



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL**

JOSÉ CLAIRTO ROCHA FERREIRA

COORDENADAS BARICÊNTRICAS

FORTALEZA

2018

JOSÉ CLAIRTO ROCHA FERREIRA

COORDENADAS BARICÊNTRICAS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática em Rede Nacional do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Frederico Vale Girão.

FORTALEZA

2018

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca Universitária

Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

F441c Ferreira, José Clairto Rocha.
Coordenadas baricêntricas / José Clairto Rocha Ferreira. – 2018.
61 f. : il.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências,
Departamento de Matemática, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede
Nacional, Fortaleza, 2018.

Orientação: Prof. Dr. Frederico Vale Girão.

1. Coordenadas baricêntricas. 2. Geometria analítica. 3. Resolução de problemas
de geometria plana. I. Título.

CDD 510

JOSÉ CLAIRTO ROCHA FERREIRA

COORDENADAS BARICÊNTRICAS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática em Rede Nacional do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Aprovada em: 25 / 10 / 2018.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Frederico Vale Girão (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Jonatan Floriano da Silva
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Wesley Marinho Lozório
Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira (UNILAB)

À minha família

AGRADECIMENTOS

A Deus, por ter-me permitido a realização deste sonho.

À minha amada esposa, Railândia Sousa Silva, pelo incentivo, compreensão e apoio em todos os momentos em que precisei.

Aos meus amados pais, Francisco Euclides Lino Ferreira e Maria Pereira da Rocha Ferreira, que me permitiram estudar, numa época em que a escola não era a primeira opção para os filhos de agricultores.

À minha Diretora, Silvandira Mesquita Sousa, pela compreensão nos períodos de provas.

Aos meus amigos, Anderson Pedrosa e Marcelo Queiroz, pela ajuda no decorrer do curso.

Ao Professor José Osterne Bernardo Coelho, por despertar em mim o gosto pela Matemática e pela Docência ainda no Ensino Fundamental.

Ao Professor José Osorio de Figueiredo, pela colaboração neste trabalho.

A todos os professores que compartilharam seus conhecimentos comigo durante o curso.

Ao Professor Dr. Frederico Vale Girão, pela disponibilidade, paciência e compreensão na orientação deste trabalho.

"Tudo o que é verdadeiro, tudo o que é respeitável, tudo o que é justo, tudo o que é puro, tudo o que é amável, tudo o que é de boa forma, se alguma virtude há e se algum louvor existe, seja isso o que ocupe o vosso pensamento (FILIPENSES 4:8)."

RESUMO

O objetivo deste trabalho é apresentar a técnica de resolução de problemas de geometria plana chamada *coordenadas baricêntricas* e mostrar que as soluções de alguns problemas tornam-se mais simples com o uso desta técnica. Iniciamos o trabalho com o desenvolvimento da teoria básica desta técnica, desde a definição de coordenadas baricêntricas e do cálculo das coordenadas baricêntricas de alguns pontos notáveis do triângulo, passando pela equação da reta, fórmula da distância entre dois pontos, notação de Conway e condições de paralelismo e perpendicularidade. Depois disso, aplicamos esta técnica para resolver alguns problemas, muitos deles oriundos de competições olímpicas de Matemática. Finalizamos o trabalho indicando uma possibilidade da inserção deste assunto no currículo do ensino médio.

Palavras-chave: Coordenadas baricêntricas. Geometria analítica. Resolução de problemas de geometria plana.

ABSTRACT

The purpose of this dissertation is to present the plane geometry problem solving technique known as *barycentric coordinates* and to show that the solution of some problems become simpler with the use of this technique. We begin by introducing the basic theory of this technique, starting with the definition of barycentric coordinates and the computation of the barycentric coordinates of some special points of a triangle, passing through the equation of a line, the formula for the distance between two points, Conway's notation and the parallelism and perpendicularity conditions. After this, we apply this technique to solve some problems, many of them coming from Mathematics competitions. We conclude with an analysis of the possibility of insertion of this subject in the high school curriculum.

Keywords: Barycentric coordinates. Analytic Geometry. Plane geometry problem solving.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Representação do ponto P	13
Figura 2 – Baricentro G do triângulo ABC	15
Figura 3 – Incentro I do triângulo ABC	16
Figura 4 – Circuncentro do triângulo ABC	17
Figura 5 – Ex-incentros do triângulo ABC	19
Figura 6 – Representação das coordenadas baricêntricas de P	22
Figura 7 – Traço sobre BC	23
Figura 8 – Ponto divisor da mediana XA	25
Figura 9 – Coordenadas dos traços X, Y e Z	26
Figura 10 – Ortocentro do triângulo ABC	27
Figura 11 – Pontos de tangência do incírculo com os lados do triângulo ABC	29
Figura 12 – Ponto de Gergonne G_e	30
Figura 13 – Pontos de tangência do incírculo com os lados do triângulo ABC	31
Figura 14 – Ponto de Nagel N_a	32
Figura 15 – Centro de Spieker S_p do triângulo ABC	33
Figura 16 – Perpendicularidade entre retas	39
Figura 17 – Distância entre os ponto P e Q	42
Figura 18 – Colinearidade do incentro, baricentro e ponto de Nagel	44
Figura 19 – Um exemplo geométrico para o problema	45
Figura 20 – Colinearidade dos pontos M, I e N	48
Figura 21 – Pontos D, E e I não alinhados	49
Figura 22 – Pontos D, E e I alinhados	49
Figura 23 – Interseção das retas de Euler	50
Figura 24 – Triângulo MH_bH_c	52
Figura 25 – Congruência dos triângulos MNP e $M_aM_bM_c$	53
Figura 26 – Ponto médio de IN_a	54
Figura 27 – Raios dos círculos inscritos em ABB' e em ACB'	55
Figura 28 – Coordendas baricêntricas do vértice A	56
Figura 29 – Ex-incentro relativo a I_1I_2	57
Figura 30 – Um exemplo geométrico para o problema	58

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

\overleftrightarrow{AB}	Reta passando pelos ponto A e B
(ABC)	Área euclidiana do triângulo ABC
$ AB $	Comprimento do segmento de reta AB
\hat{A}	Ângulo relativo ao vértice A
ABC	Triângulo cujos vértices são os pontos A , B e C
S_{ABC}	Área com sinal do triângulo ABC
$*$	$\begin{vmatrix} -(pS_B - rc^2) & rS_A \\ qS_A & (qb^2 - pS_C) \end{vmatrix}$
s_p	Soma das coordenadas do ponto P

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	12
2	COORDENADAS BARICÊNTRICAS	13
2.1	Área com sinal e coordenadas baricêntricas	14
2.2	Coordenadas baricêntricas do baricentro, incentro e circuncentro	15
2.3	Coordenadas baricêntricas dos ex-incentros	19
2.4	Área com sinal do triângulo a partir das coordenadas baricên- tricas dos vértices	20
2.5	Tipos de coordenadas baricêntricas	21
2.6	Teorema de Ceva para coordenadas baricêntricas	23
2.7	Coordenadas Baricêntricas do ortocentro	26
2.8	Coordenadas Baricêntricas do Ponto de Gergonne	28
2.9	Coordenadas Baricêntricas do Ponto de Nagel	30
2.10	Coordenadas Baricêntricas do Centro de Spieker	31
3	EQUAÇÃO DA RETA EM COORDENADAS BARICÊNTRI- CAS	34
3.1	Notação de Conway	34
3.2	Equação da reta	35
3.3	Retas paralelas em coordenadas baricêntricas	37
3.4	Retas perpendiculares em coordenadas baricêntricas	39
3.5	Distância entre dois pontos em coordenadas baricêntricas . . .	41
4	PROBLEMAS	44
5	CONCLUSÃO	60
	REFERÊNCIAS	61

1 INTRODUÇÃO

O propósito deste trabalho é apresentar um texto introdutório sobre coordenadas baricêntricas, com ênfase no estudo de alguns pontos notáveis do triângulo e na representação da reta, utilizando estas coordenadas. Utilizaremos resultados da geometria plana e analítica durante o texto sem demonstração formal. Buscaremos mostrar uma técnica eficaz que pode ser utilizada na resolução de problemas de geometria plana, especialmente os que envolvem pontos notáveis do triângulo, bem como problemas de geometria analítica no tocante a retas, interseção entre retas e distância entre pontos.

Este trabalho incidirá principalmente sobre as coordenadas baricêntricas referentes a um triângulo, relativamente as quais, apresentaremos a sua definição de acordo com Figueiredo (2008), exemplificando a sua aplicação com a apresentação das coordenadas de alguns centros do triângulo.

Referir-nos-emos ao sinal das coordenadas de um ponto, salientando que ele varia consoante o sentido segundo o qual indicamos os vértices do triângulo de referência, ou de acordo com a posição do ponto relativamente a tal triângulo e salientamos a facilidade em obter as coordenadas dos traços de um ponto quando se utiliza este sistema de coordenadas.

No segundo capítulo, expomos a parte teórica do trabalho, explorando alguns pontos notáveis do triângulo como baricentro, incentro, circuncentro, ortocentro, ex-incentros, ponto de Nagel, ponto de Gergonne e centro de Spieker. Fazemos a demonstração de como exibir esses pontos utilizando, especialmente, três estratégias básicas: o conceito de traço, área com sinal e interseção de retas.

No terceiro capítulo, abordamos a representação da equação da reta em coordenadas baricêntricas. Mostramos a representação algébrica desta equação, e enfatizamos a noção de paralelismo e perpendicularismo, além da interseção entre retas. Finalizamos o capítulo mostrando uma relação de como calcular a distância entre dois pontos que estão nestas coordenadas.

No quarto capítulo, aplicamos o que foi visto nos capítulos anteriores. Realizamos a resolução de alguns exercícios, problemas olímpicos e algumas demonstrações. Aqui, percebemos que alguns problemas tornam-se mais simples em coordenadas baricêntricas, especialmente porque o caminho a ser percorrido para a solução é claro. No entanto, nem todos os problemas que podem ser solucionados através de baricêntricas têm solução simples. Para um aprofundamento maior sobre o assunto, recomendamos (BORTOLOSSI e FIGUEIREDO, 2017).

2 COORDENADAS BARICÊNTRICAS

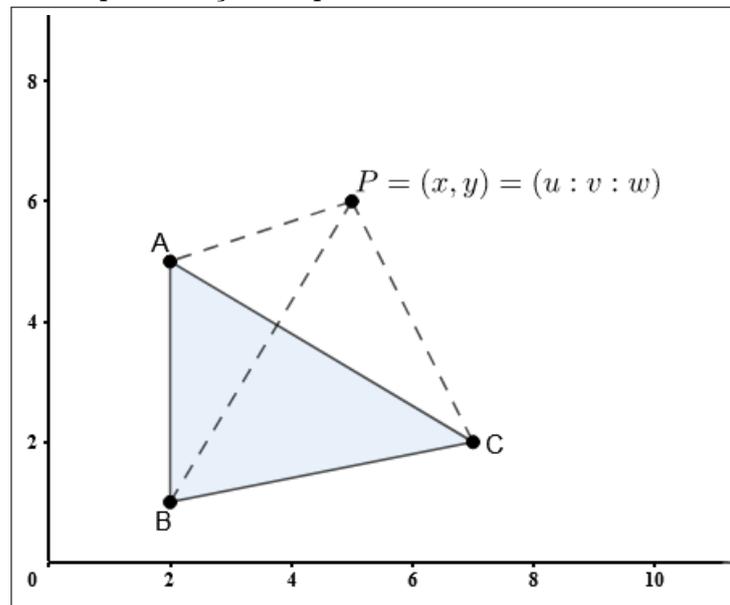
Neste capítulo, apresentaremos a definição de coordenadas baricênticas e relacionaremos estas coordenadas com a área com sinal dos subtriângulos formados a partir de um ponto do plano ligados aos vértices do triângulo de referência. Exibiremos as coordenadas baricênticas de alguns pontos notáveis do triângulo como baricentro, incentro, circuncentro, ortocentro, ex-incentros, ponto de Nagel, ponto de Gergonne e centro de Spieker.

Definição 1. *Sejam A , B e C os vértices de um triângulo ABC e P um ponto do plano. Dizemos que u , v e w são as coordenadas baricênticas de P em relação ao triângulo ABC se o ponto P pode ser obtido como média ponderada dos vértices A , B e C com pesos, u , v e w , respectivamente. Assim,*

$$P = \frac{uA + vB + wC}{u + v + w}.$$

Desta forma o ponto P é identificado pelos pesos através da notação $P = (u:v:w)$.

Figura 1 – Representação do ponto P



Fonte: O autor

Podemos representar o mesmo ponto P por mais de uma tripla de coordenadas baricênticas. Observemos que se $P = (u:v:w)$ e $Q = (ku:kv:kw)$, com $k \neq 0$, então

$$Q = \frac{kuA + kvB + kwC}{ku + kv + kw} = \frac{uA + vB + wC}{u + v + w} = P,$$

logo $P = Q$.

2.1 Área com sinal e coordenadas baricêntricas

Definição 2. *Sejam A , B e C três pontos do plano e (ABC) a área euclidiana de um triângulo ABC . A área com sinal S_{ABC} é definida como sendo $S_{ABC} = 0$, se A , B e C são colineares, $S_{ABC} = +(ABC)$, se A , B e C estão dispostos no sentido anti-horário e $S_{ABC} = -(ABC)$, se A , B e C estão dispostos no sentido horário.*

Um ponto P do plano determina três subtriângulos PBC , PAC e PAB que satisfazem a relação $S_{ABC} = S_{PBC} + S_{PCA} + S_{PAB}$, obedecendo o conceito de área com sinal.

Proposição 1. *Sejam A , B e C vértices de um triângulo de referência ABC e P um ponto qualquer do plano. As coordenadas baricêntricas de P podem ser dadas por*

$$P = (S_{PBC} : S_{PCA} : S_{PAB}).$$

Demonstração. No triângulo ABC , sejam $A = (x_A, y_A)$, $B = (x_B, y_B)$ e $C = (x_C, y_C)$ as coordenadas dos seus vértices e $P = (x_P, y_P)$ um ponto qualquer do plano. Sabemos que

$$\begin{vmatrix} x_P & x_P & y_P & 1 \\ x_A & x_A & y_A & 1 \\ x_B & x_B & y_B & 1 \\ x_C & x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

pois a primeira coluna é igual à segunda. Calculando o determinante pela primeira coluna, temos

$$x_P \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} - x_A \begin{vmatrix} x_P & y_P & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} + x_B \begin{vmatrix} x_P & y_P & 1 \\ x_A & y_A & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} - x_C \begin{vmatrix} x_P & y_P & 1 \\ x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

o que implica em

$$x_P \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} - x_A \begin{vmatrix} x_P & y_P & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} - x_B \begin{vmatrix} x_P & y_P & 1 \\ x_C & y_C & 1 \\ x_A & y_A & 1 \end{vmatrix} - x_C \begin{vmatrix} x_P & y_P & 1 \\ x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Desta forma,

$$x_P(2.S_{ABC}) - x_A(2.S_{PBC}) - x_B(2.S_{PCA}) - x_C(2.S_{PAB}) = 0,$$

ou seja,

$$S_{ABC}x_P = S_{PBC}x_A + S_{PCA}x_B + S_{PAB}x_C.$$

Analogamente,

$$\begin{vmatrix} y_P & x_P & y_P & 1 \\ y_A & x_A & y_A & 1 \\ y_B & x_B & y_B & 1 \\ y_C & x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

o que nos dá

$$S_{ABC} \cdot y_P = S_{PBC} \cdot y_A + S_{PCA} \cdot y_B + S_{PAB} \cdot y_C.$$

Assim, pelas duas relações anteriormente descritas temos

$$S_{ABC} \cdot P = S_{PBC} \cdot A + S_{PCA} \cdot B + S_{PAB} \cdot C.$$

Como $S_{ABC} = S_{PBC} + S_{PCA} + S_{PAB}$, concluímos que

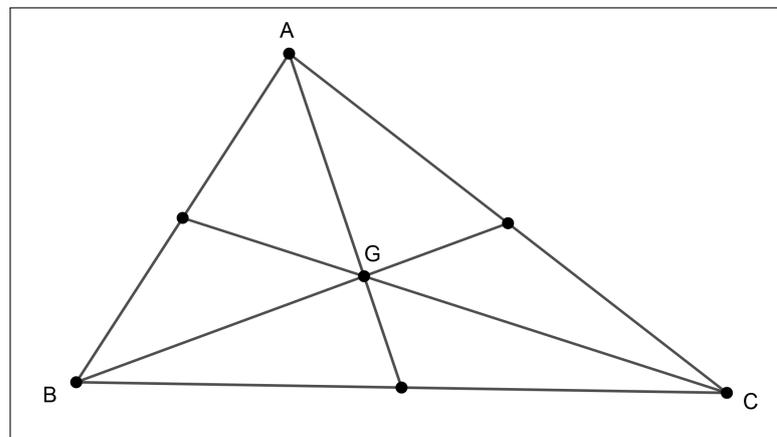
$$P = \frac{S_{PBC} \cdot A + S_{PCA} \cdot B + S_{PAB} \cdot C}{S_{PBC} + S_{PCA} + S_{PAB}}.$$

Isso mostra que P é média ponderada dos vértices A , B e C com pesos S_{PBC} , S_{PCA} e S_{PAB} , respectivamente, portanto, $P = (S_{PBC} : S_{PCA} : S_{PAB})$. Assim, podemos afirmar que as coordenadas baricêntricas são proporcionais às áreas com sinal dos subtriângulos que P forma com os vértices do triângulo de referência. Portanto, sendo $P = (u : v : w)$, então $(u : v : w) = (S_{PBC} : S_{PCA} : S_{PAB})$. \square

2.2 Coordenadas baricêntricas do baricentro, incentro e circuncentro

Proposição 2. *O baricentro G , também designado por centro de massa, em coordenadas baricêntricas é representado por $G=(1:1:1)$.*

Figura 2: Baricentro G do triângulo ABC



Fonte: O autor

Demonstração. Seja G o baricentro do triângulo ABC . Assim, pela Proposição 1,

$$G = (S_{GBC} : S_{GCA} : S_{GAB}).$$

Da Geometria Euclidiana, sabemos que o baricentro de um triângulo divide-o em três subtriângulos de mesma área. Deste modo, compreende-se que os triângulos GBC , GCA e GAB têm a mesma área. Como S_{GBC} é não nula, podemos multiplicar o terno que define G , pelo inverso do valor de tal área, resultando em

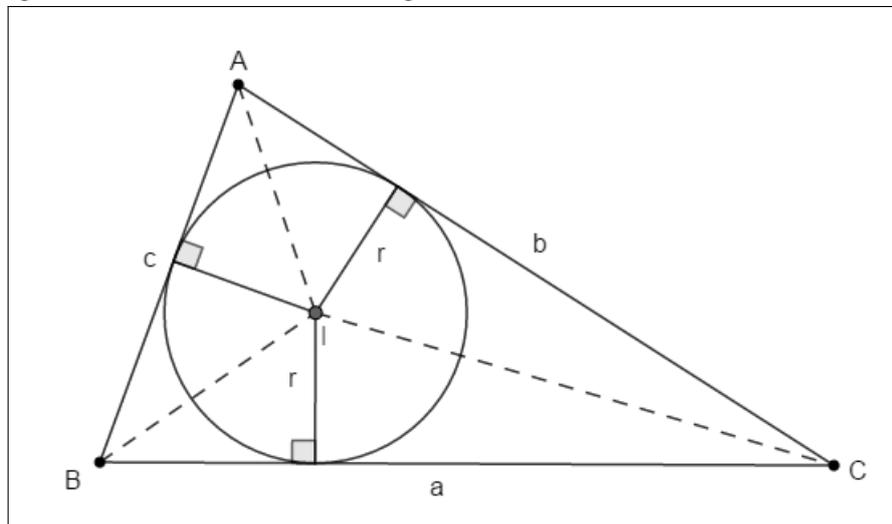
$$G = (1 : 1 : 1).$$

□

Proposição 3. *Em coordenadas baricêntricas, o incentro I é representado por $I = (a : b : c)$, sendo a, b, c as medidas dos respectivos lados $|BC|$, $|AC|$ e $|AB|$ do triângulo de referência.*

Demonstração. O Incentro é o ponto de interseção das bissetrizes internas de um triângulo.

Figura 3 – Incentro I do triângulo ABC



Fonte: O autor

Sendo a , b e c as medidas euclidianas dos lados e r o raio da circunferência inscrita no triângulo ABC , temos que as áreas dos triângulos IBC , ICA e IAB são dadas respectivamente por

$$S_{IBC} = \frac{ar}{2}, \quad S_{ICA} = \frac{br}{2}, \quad S_{IAB} = \frac{cr}{2}.$$

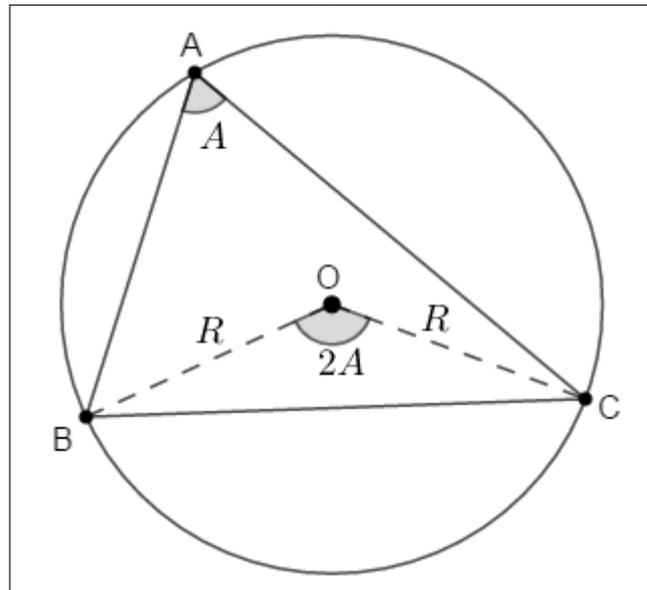
Assim, pela Proposição 1, podemos concluir que

$$I = (S_{IBC} : S_{ICA} : S_{IAB}) = \left(\frac{ar}{2} : \frac{br}{2} : \frac{cr}{2}\right) = (a : b : c).$$

□

Proposição 4. Em coordenadas baricêntricas, o circuncentro O é representado por $O = (a^2(b^2 + c^2 - a^2) : b^2(a^2 + c^2 - b^2) : c^2(a^2 + b^2 - c^2))$. Sendo a, b, c as medidas dos respectivos lados $|BC|$, $|AC|$ e $|AB|$ do triângulo de referência.

Figura 4 – Circuncentro do triângulo ABC



Fonte: O autor

Demonstração. Observemos na figura, onde R é o raio do círculo circunscrito ao triângulo $\triangle ABC$, que

$$\begin{aligned} S_{OBC} &= \frac{R^2 \text{sen}(2\hat{A})}{2} \\ &= \frac{R^2 2 \text{sen}(\hat{A}) \cos(\hat{A})}{2} \\ &= R^2 \text{sen}(\hat{A}) \cos(\hat{A}). \end{aligned}$$

De maneira análoga, temos que

$$\begin{aligned} S_{OCA} &= \frac{R^2 \text{sen}(2\hat{B})}{2} \\ &= \frac{R^2 2 \text{sen}(\hat{B}) \cos(\hat{B})}{2} \\ &= R^2 \text{sen}(\hat{B}) \cos(\hat{B}) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} S_{OAB} &= \frac{R^2 \text{sen}(2\hat{C})}{2} \\ &= \frac{R^2 2 \text{sen}(\hat{C}) \cos(\hat{C})}{2} \\ &= R^2 \text{sen}(\hat{C}) \cos(\hat{C}). \end{aligned}$$

Daí, concluimos que

$$\begin{aligned} O &= (S_{OBC} : S_{OCA} : S_{OAB}) \\ &= (R^2 \text{sen}(\hat{A}) \cos(\hat{A}) : R^2 \text{sen}(\hat{B}) \cos(\hat{B}) : R^2 \text{sen}(\hat{C}) \cos(\hat{C})). \end{aligned}$$

Esta é a representação exata das coordenadas baricêntricas do circuncêntrico O , mas como vimos anteriormente, um mesmo ponto pode ser representado por mais de uma tripla de coordenadas. Assim, podemos escrever

$$O = (2R \text{sen}(\hat{A}) \cos(\hat{A}) : 2R \cos(\hat{B}) \text{sen}(\hat{B}) : 2R \text{sen}(\hat{C}) \cos(\hat{C})).$$

Da lei dos senos, temos

$$\begin{aligned} \text{sen}(\hat{A}) &= \frac{a}{2R}, \\ \text{sen}(\hat{B}) &= \frac{b}{2R} \end{aligned}$$

e

$$\text{sen}(\hat{C}) = \frac{c}{2R}.$$

Pela lei dos cossenos, podemos escrever

$$\cos(\hat{A}) = \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2bc},$$

$$\cos(\hat{B}) = \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2ac}$$

e

$$\cos(\hat{C}) = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$

Substituindo esses valores na expressão, reescrevemos

$$\begin{aligned} O &= \left(a \left(\frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2bc} \right) : b \left(\frac{a^2 - b^2 + c^2}{2ac} \right) : c \left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \right) \right) \\ &= \left(a^2 \left(\frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2abc} \right) : b^2 \left(\frac{a^2 - b^2 + c^2}{2abc} \right) : c^2 \left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2abc} \right) \right). \end{aligned}$$

Multiplicando estas coordenadas por $2abc$, temos

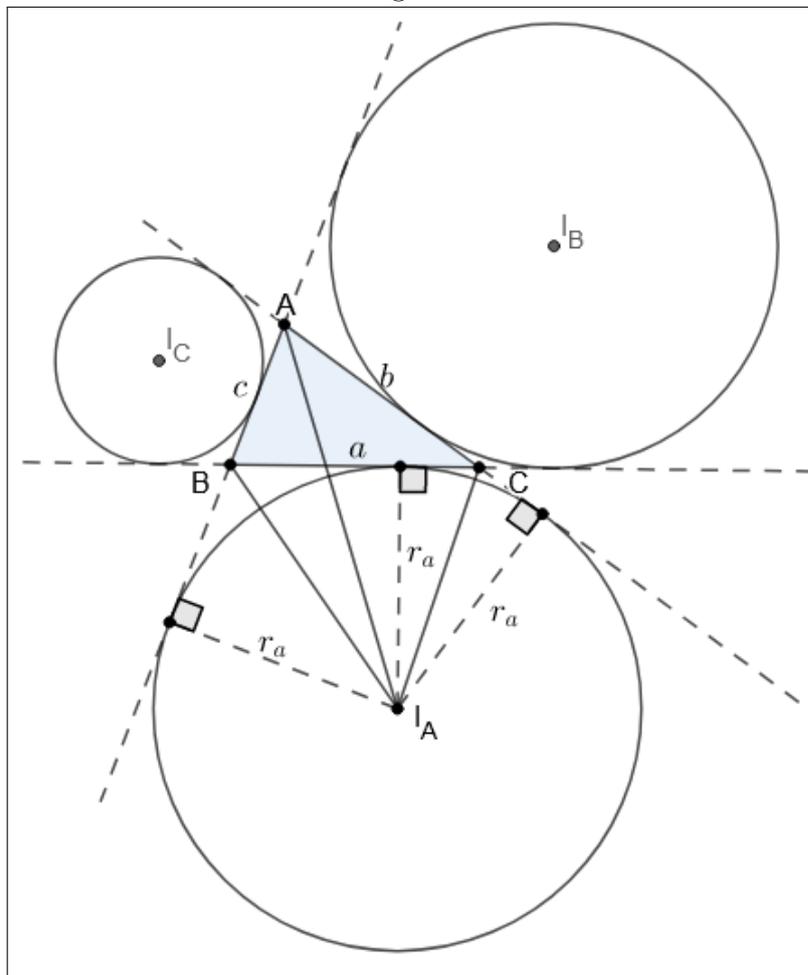
$$O = (a^2(-a^2 + b^2 + c^2) : b^2(a^2 - b^2 + c^2) : c^2(a^2 + b^2 - c^2)).$$

□

2.3 Coordenadas baricêntricas dos ex-incentros

Proposição 5. *Sejam a, b e c as medidas dos respectivos lados $|BC|$, $|AC|$ e $|AB|$ do triângulo de referência e I_A, I_B e I_C os centros das circunferências ex-inscritas, tangentes aos lados que se opõem a A, B e C , respectivamente. Então suas coordenadas baricêntricas são dadas por $I_A = (-a : b : c)$, $I_B = (a : -b : c)$ e $I_C = (a : b : -c)$.*

Figura 5 – Ex-incentros do triângulo ABC



Fonte: O autor

Demonstração. Na figura acima, temos três círculos tangentes aos lados do triângulo de referência ABC . Os círculos são chamados círculos ex-inscritos e os centros destes círculos são os ex-incentros, cada um relativo a um lado do triângulo, como podemos

observar. Consideraremos aqui o círculo ex-inscrito tangente ao lado $|BC|$ e calcularemos as coordenadas baricêntricas do ex-incentro I_A . Os outros casos são análogos.

Sendo r_a o raio desse círculo ex-inscrito, temos que

$$S_{I_A BC} = -\frac{ar_a}{2}, \quad S_{I_A CA} = \frac{br_a}{2} \quad \text{e} \quad S_{I_A AB} = \frac{cr_a}{2}.$$

Assim, concluímos que as coordenadas baricêntricas de do ex-incentro I_A são dadas por

$$\begin{aligned} I_A &= (S_{I_A BC} : S_{I_A CA} : S_{I_A AB}) \\ &= \left(-\frac{ar_a}{2} : \frac{br_a}{2} : \frac{cr_a}{2}\right) \\ &= (-a : b : c). \end{aligned}$$

Analogamente, $I_B = (a : -b : c)$ e $I_C = (a : b : -c)$. \square

Podemos observar ainda que tendo em conta que $I = (a : b : c)$, a característica que diferencia I_A , I_B e I_C de I é o fato de se situarem em lados opostos das retas $|BC|$, $|AC|$ e $|AB|$, respectivamente, havendo portanto, apenas alteração de sinal.

2.4 Área com sinal do triângulo a partir das coordenadas baricêntricas dos vértices

Proposição 6. *Sejam $P = (u_P : v_P : w_P)$, $Q = (u_Q : v_Q : w_Q)$ e $R = (u_R : v_R : w_R)$ as coordenadas baricêntricas dos pontos P , Q e R em relação ao triângulo de referência ABC . Se s_P , s_Q e s_R são números reais não nulos que representam a soma das coordenadas baricêntricas desses pontos, então a área com sinal do triângulo PQR é dada por*

$$S_{PQR} = \frac{S_{ABC}}{s_P s_Q s_R} \begin{vmatrix} u_P & v_P & w_P \\ u_Q & v_Q & w_Q \\ u_R & v_R & w_R \end{vmatrix}.$$

Demonstração. Sejam $P = (u_P : v_P : w_P)$, $Q = (u_Q : v_Q : w_Q)$ e $R = (u_R : v_R : w_R)$ as coordenadas baricêntricas dos pontos P , Q e R em relação ao triângulo de referência $\triangle ABC$ e sejam $s_P = u_P + v_P + w_P \neq 0$, $s_Q = u_Q + v_Q + w_Q \neq 0$ e $s_R = u_R + v_R + w_R \neq 0$. Se P_i , A , B e C são pontos com as respectivas coordenadas cartesianas, $P_i = (x_{P_i}, y_{P_i})$, $A = (x_A, y_A)$, $B = (x_B, y_B)$ e $C = (x_C, y_C)$, então, para cada i temos

$$P_i = (x_{P_i}, y_{P_i}) = \frac{u_i A + v_i B + w_i C}{u_i + v_i + w_i} = \left(\frac{u_i x_A + v_i x_B + w_i x_C}{s_{P_i}}, \frac{u_i y_A + v_i y_B + w_i y_C}{s_{P_i}} \right)$$

Desta forma, a área com sinal S_{PQR} do triângulo PQR é dada por

$$S_{PQR} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_P & y_P & 1 \\ x_Q & y_Q & 1 \\ x_R & y_R & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \frac{u_P x_A + v_P x_B + w_P x_C}{s_P} & \frac{u_P y_A + v_P y_B + w_P y_C}{s_P} & 1 \\ \frac{u_Q x_A + v_Q x_B + w_Q x_C}{s_Q} & \frac{u_Q y_A + v_Q y_B + w_Q y_C}{s_Q} & 1 \\ \frac{u_R x_A + v_R x_B + w_R x_C}{s_R} & \frac{u_R y_A + v_R y_B + w_R y_C}{s_R} & 1 \end{vmatrix}$$

Multiplicando-se as linhas 1, 2 e 3 por s_P , s_Q e s_R , respectivamente, obtemos

$$S_{PQR} = \frac{1}{2} \frac{\begin{vmatrix} u_P x_A + v_P x_B + w_P x_C & u_P y_A + v_P y_B + w_P y_C & s_P \\ u_Q x_A + v_Q x_B + w_Q x_C & u_Q y_A + v_Q y_B + w_Q y_C & s_Q \\ u_R x_A + v_R x_B + w_R x_C & u_R y_A + v_R y_B + w_R y_C & s_R \end{vmatrix}}{s_P s_Q s_R} \Rightarrow$$

$$S_{PQR} = \frac{1}{2 s_P s_Q s_R} \begin{vmatrix} u_P & v_P & w_P \\ u_Q & v_Q & w_Q \\ u_R & v_R & w_R \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow$$

$$S_{PQR} = \frac{1}{2 s_P s_Q s_R} \begin{vmatrix} u_P & v_P & w_P \\ u_Q & v_Q & w_Q \\ u_R & v_R & w_R \end{vmatrix} 2 S_{ABC} = \frac{S_{ABC}}{s_P s_Q s_R} \begin{vmatrix} u_P & v_P & w_P \\ u_Q & v_Q & w_Q \\ u_R & v_R & w_R \end{vmatrix}.$$

Observemos que quando os pontos P , Q e R estão balanceados com soma das coordenadas igual a 1, a área com sinal do triângulo PQR é dada por

$$S_{PQR} = S_{ABC} \begin{vmatrix} u_P & v_P & w_P \\ u_Q & v_Q & w_Q \\ u_R & v_R & w_R \end{vmatrix}.$$

□

Corolário 1. *Os pontos P , Q e R estão alinhados se, e somente se, $S_{PQR} = 0$, ou seja, se, e somente se, o determinante da matriz formada pelas coordenadas baricêntricas de P , Q e R é nulo.*

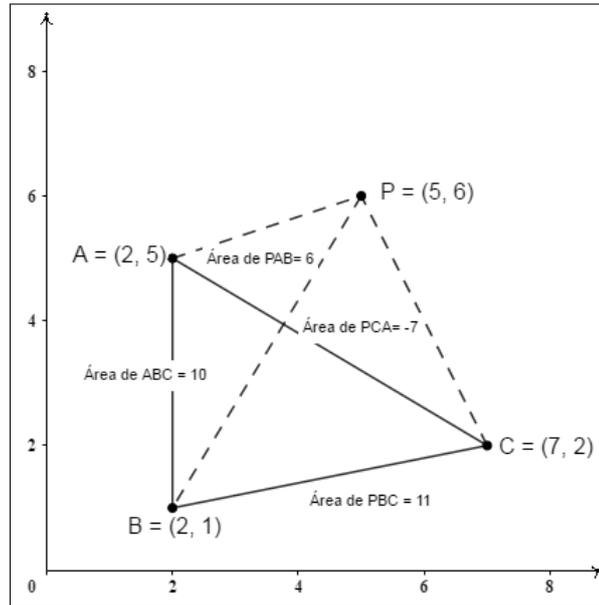
2.5 Tipos de coordenadas baricêntricas

Definição 3. *Sejam A , B e C vértices do triângulo de referência ABC . Se P é um ponto qualquer do plano de coordenadas baricêntricas $P = (u : v : w)$, suas coordenadas baricêntricas são classificadas como exatas, quando $u + v + w = S_{ABC}$, isto é, $u = S_{PBC}$, $v = S_{PCA}$ e $w = S_{PAB}$ e homogêneas, quando $u + v + w = 1$.*

Vejamos o seguinte exemplo, tomando-se o o triângulo de vértices $A = (2, 5)$,

$B = (2, 1)$ e $C = (7, 2)$ como referência, e o ponto de coordenadas cartesianas $P = (5, 6)$.

Figura 6 – Representação das coordenadas baricêntricas de P



Fonte: O autor

A média ponderada M_P dos vértices A , B e C com pesos u , v e w é

$$M_P = (5, 6) = \frac{uA + vB + wC}{u + v + w}$$

$$\Rightarrow (u + v + w)(5, 6) = u(2, 5) + v(2, 1) + w(7, 2)$$

$$\Rightarrow (5u + 5v + 5w, 6u + 6v + 6w) = (2u + 2v + 7w, 5u + v + 2w),$$

assim

$$5u + 5v + 5w = 2u + 2v + 7w$$

$$6u + 6v + 6w = 5u + v + 2w.$$

$$3u + 3v = 2w$$

$$u + 5v = -4w$$

Tomando $w = 1$ no sistema encontramos $v = \frac{-7}{6}$ e $u = \frac{11}{6}$. Logo, $P = (\frac{11}{6} : \frac{-7}{6} : 1)$ são as coordenadas baricêntricas de P . Observemos que para $w = 6$, temos que $P = (11 : -7 : 6) = (S_{PBC} : S_{PCA} : S_{PAB})$ que são as coordenadas baricêntricas *exatas* de P , bem como para $w = \frac{3}{5}$, $P = (\frac{33}{30} : \frac{-21}{30} : \frac{3}{5})$ são as coordenadas baricêntricas *homogêneas* de P em relação ao triângulo de referência dado. É sempre possível obter as coordenadas baricêntricas de um ponto do plano na forma homogênea, para isso basta dividir cada componente pela soma das três coordenadas. Assim, sendo $P = (u : v : w)$,

com $u + v + w \neq 0$, as coordenadas baricêntricas de P na forma homogênea são dadas por

$$P = \left(\frac{u}{u+v+w} : \frac{v}{u+v+w} : \frac{w}{u+v+w} \right).$$

Observemos que

$$\frac{u}{u+v+w} + \frac{v}{u+v+w} + \frac{w}{u+v+w} = \frac{u+v+w}{u+v+w} = 1.$$

Quando dois pontos têm a soma das coordenadas baricêntricas iguais, dizemos que esses pontos estão com as coordenadas baricêntricas balanceadas. Portanto, para balancearmos dois pontos, basta escrevê-los na forma homogênea.

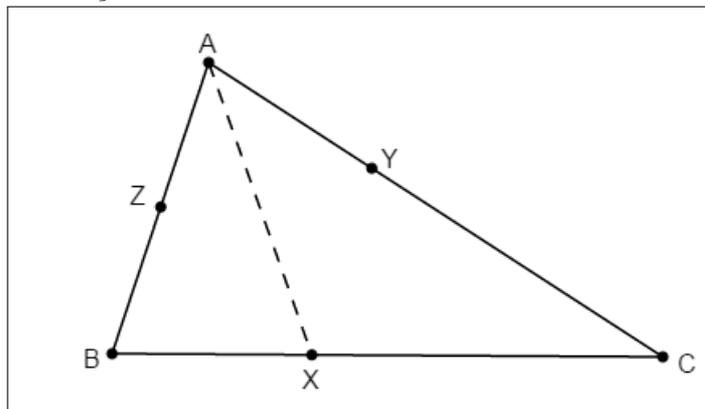
2.6 Teorema de Ceva para coordenadas baricêntricas

Definição 4. Dado um ponto P e um triângulo de referência ABC , os pontos onde as cevianas do ponto P cortam os lados opostos do triângulo de referência, são denominados *traços do ponto P* .

Percebemos que os *traços* são pontos que estão sobre os lados do triângulo de referência. Nosso próximo objetivo é determinar as coordenadas baricêntricas desses pontos, bem como as coordenadas do ponto P .

Proposição 7. Seja ABC um triângulo de referência e X um ponto do plano. O ponto X pertence ao lado BC de ABC se, e somente se, $X = (0 : |XC| : |BX|)$.

Figura 7 – Traço sobre BC .



Fonte: O autor

Demonstração. Seja X um ponto pertencente ao lado BC do triângulo ABC . Logo, $X = (S_{XBC} : S_{XCA} : S_{XAB})$. Como B , X e C são colineares, temos que $S_{XBC} = 0$. Temos ainda

$$\frac{S_{XCA}}{S_{XAB}} = \frac{|XC|}{|BX|}.$$

Assim, $X = (0 : |XC| : |BX|)$.

Reciprocamente, se $X = (0 : |XC| : |BX|)$, então $S_{XBC} = 0$. Isto mostra que os pontos

B , X e C são colineares. Portanto, X pertence ao lado BC . Procedendo de maneira análoga, pode-se concluir que o ponto Y pertence ao lado AC do triângulo ABC se, e somente se, $Y = (|CY| : 0 : |YA|)$ e que o ponto Z pertence ao lado AB do triângulo ABC se, e somente se, $Z = (|ZB| : |AZ| : 0)$. \square

Proposição 8. *Se P tem coordenadas baricêntricas $(x : y : z)$, então as coordenadas baricêntricas dos traços serão*

$$X = (0 : y : z), \quad Y = (x : 0 : z), \quad Z = (x : y : 0).$$

Demonstração. A relação entre áreas dos triângulos PAB e PCA é igual a razão entre z e y . Como a área de PAB pode ser definida pela diferença das áreas dos triângulos DAB com DPB e a área de PCA resulta da diferença entre a de DCA com DCP , temos

$$\frac{z}{y} = \frac{S_{PAB}}{S_{PCA}} = \frac{S_{DAB} - S_{DPB}}{S_{DCA} - S_{DCP}}.$$

Por outro lado, a razão entre as áreas dos triângulos DAB e DCA é igual à razão entre as áreas dos triângulos DPB e DCP , visto que os triângulos envolvidos em cada razão têm a mesma altura e os primeiros triângulos de cada razão têm a mesma base, o mesmo acontecendo com os segundos. Desta forma, utilizando o fato de a razão entre áreas de triângulos que têm a mesma altura ser igual a razão das suas bases, temos

$$\frac{S_{DAB}}{S_{DCA}} = \frac{S_{DPB}}{S_{DCP}} = \frac{S_{DAB} - S_{DPB}}{S_{DCA} - S_{DCP}} = \frac{|BD|}{|DC|}.$$

Assim, pelas igualdades apresentadas, temos que

$$\frac{z}{y} = \frac{S_{PAB}}{S_{PCA}} = \frac{|BD|}{|DC|},$$

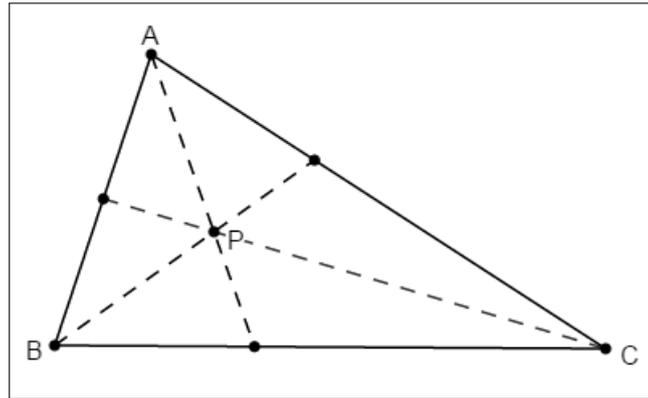
logo, $X = (0 : |DC| : |BD|) = (0 : y : z)$.

Recorrendo a um raciocínio análogo, percebemos que as coordenadas apresentadas para os pontos Y e Z , de fato, são $(x : 0 : z)$ e $(x : y : 0)$, respectivamente. \square

Proposição 9 (Coordenadas do ponto divisor de uma ceviana). *Seja X o traço de um ponto P sobre o lado BC do triângulo de referência ABC . Se P divide XA na razão k , então $P = (k|BC| : |XC| : |BX|)$.*

Demonstração. Suponhamos que o ponto P divide a ceviana XA na razão k , isto é, $k = \frac{|XP|}{|PA|}$. Sabemos que $P = (S_{PBC} : S_{PCA} : S_{PAB})$, além disso, temos que $S_{PCA} = |XC|$ e $S_{PAB} = |BX|$. Temos

$$\frac{k|BC|}{|XC|} = \frac{|XP|}{|PA|} \cdot \frac{|BX| + |XC|}{|XC|} = \frac{|XP|}{|PA|} \cdot \frac{|BX|}{|XC|} + \frac{|XP|}{|PA|}.$$

Figura 8 – Ponto divisor da mediana XA .

Fonte: O autor

Assim

$$\frac{k|BC|}{|XC|} = \frac{S_{PBX}}{S_{PAB}} \cdot \frac{S_{PAB}}{S_{PCA}} + \frac{S_{PXC}}{S_{PCA}} = \frac{S_{PBX} + S_{PXC}}{S_{PCA}} = \frac{S_{PBC}}{S_{PCA}}.$$

Isso mostra que $k|BC| = S_{PBC}$. Portanto,

$$P = (S_{PBC} : S_{PCA} : S_{PAB}) = (k|BC| : |XC| : |BX|).$$

Procedendo de maneira análoga, pode-se concluir que se P divide YB na razão k , então $P = (|CY| : k|CA| : |YA|)$, e que se P divide ZC na razão k , então $P = (|ZB| : |AZ| : k|AB|)$. \square

Teorema 1 (Teorema de Ceva). *Três pontos X, Y e Z são os traços do ponto $P = (x : y : z)$ se, e somente se, X, Y e Z são da forma*

$$X = (0 : y : z)$$

$$Y = (x : 0 : z),$$

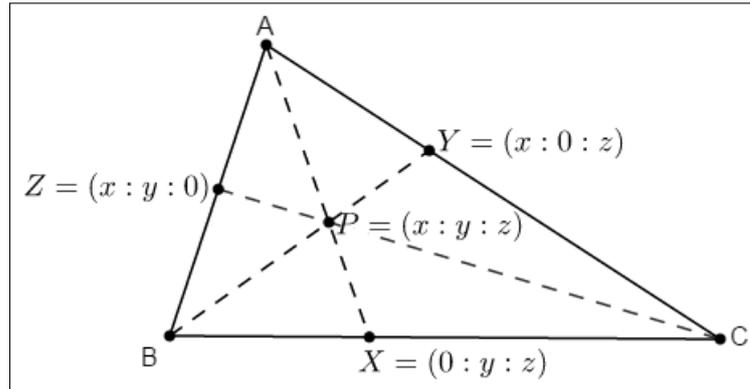
$$Z = (x : y : 0)$$

para alguma tripla x, y, z .

Demonstração. Suponhamos que X, Y e Z são os traços de $P = (x : y : z)$. Tomando PBC como triângulo de referência do traço X , temos que $S_{XBC} = 0$, $S_{XCP} = |XC|$ e $S_{XPB} = |BX|$. Logo, $X = (0 : |XC| : |BX|)$. Considerando que P divide AX na razão k , temos que $P = (x : y : z) = (k|BC| : |XC| : |BX|)$. Logo, $|XC| = y$ e $|BX| = z$; portanto, $X = (0 : y : z)$. Os demais casos são análogos.

Se X, Y e Z são da forma $X = (0 : y : z)$, $Y = (x : 0 : z)$ e $Z = (x : y : 0)$ para alguma tripla x, y, z , então

$$X = (0 : y : z) = (0 : |XC| : |BX|),$$

Figura 9 – Coordenadas dos traços X , Y e Z .

Fonte: O autor

e

$$Y = (x : 0 : z) = (|CY| : 0 : |YA|)$$

$$Z = (x : y : 0) = (|ZB| : |AZ| : 0),$$

pois os traços X , Y e Z pertencem aos lados do triângulo de referência ABC . Aplicando Ceva ao triângulo ABC , temos

$$\frac{|BX|}{|XC|} \cdot \frac{|CY|}{|YA|} \cdot \frac{|AZ|}{|ZB|} = \frac{z}{y} \cdot \frac{x}{z} \cdot \frac{y}{x} = 1.$$

Isso mostra que AX , BY e CZ são concorrentes. Portanto, X , Y e Z são os traços do ponto $P = (x : y : z)$.

□

2.7 Coordenadas Baricêntricas do ortocentro

Proposição 10. *Sejam a, b e c as medidas dos respectivos lados BC , AC e AB do triângulo de referência e \hat{A} , \hat{B} e \hat{C} os ângulos deste triângulo. Em coordenadas baricêntricas, o ortocentro H é representado, em função da tangente dos ângulos por $H = (tg\hat{A} : tg\hat{B} : tg\hat{C})$ e em função dos lados por*

$$H = \left(\frac{1}{-a^2 + b^2 + c^2} : \frac{1}{a^2 - b^2 + c^2} : \frac{1}{a^2 + b^2 - c^2} \right).$$

Demonstração. Consideremos o triângulo ABC não retângulo. Sejam h_a , h_b e h_c as alturas relativas aos lados BC , AC e AB , respectivamente. Pela definição de tangente, temos que

$$tg\hat{A} = \frac{h_c}{|AZ|},$$

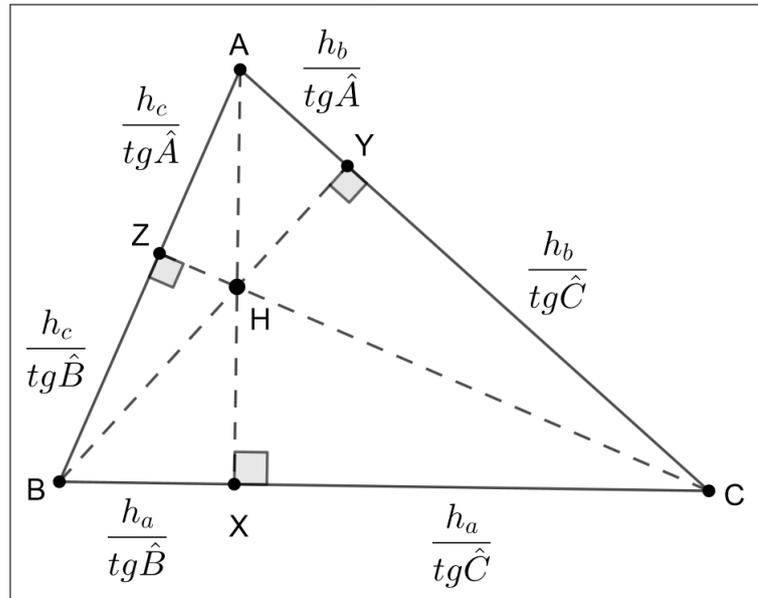
$$tg\hat{B} = \frac{h_a}{|BX|}$$

e

$$\operatorname{tg}\hat{C} = \frac{h_b}{|CY|}.$$

Assim, $|AZ| = \frac{h_c}{\operatorname{tg}\hat{A}}$, $|BX| = \frac{h_a}{\operatorname{tg}\hat{B}}$ e $|CY| = \frac{h_b}{\operatorname{tg}\hat{C}}$. De maneira análoga encontramos os valores de $|AY|$, $|BZ|$ e $|CX|$.

Figura 10 – Ortocentro do triângulo ABC



Fonte: O autor

Pela Proposição 8, temos

$$X = \left(0 : \frac{h_a}{\operatorname{tg}\hat{C}} : \frac{h_a}{\operatorname{tg}\hat{B}} \right) = (0 : \operatorname{tg}\hat{B} : \operatorname{tg}\hat{C}),$$

$$Y = \left(\frac{h_b}{\operatorname{tg}\hat{C}} : 0 : \frac{h_b}{\operatorname{tg}\hat{A}} \right) = (\operatorname{tg}\hat{A} : 0 : \operatorname{tg}\hat{C})$$

e

$$Z = \left(\frac{h_c}{\operatorname{tg}\hat{B}} : \frac{h_c}{\operatorname{tg}\hat{A}} : 0 \right) = (\operatorname{tg}\hat{A} : \operatorname{tg}\hat{B} : 0).$$

Pelo Teorema de Ceva, temos que

$$H = (\operatorname{tg}\hat{A} : \operatorname{tg}\hat{B} : \operatorname{tg}\hat{C}).$$

Também é possível exibir as coordenadas baricêntricas do ortocentro em função dos lados $|AB| = c$, $|BC| = a$ e $|CA| = b$ do triângulo ABC . Vejamos.

Aplicando o teorema de Pitágoras aos triângulos retângulos XCA e XAB , temos

$$b^2 = (h_a)^2 + |XC|^2$$

e

$$c^2 = (h_a)^2 + (a - |XC|)^2.$$

Subtraindo as relações acima, obtemos

$$c^2 - b^2 = a^2 - 2a|XC|,$$

o que nos dá

$$|XC| = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a}.$$

Como $|BX| + |XC| = a$, temos que

$$\begin{aligned} |BX| &= a - |XC| \\ &= a - \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a} \\ &= \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2a}. \end{aligned}$$

De maneira análoga encontramos os valores de $|AZ|$, $|ZB|$, $|CY|$ e $|YA|$. Deste modo, pela Proposição 8 e posteriormente pelo Teorema de Ceva, obtemos

$$\begin{aligned} X &= \left(0 : \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a} : \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2a} \right) = \left(0 : \frac{1}{a^2 - b^2 + c^2} : \frac{1}{a^2 + b^2 - c^2} \right), \\ Y &= \left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2b} : 0 : \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2b} \right) = \left(\frac{1}{-a^2 + b^2 + c^2} : 0 : \frac{1}{a^2 + b^2 - c^2} \right), \\ Z &= \left(\frac{a^2 - b^2 + c^2}{2c} : \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2c} : 0 \right) = \left(\frac{1}{-a^2 + b^2 + c^2} : \frac{1}{a^2 + b^2 - c^2} : 0 \right). \end{aligned}$$

Concluimos então que

$$H = \left(\frac{1}{-a^2 + b^2 + c^2} : \frac{1}{a^2 - b^2 + c^2} : \frac{1}{a^2 + b^2 - c^2} \right).$$

□

Observemos que quando o triângulo de referência ΔABC é retângulo, as alturas (a altura relativa à hipotenusa e os dois catetos) encontram-se no ângulo reto. Neste caso, $H = A = (1 : 0 : 0)$, se o triângulo é retângulo em A, $H = B = (0 : 1 : 0)$, se o triângulo é retângulo em B e $H = C = (0 : 0 : 1)$, se o triângulo é retângulo em C.

2.8 Coordenadas Baricêntricas do Ponto de Gergonne

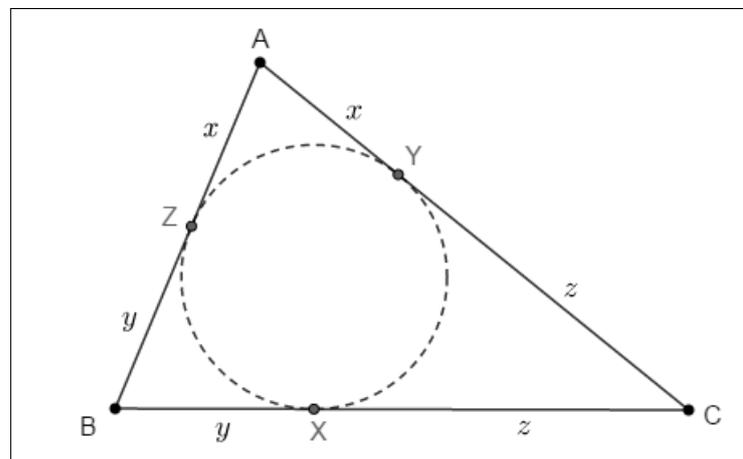
Proposição 11. *As cevianas determinadas pelos pontos de tangência da circunferência*

inscrita são concorrentes em um ponto cujas coordenadas baricêntricas são

$$\left(\frac{1}{p-a} : \frac{1}{p-b} : \frac{1}{p-c} \right).$$

Demonstração. As cevianas que unem cada vértice de um triângulo ABC ao ponto de intersecção do círculo inscrito com o lado oposto, intersectam-se em um ponto. Em homenagem ao geômetra francês Joseph Diaz Gergonne (1771-1859), este ponto é chamado ponto de Gergonne.

Figura 11 – Pontos de tangência do incírculo com os lados do triângulo ABC



Fonte: O autor

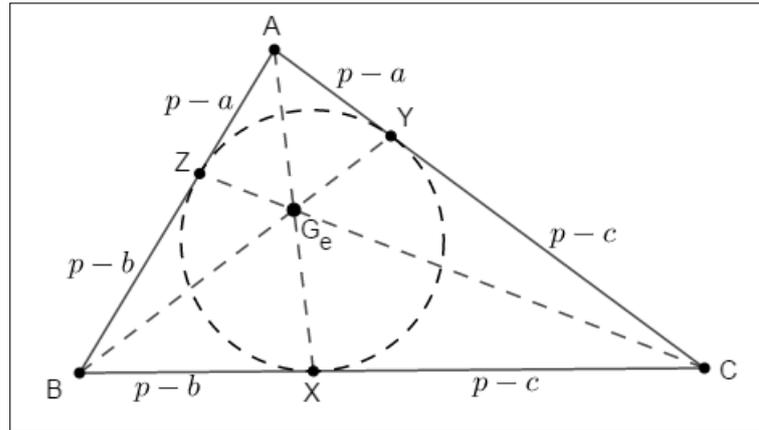
Sabemos que se dois segmentos de reta AZ e AY , por exemplo, são tangentes ao círculo nos pontos Z e Y , então esses segmentos são congruentes. Pela figura anterior, onde X , Y e Z são os pontos de tangência do círculo inscrito no triângulo ABC com medidas dos lados $a = |BC|$, $b = |CA|$ e $c = |AB|$, temos que $a = y + z$, $b = z + x$ e $c = x + y$, o que nos leva a concluir que $2x + 2y + 2z = 2p$. Assim, $x + y + z = p$. Logo, $x + a = p$, ou seja, $|AZ| = |YA| = p - a$. De forma análoga, $|ZB| = |BX| = p - b$ e $|XC| = |CY| = p - c$.

Como X , Y e Z são traços de G_e , temos que suas coordenadas baricêntricas são

$$X = (0 : p - c : p - b) = \left(0 : \frac{1}{p - b} : \frac{1}{p - c} \right),$$

$$Y = (p - c : 0 : p - a) = \left(\frac{1}{p - a} : 0 : \frac{1}{p - c} \right),$$

$$Z = (p - b : p - a : 0) = \left(\frac{1}{p - a} : \frac{1}{p - b} : 0 \right).$$

Figura 12 – Ponto de Gergonne G_e 

Fonte: O autor

Assim, pelo Teorema de Ceva para coordenadas baricêntricas, podemos escrever

$$G_e = \left(\frac{1}{p-a} : \frac{1}{p-b} : \frac{1}{p-c} \right).$$

□

2.9 Coordenadas Baricêntricas do Ponto de Nagel

Proposição 12. *As cevianas determinadas pelos pontos de tangência das circunferências ex-inscritas são concorrentes em um ponto cujas coordenadas baricêntricas são*

$$(p-a : p-b : p-c).$$

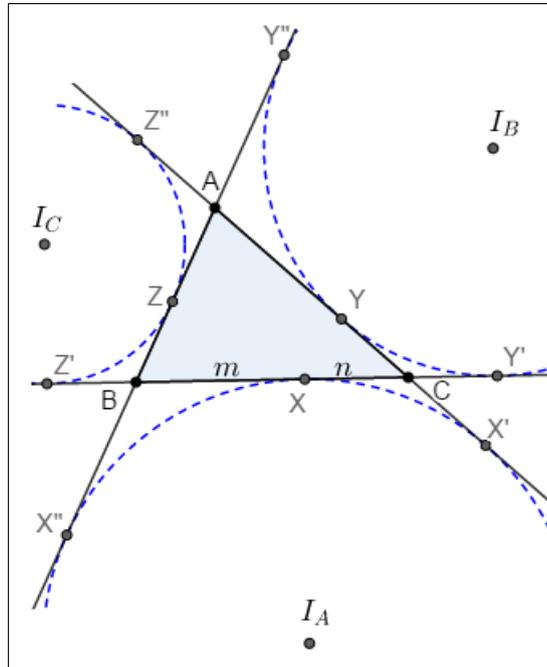
Demonstração. As cevianas que unem cada vértice de um triângulo ABC ao ponto de intersecção de cada círculo ex-inscrito com o lado oposto, intersectam-se em um ponto. Este ponto é chamado ponto de Nagel. Consideremos ABC o triângulo de referência com medidas euclidianas dos lados iguais a $|BC| = a$, $|CA| = b$, e $|AB| = c$, respectivamente, X , Y e Z os pontos de tangência dos círculos ex-inscritos com esses lados e X' , X'' , Y' , Y'' , Z' , Z'' os pontos de tangência dos círculos ex-inscritos com os prologamentos dos lados do triângulo de referência.

Da geometria euclidiana, sabemos que

$$|AX'| = |AX''| = |BY'| = |BY''| = |CZ'| = |CZ''| = p.$$

Fazendo-se $|BX| = |BX'| = m$ e $|CX| = |CX''| = n$, temos que

Figura 13 – Pontos de tangência do incírculo com os lados do triângulo ABC



Fonte: O autor

$$\begin{aligned}
 2p &= a + b + c \\
 &= (m + n) + b + c \\
 &= (b + n) + (c + m) \\
 &= |AX'| + |AX''|.
 \end{aligned}$$

Dessa forma, $b+n = p$ e $c+m = p$. Logo, $|BX| = m = p-c$ e $|CX| = n = p-b$. Analogamente, $|CY| = p-a$, $|AY| = p-c$, $|AZ| = p-b$ e $|BZ| = p-a$.

Assim, $X = (0 : p-b : p-c)$, $Y = (p-a : 0 : p-c)$ e $Z = (p-a : p-b : 0)$. Pelo Teorema de Ceva para coordenadas baricêntricas, segue-se que

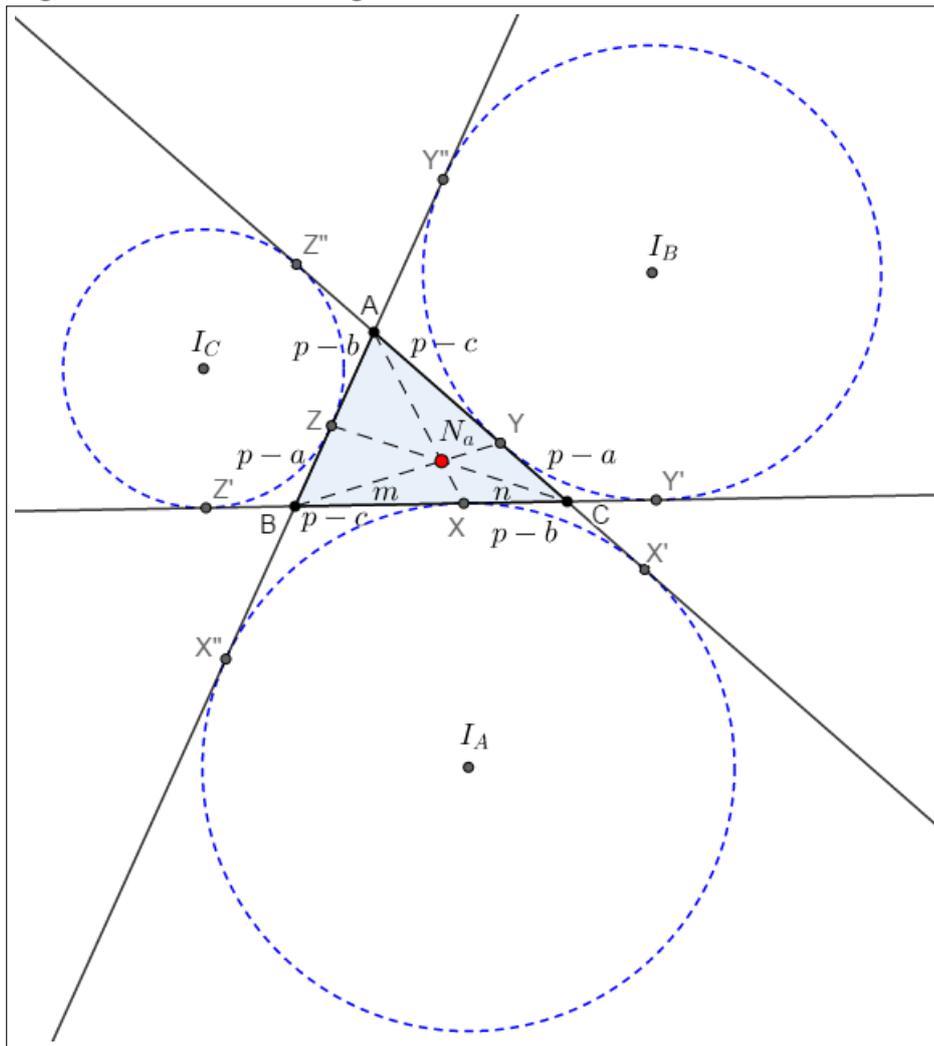
$$N_a = (p-a : p-b : p-c).$$

□

2.10 Coordenadas Baricêntricas do Centro de Spieker

Proposição 13. *As bissetrizes internas do triângulo medial são concorrentes em um ponto cujas coordenadas baricêntricas são $(2p-a : 2p-b : 2p-c)$.*

Demonstração. O Centro de Spieker é o ponto de encontro das bissetrizes internas do triângulo medial de um triângulo de referência ABC . Como S_p é incentro do triângulo

Figura 14 – Ponto de Nagel N_a 

Fonte: O autor

medial RST , suas coordenadas podem ser expressas por $S_p = (\frac{a}{2} : \frac{b}{2} : \frac{c}{2})$. Assim, pela definição de coordenadas baricêntricas, temos que

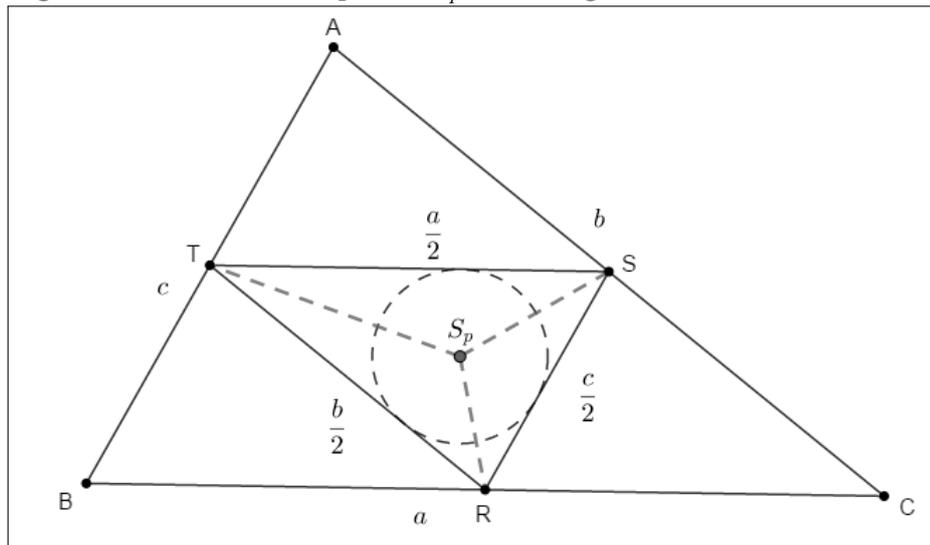
$$\left(\frac{a}{2} + \frac{b}{2} + \frac{c}{2}\right) S_p = \frac{a}{2}R + \frac{b}{2}S + \frac{c}{2}T$$

ou seja,

$$(a + b + c)S_p = aR + bS + cT.$$

Como R , S e T são pontos médios dos respectivos lados BC , CA e AB , segue que

$$\begin{aligned} 2pS_p &= a\left(\frac{B+C}{2}\right) + b\left(\frac{A+C}{2}\right) + c\left(\frac{A+B}{2}\right) \\ &= (b+c)\frac{A}{2} + (a+c)\frac{B}{2} + (a+b)\frac{C}{2}. \end{aligned}$$

Figura 15 – Centro de Spieker S_p do triângulo ABC 

Fonte: O autor

Dessa forma, temos

$$4p.S_p = (b + c)A + (a + c)B + (a + b)C.$$

Sendo $4p = 2(a + b + c) = (2a + 2b + 2c) = (b + c) + (a + c) + (a + b)$, podemos escrever

$$S_p = \frac{(b + c)A + (a + c)B + (a + b)C}{(b + c) + (a + c) + (a + b)}.$$

Assim, percebemos que S_p pode ser expresso pela média ponderada dos vértices do triângulo ABC com os pesos $(b + c)$, $(a + c)$, $(a + b)$. Logo, Pela definição 1, as coordenadas baricêntricas do Centro de Spieker são dadas por

$$S_p = (b + c : c + a : a + b) = (2p - a : 2p - b : 2p - c).$$

□

3 EQUAÇÃO DA RETA EM COORDENADAS BARICÊNTRICAS

Neste capítulo, abordaremos a representação da equação da reta, em coordenadas baricêntricas. Mostraremos a representação algébrica desta equação, e destacaremos a noção de paralelismo e perpendicularismo, além da interseção entre retas e distância entre dois pontos que estão nestas coordenadas. Para tanto, iniciaremos a seção enfatizando a Notação de Conway, que será útil no desenvolvimento deste capítulo.

3.1 Notação de Conway

A notação a seguir, conhecida como notação de Conway, permite que as coordenadas baricêntricas de alguns pontos sejam exibidas de uma maneira mais simples. Além disso, ela será utilizada na relação da distância entre dois pontos e no estudo da equação da reta, especialmente nos casos de perpendicularismo entre retas.

Definição 5. *Sejam $S = (ABC)$ a área euclidiana de um triângulo ABC e $D = 2S$. Se α e β são medidas de ângulos, denotaremos*

$$S_\alpha = 2S.\cotg(\alpha) = D.\cotg(\alpha) \text{ e } S_{\alpha\beta} = S_\alpha.S_\beta.$$

Assim, sendo \hat{A} , \hat{B} e \hat{C} as medidas dos ângulos internos do triângulo de referência ABC , temos

$$S_A = 2S.\cotg(\hat{A}) = 2 \cdot \frac{bc.\text{sen}(\hat{A})}{2} \cdot \frac{\cos(\hat{A})}{\text{sen}(\hat{A})} = bc.\cos(\hat{A}).$$

Analogamente,

$$S_B = ac.\cos(\hat{B}) \text{ e } S_C = ab.\cos(\hat{C}).$$

Observemos que aplicando a Lei dos Cossenos em um triângulo ABC com ângulos de medidas \hat{A} , \hat{B} e \hat{C} e lados $a = |BC|$, $b = |AC|$ e $c = |AB|$, segue que

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc.\cos(\hat{A}) \\ &= b^2 + c^2 - 2S_A \\ &= b^2 + c^2 - 2bc.\cos(\hat{A}) \\ &= b^2 + c^2 - 2S_A. \end{aligned}$$

Assim,

$$S_A = \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2}.$$

Da mesma forma,

$$S_B = \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2} \quad \text{e} \quad S_C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2}.$$

Daí, segue imediatamente que

$$\begin{cases} S_B + S_C = a^2 \\ S_A + S_C = b^2 \\ S_A + S_B = c^2 \\ S_B - S_C = c^2 - b^2 \\ S_C - S_A = a^2 - c^2 \\ S_A - S_B = b^2 - a^2 \end{cases}$$

3.2 Equação da reta

Teorema 2. *Seja ABC um triângulo de referência no plano. Para qualquer reta no plano, existem constantes p, q e r , nem todas simultaneamente iguais, tais que*

$$l = \{(x : y : z) / px + qy + rz = 0\}.$$

De maneira recíproca, se p, q e r , são constantes não simultaneamente iguais, então o conjunto $l = \{(x : y : z) / px + qy + rz = 0\}$ é uma reta.

Demonstração. Sejam $P_1 = (u_1 : v_1 : w_1)$ e $P_2 = (u_2 : v_2 : w_2)$ dois pontos distintos pertencentes a reta l e com a soma das coordenadas diferente de zero. Se um ponto $P = (x : y : z)$ qualquer está sobre a reta l , então P, P_1 e P_2 são colineares. Desta forma, é nulo o determinante formado por suas coordenadas baricêntricas, ou seja,

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \end{vmatrix} = 0,$$

o que implica em

$$x \begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{vmatrix} - y \begin{vmatrix} u_1 & w_1 \\ u_2 & w_2 \end{vmatrix} + z \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Desta forma, podemos escrever

$$px + qy + rz = 0.$$

Reciprocamente, dada a equação $px + qy + rz = 0$, com p, q e r não iguais simultaneamente, sejam $P_1 = (u_1 : v_1 : w_1)$ e $P_2 = (u_2 : v_2 : w_2)$ dois pontos que a satisfazem, com soma das

coordenadas diferente de zero. Dado um ponto $P_3 = (u_3 : v_3 : w_3)$ que também satisfaz a equação e com soma das coordenadas diferente de zero, temos que (p, q, r) é uma solução não nula do sistema linear homogêneo

$$\begin{cases} p \cdot u_1 + q \cdot v_1 + r \cdot w_1 = 0, \\ p \cdot u_2 + q \cdot v_2 + r \cdot w_2 = 0, \\ p \cdot u_3 + q \cdot v_3 + r \cdot w_3 = 0, \end{cases}$$

e, portanto,

$$\begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Isso mostra que P_1, P_2 e P_3 são colineares. Logo, P_3 pertence à reta P_1P_2 . \square

Proposição 14. *Sejam $P_1 = (u_1 : v_1 : w_1)$ e $P_2 = (u_2 : v_2 : w_2)$ pontos cuja soma das coordenadas é diferente de zero. A reta que passa por P_1 e P_2 tem equação*

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Demonstração. Se $P = (x : y : z)$ é um ponto da reta determinada por P_1 e P_2 , com $x + y + z \neq 0$, então P, P_1 e P_2 são colineares. Logo, o determinante formado pelas coordenadas baricêntricas desses pontos é nulo. \square

Observemos que analisando as equações

$$\begin{vmatrix} p_1 & q_1 & r_1 \\ p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{e} \quad \begin{vmatrix} p_2 & q_2 & r_2 \\ p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \end{vmatrix} = 0,$$

segue-se que

$$p_1 \begin{vmatrix} q_1 & r_1 \\ q_2 & r_2 \end{vmatrix} - q_1 \begin{vmatrix} p_1 & r_1 \\ p_2 & r_2 \end{vmatrix} + r_1 \begin{vmatrix} p_1 & q_1 \\ p_2 & q_2 \end{vmatrix} = 0$$

e

$$p_2 \begin{vmatrix} q_1 & r_1 \\ q_2 & r_2 \end{vmatrix} - q_2 \begin{vmatrix} p_1 & r_1 \\ p_2 & r_2 \end{vmatrix} + r_2 \begin{vmatrix} p_1 & q_1 \\ p_2 & q_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Daí, percebemos que o ponto de coordenadas

$$\left(\begin{vmatrix} q_1 & r_1 \\ q_2 & r_2 \end{vmatrix} ; - \begin{vmatrix} p_1 & r_1 \\ p_2 & r_2 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} p_1 & q_1 \\ p_2 & q_2 \end{vmatrix} \right)$$

satisfaz as equações $p_1x + q_1y + r_1z = 0$ e $p_2x + q_2y + r_2z = 0$, sendo, portanto, o ponto

de interseção entre essas retas.

Exemplo 1. Dado o triângulo ABC , determine as equações das retas dos lados BC , CA e AB .

Solução. Sendo $A = (1 : 0 : 0)$, $B = (0 : 1 : 0)$ e $C = (0 : 0 : 1)$, segue imediatamente da Proposição 3.2.1 que os lados BC , CA e AB do triângulo ABC têm equações $x = 0$, $y = 0$ e $z = 0$, respectivamente. \square

Exemplo 2. Determine a equação da reta que contém o baricentro $G = (1 : 1 : 1)$ e o ortocentro $H = (S_{BC} : S_{CA} : S_{AB})$.

Solução. Essa reta, conhecida como reta de Euler, tem equação dada por

$$x \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ S_{CA} & S_{AB} \end{vmatrix} - y \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ S_{BC} & S_{AB} \end{vmatrix} + z \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ S_{BC} & S_{CA} \end{vmatrix} = 0, \text{ ou seja,}$$

$$S_A \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ S_C & S_B \end{vmatrix} x - S_B \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ S_C & S_A \end{vmatrix} y + S_C \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ S_B & S_A \end{vmatrix} z = 0. \text{ Desta forma, podemos escrever}$$

$$S_A(S_B - S_C)x - S_B(S_A - S_C)y + S_C(S_A - S_B)z = 0.$$

Assim, em coordenadas baricêntricas, a reta de Euler tem equação dada por

$$S_A(S_B - S_C)x + S_B(S_C - S_A)y + S_C(S_A - S_B)z = 0.$$

\square

3.3 Retas paralelas em coordenadas baricêntricas

O conceito de paralelismo em coordenadas baricêntricas, difere daquele que conhecemos da geometria euclidiana, onde retas paralelas são aquelas que não se intersectam. Aqui, faz-se necessário a introdução do conceito de ponto no infinito, para que possamos reinterpretar o paralelismo de retas.

Definição 6. Um ponto P é chamado ponto no infinito, se a soma de suas coordenadas baricêntricas é igual a zero.

Para cada reta do plano, é possível encontrar um ponto no infinito pertencente ao conjunto

$$l_\infty = \{(x_P : y_P : z_P) / x_P + y_P + z_P = 0\}$$

que satisfaz sua equação. Isso pode ser feito através da equação da reta ou a partir de

dois pontos distintos da reta.

Proposição 15. *Se $P_1 = (u_1 : v_1 : w_1)$ e $P_2 = (u_2 : v_2 : w_2)$ são pontos não no infinito, distintos e com coordenadas baricêntricas balanceadas, então*

$$P_\infty = P_1 - P_2 = (u_1 - u_2 : v_1 - v_2 : w_1 - w_2)$$

são as coordenadas baricêntricas do ponto no infinito na reta P_1P_2 .

Demonstração. De fato, como P_∞ é uma combinação linear de P_1 e P_2 , segue-se imediatamente que

$$\begin{vmatrix} u_1 - u_2 & v_1 - v_2 & w_1 - w_2 \\ u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \end{vmatrix} = 0$$

Isso mostra que P_∞ satisfaz a equação da reta que contém P_1 e P_2 . Por outro lado, a soma das coordenadas de P_∞ dada por $s_P = (u_1 - u_2) + (v_1 - v_2) + (w_1 - w_2) = (u_1 + v_1 + w_1) - (u_2 + v_2 + w_2) = 0$ pois P_1 e P_2 estão balanceados. Logo, P_∞ é ponto no infinito da reta P_1P_2 . \square

Proposição 16. *Se uma reta l tem equação $px + qy + rz = 0$, então o ponto no infinito dessa reta é*

$$P_\infty = (q - r : r - p : p - q).$$

Demonstração. Tomando-se o ponto $P = (q - r : r - p : p - q)$, percebemos que P é ponto da reta $px + qy + rz = 0$, pois $p(q - r) + q(r - p) + r(p - q) = pq - pr + qr - pq + rp - rq = 0$. Por outro lado, a soma das coordenadas baricêntricas de P é dada por $s_P = q - r + r - p + p - q = 0$. Isso mostra que P é ponto no infinito da reta l . \square

Definição 7. *Retas paralelas são retas distintas que possuem ponto no infinito em comum.*

Proposição 17 (Equação da reta paralela). *Se $P = (u : v : w)$ e $l = px + qy + rz = 0$, então a reta l' que passa por P e é paralela à reta l tem equação dada por*

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ u & v & w \\ q - r & r - p & p - q \end{vmatrix} = 0.$$

Demonstração. Pela Proposição 16, a reta l tem ponto no infinito $P_\infty = (q - r : r - p : p - q)$. Como l e l' são paralelas, segue que $P_\infty \in l'$. Dessa forma, P e P_∞ satisfazem a equação

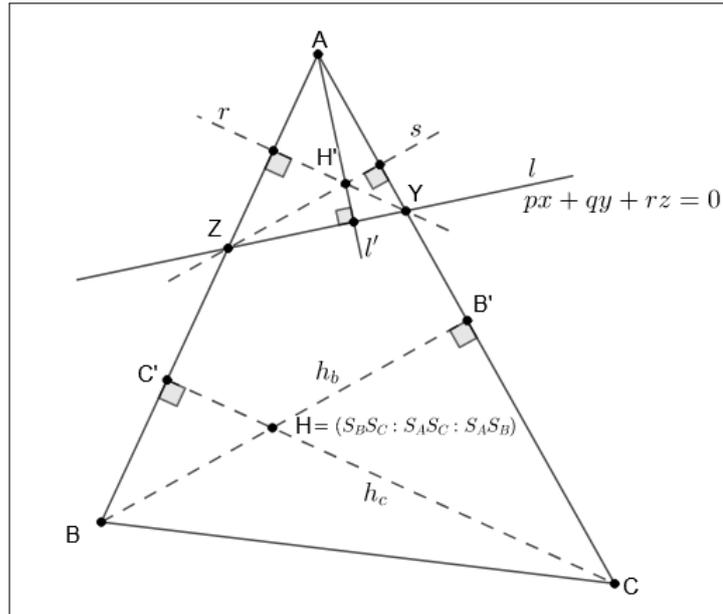
$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ u & v & w \\ q - r & r - p & p - q \end{vmatrix} = 0,$$

o que mostra o resultado. □

3.4 Retas perpendiculares em coordenadas baricêntricas

Proposição 18. Se $P_\infty(l) = (f : g : h)$ é ponto no infinito de uma reta l , então $P_\infty(l') = (gS_B - hS_C : hS_C - fS_A : fS_A - gS_B)$ é ponto no infinito de todas as retas l' perpendiculares a l .

Figura 16 – Perpendicularidade entre retas



Fonte: O autor

Demonstração. Observando a figura acima, consideremos alguns fatos importantes:

- (a) $px + qy + rz = 0$ é a equação da reta l com $P_\infty(l) = (f : g : h)$.
- (b) Y é interseção entre as retas $y = 0$ e $px + qy + rz = 0$, logo suas coordenadas são dadas por $Y = (-r : 0 : p)$.
- (c) Z é interseção entre as retas $z = 0$ e $px + qy + rz = 0$, logo suas coordenadas são dadas por $Z = (q : -p : 0)$.
- (d) A reta s é paralela a h_b , logo possui o mesmo ponto no infinito.
- (e) A reta r é paralela a h_c , logo possui o mesmo ponto no infinito.
- (f) H é ortocentro de ABC e H' é ortocentro de AZY .
- (g) Como $P_\infty(l) = (f : g : h) = (q - r : r - p : p - q)$, podemos concluir que existe um real não nulo k tal que $q - r = fk$, $r - p = gk$ e $p - q = hk$.

Das observações (d) e (e) temos que

$$P_\infty(r) = P_\infty(h_c) = (S_B : S_A : -c^2) \quad \text{e} \quad P_\infty(s) = P_\infty(h_b) = (S_c : -b^2 : S_A).$$

Assim, a equação da reta r que passa por $P_\infty(r)$ e Y é dada por

$$x \begin{vmatrix} S_A & -c^2 \\ 0 & p \end{vmatrix} - y \begin{vmatrix} S_B & -c^2 \\ -r & p \end{vmatrix} + z \begin{vmatrix} S_B & S_A \\ -r & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

o que implica em

$$r : pS_Ax - (pS_B - rc^2)y + rS_Az = 0.$$

A equação da reta s que passa por $P_\infty(s)$ e Z é dada por

$$x \begin{vmatrix} -b^2 & S_A \\ -p & 0 \end{vmatrix} - y \begin{vmatrix} S_C & S_A \\ q & 0 \end{vmatrix} + z \begin{vmatrix} S_C & -b^2 \\ q & -p \end{vmatrix} = 0,$$

o que implica em

$$s : pS_Ax + qS_Ay + (qb^2 - pS_C)z = 0.$$

Usaremos ^{*1}. Como H' é ponto de interseção entre as retas r e s , segue que

$$\begin{aligned} H' &= \left(* : - \begin{vmatrix} pS_A & rS_A \\ pS_A & qb^2 - pS_C \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} pS_A & -(pS_B - rc^2) \\ pS_A & qS_A \end{vmatrix} \right) \\ &= \left(* : -pS_A \begin{vmatrix} 1 & rS_A \\ 1 & qb^2 - pS_C \end{vmatrix} : pS_A \begin{vmatrix} 1 & -(pS_B - rc^2) \\ 1 & qS_A \end{vmatrix} \right) \\ &= (* : -qb^2 + pS_C + rS_A : qS_A + pS_B - rc^2) \\ &= (* : -q(S_C + S_A) + pS_C + rS_A : qS_A + pS_B - r(S_A + S_B)) \\ &= (* : (p - q)S_C - (q - r)S_A : (q - r)S_A - (r - p)S_B). \end{aligned}$$

Da observação (g), temos que

$$H' = (* : hkS_C - fkS_A : fkS_A - gkS_B) = (* : hS_C - fS_A : fS_A - gS_B).$$

Conhecendo as coordenadas baricentricas de H' , é possível calcular a equação da reta l' . Como l' passa por A e H' , sua equação é dada por

$$x \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ hS_C - fS_A & fS_A - gS_B \end{vmatrix} - y \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ * & fS_A - gS_B \end{vmatrix} + z \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ * & hS_C - fS_A \end{vmatrix} = 0,$$

ou seja,

$$(gS_B - fS_A)y + (hS_C - fS_A)z = 0.$$

¹Em substituição a uma coordenada que será anulada adiante.

Desta forma, o ponto no infinito $P_\infty(l') = (q - r : r - p : p - q)$ associado a esta reta é

$$\begin{aligned} P_\infty(l') &= (gS_B - fS_A - (hS_C - fS_A) : hS_C - fS_A : -(gS_B - fS_A)) \\ &= (gS_B - hS_C : hS_C - fS_A : fS_A - gS_B). \end{aligned}$$

Esse é ponto no infinito da reta l' e de qualquer outra reta perpendicular a l . \square

Proposição 19 (Equação da reta perpendicular). *Seja $P_\infty(l) = (f : g : h)$ o ponto no infinito de uma reta l . Se l' passa por $P = (u : v : w)$ e é perpendicular a l , então sua equação é dada por*

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ u & v & w \\ gS_B - hS_C & hS_C - fS_A & fS_A - gS_B \end{vmatrix} = 0.$$

Demonstração. Pela Proposição 18, sabemos que $P_\infty(l') = (gS_B - hS_C : hS_C - fS_A : fS_A - gS_B)$. Como $P = (u : v : w)$ também pertence a l' , sua equação é dada por

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ u & v & w \\ gS_B - hS_C & hS_C - fS_A & fS_A - gS_B \end{vmatrix} = 0.$$

\square

3.5 Distância entre dois pontos em coordenadas baricêntricas

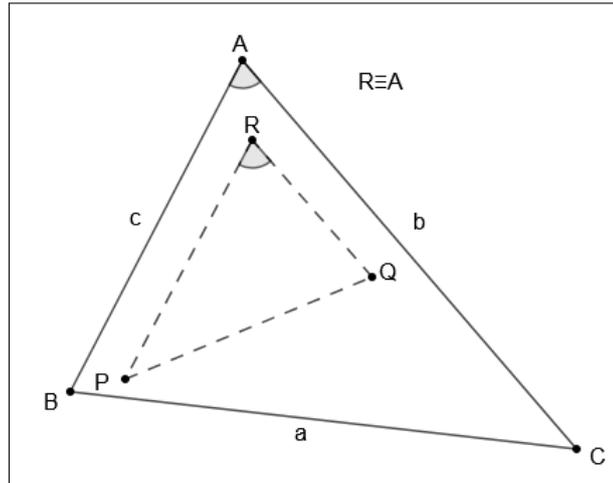
Proposição 20. *Se $P = (u_P : v_P : w_P)$ e $Q = (u_Q : v_Q : w_Q)$ são dois pontos do plano balanceados com soma s , a distância euclidiana entre ambos é dada por*

$$|PQ|^2 = \frac{S_A \cdot \Delta_u^2 + S_B \cdot \Delta_v^2 + S_C \cdot \Delta_w^2}{s^2},$$

onde $\Delta_u = u_Q - u_P$, $\Delta_v = v_Q - v_P$ e $\Delta_w = w_Q - w_P$.

Demonstração. Como os pontos P e Q estão balanceados com soma s , temos que $sP = u_P A + v_P B + w_P C$, $sQ = u_Q A + v_Q B + w_Q C$ e $\Delta_u + \Delta_v + \Delta_w = s - s = 0$.

Na figura acima, R é determinado pelas retas traçadas por P e Q paralelas aos lados AB e CA , respectivamente. Daí $P_\infty(AB) = P_\infty(RP)$ e $P_\infty(CA) = P_\infty(QR)$, ou seja, existem reais h e k , não nulos, tais que $P - R = h(B - A)$ e $|RP| = h \cdot c$, $R - Q = k(A - C)$ e $|QR| = kb$, pois os pontos estão balanceados com soma s . Desta forma, temos $P - h(B - A) = Q + k(A - C)$ e, portanto,

Figura 17 – Distância entre os ponto P e Q 

Fonte: O autor

$$sP - sh(B - A) = sQ + sk(A - C).$$

Substituindo os valores de sP e sQ , obtemos

$$u_P A + v_P B + w_P C - shB + shA = u_Q A + v_Q B + w_Q C + skA - skC \quad e$$

$$(u_P + sh)A + (v_P - sh)B + w_P C = (u_Q + sk)A + v_Q B + (w_Q - sk)C.$$

Assim, segue-se que

$$\begin{cases} u_Q + sk = u_P + sh \\ v_Q = v_P - sh \\ w_Q - sk = w_P \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_Q - u_P = sh - sk \\ v_Q - v_P = -sh \\ w_Q - w_P = sk \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Delta_u = sh - sk \\ \Delta_v = -sh \\ \Delta_w = sk \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} h = -\frac{\Delta_v}{s} \\ k = \frac{\Delta_w}{s} \end{cases}$$

Pela Lei dos cossenos aplicada ao triângulo ΔRPQ , temos

$$\begin{aligned} |PQ|^2 &= (hc)^2 + (kb)^2 - 2(hc)(kb)\cos(\hat{A}) \\ &= \left(-\frac{\Delta_v}{s}c\right)^2 + \left(\frac{\Delta_w}{s}b\right)^2 - 2\left(-\frac{\Delta_v}{s}\right)c\frac{\Delta_w}{s}b.\cos(\hat{A}) \\ &= \frac{\Delta_v^2 c^2}{s^2} + \frac{\Delta_w^2 b^2}{s^2} + \frac{2\Delta_v \Delta_w bc.\cos(\hat{A})}{s^2}. \end{aligned}$$

Das Notações de Conway sabemos que $c^2 = S_A + S_B$, $b^2 = S_A + S_C$ e $S_A =$

$bc \cdot \cos(\hat{A})$. Assim,

$$\begin{aligned}
 |PQ|^2 &= \frac{\Delta_v^2(S_A + S_B) + \Delta_w^2(S_A + S_C) + 2 \cdot \Delta_v \cdot \Delta_w \cdot S_A}{s^2} \\
 &= \frac{S_A(\Delta_v^2 + 2 \cdot \Delta_v \cdot \Delta_w + \Delta_w^2) + S_B \cdot \Delta_v^2 + S_C \cdot \Delta_w^2}{s^2} \\
 &= \frac{S_A(\Delta_v + \Delta_w)^2 + S_B \cdot \Delta_v^2 + S_C \cdot \Delta_w^2}{s^2} \\
 &= \frac{S_A(-\Delta_u)^2 + S_B \cdot \Delta_v^2 + S_C \cdot \Delta_w^2}{s^2} \\
 &= \frac{S_A(\Delta_u)^2 + S_B \cdot \Delta_v^2 + S_C \cdot \Delta_w^2}{s^2}.
 \end{aligned}$$

□

Em coordenadas na forma absoluta, a distância entre os pontos P e Q é dada por

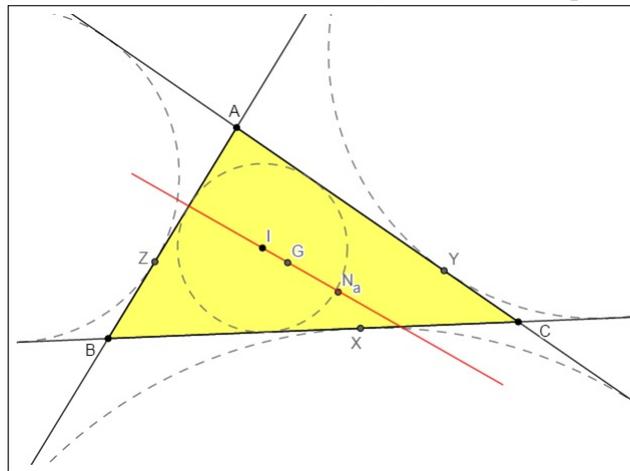
$$|PQ|^2 = S_A(\Delta_u)^2 + S_B \cdot \Delta_v^2 + S_C \cdot \Delta_w^2.$$

4 PROBLEMAS

Nesta seção serão enunciados alguns problemas relacionados ao tema desse trabalho. Esses problemas foram retirados de provas de olimpíadas de Matemática, de um artigo publicado na Revista Eureka (GIRÃO; CARNEIRO, 2005, p. 29-37) e do livro Geometria - Coleção Profmat (MUNIZ NETO, 2013). Nas soluções apresentadas tomamos como referencial teórico o conteúdo abordado nos capítulos anteriores.

Problema 1. *Demonstre que o incentro, o baricentro e o ponto de Nagel são colineares para qualquer triângulo.*

Figura 18 – Colinearidade do incentro, baricentro e ponto de Nagel



Fonte: O autor

Solução. Temos $G = (1 : 1 : 1)$, $I = (a : b : c)$ e $N_a = (p - a : p - b : p - c)$. Assim,

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ (p-a) & (p-b) & (p-c) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b & c \\ (p-b) & (p-c) \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a & c \\ (p-a) & (p-c) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b \\ (p-a) & (p-b) \end{vmatrix} = 0.$$

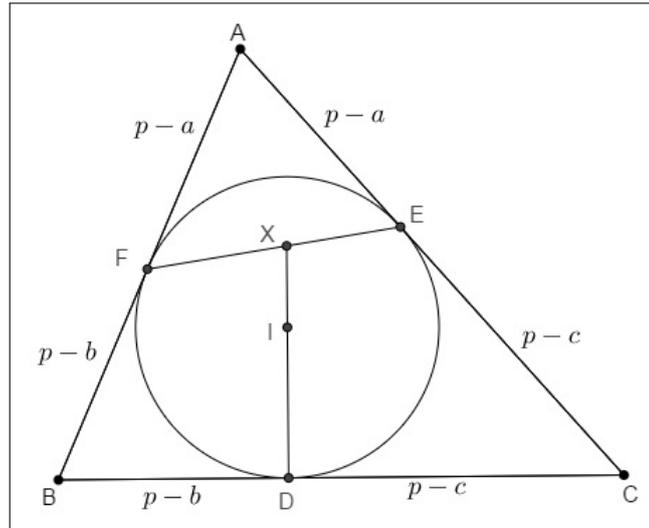
Isso mostra que os pontos G , I e N_a são colineares. \square

Problema 2. (OCM 2016) *Se P e Q são pontos do plano, denotamos por \overline{PQ} o comprimento do segmento PQ . Seja ABC um triângulo de lados $\overline{BC} = a$, $\overline{CA} = b$ e $\overline{AB} = c$. Denote por I o incentro de ABC e denote por D , E e F , respectivamente, os pontos onde o círculo inscrito em ABC toca os lados BC , CA e AB . Seja X a interseção das retas \overleftrightarrow{DI} e \overleftrightarrow{EF} . Calcule, em função de a, b e c , as razões $\frac{EX}{XF}$ e $\frac{DI}{IX}$.*

Solução. Consideraremos $X = (u_X : v_X : w_X)$,

$D = (0 : p - c : p - b)$ com $s_D = a$, $E = (p - c : 0 : p - a)$ com $s_E = b$,

Figura 19 – Um exemplo geométrico para o problema



Fonte: O autor

$$F = (p - b : p - a : 0) \text{ com } s_D = c, \quad I = (a : b : c) \text{ com } s_I = a + b + c = 2p.$$

A equação da reta \overleftrightarrow{FE} é dada por

$$\overleftrightarrow{FE} : \begin{vmatrix} x & y & z \\ (p-b) & (p-a) & 0 \\ (p-c) & 0 & (p-a) \end{vmatrix} = 0.$$

Assim,

$$\overleftrightarrow{FE} : (p-a)^2x - (p-b)(p-a)y - (p-c)(p-a)z = 0,$$

o que implica em

$$\overleftrightarrow{FE} : (p-a)x - (p-b)y - (p-c)z = 0.$$

A equação da reta \overleftrightarrow{DI} é dada por

$$\overleftrightarrow{DI} : \begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & (p-c) & (p-b) \\ a & b & c \end{vmatrix} = 0.$$

Assim,

$$\overleftrightarrow{DI} : [c(p-c) - b(p-b)]x + a(p-b)y - a(p-c)z = 0,$$

o que implica em

$$\overleftrightarrow{DI} : (b-c)(p-a)x - a(p-b)y - a(p-c)z = 0.$$

Como $X = (u_X : v_X : w_X) = \overleftrightarrow{FE} \cap \overleftrightarrow{DI}$, então

$$u_X = \begin{vmatrix} -(p-b) & -(p-c) \\ a(p-b) & -a(p-c) \end{vmatrix} = 2a(p-b)(p-c),$$

$$v_X = - \begin{vmatrix} (p-a) & -(p-c) \\ (b-c)(p-a) & -a(p-c) \end{vmatrix} = 2(p-a)(p-b)(p-c) \quad e$$

$$w_X = \begin{vmatrix} (p-a) & -(p-b) \\ (b-c)(p-a) & a(p-b) \end{vmatrix} = 2(p-a)(p-b)(p-c).$$

Dessa forma,

$$X = (2a(p-b)(p-c) : 2(p-a)(p-b)(p-c) : 2(p-a)(p-b)(p-c)) = (a : p-a : p-a).$$

Representaremos por S_{PQR} a área de um triângulo de vértices P, Q, R . Temos

$$S_{AFX} = \frac{S_{ABC}}{1c(b+c)} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ p-b & p-a & 0 \\ a & p-a & p-a \end{vmatrix} = \frac{S_{ABC}(p-a)^2}{c(b+c)} \quad e$$

$$S_{AXE} = \frac{S_{ABC}}{1(b+c)b} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & p-a & p-a \\ p-c & 0 & p-a \end{vmatrix} = \frac{S_{ABC}(p-a)^2}{b(b+c)}.$$

Assim,

$$\frac{\overline{EX}}{\overline{XF}} = \frac{b(b+c)}{S_{ABC}(p-a)^2} \frac{S_{AFX}}{S_{AXE}} = \frac{S_{ABC}(p-a)^2}{c(b+c)} = \frac{b}{c}.$$

Temos também

$$S_{IDC} = \frac{S_{ABC}}{2pa1} \begin{vmatrix} a & b & c \\ 0 & p-c & p-b \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{S_{ABC}a(p-c)}{2pa} \quad e$$

$$S_{XIC} = \frac{S_{ABC}}{(b+c)2p1} \begin{vmatrix} a & p-a & p-a \\ a & b & c \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{S_{ABC}a(p-c)}{2p(b+c)}.$$

Assim,

$$\frac{\overline{DI}}{\overline{IX}} = \frac{S_{IDC}}{S_{XIC}} = \frac{S_{ABC}a(p-c)}{2pa} \frac{2p(b+c)}{S_{ABC}a(p-c)} = \frac{b+c}{a}.$$

□

Problema 3. *Mostre que o baricentro de um triângulo divide o segmento de reta definido pelo incentro e pelo ponto de Nagel na razão*

$$\frac{|N_aG|}{|GI|} = \frac{2}{1}.$$

Solução. Admitindo que o baricentro, o incentro e o ponto de Nagel são colineares, conforme a questão anterior, determinaremos as coordenadas baricêntricas absolutas do ponto que divide o segmento de reta N_aI na razão proposta comparando-as com as coordenadas baricêntricas do baricentro. Determinando as coordenadas baricêntricas absolutas do incentro e do ponto de Nagel, temos

$$I = \left(\frac{a}{2p} : \frac{b}{2p} : \frac{c}{2p} \right) \quad \text{e} \quad N_a = \left(\frac{p-a}{p} : \frac{p-b}{p} : \frac{p-c}{p} \right).$$

Desta forma, sendo P o ponto que divide o segmento de reta N_aI na razão 2:1, ele terá as seguintes coordenadas baricêntricas absolutas:

$$\frac{2 \cdot \left(\frac{a}{2p} : \frac{b}{2p} : \frac{c}{2p} \right) + 1 \cdot \left(\frac{p-a}{p} : \frac{p-b}{p} : \frac{p-c}{p} \right)}{2+1}.$$

De forma equivalente, temos que

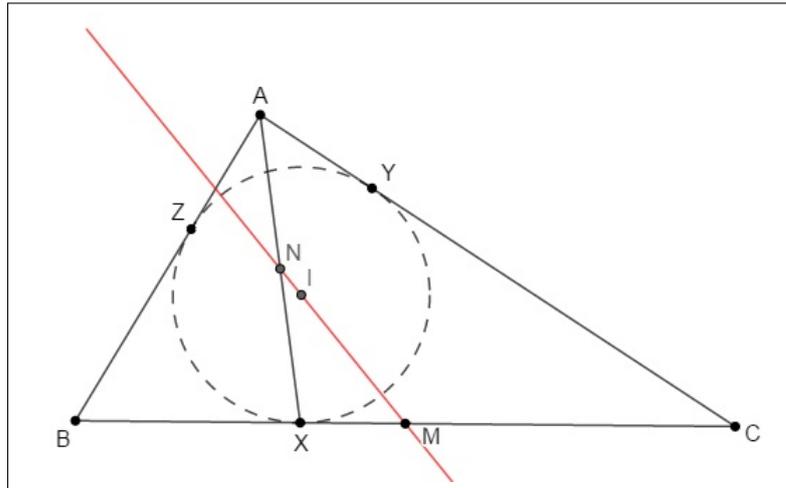
$$P = \frac{(p : p : p)}{3p} = \left(\frac{1}{3} : \frac{1}{3} : \frac{1}{3} \right).$$

Desta forma, o ponto P assim definido, tem coordenadas baricêntricas absolutas iguais as do baricentro, o que mostra que este divide o segmento de reta analisado na proporção enunciada. □

Problema 4. *Sejam X , Y e Z os pontos onde o incírculo do triângulo ABC toca os lados BC , AC e AB , respectivamente. Mostre que o incentro de ABC está sobre a reta que passa pelos pontos médios de BC e AX .*

Solução. Consideremos M ponto médio de BC e N ponto médio de AX . Como B e C estão balanceados, temos que $M = (0 : 1 : 1)$. As coordenadas de $X = (0 : p-c : p-b)$ na forma balanceada são dadas por $X = (0 : \frac{p-c}{2p-(b+c)} : \frac{p-b}{2p-(b+c)})$. Assim $N = (1 : \frac{p-c}{2p-(b+c)} : \frac{p-b}{2p-(b+c)})$.

Para mostrar que $I = (a : b : c)$ está sobre a reta MN , basta verificar que

Figura 20 – Colinearidade dos pontos M , I e N 

Fonte: O autor

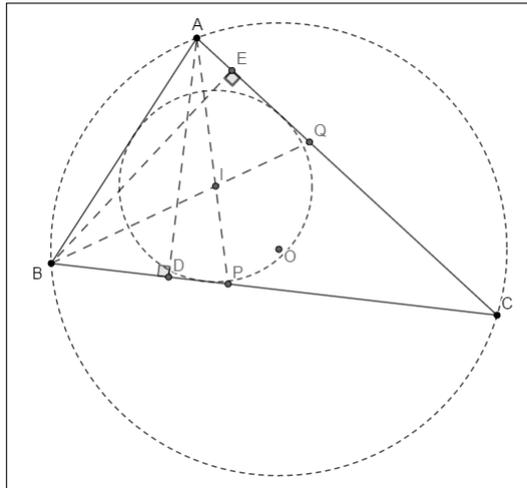
$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & \frac{p-c}{2p-(b+c)} & \frac{p-b}{2p-(b+c)} \end{vmatrix} = 0.$$

De fato,

$$\begin{aligned} a \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \frac{p-c}{2p-(b+c)} & \frac{p-b}{2p-(b+c)} \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \frac{p-b}{2p-(b+c)} \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \frac{p-c}{2p-(b+c)} \end{vmatrix} &= \\ \frac{a(p-b)}{2p-(b+c)} - \frac{a(p-c)}{2p-(b+c)} + b - c &= \\ \frac{a(p-b-p+c) + [2p-(b+c)](b-c)}{2p-(b+c)} &= \\ \frac{-a(b-c) + (b-c)[2p-(b+c)]}{2p-(b+c)} &= \\ \frac{(b-c)[2p-(b+c)-a]}{2p-(b+c)} &= \\ \frac{(b-c)[2p-(a+b+c)]}{2p-(b+c)} &= 0. \end{aligned}$$

□

Problema 5. (Banco IMO/97) No triângulo acutângulo ABC , sejam AD , BE alturas e AP , BQ bissetrizes internas. Sejam I e O o incentro e o circuncentro do triângulo ABC , respectivamente. Prove que os pontos D , E e I são colineares se e somente se P , Q e O são colineares.

Figura 21 – Pontos D , E e I não alinhados

Fonte: O autor

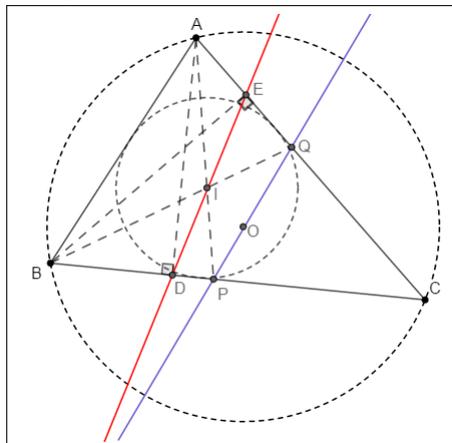
Solução. Coordenadas dos pontos: $I = (a : b : c)$, $D = (0 : S_C : S_B)$, $E = (S_C : 0 : S_A)$, $P = (0 : b : c)$, $Q = (a : 0 : c)$, e $O = (a^2 S_A : b^2 S_B : c^2 S_C)$.

Os pontos D , E e I são colineares se, e somente se

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ 0 & S_C & S_B \\ S_C & 0 & S_A \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} S_C & S_B \\ 0 & S_A \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} 0 & S_B \\ S_C & S_A \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} 0 & S_C \\ S_C & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

o que ocorre se, e somente se

$$aS_A S_C + bS_B S_C - cS_C^2 = 0 \Leftrightarrow aS_A + bS_B = cS_C.$$

Figura 22 – Pontos D , E e I alinhados

Fonte: O autor

Da mesma forma, os pontos P , Q e O são colineares se, e somente se

$$\begin{vmatrix} 0 & b & c \\ a & 0 & c \\ a^2 S_A & b^2 S_B & c^2 S_C \end{vmatrix} = -b \begin{vmatrix} a & c \\ a^2 S_A & c^2 S_C \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} a & 0 \\ a^2 S_A & b^2 S_B \end{vmatrix} = 0,$$

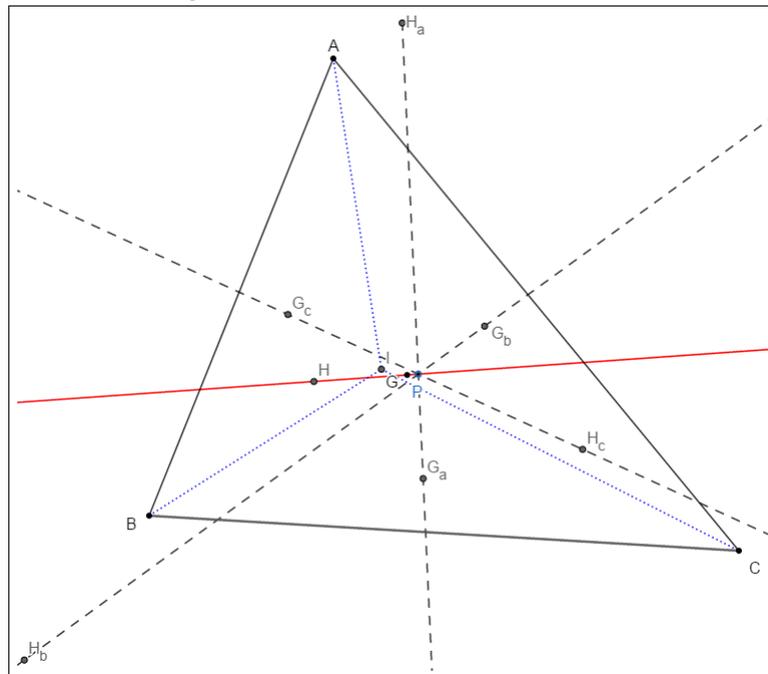
o que ocorre se, e somente se

$$a^2 b c S_A + a b^2 c S_B - a b c^2 S_C = 0 \Leftrightarrow a \cdot S_A + b \cdot S_B = c \cdot S_C.$$

□

Problema 6. *Seja I o incentro do triângulo ABC . Prove que as retas de Euler dos triângulos ABC , ABI , IBC e AIC são concorrentes.*

Figura 23 – Interseção das retas de Euler



Fonte: O autor

Solução. As coordenadas baricêntricas do baricentro do triângulo ABI são dadas por

$$(1 : 0 : 0) + (0 : 1 : 0) + \left(\frac{a}{a+b+c} : \frac{b}{a+b+c} : \frac{c}{a+b+c} \right) = (2a + b + c : a + 2b + c : c).$$

As coordenadas baricêntricas do ortocentro podem ser dadas pela interseção de duas retas que contenham duas alturas de ABI . Uma das retas é perpendicular à reta $z = 0$ que passa

por $I(a : b : c)$. Assim, sua equação é dada por

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ a & b & c \\ S_B & S_A & -S_A - S_B \end{vmatrix} = (cS_A + bc^2)x + (-cS_B - ac^2)y + (-aS_A + bS_B)z = 0.$$

A outra reta é perpendicular a BI e passa por $A(1 : 0 : 0)$ e tem equação dada por

$$(cS_B + ac^2)y + (aS_A - cS_C)z = 0.$$

A interseção destas alturas é o ortocentro de ABI :

$$((cS_B + ac^2)(bS_B - cS_C) : (cS_A + bc^2)(aS_A - cS_C) : -(cS_B + ac^2)(cS_A + bc^2)) = (b - c : a - c : c)$$

Portanto, a reta de Euler do triângulo ABI tem equação dada por

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 2a + b + c & a + 2b + c & c \\ b - c & a - c & c \end{vmatrix} = c(b + c)x - c(a + c)y + (a^2 - b^2)z = 0.$$

De Maneira similar, encontramos as retas de Euler dos triângulos IBC e AIC que são, respectivamente,

$$(b^2 - c^2)x + a(c + a)y - a(b + a)z = 0 \quad \text{e} \quad -b(c + b)x + (c^2 - a^2)y + b(a + b)z = 0.$$

Calculando a interseção entre as retas de Euler dos triângulos ABI e IBC , encontramos o ponto P de coordenadas

$$P = \left(\frac{a(b + c - a)}{b + c} : \frac{b(a + c - b)}{a + c} : \frac{c(a + b - c)}{a + b} \right),$$

que também é ponto da reta de Euler do triângulo AIC . Tomando as coordenadas do ortocentro de ABC em função dos lados, percebemos que P é ponto da reta de Euler do triângulo ABC . De fato,

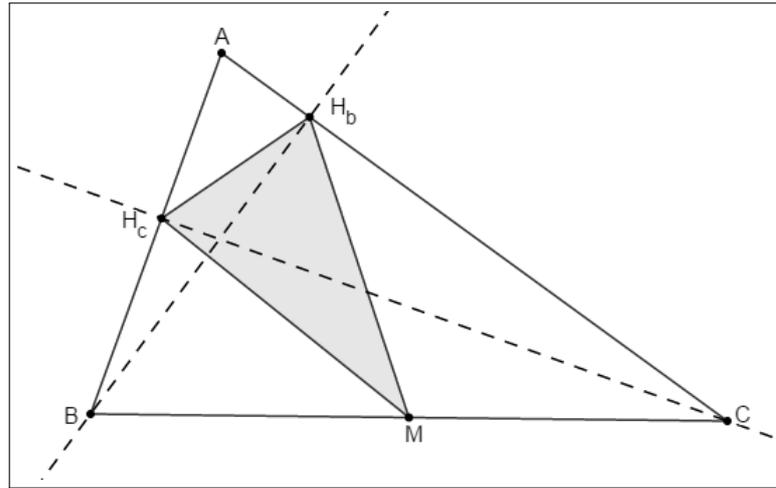
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{-a^2 + b^2 + c^2} & \frac{1}{a^2 - b^2 + c^2} & \frac{1}{a^2 + b^2 - c^2} \\ \frac{a(b + c - a)}{b + c} & \frac{b(a + c - b)}{a + c} & \frac{c(a + b - c)}{a + b} \end{vmatrix} = 0.$$

□

Problema 7. Em um triângulo ABC , sejam M o ponto médio do lado BC e sejam H_b e H_c , respectivamente, os pés das alturas relativas a AC e AB . Prove que o triângulo MH_bH_c

é isósceles.

Figura 24 – Triângulo MH_bH_c



Fonte: O autor

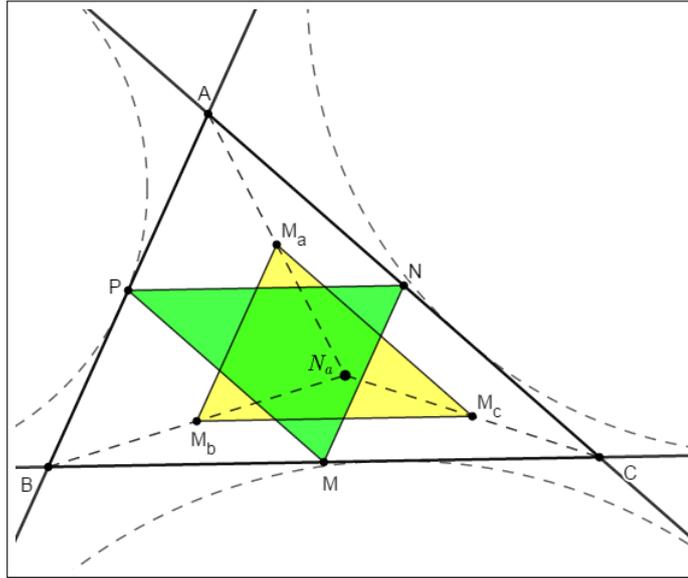
Solução. As coordenadas baricêntricas dos vértices de MH_bH_c são dadas por $M = (0 : 1 : 1) = (0 : \frac{1}{2} : \frac{1}{2})$, $H_b = (a^2 + b^2 - c^2 : 0 : -a^2 + b^2 + c^2) = (S_C : 0 : S_A)$ e $H_c = (a^2 - b^2 + c^2 : -a^2 + b^2 + c^2 : 0) = (S_B : S_A : 0)$. Balanceando os pontos H_b e H_c temos $H_b = (\frac{S_C}{b^2} : 0 : \frac{S_A}{b^2})$ e $H_c = (\frac{S_B}{c^2} : \frac{S_A}{c^2} : 0)$. Pela relação da distância entre dois pontos temos

$$\begin{aligned} |MH_b| &= \sqrt{\frac{S_A S_C^2}{b^4} + \frac{S_B}{4} + \frac{S_C}{4} - \frac{S_A S_C}{b^2} + \frac{S_C S_A^2}{b^4}} \\ &= \sqrt{S_A S_C \left(\frac{b^2}{b^4} - \frac{1}{b^2} \right) + \frac{a^2}{4}} \\ &= \frac{a}{2} \text{ e} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |MH_c| &= \sqrt{\frac{S_A S_B^2}{c^4} + \frac{S_B}{4} - \frac{S_B S_A}{c^2} + \frac{S_B S_A^2}{c^4} + \frac{S_C}{4}} \\ &= \sqrt{S_A S_B \left(\frac{c^2}{c^4} - \frac{1}{c^2} \right) + \frac{a^2}{4}} \\ &= \frac{a}{2}. \end{aligned}$$

Assim, $|MH_b| = |MH_c|$. Isso mostra que o triângulo MH_bH_c é isósceles. \square

Problema 8. Considere o triângulo ABC . Mostre que os pontos médios entre o ponto de Nagel N_a e cada vértice de ABC formam um triângulo congruente ao triângulo medial.

Figura 25 – Congruência dos triângulos MNP e $M_aM_bM_c$ 

Fonte: O autor

Solução. Sejam M , N e P os respectivos pontos médios dos lados BC , AC e AB . Assim, cada lado do triângulo medial é base média de um lado do triângulo ABC . Desta forma, as medidas dos lados do triângulo MNP são dadas por $MN = \frac{c}{2}$, $NP = \frac{a}{2}$ e $PM = \frac{b}{2}$. De fato, em coordenadas baricêntricas, $M = (0 : 1 : 1)$, $N = (1 : 0 : 1)$ e $P = (1 : 1 : 0)$, que balanceados tem as seguintes coordenadas, $M = (0 : \frac{1}{2} : \frac{1}{2})$, $N = (\frac{1}{2} : 0 : \frac{1}{2})$ e $P = (\frac{1}{2} : \frac{1}{2} : 0)$. Pela relação da distância entre pontos temos

$$\begin{aligned}
 |MN| &= \sqrt{S_A \cdot \frac{1}{4} + S_B \cdot \frac{1}{4} + S_C \cdot 0} \\
 &= \sqrt{\frac{S_A + S_B}{4}} \\
 &= \sqrt{\frac{c^2}{4}} \\
 &= \frac{c}{2}.
 \end{aligned}$$

A verificação da medida dos outros dois lados é feita de maneira análoga.

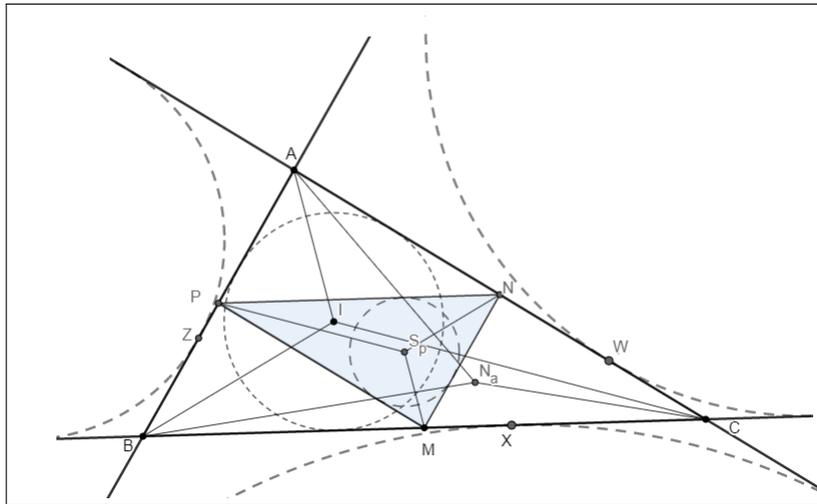
Agora, seja N_a o ponto de Nagel, cujas coordenadas balanceadas são dadas por $N = (\frac{p-a}{p} : \frac{p-b}{p} : \frac{p-c}{p})$. Sejam M_a , M_b e M_c os pontos médios de N_aA , N_aB , e N_aC , respectivamente. Calculando as coordenadas de M_a , M_b e M_c e em seguida balanceando-as temos que $M_a = (\frac{2p-a}{2p} : \frac{p-b}{2p} : \frac{p-c}{2p})$, $M_b = (\frac{p-a}{2p} : \frac{2p-b}{2p} : \frac{p-c}{2p})$ e $M_c = (\frac{p-a}{2p} : \frac{p-b}{2p} : \frac{2p-c}{2p})$. Pela relação da distância entre pontos temos

$$\begin{aligned}
|M_a M_b| &= \sqrt{S_A \cdot \frac{(2p - a - p + a)^2}{(2p)^2} + S_B \cdot \frac{(p - b - 2p + b)^2}{(2p)^2} + S_C \cdot \frac{(p - c - p + c)^2}{(2p)^2}} \\
&= \sqrt{\frac{S_A + S_B}{4}} \\
&= \frac{c}{2}.
\end{aligned}$$

Similarmente encontramos $|M_a M_c| = \frac{b}{2}$ e $|M_b M_c| = \frac{a}{2}$. Assim, temos que $|NP| = |M_b M_c| = \frac{a}{2}$, $|PM| = |M_a M_c| = \frac{b}{2}$ e $|MN| = |M_a M_b| = \frac{c}{2}$. Logo, pelo caso LLL os triângulos MNP e $M_a M_b M_c$ são congruentes. \square

Problema 9. Prove que o centro do círculo de Spieker é ponto médio de IN_a , onde I é o incentro e N_a é o ponto de Nagel.

Figura 26 – Ponto médio de IN_a



Fonte: O autor

Solução. O incentro I tem coordenadas $I = (a : b : c)$ e o ponto de Nagel N_a tem coordenadas $N = (p - a : p - b : p - c)$. Balanceando ambos os pontos temos que $I = (\frac{a}{2p} : \frac{b}{2p} : \frac{c}{2p})$ e $N = (\frac{p-a}{p} : \frac{p-b}{p} : \frac{p-c}{p})$. Assim, o ponto médio de IN_a é dado por

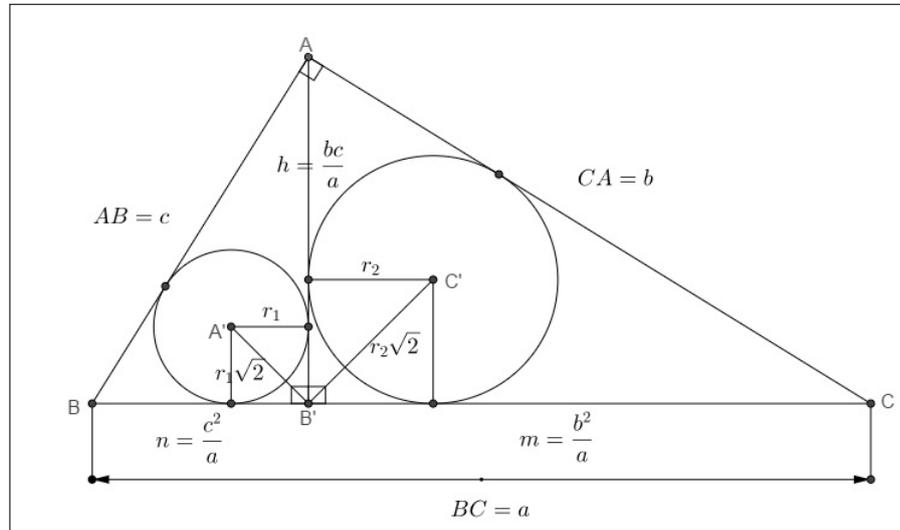
$$\begin{aligned}
\left(\frac{a}{2p} : \frac{b}{2p} : \frac{c}{2p}\right) + \left(\frac{p-a}{p} : \frac{p-b}{p} : \frac{p-c}{p}\right) &= \left(\frac{2p-a}{2p} : \frac{2p-b}{2p} : \frac{2p-c}{2p}\right) \\
&= (2p-a : 2p-b : 2p-c),
\end{aligned}$$

que são as coordenadas do centro de Spieker. \square

Problema 10. Seja ABC um triângulo retângulo em A e seja B' o pé da altura relativa à hipotenusa BC . Sejam ainda I_1 e I_2 os incentros dos triângulos $B'AB$ e $B'CA$. Prove que A é ex-incentro do triângulo $I_1 B' I_2$ relativo ao lado $I_1 I_2$.

Solução. Consideremos $I_1 = A'$, $I_2 = C'$

Figura 27 – Raios dos círculos inscritos em ABB' e em ACB'



Fonte: O autor

No triângulo ABC , retângulo em A , temos que B' é o pé da altura h relativa à hipotenusa BC , A' é o incentro do triângulo retângulo $B'AB$ e C' é o incentro do triângulo retângulo $B'CA$.

Sejam $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, $AB' = h$, $BB' = n$ e $B'C = m$. Pelas relações métricas no triângulo retângulo sabemos que

$$h = \frac{bc}{a}, \quad m = \frac{b^2}{a} \quad \text{e} \quad n = \frac{c^2}{a}.$$

Sabemos ainda que o raio do círculo inscrito em um triângulo retângulo é a diferença entre o semiperímetro e a hipotenusa do mesmo. Assim,

$$2p_{B'AB} = \frac{c^2}{a} + \frac{bc}{a} + c = \frac{2pc}{a}, \quad \text{isto implica} \quad r_1 = \frac{pc}{a} - c = \frac{(p-a)c}{a}$$

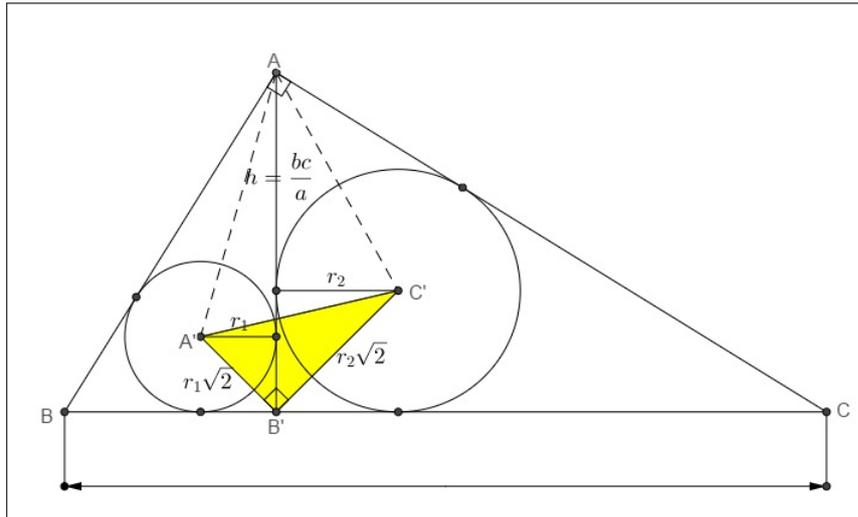
e

$$2p_{B'CA} = \frac{b^2}{a} + \frac{bc}{a} + b = \frac{2pb}{a} \quad \text{isto implica} \quad r_2 = \frac{pb}{a} - b = \frac{(p-a)b}{a}.$$

Desses resultados, segue imediatamente que

$$r_1 r_2 = \left(\frac{p-a}{a} \right)^2 bc, \quad r_1 + r_2 = \left(\frac{p-a}{a} \right) (2p-a) \quad \text{e} \quad r_1^2 + r_2^2 = (p-a)^2.$$

No triângulo $A'B'C'$ temos que

Figura 28 – Coordenadas baricêntricas do vértice A 

Fonte: O autor

$$a' = r_2\sqrt{2},$$

$$\begin{aligned} (b')^2 &= (r_1\sqrt{2})^2 + (r_2\sqrt{2})^2 = 2(r_1^2 + r_2^2) \\ &= 2(p - a)^2 \\ \Rightarrow b' &= (p - a)\sqrt{2} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} S_{A'B'C'} &= \frac{1}{2}r_1\sqrt{2}r_2\sqrt{2} \\ &= r_1r_2. \end{aligned}$$

Sendo A' , B' e C' os vértices do triângulo de referência $A'B'C'$, todo ponto P do plano tem coordenadas baricêntricas dadas por $P = (S_{PB'C'} : S_{PC'A'} : S_{PA'B'})$. Assim, tomando $P = A$, temos que $A = (S_{AB'C'} : S_{AC'A'} : S_{AA'B'})$, onde

$$S_{AB'C'} = \frac{1}{2}\frac{bc}{a}r_2 \quad \therefore \quad S_{AB'C'} = \frac{bc}{2a}r_2$$

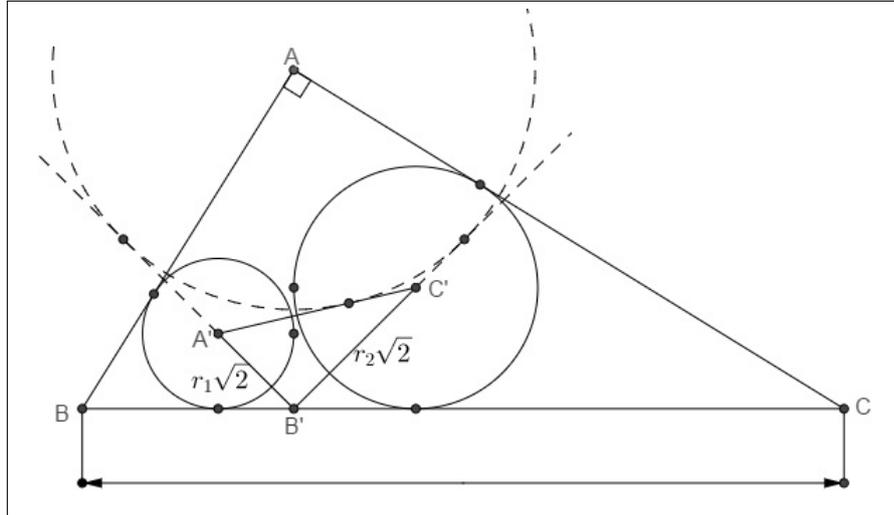
$$S_{AA'B'} = \frac{1}{2}\frac{bc}{a}r_1 \quad \therefore \quad S_{AA'B'} = \frac{bc}{2a}r_1$$

$$S_{AC'A'} = -(S_{AB'C'} + S_{AA'B'} - S_{A'B'C'}) \quad \therefore \quad S_{AC'A'} = -\left(\frac{bc}{2a}(r_1 + r_2) - r_1r_2\right)$$

Daí, as coordenadas baricêntricas de A são

$$A = \left(\frac{bc}{2a}r_2 : - \left(\frac{bc}{2a}(r_1 + r_2) - r_1r_2 \right) : \frac{bc}{2a}r_1 \right) = \left(r_2 : - \left((r_1 + r_2) - r_1r_2 \frac{2a}{bc} \right) : r_1 \right)$$

Figura 29 – Ex-incentro relativo a I_1I_2



Fonte: O autor

Por outro lado, tomando $A'B'C'$ como triângulo de referência temos $a' = B'C' = r_2\sqrt{2}$, $b' = C'A' = (p-a)\sqrt{2}$ e $c' = A'B' = r_1\sqrt{2}$.

Assim, o ex-incentro $I_{A'B'C'}$ do triângulo $\Delta A'B'C'$ relativo ao lado $A'C'$ é dado por $I_{A'B'C'} = (a' : -b' : c')$, o que nos dá $I_{A'B'C'} = (r_2\sqrt{2} : -(p-a)\sqrt{2} : r_1\sqrt{2}) = (r_2 : -(p-a) : r_1)$.

Observemos que para $A = P$ devemos ter

$$p - a = (r_1 + r_2) - r_1r_2 \frac{2a}{bc}.$$

De fato,

$$(r_1 + r_2) - r_1r_2 \frac{2a}{bc} = \underbrace{\left(\frac{p-a}{a} \right) (2p-a)}_{r_1+r_2} - \underbrace{\left(\frac{p-a}{a} \right)^2}_{r_1r_2} bc \frac{2a}{bc}$$

$$(r_1 + r_2) - r_1r_2 \frac{2a}{bc} = \left(\frac{p-a}{a} \right) ((2p-a) - (p-a)2)$$

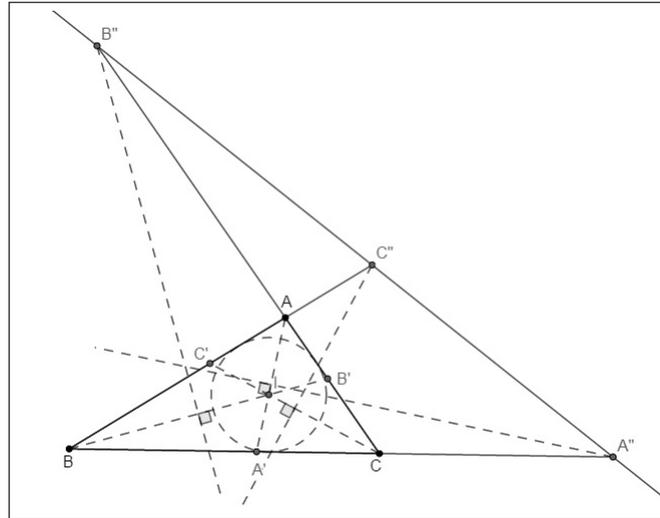
$$(r_1 + r_2) - r_1r_2 \frac{2a}{bc} = \left(\frac{p-a}{a} \right) (2p-a - 2p+2a)$$

$$(r_1 + r_2) - r_1r_2 \frac{2a}{bc} = p - a.$$

Isso mostra que que A é ex-incentro do triângulo $I_1B'I_2$ relativo ao lado I_1I_2 . \square

Problema 11. (TCS 2013) Dado um triângulo escaleno ABC , sejam A', B', C' os pontos de interseção das bissetrizes internas de $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$ com os lados opostos, respectivamente. Seja A'' a interseção entre BC e a mediatriz de AA' . Defina B'' e C'' de modo análogo. Mostre que A'', B'' e C'' são colineares.

Figura 30 – Um exemplo geométrico para o problema



Fonte: O autor

Solução. A reta AA' tem equação

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & b & c \end{vmatrix} = 0, \text{ ou seja, } -yc + zb = 0.$$

Assim, $P_\infty = (-c - b : b : c)$ é ponto no infinito da reta AA' . Como a reta perpendicular a AA' é mediatriz, então ela passa pelo ponto $(b + c : b : c)$, ponto médio da bissetriz AA' . Logo sua equação é dada por

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ b + c & b & c \\ bS_B - cS_C & cS_C - (-c - b)S_A & (-c - b)S_A - bS_B \end{vmatrix} = 0.$$

Como A'' pertence à reta $x = 0$, temos que A'' é da forma $A'' = (0 : v_{A''} : w_{A''})$. Assim,

$$\begin{vmatrix} 0 & v_{A''} & w_{A''} \\ b + c & b & c \\ bS_B - cS_C & cS_C - (-c - b)S_A & (-c - b)S_A - bS_B \end{vmatrix} = 0.$$

Temos então

$$\begin{aligned} & -v_{A''} \{(b+c)[(-c-b)S_A - bS_B] - c(bS_B - cS_C)\} \\ & + w_{A''} \{(b+c)[cS_C - (-c-b)S_A] - b(bS_B - cS_C)\} = 0 \end{aligned}$$

Pelas Notações de Conway, podemos escrever

$$\begin{aligned} & -v_{A''} \left\{ -\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2}\right)(b+c)^2 - \left(\frac{a^2+c^2-b^2}{2}\right)[(b+c)^2 - c^2] + c^2\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2}\right) \right\} \\ & + w_{A''} \left\{ \left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2}\right)(b+c)^2 + \left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2}\right)[(b+c)^2 - b^2] - b^2\left(\frac{a^2+c^2-b^2}{2}\right) \right\} = 0. \end{aligned}$$

Isto implica em

$$\begin{aligned} -v_{A''}[-c^2(b+c)^2 + a^2c^2] + w_{A''}[b^2(b+c)^2 - b^2a^2] &= 0 \\ -v_{A''}[-c^2[(b+c)^2 + a^2] + w_{A''}[b^2(b+c)^2 - a^2] &= 0. \end{aligned}$$

Portanto,

$$A'' = (0 : b^2[(b+c)^2 - a^2] : -c^2[(b+c)^2 - a^2]) = (0 : b^2(2p-a) : -c^2(2p-a))$$

De maneira análoga, obtemos

$$B'' = (a^2[(a+c)^2 - b^2] : 0 : -c^2[(a+c)^2 - b^2]) = (a^2(2p-b) : 0 : -c^2(2p-b)) \text{ e}$$

$$C'' = (a^2[(a+b)^2 - c^2] : b^2[(a+b)^2 - c^2] : 0) = (a^2(2p-c) : b^2(2p-c) : 0)$$

Calculando o determinante, temos

$$\begin{vmatrix} 0 & b^2(2p-a) & -c^2(2p-a) \\ a^2(2p-b) & 0 & -c^2(2p-b) \\ a^2(2p-c) & b^2(2p-c) & 0 \end{vmatrix} =$$

$$a^2b^2c^2(2p-a)(2p-b)(2p-c) - a^2b^2c^2(2p-a)(2p-b)(2p-c) = 0.$$

Isso mostra que A'' , B'' e C'' são colineares.

□

5 CONCLUSÃO

Concluimos, através deste estudo, que vários problemas de Geometria Euclidiana podem ser solucionados de forma simples e elegante, utilizando-se o conhecimento da Geometria Euclidiana combinado com o estudo das coordenadas baricêntricas. Esperamos que este texto introdutório seja utilizado por discentes, docentes e simpatizantes da Matemática na aprendizagem da técnica aqui apresentada, especialmente como instrumento preparatório para competições de Matemática, contribuindo assim para o ensino desta disciplina.

Sobre as possibilidades de aplicação deste conteúdo em sala de aula na educação básica, compreendemos que poderia ser inserido aos poucos, a partir da segunda série do ensino médio, tomando-se por base o currículo da escola pública. Apesar de não estar inserido nos parâmetros curriculares nacionais - PCN's nem nas diretrizes curriculares nacionais - DCN's, muitos requisitos para compreensão desta técnica são oriundos da Geometria Euclidiana que é trabalhada na escola desde o Ensino Fundamental.

Por fim, as ferramentas reunidas neste trabalho trazem ao professor suporte para formação continuada, além de auxiliar na elaboração de aulas preparatórias para competições matemáticas.

REFERÊNCIAS

BORTOLOSSI, H. J.; FIGUEIREDO, J. H. O. **Coordenadas Baricêntricas: Uma Introdução com Ênfase na Geometria Moderna do Triângulo**. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal Fluminense, 2017. Disponível em: <<http://www.professores.im-uff.mat.br/hjbortol/arquivo/2017.1/cms/cms-coordenadas-baricentricas.pdf>>. Acesso em: 25 jun. 2018.

DOLCE, O.; POMPEO, J. N. **Fundamentos de Matemática Elementar**. São Paulo: Atual, 1985.

FIGUEIREDO, J. H. O. **Usando Coordenadas Baricêntricas para Estudar a Geometria do Triângulo**. 2008. Dissertação (Especialização em Matemática) – Universidade Federal Fluminense, Niterói.

GIRÃO, F. V.; CARNEIRO, E. A. S. Centro de Massa e Aplicações à Geometria. **Revista Eureka**, Rio de Janeiro, v. 1, n. 21, p. 29–37, 2005.

LIMA, E. L. **Coordenadas no Espaço**. Rio de Janeiro: SBM, 1993.

MUNIZ NETO, A. C. **Geometria**. Rio de Janeiro: SBM, 2013. (Coleção PROFMAT)

_____. **Tópicos de Matemática Elementar: Geometria Euclidiana Plana**. Rio de Janeiro: SBM, 2013. (Coleção do Professor de Matemática)