostrar um pouco mais difícil de ser compreendido pelos alunos, neste momento inicial. Por isso, o professor deve incentivar que façam uma leitura detalhada do mesmo, aproximando-os de sua interpretação. Espera-se que os alunos relacionem as variáveis envolvidas e percebam a necessidade de conhecerem uma maneira de generalizar o cálculo de volumes dos cilindros e de outros sólidos geométricos, buscando esses novos conhecimentos, mesmo que não consigam resolvê-lo totalmente, num primeiro momento. O problema poderá ser retomado em outra ocasião, para sua melhor compreensão, após o tratamento da generalização das fórmulas de volumes dos cilindros e prismas.

Um produto é embalado em latas cilíndricas (cilindros de revolução). O raio da embalagem (A) é igual ao diâmetro de (B) e a altura de (B) é o dobro da altura de (A).

- c) Sabendo que as duas embalagens são feitas do mesmo material, qual delas gasta mais material para ser montada?
- d) O preço do produto na embalagem (A) é de R\$780,00 e na embalagem (B), de R\$400,00. Qual das opções é mais econômica para o consumidor, supondo-se as duas latas completamente cheias?



(A)



(B)

4ª Aula: Inicie esta aula apresentando os conceitos de área de figuras planas por meio de diálogos e exposição do conteúdo; recomenda-se a adoção do livro didático (pode ser, por exemplo, Matemática- Paiva, vol. 2).

5ª Aula: Aplicação de exercícios que devem ser realizados de forma individual.

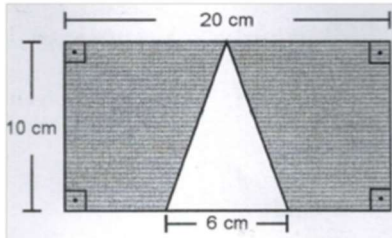
Figura 13: Exercícios Propostos aos alunos

Exercícios Cálculo de Área

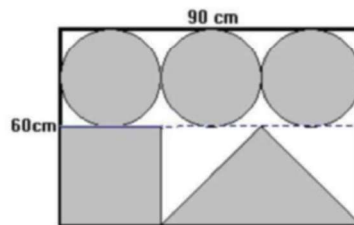
1) Observe a figura abaixo.

A medida, em cm^2 , da área sombreada é.

- A) 24
B) 30
C) 36
D) 170
E) 200



2) Na sua oficina de artesanato, Celso recortou, de um chapa de acrílico retangular 60 cm x 90 cm, três discos de mesmo raio, um quadrado e um triângulo retângulo isósceles, conforme mostra a figura em cinza.

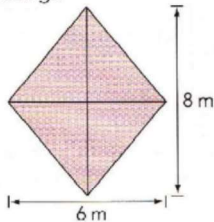


Utilizando $\pi = 3,14$, Celso calculou a área da região restante - na cor branca - da chapa. O número, em centímetros quadrados, que Celso encontrou foi

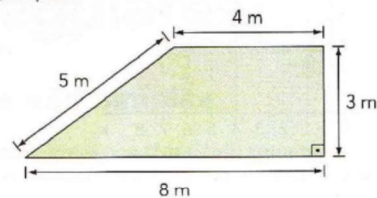
- A) 1 480,5. B) 1 930,5. C) 3 317,4. D) 3 767,4.

3) Calcule as áreas dos polígonos a seguir:

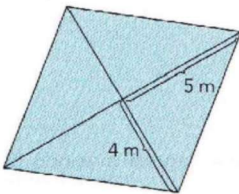
a) losango



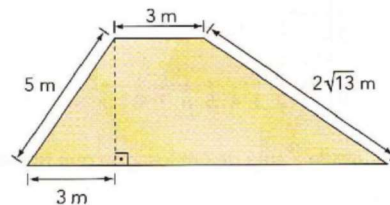
d) trapézio



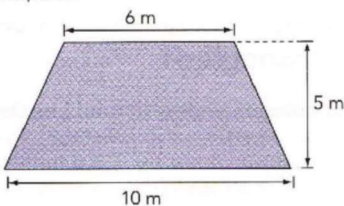
b) losango



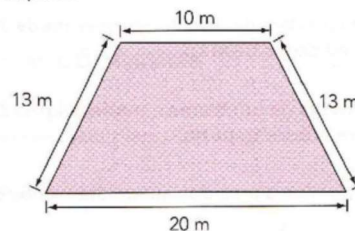
e) trapézio



c) trapézio



f) trapézio



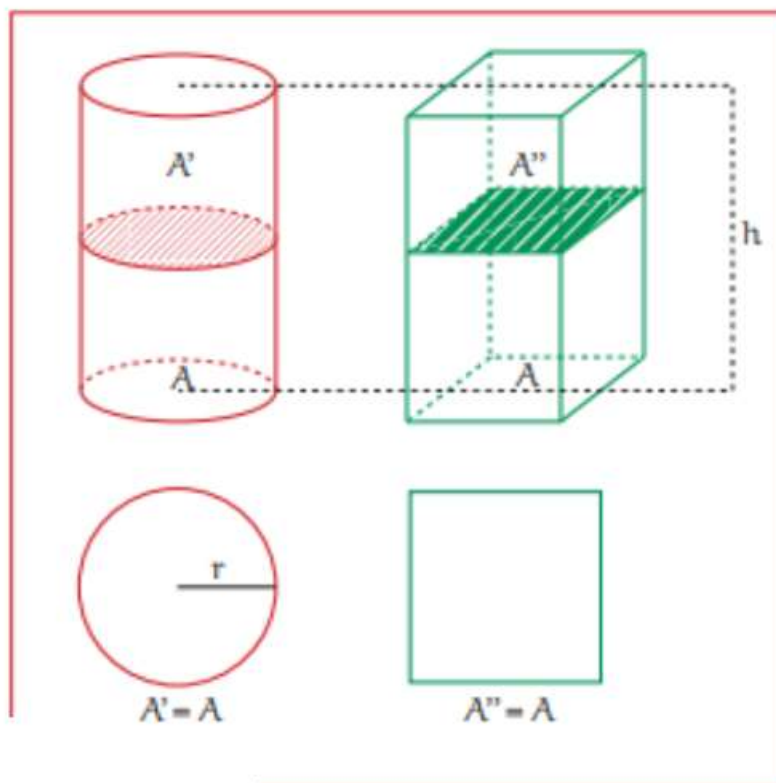
Fonte: foto do autor

6ª Aula: Continuação dos exercícios com correção por parte do professor.

7ª Aula: Aula expositiva sobre volume do prisma: sugere-se o uso do livro didático ou alguma forma de apresentação que facilite a abordagem do tema.

8ª Aula: Utilizar como ferramenta didática, nesse instante, para a determinação do volume do cilindro, material que ilustre o Princípio de Cavalieri (abaixo, segue material de apoio para a demonstração).

Figura 14: Modelo Princípio de Cavalieri para o cilindro



Fonte: Matemática Multimídia Unicamp – (http://m3.ime.unicamp.br/dl/1-EDSILowNQ_MDA_1bf8a_)

Princípio de Cavalieri:

Sejam dados dois sólidos (de mesma altura) apoiados sobre um plano α . Se *todo* plano α' , paralelo ao plano dado, secciona os dois sólidos segundo figuras de mesma área, então esses sólidos têm o mesmo volume.

9ª Aula: Continuação da aula anterior: abrir para debate e discussão sobre os aspectos principais desse tema.

10ª Aula: Nesse momento retoma-se o problema proposto na aula 3, sobre as embalagens: sugere-se o desenvolvimento de um debate sobre as soluções encontradas, bem como mostrar a importância do conhecimento teórico para resolução de problemas. Destacar que às vezes também a intuição é válida para a consolidação do conceito e deve ser parte integrante no processo de ensino, pois é por meio desta que se pode criar padrões para o desenvolvimento de uma aprendizagem ampla.

11ª Aula: Sugere-se a confecção de exercícios que estejam relacionados à realidade dos alunos, utilizando-se para tal o questionário aplicado na primeira aula dessa sequência.

Algumas Sugestões de problemas contextualizados de acordo com a realidade dos alunos envolvidos no projeto.

Figura 15: Problema Contextualizando Profissões

1) Um produtor rural está fazendo a colheita de café de sua propriedade. Em determinado dia, ele foi informado que os apanhadores haviam colhido 900 balizas. Ele precisa ir até a plantação para recolher a produção e possui uma carreta na forma de paralelepípedo, com dimensões: 3m de comprimento, 2m de largura e 2m de altura. Diante disso, quantas viagens ele precisaria fazer para buscar todo o café? (Dados: 1 baliza equivale a 60 litros).

Fonte: Material do autor

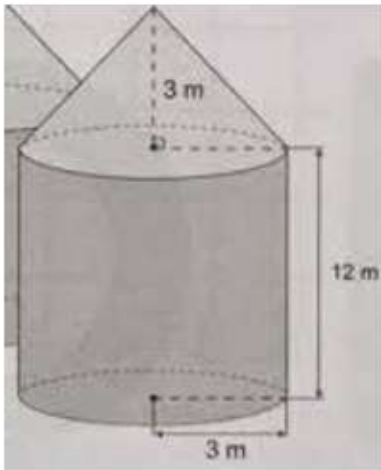
Sugestão: Calcular o volume da carreta, considerando-a como um prisma. Desse modo temos:

$$v_{carreta} = 3 \times 2 \times 2 \rightarrow v_{carreta} = 12 m^3,$$

Sabendo também que 900 balizas equivalem a 54000 litros, conhecendo a capacidade da carreta que é de 12000 litros, pode-se concluir que o produtor terá que fazer cinco viagens.

Figura 16: Problema Contextualizando Profissões

2) Carlos possui uma área de 20 hectares de milho plantado em sua propriedade. Ele estima uma produtividade de 140 sacos por hectare (saca de 60 kg). A sua propriedade possui um silo vertical, conforme figura abaixo, e ele gostaria de armazenar toda sua produção nesse silo. Utilizando os cálculos de volume do cilindro, cone e de densidade, diga se é possível armazenar a produção. Densidade do milho: 800 Kg/m^3



Adote $\pi = 3,14$

$$\text{Densidade} = \frac{\text{Massa}}{\text{Volume}}$$

Fonte: ENEM modificado

Sugestão: Calcular inicialmente o volume do silo, considerando-o como cilindro na parte inferior e como cone na parte superior. Desse modo, temos:

$$v_{\text{silo}} = \pi(3)^2 \times 12 + \frac{\pi(3)^2 \times 3}{3} \rightarrow v_{\text{silo}} \sim 367,38 \text{ m}^3,$$

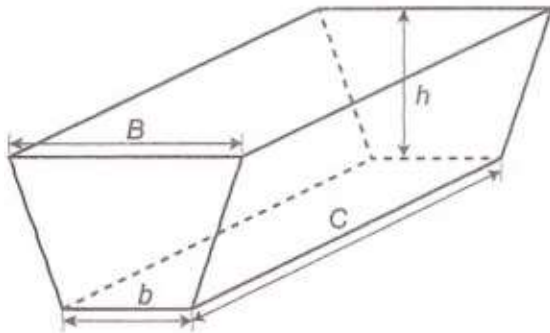
Agora calcula-se o volume de milho colhido, assim tem-se:

$$800 = \frac{168000}{v} \rightarrow v = 210 \text{ m}^3$$

Com isso chega-se à conclusão que o silo tem espaço mais que suficiente para armazenar toda a produção.

Figura 17: Problema Contextualizando Profissões

3) Um produtor rural possui um silo de trincheira conforme figura abaixo. Conhecendo suas dimensões, ele deseja calcular a quantidade de silagem que pode ser aí armazenada. Conhecendo também a densidade da forragem, que é de 500 kg/m^3 , calcule a quantidade de silagem que pode ser armazenada em toneladas.



Dados:

Base inferior (b) = 4,5m,

Base superior (B) = 6m,

Altura (h) = 2,5m

Comprimento (C) = 12m

$$\text{Densidade} = \frac{\text{Massa}}{\text{Volume}}$$

Fonte: <http://bovinocultura3a.blogspot.com/2016/10/dimensionamento-de-silo.html> (Modificado)

Sugestão: Calcular o volume do silo, considerando-o como um prisma de base trapezoidal. Desse modo temos:

$$v_{\text{silo}} = \frac{(4,5 + 6) \times 2,5}{2} \times 12 \rightarrow v_{\text{silo}} = 157,5 \text{ m}^3,$$

Agora sabendo-se o volume do silo e a densidade da forragem, tem-se:

$$500 = \frac{m}{157,5} \rightarrow m = 78750 \text{ kg}$$

Como o problema pede a massa em toneladas basta dividirmos por 1000 o resultado encontrado, nesse caso, 78,75 toneladas.

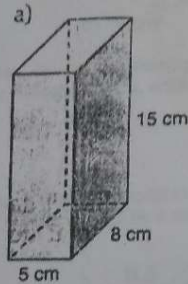
12ª Aula: Utilizar nesse momento, modelos manipuláveis de prismas e pirâmides, cilindros e cones para a dedução das relações dos volumes. A formalização deve ser feita por meio das conclusões obtidas com o experimento.

13ª Aula: Propor alguns exercícios de fixação (na figura 18, há alguns para a utilização).

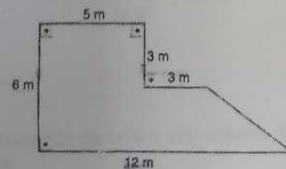
Figura 18: Exercícios Propostos aos alunos

Exercícios

- 1) Calcule a área total dos prismas retos das figuras.



- 2) Um prisma reto com 1,5 m de altura tem seção transversal como mostra a figura. Determine a área total desse prisma.



- 3) Um prisma pentagonal regular tem 20 cm de altura. A aresta da base do prisma mede 4 cm. Determine a sua área lateral.
- 4) Num prisma quadrangular, a aresta da base mede $a = 6$ m, sabendo que a área lateral do prisma é 261 m^2 , calcule a medida h da altura do prisma.
- 5) Um prisma reto tem por base um triângulo isósceles com medidas 8 dm de base e altura 3 dm.

Sabendo que a altura do prisma é igual a $1/3$ do perímetro da base, calcule a área da superfície total do prisma.

- 6) (UFPA) Num prisma regular de base hexagonal a área lateral mede 36 m^2 e a altura é 3 m. A aresta da base é:
- a) 2 m b) 4 m c) 6 m d) 8 m e) 10 m
- 7) (UFCE) As dimensões de um paralelepípedo retângulo são proporcionais a 3, 5 e 7. Sabendo que a diagonal mede 4 cm, calcule o volume do paralelepípedo.
- 8) (UFPEL-RS) De um reservatório de forma cúbica cheio de água foram retirados 2 litros dessa água. Verificandose que houve uma variação de 5 cm no nível do líquido, calcule quanto mede a aresta interna da caixa-reservatório.
- 9) (Unicruz-RS) Se a soma das arestas de um cubo é igual a 72 cm, então o volume do cubo é igual a:
- a) 100 cm^3 d) 16 cm^3
b) 40 cm^3 e) 216 cm^3
c) 144 cm^3
- 10) (UEPG-PR) As medidas internas de uma caixa d'água em forma de paralelepípedo retângulo são: 1,2 m, 1 m e 0,7 m. Sua capacidade é de:
- a) 8 400 litros d) 8,4 litros
b) 84 litros e) n.d.a

Respostas:

- 1) $S_t = 470 \text{ m}^2$
- 2) $S_L = 141 \text{ m}^2$
- 3) $S_L = 400 \text{ cm}^2$
- 4) $h = 10,875 \text{ m}$
- 5) $S = 132 \text{ dm}^2$
- 6) a) 2 m
- 7) $V = 8,9 \text{ m}^3$
- 8) $a = 20 \text{ cm}$
- 9) e) 216 cm^3
- 10) e) n.d.a (840 litros)

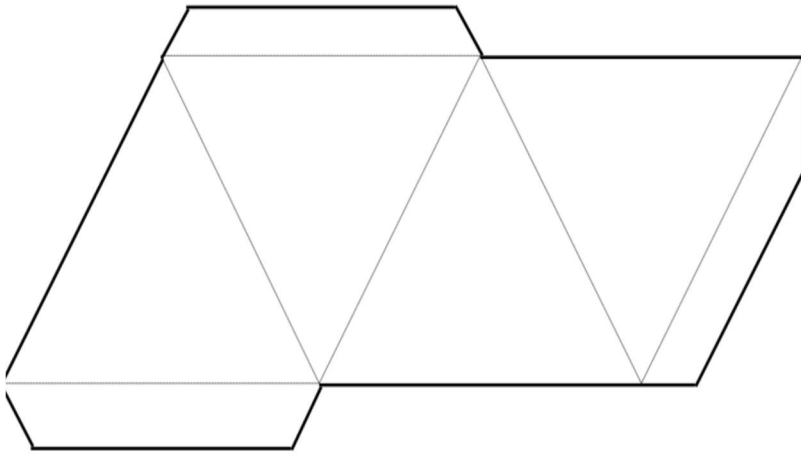
14ª Aula: Fazer a correção dos exercícios aplicados na aula anterior e abrir espaço para o debate sobre as resoluções.

15ª Aula: Fazer uso do livro didático para a confecção de exercícios com vistas a sanar dúvidas dos alunos; recomenda-se a adoção do livro didático (por exemplo, *Matemática – Paiva, Vol. 2* ou do livro *Contexto e Aplicações, Vol.2* de autoria de Luiz Roberto Dante).

16ª Aula: Novamente fazer a correção dos exercícios aplicados, abrindo sempre espaço para debates e questionamentos.

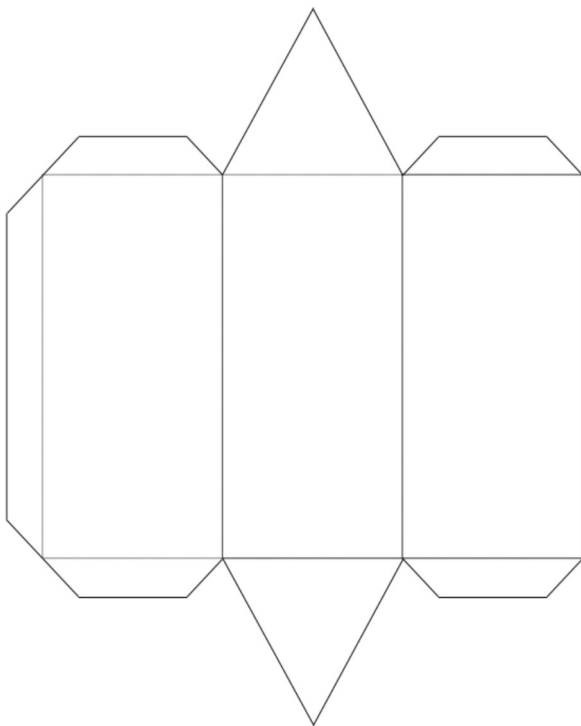
17ª Aula: Confeccionar o jogo das planificações: separa-se a sala nos grupos de trabalho; a partir desse momento uma equipe cria os moldes planificados que repassa para a outra equipe fazer a montagem e uma terceira faz a classificação do sólido já montado; atribui-se pontuação a cada etapa e vai-se somando; no final verifica-se qual grupo é o vencedor (com maior número de pontos acumulados).

Figura 19: Tetraedro



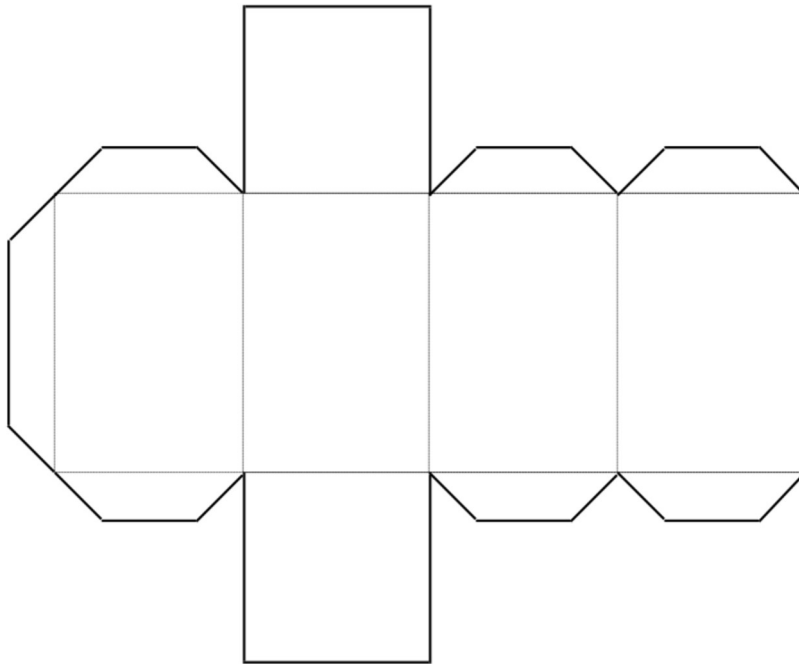
Fonte: Matematica Paiva Volume Dois

Figura 20: Prisma de Base Triangular



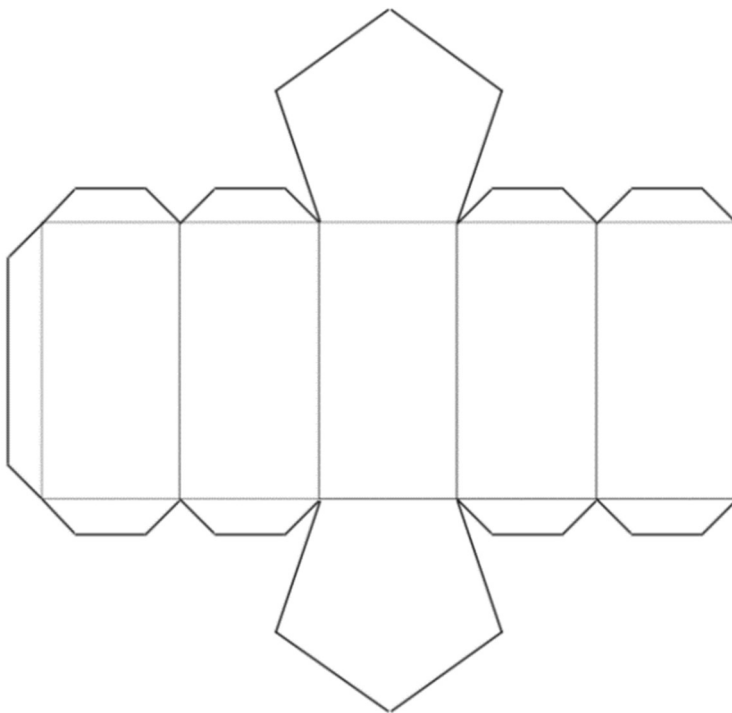
Fonte: Matemática Paiva Volume Dois

Figura 21: Prisma de Base Quadrada



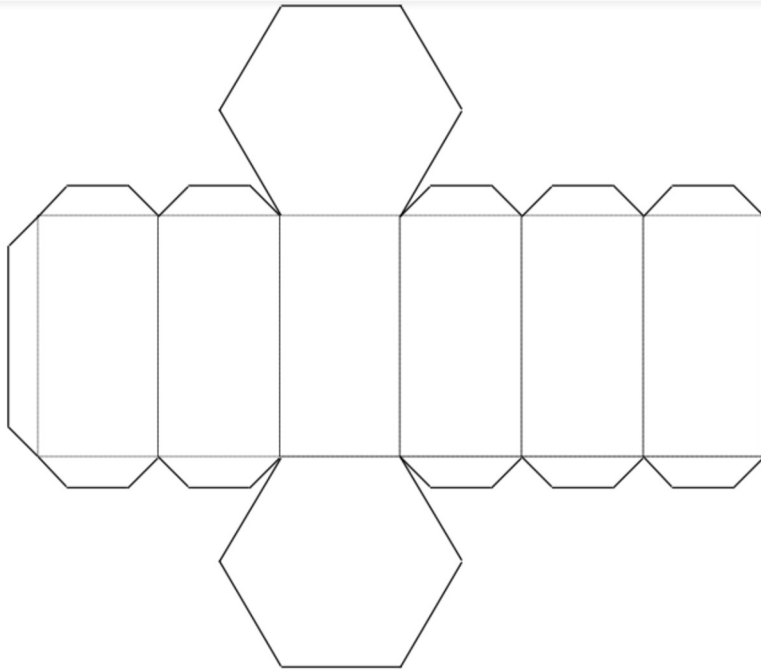
Fonte: Matemática Paiva Volume Dois

Figura 22: Prisma de Base Pentagonal



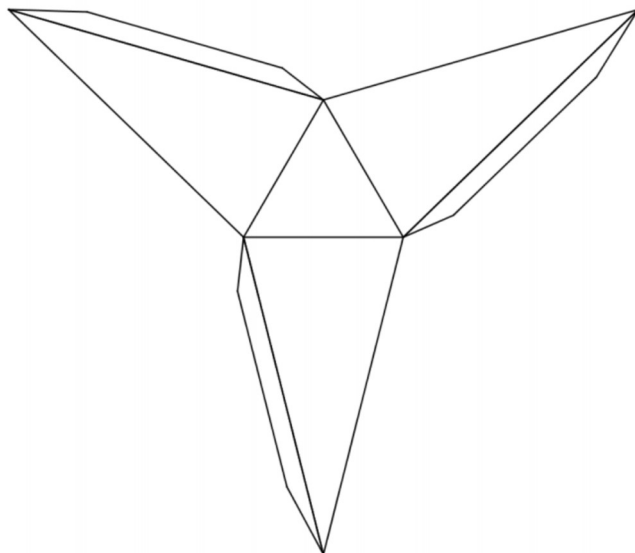
Fonte: Matemática Paiva Volume Dois

Figura 23: Prisma de Base Hexagonal



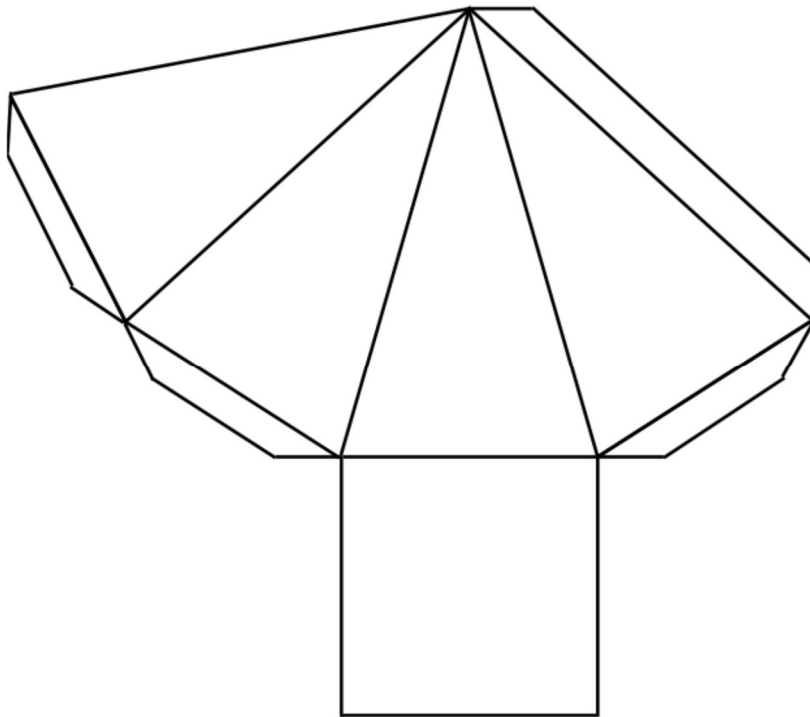
Fonte: Matemática Paiva Volume Dois

Figura 24: Pirâmide de Base Triangular



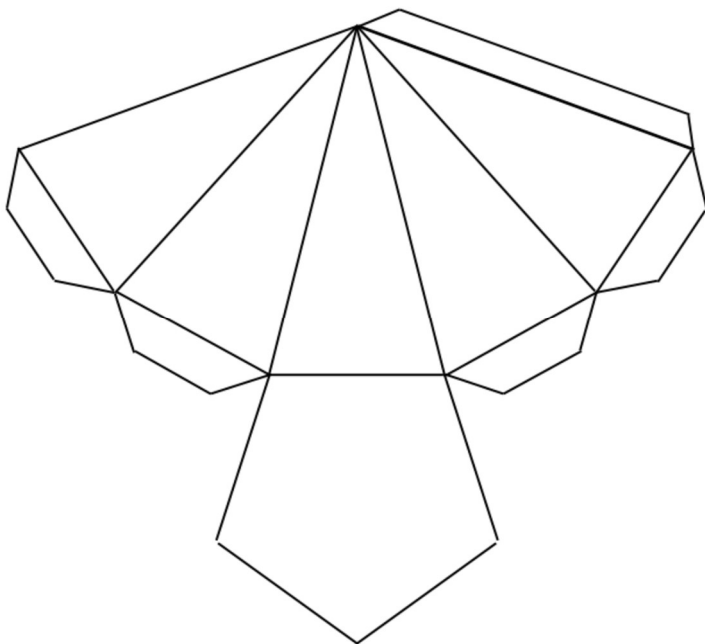
Fonte: Matemática Paiva Volume Dois

Figura 25: Pirâmide de Base Quadrada



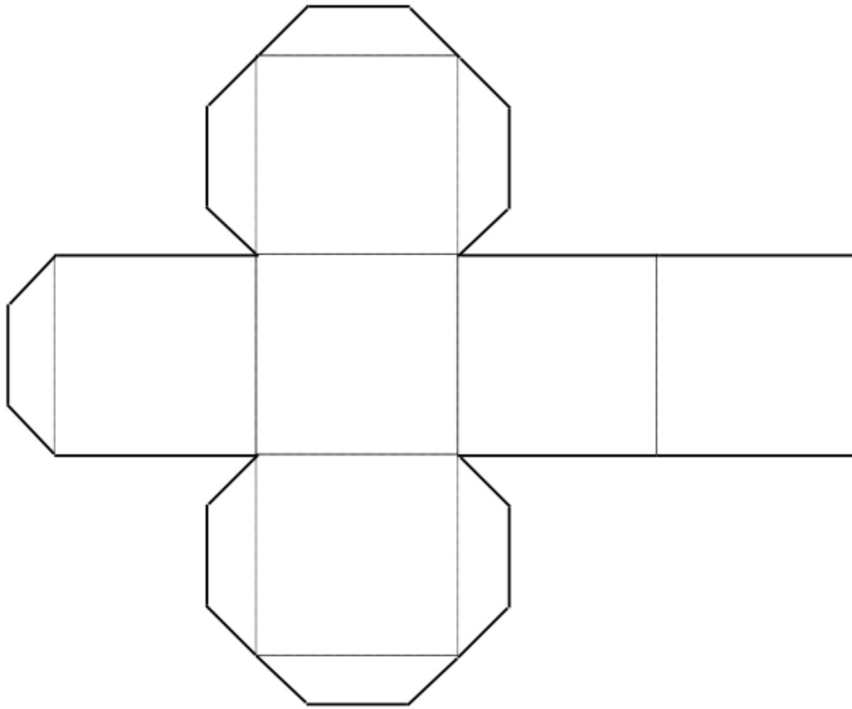
Fonte: Matemática Paiva Volume Dois

Figura 26: Pirâmide de Base Pentagonal



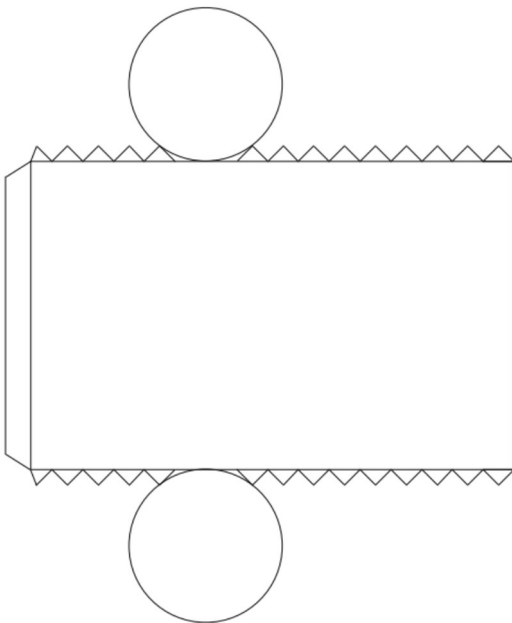
Fonte: Matemática Paiva Volume Dois

Figura 27: Pirâmide de Base Hexagonal



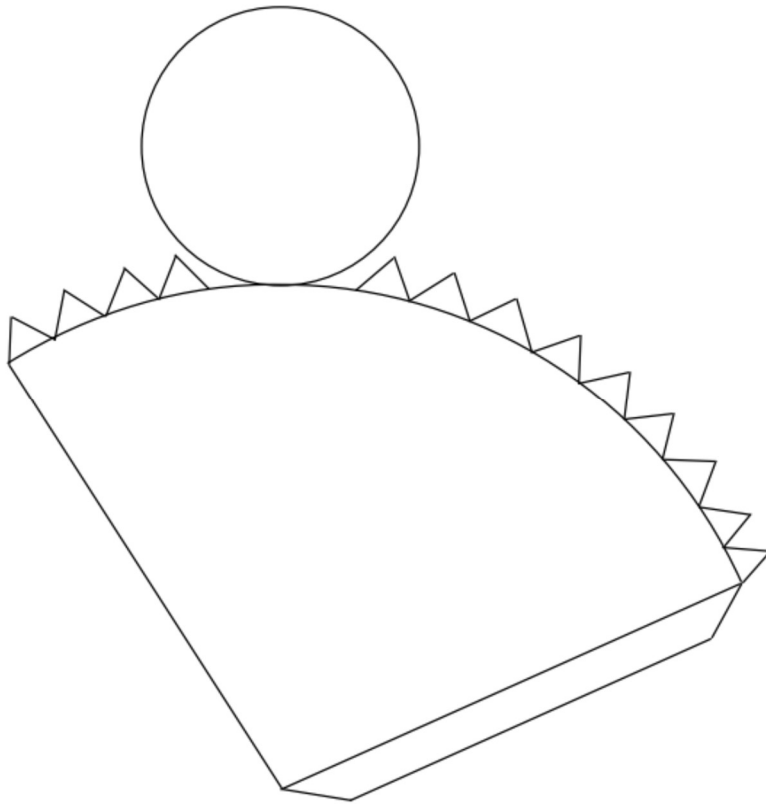
Fonte: Matemática Paiva Volume Dois

Figura 28: Cilindro



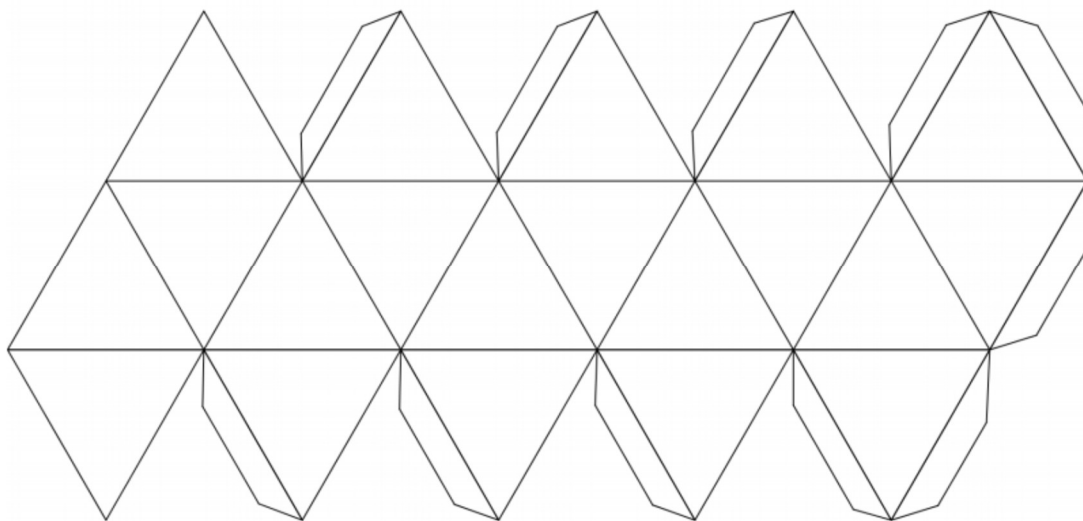
Fonte: Matemática Paiva Volume Dois

Figura 29: Cone



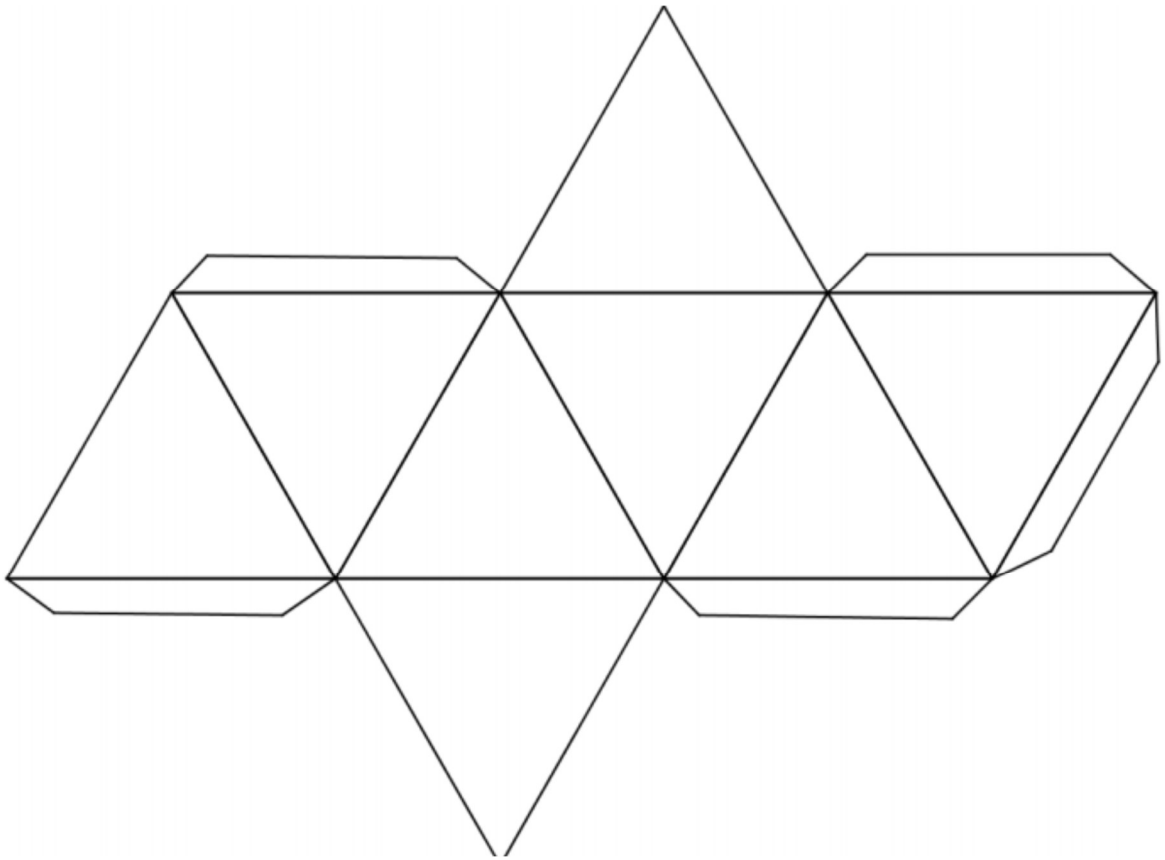
Fonte: Matemática Paiva Volume Dois

Figura 30: Icosaedro



Fonte: Matemática Paiva Volume Dois

Figura 31: Octaedro



Fonte: Matemática Paiva Volume Dois

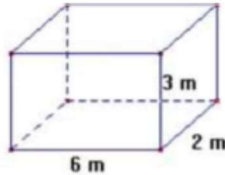
18ª Aula: Definir formalmente os modelos de planificação recorrendo a anotações no quadro negro, para reprodução dos alunos.

19ª Aula: Aplicar uma lista de exercícios com todos os temas estudados até esse momento.

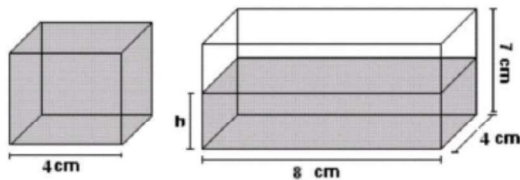
Figura 32: Exercícios de Fixação

MATEMÁTICA – 1º BIMESTRE

- 1) Calcule a área da base, a área lateral, a área total e o volume desse prisma:



- 2) Mariana dispõe de dois recipientes: um em forma de um cubo de aresta 4 cm e outro em forma de um bloco retangular de medidas 8 cm, 4 cm e 7 cm.

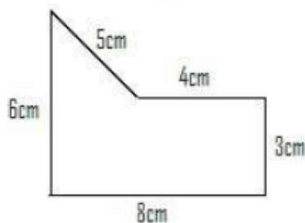


Ela encheu totalmente o recipiente cúbico com água e entornou-o no recipiente em forma de bloco retangular. A altura h atingida pela água, em cm, é igual a:

- A) 2 B) 3 C) 4 D) 7

- 3) A área da figura abaixo é:

- A) 24 cm^2 B) 30 cm^2 C) 33 cm^2
D) 36 cm^2 E) 48 cm^2



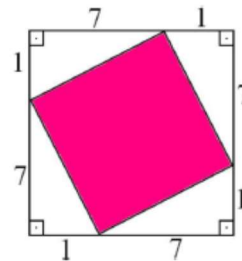
- 4) A soma das áreas dos três quadrados ao lado é igual a 83 cm^2 . Qual é a área do quadrado maior?

- A) 36 cm^2 B) 20 cm^2 C) 49 cm^2 D) 42 cm^2
E) 64 cm^2



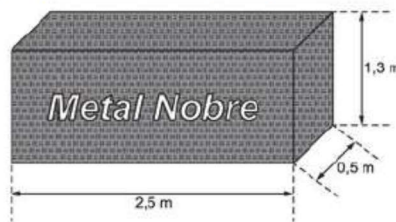
- 5) A área do quadrado sombreado é:

- a) 36
b) 40
c) 48
d) 50

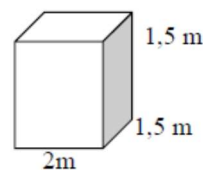


- 6) A siderúrgica “Metal Nobre” produz diversos objetos maciços utilizando o ferro. Um tipo especial de peça feita nessa companhia tem o formato de um paralelepípedo retangular, de acordo com as dimensões indicadas na figura que segue. O produto das três dimensões indicadas na peça resultaria na medida da grandeza

- A) massa. B) volume. C) superfície.
D) capacidade. E) comprimento.



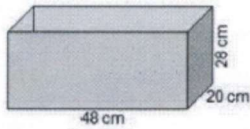
- 7) A figura abaixo representa uma caixa d’água na forma de um paralelepípedo retângulo.



A família do Sr. Pedro, que gasta $1,5 \text{ m}^3$ de água por dia, comprou uma caixa d’água. Quantos dias serão necessários para a família do Sr. Pedro gastar o volume correspondente ao da caixa acima, totalmente cheia?

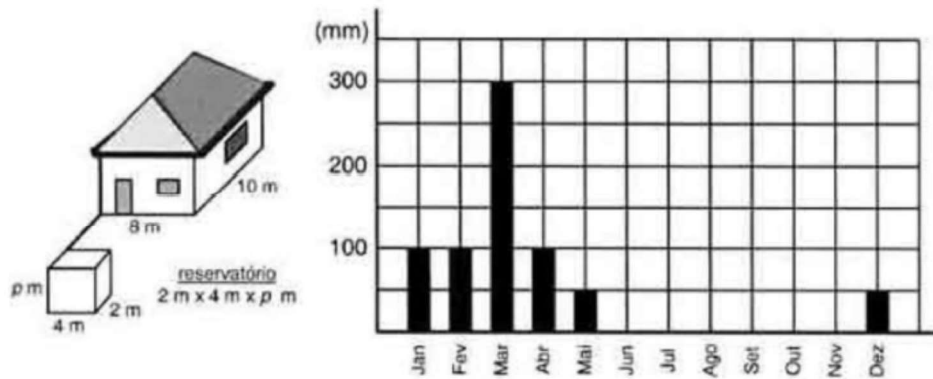
- A) 3 B) 4 C) 5 D) 64)

8) A figura representa uma caixa de papelão que tem a forma de um paralelepípedo retângulo. Dentro dessa caixa, serão guardados cubinhos de 4cm de aresta. Qual é a quantidade máxima desses cubinhos que se pode guardar dentro da caixa?



- a) 84 b) 336 c) 420 d) 6720

9) Prevenindo-se contra o período anual de seca, um agricultor pretende construir um reservatório fechado, que acumule toda a água proveniente da chuva que cair no telhado de sua casa ao longo de um período anual chuvoso. As ilustrações a seguir apresentam as dimensões da casa, a quantidade média mensal de chuva na região, em milímetros, e a forma do reservatório a ser construído.

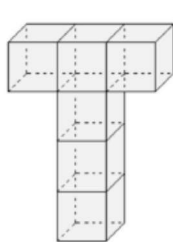


Sabendo que 100 milímetros de chuva equivalem ao acúmulo de 100 litros de água em uma superfície plana horizontal de um metro quadrado, a profundidade (p) do reservatório deverá medir:

- a) 4m b) 5m c) 6m d) 7m e) 8m

10) Um sólido no formato da letra T foi construído com 6 cubos, cujas arestas medem 2 cm. Esses cubos foram colados por algumas de suas faces como mostra a figura abaixo

Deseja-se pintar toda a superfície desse sólido de azul. A área total a ser pintada é:



- a) 48 cm²
 b) 52 cm²
 c) 104 cm²
 d) 144 cm²

11) Considere as seguintes planificações:

I	II	III	IV	V

A planificação de um cilindro está representada em

A) I
 B) II
 C) III
 D) IV
 E) V.

Respostas:

1) $S_b = 12 \text{ m}^2$, $S_L = 48 \text{ m}^2$, $S_T = 72 \text{ m}^2$ e $V = 36 \text{ m}^3$

2) a) 2

3) b) 30 cm^2

4) c) 49 m^2

5) d) 50

6) b) volume

7) a) 3

8) c) 420

9) d) 7 m

10) c) 104 cm^2

11) d) IV

20ª Aula: Continue a aplicação dos exercícios e os procedimentos de correção

21ª Aula: Levar para a sala de aula, modelos manipuláveis e figuras associadas ao círculo, circunferência e esfera; nesse ponto, fazer diferenciação sobre a nomenclatura comum e a formal matemática.

22ª Aula: Aplique o problema abaixo para cálculo do volume da esfera.

Figura 33: Problema inicial volume da esfera

Diante de um olhar curioso podemos explorar nossa imaginação, viajar por infinitos lugares, assim fazemos também com a matemática, diante disso imagine que quisesse medir a quantidade de caminhões que seriam necessários para transportar nosso planeta, conhecendo a medida da caçamba do caminhão e o raio da terra. Determine a quantidade de caminhões necessários para essa tarefa?

Dados:

Dimensões da caçamba: 4m de comprimento, 2,5m de largura e 2m de altura

Raio da Terra: 6380Km



Fonte: Foto do autor

Sugestão: Calcular o volume da esfera,

$v = \frac{4 \times 3,14 \times 6380000^3}{3} \rightarrow v \sim 26710933 \text{ m}^3$ Assim temos o volume do planeta. Agora calcula-se o volume da caçamba do caminhão $v = 4 \times 2,5 \times 2 \rightarrow v = 20 \text{ m}^3$, depois divide-se o volume do planeta pelo volume da caçamba obtendo-se assim 133555 caminhões para realizar esse desafio.

Foi utilizado para os cálculos $\pi=3,14$

23ª Aula: Adotar o princípio de Cavalieri para a demonstração do volume da esfera.

24ª Aula: Retomar o princípio de Cavalieri e o modelo que relaciona o volume da esfera com o do cilindro e cone

25ª Aula: Resolver o problema aplicado na aula anterior, usando os conceitos adquiridos.

26ª Aula: Finalizar a sequência com avaliação sobre todo o conteúdo estudado.

Figura 34: Sugestão de Avaliação de todo o conteúdo – aplicada ao 3º ano

AVALIAÇÃO DE MATEMÁTICA – 1º BIMESTRE

1) A figura, a seguir, representa três objetos em forma de cilindro.

Para calcular a área total da superfície de cada objeto, utiliza-se uma das três fórmulas:



$$A_1 = 2\pi rh + 2\pi r^2.$$

$$A_2 = 2\pi rh + \pi r^2.$$

$$A_3 = 2\pi rh.$$

Qual das correspondências seguintes está correta?

A) $A_1 \leftrightarrow N$.

B) $A_2 \leftrightarrow M$.

C) $A_3 \leftrightarrow N$.

D) $A_1 \leftrightarrow P$.

2) Qual é a medida, em cm, da diagonal do paralelepípedo retângulo de arestas 8cm, 10cm e 6cm?

A) $2\sqrt{6}$.

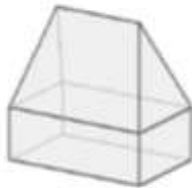
B) $2\sqrt{25}$.

C) $10\sqrt{2}$.

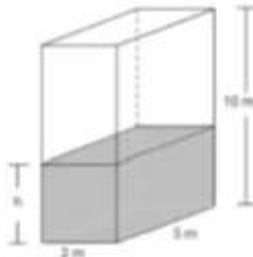
D) $4\sqrt{30}$.

3) A seguir, está representado um sólido geométrico.

O número de arestas somado ao número de faces desse sólido é igual a:



4) Um recipiente em forma de um prisma reto de base retangular está representado na figura abaixo, bem com suas medidas.



Dois outros recipientes cúbicos de arestas 2m e 3m, respectivamente, cheios de água são despejados no recipiente acima, ficando esse último com água até o nível h , em metros. (Suponha desprezíveis as espessuras dos recipientes)

O valor de h é

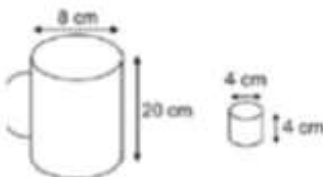
A) $\frac{7}{2}$.

B) $\frac{29}{7}$.

C) $\sqrt{35}$.

D) $\sqrt{26}$.

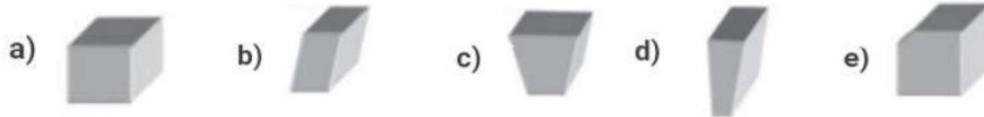
5) Dona Maria, diarista na casa da família Teixeira, precisa fazer café para servir as vinte pessoas que se encontram numa reunião na sala. Para fazer o café, Dona Maria dispõe de uma leiteira cilíndrica e copinhos plásticos, também cilíndricos.



Com o objetivo de não desperdiçar café, a diarista deseja colocar a quantidade mínima de água na leiteira para encher os vinte copinhos pela metade. Para que isso ocorra, Dona Maria deverá

- Ⓐ encher a leiteira até a metade, pois ela tem um volume 20 vezes maior que o volume do copo.
- Ⓑ encher a leiteira toda de água, pois ela tem um volume 20 vezes maior que o volume do copo.
- Ⓒ encher a leiteira toda de água, pois ela tem um volume 10 vezes maior que o volume do copo.
- Ⓓ encher duas leiteiras de água, pois ela tem um volume 10 vezes maior que o volume do copo.
- Ⓔ encher cinco leiteiras de água, pois ela tem um volume 10 vezes maior que o volume do copo.

6) Para confeccionar, em madeira, um cesto de lixo que comporá o ambiente decorativo de uma sala de aula, um marceneiro utilizará, para as faces laterais, retângulos e trapézios isósceles e, para o fundo, um quadrilátero, com os lados de mesma medida e Ângulos retos. Qual das figuras representa o formato de um cesto que possui as características estabelecidas?



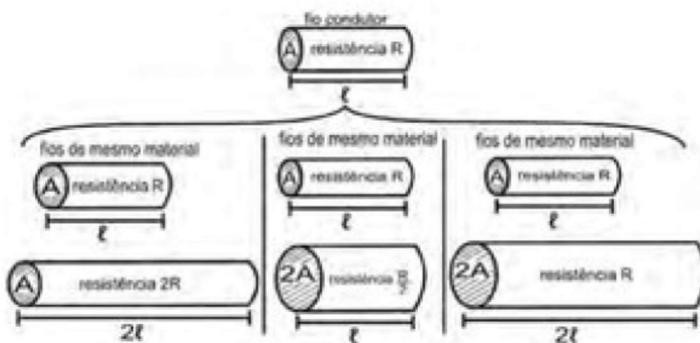
7) (ENEM) O administrador de uma cidade, implantando uma política de reutilização de materiais descartados, aproveitou milhares de tambores cilíndricos dispensados por empresas da região e montou kits com seis tambores para o abastecimento de água em casas de famílias de baixa renda, conforme a figura seguinte. Além disso, cada família envolvida com o programa irá pagar somente R\$2,50 por metro cúbico utilizado. Uma família que utilizar 12 vezes a capacidade total do kit em um mês pagará a quantia de: (considere $\pi = 3$)

a) R\$ 86,40
 b) R\$ 21,60
 c) R\$ 8,64
 d) R\$ 7,20
 e) R\$ 1,80

8) A relação da resistência elétrica com as dimensões do condutor foi estudada por um grupo de cientistas por meio de vários experimentos de eletricidade. Eles verificaram que existe proporcionalidade entre:

- Resistência (R) e comprimento (ℓ), dada a mesma secção transversal (A)
- Resistência (R) e área da secção transversal (A), dado o mesmo comprimento (ℓ)
- Área da secção transversal (A), dada a mesma resistência (R).

Considerando os resistores como fios, pode-se exemplificar o estudo das grandezas que influem na resistência elétrica utilizando as figuras seguintes



As figuras mostram que as proporcionalidades existentes entre resistência (R) e comprimento (ℓ), resistência (R) e área da secção transversal (A), e entre comprimento (ℓ) e área da secção transversal (A) são, respectivamente,

- A) direta, direta e direta. B) direta, direta e inversa.
 C) direta, inversa e direta. D) inversa, direta e direta. E) inversa, direta e inversa.

Respostas

1) b) $A_2 \leftrightarrow M$

2) c) $10\sqrt{2}$

3) 26

4) a) $\frac{7}{2}$

5) a) Encher a leiteira até a metade, pois ela tem um volume 20 vezes maior que o volume do copo

6) c)



7) b) R\$ 21,60

8) c) direta, inversa e direta

