UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

MAX MAIA ATTANASIO VOSS PONTES

JOGOS: UMA ABORDAGEM MATEMÁTICA

FORTALEZA
2018

MAX MAIA ATTANASIO VOSS PONTES

JOGOS: UMA ABORDAGEM MATEMÁTICA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática em Rede Nacional do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Frederico Vale Girão.

FORTALEZA

2018

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca Universitária
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

P859j Pontes, Max Maia Attanásio Voss.
Jogos: Uma abordagem matemática / Max Maia Attanásio Voss Pontes. – 2018.
50 f. : il. color.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Departamento de Matemática, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, Fortaleza, 2018.
Orientação: Prof. Dr. Frederico Vale Girão.

1. Jogo de Nim. 2. Resta Um. 3. Rã Saltadora. 4. Jogo de Wythoff. I. Título.

CDD 510

MAX MAIA ATTANÁSIO VOSS PONTES

JOGOS: UMA ABORDAGEM MATEMÁTICA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática em Rede Nacional do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Aprovada em: 31 / 10 / 2018.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Frederico Vale Girão (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Profª. Dra. Fernanda Ester Camillo Camargo
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Joserlan Perote da Silva
Universidade da Integração Internacional
da Lusofonia Afro-Brasileira (Unilab)

Aos meus pais, aos meus filhos e à minha esposa.

AGRADECIMENTOS

Esse curso começou em Maio de 2016 e já decorrem cerca de 2 anos e 6 meses. Nesse ínterim, ocorreu, concomitante a esse curso, o nascimento de minha filha e parte da gestação de meu outro filho. Foi um período muito laborioso mas também muito mágico, em que tive muita ajuda de Eugenia Santos, a quem agradeço toda a ajuda na vida de minha família, principalmente, na vida de minha filha. Agradeço também o auxílio de minha amiga, colega de trabalho e chefe, Isabela Sancho. Agradeço a meus pais por todo o apoio em minha vida; eles possuem uma contribuição nessa conquista. Agradeço à minha esposa, Renata Bezerra, por me dar muita força nos momentos mais difíceis de minha vida e por não ter me deixado desistir. Obrigado a todos os professores e colegas de mestrado que contribuíram com seus ensinamentos durante o curso, precipuamente, ao Prof. Dr. Frederico Girão, pela excelente orientação. Obrigado a Deus por tudo.

"O trabalho poupa-nos de três grandes males: tédio, vício e necessidade." (VOLTAIRE)

Se tu fizeste melhor do que tu mesmo, então atingiste o sucesso.

RESUMO

Desde a antiguidade, os jogos estão presentes em diversas civilizações, sendo a diversidade dos tipos de jogos incalculável. Essa dissertação aborda quatro jogos matemáticos, a saber: Jogo de Nim, Resta Um, Rã Saltadora e Jogo de Wythoff. É feita uma abordagem histórica, exemplificativa e ilustrativa. Logo em seguida, é mostrado, com o rigor matemático, como funciona o algoritmo vencedor de cada jogo. A utilização desses jogos, como uma ferramenta complementar, para o ensino de conteúdos matemáticos, proporciona resultados promissores para a aprendizagem.

Palavras-chave: Jogo de Nim. Jogo de Wythoff. Rã Saltadora. Resta Um.

ABSTRACT

Since a long time ago, games are a part of inumerous civilizations, with their diversity being unmeasurable. This dissertation discusses four mathematical games, namely: Game of Nim, Peg Solitaire, Conway's Soldiers and Wythoff's Game. A historical, exemplary and illustrative approach is taken. Soon after, it is shown, with mathematical rigor, how the winning algorithm of each game works. The use of these games, as a complementary tool, for the teaching of mathematical contents, provides promising results on learning.

Keywords: The Game of Nim. Wythoff's Game. Conway's Soldiers. Peg Solitaire.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A palavra jogo vem da etimologia do latim ludus, que se refere a divertimento, recreação. Jogos estão presentes desde a antiguidade e nos revelam as características culturais e econômicas das sociedades que os desenvolveram, como podemos ver no texto da professora Maria Angela Barbato Carneiro (2014)

> Ao conquistarem a Grécia, os romanos incorporaram sua cultura, assimilando algumas práticas lúdicas como bonecos, utensílios domésticos de barro, labirintos e até mesmo jogos de tabuleiro. Muitos brinquedos foram elaborados a partir de elementos da natureza, como folhas e frutos, com os quais faziam bonecos, animais e outros utensílios usados nas práticas cotidianas. Um dos exemplos mais interessantes foi encontrado em pisos de casas romanas confeccionado por mosaicos, formando desenhos de labirintos para entreter as crianças. Talvez a atividade lúdica mais conhecida tenha sido o Jogo das Pedrinhas, ou Cinco Marias, chamado de astrágalo, nome atribuído aos ossos das patas dos carneiros, que, por serem quadrados, auxiliavam as jogadas. [Maria Angela Barbato Carneiro é professora titular e coordenadora do Núcleo de Estudos do Brincar da PUC-SP,"A magnífica história dos jogos", site Carta Educação da Carta Capital].

O interesse pelo tema relativo a jogos surgiu quando percebi que os jogos despertam o interesse das pessoas para o aprendizado da matemática, ocasião na qual o conteúdo matemático pode ser explanado de forma mais natural, sem parecer uma obrigação em aprender conteúdos desnecessários. Os jogos possuem um papel fulcral no ensino de conteúdos, propiciando uma aprendizagem de forma lúdica e inconsciente. Na matemática, essa ferramenta é muito importante para o desenvolvimento de diversos conteúdos, precipuamente, naqueles abstratos e/ou complexos. Em face disso, resolvi pesquisar e elaborar um estudo para a comunidade científica, para os colegas de magistério que lecionam matemática e também para os amantes no assunto. Trata-se de uma abordagem em quatro jogos, a saber: Jogo de Nim, Resta Um, Rã Saltadora e Jogo de Wythoff, onde trazemos o funcionamento, o algoritmo vencedor e a explicação matemática que propicia a obtenção da vitória. Temos como propósito mostrar a matemática com uma linguagem simples e clara, despertando o interesse de todos os leitores pela mesma.

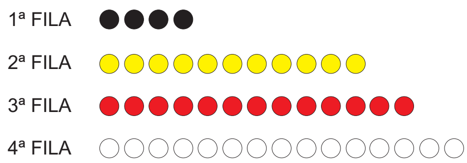
2 JOGO DE NIM

Segundo COSTA(2016, p. 12), o Nim é jogado desde a antiguidade, com provável origem na China, onde existe o jogo *Tsuan-Shizi* - que significa os que "escolhem pedras" - semelhante ao Nim. Existe, ainda, a possibilidade de ter origem inglesa ou alemã, pois Nim em inglês significa "apanhar" e nimm em alemão é "tomar". Foi nomeado, em 1901, por Charles Bouton [1] em um artigo denominado "Nim, A Game with a Complete Mathematical Theory" (1901, p.33-39) a respeito da teoria dos jogos. É jogado por dois jogadores e consiste em retirar elementos - palitos, moedas, sementes, etc - alternadamente. Cada jogador, na sua vez, escolhe uma fila e retira pelo menos uma peça. Vence o jogo aquele que retirar o último elemento. Vejamos no exemplo ulterior como o jogo se sucede.

2.1 Exemplo

Podemos escolher quantas filas desejarmos bem como quantos elementos em cada fila. Façamos, por exemplo, quatro filas com 4, 11, 13 e 15 na 1ª, 2ª, 3ª e 4ª filas, respectivamente, conforme a figura 1.

Figura 1 – Um exemplo de jogo de Nim.



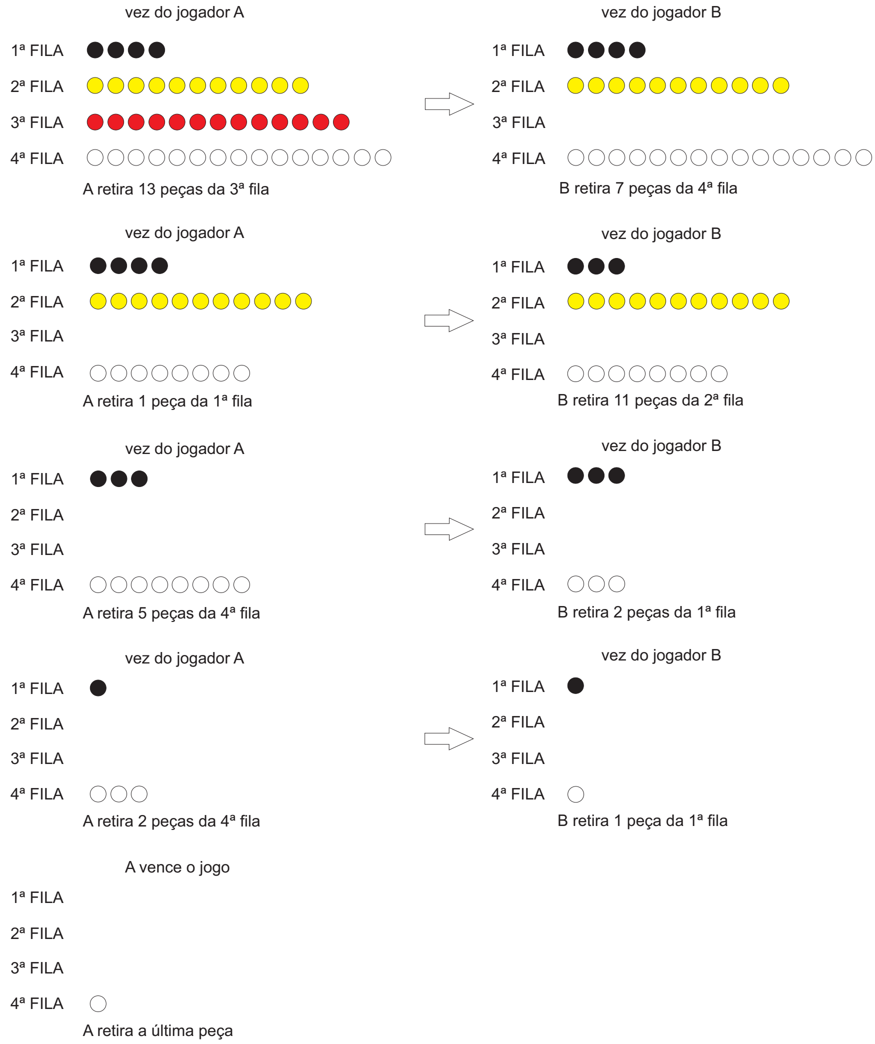
Fonte: Próprio autor.

Vamos ver um exemplo de como o jogo funciona. Para isso, denominemos dois jogadores de A e B e vejamos o passo-a-passo na figura 2. Atente que à esquerda estão os movimentos de A e à direita os de B.

Aproveitando esse exemplo, vejamos a estratégia vencedora para o jogo de Nim. Mas antes, definamos os conceitos de configuração segura e configuração insegura, que são importantes para o entendimento matemático do jogo. Configuração segura é aquela que possui número par de potências de 2 em todas as colunas. Já configuração insegura é aquela que possui pelo menos uma coluna com número ímpar de potências. Voltemos à explicação. Temos os jogadores A - o primeiro a jogar e que sabe a estratégia da vitória - e B - o último a jogar e novato no jogo. O jogador A começa mentalmente transformando o número de elementos em cada fila como soma de potências de 2. Observe que $4 = 2^2$; $11 = 2^3 + 2^1 + 2^0$; $13 = 2^3 + 2^2 + 2^0$; $15 = 2^3 + 2^2 + 2^1 + 2^0$. O segundo passo mental de A é formar grupos por potências de 2, tais como na figura 3.

[1]Charles Leonard Bouton, matemático estadunidense nascido em 1869.

Figura 2 – Passo-a-passo do jogo entre os jogadores A e B.



Fonte: Próprio autor.

Perceba que temos 3 elementos no grupo de potências de 2^3, 3 elementos no grupo de potências de 2^2, 2 elementos no grupo de 2^1 e 3 elementos no grupo de 2^0. Como aludido acima, temos uma configuração insegura, pois temos pelo menos uma, no caso três, coluna com uma quantidade ímpar potências de 2.

O terceiro passo mental para o jogador A será sempre escolher a primeira coluna de potências, da esquerda para a direita, que possua quantidade de potências ímpar. Neste exemplo, A escolhe a coluna de potências de 2^3. O próximo passo da estratégia vencedora para A é fazer com que todas as colunas de potências fiquem com número par de elementos, ou seja, atinja uma configuração segura. Para isso, ele pode retirar uma potência 2^3, uma potência 2^2 e uma potência 2^0 da 3ª fila, ou seja, ele irá retirar toda a 3ª fila, que contém 13 elementos. O jogador A atingiu seu objetivo, nessa rodada, pois cada coluna de potências possui número par. Vejamos, na figura 4, como ficou a situação após a jogada. Observe que há duas potências em cada coluna.

Agora é a vez de B. Qualquer retirada que ele fizer deixará pelo menos um

Figura 3 – Formação de grupos de potências de 2.

	1ª COLUNA	2ª COLUNA	3ª COLUNA	4ª COLUNA
1ª FILA		2^2		
2ª FILA	2^3		2^1	2^0
3ª FILA	2^3	2^2		2^0
4ª FILA	2^3	2^2	2^1	2^0

Fonte: Próprio autor.

Figura 4 – Retirou-se potências da 3ª fila para que cada coluna ficasse com número par e atingisse uma configuração segura.

	1ª COLUNA	2ª COLUNA	3ª COLUNA	4ª COLUNA
1ª FILA		2^2		
2ª FILA	2^3		2^1	2^0
3ª FILA				
4ª FILA	2^3	2^2	2^1	2^0

Fonte: Próprio autor.

grupo de potências ímpar. Isso se deve ao fato de qualquer número inteiro positivo poder ser decomposto, de forma única, em soma de potências de 2. Portanto, serão retirados elementos dos grupos que fizemos. Por exemplo, B retira 7 palitos da 4ª fila.

Figura 5 – Jogador B retira 7 peças da 4ª fila e entrega ao jogador A uma configuração insegura.

	1ª COLUNA	2ª COLUNA	3ª COLUNA	4ª COLUNA
1ª FILA		2^2		
2ª FILA	2^3		2^1	2^0
3ª FILA				
4ª FILA	2^3			

Fonte: Próprio autor.

Novamente, A fará uma jogada para deixar as colunas com número de elementos par. Olhando para a figura 5, percebe-se que a primeira coluna, da esquerda para a direita, que possui número ímpar de elementos é a 2ª. Logo decompõe-se $2^2 = 2^1 + 2^0 + 1$ e, por conseguinte, preenche-se a 3ª e 4ª colunas com 2^1 e 2^0, respectivamente, retirando-se apenas uma peça da primeira fila, veja na figura 6.

Então B, arbitrariamente, retira os onze elementos da 2ª fila, tornando ímpar as três colunas de potências e novamente torna a situação uma configuração insegura

Figura 6 – A primeira coluna com número ímpar de elementos é a 2ª. Por isso, foi decomposta a potência 2^2 da 1ª linha em 2^1, 2^0 e 1. Retirou-se uma peça.

	1ª COLUNA	2ª COLUNA	3ª COLUNA	4ª COLUNA
1ª FILA			2^1	2^0
2ª FILA	2^3		2^1	2^0
3ª FILA				
4ª FILA	2^3			

Fonte: Próprio autor.

(figura 7).

Figura 7 – B retira todos os elementos da 2ª fila.

	1ª COLUNA	2ª COLUNA	3ª COLUNA	4ª COLUNA
1ª FILA			2^1	2^0
2ª FILA				
3ª FILA				
4ª FILA	2^3			

Fonte: Próprio autor.

Você já sabe: A seguirá o mesmo algoritmo. Temos $2^3 = 2^2 + 2^1 + 2^0 + 1$. Com isso, ele torna par a 3ª e 4ª colunas e elimina 5 peças da 4ª fila (figura 8).

Figura 8 – 2^3 foi decomposto em 2^2, 2^1, 2^0 e 1. Retira 5 peças e obtém uma configuração segura.

	1ª COLUNA	2ª COLUNA	3ª COLUNA	4ª COLUNA
1ª FILA			2^1	2^0
2ª FILA				
3ª FILA				
4ª FILA			2^1	2^0

Fonte: Próprio autor.

Nesse momento, B já percebe que perderá, pois, se ele retirar todos os elementos de uma fila, A retirará todos da outra e ganhará. Todavia, se ele não o fizer, A fará o mesmo algoritmo e a situação se repetirá. Observe, que se B retira 2 elementos da 1ª fila, então A retira 2 elementos da 4ª fila (figura 9).

Jogo encerrado, pois B retira $1 = 2^0$ de quaisquer das filas e então A ganha.

Figura 9 – É a vez do jogador B que nada poderá fazer para ganhar.

	1ª COLUNA	2ª COLUNA	3ª COLUNA	4ª COLUNA
1ª FILA				2^0
2ª FILA				
3ª FILA				
4ª FILA				2^0

Fonte: Próprio autor.

2.2 Construção da estratégia vencedora

Esse exemplo ilustrou o funcionamento do jogo. Entretanto, precisamos verificar que, para todas as situações, essa estratégia vencedora é eficaz. Diante do exposto no exemplo anterior, vamos resumir em dois passos o algoritmo de resolução:

1º Passo) Devemos olhar para a coluna mais à esquerda com um número ímpar de casas ocupadas e escolher uma linha cuja casa desta coluna esteja ocupada;

2º Passo) Iremos caminhar da esquerda para a direita. Considere uma casa da linha escolhida no 1º passo. Se a coluna desta casa tem um número par de casas ocupadas, então nada se faz nesta casa. Por outro lado, se a coluna desta casa tem um número ímpar de casas ocupadas, acrescente peças nesta casa se ela estiver vazia. Ou retire as peças desta casa se ela estiver ocupada. A relação $2^n - 1 = 2^{n-1} + 2^{n-2} + ... + 2^2 + 2^1 + 2^0$, com n natural, garante que o segundo passo sempre pode ser realizado, desde que recebamos do outro jogador uma configuração insegura.

Com esse algoritmo, fica certo que uma configuração insegura será transformada em uma configuração segura. Por outro lado, uma configuração segura é sempre transformada em uma configuração insegura, independentemente da jogada realizada, pois (exatamente) uma das casas de (pelo menos) uma das colunas será removida.

Vejamos um outro exemplo para mostrarmos o funcionamento do algoritmo. Seja o seguinte jogo entre os jogadores A e B, onde começa-se com a configuração insegura e o primeiro jogador sabe a estratégia vencedora. Sejam três pilhas que possuem, respectivamente, 29, 25 e 15 peças, como na figura 10.

Figura 10 – Configuração inicial.

	1ª COLUNA	2ª COLUNA	3ª COLUNA	4ª COLUNA	5ª COLUNA
1ª FILA	2^4	2^3	2^2		2^0
2ª FILA	2^4	2^3			2^0
3ª FILA		2^3	2^2	2^1	2^0

Fonte: Próprio autor.

Pelo 1º Passo do algoritmo, escolhemos a segunda coluna que contém um número ímpar de casas ocupadas e escolhemos a segunda fila (perceba que poderíamos ter escolhido quaisquer das filas, pois todas possuem a casa ocupada na 2ª coluna). Agora percorremos na segunda fila as colunas da esquerda para a direita. A terceira coluna possui número par de casas ocupadas e, pelo 2º passo, nada se faz. Passamos à quarta coluna. Esta possui número ímpar de casas ocupadas e como a casa na segunda fila com a quarta coluna está vazia, então, de acordo com o 2º passo do algoritmo, devemos preenchê-la. Fazemos isso decompondo o número 2^3, de forma única, do seguinte modo: $2^3 - 1 = 2^2 + 2^1 + 2^0$. Portanto, preenchemos a casa da segunda linha e quarta coluna com o número 2^1 que está no segundo membro da aludida relação. Prosseguimos para a quinta coluna, a qual possui número ímpar de casas ocupadas. Retiramos, pois, o número 2^0 de peças. O jogador A, portanto, retirou sete peças, vejamos na figura 11.

Figura 11 – Configuração segura após a jogada de A.

	1ª COLUNA	2ª COLUNA	3ª COLUNA	4ª COLUNA	5ª COLUNA
1ª FILA	2^4	2^3	2^2		2^0
2ª FILA	2^4			2^1	
3ª FILA		2^3	2^2	2^1	2^0

Fonte: Próprio autor.

Agora B retira todas as quinze peças da terceira fila, figura 12.

Figura 12 – Retirada de quinze peças da terceira fila.

	1ª COLUNA	2ª COLUNA	3ª COLUNA	4ª COLUNA	5ª COLUNA
1ª FILA	2^4	2^3	2^2		2^0
2ª FILA	2^4			2^1	

Fonte: Próprio autor.

O jogador B entrega uma configuração insegura ao jogador A que aplica o algoritmo vencedor. O jogador A vai para a segunda coluna e escolhe a primeira fila. Aplicando o 2º passo do algoritmo na terceira coluna, ele retira o número de peças 2^2. Logo em seguida, na quarta coluna ele precisará acrescentar 2^1 peças e fará isso mediante a decomposição do elemento $2^3 - 1 = 2^2 + 2^1$. Na quinta coluna, como há um número ímpar de casas ocupadas e a casa dessa coluna com a primeira linha está ocupada, retira-se as 2^0 peças. Ao todo o jogador A retirou onze peças. Segue figura 13.

Agora é a vez de B. Ele retira dezesseis peças da primeira fila e novamente desfaz a configuração segura.

Aplicando o 1º Passo do algoritmo, o jogador A dirige-se à primeira coluna, escolhe a segunda fila e retira 2^4 peças, deixando uma configuração segura. A essa altura o

Figura 13 – A retira onze peças da primeira fila.

	1ª COLUNA	2ª COLUNA	3ª COLUNA	4ª COLUNA	5ª COLUNA
1ª FILA	2^4			2^1	
2ª FILA	2^4			2^1	

Fonte: Próprio autor.

Figura 14 – B retira dezesseis peças da primeira fila.

	1ª COLUNA	2ª COLUNA	3ª COLUNA	4ª COLUNA	5ª COLUNA
1ª FILA				2^1	
2ª FILA	2^4			2^1	

Fonte: Próprio autor.

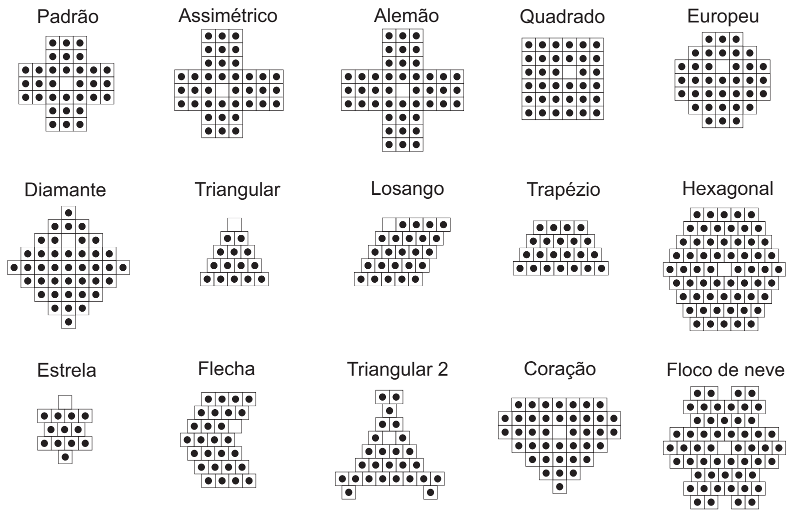
jogador B percebe que já perdeu pois só restará retirar duas peças da primeira ou segunda fila e, posteriormente, o jogador A vencerá ao retirar as 2^1 peças restantes.

Em síntese, aquele que receber uma configuração segura a desmanchará e aquele que receber uma configuração insegura, se souber da estratégia vencedora, sempre devolverá uma configuração segura. Diante do exposto, podemos concluir que se a configuração inicial for segura, o segundo jogador, se souber a estratégia vencedora, ganhará o jogo. Por outro lado, se a configuração inicial for insegura, o primeiro jogador, se souber a estratégia vencedora, entregará rodada a rodada uma configuração segura e ganhará o jogo.

3 RESTA UM

A origem desse jogo é incerta. Segundo Scussel(2010), existem duas histórias conhecidas. Uma remete ao poeta Ovídio, [1], que citava em seus escritos a existência de um jogo para uma só pessoa em que se usava um tabuleiro com concavidades e pequenas bolas. Já a outra fonte refere-se a um nobre francês do século XVIII, denominado Pellison, que fora encarcerado pelo rei Luis XIV na Bastilha. Possui uma variação de nomes dependendo da região, segundo George(2006) nos Estados Unidos é conhecido como "Peg Solitaire" e, na Inglaterra, é denominado "Solitaire". Já na Índia o nome é "Brainvita". Ainda possui outro nome: "Hi-Q". E não é só no nome que possui variações, o jogo apresenta versões diferentes na movimentação das peças, que pode ser na vertical, horizontal e/ou diagonal, e também diversos tabuleiros (figura 15).

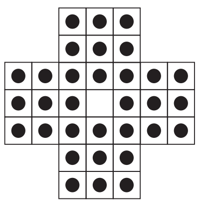
Figura 15 – Diferentes tipos de tabuleiro para o jogo.



Fonte: Próprio autor.

Todavia, aquela que vamos estudar é a versão clássica e mais conhecida. Ela consiste em um tabuleiro com 33 pequenos orifícios formando o desenho de uma cruz, tabuleiro padrão também denominado tabuleiro inglês, todos preenchidos com peças exceto o orifício central como mostrado na figura 16.

Figura 16 – Tabuleiro padrão ou inglês.

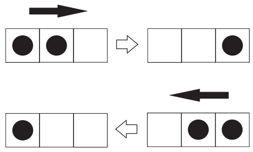


Fonte: Próprio autor.

[1]Públio Ovídio Naso, poeta romano que viveu de 43 a.C a 17 d.C

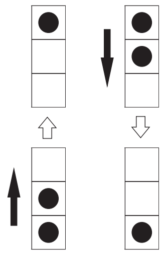
A movimentação das peças é lateral ou vertical em que uma peça "pula" (em linguagem popular fala-se "come") a outra na direção de um espaço vazio, conforme as figuras 17 e 18.

Figura 17 – Movimentos na horizontal



Fonte: Próprio autor.

Figura 18 – Movimentos na vertical.



Fonte: Próprio autor.

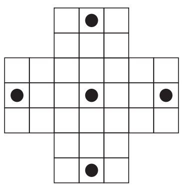
3.1 Exemplo

Há diversas formas de deixar uma única peça no tabuleiro. Podemos ver duas soluções conforme figuras no Anexo I deste trabalho. Atente que a peça verde "comerá" a amarela.

3.2 Construção da estratégia vencedora

Perceba que podemos resolver o jogo à revelia de uma explicação matemática. Entretanto, nosso objetivo é explicitar a lógica de podermos concluir o jogo em determinadas casas e em outras não. Se jogarmos o jogo clássico que começa com 32 peças, e sendo a única casa vazia, a central, poderemos terminar o jogo, com uma peça, nas cinco seguintes posições, apenas, veja a figura 19:

Figura 19 – As cinco posições possíveis de término do jogo resta um.



Fonte: Próprio autor.

Para provarmos essa afirmação, usaremos o grupo de Klein[1]. Trata-se de um grupo comutativo de quatro elementos a que chamaremos $x, y, z, 1$ em que $xy = z$, $xz = y$, $yz = x$ e $x^2 = y^2 = z^2 = 1$. Segue quadro representativo na figura 20:

Figura 20 – Tabela contendo o grupo de Klein.

	1	**x**	**y**	**z**
1	1	x	y	z
x	x	1	z	y
y	y	z	1	x
z	z	y	x	1

Fonte: Próprio autor.

Diante do exposto, podemos preencher o tabuleiro, com os elementos do grupo de Klein, da seguinte forma (figura 21):

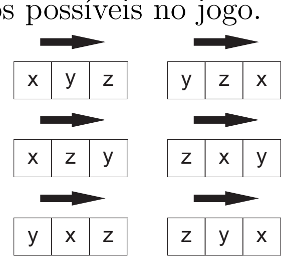
Figura 21 – Tabuleiro de Resta Um preenchido pelos elementos do Grupo de Klein.

		x	y	z		
		y	z	x		
x	y	z	x	y	z	x
y	z	x	y	z	x	y
z	x	y	z	x	y	z
		z	x	y		
		x	y	z		

Fonte: Próprio autor.

Veja que o produto dos elementos das casas ocupadas por peças é y, pois temos dez trios ocupados contendo x, y, z e $x.y.z = 1$. Sobrando no centro um trio contendo as casas x e z ocupadas e então $x.z = y$. Em adição a isso, vejamos que os movimentos possíveis são os discriminados na figura 22:

Figura 22 – Movimentos possíveis no jogo.



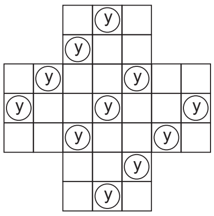
Fonte: Próprio autor.

Veja que, em quaisquer dos movimentos possíveis, o produto do elemento do primeiro quadrado com o elemento do segundo quadrado da figura 22 resulta no elemento do terceiro quadrado. Logo, as movimentações do jogo mantêm invariante o produto dos

[1]Felix Christian Klein, matemático alemão nascido em 1849.

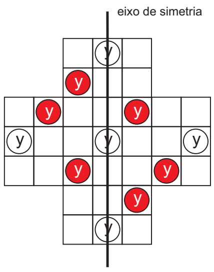
elementos das casas ocupadas. Diante do exposto, como o produto inicial é y e, ao final de cada jogada, continuará sendo y. Por conseguinte, vemos que as únicas possibilidades de término são aquelas que possuem y do grupo de Klein, figura 23. Todavia, se traçarmos o eixo de simetria, então temos que, por simetria dos movimentos, não poderemos terminar o jogo nas posições marcadas de vermelho da figura 24.

Figura 23 – Possibilidades de término já que os produtos resultam sempre em y.



Fonte: Próprio autor.

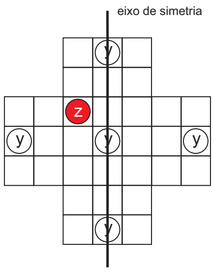
Figura 24 – Com o eixo de simetria algumas posições não são possíveis.



Fonte: Próprio autor.

Por exemplo, se a peça terminar na posição da figura 25 ela também poderia encerrar na posição simétrica da figura 26 (para isso, basta inverter o sentido dos movimentos horizontais). Entretanto, a posição da figura 25 é z e, como vimos, a invariância deve manter-se com o valor do produto igual a y.

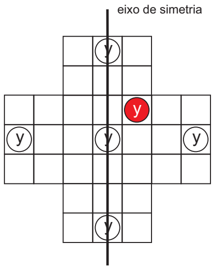
Figura 25 – Posição z.



Fonte: Próprio autor.

Portanto, o fim do jogo só pode ocorrer nas posições da figura 19.

Figura 26 – Posição simétrica à da figura 25, porém a posição é y.



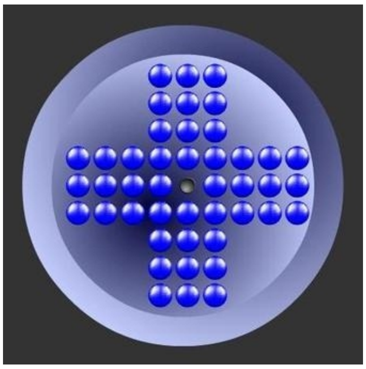
Fonte: Próprio autor.

3.3 Aplicações do jogo em problemas matemáticos

Outrossim, vale salientar que a explicação que foi dada para o tabuleiro padrão pode ser utilizada caso nos deparemos com um tabuleiro diferente como é o do problema abaixo [1], que utiliza o tabuleiro alemão, vejamos:

O clássico jogo do resta um é jogado em um tabuleiro formado por 5 quadrados 3x3, colocados um acima do outro em forma de cruz, como na figura, com a casa central sem peças, e as restantes com peças. Determine em quais casas podemos terminar o jogo do resta um.

Figura 27



Fonte: http://amatematicapura.blogspot.com.br/2012/08/.

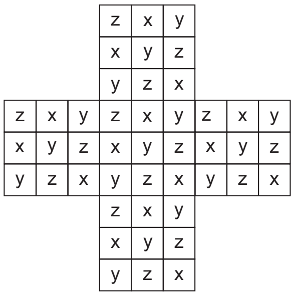
Solução: O problema trata de Resta Um utilizando o tabuleiro Alemão. A solução é análoga àquela que já explanamos anteriormente para o tabuleiro padrão. Basta fazer o desenho da figura 28 e observar que vai terminar nas casas contendo y e por simetria teremos que os lugares são aqueles da figura 19.

Outras aparições interessantes para o assunto do jogo Resta Um é em questões de olimpíadas, conforme os problemas abaixo. O primeiro [2] da Olimpíada Brasileira de

[1] O problema pode ser encontrado no sítio na web http://amatematicapura.blogspot.com.br/2012/08/.

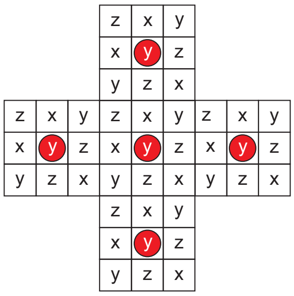
[2] Localizamos esse problema no livro Crux Mathematicorum, publicado pela Sociedade Canadense de Matemática.

Figura 28 – Configuração semelhante à do tabuleiro padrão.



Fonte: Próprio autor.

Figura 29 – Posições possíveis de conclusão do jogo.

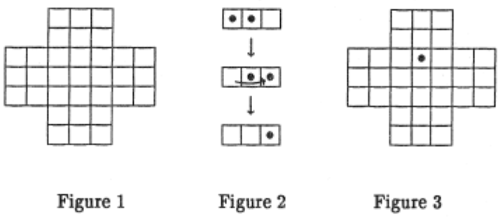


Fonte: Próprio autor.

Matemática (OBM) e o segundo da Olimpíada Internacional de Matemática (IMO):

6ª OBM - Olimpíada Brasileira de Matemática - 1984 - A figura 1 mostra o tabuleiro usado no jogo chamado "Resta Um". O jogo inicia com uma peça em cada quadrado do tabuleiro exceto no quadrinho central no qual não há peça. Seja A, B, C (ou C, B, A) três quadrinhos vizinhos em linha horizontal ou coluna vertical. Se A e B estão ocupadas e C não, então a peça em A pode ser pulada para C e a peça em B removida(veja figura 2). É possível concluir o jogo com uma peça na posição mostrada na figura 3?

Figura 30 – Problema da OBM do ano 1984.



Fonte: Próprio autor.

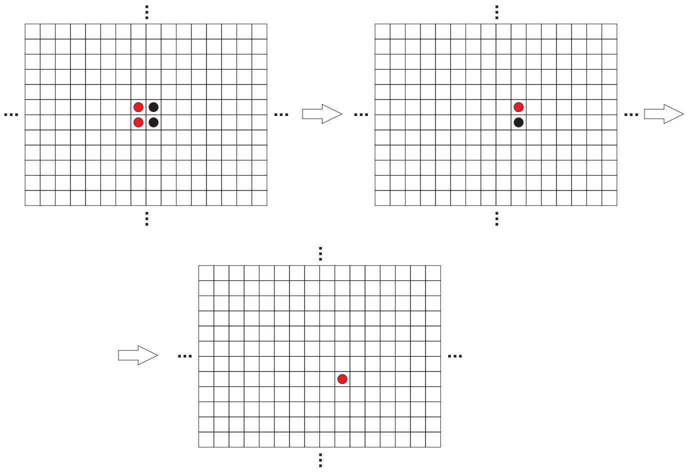
Solução: Esse problema é um caso particular do que já mostramos acima, pois trata-se de uma posição que não é uma daquelas cinco possíveis, que constam na figura 19.

IMO - International Mathematics Olympiad - 1993 - Em um tabuleiro infinito, um jogo é jogado como segue. No ínicio, n^2 peças estão arranjadas em um bloco de n por

n quadrados contíguos, em que uma peça está em cada quadrado. Um movimento do jogo é o pulo, na direção horizontal ou vertical, sobre um quadradinho adjacente ocupado para um quadradinho não ocupado que está imediatamente após ao que está ocupado. A peça que foi pulada é retirada. Encontre os valores de n para os quais o jogo pode terminar com apenas uma peça restante no tabuleiro.

Solução: Uma estratégia interessante para resolver problemas desse tipo é começar com valores pequenos de n. Por exemplo, seja $n = 1$. Temos $1^2 = 1$ peça e portanto obtemos êxito. Agora, façamos $n = 2$. Como mostra a figura 31, terminamos com, apenas, uma peça (atente que as peças vermelhas "comerão" as pretas):

Figura 31 – Situação para n = 2.



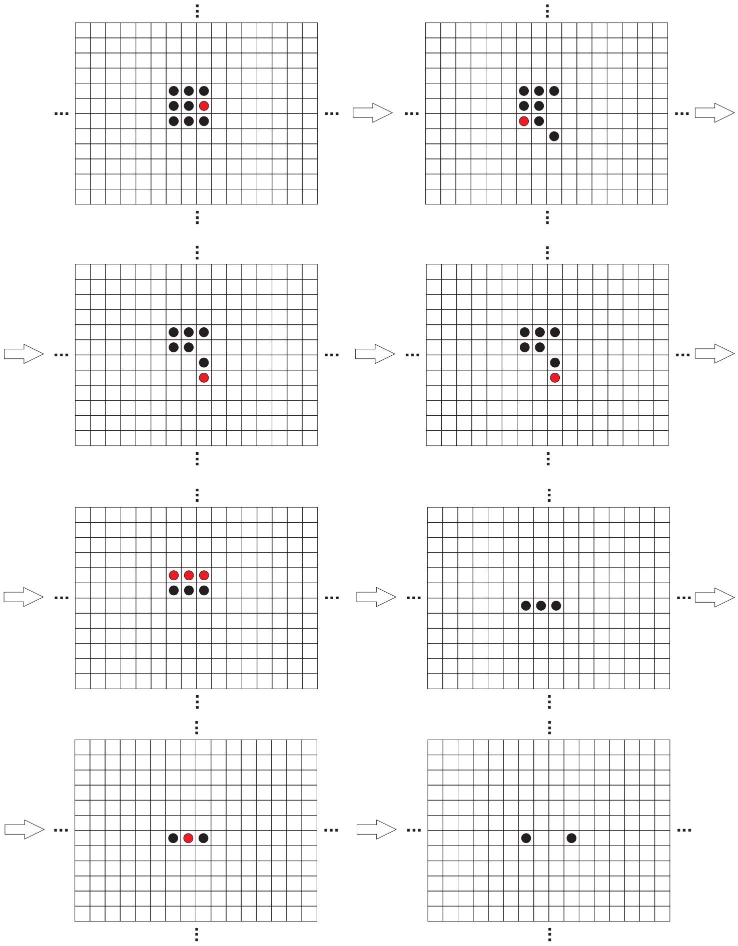
Fonte: Próprio autor.

Portanto, o jogo termina com uma peça. Continuamos, agora com $n = 3$. Veja que, para os movimentos na figura 32, termina-se o jogo com duas peças, onde as peças vermelhas "comem" as pretas.

Diante desse exemplo, devemos observar se existe algum padrão e não é estranho imaginar que para múltiplos de 3 possamos achar esse padrão. Perceba que se colorirmos com três cores, por exemplo, vermelho, verde e azul, iniciamos o jogo com a mesma quantidade de peças em cada cor. Veja a figura 33.

A cada rodada teremos a diminuição de duas cores e o aumento de uma. Por exemplo, seja o terno (x, y, z), em que x, y, z são as quantidades de peças em casas vermelhas, verdes e azuis, respectivamente. No início, tínhamos o terno (3,3,3). Vejamos o desenvolver dos ternos a cada rodada: (3,3,3), (4,2,2), (3,3,1), (2,2,2), (3,1,1), (2,0,2), (1,1,1), (2,0,0). Portanto, vejamos que, a cada movimentação, cada terno tem elementos de mesma paridade, logo temos um invariante. Não poderemos ter uma configuração com uma única peça, pois teríamos um terno em um desses formatos: (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1), os quais possuem elementos de paridades distintas. Diante do exposto, concluímos que para n múltiplo de 3, não poderemos terminar o jogo com uma única peça. Nos resta verificar o que ocorre para números da forma $n = 3p + 1$ e $n = 3p + 2$, $p \in \mathbb{N}$. Já vimos

Figura 32 – Situação para n = 3.



Fonte: Próprio autor.

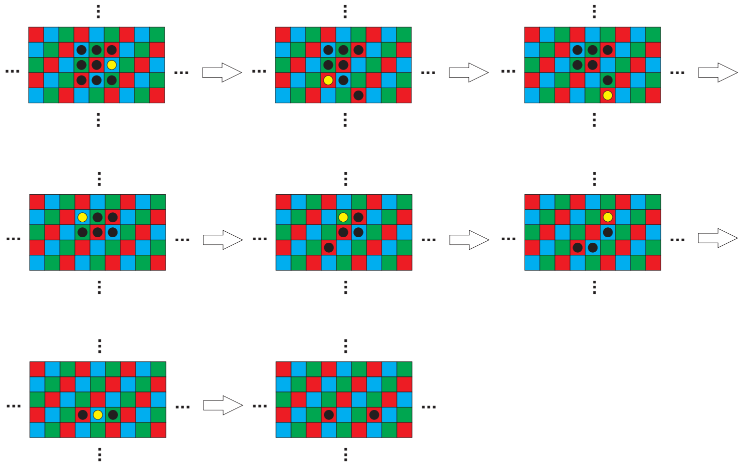
que para $n = 1$ e $n = 2$ é possível terminar o jogo com uma única peça. Como estratégia utilizaremos uma peça no formato da letra "L". Vejamos na figura 34 essa peça e sua movimentação.

Vamos utilizar essa peça para solucionarmos o jogo com $n = 4$. Divide-se o tabuleiro em um retângulo 1x3 (cor verde), onde a peça em forma de "L" percorre da esquerda para a direita. Depois o retângulo 3x1 (cor azul), no qual a peça em forma de "L" percorre de baixo para cima, e, posteriormente, percorre um quadrado 3x3 (cor rosa) no sentido da direita para esquerda, terminando no quadrado 1x1 (cor vermelha). Vejamos nas figuras 35 e 36.

Nas figuras 37 e 38 podemos utilizar a peça no formato da letra "L" para $n = 5$. Dividimos o tabuleiro com as peças em um retângulo 2x3 (cor verde), onde a peça em forma de "L" percorre da esquerda para direita, depois o retângulo 3x2 (cor azul), em que a peça em forma de "L" vai de baixo para cima, e, posteriormente, percorre um quadrado 3x3 (cor rosa) no sentido da direita para esquerda. Por último, a peça conclui o movimento no quadrado 2x2 (cor vermelha)

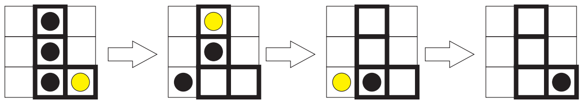
Diante dos exemplos, realizamos indução em n para provar que para números

Figura 33 – Situação com coloração verde, vermelha e azul.



Fonte: Próprio autor.

Figura 34 – Peça em formato da letra ”L”e sua movimentação.



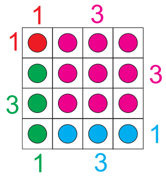
Fonte: Próprio autor.

da forma $n = 3p + 1$ e $n = 3p + 2$, com p natural, terminamos o jogo com apenas uma peça. Suponhamos que seja válido para $n = k$ e provemos que vale para $n = k + 3$. Façamos a divisão do tabuleiro conforme a figura 39.

Da mesma forma que nos exemplos anteriores, a peça em formato de “L” irá percorrer o retângulo k x 3 (cor verde) da esquerda para a direita, o retângulo 3 x k (cor azul) de baixo para cima e o quadrado 3 x 3 (cor rosa) da direita para a esquerda (figura 40).

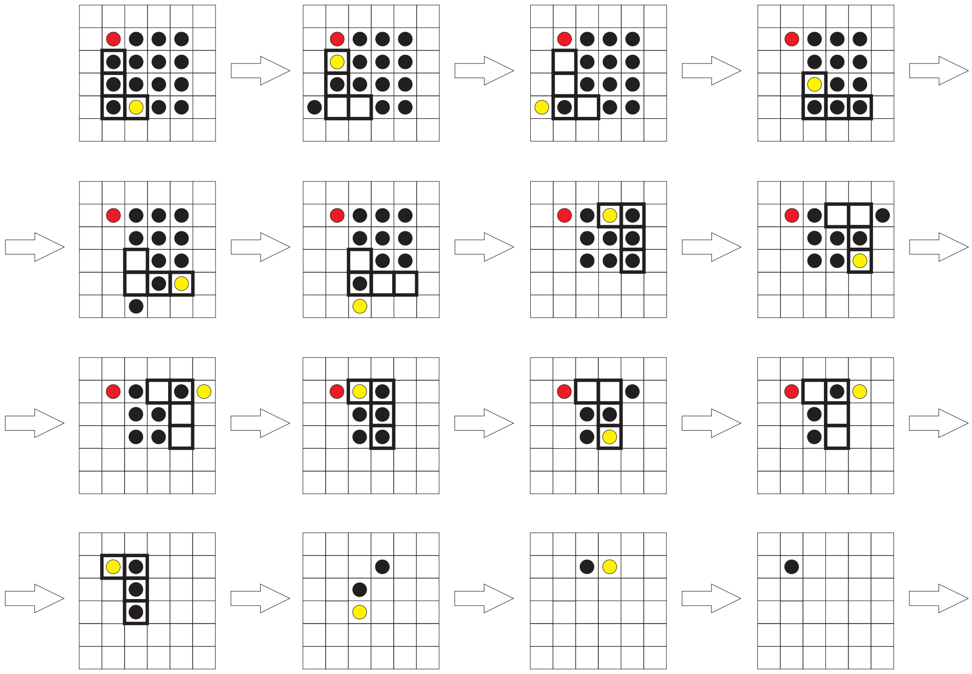
Como queríamos demonstrar, chega-se à hipótese de indução que é o quadrado de lado k (cor vermelha). Concluímos que para o jogo com número de peças da forma $n = 3p+1$ e $n = 3p+2$, com p natural, podemos encerrar o jogo com apenas uma peça. E para o jogo com número de peças da forma $n = 3p$, com p natural, não podemos terminar o jogo com apenas uma peça.

Figura 35 – Divisão do tabuleiro por movimentação da peça em forma de “L”para n = 4.



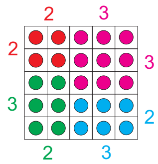
Fonte: Próprio autor.

Figura 36 – Movimentação da peça em forma de “L”para n = 4.



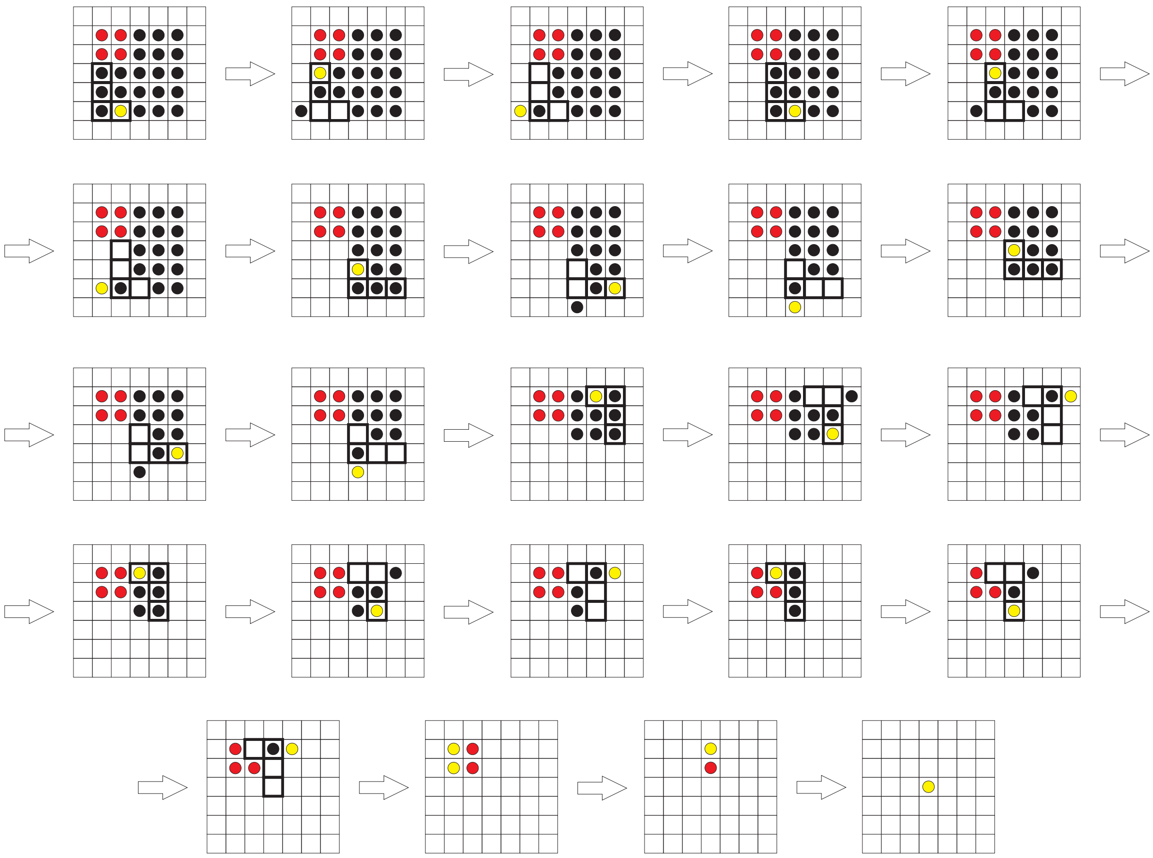
Fonte: Próprio autor.

Figura 37 – Divisão do tabuleiro por movimentação da peça em forma de ”L”.



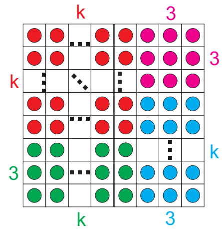
Fonte: Próprio autor.

Figura 38 – Movimentação da peça em forma de ”L”.



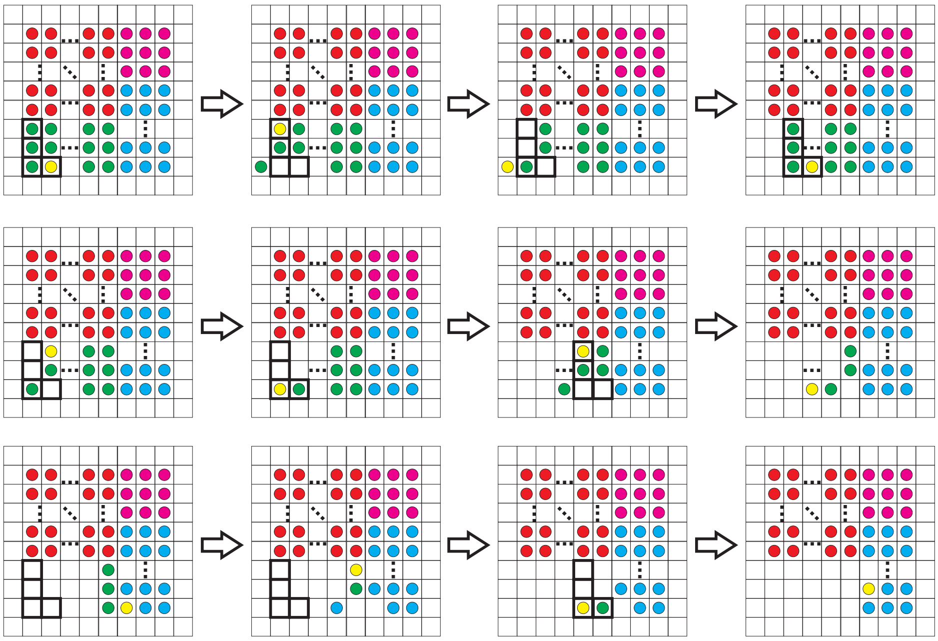
Fonte: Próprio autor.

Figura 39 – Divisão tabuleiro em um quadrado de lado k, um retângulo k x 3, outro retângulo 3 x k e outro quadrado 3 x 3.



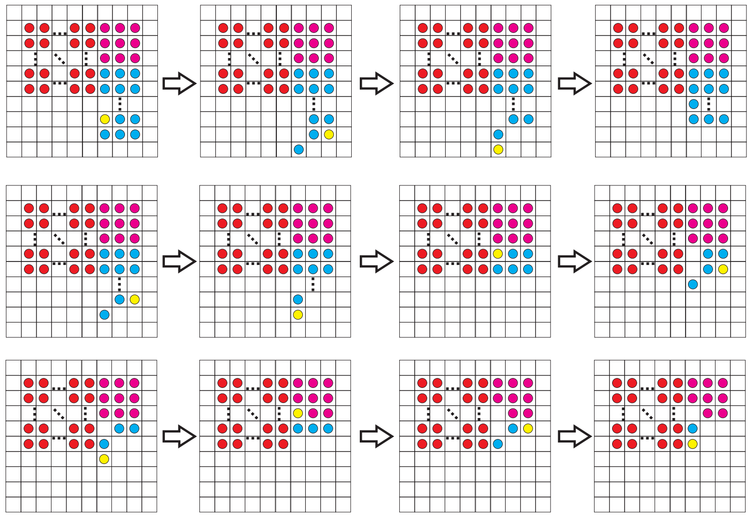
Fonte: Próprio autor.

Figura 40 – Ação da peça em formato de ”L”no tabuleiro em um quadrado de lado k, um retângulo k x 3, outro retângulo 3 x k e outro quadrado 3 x 3.



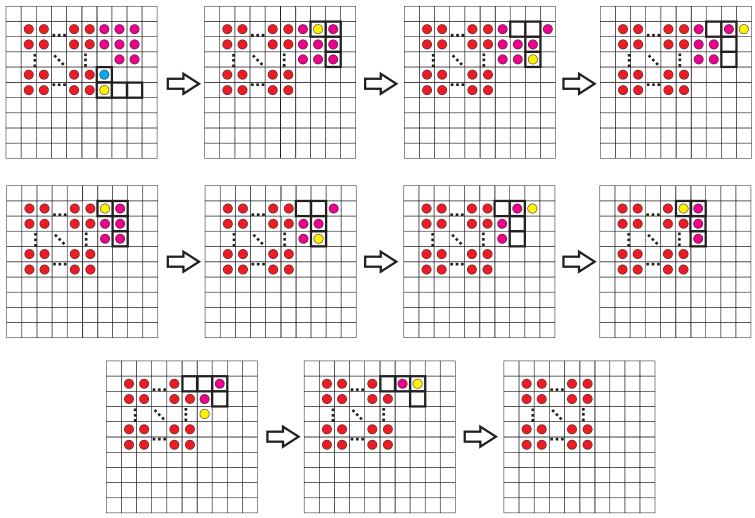
Fonte: Próprio autor.

Figura 41 – Continuação da figura 40.



Fonte: Próprio autor.

Figura 42 – Continuação da figura 41. Chega-se ao quadrado de lado k.

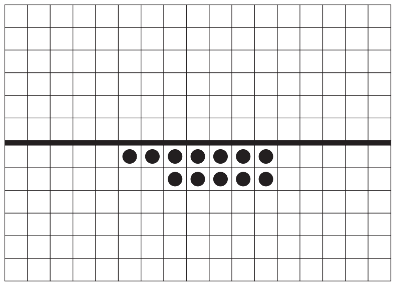


Fonte: Próprio autor.

4 RÃ SALTADORA

O jogo Rã Saltadora é conhecido em inglês como Solitaire Army, Conway's Army ou ainda Conway's Soldiers. Foi apresentado por John Conway[1] em 1961, conforme BELL, HIRSCHBERG e GARCÍA(2007). É um problema que consiste de um tabuleiro com peças abaixo de uma linha divisória com objetivo de chegar o mais longe que se conseguir acima dessa linha.

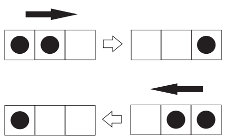
Figura 43 – Exemplo de tabuleiro com 12 peças.



Fonte: Próprio autor.

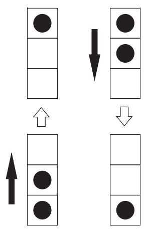
Essas peças se movimentam na horizontal ou vertical onde uma peça pula a outra contígua (no popular "come" a outra) na direção de uma casa vazia e aquela que foi pulada é retirada. Vejamos nas figuras 44 e 45.

Figura 44 – Movimentos possíveis na horizontal.



Fonte: Próprio autor.

Figura 45 – Movimentos possíveis na vertical.



Fonte: Próprio autor.

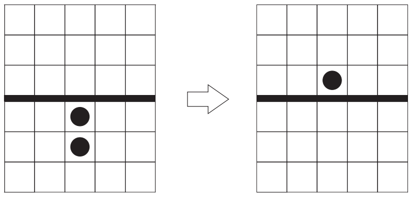
4.1 Construção da estratégia vencedora

Quantas peças devemos usar e como devemos distribuí-las abaixo do traço grosso para que possamos atingir a 1ª linha acima do traço grosso? E a 2ª? E as demais?

[1]John Horton Conway, matemático inglês nascido em 1937.

Comecemos o experimento. O caso em que temos uma única peça não há relevância pois não há movimentação possível. Com duas peças (figura 46) vemos que existe a possibilidade de chegar, no máximo, a uma linha acima da linha divisória.

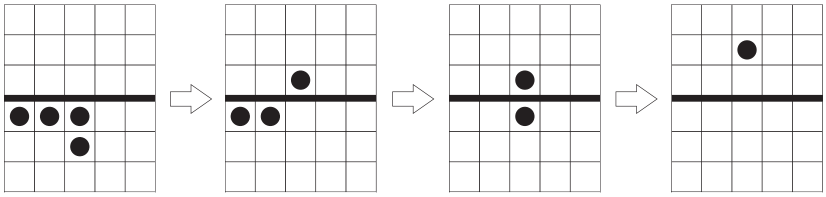
Figura 46 – Alcance da 1ª fila.



Fonte: Próprio autor.

Podemos continuar acrescentando peças e tentando atingir filas acima da linha divisória. Com 3 peças não obtemos êxito independente da posição em que colocam-se as peças. Entretanto, com 4 peças, dispostas como na figura 47, podemos alcançar a 2ª fila.

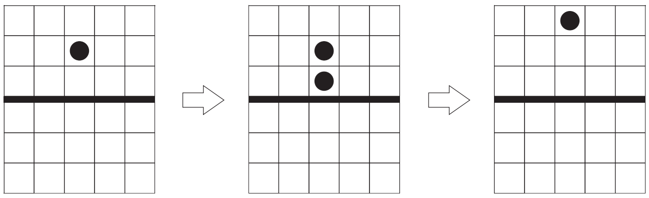
Figura 47 – Alcance da 2ª fila.



Fonte: Próprio autor.

Continuamos jogando e aumentando o número de peças com a finalidade de chegar à 3ª fila. Para isso, veja que em relação ao que obteve-se da figura 47 é necessário subir mais uma linha.

Figura 48 – Da figura 47 é preciso subir mais uma linha.



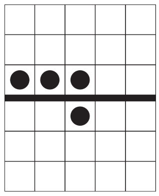
Fonte: Próprio autor.

Para isso, uma ideia interessante para ser mais assertivo na colocação das peças é mirarmos a configuração semelhante àquela inicial da figura 47, que já sabemos atingir duas filas acima, figura 49.

Portanto, fazendo algumas tentativas colocamos as peças marcadas de vermelho de forma que possa ser viabilizado esse movimento como ilustrado na figura 50.

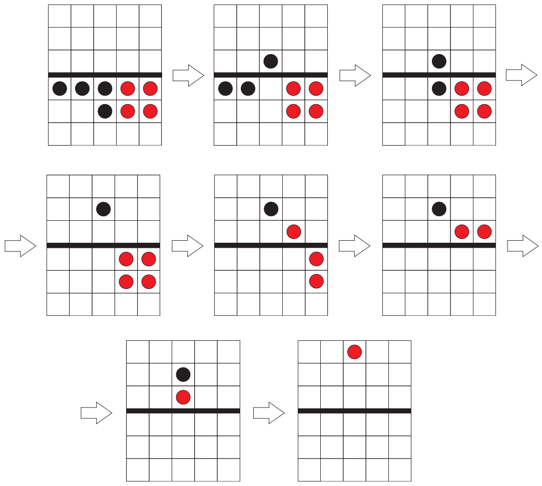
Seguindo o mesmo pensamento vamos alcançar a 4ª fila. Deve-se mirar a configuração semelhante àquela inicial da figura 50, a qual já sabemos que atinge três linhas acima, figura 51.

Figura 49 – Configuração que atinge duas filas acima.



Fonte: Próprio autor.

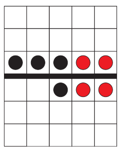
Figura 50 – Alcance da 3ª fila.



Fonte: Próprio autor.

Fazendo algumas tentativas podemos chegar à configuração inicial da figura 52, na qual podemos ver o detalhamento para atingir a 4ª fila.

Figura 51 – Configuração que atinge três filas acima.



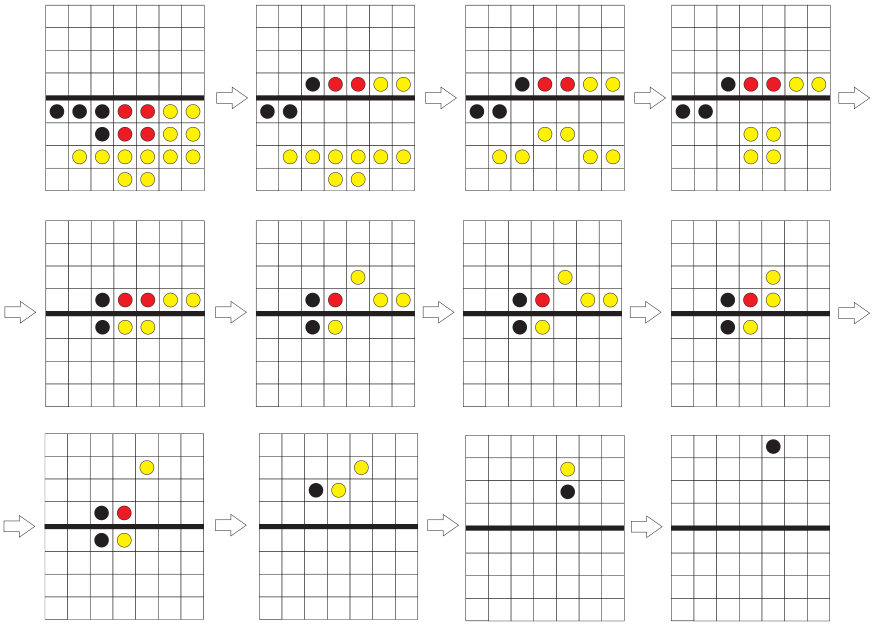
Fonte: Próprio autor.

Prosseguindo com o jogo, veremos agora que não há possibilidade de se chegar à 5ª linha acima do traço divisório. Essa afirmação é embasada na demonstração proposta por Conway, a qual se baseia em preencher o tabuleiro com potências do inverso do número áureo. Para relembrarmos, o número áureo é a raiz positiva da equação $x^2 = x + 1$, $x = (1 + \sqrt{5})/2$. Então, temos $\Phi = 1/x$, e substituindo na equação $x^2 = x + 1$ ficamos com

$$(1/\Phi)^2 = (1/\Phi) + 1 \therefore 1 = \Phi + \Phi^2 \therefore \Phi^2 = 1 - \Phi, \textit{ onde } \Phi = (-1 + \sqrt{5})/2.$$

Preenchemos o tabuleiro da forma como está exposto na figura 53, onde a casa que contém o número 1 é a casa que supostamente teríamos alcançado com uma peça.

Figura 52 – Alcance da 4ª fila.



Fonte: Próprio autor.

Primeiramente vamos somar os números abaixo da linha divisória. Vejamos que cada coluna é preenchida por elementos que formam uma PG infinita, de razão $|\Phi| < 1$, logo convergente:

$$S = (\Phi^5 + \Phi^6 + \Phi^7 + ...) + 2(\Phi^6 + \Phi^7 + \Phi^8 ...) + 2(\Phi^7 + \Phi^8 + \Phi^9 + ...) + ... \therefore$$

$$\therefore S = \frac{\Phi^5}{1-\Phi} + 2(\frac{\Phi^6}{1-\Phi}) + 2(\frac{\Phi^7}{1-\Phi}) + ...$$

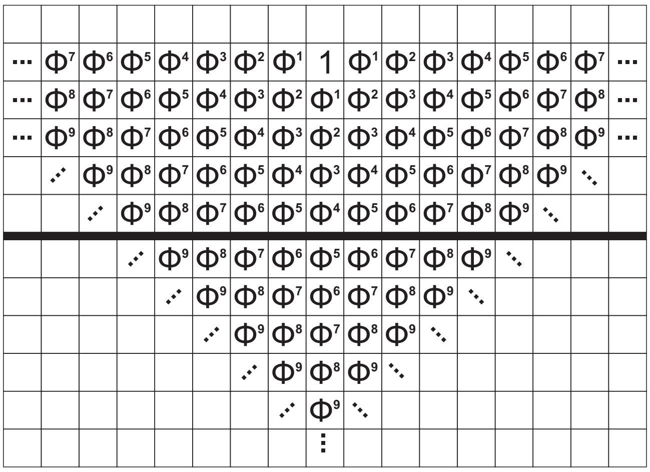
Como $\Phi^2 = 1 - \Phi$, substituindo nos denominadores das frações, temos:

$$S = (\frac{\Phi^5}{\Phi^2}) + 2(\frac{\Phi^6}{\Phi^2}) + 2(\frac{\Phi^7}{\Phi^2}) ... = \Phi^3 + 2\Phi^4 + 2\Phi^5 ... = (\Phi^3 + \Phi^4 + \Phi^5) + (\Phi^4 + \Phi^5 + \Phi^6 ...) =$$

$$= \frac{\Phi^3}{1-\Phi} + \frac{\Phi^4}{1-\Phi} = (\frac{\Phi^3}{\Phi^2}) + (\frac{\Phi^4}{\Phi^2}) = \Phi + \Phi^2 = 1.$$

Concluímos, pois, que se tivermos infinitas casas abaixo da linha divisória, a soma das potências do número Φ será igual a 1, ou seja, um tabuleiro formado por um número finito de casas possuirá essa soma aludida estritamente menor que 1. Guarde essa informação. Agora observemos que as movimentações possíveis no tabuleiro são as que constam na figura 54. Observe a direção das setas. Vejamos que a soma das casas antes de cada movimento é igual ou maior que a soma das casas imediatamente após cada movimento:

Figura 53 – Configuração de John Conway.



Fonte: Próprio autor.

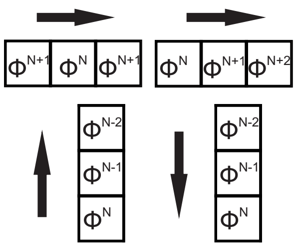
$$(i)\,\Phi^{N+1} + \Phi^{N} > \Phi^{N+1};$$

$$(ii)\Phi^{N+1} + \Phi^{N} > \Phi^{N+2},\ pois\,|\Phi| < 1;$$

$$(iii)\,\Phi^{N} + \Phi^{N-1} = \Phi^{N-2},\ pois\ \Phi^{N} + \Phi^{N-1} =$$

$$= \Phi^{N-2}(\Phi^2 + \Phi) = \Phi^{N-2}(1 - \Phi + \Phi) = \Phi^{N-2}.$$

Figura 54 – Movimentações possíveis.



Fonte: Próprio autor.

Por conseguinte, inferimos que se pudéssemos atingir a 5ª linha em uma casa que contém o algarismo 1, teríamos como soma, pelo menos, valor igual a 1, todavia, começamos o jogo com uma soma estritamente menor que 1 e vimos que após cada movimento mantemos ou diminuímos a soma das casas. Impossível chegar à 5ª linha. A título de curiosidade, utilizaremos a técnica acima para fazermos um teste para a possibilidade de alcançar a 4ª linha que já vimos ser possível por tentativa. Temos a situação da figura 55 com as mesmas condições do exemplo anterior.

Somando os valores abaixo da linha divisória:

$$S = (\Phi^4 + \Phi^5 + \Phi^6 + ...) + 2(\Phi^5 + \Phi^6 + \Phi^7 ...) + 2(\Phi^6 + \Phi^7 + \Phi^8 + ...) + ... \therefore$$

Figura 55 – Configuração para atingir a 4ª fila.

$\cdots$	Φ^5	Φ^4	Φ^3	Φ^2	Φ^1	1	Φ^1	Φ^2	Φ^3	Φ^4	Φ^5	$\cdots$
$\cdots$	Φ^6	Φ^5	Φ^4	Φ^3	Φ^2	Φ^1	Φ^2	Φ^3	Φ^4	Φ^5	Φ^6	$\cdots$
$\cdots$	Φ^7	Φ^6	Φ^5	Φ^4	Φ^3	Φ^2	Φ^3	Φ^4	Φ^5	Φ^6	Φ^7	$\cdots$
	$\iddots$	Φ^7	Φ^6	Φ^5	Φ^4	Φ^3	Φ^4	Φ^5	Φ^6	Φ^7	$\ddots$	
		$\iddots$	Φ^7	Φ^6	Φ^5	Φ^4	Φ^5	Φ^6	Φ^7	$\ddots$		
			$\iddots$	Φ^7	Φ^6	Φ^5	Φ^6	Φ^7	$\ddots$			
				$\iddots$	Φ^7	Φ^6	Φ^7	$\ddots$				
					$\iddots$	Φ^7	$\ddots$					
						$\vdots$						

Fonte: Próprio autor.

$$\therefore S = \frac{\Phi^4}{1-\Phi} + 2(\frac{\Phi^5}{1-\Phi}) + 2(\frac{\Phi^6}{1-\Phi}) + \ldots .$$

Como $\Phi^2 = 1 - \Phi$, substituindo nos denominadores das frações, temos:

$$S = (\frac{\Phi^4}{\Phi^2}) + 2(\frac{\Phi^5}{\Phi^2}) + 2(\frac{\Phi^6}{\Phi^2}) \ldots = \Phi^2 + 2\Phi^3 + 2\Phi^4 \ldots = (\Phi^2 + \Phi^3 + \Phi^4 \ldots) + (\Phi^3 + \Phi^4 + \Phi^5 \ldots) =$$

$$= \frac{\Phi^2}{1-\Phi} + \frac{\Phi^3}{1-\Phi} = (\frac{\Phi^2}{\Phi^2}) + (\frac{\Phi^3}{\Phi^2}) = 1 + \Phi > 1, pois\ \Phi > 0.$$

Observe que, dessa vez, não existe a impossibilidade de atingirmos a casa contendo o algarismo 1 na 4ª linha (já vimos ser possível na figura 52), pois o somatório dos valores das casas ocupadas no início é maior que 1.

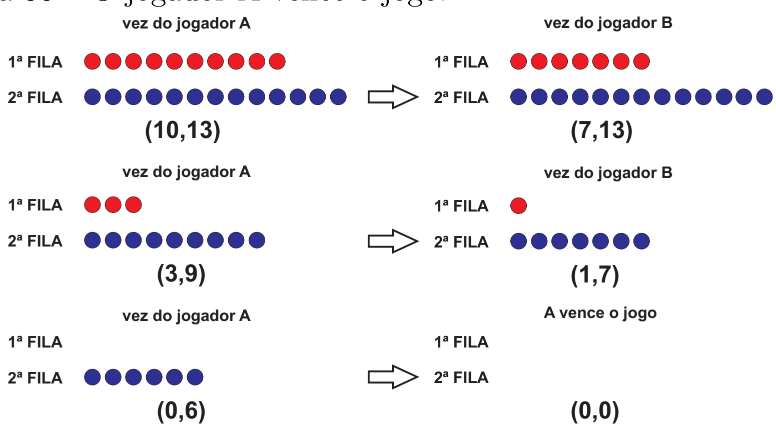
5 JOGO DE WYTHOFF

Segundo HIRSCHFELD-COTTON(2008, p.3), o nome desse jogo remete-se a Wythoff [1], o qual publicou uma análise completa no início do século XX. Mais tarde, ainda no século XX, por volta do ano de 1960, Rufus Isaacs [2] fez uma outra descrição para esse jogo realizando uma analogia ao movimento da rainha no xadrez. Com isso, o jogo ganhou também a denominação "Queen's Move" ou "Cornering the Queen" - Movimento da Rainha e Encurralando a Rainha, respectivamente, em português. Existem ainda as denominações Wythoff's Game ou Wythoff's Nim. Essa última nomenclatura deve-se ao fato de que esse jogo é aparentemente uma variação do jogo de Nim. As diferenças para o Nim são que devemos ter apenas duas colunas de peças e, para retirar as peças, além de podermos escolher uma fila para retirar peças, podemos retirar um igual número de peças de ambas as filas. Vamos ao jogo!

5.1 Exemplo

Temos dois jogadores, A e B, e duas pilhas contendo 10 e 13 peças. Como já mencionado, o jogo segue uma sistemática semelhante ao jogo de Nim, onde cada jogador retira, alternadamente, um número qualquer de uma fila ou um mesmo número das duas filas. Vamos representar o número de peças da seguinte forma (10,13), onde o primeiro termo do par ordenado é o número da primeira fila e o segundo termo do par é o número da segunda fila. O jogador A começa retirando três peças da 1ª fila e então ficamos com a seguinte configuração: (7,13). Por sua vez, B retira quatro peças de cada fila, logo ficamos com (3,9). Agora A retira duas peças em cada fila: (1,7) e B retira uma peça em cada fila: (0,6). A retira seis peças da 2ª fila, resultando em (0,0) e ganha o jogo.

Figura 56 – O jogador A vence o jogo.



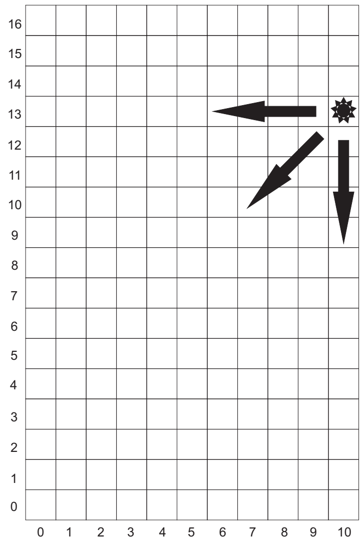
Fonte: Próprio autor.

Em adição a isso e para uma compreensão mais aprofundada, vamos visualizar

[1] Willem Abraham Wythoff, matemático holandês nascido em 1865.
[2] Rufus Philip Isaacs, matemático estadunidense nascido em 1914.

o desenvolvimento do jogo através dos movimentos de uma peça em um tabuleiro, figura 57.

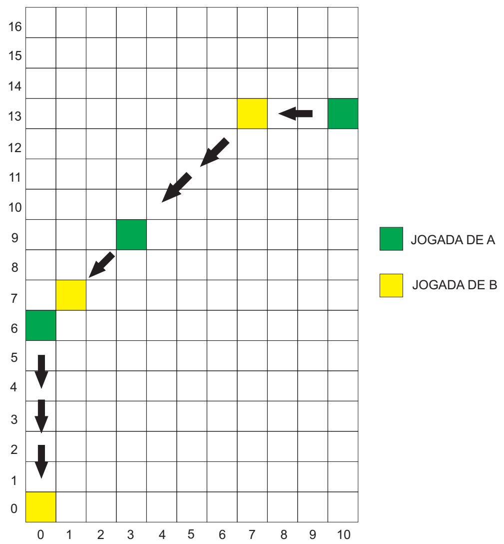
Figura 57 – Semelhança com o movimento de uma rainha do xadrez.



Fonte: Próprio autor.

Veja que os movimentos são nos sentidos para baixo, para esquerda e para diagonal entre esquerda e baixo. Perceba também que a 1ª e 2ª filas de peças estão representadas, respectivamente, pela horizontal e vertical. Logo, no nosso exemplo, a "rainha" está na posição (10,13). Portanto, podemos representar o jogo entre os jogadores A e B como na figura 58:

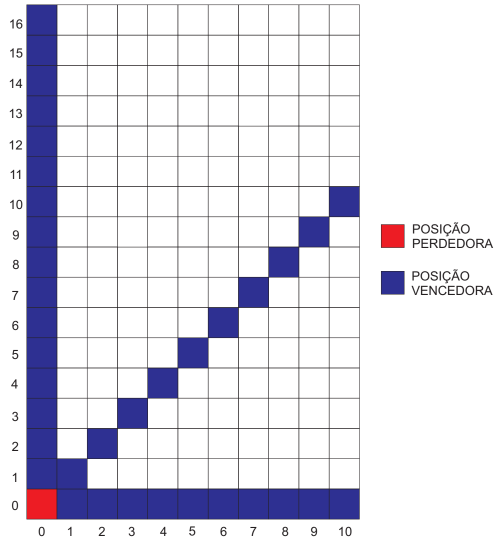
Figura 58 – Representação de Wythoff em tabuleiro.



Fonte: Próprio autor.

Diante do exposto, já podemos avançar no desenvolvimento do funcionamento desse jogo. Para isso, vamos utilizar o conceito de posição perdedora e posição vencedora. Posição perdedora é aquela que qualquer que seja o movimento leva a uma posição vencedora e posição vencedora é aquela que é possível através de um movimento levar a uma posição perdedora. Definimos (0,0) uma posição perdedora. Por exemplo, posições dos tipos $(1,0), (2,0)..., (x,0); (0,1), (0,2), ...(0,x); (1,1), (2,2), ..., (x,x)$ com x natural e $x > 0$, são exemplos de posições vencedoras.

Figura 59 – Algumas posições vencedoras e perdedoras.



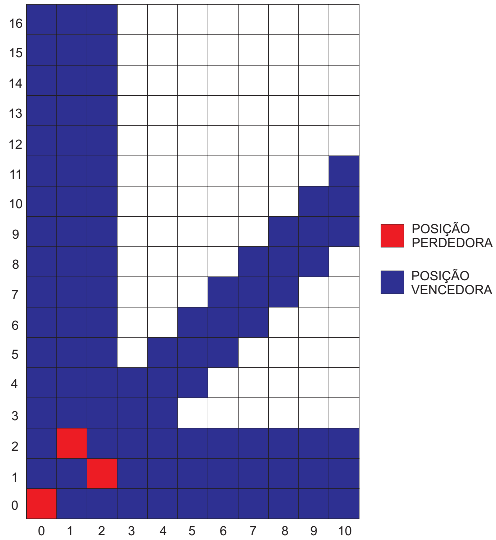
Fonte: Próprio autor.

Por inspeção, observamos que (1,2) só leva ao adversário uma posição vencedora, pois se retirarmos uma peça de uma fila resultará em (0,2) que é vencedora e se retirarmos duas peças da outra fila, ocasionará (1,0) que também é vencedora e, por último, se retirarmos uma peça de cada fila levará a (0,1) que novamente é uma posição vencedora. Por simetria, (2,1) também é posição perdedora. Agora perceba que as demais posições que estão na 1ª coluna e na 1ª linha são todas vencedoras, pois, por definição, são posições que permitem deixar o adversário em uma posição perdedora. Exemplificando, temos que (3,1) pode ser levado a (2,1) com a retirada de uma peça da primeira fila. O mesmo se aplica à 2ª coluna e 2ª linha. Outro grupo de posições que são vencedoras é o das diagonais de posições (1,2) e (2,1). Por exemplo, (2,3) e (3,4) podem chegar a (1,2) com a retirada de uma peça em cada fila e duas peças em cada fila, respectivamente.

Olhando para a figura 60 podemos perceber que as posições (3,5) e (5,3) são perdedoras, pois abaixo, à esquerda e na diagonal, entre à esquerda e abaixo, temos apenas posições vencedoras (quadrinhos azuis), ou seja, (3,5) e (5,3) só levam ao adversário uma posição vencedora (lembre-se da definição de posição perdedora). Ademais, o restante das posições da coluna e linha 3 são todas vencedoras bem como da coluna e linha 5. Novamente as diagonais de (3,5) e (5,3) também são vencedoras (são todos quadrinhos azuis).

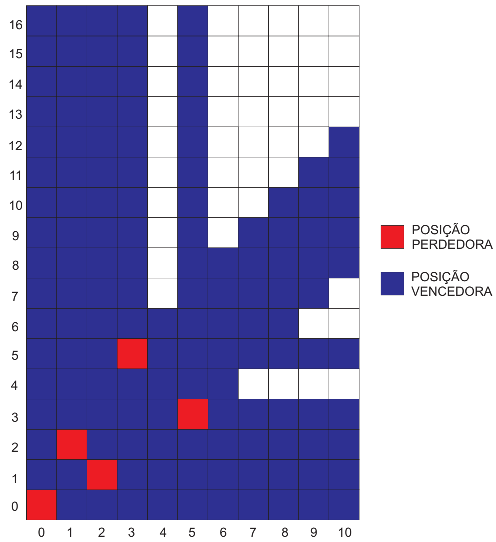
Para continuarmos encontrando as posições perdedoras seguimos a mesma lógica. Olhe para a figura 61 e perceba que (7,4) e (4,7) nos levam apenas para quadrinhos azuis sendo, portanto, mais duas posições perdedoras. Por conseguinte, vemos

Figura 60 – (1,2) e (2,1) são posições perdedoras.



Fonte: Próprio autor.

Figura 61 – (3,5) e (5,3) são posições perdedoras.



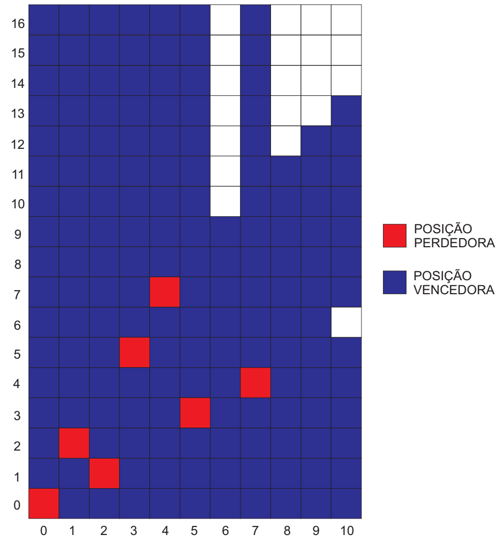
Fonte: Próprio autor.

que as demais posições das colunas 4 e 7, linhas 4 e 7 e suas respectivas diagonais são todas vencedoras (figura 62).

A essa altura já ficou repetitivo o processo, de forma que o leitor já deve ter percebido, por observação do tabuleiro, que as próximas posições perdedoras serão a (6,10) e (10,6). Veja na figura 63.

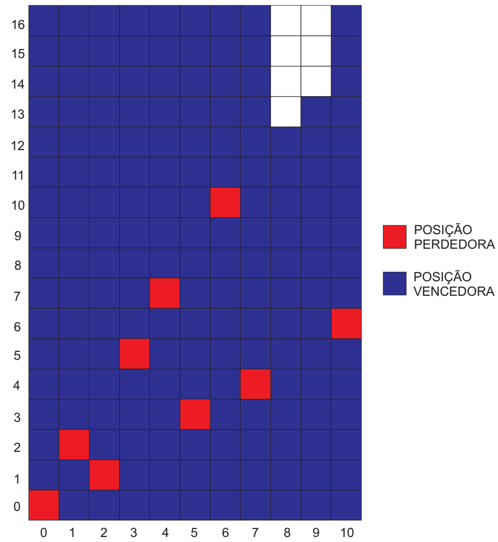
Então, é importante a percepção da estratégia vencedora para esse jogo. Caso o jogador comece em uma posição vencedora, basta que ele coloque o adversário em uma posição perdedora e continue repetindo esse processo rodada a rodada até que seja atingida a posição (0,0). Por outro lado, se o jogador começar em uma das posições perdedoras ele nada poderá fazer em sua primeira jogada. Entretanto, a partir de sua segunda jogada basta que ele aplique a mesma estratégia de jogar o adversário em uma

Figura 62 – (4,7) e (7,4) são posições perdedoras.



Fonte: Próprio autor.

Figura 63 – (6,10) e (10,6) são posições perdedoras.



Fonte: Próprio autor.

posição perdedora. Observe os exemplos: Suponhamos dois jogadores A e B, em que o jogador A sabe a estratégia e B não sabe. A começa em uma posição vencedora: (4,5). O jogador A vai fazer com que o jogador B fique na posição perdedora (3,5) tirando uma peça da primeira fila. Qualquer movimento de B cairá em uma posição vencedora. Imaginemos que B retire 2 peças de cada fila, o que leva a (1,3). A agora retira uma peça da segunda fila, o que leva à configuração (1,2), que é perdedora. B retira duas peças da segunda fila: (1,0). Então, A retira a única peça faltante e ganha o jogo. Por outro lado, suponhamos agora que temos a seguinte situação: A e B irão jogar com a situação inicial (4,7) em que A começa. Nesse caso, A está em uma posição perdedora e, pela definição que já vimos, qualquer movimento levará a uma posição vencedora. A retira uma peça da segunda fila: (4,6). A precisará que o jogador B não o coloque em uma posição perdedora (salientamos que B no nosso exemplo não conhece a estratégia vencedora). Imaginemos que B retire duas peças da primeira fila: (2,6). Agora A está em uma posição vencedora e, portanto, basta jogar B em uma posição perdedora e fazer isso rodada a rodada até atingir (0,0). A retira cinco peças da segunda fila levando B à posição (2,1). B então retira uma peça da segunda fila e A ficará na posição (2,0). A retira as duas peças da primeira fila e ganha o jogo.

5.2 Construção da estratégia vencedora

Contudo, ainda precisamos descobrir se tal ideia é correta caso aumentemos o número de peças do jogo. Será que podemos aplicar a mesma estratégia para uma configuração inicial de (2018, 4333) peças? Precisaremos do rigor matemático para provar que essa estratégia é sempre vencedora. Vamos chamar de (x_n, y_n) a sequência de posições perdedoras em que x_n é o número de peças na 1ª fila e y_n é o número de peças na 2ª fila (figura 64). Por simetria no tabuleiro, iremos considerar apenas a situação em que $x_n < y_n$.

Figura 64 – Sequência de posições perdedoras.

n	0	1	2	3	4	...
x_n	0	1	3	4	6	...
y_n	0	2	5	7	10	...

Fonte: Próprio autor.

Analisando essa tabela podemos observar alguns padrões interessantes. O primeiro é que $y_n = x_n + n$, por exemplo, $0 = 0 + 0$, $2 = 1 + 1$, $5 = 3 + 2$ e assim por diante. O segundo padrão é que cada número aparece apenas uma vez. O terceiro padrão é que o elemento da linha x_n é o menor inteiro positivo que ainda não foi utilizado. Por exemplo, na coluna que n = 2, temos $x_n = 3$ pois nas colunas anteriores apareceram apenas 0, 1 e 2. Na coluna que n = 3, temos $x_n = 4$, pois nas colunas anteriores apenas 0, 1, 2, 3 e 5 foram utilizados. Por conseguinte, preenchendo a próxima coluna da tabela da figura 64, onde n = 5, temos $x_n = 8$, já que foram utilizados: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 e 10. Para a segunda linha, temos $y_n = 13$, pois $y_n = 8 + 5$. Vejamos a tabela, na figura 65, com mais colunas preenchidas através desses padrões.

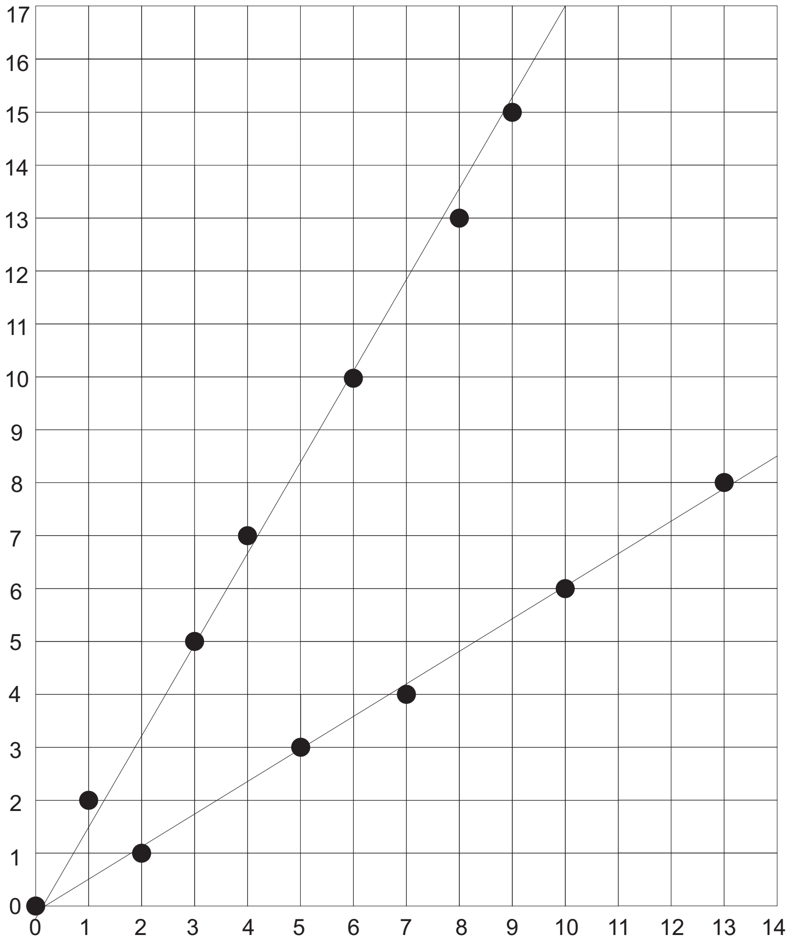
Figura 65 – Mais posições perdedoras descobertas através de padrões observados.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
x_n	0	1	3	4	6	8	9	11	12	14	16	17	19	21	22	24
y_n	0	2	5	7	10	13	15	18	20	23	26	28	31	34	36	39

Fonte: Próprio autor.

Passando esses dados para uma plano cartesiano, é razoável pensarmos que esses pontos parecem estar em uma reta que passa pela origem, conforme a figura 66:

Figura 66 – Gráfico aparente de uma reta.



Fonte: Próprio autor.

Portanto, os pontos das sequências x_n e y_n estão próximos a pontos da forma $(\alpha n, \beta n)$, onde α e β são constantes. No entanto, como os números das sequências x_n e y_n são inteiros, é possível que $(x_n,y_n) = (\lfloor \alpha n \rfloor,\lfloor \beta n \rfloor)$, onde $\lfloor\ \rfloor$ representa o piso do número, ou seja, a parte inteira do número. Para prosseguirmos com nossa explicação precisamos introduzir as sequências de Beatty[1], conforme apresentação de Ezra Brown (2016):

Se α e β são números irracionais satisfazendo $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta} = 1$ então, as sequências $\lfloor \alpha \rfloor$, $\lfloor 2\alpha \rfloor$, $\lfloor 3\alpha \rfloor$,...; e $\lfloor \beta \rfloor$, $\lfloor 2\beta \rfloor$, $\lfloor 3\beta \rfloor$,...; incluem todos os números naturais exatamente uma vez. Primeiro, provemos a unicidade. Suponha que $\lfloor k\alpha \rfloor = \lfloor p\beta \rfloor = n$. Como α e β são irracionais, tem-se

$$(i)\, n < k\alpha < n + 1;$$

$$(ii)\, n < p\beta < n + 1.$$

[1]Samuel Beatty, matemático canadense nascido em 1881. Publicou seu resultado no The American Mathematical Monthly, problema nº 3173, em 1926

Invertendo (i) e (ii) e multiplicando por k e p, respectivamente, temos:

$$(iii)\,\frac{k}{n+1} < \frac{1}{\alpha} < \frac{k}{n};$$

$$(iv)\,\frac{p}{n+1} < \frac{1}{\beta} < \frac{p}{n}.$$

Somando (iii) e (iv), obtemos:

$$\frac{k}{n+1} + \frac{p}{n+1} < \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} < \frac{k}{n} + \frac{p}{n} \therefore \frac{k+p}{n+1} < 1 < \frac{k+p}{n}.$$

Perceba que

$$\frac{k+p}{n+1} < \frac{n+1}{n+1} = \frac{n}{n} < \frac{k+p}{n} \therefore n < k+p < n+1.$$

Absurdo em supor que $\lfloor k\alpha \rfloor = \lfloor p\beta \rfloor = n$, pois a desigualdade anterior diz que o inteiro $k+p$ está entre dois inteiros consecutivos. Agora, mostremos que todo natural aparece nas sequências. Dado $n \in \mathbb{N}$, existe $k \in \mathbb{Z}_+$ tal que $\frac{k-1}{n} < \frac{1}{\alpha} < \frac{k}{n}$. Vamos dividir o intervalo $\left(\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right)$ em duas partes: $\left(\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n+1}\right)$ e $\left(\frac{k}{n+1}, \frac{k}{n}\right)$. Para isso, devemos mostrar que $\frac{k-1}{n} < \frac{k}{n+1} < \frac{k}{n}$. É imediato que $\frac{k}{n+1} < \frac{k}{n}$. Como $\frac{k-1}{n} < \frac{1}{\alpha} < \frac{k}{n}$, temos que $k \leq n$ e, portanto, $k < n+1 \therefore k+nk < n+1+nk \therefore k+nk-n-1 < nk \therefore k(n+1)-(n+1) < nk \therefore (k-1)(n+1) < nk \therefore \frac{k-1}{n} < \frac{k}{n+1}$. Segue a análise dos intervalos:

(i) Se $\frac{k}{n+1} < \frac{1}{\alpha} < \frac{k}{n}$, multiplicando por $\frac{1}{k}$, temos $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{k\alpha} < \frac{1}{n}$; invertendo a inequação, temos: $n < k\alpha < n+1 \therefore \lfloor k\alpha \rfloor = n$.

(ii) Se $\frac{k-1}{n} < \frac{1}{\alpha} < \frac{k}{n+1}$, temos: $\frac{k-1}{n} < 1 - \frac{1}{\beta} < \frac{k}{n+1} \therefore$

$$\therefore \frac{n+1-k}{n+1} < \frac{1}{\beta} < \frac{n+1-k}{n} \therefore n < (n+1-k)\beta < n+1 \therefore \lfloor (n+1-k)\beta \rfloor = n.$$

Em qualquer caso, n faz parte das sequências. Ulteriormente à apresentação das sequências de Beatty e observando na tabela da figura 60 que cada número natural só aparece uma única vez, pode-se pensar que as sequências de posições perdedoras são sequências de Beatty. Nos resta ainda descobrir se α e β são irracionais. Unindo o que foi exposto, elencamos três itens:

$$(i)\,\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1;$$

$$(ii)\,(x_n, y_n) = (\lfloor \alpha n \rfloor, \lfloor \beta n \rfloor);$$

$$(iii)\,y_n = x_n + n.$$

Substituindo (ii) em (iii), temos $\lfloor \beta n \rfloor = \lfloor \alpha n \rfloor + n \therefore \lfloor \beta n \rfloor - \lfloor \alpha n \rfloor = n \therefore (\beta - \alpha)n = n \therefore \beta - \alpha = 1$, pois $n > 0$. Portanto, temos o sistema:

$$\begin{cases} \beta - \alpha = 1 \\ \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1 \end{cases}$$

Na primeira equação fazemos $\beta = \alpha + 1$. Substituindo na segunda equação temos:

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha+1} = 1 \therefore \frac{\alpha+1+\alpha}{\alpha(\alpha+1)} = \frac{\alpha(\alpha+1)}{\alpha(\alpha+1)} \therefore \alpha^2 - \alpha - 1 = 0 \therefore \alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \text{pois } \alpha > 0,$$

já que estamos lidando com números positivos. Portanto, mostramos que α é irracional. Diante do exposto, podemos conjecturar o seguinte:

As posições perdedoras (x_n,y_n), com $x_n < y_n$, são dadas por $(x_n,y_n) = (\lfloor \alpha n \rfloor, \lfloor (\alpha + 1)n \rfloor)$ em que $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Vamos provar por indução. Suponhamos $(x_q, y_q) = (\lfloor \alpha q \rfloor, \lfloor (\alpha+1)q \rfloor)$ válido para $q \in \{0, 1, 2, ..., k\}$, com $x_n < y_n$ e queremos provar que $(x_{k+1}, y_{k+1}) = (\lfloor \alpha(k+1) \rfloor, \lfloor (\alpha+1)(k+1) \rfloor)$. Seja t o menor número inteiro que não está no conjunto $\{x_0, y_0, x_1, y_1, ..., x_k, y_k\}$. Como as sequências x_n e y_n são crescentes e $x_n < y_n$, se $x_{k+1} \neq t$, então o inteiro t não aparecerá entre os termos das sequências. Logo $x_{k+1} = t$. Perceba que o inteiro $\lfloor \alpha(k+1) \rfloor$ não aparece entre os $k+1$ termos perdedores das sequências x_n e y_n em virtude da unicidade das sequências de Beatty. Se $t < \lfloor \alpha(k+1) \rfloor$, como x_n é crescente, existe um r tal que $t = \lfloor (\alpha+1)r \rfloor$ (lembre-se de como é o formato de um número da sequência de Beatty) com $r > k$:

$$t = \lfloor (\alpha+1)r \rfloor \geq \lfloor (\alpha+1)(k+1) \rfloor = \lfloor \alpha(k+1) \rfloor + k + 1 > \lfloor \alpha(k+1) \rfloor.$$

Absurdo, pois havíamos suposto $t < \lfloor \alpha(k+1) \rfloor$. Logo $t = x_{k+1} = \lfloor \alpha(k+1) \rfloor$. Agora, vejamos o caso de y_{k+1}. Seja $l = y_{k+1} - x_{k+1}$. Se $l < k+1$, fazendo a retirada de $-x_{k+1} + x_l$ de ambas as pilhas, temos:

$$(x_{k+1} - x_{k+1} + x_l, y_{k+1} - x_{k+1} + x_l) = (x_l, y_{k+1} - x_{k+1} + x_l) = (x_l, x_l + l) = (x_l, y_l).$$

Como $l < k+1$, temos que (x_l, y_l) é uma posição perdedora. Absurdo em supor $l < k+1$, pois não podemos sair da posição perdedora (x_{k+1}, y_{k+1}) diretamente para a posição perdedora (x_l, y_l). Suponhamos que $l > k+1$. Então

$$l = y_{k+1} - x_{k+1} > k+1 \therefore y_{k+1} > x_{k+1} + k + 1 \therefore y_{k+1} > \lfloor \alpha(k+1) \rfloor + k + 1 \therefore$$

$$\therefore y_{k+1} > \lfloor (\alpha+1)(k+1) \rfloor.$$

O jogador que fará a primeira jogada retira peças da segunda pilha da posição perdedora

(x_{k+1}, y_{k+1}) de forma a chegar nessa configuração $(\lfloor\alpha(k+1)\rfloor, \lfloor(\alpha+1)(k+1)\rfloor)$. O oponente pode fazer três tipos de jogada, retirando um número inteiro j de peças:

$$(i)\,(\lfloor\alpha(k+1)\rfloor, \lfloor(\alpha+1)(k+1)\rfloor) = (\lfloor\alpha(k+1)\rfloor - j, \lfloor(\alpha+1)(k+1)\rfloor)$$

$$(ii)\,(\lfloor\alpha(k+1)\rfloor, \lfloor(\alpha+1)(k+1)\rfloor) = (\lfloor\alpha(k+1)\rfloor, \lfloor(\alpha+1)(k+1)\rfloor - j)$$

$$(iii)\,(\lfloor\alpha(k+1)\rfloor, \lfloor(\alpha+1)(k+1)\rfloor) = (\lfloor\alpha(k+1)\rfloor - j, \lfloor(\alpha+1)(k+1)\rfloor - j)$$

No caso (i), temos que $\lfloor\alpha(k+1)\rfloor - j \in \{x_0, y_0, x_1, y_1, ..., x_k, y_k\}$. Se $\lfloor\alpha(k+1)\rfloor - j = x_m$ ou y_m, basta retirar peças da segunda pilha de modo a obter $x_m + m$ ou $y_m - m$, respectivamente. No caso (ii), se $m = k+1-j$, podemos retirar peças de ambas as pilhas para obter o par $(x_m, x_m + m)$. Já no caso (iii), temos que $\lfloor\alpha(k+1)\rfloor - j \in \{x_0, y_0, x_1, y_1, ..., x_k, y_k\}$. Se $\lfloor\alpha(k+1)\rfloor - j = x_m$ ou y_m, basta retirar algumas peças da segunda pilha de modo a obter $x_m + m$ ou $y_m - m$, respectivamente, na segunda pilha. Do exposto, vemos que quaisquer dos movimentos (i), (ii), (iii) retornam posições vencedoras. Logo a posição $(\lfloor\alpha(k+1)\rfloor, \lfloor(\alpha+1)(k+1)\rfloor)$ é perdedora. Temos um absurdo em supor $l > k+1$, pois a posição perdedora (x_{k+1}, y_{k+1}) passa diretamente para a posição perdedora $(\lfloor\alpha(k+1)\rfloor, \lfloor(\alpha+1)(k+1)\rfloor)$. Portanto, temos que $l = k+1 = y_{k+1} - x_{k+1}$ e $y_{k+1} = \lfloor(\alpha+1)(k+1)\rfloor$. Como queríamos demonstrar.

6 CONCLUSÃO

Na pesquisa pelo assunto, percebe-se uma fonte inesgotável de diferentes tipos de jogos. Por conseguinte, a sintetização desse trabalho teve a intenção de apresentar quatro jogos bem difundidos no meio matemático.

Vários conceitos importantes da matemática podem ser introduzidos através dos jogos apresentados. Podemos retirar do jogo de Nim a decomposição única de qualquer número em soma de potências do número 2. No jogo Resta Um, utilizamos o conceito de invariância bem como o de simetria. Também houve a apresentação do Grupo de Klein. O jogo da Rã Saltadora nos mostrou a utilização da série geométrica. Por último, não menos importante, o jogo de Wythoff nos trouxe o a definição das sequências de Beatty bem como a inducao matemática, a qual é uma excelente ferramenta de resolução de problemas.

Entretanto, recomendamos que o leitor não encerre seu estudo nos jogos apresentados aqui e procure se deleitar em outros além dos quatro apresentados. Para os docentes, compartilho o aprendizado que a utilização de jogos serve como um apoio para a iniciação em assuntos matemáticos, mesmo que esses não sejam de total compreensão do aprendente. Os jogos prendem a atenção dos alunos bem como instigam a curiosidade e desenvolvem o raciocínio.

REFERÊNCIAS

BELL, George. **The Peg Solitaire Army** . 2006. Disponível em: <http://recmath.org/pegsolitaire/army/index.html>. Acesso em: 08 out. 2018.

BELL, George I.; HIRSCHBERG, Daniel S.; GARCÍA, Pablo G. The Minimum Size Required of a Solitaire Army. **Electronic Journal of Combinatorial Number Theory** , v. 01, n. 07, p. 01–03, 2007.

BOUTON, Charles L. Nim a Game With a Complete Mathematical Theory. **Annals of Mathematics** , v. 03, n. 1/4, p. 35–39, 1901.

BROWN, Ezra. **Monthly Problem 3173, Samuel Beatty** . 2016. Disponível em: <http://sections.maa.org/mddcva/MeetingFiles/Spring2016Meeting/TalkSlides/Brown.pdf>. Acesso em: 08 out. 2018.

CARNEIRO, Maria Angela B. **A magnífica história dos jogos** . 2014. Disponível em: <http://www.cartaeducacao.com.br/aulas/a-magnifica-historia-dos-jogos>. Acesso em: 08 out. 2018.

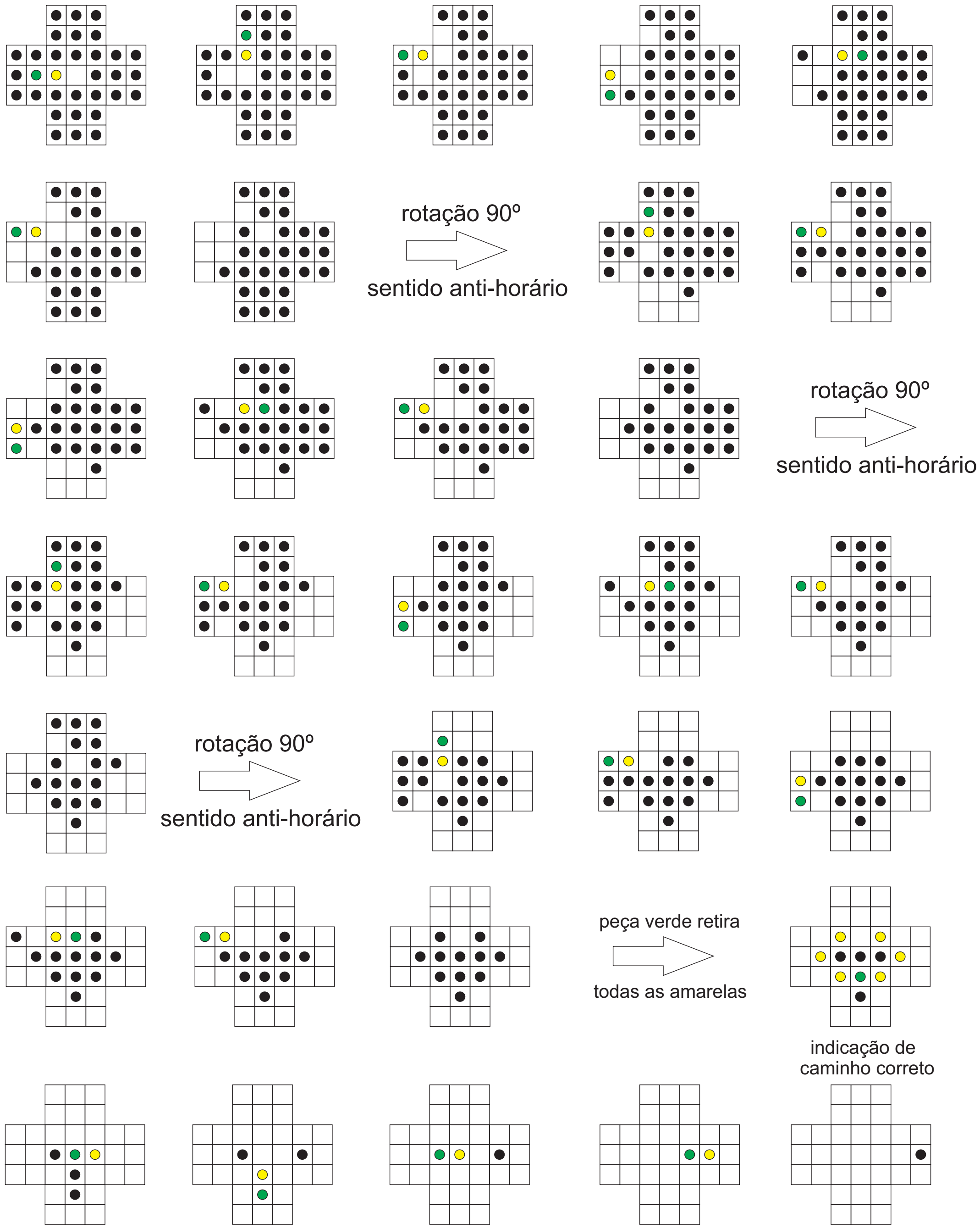
COSTA, Joseane Sousa Lima. **Nim: Uma introdução a teoria dos jogos combinatórios.** 2016. 68f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Estadual de Feira de Santana, Feira de Satana, 2016.

HIRSCHFELD-COTTON, Kimberly. The Game of Nim. **MAT Exam Expository Papers,** Nebraska-Lincoln, v. 08, p. 03, 2008.

SCUSSEL, Angela Cristina Hammann. **Didática da matemática-Jogo Resta Um** . 2010. Disponível em: <http://educarepersone.blogspot.com/2010/11/didatica-da-matematica-jogo-resta-um.html>. Acesso em: 08 out. 2018.

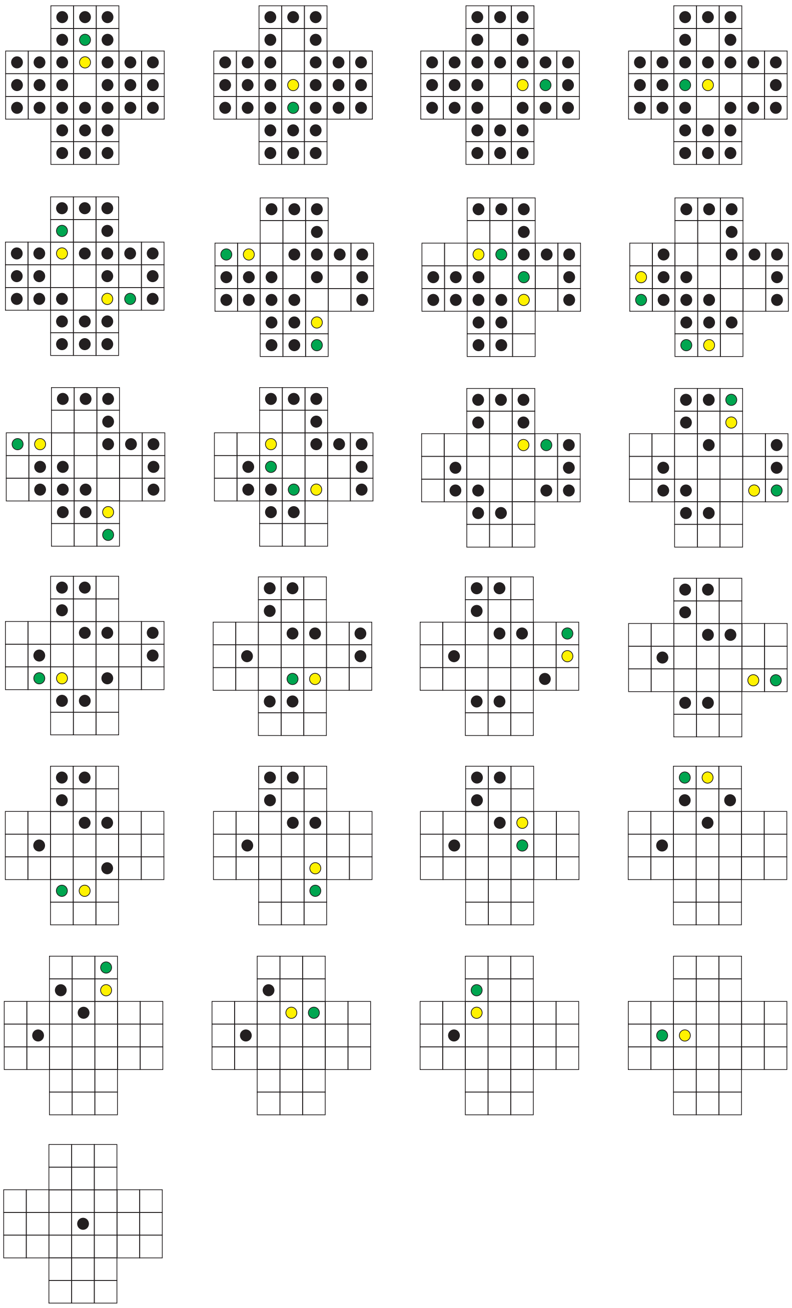
ANEXO A - SOLUÇÕES DO JOGO RESTA UM

Figura 67 – Uma solução para o jogo



Fonte: Próprio autor.

Figura 68 – Outra solução para o jogo



Fonte: Próprio autor.