UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO JOÃO DEL-REI
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA - PROFMAT

FRANCIELLE MENDONÇA MARTINS

VARIÁVEIS DISCRETAS E PROBABILIDADE: UMA ABORDAGEM INICIAL NO ENSINO MÉDIO

São João Del-Rei
2019

Francielle Mendonça Martins

VARIÁVEIS DISCRETAS E PROBABILIDADE: UMA ABORDAGEM INICIAL NO ENSINO MÉDIO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) da Universidade Federal de São João Del Rei como requisito parcial para à obtenção do grau de Mestre.
Orientador: Prof. Dr. José Angel Dávalos Chuquipoma.

São João Del-Rei
2019

TERMO DE APROVAÇÃO

Francielle Mendonça Martins

VARIÁVEIS DISCRETAS E PROBABILIDADE: UMA ABORDAGEM INICIAL NO ENSINO MÉDIO

Dissertação a ser APROVADA como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Matemática no Curso de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), da Universidade Federal de São João del-Rei (Campus Santo Antônio) pela seguinte banca examinadora:

Prof. Dr. José Angel Dávalos Chuquipoma (**Orientador**)
UFSJ - Universidade Federal de São João del-Rei

Prof. Dr. Jorge Andrés Julca Avila (*Avaliador local*)
UFSJ - Universidade Federal de São João del-Rei

Prof. Dr. Cosme Eustaquio Rubio Mercedes (*Avaliador externo*)
UEMS- Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul

São João del-Rei, 12 de abril de 2019.

Agradecimentos

Em primeiro lugar, agradeço a Deus por proteger e guiar meus passos. Sem a intercessão divina não seria possível a conclusão dessa importante etapa em minha vida.

À minha mãe Cecília, exemplo de força, caráter e determinação. Seu apoio e amor incondicional me dão motivos para buscar ser alguém sempre melhor.

Aos meus familiares, meu noivo e meus amigos por toda compreensão e suporte dedicados à mim.

Aos meus colegas de trabalho, por todo incentivo e apoio.

Aos meus queridos colegas e agora amigos, por não terem deixado os momentos de dificuldade me afastar do meu objetivo, nossa convivência foi marcada por muito estudo, trabalho e superação, contudo, ainda mais fortes foram os momentos de alegria e companheirismo.

Agradeço especialmente às minhas queridas amigas Juniane, Jéssica e Lara, a presença de vocês tornou a caminhada mais leve. Agradeço também o meu parceiro de estrada, Augusto, pelo companheirismo demonstrado durante os intermináveis 420 km percorridos todas as semanas.

Agradeço a todos os professores do PROFMAT, pelo empenho em compartilhar suas experiências e conhecimentos.

Ao meu orientador, Dávalos, por sua ajuda, compreensão e principalmente paciência em meus momentos de dificuldade.

RESUMO

Neste trabalho apresentamos a relação existente entre a teoria de probabilidade e variáveis discretas, por meio do estudo das Equações de Diferenças Lineares, tendo como propósito a utilização desses conteúdos no Ensino Médio. Em particular, seguindo as ideias de Elaydi [8], realizamos a interpretação, modelagem e análise do problema "A Ruína do Jogador". Organizamos um roteiro didático como uma proposta de aprofundamento no ensino de probabilidade e introdução das equações de diferenças como tema complementar, promovendo uma mudança na abordagem de ensino da probabilidade. Por último, juntamente com alguns alunos do 2º ano do Ensino Médio, realizamos alguns testes para analisar e compreender o comportamento da solução dessas equações.

Palavras-chave: Probabilidade, Equação de diferenças, Ruína do Jogador.

ABSTRACT

In this work we present the relationship between probability theory and discrete variables, through the study of Linear Differences Equations, with the purpose the use of these contents in High School. In particular, following the ideas of Elaydi [8], we perform the interpretation, modeling and analysis of the problem The Gambler's Ruin. We organized a didactic script as a proposal to deepen the teaching of probability and introduce the difference equations as a complementary theme, promoting a change in the teaching approach of probability. Finally, together with some students of the 2nd year of High School, we performed some tests to analyze and understand the behavior of the solution.

Keywords: Probability, Difference Equations, The Gambler's Ruin.

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Sumário

Introdução

Diante dos inúmeros desafios que a educação de modo geral tem colecionado ao longo do tempo, se há um consenso tanto entre educadores da área de Matemática e Ciências da Natureza quanto dos profissionais da área de Linguagens e Ciências Humanas é que para romper algumas dessas barreiras é necessário adotar métodos de aprendizagem mais ativos e interativos. Porém, é do conhecimento de todos os profissionais da área de Educação, principalmente daqueles que atuam na Rede Pública de Ensino, que muitas outras barreiras devem ainda ser quebradas para colocar esse plano em prática, é preciso superar a superlotação das salas, o desinteresse dos alunos, a falta de material, a precariedade de laboratórios de informática e de ciências, a pressão em cumprir o planejamento anual e entre outros tantos problemas que fazem parte do dia a dia em sala de aula. Por essa razão, é fundamental que o professor esteja sempre atento a todas e quaisquer oportunidades que surgirem ao longo do processo de ensino, buscando sempre que possível proporcionar aos alunos uma abordagem diferenciada do conteúdo, que os faça refletir e construir seu próprio conhecimento.

Neste trabalho, faremos um pequeno estudo sobre a teoria de probabilidade e uma introdução dos principais casos de Equações de Diferenças, associando esses dois tópicos na modelagem, resolução e análise de um clássico problema de probabilidade conhecido por "A Ruína do Jogador". O modelo foi construído e resolvido com base na teoria de Equação de Diferenças, também conhecida como Equações Discretas ou Equações de Recorrência, conteúdo que possui grandes similaridades com as Equações Diferenciais, porém, ao invés de utilizar varíaveis contínuas utiliza variáveis discretas, essas equações possuem inúmeras aplicações na Matemática, Biologia, Economia e outras grandes áreas. Ao final, relataremos a aplicação de uma proposta de ensino para alunos do 2º ano do Ensino Médio, que foi apresentada com o objetivo inicial de desenvolver habilidades relacionadas à construção de modelos e à resolução de problemas, como também desenvolver nos estudantes uma postura mais autônoma e a oportunidade de criar e pensar criticamente.

É necessário destacar que o estudo da probabilidade é um recurso em potencial para buscar desenvolver nos estudantes a criatividade e o pensamento crítico. No entanto, muitas vezes o ensino da probabilidade fica restrito a resoluções ensaiadas e problemas triviais. A inserção de situações problema um pouco mais complexas ou aliadas a outras áreas do conhecimento nas aulas de probabilidade podem alterar a visão restrita que boa parte dos alunos possuem sobre a matemática como simples manipulação de números e criar caminhos para uma aprendizagem mais significativa. Ainda, segundo os Parâmetros

Curriculares Nacionais (PCN, 1998, p.52):

> Não somente em Matemática, mas até particularmente nessa disciplina, a resolução de problemas é uma importante estratégia de ensino. Os alunos, confrontados com situações-problema, novas mas compatíveis com os instrumentos que já possuem ou que possam adquirir no processo, aprendem a desenvolver estratégia de enfrentamento, planejando etapas, estabelecendo relações, verificando regularidades, fazendo uso dos próprios erros cometidos para buscar novas alternativas; adquirem espírito de pesquisa, aprendendo a consultar, a experimentar, a organizar dados, a sistematizar resultados, a validar soluções; desenvolvem sua capacidade de raciocínio, adquirem auto-confiança e sentido de responsabilidade; e, finalmente, ampliam sua autonomia e capacidade de comunicacão e de argumentação.

Entendemos que associando o tema de probabilidade a uma atividade de formulação de modelos matemáticos, criamos a oportunidade de levar o aluno a pensar logicamente, organizar dados e utilizar conhecimentos matemáticos na resolução de problemas. Dessa maneira, a atividade proposta visa alcançar uma das competências específicas de matemática para o Ensino Médio, segundo a nova Base Nacional Comum Curricular (BNCC), o aluno deve conseguir "utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente."

Assim, organizamos esse trabalho em 4 capítulos. O Capítulo 1 aborda os principais conceitos e definições sobre o conteúdo de probabilidade, os exemplos resolvidos foram colocados a fim de auxiliar na compreensão de cada tópico. Os temas tratados nas três seções desse capítulo darão suporte à modelagem do problema principal a ser desenvolvido no Capítulo 3.

O Capítulo 2 introduz os aspectos elementares da teoria de Equação de Diferenças, trazendo algumas classificações e métodos de solução de Equações de Diferenças Lineares de primeira e segunda ordem. Esse tema auxiliará na resolução do modelo do problema principal.

O problema A Ruína do Jogador é apresentado no Capítulo 3, onde estão denotadas nas seções 3.1 e 3.2 a modelagem e a resolução do problema, respectivamente. A última seção apresenta uma breve análise dos resultados obtidos a partir de uma simulação dos valores das variáveis contidas no modelo encontrado, a fim de compreender alguns aspectos do comportamento da solução.

Por fim, o Capítulo 4 traz uma proposta de aula para o 2º ano do Ensino Médio organizada a partir do problema de aplicação tratado no Capítulo 3. A proposta trata de temas que fazem parte do currículo do Ensino Médio e que possuem relação direta com o problema principal e faz ainda uma introdução do tema Equação de Diferenças como conteúdo complementar. O roteiro didático apresentado pode auxiliar e incentivar outros professores de Matemática a diversificarem um pouco suas aulas e intensificarem o estudo de probabilidade. Os relatos da aplicação dessa atividade são exibidos na Seção 4.2.

Capítulo 1

Definições e Resultados Preliminares

Este capítulo apresenta as primeiras definições necessárias à compreensão do problema principal a ser desenvolvido ao longo deste trabalho. A primeira seção faz uma distinção entre variáveis contínuas e variáveis discretas, lembrando que todo o trabalho foi construído no campo das variáveis discretas. A segunda seção explora vários conceitos e definições relacionados à Probabilidade, sendo o Ensino Médio a etapa de ensino norteadora. Ao longo dessa segunda seção, muitos exemplos irão auxiliar na compreensão das ideias e podem servir de material suporte para as aulas de probabilidade no Ensino Médio.

1.1 Variáveis Contínuas e Variáveis Discretas

Definição 1. *Entende-se por variável qualquer grandeza que se modifica durante o processo dinâmico.*

Para este estudo é necessário diferenciar dois tipos de variáveis: variáveis contínuas e variáveis discretas. Em linhas gerais, o número de possíveis resultados para uma variável discreta deve ser finito ou infinito enumerável, desta forma, uma variável discreta não admite valores intermediários entre dois valores específicos, portanto só fazem sentido valores inteiros. Geralmente são originadas de algum processo de contagem, como por exemplo, o número de habitantes de um município ou número de gols marcados em uma rodada de um campeonato de futebol.

Em contrapartida, uma variável contínua pode assumir qualquer valor em um dado intervalo de números reais. Ela está ligada a grandezas mensuráveis como volume, comprimento, área, tempo, ângulos, temperatura, etc. De maneira formal, temos a seguinte definição:

Definição 2. *Uma variável é dita discreta quando o número de valores possíveis que a variável assume for enumerável, sendo o conjunto de possibilidades finito ou infinito.*

De maneira geral, um conjunto X é dito enumerável se existir uma bijeção entre X e o conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$. Logo, uma variável é discreta quando o conjunto de seus possíveis valores podem ser postos em lista como $x_1, x_2, \ldots, x_n$, com $n \in \mathbb{N}$.

Definição 3. *O conjunto finito $x_1, x_2, \ldots, x_n$ formado por valores de uma variável discreta x é denominado conjunto discreto. Em outras palavras, um conjunto é discreto se existe uma correspondência bijetiva entre os elementos do conjunto e um subconjunto do conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$.*

Se a variável não é discreta temos a seguinte definição.

Definição 4. *Uma variável é contínua se seu conjunto de possíveis valores consiste em um intervalo real.*

Em termos matemáticos podemos dar a seguinte interpretação: dada uma sequência finita de números reais $x_1, x_2, \ldots, x_n$, uma variável x é dita contínua se pode assumir todos os valores reais intermediários entre os valores discretos da sequência.

1.2 Probabilidade no Ensino Médio

Os conceitos e definições abordados nesta seção estão apoiados principalmente nas obras de Hazzan [10], Morgado[15] e [16]. De maneira simplificada, a probabilidade é uma perspectiva que se tem que algo venha a ocorrer, conhecida pelo senso comum como possibilidade ou chance. A primeira ligação com a probabilidade que os alunos em sala de aula se lembram imediatamente quando questionados são os jogos de azar e, de fato, jogos de cartas, dados e roletas foram o despertar do estudo da probabilidade e o interesse em compreender e modelar esses eventos foi o que impulsionou o desenvolvimento dessa teoria. Entretanto, deve-se ressaltar que muitas vezes o ensino de probabilidade no Ensino Médio se restringe apenas à visão clássica desse tipo de problema, apresentando questões "engessadas" e que exigem pouco do raciocínio e pensamento crítico do aluno. Com isso, um conteúdo de grande potencial como o de probabilidade acaba sendo pouco explorado e somente os conceitos triviais são cobrados em sala de aula, fato que difere bastante do nível de cobrança das principais avaliações e vestibulares do país, como por exemplo, o Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), e contraria também indicações de documentos oficiais que regulamentam o currículo de matemática das escolas públicas, tais como PCNs e CBC. Segundo o PCN (1998, p.40):

> A Matemática no Ensino Médio tem um valor formativo, que ajuda a estruturar o pensamento e o raciocínio dedutivo, porém também desempenha um papel instrumental, pois é uma ferramenta que serve para a vida cotidiana e para muitas tarefas específicas em quase todas as atividades humanas.

Ainda de acordo com o PCN(1998, p.45, 46):

> As habilidades de descrever e analisar um grande número de dados, realizar inferências e fazer predições com base numa amostra de população, aplicar as ideias de probabilidade e combinatória a fenômenos naturais e do cotidiano são aplicações da Matemática em questões do mundo real que tiveram um crescimento muito grande e se tornaram bastante complexas. Técnicas e raciocínios estatísticos e probabilísticos são, sem dúvida, instrumentos tanto das Ciências da Natureza quanto das Ciências Humanas. Isto mostra como será importante uma cuidadosa abordagem dos conteúdos de contagem, estatística e probabilidade no Ensino Médio, ampliando a interface entre o aprendizado da Matemática e das demais ciências e áreas.

Para que tais afirmações sejam efetivamente vivenciadas, é necessário desprender-se de problemas com resoluções preestabelecidas e buscar por questões que estimulem o pensamento e a interpretação, os alunos devem ter a liberdade de raciocinar e buscar alternativas para a resolução do problema. Além disso, é importante que em algum momento os alunos possam fazer correlações do conteúdo estudado com fatos cotidianos. No estudo da probabilidade o professor pode ainda mostrar sua aplicação em outras ciências, como por exemplo, Biologia e Economia, como descrito no CBC(2007, p.35):

> Hoje em dia a Estatística Descritiva e a Probabilidade fazem parte do discurso jornalístico e científico cotidiano quando se trata, por exemplo, de pesquisas de intenção de voto, perfil sócio-econômico da população brasileira, as chances da cura de determinada doença ou riscos de contraí-la. Espera-se, portanto, que numa formação básica do cidadão, não apenas se adquira a capacidade de ler e analisar dados expostos em diversas formas, mas que se possa refletir criticamente sobre os seus significados e emitir juízos próprios.

Assim, a ideia inicial é a de promover uma atividade que possibilite aos alunos a capacidade de pensar criticamente e interpretar logicamente uma situação, além de utilizar ferramentas matemáticas na resolução do problema. Desta maneira, as definições e exemplos que apresentaremos a seguir compõem parte da teoria necessária à construção e resolução dos problemas de aplicação propostos na atividade do Capítulo 4 deste trabalho.

1.2.1 Uma Introdução às Probabilidades

No estudo das probabilidades classificamos um experimento em determinístico ou aleatório.

Definição 5. *(Experimento determinístico e aleatório) Um experimento é dito determinístico quando repetido em condições semelhantes conduz aos mesmos resultados. Chamamos de experimentos aleatórios aqueles que, mesmo conhecendo os possíveis resultados e repetindo o experimento sob as mesmas condições, produzem resultados que não podem ser previstos com certeza.*

Exemplo 1. Alguns exemplos de experimentos aleatórios podem ser: um dado é lançado e observa-se o número da face de cima, de um baralho de 52 cartas, retira-se uma carta e observa-se seu naipe ou quando na produção de um lote de determinada peça contendo peças boas e defeituosas, retiramos algumas peças e observamos qual a incidência de peças defeituosas.

Embora não saibamos qual resultado irá ocorrer num experimento, em muitas situações conseguimos descrever todos os resultados possíveis que podem ocorrer. Essas variações no resultado de determinado experimento as quais não podemos controlar é o que chamamos de acaso e recorremos ao estudo das probabilidades para analisar o comportamento de tais experimentos. Para Morgado et al.(2016, p.112), " a Teoria das Probabilidades é o ramo da Matemática que cria, desenvolve e em geral pesquisa modelos que podem ser utilizados para estudar experimentos ou fenômenos aleatórios."

A seguir, apresentamos as definições básicas que norteiam a teoria de probabilidade.

Definição 6. *Espaço amostral é o conjunto formado por todos os possíveis resultados de uma experiência aleatória. O espaço amostral é dito discreto quando é finito ou infinito enumerável, caso contrário é chamado de espaço amostral contínuo.*

O conjunto do espaço amostral é denotado por Ω e o número de elementos do espaço amostral é representado por $\#\Omega$. Os subconjuntos do Ω são chamados de eventos e são indicados por uma letra maiúscula. Diremos que um evento ocorre quando o resultado da experiência pertence ao evento.

Voltando a um dos casos do Exemplo 1, podemos afirmar que o espaço amostral é formado de 52 cartas e vários eventos dependendo da característica desejada. Sabe-se que essas cartas estão repartidas em grupos com 26 cartas vermelhas e 26 cartas pretas, cada uma dessas cores possui ainda uma divisão com 13 cartas de naipes diferentes. Portanto, quando sorteamos uma carta não podemos dizer previamente qual cor será sorteada, ou mesmo conhecendo a cor não poderemos dizer qual seu naipe, mesmo conhecendo todas as possibilidades de ocorrência. Assim, "sortear uma carta preta", "sortear uma carta com naipe de copas", "sortear uma carta preta e maior que 5" ou "sortear um Rei" são somente alguns dos vários eventos que podem ocorrer neste experimento aleatório.

Sabemos que, de acordo com a Teoria dos Conjuntos, a quantidade de subconjuntos é determinada pelo número de elementos do conjunto, portanto o número de eventos de um dado experimento está associado ao número de elementos do espaço amostral. Desta forma, se o número de elementos do espaço amostral for igual a n, então o número de eventos será dado por 2^n.

Exemplo 2. Por exemplo, no lançamento de um dado é fácil descrever o espaço amostral $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, como $\#\Omega = 6$, podemos afirmar que existem $2^6 = 64$ eventos. Um enunciado possível para determinado evento é: o resultado do lançamento é um número par ou o número sorteado é um número primo.

Definição 7. *Um evento é dito impossível se não existe possibilidade para o acontecimento deste evento. O evento é certo quando tem-se total certeza de que ele ocorrerá, neste caso quando o evento coincide com todo o espaço amostral e por último, dizemos que o evento é elementar, se possui um único elemento.*

Por fim, temos que a combinação de dois ou mais eventos a partir das operações entre conjuntos formam novos eventos. Desta maneira, sendo A e B dois eventos de um mesmo espaço amostral, as principais operações são:

1. União de dois eventos: $A \cup B$ é o evento que ocorre se, e somente se, ocorre o evento A ou ocorre o evento B, isto é, ocorre pelo menos um dos eventos A e B.

   Exemplo 3. Tomemos como exemplo uma urna com 20 bolinhas numeradas de 1 a 20 onde uma bola será extraída ao acaso. Vamos considerar a possibilidade de a bola retirada ser um número primo ou múltiplo de 5. Escrevendo separadamente cada um dos eventos chamemos:

$$\begin{aligned} A &: \text{ ocorrer número primo} = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}. \\ B &: \text{ ocorrer múltiplo de } 5 = \{5, 10, 15, 20\}. \end{aligned}$$

Quando procuramos pela possibilidade da bola retirada ser um número primo ou múltiplo de 5, quer dizer que qualquer um desses dois eventos é satisfatório e que pelo menos um dos dois irá ocorrer. Assim, formamos o evento

$A \cup B$: ocorrer número primo ou múltiplo de 5: $\{2, 3, 5, 7, 10, 11, 13, 15, 17, 19, 20\}$.

2. Interseção de dois eventos: $A \cap B$ é o evento que ocorre se, e somente se, ocorrem ambos os eventos A e B.

   Exemplo 4. Considerando o exemplo citado anteriormente, se procurássemos pelo evento: ocorrer um número primo e múltiplo de 5, teríamos os mesmos evento A e B citados acima e $A \cap B$ representa o evento procurado, logo, para este caso $A \cap B = \{5\}$.

   Definição 8. *Sejam A e B dois eventos de um mesmo espaço amostral, dizemos que A e B são eventos são mutuamente exclusivos ou disjuntos se $A \cap B = \emptyset$.*

   Exemplo 5. Analisando ainda o problema citado no Exemplo 4, considere o evento: ocorrer um número par e múltiplo de 11. Podemos descrever os eventos:

$$\begin{aligned} C &: \text{ o número sorteado é par;} \\ D &: \text{ o número sorteado é múltiplo de 11.} \end{aligned}$$

   É fácil ver que para o espaço amostral apresentado $C \cap D = \emptyset$, ou seja, C e D são disjuntos.

3. Diferença de dois eventos: $A - B$ é o evento que ocorre se, e somente se, ocorre o evento A, mas não ocorre o evento B.

4. Complementar de um evento: A^C é o evento que ocorre se, e somente se, o evento A não ocorre. Dizemos que A^C é o evento complementar de A.

Note que cada evento possui uma chance de ocorrer ou não. A confiabilidade que atribuímos a essa possibilidade de ocorrência de um determinado evento é o que chamamos de probabilidade.

O desenvolvimento das teorias de probabilidade está ligado a grandes nomes da matemática, dentre esses podemos destacar a contribuição do matemático italiano Jerônimo Cardano (1501 – 1576), que em sua obra "Liber de Ludo Aleae", que tratava essencialmente de apostas e jogos de azar, utilizou pela primeira vez a definição de probabilidade como quociente do número de "casos favoráveis", no entanto esta obra só apareceu impressa em 1663.

No século seguinte, motivados pelo mesmo interesse em compreender e modelar jogos de azar, os matemáticos franceses Blaise Pascal (1623 – 1662) e Pierre de Fermat (1601 – 1665) também se interessaram em estudar as possibilidades de vitórias e derrotas em jogos. Na época, o jogador Chevalier de Mére discutia problemas de jogos de azar com Pascal, que logo começou a trocar correspondências com Fermat e juntos eles impulsionaram os estudo das probabilidades.

No final do século XVII, Laplace (1749 – 1827) introduziu a definição de probabilidade como a razão entre o número de casos favoráveis ao acontecimento de determinado evento e o número de todos os casos possíveis, que hoje conhecemos como conceito clássico de probabilidade. A teoria das probabilidades continuou recebendo contribuições importantes de outros matemáticos memoráveis, como Jacques Bernoulli (1654 – 1705), Leonhard Euler (1707 – 1783), Carl Friedrich Gauss (1777 – 1855) dentre outros, até que em 1931 o matemático Andrei Nikolaevich Kolmogorov (1903 – 1987) sistematizar de forma matematicamente rigorosa e axiomática, a Teoria da Probabilidade, como veremos em seguida.

Começaremos nosso estudo com uma definição informal de probabilidade. De maneira geral, a probabilidade é uma medida, ou número, que representa a chance de um determinado evento ocorrer. Esse valor varia entre 0 e 1, que em taxa percentual representa o intervalo de 0% a 100%. Desta forma, se a probabilidade obtida for 1 significa que há 100% de certeza que o evento ocorra, é o que chamamos de evento certo. Se o valor da probabilidade é 0, significa que não há possibilidade para ocorrência do evento, neste caso designamos por evento impossível.

Notação: A probabilidade de qualquer evento A no espaço amostral é denotada por $p(A)$.

Definição 9. *Assumindo que todos os eventos elementares possuem igual probabilidade de ocorrência, ou seja, dizemos neste caso que o espaço amostral é equiprovável, a probabilidade de um evento A ocorrer é a razão entre o número de elementos do evento e o número de elementos do espaço amostral, chamamos esta descrição de definição clássica de probabilidade e representamos por:*

$$p(A) = \frac{\#A}{\#\Omega}.$$

Segundo Morgado et al.(2016), Laplace referia-se aos elementos de A como casos favoráveis à ocorrência do evento e os elementos do espaço amostral eram chamados casos possíveis, chegando assim à seguinte representação muito utilizada no Ensino Médio:

$$\text{probabilidade} = \frac{\text{número de casos favoráveis}}{\text{número de casos possíveis}}.$$

Vejamos algumas definições e propriedades importantes no estudo da teoria das probabilidades.

Definição 10. *(Definição axiomática de probabilidade): Seja Ω um espaço amostral e S é o conjunto de todos os eventos do espaço amostral Ω. Uma probabilidade é uma função $p : S \to \mathbb{R}$ que associa a cada evento A um número $p(A)$, de forma a satisfazer as seguintes propriedades ou axiomas:*

i. *Para todo evento A, $0 \leq p(A) \leq 1$.*

ii. $p(\Omega) = 1$, $p(\emptyset) = 0$.

iii. *Se A e B são eventos mutuamente exclusivos, isto é, eventos que não podem ocorrer simultaneamente então $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$.*

Portanto, qualquer função $p : S \to \mathbb{R}$, que atende aos axiomas (i), (ii) e (iii) acima será chamada uma função probabilidade.

Listamos a seguir algumas consequências da definição 10 apresentada acima.

Proposição 1. *Se A^C é o complementar do evento A, então $p(A^C) = 1 - p(A)$.*

Demonstração: Os eventos A e A^C são mutuamente exclusivos, logo $A \cap A^C = \emptyset$. Sabemos ainda que $A \cup A^C = \Omega$, portanto, pelos axiomas (ii) e (iii) temos que:

$$1 = p(\Omega) = p(A \cup A^C) = p(A) + p(A^C).$$

Portanto,

$$p(A^C) = 1 - p(A).$$

Este resultado é extremamente útil e muito utilizado em problemas em que é mais simples encontrar a probabilidade do evento complementar do que do evento procurado. Desta maneira, basta aplicar a subtração para obter o resultado do problema.

Corolário 1. *Se $A \subset B$, então $p(A) = p(B) - p(B - A)$.*

Demonstração: Como $B = A \cup (B - A)$ temos:

$$p(B) = p(A \cup (B - A)) = p(A) + p(B - A).$$

Portanto,

$$p(A) = p(B) - p(B - A).$$

Proposição 2. *Sejam A e B dois eventos do espaço amostral Ω. Se $A \subset B$, então $p(A) \leqslant p(B)$.*

Demonstração: Como $A \subset B$, podemos escrever que $B = A \cup (B - A)$ e, os conjuntos A e $B - A$ são disjuntos, podemos utilizar o axioma (iii) da definição 10, assim:

$$p(B) = p(A) + p(B - A).$$

Pela propriedade (i), $p(B - A) \geqslant 0$, logo $p(B) \geqslant p(A)$, ou seja, $p(A) \leqslant p(B)$.

Proposição 3. *Sejam A e B dois eventos do espaço amostral Ω. Temos que $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$.*

Demonstração: Podemos escrever A e B como união de dois eventos mutuamente exclusivos. Assim,

$$A = (A - B) \cup (A \cap B) \quad \text{e} \quad B = (B - A) \cup (A \cap B).$$

Pelo axioma (iii), temos que:

$$p(A) = p(A - B) + p(A \cap B) \tag{1.1}$$
$$p(B) = p(B - A) + p(A \cap B) \tag{1.2}$$

Somando (1.1) e (1.2), obtemos:

$$p(A) + p(B) = \underbrace{p(A - B) + p(B - A) + p(A \cap B)}_{p(A \cup B)} + p(A \cap B).$$

Portanto,

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B). \tag{1.3}$$

Para o caso de eventos mutuamente exclusivos, como $A \cap B = \emptyset$ e pela propriedade (ii) $p(\emptyset) = 0$, obtemos exatamente a propriedade (iii):

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - 0 = p(A) + p(B).$$

Exemplo 6. Um número inteiro é escolhido ao acaso numa urna que contém números de 1 a 100. Qual a probabilidade do número escolhido ser múltiplo de 6 ou múltiplo 8?

Solução: Chamemos de A e B respectivamente os dois eventos apresentados: o número escolhindo é múltiplo de 6 e o número escolhido é múltiplo de 8. Com base no enunciado, concluímos que a probabilidade procurada é $p(A \cup B)$. Considerando os valores de 1 a 100, temos que $\#A = 16$ e $\#B = 12$, porém é importante perceber que alguns múltiplos de 6 são também múltiplos de 8, logo, trata-se de uma caso em que $A \cap B \neq \emptyset$. Sabe-se que os múltiplos comuns de 6 e 8 são múltiplos de 24, logo, $\#A \cap B = 4$. Desta maneira, pela proposição 3, obtemos:

$$p(A \cup B) = \frac{16}{100} + \frac{12}{100} - \frac{4}{100} = \frac{24}{100} = 0,24.$$

Exemplo 7. Dentre um grupo formado por dois homens e quatro mulheres, três pessoas são escolhidas ao acaso. Qual a probabilidade de que sejam escolhidos exatamente um homem e duas mulheres?

Solução: Vamos denotar por $p(X)$ o evento procurado. Devemos definir primeiramente o espaço amostral do problema apresentado, ou seja, de quantas maneiras é possível escolher três pessoas em um grupo de seis pessoas. Como se trata de um grupo de pessoas, temos que a ordem em que elas serão selecionadas não gera um grupo diferente, logo, $\#\Omega = \dfrac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3!} = 20$. Para escolher exatamente duas mulheres em um grupo com quatro mulheres temos $\dfrac{4 \cdot 3}{2!} = 6$ possibilidades e para escolha de exatamente um homem são duas opções, totalizando assim 12 possibilidades. Portanto:

$$p(X) = \frac{12}{20} = \frac{3}{5} = 60\%.$$

Exemplo 8. Um apostador tem três opções para participar de certa modalidade de jogo, que consiste no sorteio aleatório de um número dentre dez.

- 1ª opção (X): comprar três números para um único sorteio.
- 2ª opção (Y): comprar dois números para um sorteio e um número para um segundo sorteio.
- 3ª opção (Z): comprar um número para cada sorteio, num total de três sorteios.

Compare a probabilidade para esses três casos.

Solução: Para cada uma das opções de apostas acima obtemos as seguintes probabilidades:

- 1ª opção: $p(X) = \dfrac{3}{10} = 30\%$.

- 2ª opção: $p(Y) = \dfrac{2}{10} \cdot \dfrac{1}{10} = \dfrac{2}{100} = 2\%$.
- 3ª opção: $P(Z) = \dfrac{1}{10} \cdot \dfrac{1}{10} \cdot \dfrac{1}{10} = \dfrac{1}{1000} = 0,1\%$.

Portanto $p(Z) < p(Y) < p(X)$.

Vamos resolver agora uma situação mais genérica do exemplo acima e analisar os resultados.

Exemplo 9. Uma loteria tem N números e só um prêmio. Suponha que um jogador X compra n bilhetes para uma única extração, onde $1 < n < N$. Outro jogador Y compra só um bilhete para n extrações diferentes. Qual deles tem a maior probabilidade de ganhar o prêmio?

Solução: Primeiramente, observe que ambos os jogadores compram n bilhetes, portanto eles estão apostando a mesma importância. O objetivo do problema é descobrir em qual das duas situações há maior probabilidade de ganhar o prêmio. Se todo o dinheiro é jogado numa única vez a probabilidade do jogador X ganhar é $p(X) = \dfrac{n}{N}$. Para calcular a probabilidade do jogador Y ganhar procedemos da seguinte maneira: vamos analisar primeiro a probabilidade de não ganhar, que é o evento complementar Y^C. O número de casos possíveis é igual a N^n. Os casos favoráveis, neste caso, para o jogador Y não ganhar são $(N-1)^n$. Portanto a probabilidade de não ganhar é igual a:

$$p(Y^C) = \frac{(N-1)^n}{N^n} = \left(\frac{N-1}{N}\right)^n = \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n.$$

Logo, a probabilidade do jogador Y ganhar será:

$$p(Y) = 1 - p(Y^C) = 1 - \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n.$$

Devemos comparar a probabilidade dos dois jogadores. Vamos supor que:

$$\begin{aligned} p(X) &\geqslant p(Y) \\ \frac{n}{N} &\geqslant 1 - \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n, \end{aligned}$$

é equivalente afirmar que

$$\left(1 - \frac{1}{N}\right)^n \geqslant 1 - \frac{n}{N}.$$

Vamos utilizar a prova por indução para confirmar esse resultado. Para $n = 2$, obtemos uma desigualdade verdadeira, pois:

$$\left(1-\frac{1}{N}\right)^2 \geqslant 1-\frac{2}{N}$$
$$1-\frac{2}{N}+\frac{1}{N^2} \geqslant 1-\frac{2}{N}$$

Supondo que a desigualdade seja verdadeira para $n = k$. Devemos mostrar sua validade para $n = k+1$. Assumindo a hipótese indutiva, $\left(1-\frac{1}{N}\right)^k \geqslant 1-\frac{k}{N}$, podemos multiplicar ambos os membros por $\left(1-\frac{1}{N}\right)$, assim obtemos:

$$\left(1-\frac{1}{N}\right)^{(k+1)} \geqslant 1-\frac{1}{N}-\frac{k}{N}+\frac{k}{N^2} = 1-\frac{k+1}{N}+\frac{k}{N^2} > 1-\frac{k+1}{N}.$$

Portanto, a desigualdade é verdadeira $\forall n \in \mathbb{N}, \quad n > 1$.

Podemos concluir que a probabilidade do jogador X ganhar é maior que a probabilidade do jogador Y ganhar, logo, isto sugere que apostar uma quantia n de uma só vez é mais vantajoso que apostar aos poucos.

1.2.2 Probabilidade Condicional

No estudo das probabilidades, é natural que ao buscar pela probabilidade de ocorrência de um evento A qualquer, este evento esteja de alguma maneira associado à ocorrência de outros eventos dentro do mesmo espaço amostral, estabelecendo ou não uma relação de dependência. Nesta seção, vamos determinar como encontrar a probabilidade de ocorrência de um evento quando o mesmo sofre influência de outro evento B já ocorrido e daqueles eventos que ocorrem independente do acontecimento de outros.

Frequentemente, ao resolvermos problemas envolvendo probabilidades, nos depararmos com situações onde a probabilidade do acontecimento de um evento A está condicionada ao acontecimento de outro evento B. Por exemplo, no lançamento de um dado não viciado, sabemos que $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Suponha que tenhamos que determinar qual a probabilidade do número observado na face de cima ser múltiplo de 2, logo, para esse evento A podemos escrever que $A = \{2, 4, 6\}$ e é fácil ver que $p(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$. Agora imagine que após a realização do experimento sejamos informados que o resultado obtido foi um número maior que 3, perceba que após essa informação o espaço amostral sofre uma alteração e fica reduzido a um conjunto $B = \{4, 5, 6\}$, onde apenas dois valores são favoráveis ao evento, ou seja, $A \cap B = \{4, 6\}$, logo, a nova probabilidade será $p(A) = \frac{2}{3}$.

Portanto, conhecer algumas informações sobre o resultado do experimento influencia diretamente no cálculo da probabilidade, já que o espaço amostral fica mais restrito e com isso os possíveis resultados ficam mais evidentes. De maneira geral, dizemos que a ocorrência de A está condicionada a ocorrência de B.

A partir de um diagrama de Venn essa redução do espaço amostral fica ainda mais evidente:

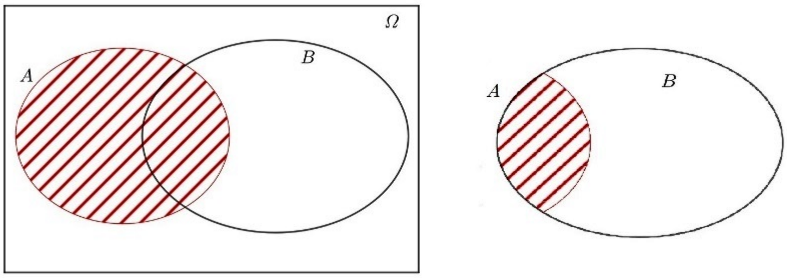


Figura 1.1: Diagrama de Venn: representação da redução do espaço amostral.

Desta forma, é possível escrever uma fórmula para o que chamamos de probabilidade condicional.

Definição 11. *Sejam A e B eventos de um espaço amostral Ω. Com o símbolo $p(A \mid B)$ indicamos a probabilidade do evento A, dado que o evento B ocorreu, isto é, $p(A \mid B)$ é uma probabilidade condicional do evento A, uma vez que B tenha ocorrido. Quando calculamos $p(A \mid B)$, tudo se passa como se B fosse o novo espaço amostral "reduzido" dentro do qual queremos calcular a probabilidade de A.*

$$p(A \mid B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}.$$

Note que este número só está definido quando $p(B) > 0$. Observe que esta definição também nos fornece uma maneira de calcular a probabilidade da interseção de dois eventos. Segue da igualdade acima que:

$$p(A \cap B) = p(B) \cdot p(A \mid B). \tag{1.4}$$

Se $p(A) > 0$ temos também:

$$p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B \mid A). \tag{1.5}$$

Essa expressão é citada por alguns autores como teorema do produto.

Exemplo 10. Um exame de laboratório tem eficiência de 95% para detectar uma doença quando essa doença existe de fato. Entretanto, o teste aponta um resultado "falso positivo" para 1% das pessoas sadias testadas. Se $0,5\%$ da população tem a doença, qual é a probabilidade de uma pessoa ter a doença dado que o seu exame foi positivo?

Solução: Vamos nomear por $p(D)$ a probabilidade de a pessoa possuir a doença e de $p(V)$ a probabilidade de seu exame apontar um resultado positivo. Desejamos encontrar a probabilidade de uma pessoa ter a doença dado que o seu exame foi positivo, ou seja, a probabilidade condicional $p(D \mid V)$. Aplicando a fórmula dada pela definição 11:

$$P(D \mid V) = \frac{p(D \cap V)}{p(V)}.$$

De acordo com o enunciado do exercício, temos que $0,5\%$ da população tem a doença, ou seja, $p(D) = 0,005$ e existindo a doença há uma chance de 95% dela ser detectada, então $p(V \mid D) = 0,95$. Como $p(D \cap V) = p(V \cap D)$, podemos escrever:

$$p(V \cap D) = p(D) \cdot p(V \mid D) = 0,005 \cdot 0,95 = 4,75 \cdot 10^{-3}.$$

Devemos encontrar agora a probabilidade de o exame apontar um resultado positivo, o que pode ocorrer de duas maneiras, se a pessoa possui a doença e se a pessoa não possui a doença, então:

$$p(V) = 0,005 \cdot 0,95 + 0,995 \cdot 0,01 = 14,7 \cdot 10^{-3}.$$

Portanto, a probabilidade procurada será:

$$P(D \mid V) = \frac{p(D \cap V)}{p(V)} = \frac{4,75 \cdot 10^{-3}}{14,7 \cdot 10^{-3}} = 0,3231.$$

A relação apresentada em (1.4) descreve a probabilidade da interseção entre dois eventos nos casos em que a probabilidade de ocorrência de um evento influencia na ocorrência do outro evento, ou seja, quando há uma ideia de condicionalidade entre os eventos. Porém, existem situações em que os eventos ocorrem de maneira independente e a ocorrência de um deles não influencia na ocorrência do outro. Por exemplo, dados dois eventos A e B de um espaço amostral Ω, onde a ocorrência do evento A não sofre alteração pela ocorrência de B, então,

$$p(A \mid B) = p(A).$$

Observe que se A independe de B, então B também independe de A, pois:

$$p(B \mid A) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)} = \frac{p(B) \cdot p(A \mid B)}{p(A)} = \frac{p(B) \cdot p(A)}{p(A)} = p(B).$$

Portanto, pela relação (1.5) encontramos:

$$p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B \mid A) = p(A) \cdot p(B).$$

Definição 12. *Dois eventos A e B de um mesmo espaço amostral são ditos independentes se quando a probabilidade de que eles ocorram simultaneamente for igual ao produto de suas probabilidades individuais.*

$$p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B).$$

Exemplo 11. Um apostador é convidado a participar de um jogo que consiste em 10 partidas, onde a probabilidade do apostador perder cada partida é de 35%. O jogo termina com o jogador vitorioso se ele chegar à décima partida ou derrotado quando o jogador perder a partida pela segunda vez. Qual a probabilidade do jogador ser derrotado na quinta partida?

Solução: Primeiramente, notemos que os eventos ganhar e perder são eventos independentes, ou seja, ganhar ou perder uma determinada partida não influencia na probabilidade da próxima partida. Como a probabilidade de perder uma partida é de 35%, então a probabilidade de ganhar é de 65%. Vamos representar por $p(D)$ a probabilidade de o jogador ser derrotado exatamente na quinta partida. Para que isso ocorra ele deve, além da quinta partida, perder também uma das quatro partidas anteriores. Suponha que ele tenha perdido logo na primeira partida e ganhado as três partidas seguintes, como os eventos são independentes, temos que a probabilidade será dada por:

$$0,35 \cdot 0,65 \cdot 0,65 \cdot 0,65 \cdot 0,35 = 0,0336.$$

Mas esta não é a única possibilidade, já que ele pode também ter perdido na segunda, terceira ou quarta partida, totalizando 4 opções, logo, o resultado anterior deve ser multiplicado por 4, assim:

$$p(D) = 0,033642 \cdot 4 = 0,1344.$$

Concluímos que a probabilidade do jogador ser derrotado na quinta partida é de aproximadamente $13,44\%$.

1.2.3 Teorema da Probabilidade Total

Outro resultado importante para a continuidade deste trabalho é o Teorema da Probabilidade Total.

Definição 13. *Consideremos n eventos $B_1, B_2, \dots, B_n$. Diremos que essa sequência de eventos forma uma partição do espaço amostral Ω, quando atende às seguintes condições:*

i. $p(B_i) > 0, \forall i$

ii. Os eventos B_i são disjuntos dois a dois, ou seja, $B_i \cap B_j = \emptyset$ para $i \neq j$.

iii. A união de todos os eventos é o próprio espaço amostral. Simbolicamente, $\bigcup_{i=1}^{n} B_i = \Omega$.

Portanto, os eventos B_1,B_2,...,B_n são dois a dois mutuamente exclusivos e exaustivos. Para $n = 7$, temos a seguinte representação a partir do diagrama de Venn.

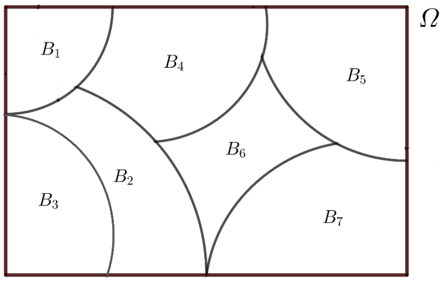


Figura 1.2: Espaço amostral Ω particionado pelos eventos B_1,B_2,...,B_7.

Teorema 1. *Seja Ω um espaço amostral. Se A é um evento contido numa união de eventos disjuntos B_1,B_2,...,B_n e $p(B_1) > 0, p(B_2) > 0, \cdots, p(B_n) > 0$, então*

$$p(A) = \sum_{i=1}^{n} p(B_i) \cdot p(A \mid B_i).$$

A figura 1.3 ilustra a situação do Teorema 1.

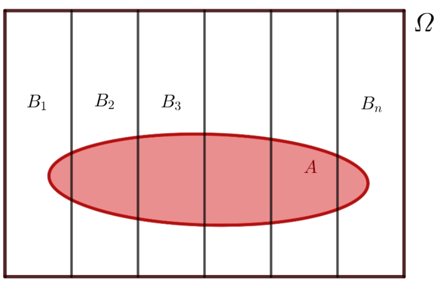


Figura 1.3: Representação do Teorema da Probabilidade Total.

Demonstração: O conjunto A é escrito em função das partições do espaço amostral Ω. Assim, é válida a seguinte relação:

$$A = (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup (A \cap B_3) \cup \cdots \cup (A \cap B_n).$$

Como B_1,B_2,...,B_n são eventos disjuntos, podemos concluir o mesmo para os eventos $(A \cap B_1)$, $(A \cap B_2)$, $\cdots$, $(A \cap B_n)$, logo, podemos escrever:

$$p(A) = p(A \cap B_1) + p(A \cap B_2) + p(A \cap B_3) + \cdots + p(A \cap B_n).$$

Pela igualdade (1.4) obtemos:

$$p(A) = p(B_1) \cdot p(A \mid B_1) + p(B_2) \cdot p(A \mid B_2) + p(B_3) \cdot p(A \mid B_3) + \cdots + p(B_n) \cdot (A \mid B_n),$$

logo:

$$p(A) = \sum_{i=1}^{n} p(A \cap B_i) = \sum_{i=1}^{n} p(B_i) \cdot p(A \mid B_i).$$

O resultado do Teorema 1 é conhecido como Teorema da Probabilidade Total. Esse tipo de teorema é utilizado quando a ocorrência de um determinado evento está condicionada a ocorrência de vários outros.

Exemplo 12. O Centro de Previsão Meteorológica prevê corretamente o tempo de certa região em 85% dos dias ensolarados e em 60% dos dias nublados. Após uma pesquisa, constatou-se que nessa região 75% dos dias são ensolarados, qual a porcentagem de acerto total da meteorologia?

Solução: O espaço amostral se divide em duas situações: E = o dia está ensolarado e N = o dia está nublado. Com base nas informações fornecidas, desejamos calcular a probabilidade de a meteorologia acertar suas previsões, vamos denotar essa probabilidade por $p(A)$. No diagrama temos a seguinte situação:

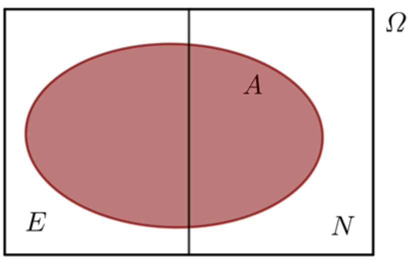


Figura 1.4: Representação por diagrama do Exemplo 11.

Neste caso, são duas as possibilidades de acerto: a meteorologia acerta e o dia está ensolarado ou a meteorologia acerta e o dia está nublado. Simbolicamente escrevemos $p(A) = p(A \cap E) \cup p(A \cap N)$. Pelo Teorema da Probabilidade Total:

$$p(A) = p(E) \cdot p(A \mid E) + p(N) \cdot p(A \mid N).$$

$$p(A) = 0,75 \cdot 0,85 + 0,25 \cdot 0,60 = 0,7875.$$

Capítulo 2

Equações de Diferenças Lineares

Em diversas áreas do conhecimento tais como na Matemática, Física, Engenharia, Economia, Biomatemática, entre outras, os modelos matemáticos que descrevem os inúmeros fenômenos desses campos de estudo, têm o tempo como variável independente e esta por sua vez varia continuamente. Assim, as mudanças na variável dependente podem ser descritas por derivadas e nesses casos, usamos as Equações Diferenciais para construir modelos matemáticos que representem melhor, em termos numéricos, um determinado fenômeno. Mas há modelos onde o tempo varia discretamente, isto é, assume apenas valores inteiros. Deste modo, já não se justifica utilizar as equações diferenciais para modelar esses fenômenos. Nessas situações, as equações que melhor expressam essas relações são chamadas de equações de diferenças ou relações de recorrências. Um exemplo clássico desse tipo equação é o caso em que consideramos uma aplicação financeira cujos rendimentos são creditados somente uma vez ao mês. Essas equações podem ser resolvidas utilizando o método recursivo ou outras técnicas que explicitaremos mais adiante.

A teoria apresentada neste capítulo baseia-se principalmente nas referências [8], [9], [10] e [18]. Os exemplos tratados ao longo deste capítulo, cujas soluções podem ser obtidas recursivamente, darão suporte à teoria apresentada e todos eles podem ser adaptados e trabalhados no Ensino Médio.

2.1 Equações de Diferenças

Em um problema modelado por equações de diferenças, podemos descrever a sua evolução ao longo do tempo n, representado por um número inteiro positivo. Assim, uma equação de diferenças relaciona o valor de uma variável $x \in \mathbb{R}$ no instante n a valores de x_n em outros instantes, com $n \in \mathbb{N}$. Informalmente, uma equação de diferenças é uma sequência de números, onde uma função relaciona um termo a seus termos anteriores, que de maneira geral são definidos recursivamente.

Por exemplo, se certa população tem uma geração discreta, o tamanho da enésima primeira geração x_{n+1} é função da enésima geração x_n. Esta situação é dada pela equação:

$$x_{n+1} = f(x_n), \tag{2.1}$$

onde $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função conhecida. Uma equação desse tipo pode ser entendida como uma versão discreta da equação diferencial. Conhecendo um valor inicial x_0, podemos a partir da equação acima e por meio de iterações gerar a seguinte sequência

$$x_0, f(x_0), f(f(x_0)), f(f(f(x_0))), \ldots$$

Por conveniência podemos escrever

$$f^2(x_0) = f(f(x_0)), f^3(x_0) = f(f(f(x_0))), \ldots$$

onde $f(x_0)$ representa a primeira iteração de x_0 pela função f, $f^2(x_0)$ a segunda iteração de x_0 pela função f, $f^3(x_0)$ a terceira, etc. Generalizando, temos que,

$$x_1 = f(x_0), x_2 = f^2(x_0), x_3 = f^3(x_0), \ldots, x_n = f^n(x_0).$$

Note que $x_n = f^n(x_0)$ é a solução de (2.1), onde $f^n(x_0)$ é chamada de enésima iteração de x_0 através de f, onde a solução depende de f^n e da condição inicial x_0. O conjunto de todas as iterações $f^n(x_0), n \geq 0)$, em que $f^0(x_0) = x_0$ é chamado de órbita de x_0.

Um exemplo simples do que acabamos de ver pode ser encontrada em aplicações financeiras.

Exemplo 13. Se depositarmos $R\$1.000,00$ na poupança hoje, que atualmente paga juros na casa de $0,5\%$ ao mês, supondo que não ocorrerão novos depósitos e que a taxa permaneça fixa ao longo de todo o período considerado, é possível obter o valor acumulado em n meses.

Solução: Utilizando um processo semelhante ao utilizado na equação (2.1), chamando de s_n o valor acumulado após n meses, podemos escrever:

$$
\begin{aligned}
s_0 &= 1.000\\
s_1 &= s_0 + 0,005 s_0 = 1,005 s_0\\
s_2 &= s_1 + 0,005 s_1 = 1,005 s_1\\
s_3 &= s_2 + 0,005 s_2 = 1,005 s_2\\
&\vdots\\
s_n &= s_{n-1} + 0,005 s_{n-1}\\
s_n &= 1,005 s_{n-1}.
\end{aligned}
$$

Logo, a equação que descreve a situação acima é dada por $s_n = 1.005 s_{n-1}$, onde o saldo a cada novo período de tempo depende do saldo no período anterior. Para que seja possível calcular o saldo em qualquer período, é necessário obter uma expressão que envolva termos conhecidos desse problema. Utilizando o processo iterativo é possível escrever:

$$
\begin{aligned}
s_1 &= 1,005 s_0\\
s_2 &= 1,005 s_1 = 1,005 \cdot 1,005 s_0 = 1,005^2 s_0\\
s_3 &= 1,005 s_2 = 1,005 \cdot 1,005^2 s_0 = 1,005^3 s_0\\
&\vdots\\
s_n &= 1,005^n s_0.
\end{aligned}
$$

Desta maneira, $s_n = 1,005^n s_0$ é uma solução geral para o problema, que depende do tempo de n meses que se passou e do valor inicial s_0. Se quisermos saber o valor acumulado após 5 anos de aplicação, teremos:

$$s_{60} = 1,005^{60} \cdot 1000 = 1.348,85.$$

Observação 1. As equações dadas por $x_{n+1} - x_n = g(x_n)$ são chamadas de equações de diferenças e são equivalentes à (2.1) se $f(x) = g(x) + x$. No entanto, ambas são chamadas de equações de diferenças, independente de sua representação.

Para dar sequência ao estudo das equações de diferenças partiremos de algumas definições.

Definição 14. *Uma equação que relaciona os termos de uma sequência* $(x_0, x_1, x_2, ..., x_n, ...)$ *é chamada de equação de diferença ou fórmula de recorrência. A forma geral de uma equação de diferenças é:*

$$x_{n+m} = f(n, x_{n+m-1}, x_{n+m-2}, ..., x_{n+1}, x_n), \tag{2.2}$$

ou seja, o termo x_{n+m} depende dos termos anteriores $x_n, x_{n+1}, x_{n+(m-1)}$, onde $f : N \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função conhecida e $x_n \in \mathbb{R}$ com $n \in \mathbb{N}$.

As equações de diferenças podem ser classificadas de acordo com sua ordem, linearidade e homogeneidade. Acompanhe as definições a seguir.

Definição 15. *A ordem é dada pela diferença entre o maior e o menor dos índices dos termos que aparecem na equação.*

Exemplo 14.

(i) $x_{n+1} = 5x_n$ é de ordem 1.

(ii) $x_{n+3} + 4nx_{n+2} - 2xn + 1 - 0$ é de ordem 2.

(iii) $x_{n+6} - 5n^2x_{n+1} = 6$ é de ordem 5.

O fato da equação de diferenças se chamar de ordem $(n - m)$ está relacionada também ao número de condições inicias necessárias para que a mesma possa ser definida, ou seja, se ela é de primeira ordem é necessária uma condição inicial para que sua solução seja definida, se é de segunda ordem precisa de duas condições iniciais para ser determinada e assim sucessivamente.

Definição 16. *A equação* (2.2) *é dita linear se f é linear nas variáveis $x_{n+m}, ..., x_n$. Em geral uma equação de diferença de ordem m é linear se está escrita na forma:*

$$x_{n+m} = f_0(n)x_{n+m-1} + f_1(n)x_{n+m-2} + ... + f_{m-1}(n)x_{n+1} + f_m(n)x_n + g(n),$$

onde $f_i(n) \leq i \leq m$ e $g(n)$ são funções reais com $f_0(n) \neq 0$ e $f_m(n) \neq 0$,$x_n \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$.

Em outras palavras, uma equação de diferenças é linear se f_i depende somente de n e não de x. Uma equação que não satisfaz às condições acima é denominada não linear. De acordo com Bassanezi (2015), "nem sempre podemos explicitar analiticamente a solução geral de uma equação de diferenças quando a equação não for linear e, neste caso, devemos procurar soluções aproximadas por meio de equações lineares associadas."

Observação 2. Quando $f_i(n)$,$0 \leqslant i \leqslant m$ assumem valores reais constantes a equação é chamada equação de diferenças linear com coeficientes constantes.

Exemplo 15.

(i) $x_{n+1} = 3 + 5x_n$ é linear com coeficientes constantes.

(ii) $x_{n+2} = 2nx_{n+1} + 6x_n(1 - x_n)$ é não linear.

(iii) $x_{n+1} = 3n + (x_n)^2$ é não linear.

(iv) $x_{n+2} - 6x_n = -2n^3$ é linear.

Neste trabalho, restringiremos nossas discussões às equações de diferenças lineares de primeira e de segunda ordem.

Definição 17. *Uma equação de diferenças é dita homogênea se cada termo x_i depende apenas dos termos anteriores, no caso acima quando $g(n) = 0$. Caso cada termo esteja em função de um termo independente, neste caso quando $g(n) \neq 0$, então a equação é dita não homogênea.*

Exemplo 16.

(i) $x_{n+1} - 3x_n = 0$ é homogênea.

(ii) $x_{n+1} = 3nx_n + n$ é não homogênea.

(iii) $x_{n+2} = 5x_n + 3n$ é não homogênea.

Antes de abordar com mais detalhes o processo de resolução das equações de diferenças, convém esclarecer o conceito de solução.

Definição 18. *Uma sequência x_n, diz-se solução de uma equação de diferenças se, para todos os valores de n, x_n satisfaz a equação, ou seja, substituindo x_n na equação obtém-se uma identidade. Desta forma, uma solução de uma equação de diferenças é uma expressão que fornece o valor de uma variável num estágio n em função de n e dos $(m - n)$ valores dos estágios iniciais, aos quais chamamos anteriormente de condições iniciais.*

Para compreender melhor a definição, vamos obter a solução da equação $x_{n+1} = 2x_n$.
Aplicando o processo recursivo, temos:

$$\begin{aligned} x_2 &= 2x_1 \\ x_3 &= 2x_2 \\ x_4 &= 2x_3 \\ &\vdots \\ x_n &= 2x_{n-1}. \end{aligned}$$

Multiplicando todas as iterações membro a membro obtêm-se:

$$x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot ... \cdot x_n = 2x_1 \cdot 2x_2 \cdot 2x_3 \cdot ...2x_{n-1}.$$

$$x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot ... \cdot x_n = \underbrace{(2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot ... \cdot 2)}_{(n-1vezes)} \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot ... \cdot x_{n-1}.$$

Como o valor de x_1 não é conhecido há uma infinidade de soluções para a equação de diferenças acima. Desta maneira, temos que,

$$x_n = C \cdot 2^{n-1} \tag{2.3}$$

é a solução geral da equação de diferenças para todo $n \in \mathbb{N}$, onde C é uma constante arbitrária. Isto quer dizer que (2.3) satisfaz a equação dada. Então pela definição 18, substituindo o valor de x_n e x_{n+1} na equação obtemos:

$$\begin{aligned} C \cdot 2^{(n+1)-1} &= 2 \cdot C \cdot 2^{n-1}. \\ C \cdot 2^n &= C \cdot 2^n. \end{aligned}$$

No exemplo acima, ao se atribuir valores numéricos para a constante C a partir das condições iniciais do problema obtém-se uma solução particular única. Por exemplo, não é difícil mostrar que

$$x_n = 5 \cdot 2^{n-1}, x_n = -5 \cdot 2^{n-1} \quad \text{e} \quad x_n = \frac{1}{3} \cdot 2^{n-1}.$$

são soluções particulares da referida equação.

O objetivo ao buscar uma solução para a equação de diferenças é obter uma expressão ou fórmula geral que dependa exclusivamente da posição n do termo da sequência e das condições iniciais.

O processo recursivo utilizado nos exemplos acima é comumente empregado para se obter a solução de algumas equações de diferenças. Porém, esse método nem sempre é o mais indicado, pois pode tornar a solução das equações de diferenças um pouco mais complexa. Portanto, veremos no decorrer deste capítulo outros métodos de solução para os diferentes tipos de equações de diferenças.

2.2 Equações de Diferenças de Primeira Ordem

Definição 19. *Dados $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, uma equação de diferenças é dita de primeira ordem se for do tipo*

$$\begin{cases} x_{n+1} - x_n = f(x_n) \\ x_0 \text{ dado} \end{cases}$$

Se a função f for substituída por uma função g de duas variáveis, isto é, se tivermos $g : \mathbb{N} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, podemos escrever,

$$\begin{cases} x_{n+1} = g(n, x_n) \\ x_0 \text{ dado} \end{cases}$$

Desta forma, uma equação de diferenças de primeira ordem é uma sequência $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dada por uma fórmula de recorrência, isto é, pela definição (2.2) cada termo x_{n+1} depende do anterior x_n.

Definição 20. *Uma solução de uma equação de diferenças de primeira ordem, é uma função $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, tal que ao substituir $x_n, \forall n \in \mathbb{N}$ na equação o resultado é uma identidade.*

Definição 21. *Dada uma equação de diferenças, se os próximos termos não dependem somente do termo anterior, neste caso, quando x_{n+1} depende de n e de x_n, dizemos que a equação é não autônoma ou variante no tempo. Caso contrário, se a variável n não aparece explicitamente, ou seja, x_{n+1} não depende da variável n e depende apenas do elemento anterior x_n, dizemos então que a equação é autônoma ou invariante no tempo.*

Exemplo 17. Considere a seguinte equação de diferenças de primeira ordem não autônoma $x_{n+1} = x_n + n$ com condição inicial x_0 dada.

Solução: Utilizando o processo recursivo, obtemos:

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 + 0 \\ x_2 &= x_1 + 1 = x_0 + 0 + 1 = x_0 + 1 \\ x_3 &= x_2 + 2 = x_0 + 0 + 1 + 2 = x_0 + 3 \\ x_4 &= x_3 + 3 = x_0 + 0 + 1 + 2 + 3 = x_0 + 6 \\ x_5 &= x_4 + 4 = x_0 + 0 + 1 + 2 + 3 + 4 = x_0 + 10 \\ &\vdots \\ x_n &= x_0 + 0 + 1 + 2 + \cdots + n - 1. \end{aligned}$$

Observe que temos uma sequência de valores formados por x_0 somados a valores que formam uma progressão aritmética de razão 1, com primeiro termo igual a zero e último termo igual a $n-1$, então, a solução x_n deve ser dada por:

$$x_n = x_0 + \frac{(n-1)\cdot n}{2}.$$

2.2.1 Solução de uma Equação de Diferenças Linear de Primeira Ordem

Nos exemplos anteriores, utilizamos o método recursivo para chegar à solução das equações de diferenças dadas, porém nem sempre este processo retornará a solução de maneira trivial. Nesta seção, veremos que é possível obter a solução de uma equação de diferenças a partir de uma solução geral, mas iremos estudar também a solução de alguns casos particulares das equações de diferenças lineares apresentadas na Definição 19 e utilizaremos o método recursivo para chegar a soluções gerais desses casos. Como já vimos anteriormente, uma equação de diferenças de primeira ordem é linear se pode ser escrita como:

$$x_{n+1} = a(n)x_n + b(n), \tag{2.4}$$

com $a(n)$ e $b(n)$ funções reais conhecidas. A solução da equação (2.4) pode ser encontrada por meio de iterações em todos seus casos especiais. Encontraremos tais soluções e demonstraremos sua validade utilizando o Princípio de Indução Finita. Estudaremos separadamente os casos de uma equação de diferenças linear de primeira ordem homogênea e não homogênea, ou seja, os casos em que $b(n) = 0$ e $b(n) \neq 0$.

- 1º Caso $b(n) = 0$: Solução de uma equação de diferenças linear de primeira ordem homogênea.

Uma equação de diferenças linear de primeira ordem homogênea pode ser representada como

$$x_{n+1} = a(n)x_n.$$

Neste caso, poderemos ter o fator $a(n)$ dado por coeficiente constante ou variável. Iniciaremos nosso estudo pela equação homogênea com fator $a(n)$ constante, ou seja, $a(n) = a$. Então,

$$x_{n+1} = ax_n, \quad x_0 \quad \text{dado.} \tag{2.5}$$

Com a condição inicial x_0 fixada e $x_0 \neq 0$, o processo recursivo fornece:

$$\begin{aligned} x_1 &= ax_0 \\ x_2 &= ax_1 = a \cdot ax_0 = a^2x_0 \\ x_3 &= ax_2 = a \cdot a^2x_0 = a^3x_0 \\ &\vdots \\ x_n &= a^nx_0, \end{aligned} \tag{2.6}$$

onde (2.6) é solução geral da equação homogênea. Por indução, demonstraremos a validade de (2.6) para todo $n \in \mathbb{N}$. Sabemos que x_0 é válido por ser condição inicial, então a solução é válida para o primeiro termo. Tomando como hipótese indutiva $n = k$, ou seja,

$$x_k = a^kx_0,$$

e considerando a relação de recorrência, verifiquemos sua validade para $n = k + 1$.

$$x_{k+1} = ax_k = a \cdot a^kx_0 = a^{k+1}x_0.$$

Assim (2.6) é válida para $\forall n \in \mathbb{N}$, e portanto é solução de (2.5).

Generalizando, para uma equação de diferenças de primeira ordem linear homogênea com coeficiente variável, temos:

$$x_{n+1} = a(n)x_n, \quad x_0 \quad \text{dado} \quad n \geq 0. \tag{2.7}$$

Realizando novamente o processo iterativo para cada termo, obtemos:

$$\begin{aligned} x_1 &= a(0)x_0 \\ x_2 &= a(1)x_1 = a(1) \cdot [a(0)x_0] = a(1)a(0)x_0 \\ x_3 &= a(2)x_2 = a(2) \cdot [a(1)a(0x_0] = a(2)a(1)a(0)x_0 \\ &\vdots \\ x_n &= a(n-1)a(n-2)...a(0)x_0. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Demonstraremos por indução a validade do resultado encontrado acima. Temos que x_0 é válido por ser condição inicial da equação de diferenças. Supondo que (2.8) seja verdadeira para $n = k$, ou seja,

$$x_k = a(k-1)a(k-2)\cdots a(0)x_0.$$

Admitindo a hipótese indutiva acima, verifiquemos para $n = k + 1$

$$x_{k+1} = a(k)x_k = a(k)a(k-1)a(k-2)\cdots a(0)x_0.$$

Assim, (2.8) vale para $\forall n \in \mathbb{N}$ e portanto é solução de (2.7). Podemos exibir essa solução na forma:

$$x_n = \prod_{i=0}^{n-1} a(i)x_0, \text{ com } x_0 \text{ dado.}$$

- 2º Caso $b(n) \neq 0$: Solução de uma equação de diferenças linear de primeira ordem não homogênea.

Vamos analisar agora as soluções para a equação não homogênea $x_{n+1} = a(n)x_n + b(n)$. Neste caso, analisaremos duas principais situações:

1. A equação possui o fator $a(n)$ constante, ou seja, $a(n) = a$ e $b(n)$ uma função conhecida.

$$x_{n+1} = ax_n + b(n), \; com \; x_0 \text{ dado.} \tag{2.9}$$

A partir do processo iterativo, encontramos:

$$\begin{aligned} x_1 &= ax_0 + b(0) \\ x_2 &= ax_1 + b(1) = a\cdot[ax_0 + b(0)] + b(1) = a^2x_0 + ab(0) + b(1) \\ x_3 &= ax_2 + b(2) = a\cdot[a^2x_0 + ab(0) + b(1)] + b(2) = a^3x_0 + a^2b(0) + ab(1) + b(2) \\ &\vdots \\ x_n &= a^nx_0 + \sum_{i=0}^{n-1} a^{n-(i+1)}b(i). \end{aligned} \tag{2.10}$$

Por indução, x_0 é valido por ser condição inicial, supondo (2.10) verdadeira para $n = k$ (hipótese indutiva), ou seja,

$$x_k = a^kx_0 + \sum_{i=0}^{k-1} a^{k-(i+1)}b(i).$$

Admitindo a relação de recorrência e a hipótese indutiva, verifiquemos pra $n = k+1$

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= ax_k + b(k) \qquad (2.11) \\ x_{k+1} &= a\left(a^kx_0 + \sum_{i=0}^{k-1} a^{k-(i+1)}b(i)\right) + b(k) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
x_{k+1} &= a^{k+1}x_0 + a \cdot \sum_{i=0}^{k-1} a^{k-(i+1)}b(i) + b(k) \\
x_{k+1} &= a^{k+1}x_0 + \sum_{i=0}^{k-1} a^{k-i}b(i) + b(k) \\
x_{k+1} &= a^{k+1}x_0 + \sum_{i=0}^{k-1} a^{k-i}b(i) - a^{k-k}b(k) + b(k) \\
x_{k+1} &= a^{k+1}x_0 + \sum_{i=0}^{k} a^{k-i}b(i) - b(k) + b(k) = a^{k+1}x_0 + \sum_{i=0}^{k} a^{k-i}b(i).
\end{aligned}
$$

Logo, a igualdade (2.10) é válida $\forall n \in \mathbb{N}$ e portanto é solução de (2.9).

2. A equação possui ambos os fatores $a(n)$ e $b(n)$ constantes, ou seja, $a(n) = a$ e $b(n) = b$. Então,

$$x_{n+1} = ax_n + b, \ \textit{com}\ x_0 \text{ dado.} \tag{2.12}$$

A equação acima é um exemplo de uma equação de diferenças linear de primeira ordem com coeficientes constantes, citada na observação 2 deste capítulo. Novamente, vamos utilizar o processo recursivo para obter sua solução geral. Temos que:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= ax_0 + b \\
x_2 &= ax_1 + b = a \cdot (ax_0 + b) + b = a^2x_0 + ab + b \\
x_3 &= ax_2 + b = a \cdot (a^2x_0 + ab + b) + b = a^3x_0 + a^2b + ab + b \\
&\vdots \\
x_n &= a^n x_0 + \sum_{i=0}^{n-1} a^i b. \qquad (2.13)
\end{aligned}
$$

Podemos também escrever indutivamente que

$$x_n = a^n x_0 + (a^{n-1} + a^{n-2} + \cdots + a^2 + a^1 + 1) \cdot b.$$

Observe que a expressão entre parênteses representa a soma dos termos de uma progressão geométrica, então temos as seguintes possibilidades:

(a) Se $a = 1$ a solução é dada por:

$$x_n = x_0 + nb.$$

(b) Se $a \neq 1$, aplicando a fórmula da soma dos n primeiros termos de uma progressão geométrica, obtemos:

$$S_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} = a^{n-1} \cdot \frac{(a^{-1})^n - 1}{a^{-1} - 1} = \frac{a^{-1} - a^{n-1}}{\dfrac{1-a}{a}} = (a^{-1} - a^{n-1}) \cdot \frac{a}{1-a} = \frac{1-a^n}{1-a}.$$

Neste caso, a solução (2.13) pode ser expressa por:

$$x_n = a^n x_o + b \cdot \left(\frac{1-a^n}{1-a} \right) \tag{2.14}$$

Por indução, podemos demonstrar a validade da solução acima. Como x_0 é válido, por ser condição inicial, supomos que é verdadeira pra $n = k$, ou seja,

$$x_n = a^k x_o + b \cdot \left(\frac{1-a^k}{1-a} \right).$$

Admitindo a hipótese indutiva e a relação de recorrência, vamos verificar para $n = k + 1$.

$$\begin{aligned}
x_{k+1} &= a x_k + b \\
x_{k+1} &= a \cdot \left[a^k x_0 + b \cdot \left(\frac{1-a^k}{1-a} \right) \right] + b \\
x_{k+1} &= a^{k+1} x_0 + ab \cdot \left(\frac{1-a^k}{1-a} \right) + b \\
x_{n+1} &= a^{k+1} x_0 + \frac{ab - a^{k+1} b}{1-a} + b \\
x_{n+1} &= a^{k+1} x_0 + \frac{ab - a^{k+1} b + b - ab}{1-a} \\
x_{n+1} &= a^{k+1} x_0 + \frac{b - a^{k+1} b}{1-a} \\
x_{n+1} &= a^{k+1} x_0 + b \cdot \frac{1 - a^{k+1}}{1-a}.
\end{aligned}$$

Portanto, temos que a relação dada em (2.14) é válida para $\forall \in \mathbb{N}$, logo, podemos concluir que a solução de uma equação de diferenças não homogênea com coeficientes constantes é da forma:

$$x_n = \begin{cases} x_0 + nb, \text{ se } a = 1 \\ a^n x_0 + b \cdot \left(\dfrac{1-a^n}{1-a}\right), \text{ se } a \neq 1. \end{cases}$$

Exemplo 18. Vamos resolver a equação $x_{t+1} = 2x_t - 3$, com $x_0 = 5$.

Solução: Neste exemplo, temos uma equação de diferenças linear de primeira ordem com coeficientes constantes, com $a = 2$ e $b = -3$, então a solução geral dessa equação é dada por:

$$\begin{aligned} x_t &= 2^t x_0 + (-3) \cdot \left(\frac{1-2^t}{1-2}\right) = 2^t x_0 + 3 - 3 \cdot 2^t \\ x_t &= 2^t(x_0 - 3) + 3. \end{aligned}$$

Se $x_0 = 5$, então a solução particular da equação será:

$$x_t = 2^t(5-3) + 3 = 2^{t+1} + 3.$$

Exemplo 19. $\begin{cases} 5x_{n+1} = 3x_n + 4 \\ x_0 = 3 \end{cases}$

Solução: Para obter uma equação equivalente a (2.10), vamos dividir ambos os membros da equação por 5, assim:

$$x_{n+1} = \frac{3}{5}x_n + \frac{4}{5}.$$

Dessa maneira, obtemos uma equação de diferenças linear não homogênea com coeficientes constantes, onde $a = \dfrac{3}{5}$ e $b = \dfrac{4}{5}$. A partir da solução geral obtemos:

$$\begin{aligned} x_n &= \left(\frac{3}{5}\right)^n x_0 + \frac{4}{5} \cdot \frac{1 - \left(\dfrac{3}{5}\right)^n}{1 - \dfrac{3}{5}} \\ x_n &= \left(\frac{3}{5}\right)^n x_0 + \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{2} \cdot \left[1 - \left(\frac{3}{5}\right)^n\right] \\ x_n &= 3 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^n + 2 - 2 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^n \\ x_n &= \left(\frac{3}{5}\right)^n + 2 \end{aligned}$$

Exemplo 20. Suponha que no início de cada período, por exemplo, um mês, sejam depositados numa conta bancária, destinados a aplicações e investimentos, um valor constante

P e que esta aplicação seja calculada à taxa de juro i com capitalização no fim de cada período no regime de juros compostos. No início do enésimo período, imediatamente após o depósito deste período, o saldo da conta, S_n, verifica a equação

$$S_n = P + S_{n-1} + iS_{n-1} = P + (1+i)S_{n-1}, n = 1, 2, 3, \cdots$$

encontre S_n.

Solução: Observe que o modelo acima se trata de uma equação de diferenças linear de primeira ordem não homogênea. Esta equação admite uma solução geral dada por

$$S_n = (1+i)^n \cdot S_0 + P \cdot \frac{1-(1+i)^n}{1-(1+i)}, n = 1, 2, 3, \cdots$$

Mais especificamente, se tivermos a condição inicial $S_0 = 0$, teremos uma solução particular dada por:

$$S_n = -\frac{P}{i}[1-(1+i)^n], n = 1, 2, 3, \cdots$$

Por exemplo, se a conta tem depósitos mensais $R\$1.000,00$ com juros capitalizados mensalmente com taxa mensal equivalentes à taxa de 6% ao ano, o saldo da conta ao fim de um ano é dado por:

$$S_{12} = -\frac{1.000}{\sqrt[12]{1,06}-1} \cdot \{1 - [1 + (\sqrt[12]{1,06} - 1)]^{12}\} \approx 12.326,53.$$

Por fim, podemos generalizar os resultados obtidos acima e escrever uma solução geral para uma equação de diferenças de primeira ordem linear não homogênea considerando ambos fatores $a(n)$ e $b(n)$ variáveis, ou seja, se $a(n)$ e $b(n)$ forem funções conhecidas. Desta maneira, na equação de diferenças

$$x_{n+1} = a(n)x_n + b(n), \text{ com } x_0 \text{ dado,}$$

obteremos, a partir do processo iterativo, a seguinte relação:

$$\begin{aligned} x_1 &= a(0)x_0 + b(0) \\ x_2 &= a(1)x_1 + b(1) = a(1) \cdot [a(0)x_0 + b(0)] + b(1) = a(1)a(0)x_0 + a(1)b(0) + b(1) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
x_3 &= a(2)x_2 + b(2) = a(2)\cdot[a(1)a(0)x_0 + a(1)b(0) + b(1)] + b(2)\\
&= a(2)a(1)a(0)x_0 + a(2)a(1)b(0) + a(2)b(1) + b(2)\\
&\vdots\\
x_n &= \left[\prod_{i=0}^{n-1} a(i)\right] x_0 + \sum_{r=0}^{n-1}\left[\prod_{i=r+1}^{n-1} a(i)\right] b(r). \qquad (2.15)
\end{aligned}
$$

Exemplo 21. Determine a solução da equação $x_{n+1} = (n+1)x_n + 2^n(n+1)!,\ x_0 = 1.$

Solução: Observe que $a(n) = n+1$ e $b(n) = 2^n(n+1)!$. Então pela fórmula da solução geral apresentada (2.15) segue que:

$$
\begin{aligned}
x_n &= \left[\prod_{i=0}^{n-1}(i+1)\right] x_0 + \sum_{r=0}^{n-1}\left[\prod_{i=r+1}^{n-1}(i+1)\right] 2^r(r+1)!\\
x_n &= 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot\dots\cdot n\cdot 1 + \sum_{r=0} n-1(r+2)\cdot(r+3)\cdot\dots\cdot(n-1)\cdot n\cdot 2^r(r+1)!\\
x_n &= n! + 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(n-1)\cdot n\cdot 2^0\cdot 1! + 3\cdot 4\cdot\ldots\cdot(n-1)\cdot n\cdot 2^1\cdot 2!\\
&+ \ldots + (n+1)\cdot(n+2)\cdot\ldots\cdot(n-2)\cdot(n-1)\cdot 2^{n-1}\cdot n!\\
x_n &= n! + n!\cdot(2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^n)\\
x_n &= n! + n!\cdot 1\cdot\frac{(2^n-1)}{2-1}\\
x_n &= n! + n!\cdot(2^n - 1)\\
x_n &= n!\cdot 2^n.
\end{aligned}
$$

Portanto, $x_n = n!\cdot 2^n$ é solução da equação quando $x_0 = 1$.

2.3 Equações de Diferenças de Segunda Ordem

Definição 22. *Uma equação de diferenças de segunda ordem é dada por:*

$$x_{n+2} = f(x_{n+1}, x_n), \quad x_0,\ x_1 \text{ dados,}$$

onde $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é uma função dada.

Desta forma, uma equação de diferenças de segunda ordem é uma sequência dada por uma fórmula de recorrência, onde cada termo depende dos dois anteriores e com valores iniciais dados. Nesta etapa, discutiremos apenas os casos de equações de diferenças lineares homogêneas de segunda ordem com coeficientes constantes.

Definição 23. *Sejam a_0, a_1 e a_2 constantes reais com $a_0 \neq 0$ e a função $g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Uma equação de diferenças linear de segunda ordem com coeficientes constantes é escrita na forma*

$$a_0 x_{n+2} + a_1 x_{n+1} + a_2 x_n = g(n). \tag{2.16}$$

Neste capítulo iremos considerar apenas os casos onde $a_0 = 1$ e $g(n) = 0$, já que nosso estudo se restringe às equações de diferenças de segunda ordem homogêneas. Portanto, a equação (2.16) é escrita na forma

$$x_{n+2} + p x_{n+1} + q x_n = 0, \tag{2.17}$$

onde $a_1 = p$ e $a_2 = q$, com $p, q \in \mathbb{R}$ e $q \neq 0$, pois caso contrário (2.17) seria uma equação de diferenças de primeira ordem.

Como vimos anteriormente, para uma equação de diferenças de ordem n quando são dadas n condições iniciais a equação possui solução única designada por solução particular. Se não for dada nenhuma condição, a solução da equação de diferenças de ordem n dependerá de n constantes arbitrárias, obtemos neste caso a solução geral da equação de diferenças.

Seguindo a teoria das equações de diferenças lineares homogêneas de primeira ordem, em que as soluções obtidas são da forma exponencial, procuraremos por soluções também da forma exponencial, ou seja, iremos supor que as soluções são do tipo $x_n = k\lambda^n$. Desta forma, na equação (2.17), temos:

$$k\lambda^{n+2} + pk\lambda^{n+1} + qk\lambda^n = 0,$$

$$k\lambda^n(\lambda^2 + p\lambda + q) = 0.$$

Neste caso:

$$k\lambda^n = 0 \to \lambda = 0 \qquad \text{ou} \qquad \lambda^2 + p\lambda + q = 0 \tag{2.18}$$

Logo,

- Se $\lambda = 0$ temos que $x_n = 0$ para todo n. Esta solução terá sentido apenas se $x_0 = x_1 = 0$, pois como vimos anteriormente, q é um valor não nulo, o que implica que zero não pode ser raiz da equação.

- Se $\lambda \neq 0$, então $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$. O polinômio $S(\lambda) = \lambda^2 + p\lambda + q$ é denominado polinômio característico associado à equação de diferenças em estudo. As raízes do polinômio são chamadas de autovalores e expressas por

$$\lambda_1 = \frac{-p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2}.$$
$$\lambda_2 = \frac{-p - \sqrt{p^2 - 4q}}{2}.$$

De forma que os valores de λ_1 e λ_2 são univocamente determinados pelos valores dos coeficientes p e q. Veremos abaixo alguns teoremas que nos ajudarão a obter a solução da equação de diferenças de segunda ordem.

Primeiramente, temos que para as equações lineares vale o princípio da superposição, isto é, se temos várias soluções, então a combinação linear entre elas também é uma solução. Para o caso das equações de segunda ordem enunciamos a seguinte proposição.

Proposição 4. *(Princípio da superposição): Se a_n e b_n são soluções da equação de diferenças $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0,\ p,\ q \in \mathbb{R}$, então a combinação linear entre elas também é uma solução.*

Demonstração: Seja a_n e b_n soluções da equação de diferenças $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0,\ p,\ q \in \mathbb{R}$. Queremos mostrar que $t_n = c_1a_n + c_2b_n$, com $c_1,\ c_2 \in \mathbb{R}$, também é solução. Tem-se que:

$$\begin{aligned}
x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n &= t_{n+2} + pt_{n+1} + qt_n \\
&= c_1a_{n+2} + c_2b_{n+2} + p(c_1a_{n+1} + c_2b_{n+1}) + q(c_1a_n + c_2b_n) \\
&= c_1a_{n+2} + c_2b_{n+2} + c_1pa_{n+1} + c_2pb_{n+1} + c_1qa_n + c_2qb_n \\
&= c_1(a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n) + c_2(b_{n+2} + pb_{n+1} + qb_n) \\
&= c_1a_n + c_2b_n = 0.
\end{aligned}$$

Como por hipótese a_n e b_n são soluções da equação, concluímos que t_n também é solução.

Os teoremas apresentados a seguir estabelecem resultados fundamentais para escrevermos a solução procurada. Tais proposições referem-se ao polinômio $S(\lambda)$, ou melhor, são resultados que relacionam o valor de seu discriminante $\Delta = p^2 - 4q$ às suas raízes λ_1 e λ_2.

Inicialmente, voltemos a equação (2.17), como λ_1 e λ_2 foram determinados justamente com a imposição que x_n tenha a forma $k\lambda^n$, podemos concluir que $k\lambda_1^n$ e $k\lambda_2^n$ são soluções de (2.17). Logo, pela proposição 4 temos que:

$$x_n = C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_2^n,$$

também é uma solução da equação de diferenças (2.17).

Dizemos que a expressão $x_n = C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_2^n$ será solução geral de (2.17) se $\lambda_1 \neq \lambda_2$, isto é, se o discriminante $p^2 - 4q \neq 0$. Tal fato pode ser confirmado pelos teoremas enunciados a seguir, onde as soluções gerais estão definidas de acordo com os valores de λ_1 e λ_2 e podem ser divididos em três casos.

1. $\Delta = p^2 - 4q > 0$.

Teorema 2. *Se as raízes do polinômio característico $S(\lambda) = \lambda^2 + p\lambda + q = 0$, λ_1 e λ_2 são não nulas e distintas, então, $x_n = C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_2^n$ é solução da equação $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$, quaisquer que sejam os valores das constantes C_1 e C_2.*

Demonstração: Sejam C_1 e C_2 constantes reais quaisquer. Substituindo $x_n = C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_2^n$ na equação $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$ obtemos:

$$\begin{aligned}
C_1\lambda_1^{n+2} + C_2\lambda_2^{n+2} + p(C_1\lambda_1^{n+1} + C_2\lambda_2^{n+1}) + q(C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_2^n) &= \\
C_1\lambda_1^n\lambda^2 + C_2\lambda_2^n\lambda^2 + C_1p\lambda_1^n\lambda + C_2p\lambda_2^n\lambda + C_1q\lambda_1^n + C_2q\lambda_2^n &= \\
C_1\lambda_1^n(\lambda^2 + p\lambda + q) + C_2\lambda_2^n(\lambda^2 + p\lambda + q) = C_1\lambda_1^n \cdot 0 + C_2\lambda_2^n \cdot 0 &= 0.
\end{aligned}$$

Logo, $x_n = C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_2^n$ é solução da equação $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$.

Podemos mostrar ainda que todas as soluções de uma equação de diferenças de segunda ordem cujas raízes do polinômio característico λ_1 e λ_2 sejam não nulas e distintas tem sempre a forma $x_n = C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_2^n$.

Teorema 3. *Se as raízes da equação característica $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$, λ_1 e λ_2 são não nulas e distintas, então x_n é uma solução da equação de diferenças $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$ se e somente se x_n tem a forma*

$$x_n = C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_2^n, \text{ com } C_1 \text{ e } C_2 \text{ constantes.}$$

Demonstração:

($\Rightarrow$) Primeiramente devemos mostrar que se λ_1 e λ_2 são raízes do polinômio característico e C_1 e C_2 são constantes, então $x_n = C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_2^n$ é uma solução da equação de diferenças. Este fato já foi provado no teorema 2.

($\Leftarrow$) Devemos mostrar que se x_n é uma solução, então $x_n = C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_2^n$ para algum valor de C_1 e C_2 constantes. Suponhamos que x_n é uma solução geral da equação de diferenças e as condições iniciais x_0 e x_1 dadas se verificam. Vamos mostrar que existem constantes C_1 e C_2, tais que $x_n = C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_2^n$ satisfaz estas mesmas condições iniciais. A partir de x_n temos que:

$$\begin{cases} x_0 = C_1\lambda_1^0 + C_2\lambda_2^0 \\ x_1 = C_1\lambda_1^1 + C_2\lambda_2^1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = C_1 + C_2 \\ x_1 = C_1\lambda_1 + C_2\lambda_2 \end{cases}$$

Manipulando essas duas expressões, devemos obter C_1 e C_2 em função das raízes λ_1 e λ_2 e em função de x_0 e x_1. Isolando C_2 na primeira expressão e substituindo na segunda, obtemos:

$$\begin{cases} C_2 = x_0 - C_1 \\ x_1 = C_1\lambda_1 + (x_0 - C_1)\lambda_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_2 = x_0 - C_1 \\ x_1 = C_1(\lambda_1 - \lambda_2) + x_0\lambda_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_2 = x_0 - C_1 \\ C_1 = \dfrac{x_1 - x_0\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} \end{cases}$$

logo,

$$\begin{cases} C_2 = x_0 - \dfrac{x_1 - x_0\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} \\ C_1 = \dfrac{x_1 - x_0\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_2 = \dfrac{x_0\lambda_1 - x_1}{\lambda_1 - \lambda_2} \\ C_1 = \dfrac{x_1 - x_0\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} \end{cases}$$

Como $\lambda_1 \neq \lambda_2$, então obtemos C_1 e C_2 válidos e que satisfazem as condições iniciais, logo concluímos que $x_n = C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_2^n$.

2. $\Delta = p^2 - 4q = 0$.

Sabemos que em uma equação polinomial do 2º grau, o discriminante igual a zero conduz a duas raízes reais iguais. Neste caso, teremos em particular:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{p}{2}.$$

Teorema 4. *Se as raízes λ_1 e λ_2 da equação característica $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ são iguais, isto é, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ e não nulas, então x_n é uma solução da equação de diferenças $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$ se e somente se x_n tem a forma*

$$x_n = C_1\lambda^n + C_2 n\lambda^n, \text{ com } C_1 \text{ e } C_2 \text{ constantes.}$$

Demonstração:

($\Rightarrow$) Inicialmente iremos mostrar que se λ é uma raiz do polinômio característico e C_1 e C_2 são constantes, então $x_n = C_1\lambda^n + C_2 n\lambda^n$ é uma solução da equação de diferenças. Se

λ é uma raiz do polinômio, então podemos escrever:

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0.$$

Substituindo $x_n = C_1\lambda^n + C_2 n\lambda^n$ na equação $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$ obtemos:

$$\begin{aligned} C_1\lambda^{n+2} + C_2(n+2)\lambda^{n+2} + p[C_1\lambda^{n+1}C_2(n+1)\lambda^{n+1}] + q(C_1\lambda^n + C_2n\lambda^n) = \\ = C_1\lambda^n\lambda^2 + C_2n\lambda^n\lambda^2 + 2C_2\lambda^n\lambda^2 + pC_1\lambda^n\lambda + pC_2n\lambda^n\lambda + pC_2\lambda^n\lambda + qC_1\lambda^n + qC_2n\lambda^n = \\ = C_1\lambda^n\underbrace{(\lambda^2 + p\lambda + q)}_{0} + C_2n\lambda^n\underbrace{(\lambda^2 + p\lambda + q)}_{0} + C_2\lambda^n(2\lambda^2 + p\lambda) \end{aligned}$$

Como $\lambda = -\dfrac{p}{2}$, obtemos:

$$C_1\lambda^n \cdot 0 + C_2n\lambda^n \cdot 0 + C_2\lambda^n\left[2\left(-\frac{p}{2}\right)^2 + p\left(-\frac{p}{2}\right)\right] = 0.$$

Logo, concluímos que $x_n = C_1\lambda^n + C_2n\lambda^n$ é solução da equação de diferenças $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$.

($\Leftarrow$) Devemos mostrar que se x_n é uma solução, então $x_n = C_1\lambda^n + C_2n\lambda^n$ para algum valor de C_1 e C_2 constantes. Suponhamos que x_n é uma solução geral da equação de diferenças e as condições iniciais x_0 e x_1 dadas se verificam. Vamos mostrar que existem constantes C_1 e C_2, tais que $x_n = C_1\lambda^n + C_2n\lambda^n$ satisfaz estas mesmas condições iniciais. A partir de x_n temos que:

$$\begin{cases} x_0 = C_1\lambda^0 + C_2 \cdot 0 \cdot \lambda^0 \\ x_1 = C_1\lambda^1 + C_2 \cdot 1 \cdot \lambda^1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = C_1 \\ x_1 = C_1\lambda + C_2\lambda \end{cases}$$

Resolvendo o sistema acima, devemos obter C_1 e C_2 em função da raiz λ e em função de x_0 e x_1. Substituindo o valor de C_1 na segunda equação, obtemos:

$$\begin{cases} C_1 = x_0 \\ x_1 = x_0\lambda + C_2\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = x_0 \\ C_2 = \dfrac{x_1 - x_0\lambda}{\lambda} \end{cases}$$

Como $x_1 - x_0$ é não nulo, obtemos C_1 e C_2 válidos e que satisfazem as condições iniciais, portanto, concluímos que $x_n = C_1\lambda^n + C_2n\lambda^n$. De forma mais específica, como $\lambda = -\dfrac{p}{2}$, podemos reescrever a solução x_n:

$$x_n = C_1\left(-\frac{p}{2}\right)^n + C_2n\left(-\frac{p}{2}\right)^n = (C_1 + C_2n)\left(-\frac{p}{2}\right)^n,$$

e os coeficientes C_1 e C_2 são expressos por:

$$C_1 = x_0 \quad \text{e} \quad C_2 = -\frac{2x_1}{p} + x_0.$$

3. $\Delta = p^2 - 4q < 0$.

Concluímos na proposição 3, se as raízes λ_1 e λ_2 são não nulas e distintas, então, a solução geral é da forma $x_n = C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_2^n$. Com base nesse fato, iremos encontrar uma solução geral para o caso em que a equação característica possui raízes complexas. Seja $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ e $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ as raízes complexas da equação característica $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$. Então, pela solução geral, temos:

$$x_n = C_1(\alpha + i\beta)^n + C_2(\alpha - i\beta)^n.$$

Usando a fórmula trigonométrica e a fórmula de Euler, podemos escrever:

$$\lambda_1 = \alpha + i\beta = r(\cos\theta + isen\theta) = re^{i\theta}$$

$$\lambda_2 = \alpha - i\beta = r(\cos\theta - isen\theta) = re^{-i\theta}.$$

Sendo r o módulo de λ_1 e λ_2, com $r \neq 0$, $r = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ e $\theta = \arctan\dfrac{\beta}{\alpha}$. Substituindo a fórmula trigonométrica na solução geral, obtemos:

$$\begin{aligned}
x_n &= C_1[r(\cos\theta + isen\theta)]^n + C_2[r(\cos\theta - isen\theta)]^n \\
x_n &= C_1r^n[\cos(n\theta) + isen(n\theta)] + C_2r^n[cos(n\theta) - isen(n\theta)] \\
x_n &= C_1r^n\cos(n\theta) + C_1r^nisen(n\theta) + C_2r^n\cos(n\theta) - C_2r^nisen(n\theta) \\
x_n &= r^n\cos(n\theta)(C_1 + C_2) + ir^nsen(n\theta)(C_1 - C_2).
\end{aligned} \tag{2.19}$$

Fazendo $A_1 = C_1 + C_2$ e $A_2 = C_1 - C_2$, tem-se:

$$x_n = r^n[A_1\cos(n\theta) + iA_2sen(n\theta)].$$

Exemplo 22. Determinar a solução geral da equação de diferenças $x_{n+2} - 6x_{n+1} + 8x_n = 0$.

Solução: A equação é uma equação de diferenças linear de segunda ordem homogênea com coeficientes constantes. A equação característica é dada por:

$$\lambda^2 - 6\lambda + 8 = 0,$$

cujas soluções são $\lambda_1 = 4$ e $\lambda_2 = 2$. Portanto, a solução dada pelo teorema 3 é

$$x_n = C_1 4^n + C_2 2^n,\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Capítulo 3

O Resultado Principal

Neste capítulo será apresentado o problema principal desse trabalho, a abordagem de um modelo probabilístico que descreve como é possível predizer a ruína de um dos jogadores que estejam participando de um jogo sobre determinadas regras. O modelo é definido por meio de uma equação de diferenças linear de segunda ordem com coeficientes constantes, apoiado à teoria de probabilidade. O modelo considerado segue as mesmas idéias desenvolvidas em Elaydi [2004].

3.1 Descrição e Modelagem do Problema "A Ruína do Jogador"

Consideremos um jogo em que duas pessoas estão envolvidas. Um jogador A joga uma sequência de partidas contra um adversário B em que a probabilidade do jogador A ganhar $R\$1,00$ em qualquer jogo é um valor conhecido q, e a probabilidade de ele perder $R\$1,00$ é $1-q$, onde $0 \leqslant q \leqslant 1$. Suponha que o jogador A possua um capital de n reais e B de k reais, de maneira que $n+k=N$. O jogador perde o jogo se ficar sem dinheiro ou é vencedor se alcança seu objetivo de adquirir N reais. O jogador que ficar sem dinheiro primeiro, dizemos que ele está arruinado. Seja p_n a probabilidade do jogador A ser arruinado se ele possuir n reais. Ele pode ser arruinado de duas maneiras:

- Primeiro, ganhando o próximo jogo: a probabilidade desse evento é q, então sua fortuna será $n+1$, e a probabilidade de ser arruinado se tornará p_{n+1}.

- Em segundo lugar, perdendo o próximo jogo: a probabilidade desse evento é $1-q$, e a probabilidade de ser arruinado é p_{n-1}.

Portanto, aplicando o teorema da probabilidade total (ver seção 1.2.3), temos

$$p_n = qp_{n+1} + (1-q)p_{n-1}. \tag{3.1}$$

Se consideramos o caso em que o jogador possui $n+1$ reais, então a equação (3.1 implica que p_{n+1} será

$$p_{n+1} = qp_{n+2} + (1-q)p_n,$$

é equivalente dizer que

$$qp_{n+2} - p_{n+1} + (1-q)p_n = 0,$$

dividindo toda equação por q, obtemos:

$$p_{n+2} - \frac{1}{q}p_{n+1} + \frac{(1-q)}{q}p_n = 0,\ n = 0, 1, \ldots, N. \tag{3.2}$$

Observe que a probabilidade do jogador A ser arruinado será máxima se ele possuir $R\$0,00$, isto quer dizer que $p_0 = 1$. A probabilidade do jogador A ser arruinado será nula, se ele atingir a quantidade máxima de N reais, isto é $p_N = 0$. Assim, obtemos o modelo matemático que descreve o problema de predizer a ruína do jogador, definido através de uma equação de diferença de segunda ordem com coeficientes constantes dados duas condições iniciais. Mais exatamente o modelo matemático é definido pelo seguinte problema de valor inicial:

$$(S) = \begin{cases} p_{n+2} - \dfrac{1}{q}p_{n+1} + \dfrac{(1-q)}{q}p_n \;=\; 0, \quad n = 0, 1, \ldots, N, \\ p_0 \;=\; 1, \quad p_N \;=\; 0. \end{cases}$$

3.2 Obtenção da Solução do Modelo

Identificado o tipo da equação de diferenças (3.2), utilizaremos os conceitos apresentados na seção (2.3) do capítulo 2 e encontraremos a solução geral para o problema do valor inicial (S). Primeiramente, temos que a equação característica associada a (3.2) é dada por:

$$\lambda^2 - \frac{1}{q}\lambda + \frac{1-q}{q} = 0.$$

Efetuando o cálculo do discriminante, obtemos:

$$\Delta = \left(-\frac{1}{q}\right)^2 - 4 \cdot 1 \cdot \frac{(1-q)}{q} = \frac{1}{q^2} - \frac{4+4q}{q} = \frac{(1-2q)^2}{q^2},$$

cujas raízes reais são:

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \left(\frac{1}{q}+\frac{1-2q}{q}\right)\cdot\frac{1}{2}=\frac{2-2q}{2q}=\frac{1-q}{q},\\ \lambda_2 &= \left(\frac{1}{q}-\frac{1-2q}{q}\right)\cdot\frac{1}{2}=\frac{2q}{2q}=1.\end{aligned}$$

A partir dos valores de λ_1 e λ_2 são duas as situações possíveis:

a) Se $q \neq \dfrac{1}{2}$ a equação característica possui raízes reais λ_1 e λ_2 diferentes, portanto, pelo teorema 3 a solução geral pode ser escrita como:

$$p_n = A_1 + A_2\left(\frac{1-q}{q}\right)^n, \text{ se } q \neq \frac{1}{2}. \tag{3.3}$$

Utilizando as condições inicias $p_0 = 1$ e $p_N = 0$ obtemos

$$\begin{cases} A_1 + A_2 = 1 \\ A_1 + A_2\left(\dfrac{1-q}{q}\right)^N = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_1 = 1 - A_2 \\ A_2\left[\left(\dfrac{1-q}{q}\right)^N - 1\right] = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_1 = 1 - A_2 \\ A_2 = \dfrac{1}{1-\left(\dfrac{1-q}{q}\right)^N} \end{cases}$$

o que implica

$$A_1 = \frac{-\left(\dfrac{1-q}{q}\right)^N}{1-\left(\dfrac{1-q}{q}\right)^N} \quad \text{e} \quad A_2 = \frac{1}{1-\left(\dfrac{1-q}{q}\right)^N}.$$

Substituindo os valores obtidos das constantes A_1 e A_2 em (3.3), obtemos a solução do problema de valor inicial (S) para $q \neq \dfrac{1}{2}$:

$$p_n = \frac{\left(\dfrac{1-q}{q}\right)^n - \left(\dfrac{1-q}{q}\right)^N}{1-\left(\dfrac{1-q}{q}\right)^N}. \tag{3.4}$$

Observe que se $q \neq \dfrac{1}{2}$, então $0 \leqslant p_n \leqslant 1$. Com efeito, suponhamos que $q \leqslant \dfrac{1}{2}$ (o outro caso pode ser provado analogamente), então $1-q \geqslant \dfrac{1}{2}$, e $\dfrac{1}{q} \geqslant 2$, assim $\dfrac{1-q}{q} \geqslant 1$. Para N suficientemente grande, temos que $N \geqslant n$, isso implica que:

$$\left(\frac{1-q}{q}\right)^N \geqslant \left(\frac{1-q}{q}\right)^n,$$

então podemos dizer que, $\left(\dfrac{1-q}{q}\right)^n - \left(\dfrac{1-q}{q}\right)^N \leqslant 0$. Por outro lado, como $\left(\dfrac{1-q}{q}\right)^n \geqslant 1$ então:

$$0 \geqslant \left(\frac{1-q}{q}\right)^n - \left(\frac{1-q}{q}\right)^N \geqslant 1 - \left(\frac{1-q}{q}\right)^N.$$

Portanto

$$0 \leqslant p_n = \frac{\left(\dfrac{1-q}{q}\right)^n - \left(\dfrac{1-q}{q}\right)^N}{1 - \left(\dfrac{1-q}{q}\right)^N} \leqslant 1.$$

b) Se $q = \dfrac{1}{2}$, a equação característica possui raízes reais iguais, isto é, $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$.

Observe que o fato de que a probabilidade $q = \dfrac{1}{2}$ do jogador ganhar $R\$1,00$ representa o caso de um jogo mais justo para os participantes, pois as probabilidades de ganhar são iguais para cada jogador. Pelo Teorema 4 a solução geral para esse caso pode ser escrita como:

$$p_n = A_1 + A_2 n,$$

para A_1, A_2 constantes arbitrárias. Usando as condições inicias dadas no problema obtemos:

$$\begin{cases} A_1 = 1 \\ A_1 + A_2 N = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_1 = 1 \\ 1 + A_2 N = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_1 = 1 \\ A_2 = -\dfrac{1}{N} \end{cases}$$

Logo, a solução particular é dada por:

$$p_n = 1 - \frac{n}{N} = \frac{N-n}{N}. \tag{3.5}$$

Resumindo,

$$p_n = \begin{cases} \dfrac{\left(\dfrac{1-q}{q}\right)^n - \left(\dfrac{1-q}{q}\right)^N}{1 - \left(\dfrac{1-q}{q}\right)^N}, \text{ se } q \neq \dfrac{1}{2}. \\ \\ 1 - \dfrac{n}{N} = \dfrac{N-n}{N}, \text{ se } q = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

3.3 Análise da Solução

Nesta seção vamos a analisar a solução do modelo matemático que descreve nosso problema, isto é, discutir o comportamento da solução quando o jogador deseja adquirir uma quantia fixa de N reais.

Da seção anterior, observamos que quando $q = \dfrac{1}{2}$ a solução p_n é dada por (3.5). Iniciemos a nossa análise observando que se ambos os jogadores possuírem a mesma quantia em dinheiro, então a probabilidade de ruína é igual a 50%, ou seja, para $n = k$ e $q = \dfrac{1}{2}$ teremos sempre $\dfrac{N-n}{N} = 0,5$. Ainda para o caso $q = \dfrac{1}{2}$, podemos afirmar que a probabilidade de ruína do jogador A somente será inferior a 50% caso seu valor inicial n for superior ao valor inicial k de seu adversário, caso contrário, se $N \to \infty$ então $p_n \to 1$, ou seja quanto maior a diferença entre os valores inicias maior a chance de ruína. Observe a tabela abaixo com a simulação de alguns valores para n e N.

n	N	p_n
5	15	0,67
5	20	0,75
5	30	0,83
5	40	0,875
5	50	0,9
5	100	0,95

Tabela 3.1: Resultados da Ruína do Jogador para diferentes valores de N, $q = \dfrac{1}{2}$.

Mas será que isso também acontece no caso em que $q \neq \dfrac{1}{2}$? Para responder a essa questão procedemos da seguinte maneira: suponhamos que o jogador inicia o jogo com uma quantidade inicial de $R\$2,00$ e que a probabilidade de ele ganhar $R\$1,00$ é de $0,1$, suponhamos ainda que o jogo se encerra se ele ficar sem dinheiro ou obter um total de $R\$5,00$. Do enunciado, temos que $n = 2, q = 0,1 \neq 0,5$ e $N = 5$, logo a probabilidade de ser arruinado é dada por (3.4), isto é:

$$p_2 = \frac{\left(\dfrac{1-0,1}{0,1}\right)^2 - \left(\dfrac{1-0,1}{0,1}\right)^5}{1 - \left(\dfrac{1-0,1}{0,1}\right)^5} = \frac{\left(\dfrac{0,9}{0,1}\right)^2 - \left(\dfrac{0,9}{0,1}\right)^5}{1 - \left(\dfrac{0,9}{0,1}\right)^5} = \frac{9^2 - 9^5}{1 - 9^5} \approx 0,998.$$

Se agora nós assumirmos que o jogador inicia o jogo com uma quantidade inicial de $R\$5,00$ e que a probabilidade de ele ganhar um real é de $0,2$. Além disso, o jogo termina se o jogador ficar sem dinheiro ou alcançar um total de $R\$10,00$. Logo, temos que $n = 5, q = 0,2 \neq 0,5$ e $N = 10$, logo a probabilidade de ruína será:

$$p_5 = \frac{\left(\dfrac{1-0,2}{0,2}\right)^5 - \left(\dfrac{1-0,2}{0,2}\right)^{10}}{1-\left(\dfrac{1-0,2}{0,2}\right)^{10}} = \frac{\left(\dfrac{0,8}{0,2}\right)^5 - \left(\dfrac{0,8}{0,2}\right)^{10}}{1-\left(\dfrac{0,8}{0,2}\right)^{10}} = \frac{4^5 - 4^{10}}{1-4^{10}} \approx 0,999.$$

Se tivermos $n = 10, q = 0,3 \neq 0,5$ e $N = 100$, a probabilidade da ruína do jogador nesse caso será dada por:

$$p_{10} = \frac{\left(\dfrac{1-0,3}{0,3}\right)^{10} - \left(\dfrac{1-0,3}{0,3}\right)^{100}}{1-\left(\dfrac{1-0,3}{0,3}\right)^{100}} = \frac{\left(\dfrac{7}{3}\right)^{10} - \left(\dfrac{7}{3}\right)^{100}}{1-\left(\dfrac{7}{3}\right)^{100}} \approx 0,9999999... = 1.$$

Esses testes nos permitem conjeturar que, quando N cresce e a probabilidade de ganhar q é menor que $0,5$, então a probabilidade do jogador tender a ruína é muito grande. Isso faz sentido, porque o jogador vai querer ganhar uma grande quantidade N iniciando com um valor pequeno n.

Analisemos agora como a probabilidade de ruína do jogador A é alterada a medida em que o valor q é modificado. Na tabela 3.2, podemos observar diferentes valores de p_n tanto para $n = k$ quanto para $n \neq k$.

	$q = 0,49$	$q = 0,475$	$q = 0,45$	$q = 0,4$	$q = 0,35$
$n = 100, k = 10$	$0,334$	$0,632$	$0,866$	$0,982$	$0,997$
$n = 50, k = 20$	$0,586$	$0,866$	$0,981$	$0,999$	1
$n = 20, k = 20$	$0,689$	$0,880$	$0,982$	$0,999$	1
$n = 50, k = 50$	$0,880$	$0,993$	$0,999$	1	1
$n = 10, k = 20$	$0,788$	$0,910$	$0,984$	$0,999$	1
$n = 10, k = 100$	$0,993$	$0,999$	1	1	1

Tabela 3.2: Resultados da Ruína do Jogador para diferentes valores de q,n e k.

Analisando os dados da tabela acima, podemos constatar que mesmo que a probabilidade de ganhar q sofra uma pequena alteração, o mesmo não ocorre no valor de p_n, onde verificamos mudanças significativas em seus resultados, como por exemplo, em $n = 100$ e $k = 10$, ainda que o jogador possua uma vantagem expressiva no valor inicial, uma pequena redução nas chances de vitória de $q = 0,49$ para $q = 0,475$ quase duplica a probabilidade de ruína. O mesmo comportamento pode ser observado nos casos em que $n = k$ e é possível prever ainda que o jogo torna-se mais desfavorável ao jogador A a medida que a quantidade de dinheiro que cada um possui aumenta, por exemplo, para

$q = 0,49$, temos que $p_n = 0,689$ quando $n = k = 20$, essa probabilidade aumenta para $p_n = 0,88$ se $n = k = 50$.

Portanto, exceto os casos em que $q \approx 0,5$ e o adversário possui um valor inicial k relativamente pequeno, podemos concluir que se $q < 0,5$, mesmo que o jogador A possua um valor inicial elevado comparado ao seu adversário B, somente esse fato não será suficiente para aumentar suas chances de vitória, logo, como mencionado anteriormente, a probabilidade do jogador A vencer é muito pequena.

Por último, podemos estabelecer que a probabilidade do jogador ganhar é dada por:

$$\tilde{p}_n = 1 - p_n = \begin{cases} \dfrac{1 - \left(\dfrac{1-q}{q}\right)^n}{1 - \left(\dfrac{1-q}{q}\right)^N} & \text{se} \quad q \neq \dfrac{1}{2}, \\ \dfrac{n}{N} & \text{se} \quad q = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Capítulo 4

Aplicações das Equações de Diferenças Lineares no Ensino Médio

A etapa final desse trabalho consiste em trabalhar o conteúdo de probabilidade e equação de diferenças com alunos do Ensino Médio por meio de alguns problemas de aplicação, tendo como foco e referencial o problema da Ruína do Jogador discutido no capítulo 3. O objetivo é aprofundar o estudo da probabilidade, criando oportunidades para desenvolver no estudante a capacidade de interpretar, raciocinar logicamente e aplicar os conhecimentos teóricos na resolução do problema, seguindo dessa forma a proposta de atividade do CBC de promover trabalhos de discussão em grupos para a formulação de modelos para situações-problema. Ainda segundo o CBC (2007, p.36):

> A atitude de tentar solucionar problemas propostos no "mundo real" está na própria base da criação matemática e tem sido uma fonte inesgotável de inspiração e de renovação dos seus métodos. A utilização de modelos matemáticos, por meio da formulação em linguagem simbólica e relações lógicas para analisar certas situações, tem sido um método bastante eficaz adotado com sucesso, há vários séculos.

Assim, para resolução e estudo dos resultados do problema principal fez-se necessário um resgate de conhecimentos prévios e a apresentação da teoria principal que os alunos utilizariam para resolução do problema. O intuito foi que a apresentação do conteúdo de Equações de Diferenças fosse realizada buscando aproveitar ao máximo os conteúdos estudados no Ensino Médio, realizando sempre correlações aos conhecimentos prévios.

É importante deixar claro que atualmente o termo equação de diferenças não é sequer citado no ensino médio, porém existem vários conteúdos de grande relevância no currículo do Ensino Médio que estão estreitamente relacionados às equações de diferenças e que serviram como suporte para introdução deste conteúdo.

Inicialmente, foi feito um roteiro didático com todos os pontos que deveriam ser discutidos previamente antes da apresentação do problema principal, foram discutidos também outros problemas modelados por equações de diferenças, tudo isso para que os alunos se ambientassem com o assunto. A primeira e a segunda aula foram destinadas aos conhecimentos que dão suporte para solução dos problemas propostos e a terceira aula ficou reservada para a modelagem e resolução dos problemas. Os roteiros das aulas são apresentados na seção 4.1.

4.1 Roteiros Didáticos

Roteiro Didático 1 - Noções Iniciais

Objetivos:

- Compreender a ideia de uma relação de recorrência.
- Compreender o conceito de equação de diferenças e relacionar sua aplicação a um ambiente de variáveis discretas.
- Identificar uma equação de diferenças de primeira e segunda ordem e ser capaz de aplicar os métodos de solução.

Definição 1: *Uma sequência de números reais é um conjunto de pontos denotado por* $\{a_n\}$ *definidos por uma função* $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ *que associa a cada* $n \in \mathbb{N}$ *um número real* a_n. *Os valores de* a_n *são ditos termos da sequência. Podemos representar uma sequência* $\{a_n\}$ *por uma lista de seus termos dispostos de forma ordenada* $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)$.

Exemplo 1:

i. Sequências dos números naturais: $(1, 2, 3, 4, \ldots)$.

ii. Sequências dos números ímpares: $(1, 3, 5, 7, \ldots)$.

iii. Sequências dos números naturais não nulos quadrados perfeitos: $(1, 4, 9, 16, \ldots)$.

Observação: Outra forma comum de representar uma sequência é a partir de uma lei ou fórmula matemática que relaciona um termo qualquer com a posição ocupada por aquele termo na sequência. A essa fórmula damos o nome de termo geral da sequência, que de maneira genérica é a expressão que relaciona o valor do enésimo termo com a sua respectiva posição "n" na sequência. Nos exemplos acima podemos escrever:

i. Sequências dos números naturais: $a_k = k$.

ii. Sequências dos números ímpares: $x_n = 2n - 1$.

iii. Sequências dos números naturais não nulos quadrados perfeitos: $y_n = n^2$.

No Ensino Médio um exemplo bem conhecido dessa sequências são as progressões aritméticas e progressões geométricas.

Em certas situações em que não se conhece de forma explícita o termo geral da sequência apresentada, pode-se descrevê-la a partir de uma relação ou equação onde cada termo está relacionado de alguma maneira aos termos anteriores da sequência.

Exemplo 2:

i. $a_n = a_{n-1} + 3$, com $a_1 = 5$ (Progressão Aritmética de razão 3).

ii. $x_{n+1} = x_n + 2$.

iii. Sequência de Fibonacci: $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, \quad com \quad a_0 = a_1 = 1$.

Perceba que em alguns casos para se conhecer totalmente a sequência numérica em estudo, além de conhecer a equação que descreve a sequência precisamos saber também o primeiro ou os primeiros termos da sequência aos quais damos o nome de condições iniciais. Como no exemplo 2 (ii), sem uma condição inicial qualquer sequência de razão 2 satisfaz a equação dada, agora se determinarmos que $x_1 = 1$, concluímos que a equação $x_{n+1} = x_n + 2$ é o termo geral para a sequência dos números ímpares.

Exemplo 3: (Capitalização à juros compostos) Seja uma aplicação financeira M_0 feita sob o regime de juros compostos. O montante M_t alcançado no estágio de tempo t (dias, meses, anos, etc.) e atualizado por uma taxa de juros i, depende do montante adquirido até o estágio $t - 1$.
Podemos representar o problema acima pela igualdade:

$$M_t = M_{t-1} + iM_{t-1} \rightarrow M_t = (1 + i)M_{t-1}.$$

Os exemplos discutidos acima ilustram casos de relações de recorrência. Uma relação de recorrência determina cada termo de uma dada sequência, a partir de um determinado termo, em função dos termos anteriores. Para definir uma relação de recorrência é necessário que sejam dadas as condições iniciais da sequência (ou problema) e seja conhecida a equação de recorrência que permite calcular os próximos termos em função dos anteriores.

Para resolver os problemas a seguir, usaremos a ideia de relações de recorrência juntamente com a resolução das chamadas equações de diferenças, que são um tipo de equação de recorrência.

Definição 2: *Uma equação que relaciona o termos de uma sequência* $\{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots\}$ *é chamada equação de diferenças ou fórmula de recorrência. Se a sequência é finita dizemos que a equação é uma equação de diferenças finitas.*

De modo geral, temos a seguinte definição para o caso finito, seja $n \in \mathbb{N}$, uma equação de diferenças estabelece uma relação entre x_n e x_{n-1},x_{n-2},...,x_{n-m} e podemos escrevê-la da seguinte forma:

$$x_n = f(n, x_{n-1}, ..., x_{n-m}).$$

Exemplo 4: $x_{n+1} - 5x_n = n^2 + 4$.
Solução: A equação anterior implica que, para cada valor de n entre zero e infinito, o termo de ordem $n+1$ na sequência subtraído 5 vezes o termo de ordem n, é igual a n^2+4.

Observação: Encontrar uma solução para uma equação de diferenças é encontrar uma expressão x_n que dependa apenas de n e não dos $m-1$ termos anteriores, onde x_n satisfaz a equação de diferenças.

Podemos classificar uma equação de diferenças de acordo com sua ordem. A ordem é determinada pela diferença entre o maior e o menor dos índices dos termos que aparecem nas equações necessárias para que a solução possa ser definida. Por exemplo, se a sequência depende de um termo anterior ela é dita de primeira ordem, se depender de dois termos anteriores ela é chamada de equação de diferenças de segunda ordem, e assim sucessivamente. Nessas aulas, iremos trabalhar com as equações de diferenças de primeira ordem e de segunda ordem.

Observação: Para uma boa compreensão da solução e talvez até uma ambientação com o conteúdo, pode-se fazer uma analogia do tema de equações de diferenças de primeira e segunda ordem com as equações polinomiais de 1º e 2º grau respectivamente.

I - Equação de Diferenças Linear de Primeira Ordem

Definição 3: *Dados $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, uma equação de diferenças é dita de primeira ordem se for do tipo*

$$\begin{cases} x_{n+1} - x_n = f(x_n) \\ x_0 \text{ dado} \end{cases}$$

É comum a equação de diferenças ser apresentada na forma:

$$x_{n+1} = a(n)x_n + b(n), \ \textit{com } x_0 \text{ dado},$$

onde $a(n)$ e $b(n)$ podem ser coeficientes variáveis, ou seja, funções reais conhecidas ou podem ser coeficientes constantes, então de maneira particular a equação acima fica representada por $x_{n+1} = ax_n + b$. Se $b(n) = 0$ dizemos que a equação de diferenças é homogênea, caso contrário, a equação é não homogênea.

Exemplo 5: Veja alguns exemplos de equação de diferenças:

i. $x_{n+1} = (n+3)x_n - 3^n$ é uma equação de diferenças linear, em que $a(n)$ e $b(n)$ são funções de n, $a(n) = n + 3$ e $b(n) = 3^n$.

ii. $x_{n+1} = 5x_n - 2$,$x_0 = 2$ é uma equação de diferenças linear com coeficientes constantes, onde $a = 5$ e $b = -2$.

Para os dois casos citados de equações de diferenças lineares de primeira ordem não homogêneas, temos que a solução pode ser obtida por meio de uma fórmula.

Definição 4: A solução geral de uma equação de diferença linear de primeira ordem é:

$$x_n = \left[\prod_{i=0}^{n-1} a(i)\right] x_0 + \sum_{r=0}^{n-1} \left[\prod_{i=r+1}^{n-1} a(i)\right] b(r).$$

O Exemplo 5 (ii) é considerado um caso particular de equação de diferenças e existem inúmeras aplicações que são modeladas por uma equação de diferenças linear com coeficientes constantes. Para este caso, onde a e b são constantes, existe uma solução alternativa dada por:

$$x_n = \begin{cases} x_0 + nb, \quad se \quad a = 1 \\ a^n x_0 + b \cdot \left(\dfrac{1-a^n}{1-a}\right), \quad se \quad a \neq 1 \end{cases} \tag{4.1}$$

Utilizando a relação acima e resolvendo o exemplo 5 (ii), temos:

$$x_n = 5^n \cdot 2 - 2 \cdot \left(\frac{1-5^n}{1-5}\right) = 2 \cdot 5^n + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot 5^n = \frac{3}{2}5^n + \frac{1}{2}.$$

Exemplo 6: Resolva a equação de diferenças $y_{n+1} = 2y_n - 3$, com $y_0 = 4$.
Solução: Observe que se trata de uma equação de diferenças com coeficientes constantes onde $a = 2$ e $b = -3$. Pelo método de solução acima, temos:

$$y_n = 2^n \cdot 4 - 3 \cdot \left(\frac{1-2^n}{1-2}\right) = 4 \cdot 2^n + 3 - 3 \cdot 2^n = 2^n - 3.$$

Observe que se a equação for homogênea, no caso dos coeficientes constantes $b = 0$, a solução fica bem mais simples, pois:

$$x_n = a^n x_0 + 0 \cdot \left(\frac{1-a^n}{1-a}\right) \rightarrow x_n = a^n x_0.$$

No exemplo 3 foi discutido um modelo de capitalização à juros compostos. Supondo uma taxa de juros de 2% ao mês, nosso modelo será dado por:

$$M_t = (1 + 0,02)M_{t-1} = 1,02M_{t-1},$$

cuja solução é $M_t = 1,02^n M_0$. Desta maneira, se for investido um valor inicial de $R\$500,00$, após 1 ano o valor atualizado será:

$$M_{12} = 1,02^{12} \cdot 500 \approx 634,12.$$

II - Equação de Diferenças Linear de Segunda Ordem

De maneira geral podemos definir uma equação de diferenças de segunda ordem por:

$$x_{n+2} = f(x_{n+1}, x_n), \text{ com } x_0, x_1 \text{ dados.}$$

Para as atividades que seguem, trabalharemos com um caso específico de equação de diferenças linear de segunda ordem, que é o caso da equação de diferenças com coeficientes constantes.

Definição 5: Sejam a_0, a_1 e a_2 constantes reais com $a_0 \neq 0$ e a função $g : N \rightarrow R$. Uma equação de diferenças linear de segunda ordem com coeficientes constantes é escrita na forma

$$a_0 x_{n+2} + p x_{n+1} + q x_n = g(n).$$

Vamos restringir um pouco mais as variáveis, considerando apenas os casos onde $a_0 = 1$ e $g(n) = 0$. Portanto, a equação acima é escrita na forma

$$x_{n+2} + p x_{n+1} + q x_n = 0.$$

A partir da equação acima podemos escrever uma equação polinomial do segundo grau que será a base para a solução da equação de diferenças, ao qual nomeamos de equação característica.

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0.$$

Os valores de λ_1 e λ_2 determinam a solução da equação: Para o caso $\Delta > 0$, temos $\lambda_1 \neq \lambda_2$ e a solução é dada por:

$$x_n = C_1 \lambda_1^n + C_2 \lambda_2^n, \text{ com } C_1 \text{ e } C_2 \text{ constantes.} \tag{4.2}$$

Para o caso $\Delta = 0$, temos $\lambda_1 = \lambda_2$ e a solução é dada por:

$$x_n = C_1 \lambda^n + C_2 n \lambda^n, \text{ com } C_1 \quad \text{e } C_2 \text{ constantes.} \tag{4.3}$$

Exemplo 7: Vamos resolver a equação de diferenças $y_{n+2} - 3y_{n+1} + 2y_n = 0$.
Solução: Para a equação acima temos a seguinte equação característica:

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0.$$

Resolvendo a equação acima encontramos discriminante $\Delta = 1$ e raízes iguais a $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = 1$. Portanto a solução da equação de diferenças é:

$$y_n = C_1 1^n + C_2 2^n \to y_n = C_1 + C_2 2^n.$$

Para que os valores de C_1 e C_2 sejam determinados, é necessário conhecer duas condições iniciais. Por exemplo, se a equação apresentar $y_0 = 2$ e $y_1 = 5$, temos:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 2 \\ C_1 + 2C_2 = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 2 - C_2 \\ 2 - C_2 + 2C_2 = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = -1 \\ C_2 = 3 \end{cases}$$

Então,

$$y_n = -1 + 3 \cdot 2^n \rightarrow y_n = 3 \cdot 2^n - 1.$$

Exemplo 8: Resolva a equação de diferenças $x_{n+2} - x_{n+1} - 6x_n = 0$,com $x_0 = 3$ e $x_1 = 7$.
Solução: O primeiro passo é encontrar a equação característica associada a equação de diferenças acima. Então, temos:

$$\lambda^2 - \lambda - 6 = 0.$$

Calculando o discriminante encontramos $\Delta = 25$ e raízes iguais a $\lambda_1 = 3$ e $\lambda_1 = -2$. Logo, a solução geral da equação de diferenças é:

$$y_n = C_1 3^n + C_2(-2)^n$$

.
Utilizando as condições iniciais fornecidas podemos escrever:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 3 \\ 3C_1 - 2C_2 = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 3 - C_2 \\ 3(3 - C_2) - 2C_2 = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = \dfrac{13}{5} \\ C_2 = \dfrac{2}{5}. \end{cases}$$

Então,

$$y_n = \frac{13}{5}3^n + \frac{2}{5}(-2)^n.$$

Roteiro Didático 2 - Probabilidade no Ensino Médio

Objetivos:

- Relembrar o conceito de probabilidade e probabilidade condicional.
- Apresentar o Teorema da Probabilidade Total.

I - Elementos da Probabilidade

Espaço amostral: Chamamos de espaço amostral e indicamos por Ω, o conjunto formado por todos os resultados possíveis de um experimento aleatório.

Evento: Chamamos de evento todo subconjunto de Ω. Em geral, indicamos por uma letra maiúscula do alfabeto.

Eventos disjuntos: Dois eventos A e B são ditos disjuntos (ou mutuamente exclusivos) se $A \cap B = \emptyset$.

Espaço amostral equiprovável: Cada um de seus eventos elementares possui a mesma probabilidade de ocorrência.

Definição 6: *Num espaço amostral equiprovável, a probabilidade de um evento A ocorrer é a razão entre o número de elementos do evento e o número de elementos do espaço amostral.*

$$p(A) = \frac{\#A}{\#\Omega}.$$

No Ensino Médio, é comum essa definição ser apresentada como:

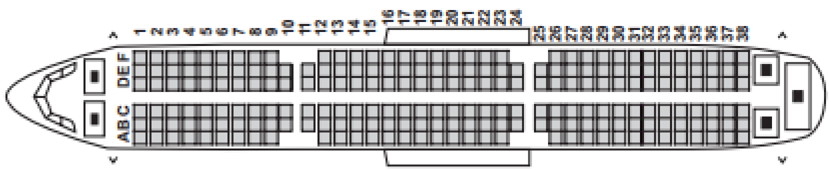
$$\text{probabilidade} = \frac{\text{número de casos favoráveis}}{\text{número de casos possíveis}}.$$

Exemplos 9: (UNESP/2014) Em um condomínio residencial, há 120 casas e 230 terrenos sem edificações. Em um determinado mês, entre as casas, 20% dos proprietários associados a cada casa estão com as taxas de condomínio atrasadas, enquanto que, entre os proprietários associados a cada terreno, esse percentual é de 10%. De posse de todos os boletos individuais de cobrança das taxas em atraso do mês, o administrador do empreendimento escolhe um boleto ao acaso. Qual a probabilidade de que o boleto escolhido seja de um proprietário de terreno sem edificação?
Solução: O número total de boletos em atraso é:

- 20% das 120 residências: $0,2 \cdot 120 = 24$ boletos;
- 10% dos 230 terrenos: $0,1 \cdot 230 = 23$ boletos.

Totalizando assim 47 boletos, dentre os quais 23 são favoráveis ao evento pedido, logo, a probabilidade buscada é $\frac{23}{47} \approx 0,4893$, ou seja, $48,93\%$.

Exemplo 10: (Enem 2013) Uma empresa aérea lança uma promoção de final de semana para um voo comercial. Por esse motivo, o cliente não pode fazer reservas e as poltronas serão sorteadas aleatoriamente. A figura abaixo mostra a posição dos assentos no avião. Por ter pavor de sentar entre duas pessoas, um passageiro decide que só viajará se a chance de pegar uma dessas poltronas for inferior a 30%. Avaliando a figura e as demais informações, qual a decisão a ser tomada pelo passageiro?



Avião com 38 fileiras de poltronas.

Figura 4.1: Exemplo 10 - Posição dos assentos do avião

Solução: O avião é composto por 38 fileiras, onde 4 fileiras são de 4 assentos e 34 fileiras de seis assentos, logo, o total de assentos nesse avião é igual a $4 \cdot 4 + 6 \cdot 34 = 220$. Desse total, há 68 lugares situados entre duas pessoas, portanto, a probabilidade do passageiro viajar entre duas pessoas é dada por $\frac{68}{220} \approx 0,309$, o que equivale a $30,9\%$. Desta maneira, podemos afirmar que o passageiro desiste da viagem, porque a chance de ele ser sorteado com uma poltrona entre duas pessoas é superior a 30%.

Definição 7: *(Probabilidade Condicional) Sejam A e B eventos de um espaço amostral Ω. Indicamos por $p(A \mid B)$ a probabilidade do evento A, dado que o evento B já ocorreu. A probabilidade condicional é calculada como se B fosse o novo espaço amostral "reduzido" dentro do qual queremos calcular a probabilidade de A e podemos representá-la por:*

$$p(A \mid B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}. \tag{4.4}$$

Exemplo 11: Suponhamos que no lançamento de um dado honesto, sabemos que o número sorteado é primo, mas não o conhecemos. Qual é a probabilidade de que o número sorteado seja par?

Solução: Deseja-se calcular a probabilidade condicional de sortear um número par dado que ele é primo, dentre as opções de números primos contidos no dado $\{2, 3, 5\}$ sabemos que somente uma atende a essa condição, portanto a probabilidade procurada é igual a $\frac{1}{3}$.

Exemplo 12: De um baralho de 52 cartas, uma é extraída e observa-se que seu número está entre 4 e 10 (4 e 10 inclusive). Qual a probabilidade de que o número da carta seja 6?

Solução: Devemos calcular a probabilidade do número sorteado ser 6 dado que está entre 4 e 10, temos que $\Omega = \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, contabilizando os 4 naipes do baralho concluímos que $\#\Omega = 28$, portanto a probabilidade de sortear uma carta com número 6 é igual a $\frac{4}{28} = \frac{1}{7}$.

Exemplo 13: Um estudante resolve um teste com questões do tipo verdadeiro-falso. Ele sabe solucionar corretamente 40% das questões. Quando ele responde uma questão cuja solução conhece, o mesmo acerta a questão, e nos outros casos ele decide na cara ou coroa. Se uma questão foi respondida corretamente, qual é a probabilidade de que ele sabia resposta?
Solução: O objetivo do exercício é calcular a probabilidade do estudante saber a resposta, dado que a questão foi respondida corretamente. Trata-se claramente de um caso de probabilidade condicional e os eventos são: S = saber a questão e C = responder corretamente, desta maneira devemos calcular:

$$p(S \mid C) = \frac{p(S \cap C)}{p(C)}.$$

Na primeira etapa, devemos encontrar a probabilidade do aluno saber a questão e acertar. Esse dado foi fornecido pelo enunciado, já que ele sabe 40% das questões e sempre acerta quando sabe, logo, $p(S \cap C) = 0,4$. Por último, devemos saber a probabilidade de o estudante responder corretamente a questão, isto pode ocorrer de duas maneiras; quando ele sabe dar a solução e quando ele acerta no "chute", então:

$$p(C) = 0,4 \cdot 1 + 0,6 \cdot 0,5 = 0,7.$$

Portanto,

$$p(S \mid C) = \frac{0,4}{0,7} = \frac{4}{7}.$$

Uma consequência direta da definição acima é uma expressão para o cálculo da probabilidade da interseção de dois eventos.

$$p(A \cap B) = p(B) \cdot p(A \mid B).$$

Exemplo 14: Em uma urna, são depositadas 20 fichas azuis, 15 amarelas e 12 brancas. Qual a probabilidade de que, sorteadas sequencialmente duas dessas fichas, ambas sejam azuis?
Solução: O número de elementos do espaço amostral é igual a $20+15+12 = 47$. Deseja-se calcular a probabilidade de ambas as fichas serem azuis, então, devemos buscar pela probabilidade da primeira ficha ser azul e em seguida, a probabilidade da segunda ser azul dado que a primeira ficha também foi azul. Pela relação dada acima temos que a probabilidade procurada é $\frac{20}{47} \cdot \frac{19}{46} = \frac{380}{2162} \approx 0,1757$, ou seja, $17,57\%$.

Definição 8: (Eventos independentes) Dois eventos A e B de um mesmo espaço amostral são ditos independentes se quando a probabilidade de que eles ocorram simultaneamente for igual ao produto de suas probabilidades individuais.

$$p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B). \tag{4.5}$$

Exemplo 15: (Enem 2015) No próximo final de semana, um grupo de alunos participará de uma aula de campo. Em dias chuvosos, aulas de campo não podem ser realizadas. A ideia é que essa aula seja no sábado, mas, se estiver chovendo no sábado, a aula será adiada para o domingo. Segundo a meteorologia, a probabilidade de chover no sábado é de 30% e a de chover no domingo é de 25%. Qual a probabilidade de que a aula de campo ocorra no domingo?

Solução: Para que a aula ocorra no domingo dois eventos precisam acontecer ao mesmo tempo: A = chover no sábado e B = não chover no domingo. Como a ocorrência de um não influencia na ocorrência de outro, podemos dizer que A e B são eventos independentes. Logo:

$$p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B).$$

$$p(A \cap B) = 0,3 \cdot (1 - 0,25) = 0,3 \cdot 0,75 = 0,225.$$

Portanto, a probabilidade da aula ocorrer no domingo é de $22,5\%$.

Exemplo 16: (Enem 2017) Uma aluna estuda numa turma de 40 alunos. Em um dia, essa turma foi dividida em três salas, A, B e C, de acordo com a capacidade das salas. Na sala A ficaram 10 alunos, na B, outros 12 alunos e na C, 18 alunos. Será feito um sorteio no qual, primeiro, será sorteada uma sala e, posteriormente, será sorteado um aluno dessa sala. Qual é a probabilidade de aquela aluna específica ser sorteada, sabendo que ela está na sala C?

Solução: Observe que os dois sorteios considerados representam eventos independentes, assim, a probabilidade da sala sorteada ser a sala C é igual a $\frac{1}{3}$ e, sorteando-se a sala C a probabilidade da aluna ser sorteada sabendo que ela pertence a esta sala é $\frac{1}{18}$. Portanto, a probabilidade procurada é igual a $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{18} = \frac{1}{54}$.

Teorema 1: *(Teorema da Probabilidade Total) Seja Ω um espaço amostral, A um evento qualquer de Ω e B_1, B_2, ..., B_n uma partição de Ω. Se A é um evento contido numa* *união de eventos disjuntos, então:*

$$p(A) = p(A \cap B_1) + p(A \cap B_2) + p(A \cap B_3) + ... + p(A \cap B_n). \quad (4.6)$$

Logo,

$$p(A) = p(B_1) \cdot p(A \mid B_1) + p(B_2) \cdot p(A \mid B_2) + p(B_3) \cdot p(A \mid B_3) + ... + p(B_n) \cdot p(A \mid B_n). \quad (4.7)$$

O Teorema 1 pode ser representado pelo seguinte diagrama de Venn:

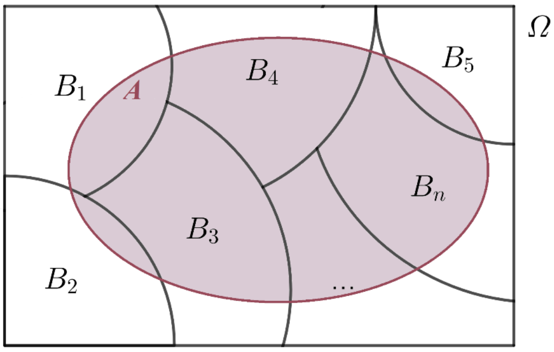


Figura 4.2: Diagrama de Venn do Teorema 1

Exemplo 17: Existem três caixas nomeadas com as iniciais X, Y e Z e cada caixa possui uma determinada quantidade de bolas verdes e azuis. A caixa X contém 3 bolas verdes (V) e 5 bolas azuis (A), a caixa Y contém 3 bolas verdes (V) e 3 azuis (A), a caixa Z contém 5 bolas verdes (V) e 3 bolas azuis (A). Selecionamos uma caixa ao acaso e dela extraímos uma bola. Qual a probabilidade de obtermos uma bola verde?
Solução: Temos que o espaço amostral Ω foi particionado em 3 eventos:

- X: selecionar caixa X.
- Y: selecionar caixa Y.
- Z: selecionar caixa Z.

Seja V o evento "sair uma bola verde". A situação descrita acima pode ser representada pelo seguinte diagrama:

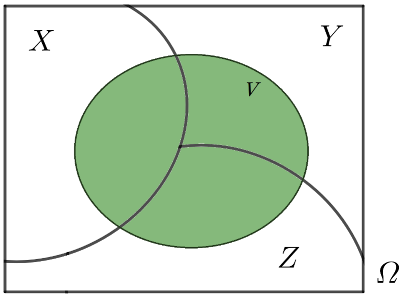


Figura 4.3: Representação por Diagrama de Venn do Exemplo 17.

Pelo teorema da probabilidade total temos que:

$$p(V) = p(X \cap V) + p(Y \cap V) + p(Z \cap V).$$

Analisando o diagrama e os dados do problemas concluímos:

$$\begin{aligned} p(X \cap V) &= \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{8} = \frac{1}{8} \\ p(Y \cap V) &= \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{6} = \frac{1}{6} \\ p(Z \cap V) &= \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{8} = \frac{5}{12}. \end{aligned}$$

Logo,

$$p(V) = \frac{1}{8} + \frac{1}{6} + \frac{5}{12} = \frac{6+8+20}{48} = \frac{34}{48} = \frac{17}{24}.$$

Uma boa opção para resolução de problemas desse tipo é a construção de um diagrama de árvores, sempre que conveniente, é claro. No exemplo acima, o diagrama fica relativamente pequeno e fácil de construir. Observe o desenho abaixo.

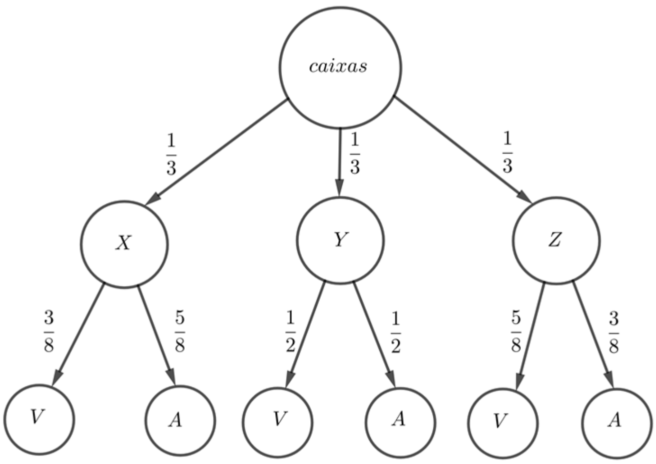


Figura 4.4: Representação do Exemplo 17 por diagrama de árvore.

Portanto, para resolver o problema proposto bastaria “seguir” o caminho com as probabilidades desejadas e somá-las.

Exemplo 18: Uma caixa contém 3 moedas M_1, M_2 e M_3. A moeda M_1 é honesta, a M_2 possui duas caras e a M_3 é viciada de tal modo que caras são duas vezes mais prováveis que coroas. Uma moeda é escolhida ao acaso e lançada.

a) Qual a probabilidade de observarmos face cara?

b) Se o resultado final foi cara, qual a probabilidade de que a moeda lançada tenha sido M_1?

Solução:
a) Analogamente ao exemplo 17, temos a caixa como espaço amostral e M_1, M_2 e M_3 são as partições do espaço amostral. Desejamos conhecer a probabilidade de obter face cara (C), lembrando que ela pode ser obtida por qualquer uma das três moedas. Então, pelo teorema da probabilidade total podemos escrever:

$$\begin{aligned} p(C) &= p(M_1 \cap C) + p(M_2 \cap C) + p(M_3 \cap C) \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} + \frac{2}{9} = \frac{13}{18}. \end{aligned}$$

b) Em outras palavras, queremos calcular a probabilidade da moeda lançada ter sido M_1 dado que o resultado obtido foi cara. Para isso, utilizamos a fórmula da probabilidade condicional:

$$p(M_1 \mid C) = \frac{p(M_1 \cap C)}{p(C)}.$$

Ambos os valores já foram calculados no item anterior, logo:

$$p(M_1 \mid C) = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{13}{18}} = \frac{3}{13}.$$

Roteiro Didático 3 - Problemas de aplicação

Objetivos:

- Modelar e resolver problemas envolvendo probabilidade e equações de diferenças de primeira ordem.
- Apresentar o problema principal "A Ruína do Jogador".
- Obter uma equação de diferenças de segunda ordem para o problema "A Ruína do Jogador" e encontrar sua solução.
- Realizar em conjunto com os alunos uma análise dos resultados obtidos a partir do modelo encontrado.
- Resolver os problemas propostos.

Nesta atividade, além de modelar, resolver e analisar os resultados do problema principal "A Ruína do Jogador", outros problemas foram escolhidos a fim de complementar o estudo sobre equações de diferenças e probabilidade. O **Problema 1** pode ser encontrado em MORGADO [15], o **Problema 2** foi retirado de GOMES [11], os **Problemas 3 e 4** fazem parte da obra de ELAYDI [8] e por fim, os **Problemas 5 e 6** foram adaptados de CARGAL [5].

Problema 1: Sheila e Helena disputam uma série de partidas. Cada partida é iniciada por quem venceu a partida anterior. Em cada partida, quem iniciou tem probabilidade $\frac{7}{10}$ de ganhá-la e probabilidade $\frac{3}{10}$ de perdê-la. Se Helena iniciou a primeira partida, qual a probabilidade de Sheila ganhar a enésima partida?

Solução: Vamos representar por p_n a probabilidade de Sheila ganhar uma partida n, consequentemente a probabilidade de perder é o evento complementar $1 - p_n$.

Analisando os dados do problema, existem duas situações possíveis para Sheila ganhar a enésima partida:

- Sheila pode ganhar a partida anterior, ou seja, a partida $n-1$ com probabilidade p_{n-1} e ganhar a enésima partida com probabilidade condicional de $\frac{7}{10}$;
- Sheila pode perder a partida anterior com probabilidade $1-p_{n-1}$ e ganhar a enésima partida com probabilidade condicional de $\frac{3}{10}$.

Desta forma, a probabilidade de vitória da partida será dada por:

$$p_n = \frac{7}{10} \cdot p_{n-1} + \frac{3}{10} \cdot (1 - p_{n-1}).$$

Reorganizando a equação, obtemos:

$$p_n = \frac{2}{5} p_{n-1} + \frac{3}{10}.$$

Trata-se de uma equação de diferenças linear de primeira ordem com coeficientes constantes, onde a probabilidade de Sheila ganhar a primeira partida é $\frac{3}{10}$, já que Helena foi quem a iniciou, então temos a condição inicial necessária $p_1 = \frac{3}{10}$. A solução da equação de diferenças é dada pela fórmula:

$$p_n = a^n x_0 + b \cdot \left(\frac{1 - a^n}{1 - a} \right).$$

Substituindo os valores, obtemos:

$$p_n = \left(\frac{2}{5}\right)^n \cdot \frac{3}{10} + \frac{3}{10} \cdot \left[\frac{1 - \left(\frac{2}{5}\right)^n}{1 - \frac{2}{5}} \right] = \left(\frac{2}{5}\right)^n \cdot \frac{3}{10} + \frac{3}{10} \cdot \left[\frac{5}{3} - \left(\frac{2}{5}\right)^n \cdot \frac{5}{3} \right]$$

$$p_n = \left(\frac{2}{5}\right)^n \cdot \frac{3}{10} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^n$$

$$p_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^n.$$

Problema 2: Consideremos uma sucessão de infinitas urnas, a primeira com uma bola preta e 5 brancas e cada uma das seguintes com duas pretas e 3 brancas. Um jogador retira uma bola da primeira urna e deposita na segunda urna, em seguida retira da segunda urna e transfere-a para a terceira e assim sucessivamente. Qual a probabilidade de que seja preta a bola retirada na enésima urna?

Solução: Seja y_n a probabilidade da bola retirada na enésima urna ser preta. Então, a probabilidade da bola extraída ser branca é $1 - y_n$. De acordo com os dados do problema, sabemos que a probabilidade de tirar bola preta na primeira urna é $y_0 = \frac{1}{6}$. Para as urnas seguintes, é possível obter uma bola preta a partir de duas situações:

- Tirar bola preta na urna de ordem n com probabilidade igual a y_n e bola preta na urna de ordem $n+1$, logo, $y_{n+1} = \dfrac{1}{2}y_n$.

- Tirar bola branca na urna de ordem n com probabilidade $1 - y_n$ e bola preta na urna de ordem $n+1$, logo, $y_{n+1} = \dfrac{1}{3} \cdot (1 - y_n)$.

A partir dos dados acima podemos escrever a seguinte equação de diferenças:

$$y_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot y_n + \frac{1}{3} \cdot (1 - y_n)$$

$$y_{n+1} = \frac{1}{6}y_n + \frac{1}{3}.$$

Aplicando a fórmula para resolução de equações de diferenças obtemos:

$$y_n = \left(\frac{1}{6}\right)^n \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{3} \cdot \left[\frac{1 - \left(\frac{1}{6}\right)^n}{1 - \frac{1}{6}}\right] = \left(\frac{1}{6}\right)^n \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{3} \cdot \left[\frac{6}{5} - \left(\frac{1}{6}\right)^n \cdot \frac{6}{5}\right]$$

$$y_n = \left(\frac{1}{6}\right)^n \cdot \frac{1}{6} + \frac{2}{5} - \frac{2}{5} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^n$$

$$y_n = \frac{2}{5} - \frac{7}{30} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^n.$$

Problema 3: (A Ruína do Jogador) Consideremos um jogo em que duas pessoas estão envolvidas. Um jogador A joga uma sequência de jogos contra um adversário B em que a probabilidade do jogador A ganhar $R\$1,00$ em qualquer jogo é um valor conhecido q, e a probabilidade de ele perder $R\$1,00$ é $1-q$, onde $0 \leqslant q \leqslant 1$. Suponha que o jogador A possua um capital de n reais e B de k reais, de maneira que $n + k = N$. O jogador deixa o jogo se perde todo o seu dinheiro ou se alcança seu objetivo de adquirir N reais. O jogador que ficar sem dinheiro primeiro, dizemos que ele está arruinado.

a) Qual a probabilidade do jogador A ser arruinado? Encontre uma expressão que descreva esse evento.

b) A partir da expressão encontrada no item (a), desenvolva uma fórmula que descreva a ruína do jogador caso a probabilidade de ruína seja $q = \dfrac{1}{2}$.

Solução: Este problema foi resolvido no capítulo 3.

Problema 4: Suponhamos que a probabilidade de um jogador ganhar qualquer aposta em um determinado jogo seja $0,49$. Se um jogador começar com $R\$50,00$ e desistir quando tiver $R\$100,00$, qual é a probabilidade de ruína desse jogador, ou seja, perder todo o seu dinheiro:

a) Se o jogador fizer apostas de $R\$1,00$?

b) Se o jogador fizer apostas de $R\$5,00$?

c) Se o jogador fizer apostas de $R\$10,00$?

d) Se o jogador fizer apostas de $R\$25,00$?

e) Se o jogador fizer apostas de $R\$50,00$?

Observação: O objetivo nesse problema é que os alunos construam o modelo analogamente como foi feito no Problema 3, entretanto, para a resolução desse problema utilizaremos a solução geral já obtida previamente.

Solução: Sabemos que a probabilidade de ruína quando $q \neq \frac{1}{2}$ é dada por:

$$p_n = \frac{\left(\frac{1-q}{q}\right)^n - \left(\frac{1-q}{q}\right)^N}{1 - \left(\frac{1-q}{q}\right)^N}.$$

Logo, obtemos os seguintes resultados de p_n:

a) $p_{50} = \dfrac{\left(\frac{51}{49}\right)^{50} - \left(\frac{51}{49}\right)^{100}}{1 - \left(\frac{51}{49}\right)^{100}} = 0,88.$

b) $p_{10} = \dfrac{\left(\frac{51}{49}\right)^{10} - \left(\frac{51}{49}\right)^{20}}{1 - \left(\frac{51}{49}\right)^{20}} = 0,598.$

c) $p_{5} = \dfrac{\left(\frac{51}{49}\right)^{5} - \left(\frac{51}{49}\right)^{10}}{1 - \left(\frac{51}{49}\right)^{10}} = 0,549.$

d) $p_2 = \dfrac{\left(\dfrac{51}{49}\right)^2 - \left(\dfrac{51}{49}\right)^4}{1 - \left(\dfrac{51}{49}\right)^4} = 0,519.$

e) Com apostas de $R\$50,00$ só há duas possibilidades para para o jogador: realizar a aposta e perder todo seu dinheiro em uma única partida ou ganhar a partida e alcançar o valor de $R\$100,00$. Portanto, a probabilidade de ruína é igual a 51%

Problema 5: Temos $R\$5,00$ de um total de $R\$15,00$. Se lançarmos uma moeda e a face voltada pra cima for cara ganhamos $R\$1,00$. Se a moeda é tendenciosa a produzir caras 55% das vezes, qual a probabilidade de terminarmos o jogo com $R\$15,00$?

Solução: Temos que a probabilidade de ganhar $R\$1,00$ é um valor $q = 0,55$, onde $n = 5$ e $N = 15$, portanto, utilizando o modelo obtido em (3.4), obtemos:

$$p_5 = \frac{\left(\dfrac{45}{55}\right)^5 - \left(\dfrac{45}{55}\right)^{15}}{1 - \left(\dfrac{45}{55}\right)^{15}} = \frac{\left(\dfrac{9}{11}\right)^5 - \left(\dfrac{9}{11}\right)^{15}}{1 - \left(\dfrac{9}{11}\right)^{15}} 0,334.$$

Então, a probabilidade do jogador ser arruinado é aproximadamente 33,4%, portanto, a probabilidade terminar o jogo com $R\$15,00$ é 66,6%.

Problema 6: Um bêbado está caminhando por uma passarela estreita e planeja chegar até o seu escritório. Em geral, ele avança 3 passos para frente para cada 4 passos para trás. Se seguir em frente a partir do ponto em que se encontra, ele precisará de 5 passos para chegar até o seu escritório, no prédio da administração da faculdade. Na direção contrária, ele está a 10 passos do escritório da polícia do campus. Qual a probabilidade dele chegar ao seu destino?

Solução: Devemos associar os dados desse problema ao modelo da Ruína do Jogador construído anteriormente, observe que o bêbado encontra-se em um ponto situado a 5 passos de seu escritório e a 10 passos do escritório da polícia, então, podemos dizer que ele já possui 10 passos de vantagem para chegar ao seu destino, logo, temos que $n = 10$ e $N = 15$. Nesse problema, devemos ter a noção que ganhar ou "sair vitorioso"é caminhar para frente em direção ao escritório, portanto de um total de 7 passos, temos $q = 3$ e

$1 - q = 4$, logo, a probabilidade do bêbado não atingir seu objetivo é dada por:

$$p_{10} = \frac{\left(\frac{4}{3}\right)^{10} - \left(\frac{4}{3}\right)^{15}}{1 - \left(\frac{4}{3}\right)^{15}} = 0,773.$$

Portanto, a probabilidade do bêbado chegar até seu escritório é $1 - 0,773 = 0,227 = 22,7\%$.

4.2 Aplicação dos Roteiros Didáticos

As atividades foram aplicadas para um grupo 5 alunos do 2º ano do Ensino Médio de uma escola estadual da cidade de Formiga, Minas Gerais, ao longo dos relatos abaixo eles serão identificados como aluno 1, 2, 3, 4 e 5. Optou-se por trabalhar com estudantes do 2º ano, pois parte dos conteúdos necessários para compreensão do problema principal já haviam sido discutidos em algum momento no decorrer do ano letivo, como por exemplo, os conteúdos de sequências e probabilidade. As aulas ocorreram nos dias 19, 20 e 21 de dezembro, a primeira e a segunda aula tiveram duração aproximada de 2 horas e a terceira de 3 horas.

Aula 1 - 19/12

A primeira aula iniciou-se com a revisão do conceito de sequências como um conjunto ordenado guiado por uma regra, como por exemplo, a sequências dos números ímpares ou a sequência dos múltiplos de 5. Em seguida discutimos a definição de sequência de maneira formal, como uma função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ onde a relação de dependência se estabelece entre o termo a_n e sua posição n na sequência a partir da lei de formação ou fórmula do termo geral. Voltamos às sequências exemplificadas anteriormente e os alunos encontraram o termo geral de cada uma das sequências. Finalizamos a exemplificação relembrando o conteúdo de progressões aritmética e geométrica.

Em seguida, discutimos o conceito de relação de recorrência, onde os alunos puderam constatar que as sequências discutidas anteriormente poderiam ser representadas por outra regra, onde a nova equação estabelecia uma dependência entre um determinado termo da sequência e seus termos anteriores. Inicialmente, os exemplos foram apresentados sem as condições iniciais justamente para compreensão de sua importância. Foi solicitado que os alunos escrevessem alguns termos daquelas sequências, na ausência de termos como a_0 e a_1, o aluno 3 e o aluno 5 consideraram $a_0 = 0$ e $a_1 = 1$, fazendo alusão ao conjunto dos números naturais, os outros perceberam que não era possível determinar a sequência apenas com a equação. Por fim, foram dadas as condições iniciais e eles conseguiram escrever as sequências, chegando à conclusão que uma relação de recorrência não é definida somente por uma equação de recorrência, mas também por suas respectivas condições iniciais.

Na última parte da primeira aula definiu-se o conteúdo principal deste trabalho: equações de diferenças. Foi trabalhada a definição e alguns conceitos importantes como de ordem e homogeneidade. Eles puderam notar que o número de condições iniciais estava na verdade ligado à ordem da equação de diferenças. Começamos trabalhando as equações de diferenças de primeira ordem, com seu formato geral e também a solução geral para equações de diferenças de primeira ordem. Os alunos não se identificaram com a solução geral apresentada, manifestaram muitas dúvidas com relação àquela simbologia e acharam demasiadamente complexa. Foi possível constatar que nenhum deles conhecia aquela simbologia e o que elas representavam, ou seja, as operações de somatório e produtório era para eles algo completamente desconhecido.

Diante do impasse encontrado e para que nosso objetivo fosse alcançado a solução geral foi deixada de lado, sendo necessário introduzir as soluções dos casos particulares de equações de diferenças de primeira ordem. As fórmulas foram escritas no quadro negro e a partir de comparações com o conteúdo de equação polinomial do 1º grau, os alunos foram capazes de compreender e identificar os coeficientes da equação, classificá-las e assim, utilizar o método de solução com êxito.

Após a resolução de dois exemplos, o aluno 3 levantou a seguinte questão: "Não entendi, usamos uma fórmula para resolver a equação e chegamos em outra equação. Isso é a resposta? Parece que não faz muito sentido, a resposta não é um número?", a resposta à sua dúvida partiu de um próprio colega que disse: "A solução da equação é tipo o termo geral que vimos nas sequências de números, o valor que vai aparecer depende de qual termo a gente quer encontrar, qual posição a gente quer. Para aparecer um número nesse exercício temos que trocar o n por algum valor". Para fechar a resposta do aluno 1, reforcei que a solução da equação de diferenças sempre será uma função que depende exclusivamente de n, aproveitamos a dúvida para utilizar o modelo de capitalização encontrado no exemplo 3 com dados numéricos, os alunos identificaram qual tipo de equação se tratava e obtiveram sua solução. Em seguida, fizemos a substituição do valor $M_0 = 500$ com diferentes valores para n, para que eles pudessem perceber a alteração dos valores ao longo de várias iterações. Desta maneira podemos consolidar a ideia de que uma equação de diferenças representa a evolução de algum fenômeno ao longo do tempo n.

Por fim, chegamos às equações de diferenças de segunda ordem, onde foi dada primeiramente sua definição e forma geral. Neste momento, eles já foram capazes de responder perguntas como: "Porque esse tipo de equação é dito de segunda ordem?" ou "Quantas condições iniciais são necessárias para resolvê-la?", baseados nos conhecimentos passados anteriormente. Foi discutido que a partir daquela equação de diferenças é possível extrair uma equação polinomial do 2º grau, ao qual damos o nome de equação característica e funciona como uma equação auxiliar para obtenção da solução geral. Então, mostrei como transformar a equação de diferenças numa equação polinomial do 2º grau, em seguida mostrei que a solução geral dependia diretamente das raízes da equação característica e optei por apresentar a solução geral apenas para os casos de $\Delta = 0$ e $\Delta > 0$, que seriam os casos utilizados para a resolução dos problemas.

A primeira questão que foi levantada ao ser apresentada a solução geral foi o que significava os termos C_1 e C_2. Preferi não responder e deixar que eles mesmos tirassem suas conclusões durante a resolução do Exemplo 7. Os alunos conseguiram escrever a equação característica e resolvê-la sem nenhum problema chegando à solução geral, mas ainda dependia dos valores de C_1 e C_2. O aluno 3 disse: "Nesse caso mesmo substituindo um valor de n não dá pra chegar em um resultado numérico", os colegas concordaram com a sua fala, então deixei-os refletindo um pouco sobre o que estaria errado e ainda os alertei sobre a pergunta que havia feito a eles minutos antes. Foi então que o aluno 1 disse: "Você ainda não deu nenhum valor inicial e precisamos de dois números para resolver! C_1 e C_2 são os valores iniciais?", após essa indagação foram informadas as condições iniciais e qual era o seu papel na resolução da equação. A partir disso os alunos foram orientados a obter o sistema de equações e na sequência a solução particular da equação de diferenças de segunda ordem.

Aula 2 - 20/12

A segunda aula foi dedicada à discussão dos temas envolvendo probabilidade. Iniciamos os trabalhos relembrando alguns termos importantes do estudo de probabilidade, tais como experimento aleatório, espaço amostral, eventos disjuntos, entre outros conceitos que formam a base da teoria de probabilidade. Em seguida, relembramos a definição clássica de probabilidade e resolvemos alguns exemplos. Esta primeira parte da aula transcorreu de maneira bem natural e tranquila, pois os alunos haviam trabalhado este conteúdo no início do ano letivo e conseguiram aplicar o conhecimento adquirido sem nenhuma intercorrência.

A noção de probabilidade condicional foi introduzida a partir dos exemplos 11 e 12. Os exemplos escolhidos para esse primeiro momento atenderam aos objetivos de serem simples e de fácil entendimento, para que os alunos pudessem compreender o principal aspecto da probabilidade condicional que é a redução do espaço amostral a partir da condição dada. Com isso, foi possível construirmos juntos o conceito de probabilidade condicional juntamente com a fórmula. Na sequência, a partir da igualdade apresentada para probabilidade condicional pode-se discutir uma consequência dessa fórmula, que é a relação sobre a probabilidade da interseção de dois eventos, tanto em eventos dependentes como independentes. Os alunos se recordavam de resolver exercícios mais simples como os exemplos 11 e 12 e situações de sorteio de objetos com ou sem reposição, porém em nenhum momento o conteúdo de probabilidade condicional foi trabalhado a partir de fórmulas.

A última etapa ficou destinada à compreensão do Teorema da Probabilidade Total. A definição foi construída tomando como referência a Figura 4.2, o teorema consiste em calcular a probabilidade de um evento A sendo Ω o espaço amostral de um experimento aleatório e B_1, B_2, ..., B_n eventos disjuntos que formam o conjunto das partes do espaço amostral. É importante perceber que não é possível calcular a probabilidade de A por meio de um único cálculo, pois o evento desejado é formado pela interseção de A com cada parte B_1, B_2, ..., B_n. Não foi difícil os alunos compreenderem de maneira teórica que $A = (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup ... \cup (A \cap B_n)$.

Aula 3 - 21/12

A terceira e última aula ficou destinada para resolução de alguns problemas de aplicação, inclusive do problema principal deste trabalho "A ruína do jogador". Os dois primeiros problemas propostos são situações envolvendo o tema probabilidade e que quando modelados recaem em equações de diferenças de primeira ordem. A princípio, esses problemas não compunham o roteiro didático, eles foram acrescentados a fim de alcançar alguns objetivos específicos. Em primeiro lugar, promover o entendimento com relação à modelagem de um problema matemático, principalmente a parte referente ao conteúdo do teorema da probabilidade total introduzido na aula anterior, pois foi nessa etapa que os alunos demonstraram menor domínio e em segundo lugar, gerar maior confiabilidade na resolução de equações de diferenças.

No **Problema 1**, sugeri aos alunos que fizessem um diagrama de Venn ou um diagrama de árvore semelhante aos utilizados do exemplo 17, descrevendo as possibilidades existentes para Sheila ganhar a enésima partida. Os alunos conseguiram compreender que a probabilidade de Sheila ganhar a enésima partida iria depender do que acontecesse na partida anterior, já que quem ganha uma partida tem a chance de iniciar a próxima partida e isso gera uma vantagem sobre seu oponente. Inicialmente, eles ficaram na dúvida de como representar as probabilidades ainda desconhecidas. Então, sugeri aos alunos que utilizassem a nomenclatura P_n para a probabilidade de vencer uma partida n, desta maneira a partida de ordem $n-1$ teria probabilidade P_{n-1}, em seguida eles já concluíram que a probabilidade de perder uma partida qualquer n seria o evento complementar.

Durante todo o tempo, busquei induzir o raciocínio dos alunos fazendo alguns questionamentos tais como "O que acontece com a chance de Sheila de ganhar a partida n se ela ganhar também a partida anterior $n-1$?" e "E se ela perder a partida $n-1$?". Desta forma, foi possível chegar à relação $p_n = \dfrac{7}{10} \cdot p_{n-1} + \dfrac{3}{10} \cdot (1-p_{n-1})$ e com os devidos ajustes obter o modelo $p_n = \dfrac{2}{5}p_{n-1} + \dfrac{3}{10}$. Os alunos notaram que se tratava de uma equação de diferenças de primeira ordem e logo consultaram suas anotações buscando pelo método de solução, foi somente ao ver a fórmula de solução geral que eles se lembraram que deveriam, antes de mais nada, determinar a condição inicial necessária para resolução do problema. Os alunos retornaram ao enunciado do exercício, porém não conseguiram chegar a nenhuma conclusão sobre a condição inicial. Lembrei-os que a informação procurada era a probabilidade de Sheila ganhar a primeira partida, foi então que o aluno 1 percebeu que essa informação estava oculta na frase "Helena iniciou a primeira partida", como quem inicia a partida tem probabilidade de vitória igual a $\dfrac{7}{10}$, então restaria para Sheila a probabilidade $p_1 = \dfrac{3}{10}$ de ganhar a partida. Assim, os alunos puderam aplicar o processo de resolução e chegar à solução geral do problema.

Como o **Problema 2** tinha características bem semelhantes ao primeiro problema, sua solução transcorreu de maneira bem tranquila e autônoma. Os alunos já sabiam que chegariam a uma equação de diferenças e que era necessário encontrar uma condição inicial para o problema. Foram estipulados alguns minutos para resolução e logo após o modelo foi construído e resolvido no quadro. Sugeri a dois alunos que concluíram a tarefa antes dos demais que utilizassem o tempo ocioso para simular alguns valores para n no modelo do problema 1 e depois compartilhassem com os colegas. Os alunos apresentaram os resultados obtidos para valores de n cada vez maiores num intervalo de dois em dois e concluíram que quanto maior o valor de n, ou seja, quanto maior o número de partidas disputadas, mais a probabilidade de Sheila ganhar a enésima partida aproximava-se de 50%.

Chegando ao problema principal abordado neste trabalho, o **Problema 3**, a ideia inicial era apresentar o problema e auxiliar na sua interpretação, tendo como objetivos principais obter o seu modelo e consequentemente sua solução e por último realizar uma análise dos resultados. De tudo que já havíamos trabalhado até aquele momento, era nítido que a maior dificuldade dos alunos estava em equacionar o problema em estudo, ou seja, generalizar uma dada situação a partir de operações matemáticas e variáveis. Tal fato colocou em dúvida se o processo de modelagem do Problema 3 seria concluída pelos estudantes.

Inicialmente foi feita a leitura e a interpretação do problema "A Ruína do Jogador" a partir de simulações entre os próprios alunos, para que fosse compreendido qual era a logística do jogo. Em seguida, relembramos o formato geral de uma equação de diferenças de segunda ordem e suas possíveis soluções, essas informações foram deixadas no quadro para consultas posteriores. Assim, os alunos iniciaram a resolução do problema principal, cientes de que encontrariam uma equação de diferença de segunda ordem como modelo do problema. Começamos então a explorar as possibilidades para o jogador A ser arruinado, neste ponto, os alunos já estavam um pouco mais familiarizados com o Teorema da Probabilidade Total, porém não abriam mão de construir um diagrama para organizar melhor as ideias.

Os alunos nomearam por G o evento "ganhar uma partida", PD o evento "perder uma partida" e de A o jogador ser arruinado. Solicitei logo no início que as condições iniciais fossem determinadas, os alunos tiveram dificuldade em encontrá-las, pois nesse caso elas não estavam explícitas no enunciado do exercício. Sugeri então que eles pensassem nos valores mais triviais para n, ou seja, se o jogador entrar no jogo sem nenhum dinheiro ou se ele entrar no jogo com N reais, com estas mediações os alunos conseguiram encontrar a condições iniciais. Desta forma, coletamos os seguintes dados:

- $p(G) = q$,
- $p(PD) = 1 - q$,
- $p(A) = p_n$, onde n é valor em reais que o jogador possui,
- $p_0 = 0$,
- $P_N = 1$.

O diagrama foi desenhado no quadro e pedi que os alunos aplicassem o Teorema da Probabilidade Total, imediatamente obtivemos a igualdade $p(A) = p(A \cap G) + p(A \cap PD)$, consultando a fórmula para interseção de dois eventos, escrevemos: $p(A) = p(G) \cdot p(A \mid G) + p(PD) \cdot p(A \mid PD)$. Após as devidas substituições chegamos a uma expressão para P_n, pedi então que os alunos organizassem a expressão na ordem decrescente dos índices e a comparassem com o formato geral de uma equação de diferença de segunda ordem, eles perceberam que ainda não havíamos chegado ao modelo correto. Após mais algumas alterações, conseguimos obter o modelo para o problema.

Assim como já foi suposto no início da aplicação deste problema, os alunos estavam extremamente confusos e inseguros ao lidar com fórmulas e expressões que não possuíam um valor numérico concreto, apesar de ter sido ressaltado a importância de encontrarmos uma expressão genérica que nos auxiliasse na análise do problema. Então, decidi trabalhar paralelamente a modelagem do problema com valores numéricos e valores genéricos, para isso foram utilizados os dados do enunciado do **Problema 4**, com $q = 0,49$, $1 - q = 0,51$ e $N = 100$. Desta forma, o quadro ficou dividido em duas partes e partimos simultaneamente das equações características $\lambda^2 - \frac{1}{q}\lambda + \frac{(1-q)}{q} = 0$ e $\lambda^2 - 0,49\lambda + 0,51 = 0$. Assim que os alunos chegavam aos resultados utilizando dados numéricos, como por exemplo, ao valor do discriminante e das raízes, a resolução do problema principal era desenvolvida no quadro com o auxílio de todos, com isso, foi possível conferir se o resultado obtido pela expressão geral levava ao mesmo resultado obtido por eles. Esse fato causou grande admiração, pois os alunos puderam constatar que a resolução geral realmente era eficaz e retornava os mesmos resultados. Procedendo dessa maneira, conseguimos obter a solução para o item (a) do problema 3, que é a solução geral para o problema da Ruína do Jogador e ainda obter uma solução particular para o **Problema 4**.

Com a solução geral definida, a resolução do item (b) ocorreu de maneira tranquila, o objetivo era encontrar uma expressão que representasse a ruína do jogador para o caso de um jogo "justo" em que a probabilidade de vitória seja de $\frac{1}{2}$. Os alunos começaram o processo encontrando o valor do discriminante e das raízes, com $\Delta = 0$ e $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, os próprios alunos tomaram a iniciativa de analisar se as condições iniciais poderiam ser as mesmas. O aluno 4 levantou a seguinte questão: "Já que encontramos uma fórmula que é solução do exercício, porque precisa calcular tudo de novo, não é só substituir na fórmula?", neste momento, sugeri aos alunos que fizessem esta substituição sugerida pelo colega, todos chegaram ao resultado zero, o que não faz sentido algum, logo, a solução encontrada não funciona para $q = \frac{1}{2}$. Assim que foi dada continuidade na solução do problema os alunos compreenderam o porquê desse fato ocorrer, como mostrado na aula anterior, as equações de diferenças de segunda ordem possuem uma solução diferente para o caso $\Delta = 0$, logo, o modelo anterior realmente não poderia ser usado. Os alunos não demonstraram dificuldades em obter a solução geral para o caso $q = \frac{1}{2}$, a partir da fórmula geral e das condições iniciais chegaram ao resultado pretendido.

Com o modelo da Ruína do Jogador concluído, sugeri aos alunos uma atividade de experimentação para analisar o comportamento da solução obtida. Trabalhamos primeiramente o caso para $q = \frac{1}{2}$, que pode ser, por exemplo, um jogo definido pelo lançamento de uma moeda honesta. Foi dada liberdade aos alunos para escolherem os valores de n e N. O quadro abaixo foi construído pelo o aluno 1 e debatido pela turma.

n	N	p_n
5	10	$0,5$
10	20	$0,5$
10	50	$0,8$
15	50	$0,7$
20	50	$0,6$
20	60	$0,67$
100	150	$0,33$
80	100	$0,2$

Tabela 4.1: Resultados obtidos pelo aluno 1 para o caso $q = \frac{1}{2}$.

Para os valores utilizados na primeira e segunda linha, onde os dois jogadores apostam o mesmo valor, o resultado obtido foi o esperado, ou seja, a chance de ruína é igual para os dois jogadores. O aluno 1 relatou que escolheu n e N de maneira em que as apostas tivessem valores próximos e outros em que o valores apostados fossem um pouco mais distantes. O aluno 1 acreditava que os resultados para a probabilidade de ruína ultrapassariam um pouco o valor de 50%, porém não imaginava que a diferença seria tão grande, já que se tratava aparentemente de um jogo "justo".

Na sequência, pedi aos alunos que explorassem o modelo para $q \neq \frac{1}{2}$. Supondo que a probabilidade do jogador ganhar a partida seja $q = 0,45$, os alunos calcularam a probabilidade para os seguintes valores de n e N exibidos na tabela:

n	N	p_n
5	10	$0,7317$
10	20	$0,8814$
20	40	$0,9822$
20	60	$0,9996$
40	60	$0,9819$
40	100	$0,9999$
60	150	$0,999999... \approx 1$
120	150	$0,9975$

Tabela 4.2: Resultados obtidos para p_n para diferentes valores de n e N, com $q < 0,5$.

Nos três primeiros resultados obtidos, os alunos observaram que mesmo que os dois jogadores iniciem com apostas de mesmo valor, a probabilidade de ruína não permanece constante como na experiência anterior. O que mais chamou atenção da turma nesse caso foi que com aumento das apostas de uma iteração para outra relativamente pequeno, mantem-se a igualdade das apostas entre os dois jogadores. Porém a probabilidade de ruína evoluiu rapidamente em grandes saltos, antes dos cálculos eles acreditavam que essa diferença seria mínima. Os alunos também observaram que quanto maior o valor pretendido N, mais a probabilidade de ruína se aproximava de 1, independente se o valor apostado era menor ou maior que o do seu adversário.

A fim de compreender um pouco mais sobre os resultados gerados pelo modelo de solução da Ruína do Jogador, passamos para a resolução do problema 4, cuja solução já havia sido encontrada pelos próprios alunos. O primeiro passo foi responder ao item (a), eles concluíram que se o apostador iniciar o jogo com $R\$50,00$ e fizer apostas de $R\$1,00$ a probabilidade de ruína é de $88,08\%$. Nos itens seguintes tinham por objetivo investigar como os valores das apostas podiam influenciar na probabilidade procurada, a dúvida naquele momento foi: como utilizar esses valores das apostas se o modelo foi baseado em apostas de $R\$1,00$? Foi então que sugeri que eles alterassem o valor para 1 unidade, por exemplo, no item (b) uma unidade poderia ser representada por $R\$5,00$, desta maneira, $n = 10$ e $N = 20$. A resposta para o último caso é trivial, já que com uma única partida há somente duas situações possíveis: perder todo seu dinheiro ou conquistar o valor N, logo, a probabilidade de ruína procurada é igual a 51%.Apresentando os resultados na forma de tabela para falicitar a comparação, temos:

Aposta	n	N	p_n
$R\$1,00$	50	100	$0,8808$
$R\$5,00$	10	20	$0,5987$
$R\$10,00$	5	10	$0,5498$
$R\$25,00$	2	4	$0,5199$

Tabela 4.3: Resultados obtidos a partir da variação do valor das apostas.

A turma simplesmente se surpreendeu com os resultados obtidos, principalmente na diminuição considerável da probabilidade ocorrida da primeira para a segunda linha, um pequeno aumento no valor das apostas levou a uma grande redução no risco do jogador ser arruinado. Esses resultados continuaram a diminuir até chegar ao seu limite mínimo de 51%. Começaram então a conversar sobre qual seria a aposta ideal neste caso, todos concordaram que apostas de $R\$1,00$ não eram vantajosas, elas podem estender o jogo por um número maior de partidas, porém levam a uma maior probabilidade de ruína. Alguns defenderam que se tivessem que decidir optariam pela aposta de $R\$10,00$, outros pela de $R\$5,00$, levantaram a discussão de que não valeria a pena apostar $R\$25,00$, já que a probabilidade de ruína não teria grande redução. A conversa dos alunos reflete bem o que ocorre no mundo dos jogos, as pessoas tendem a apostar pequenas quantidades pensando que assim elas possuem um controle maior sobre seu dinheiro e que a chance de ficar sem dinheiro é menor, além do mais isso o mantém jogando por mais tempo.

O **Problema 5** e o **Problema 6** são aplicações do modelo em outros contextos, além de trabalhar com a probabilidade complementar também foi possível avaliar a capacidade dos alunos de interpretção e de fazer as devidas conexões com o modelo do problema "A Ruína do Jogador". A compreensão e resolução do **Problema 5** foi muito tranquila, os alunos comentaram que depois de obter a "fórmula" a solução do problema fica bem mais fácil. Antes mesmo de aplicar a fórmula os alunos já esperavam obter um resultado considerável para probabilidade de sair vitorioso do jogo, considerando que o valor de q era superior a $0,5$. Esse fato demonstra a importância da análise das soluções feita anteriormente, atestando que os alunos conseguiram compreender o comportamento do modelo obtido a ponto de conjecturar possíveis resultados e fazer uma análise crítica dos mesmos. Isso ficou evidente no momento os alunos discordaram do resultado encontrado, que foi igual a $33,4\%$, mas rapidamente se deram conta que àquele valor se tratava da probalidade de ruína e que bastava calcular a probabilidade complementar.

Para finalizar a aula, foi apresentado o **Problema 6**. Os alunos se sentiram desafiados ao ver que o problema trazia uma situação um pouco diferente das anteriores. Então, decidi apenas orientá-los e induzi-los a refletir, por exemplo, sobre o que significava sair vitorioso naquela situação, qual a vantagem o bêbado já possuia para atingir seu objetivo, quais eram suas chances de vitória, para que dessa forma os alunos conseguissem estabelecer quais eram as variáveis q, n, e N. Novamente eles observaram que o valor obtido em seus cálculos ainda não era o resultado procurado e sim, a probabilidade complementar.

Considerações Finais

A sugestão de introduzir o tema Equação de Diferenças no Ensino Médio e levar para sala de aula a modelagem e resolução do problema "A Ruína do Jogador" gerou um grande receio. Acreditava-se em um primeiro momento, que o conteúdo era muito complexo e que não era condizente com a realidade dos alunos, chegando a supor que a aplicação de tal problema seria impossível e que os alunos não seriam capazes de compreender os temas a ponto de obter uma aprendizagem significativa. Talvez seja esse o pensamento da muitos professores ao serem confrontados com uma proposta diferenciada ou novo projeto.

Ao estudar os temas principais mais detalhadamente, constatou-se que haviam muitas ligações e analogias com temas do ensino médio que poderiam ser utilizadas a fim de promover a compreensão do conteúdo proposto e, com as intervenções corretas poderíamos obter bons resultados. Após o término na elaboração dos roteiros didáticos e a definição do público alvo, alunos do 2º ano do Ensino Médio, foi decidido trabalhar com um grupo pequeno de alunos, para que todo processo de construção do modelo, resolução e análise do dados pudesse ser melhor observado. Os alunos não foram convidados a desenvolver esse trabalho baseados em um critério de nota, mas sim por sempre demonstrarem em sala de aula muito empenho, disposição em aprender e reconhecimento da importância do estudo, considerados pela autora como fatores primordiais para o sucesso no processo de aprendizagem.

Antes da aplicação dos roteiros didáticos, baseado na experiência em sala de aula, era esperado que os alunos apresentassem dificuldade na parte de modelagem e representação algébrica do problema, o que efetivamente se confirmou durante o desenvolvimento dos roteiros. Atuando por 4 anos consecutivos no 1º ano do Ensino Médio, no qual o principal conteúdo estudado é o de funções, pode-se notar que a fase mais crítica no estudo desse tema estava na interpretação de situações problema e na representação por meio de uma lei de formação. Outro fato a ser considerado é que o estudo de funções é uma das poucas oportunidades que os alunos têm de experimentar essa atividade de modelagem. Portanto, embora traga muitas vantagens, a utilização da modelagem ainda é pouco frequente nas salas de aula de Matemática. Bassanezi (2015) completa:

> A maior dificuldade que notamos para a adoção do processo de modelagem, pela maioria dos professores de matemática, é a transposição da barreira naturalmente criada pelo ensino tradicional onde o objeto de estudo apresenta-se quase sempre bem delineado, obedecendo a uma sequência de pré-requisitos e que vislumbra um horizonte claro de chegada – tal horizonte é muitas vezes o cumprimento do programa da disciplina.

Outras dificuldades observadas já ao longo do processo foram, primeiramente, em colocar em prática os conceitos sobre o tema probabilidade condicional, de acordo com o relato dos alunos o conteúdo já havia sido abordado, porém de maneira bem mais superfial e com exemplos mais simples. Em segundo lugar e um pouco mais desafiador, a compreensão do teorema da Probabilidade Total, tema que foi apresentado pela primeira vez por não fazer parte do currículo do Ensino Médio. Ambos os assuntos foram reforçados com a resolução de exemplos complementares para que isso não interferisse na atividade seguinte.

Conclusão

O desenvolvimento da proposta didática e consequentemente seus resultados superaram as expectativas. Foi possível realizar uma boa adaptação da atividade para a aplicação do problema principal e alcançar os objetivos almejados. Embora os alunos tenham apresentado uma pequena dificuldade na modelagem e linguagem algébrica, com pequenas intervenções os alunos puderam dar sequência aos trabalhos. Os problemas 1 e 2 foram fundamentais ao proporcionar maior segurança aos alunos na resolução dos próximos problemas, os alunos conseguiram utilizar o conhecimento de probabilidade na interpretação do problema e analisar as possibilidades do jogo, além de conseguirem resolver as Equações de Diferenças de primeira ordem sem nenhum problema.

Inicialmente o problema 3, pelo seu caráter abstrato, gerou bastante confusão nos alunos. Os estudantes não estão acostumados a buscar pela solução de problemas dados de maneira genérica. Porém, quando começamos a trabalhar os problemas 3 e 4 ao mesmo tempo, modelando e resolvendo numericamente o problema 4 e comparando-o com as fórmulas gerais do problema 3, todo receio foi deixado de lado. Essa etapa foi muito importante para despertar nos alunos uma maior confiabilidade no trabalho que estavam desempenhando e nos modelos obtidos, além de dar significado a esse processo de modelagem matemática.

Foi notório o olhar crítico que os alunos começaram a desenvolver ao simular valores para as variáveis n, N e q, os alunos demonstraram iniciativa e autonomia ao analisar os resultados e tentar encontrar um padrão ou explicação para as probabilidades encontradas.

Outro ponto interessante ocorrido em determinado momento da aula, foi a observação de um aluno sobre o quanto os conteúdos em matemática estão interligados. Embora soubessem que esse fato é algo natural de acontecer em problemas de matemática, ficaram surpresos com a quantidade de conceitos que haviam utilizado. Para resolver um mesmo problema eles tiveram que trabalhar com temas como probabilidade condicional, probabilidade total, equação de diferenças, equação do segundo grau, sistema de equações, operações com frações, entre outros. Todos puderam refletir sobre a importância dos conhecimentos matemáticos adquiridos ao longo da vida escolar e de seu caráter sequencial, além de perceber como a ausência de tais conhecimentos prévios pode influenciar na aprendizagem de um novo conteúdo.

Os problemas 5 e 6 serviram como ferramenta de consolidação das ideias obtidas, no qual os alunos conseguiram resolver problemas com enunciados e contextos um pouco diferentes aplicando o conhecimento adquiridos durante o processo.

É possível concluir que as atividades de modelagem e resolução de problemas são completas, pois induzem o aluno a desenvolver seu modo próprio de raciocinar, analisar dados, argumentar e ao mesmo tempo aplicar técnicas algébricas para obter os resultados, ou seja, há um propósito ao resolver uma simples equação do primeiro grau ou uma operação entre frações. Dessa maneira, se tais atividades fossem mais frequentes, aspectos importantes no ensino de matemática, como interpretação e raciocínio lógico, importantes não somente nas aulas de Matemática, mas também no cotidiano do aluno, teriam maior chance de serem desenvolvidas.

Associar o tema probabilidade a uma atividade de modelagem destacou ainda mais a suas potencialidades, demonstrando a importância do estudo de probabilidade orientado para interpretação e generalização de dados e previsão de possíveis resultados. Além disso, trabalhar a probabilidade de forma aplicada a situações problema facilita o entendimento e a fixação de conceitos, sem falar no caráter motivador de tais atividades.

Ao término dos trabalhos de aplicação do problema “A Ruína do Jogador”, ficou claro que é totalmente possível e viável realizar esse trabalho com um número maior de estudantes. Aos professores de matemática, fica a proposta de estender a aplicação dos roteiros didáticos e do problema principal para um grupo maior de alunos, podendo o professor realizar adaptações nos roteiros e caso seja necessário, redistribuir o conteúdo em um número maior de aulas. A sugestão é que o problema seja apresentado ao fim do processo de ensino de probabilidade, a fim de tentar diminuir as dificuldades apresentadas nos temas de probabilidade condicional e probabilidade total.

Após a finalização desse trabalho, fica ainda mais evidente a necessidade de dar o primeiro passo, abandonar “a região de conforto” e dar lugar às novas práticas. Com algumas adaptações no trabalho em sala de aula, é possível promover um ambiente de aprendizagem interativo, criando oportunidades para o desenvolvimento do pensamento crítico e da autonomia do aluno, características importantíssimas para a vida do estudante dentro e fora da instituição de ensino.

Referências Bibliográficas

[1] BASSANEZI, Rodney Carlos. **Modelagem Matemática:** teoria e prática. São Paulo: Contexto, 2015.

[2] BASSANEZI, Rodney Carlos. **Ensino-aprendizagem com Modelagem Matemática:** uma nova estratégia. 4.ed. São Paulo: Contexto, 2018.

[3] BRASIL, Base Nacional Comum Curricular, Brasília: MEC, 2018. Disponível em: < http://basenacionalcomum.mec.gov.br/wp-content/uploads/2018/12/BNCC_19dez2018 _site.pdf >.

[4] BRASIL, **Parâmetros Curriculares Nacionais**. Ensino Médio, Parte III - Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: MEC, 1998.

[5] CARGAL, J. M. **The Gambler's Ruin.** In: Discrete Mathematics for Neophytes: Number Theory, Probability, Algorithms, and Other Stuff.2003. cap.33. Disponível em < http://www.cargalmathbooks.com/33%20Gambler's%20ruin%20.pdf >.

[6] CHUQUIPOMA, José Angel Dávalos. **Modelagem Matemática**.147p. São João del-Rei:UFSJ, 2012.

[7] DEBORTOLI, E. O. **Teoria da Probabilidade: uma modelagem aplicada ao jogo de Poker.** Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-graduação em Matemática Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2018.

[8] ELAYDI, Saber. **An introduction to difference equations.**3.ed. Springer, 2005.

[9]FERNANDES, F. R. **Equações de diferenças de 1ª ordem e suas aplicações.** Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-graduação em Matemática Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, 2015.

[10]FERNANDES, J. **Equações de Diferenças e Aplicações.** Dissertação (Mestrado

- Programa de Pós-graduação em Matemática Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Federal do ABC, Santo André, 2016.

[11] GOMES, Frederico Pimentel. Sôbre algumas equações de diferenças relacionadas com a genética de populações. Anais da Escola Superior de Agricultura Luiz de Queiroz. vol. 7 Piracicaba, 1950. Disponível em: < http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid =S0071-12761950000100001>.

[12] HAZZAN, Samuel. **Fundamentos da Matemática Elementar:** combinatória e probabilidade, volume 5. 7. ed. São Paulo: Atual Editora, 2004.

[13] LIMA, E. L. et al.**A matemática do Ensino Médio** – volume 2. Coleção Professor de Matemática. 7.ed. Rio de Janeiro: SBM, 2016.

[14]MINAS GERAIS, SECRETARIA DE ESTADO DE EDUCAÇÃO DE MINAS GERAIS. **Conteúdo Básico Comum (CBC) de Matemática Ensinos Fundamental e Médio**,2007. Disponível em:< http://crv.educacao.mg.gov.br/sistema_crv/banco_objetos_crv /%7B4DA513B4-3453-4B47-A322-13CD37811A9C%7D_Matem%C3%A1tica%20final.pdf >.

[15] MORGADO, Augusto César; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto.**Matemática Discreta.** Coleção PROFMAT - Rio de Janeiro: SBM, 2015.

[16] MORGADO, A. C. et al. **Análise Combinatória e Probabilidade.** Coleção Professor de Matemática. 10.ed. Rio de Janeiro: SBM, 2016.

[17] ROSEN, Kenneth H. **Matemática discreta e suas aplicações**. 6.ed. São Paulo: AMGH Editora, 2009. 982p.

[18] SARAIVA, Paulo; MURTEIRA, José. **Equações de Diferenças:** Introdução Teórica e Aplicações. Coimbra: Imprensa da Universidade de Coimbra, 2013.