Universidade Federal de Mato Grosso
Instituto de Ciências Exatas e da Terra
Departamento de Matemática

Equações Diofantinas Lineares

Giseli Duardo Maciano Campos
Mestrado Profissional em Matemática: PROFMAT/SBM

Orientador: **Prof. Dr. Martinho da Costa Araújo**

Trabalho financiado pela Capes

Cuiabá - MT

Abril de 2013

Equações Diofantinas Lineares

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação devidamente corrigida e defendida por Giseli Duardo Maciano Campos e aprovada pela comissão julgadora.

Cuiabá, 14 de maio de 2013.

Prof. Dr. Martinho da Costa Araújo
Orientador

Banca examinadora:

Prof. Dr. Martinho da Costa Araújo (UFMT)
Prof. Dr. Eunice Cândida Pereira (UFMT)
Prof. Dr. Roy Wilhelm Probst (UTFPR)

Dissertação apresentada ao curso de Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT da Universidade Federal de Mato Grosso, como requisito parcial para obtenção do título **de Mestre em Matemática**.

Dados Internacionais de Catalogação na Fonte.

D812e Duardo Maciano Campos, Giseli.
Equações Diofantinas Lineares / Giseli Duardo Maciano Campos. -- 2013
68 f. ; 30 cm.

Orientador: Martinho da Costa Araújo.
Dissertação (mestrado profissional) - Universidade Federal de Mato Grosso, Instituto de Ciências Exatas e da Terra, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Cuiabá, 2013.
Inclui bibliografia.

1. Máximo Divisor Comum. 2. Algoritmo de Euclides. 3. Equações Diofantinas. 4. Resolução de Problemas. I. Título.

Ficha catalográfica elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Dissertação de Mestrado defendida em 15 de abril de 2013 e aprovada pela banca examinadora composta pelos Professores Doutores

Prof. Dr. Martinho da Costa Araújo

Prof. Dr. Eunice Cândida Pereira

Prof. Dr. Roy Wilhelm Probst

Dedicatória

As minhas avós, *in memórian.*

Agradecimentos

A Deus que me permitiu estar aqui.

Ao meu orientador, professor Dr. Martinho da Costa Araújo, pela disposição empenhada.

A minha família que me apoiou nos momentos críticos, dispensando compreensão com o pouco tempo de atenção dedicado a ela durante essa jornada e que nesse período ajudou-me nos cuidados com minha filha, Lavínia, e em especial, a minha irmã Patrícia, que sacrificou seus sábados me acompanhando na UFMT, para cuidar de Lavínia, durante os seis primeiros meses de amamentação, possibilitando assim minha dedicação ao mestrado.

Ao ao meu esposo pelo companheirismo.

Aos professores que estiveram sempre dispostos a nos auxiliar, ajudar e aconselhar quando necessário.

Aos colegas de turma que viveram comigo o prazer de um engrandecimento pessoal e profissional, passando por momentos de preocupação e descontração.

Aos amigos, que partilharam comigo de uma grande felicidade ao saber da aprovação e meu ingresso neste mestrado.

A CAPES que me auxiliou financeiramente nesses dois anos.

"A busca por novos conhecimentos
nos motiva e encaminha para um
futuro promissor".

Giseli Maciano

Resumo

Uma equação diofantina linear é uma equação algébrica linear, com a restrição adicional de que as suas variáveis são números inteiros. Neste trabalho tratamos das equações diofantinas lineares de n variáveis e suas soluções. Além disso, mostraremos aplicações destas equações na resolução de alguns problemas relacinados com os números inteiros.

Palavras chave: Máximo divisor comum; Algoritmo de Euclides; Equações diofantinas; Resolução de problemas.

Abstract

The linear diophantine equation is a linear algebraic equation, with the additional restriction that your variables are integers. In this work we will deal with linear diophantine equations of n variables and their solutions. Moreover, we'll show applications of these equations in solving of the some problems related with integers.

Key words: Greatest common divisor; Euclidean algorithm; Diophantine equations; Solve problems.

Sumário

Introdução

Dentre as atribuições de um professor, está, a de explorar o ensino de matemática em situções cotidianas, que incentivem o aluno a desenvolver seu pensamento, com problemas que permitam ao mesmo elaborar uma forma particular de pensar. Encontrar uma solução e compará-la com soluções já existentes, é uma delas.

Neste trabalho apresentaremos um método para encontrar soluções de equações, chamadas de equações diofantinas linares, que foram estudadas por Diofanto, e em sua homenagem receberam o nome de equações diofantinas, conforme cita GALEÃO [2009/2010] e UFCG [2012].

Diofante foi um matemático e filósofo grego, teve uma influência maior sobre a teoria moderna dos números do que qualquer outro algebrista grego não geométrico. Um inovador com notações, o primeiro a usar símbolos na resolução de problemas algébricos. Criador de um método para encontrar soluções para determinadas equações algébricas.

Os detalhes da vida deste matemático grego são completamente desconhecidos havendo-se conservado suas obras que, transmitidas pelos eruditos árabes, chegaram à Europa graças a sua tradução para o latim, no século XVI.

Sabe-se que viveu na "Idade de Prata"(250-350a.C.) da Universidade de Alexandria, que foi o centro da atividade matemática, dos dias de Euclides (morreu por volta de 300 a.C.) aos de Hipatia (morreu em 415 a.C.). Alexandria era um centro muito cosmopolita, e a matemática que se originou dali não era toda de mesmo tipo, conforme consta em BOYER [2003].

A principal obra de Diofante foi um grande tratado chamado *Arithmetica* (250-275 a.C.), uma publicação em 13 livros, dos quais sete desapareceram, sem dúvida a maior obra da Antiguidade sobre o tema. Um clássico da ciência alexandrina sobre teoria dos números, caracterizado pelo alto grau de habilidade matemática e de engenhosidade, desvinculado da matemática grega convencional e voltado para a resolução exata de equações indeterminadas.

Arithmetica é considerado o primeiro manual de álgebra que usa símbolos para indicar incógnitas e potências, e resolve as equações indeterminadas, hoje denominadas equações diofantinas.

Também são de sua autoria os livros: Números poligonais, Porismos e Moriástica, um trabalho sobre frações, introduzindo assim o emprego dos números fracionários.

Diofante viveu e morreu em Alexandria e a história conservou poucos dados biográficos dele. Um pouco que se conhece a seu respeito encontra-se num epigrama que figura no seu túmulo e que está escrito sob a forma de um enigma Matemático:

"Caminhante!

Aqui jazem os restos de Diofante.

Os números podem mostrar, oh maravilha, a duração da sua vida, cuja sexta parte constou da encantadora infância.

Tinha passado mais uma duodécima parte da sua vida quando lhe apareceu a barba.

A partir daí, a sétima parte da sua existência passou-a num matrimônio sem filhos.

Passou um quinquénio mais quando o fez feliz o nascimento do seu primogênito.

Este entregou o seu corpo e a sua encantadora existência à terra, tendo vivido metade do que seu pai viveu.

Quanto a Diofante desceu à sepultura com profunda mágoa, tendo sobrevivido apenas quatro anos a seu filho.

Diz-me, caminhante, quantos anos viveu Diofante até que a morte lhe chegou."

Segundo esse enigma, considerando os anos vividos por Diofante como D, temos:

$$\frac{D}{6} + \frac{D}{12} + \frac{D}{7} + F + 4 = D$$

e como seu filho viveu a metade de sua vida, vem:

$$F = \frac{D}{2}$$

daí, substituindo F na primeira equação, segue que,

$$\frac{D}{6}+\frac{D}{12}+\frac{D}{7}+\frac{D}{2}+4=D$$

que resulta em $D=84$.

Disso concluímos que Diofante viveu 84 anos.

Uma interessante aplicação do conceito de máximo divisor comum (mdc) e do algoritmo da divisão é observado na resolução das equações diofantinas lineares.

Apesar do aluno do ensino fundamental ter em seu conteúdo programático a definição e aplicação do mdc, muitos alunos terminam o ensino básico sem conhecer soluções de equações diofantinas lineares básicas.

Tendo analisado alguns livros de matemática para o ensino básico, tais como, DANTE [2012], RIBEIRO [2010], GOULART [2008] e PAIVA [2004], observamos a deficiência de tal conteúdo, então propomos este trabalho, que mostra algumas aplicações dessas equações em problemas relacionados com o nosso cotidiano. Em POMMER [2008], Pommer propõe o estudo das equações diofantinas lineares com duas variáveis. Neste, propomos, uma complementação, mostrando, soluções de equações com mais variáveis.

Mostraremos neste trabalho, como resolver no conjunto dos números inteiros as equações diofantinas lineares com mais de duas variáveis e indutivamente estenderemos o conceito para n variáveis.

Para cumprir com o objetivo supracitado, desenvolvemos este trabalho da seguinte forma:

No capítulo 1, apresentaremos ferramentas básicas usadas para a resolução das equações diofantinas lineares.

No capítulo 2, mostraremos como encontrar soluções de equações diofantinas lineares com n variáveis.

No capítulo 3, aplicaremos os conhecimentos e técnicas, apresentadas nos capítulos anteriores, na interpretação e resolução de problemas que envolvem números inteiros.

Capítulo 1

Algumas Propriedades dos Números Inteiros

Para compreender de forma clara o objeto de estudo deste trabalho, que são as equações diofantinas lineares e suas aplicações, é importante entender os pré-requisitos que apresentaremos a seguir, pois para resolver qualquer tipo de equação, é fundamental ter habilidade na aplicação das técnicas de resolução.

Tendo analisado LIMA [2006], SANTOS [1998] e MUNIZ NETO [2012] e tomando como base tais bibliografias, apresentaremos algumas propriedades.

1.1 Conjuntos Numéricos: Naturais e Inteiros

Vamos considerar o conjunto dos números naturais como sendo,

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, ...\}$$

ou seja, o conjunto dos números inteiros positivos incluindo o zero, e

$$\mathbb{N}^* = \mathbb{N} - \{0\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, ...\}$$

o conjunto dos números inteiros positivos.

Uma demonstração da construção dos números naturais, encontra-se em HEFEZ [2011].

Vamos considerar o conjunto dos números inteiros como sendo,

$$\mathbb{Z} = \{0, \pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \pm5, \pm6, ...\}.$$

ou seja, o conjunto formado pelos números naturais e os números inteiros negativos.

Consideremos também:

$$\mathbb{Z}^* = \{\pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \pm5, \pm6, ...\},$$

que representa os números inteiros não nulos,

$$\mathbb{Z}_+ = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, ...\},$$

que representa os números inteiros positivos, e

$$\mathbb{Z}_- = \{..., -6, -5, -4, -3, -2, -1\},$$

que representa os números inteiros negativos.

1.2 Divisibilidade

Definição 1.1 *Dados a, $b \in \mathbb{Z}$, com $b \neq 0$, dizemos que b* ***divide*** *a, e escrevemos $b \mid a$, se existir $c \in \mathbb{Z}$ tal que $a = bc$. Caso b não divida a, escrevemos $b \nmid a$.*

Seja b um inteiro não nulo. Se b dividir a, dizemos que b é um **divisor** de a, que a é **divisível** por b ou ainda que a é um **múltiplo** de b. Se $b \mid a$ e $b > 0$, então b é um **divisor positivo** de a. Note que todo inteiro não nulo é um divisor de si mesmo e de 0.

1.3 Princípio da Boa Ordem

Todo subconjunto não-vazio de números inteiros positivos possui um elemento mínimo. Em outras palavras:

Seja S um subconjunto de $\mathbb{N}$. Dizemos que um número inteiro a é um menor elemento de S quando são satisfeitas as seguintes propriedades:

(i) $a \in S$,

(ii) $\forall\, n \in S$, $a \leq n$.

É imediato verificar que, se S possui um menor elemento, este é único. De fato, se a e a' são menores elementos de S, então $a \leq a'$ e $a' \leq a$, o que implica que $a = a'$.

1.4 Divisão Euclidiana

Euclides, em *Elementos,* utiliza, mesmo sem demonstrar, o fato de que é sempre possível efetuar a divisão de a por b, com resto. Logo vamos esclarecer este fato.

Teorema 1.1 *Se a e b são dois inteiros, com $b > 0$, então existem inteiros q e r únicos, tais que*

$$a = bq + r \ \textit{com}\ 0 \leq r < b.$$

Prova Considere o conjunto $S = \{a - bt : t \in \mathbb{Z}\}$. Seja $\widetilde{S} = \{a - bt : t \in \mathbb{Z} \text{ e } a - bt \geq 0\}$, ou seja, o conjunto de inteiros não negativos de S. Note que se $a \geq 0$, então para $t = 0$ segue que $a \in \widetilde{S}$. Se $a < 0$, então para $t = a$ obtemos $a - ba \in S$ e $a - ba = a(1 - b) \geq 0$, ou seja, novamente $a \in \widetilde{S}$. Logo $S \neq \varnothing$. Pelo **Princípio da Boa Ordem**, $\widetilde{S}$ tem um elemento mínimo $r \in \widetilde{S}$ tal que $r \geq 0$ e $a - bq = r$ para algum $q \in \mathbb{Z}$. Afirmamos que $r < b$, de fato, suponha que $r \geq b$, fosse maior ou igual que b, então teríamos $0 \leq r - b = a - bq - b = a - b(q+1) \in \widetilde{S}$ por outro lado $a - b(q+1) = a - bq - b < a - bq = r$, o que contradiz a escolha de r ser o elemento mínimo de $\widetilde{S}$, portanto $a = bq + r$ com $0 \leq r < b$. Para provar a unicidade dos inteiros q e r, vamos supor que existem inteiros q_1 e r_1 tais que

$$a = bq_1 + r_1 \text{ com } 0 \leq r_1 < b$$

então

$$bq_1 + r_1 = bq + r \Longrightarrow r_1 - r = bq - bq_1 \ = b(q - q_1) \Longrightarrow b \mid (r_1 - r).$$

Como $-b < -r \leq 0$ e $0 \leq r_1 < b$ temos que $-b < r_1 - r < b$, logo os múltiplos e b que estão entre $-b$ e b é 0. Portanto $(r_1 - r) = 0$, ou seja $r_1 = r$. Consequentemente $b(q - q_1) = 0$ com $b \neq 0$, assim $(q - q_1) = 0$, ou ainda $q = q_1$. $\square$

Corolário 1.2 *Se a e b são dois inteiros, com $b \neq 0$, então existem inteiros q e r únicos tais que*

$$a = bq + r \text{ com } 0 \leq r < |b|.$$

Prova Nada temos a provar se $b > 0$. Caso $b < 0$, então $|b| > 0$, pelo **Teorema 1.1**, existem inteiros q_1 e r_1 únicos tais que

$$a = |b| q_1 + r_1 \text{ com } 0 \leq r_1 < |b|.$$

Como $|b| = -b$, segue que

$$a = b(-q_1) + r_1 \text{ com } 0 \leq r_1 < |b|$$

ou seja, existem e são únicos os inteiros $q = (-q_1)$ e $r = r_1$ tais que

$$a = bq + r \text{ com } 0 \leq r < |b|.$$

□

Nas condições do teorema acima, os números q e r são chamados, respectivamente, de *quociente* e de *resto* da divisão de a por b.

A demonstração do teorema fornece um algoritmo para calcular o quociente e o resto da divisão de um número por outro, por subtrações sucessivas.

1.5 Máximo Divisor Comum

Definição 1.2 *Chama-se divisor comum de dois inteiros a e b, todo inteiro $d \neq 0$, tal que $d \mid a$ e $d \mid b$.*

Desta definição segue que para a, b, m e n inteiros com $d \mid a$ e $d \mid b$, então $d \mid am + bn$.

Exemplo 1 *Os números 1, 3, 5 e 15 são divisores comuns de 30 e 45.*

A definição que se segue, segundo HEFEZ [2011], é a definição dada por Euclides nos *Elementos* e se constitui em um dos pilares da sua aritmética.

Definição 1.3 *Sejam a e b inteiros não simultaneamente nulos. Chama-se máximo divisor comum de a e b o inteiro $d > 0$ que satisfaz as condições:*

(i) *d é um divisor comum de a e de b, e*

(ii) *d é divisível por todo divisor comum de a e b.*

A condição (ii) acima pode ser reenunciada como se segue:

(ii') Se c é um divisor comum de a e b, então $c \mid d$.

Portanto, se d é um *mdc* de a e b, e c é um divisor comum desses números, então $c \leq d$. Isto nos mostra que o máximo divisor comum de dois números é efetivamente o maior dentre todos os divisores comuns desses números.

Em particular, isto nos mostra que, se d e d' são dois *mdc* de um mesmo par de números, então $d \leq d'$ e $d' \leq d$, e, consequentemente, $d = d'$. Ou seja, o *mdc* de dois números, quando existe, é único.

O *mdc* de a e b, quando existe é denotado por (a, b), e como o *mdc* de a e b não depende da ordem em que a e b são tomados, temos que $(a, b) = (b, a)$. Se d é *máximo divisor comum* entre a e b, então d também é *máximo divisor comum* entre a e $-b$, $-a$ e b, e ainda, entre $-a$ e $-b$.

Esta definição de *mdc* para inteiros a e b vale também para uma quantidade finita de inteiros $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$, como por exemplo o *mdc* entre três números

$$mdc(a_1, a_2, a_3) = mdc(mdc(a_1, a_2), a_3) = mdc(a_1, mdc(a_2, a_3)).$$

1.5.1 Lema de Euclides

Lema 1.3 *Sejam a, b, $n \in \mathbb{Z}$. Se existe $mdc(a, b - na)$, então o $mdc(a, b)$ existe e*

$$mdc(a, b) = mdc(a, b - na).$$

Prova Seja $d = mdc(a, b - na)$. Como $d \mid a$ e $d \mid (b - na)$, segue que d divide $b = b - na + na$. Logo, d é um divisor comum de a e b. Suponha agora que c seja um divisor comum de a e b; logo, c é um divisor comum de a e $b - na$ e portanto, $c \mid d$. Isso prova que $d = mdc(a, b)$. $\square$

1.6 Algoritmo de Euclides

Sejam a e b inteiros, não nulos silmutaneamente. Queremos determinar o $mdc\,(a,b) = (a,b)$. Note que:

(i) se $a \neq 0$, então $mdc\,(a,0) = |a|$

(ii) se $a \neq 0$, então $mdc\,(a,a) = |a|$

(iii) se $b \mid a$, então $mdc\,(a,b) = |b|$

Além disso, $mdc\,(a,b) = mdc\,(|a|,|b|)$, logo para determinar $mdc\,(a,b)$, basta considerar a e b inteiros positivos distintos, ou seja, $a > b$ e $b \nmid a$. Assim pelo Algoritmo da Divisão

$$a = bq_1 + r_1 \text{ com } 0 < r_1 < b.$$

Temos duas possibilidades:

(1) $r_1 \mid b$, então $r_1 = mdc\,(b,r_1) = mdc\,(b, a - bq_1) = mdc\,(b,a) = mdc\,(a,b)$

(2) $r_1 \nmid b$, então podemos efetuar a divisão de b por r_1

$$b = r_1q_2 + r_2 \text{ com } 0 < r_2 < r_1.$$

Novamente temos duas possibilidades:

(3) $r_2 \mid r_1$, então $r_2 = mdc\,(r_1,r_2) = mdc\,(r_1, b - r_1q_2) = mdc\,(r_1,b) = mdc\,(a - bq_1, b) = mdc\,(a,b)$

(4) $r_2 \nmid r_1$, então podemos efetuar a divisão de r_1 por r_2

$$r_1 = r_2q_3 + r_3 \text{ com } 0 < r_3 < r_2.$$

Continuando desta forma, este procedimento não pode continuar indefinidamente, pois se isso ocorresse teríamos uma sequência infinita de inteiros positivos $b > r_1 > r_2 > r_3 > r_4 > \cdots\cdots$, que não possui um menor elemento, o que não é possível pelo **Princípio da Boa Ordem**. Logo para algum n, temos que $r_n \mid r_{n-1}$, ou seja,

$r_{n+1} = 0$ e

$$r_n = mdc\,(r_{n-1}, r_n) = mdc\,(r_{n-2}, r_{n-1}) = \cdots = mdc\,(r_1, r_2) = mdc\,(b, r_1) = mdc\,(a, b)\,.$$

Na prática usamos o algoritmo efetuando cada divisão e colocando os números envolvidos nos respectivos diagramas da seguinte forma:

(i) $a = bq_1 + r_1$ com $0 < r_1 < b$

	q_1
a	b
r_1	

(ii) $b = r_1 q_2 + r_2$ com $0 < r_2 < r_1$.

	q_1	q_2
a	b	r_1
r_1	r_2	

(iii) $r_{n-2} = r_{n-1} q_n + r_n$ com $0 < r_n < r_{n-1}$ e $r_{n-1} = r_n q_{n+1} + r_{n+1}$ com $r_{n+1} = 0$.

	q_1	q_2	q_3	q_4	...	q_{n-1}	q_n	q_{n+1}
a	b	r_1	r_2	r_3	...	r_{n-2}	r_{n-1}	r_n
r_1	r_2	r_3	r_4	r_5	...	r_n		

O algoritmo de Euclides para o cálculo do *máximo divisor comum* (mdc) entre dois números inteiros positivos, consiste em efetuar sucessivas divisões, até que se encontre resto igual a zero, onde o valor do último divisor, representa o valor do mdc procurado.

Para calcular o $mdc(a, b)$ devemos primeiramente analisar os valores de a e b, com $a, b \in \mathbb{Z}_+$, podemos supor $a \leq b$.

Teorema 1.4 *O máximo divisor comum de inteiros a e b, não nulos simultaneamente, se escreve como combinação linear de a e b, seja $mdc(a, b) = am + bn$ para alguns inteiros m e n.*

Prova Sabemos que

$$\begin{aligned}
a &= bq_1 + r_1 \text{ com } 0 \leq r_1 < b \\
b &= r_1 q_2 + r_2 \text{ com } 0 \leq r_2 < r_1 \\
r_1 &= r_2 q_3 + r_3 \text{ com } 0 \leq r_3 < r_2 \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
r_{k-2} &= r_{k-1} q_k + r_k \text{ com } 0 \leq r_k < r_{k-1} \\
r_{k-1} &= r_k q_{k+1} + r_{k+1} \text{ com } 0 \leq r_{k+1} < r_k
\end{aligned}$$

Das equações anteriores obtemos r_k como combinação linear de r_{k-1} e r_{k-2}:

$$r_{k-2} = r_{k-1} q_k + r_k \text{ então } r_k = r_{k-2} - r_{k-1} q_k.$$

Da equação $r_{k-3} = r_{k-2} q_{k-1} + r_{k-1}$ segue que $r_{k-1} = r_{k-3} - r_{k-2} q_{k-1}$, daí, obtemos r_k como combinação linear de r_{k-2} e r_{k-3}:

$$\begin{aligned}
r_k &= r_{k-2} - (r_{k-3} - r_{k-2} q_{k-1}) q_k \\
r_k &= r_{k-2}(1 + q_{k-1} q_k) - (r_{k-3}) q_k.
\end{aligned}$$

Em seguida escrevemos r_k como combinação linear de r_{k-3} e r_{k-4}. Continuando desta forma teríamos r_k como combinação linear de r_2 e r_1, de r_1 e b e finalmente de b e a. □

Lema 1.5 *Se a, b e c são inteiros, com $a \mid bc$ e $mdc\,(a,b) = 1$, então $a \mid c$.*

Prova Como $mdc\,(a,b) = 1$, existem inteiros m e n tais que $1 = am + bn$, isto implica que $c = amc + bnc$. Note que $a \mid amc$ e por hipótese $a \mid bc$, então $a \mid c$. □

Exemplo 2 *Encontre o máximo divisor comum entre 72 e 46.*

Solução *Utilizando o algoritmo de Euclides para calcular* $mdc(72, 46)$*, vem:*

	1	1	1	3	3
72	46	26	20	6	2
26	20	6	2		

então,

$$\begin{aligned} 26 &= 72 - 46.1 \\ 20 &= 46 - 26.1 \\ 6 &= 26 - 20.1 \\ 2 &= 20 - 6.3 \end{aligned}$$

daí,

$2 = 20 - 6.3 = 20 - (26 - 20.1).3 = 20.4 - 26.3 = 20.4 - 26.3 = (46 - 26.1).4 - 26.3 = 46.4 - 26.7 = 46.4 - (72 - 46.1).7 = 46.11 - 72.7 = 72.(-7) + 46.11$

Logo, mdc(72, 46)=2.

1.7 Equação Diofantina Linear com Duas Variáveis

Esse tipo de equação com duas variáveis, se apresenta da seguinte forma: $ax + by = c$ com $a, b, c \in \mathbb{Z}$ onde a e b são inteiros não nulos simultaneamente.

Para determinar uma solução da equação $ax + by = c$, devemos procurar inteiros x_0 e y_0, com x_0 e $y_0 \in \mathbb{Z}$, que façam com que $ax_0 + by_0 = c$ seja verdadeira.

Se $(x_0, y_0) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ é solução, vale a igualdade $ax_0 + by_0 = c$. Se $d = mdc(a, b)$ então $d \mid a$ e $d \mid b$ logo $d \mid (ax_0 + by_0)$, ou seja, $d \mid c$. Como $d = mdc(a, b)$ então $d = ax_0 + by_0$, para um conveniente $(x_0, y_0) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Mas da hipótese que $d \mid c$ segue que $c = dt$, para algum $t \in \mathbb{Z}$. Assim, $c = dt = (ax_0 \ + by_0)t = ax_0t + by_0t$, o que mostra que (x_0t, y_0t) é solução da equação. Então podemos formalizar estes resultados seguinte forma.

Proposição 1.6 *Uma equação diofantina* $ax + by = c$*, em que* $a \neq 0$ *ou* $b \neq 0$*, admite solução se, e somente se,* $d = mdc(a, b)$ *divide* c*.*

Se (x_0, y_0) é uma solução particular da equação $ax + by = c$ e (x', y') uma solução qualquer desta equação, então

$$ax^{'} + by^{'} = c = ax_0 + by_0$$

disso temos que

$$a\left(x^{'} - x_0\right) = b\left(y_0 - y^{'}\right)$$

Suponha ainda que $d = mdc(a, b) \mid c$, então existem inteiros r e s tais que $a = dr$ e $b = ds$, com $mdc(r, s) = 1$, assim,

$$r(x' - x_0) = s(y_0 - y')$$

logo $r \mid s(y_0 - y')$, então $r \mid (y_0 - y')$ e portanto $y_0 - y' = rt$ para algum $t \in \mathbb{Z}$. Donde

$$y' = y_0 - rt = y_0 - \frac{a}{d}t.$$

Observando agora que

$$r(x' - x_0) = s(y_0 - y') = srt$$

obtemos

$$x' = x_0 + st = x_0 + \frac{b}{d}t$$

então, para todo $t \in \mathbb{Z}$, o par $\left(x_0 + \frac{b}{d}t,\ y_0 - \frac{a}{d}t\right)$ é solução da equação dada.

Proposição 1.7 *Seja (x_0, y_0) uma solução particular da equação diofantina $ax + by = c$, em que $a \neq 0$ e $b \neq 0$. Então qualquer solução dessa equação é dada pelo par de inteiros*

$$\mathbf{S} = \left\{\left(x_0 + \frac{b}{d}t,\ y_0 - \frac{a}{d}t\right) \ / \ t \in \mathbb{Z}\right\}$$

onde $d = mdc\,(a, b)$.

Corolário 1.8 *Se* $d = mdc\,(a, b) = 1$ *e* $(x_0, y_0) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ *é uma solução particular da equação diofantina linear* $ax + by = c$, *então todas as outras soluções desta equação são dadas por*

$$\mathbf{S} = \{(x_0 + bt,\ y_0 - at)\ /\ t \in \mathbb{Z}\}\,.$$

Exemplo 3 *Vejamos como achar as soluções de* $172x + 20y = 1000$.

Solução *Dividindo os coeficientes da equação* $172x + 20y = 1000$ *por* 4, *obtemos a equação equivalente,* $43x + 5y = 250$. *Como o* $mdc(43, 5) = 1$, *esta última equação possui solução, portanto a equação dada também.*

Notemos que se (x_0, y_0) *é solução de* $43x + 5y = 1$, *então o par* $(250x_0, 250y_0)$ *é solução de* $43x + 5y = 250$. *Então vejamos como achar uma solução de* $43x + 5y = 1$. *Usando o algoritmo de Euclides para o cáculo de mdc temos,*

	8	1	1	2
43	5	3	2	1
3	2	1		

logo,

$$\begin{aligned} 3 &= 43 - 5.8 \\ 2 &= \ \ 5 - 3.1 \\ 1 &= \ \ 3 - 2.1 \end{aligned}$$

daí,

$$1 = 3-2.1 = 3-(5-3.1) = 3.2-5 = (43-5.8).2-5 = 43.2-5.17 = 43.2+5.(-17)$$

portanto, $(x_0, y_0) = (2, -17)$. *Logo* $(250x_0, 250y_0) = (500, -4250)$ *é uma solução particular da equação dada.*

Consequentemente sua solução geral é expressa da seguinte forma:

$$x = 500 + 5t \quad e \quad y = -4250 - 43t \quad com \quad t \in \mathbb{Z}.$$

Exemplo 4 *Vejamos como encontrar as soluções de* $5x - 2y = 2$.

Solução *Como o* $mdc(5, 2) = 1$ *a equação possui solução.*

Já sabemos que se $(x_0\ , y_0)$ *é solução de* $5x - 2y = 1$, *então o par* $(2x_0\ , 2y_0)$ *é solução de* $5x - 2y = 2$.

Aplicando o algoritmo de Euclides para o cálculo do mdc temos:

	2	2
5	2	1
1		

disso vem,

$$1 = \quad 5.1 - 2.2$$

portanto, $(x_0, y_0) = (1, 2)$. *Logo* $(2x_0, 2y_0) = (2, 4)$ *é uma solução particular da equação dada, e sua solução geral é expressa da seguinte forma:*

$$x = 2 - 2t \quad e \quad y = 4 - 5t \quad com\ t \in \mathbb{Z}.$$

Exemplo 5 *Encontrar as soluções de* $-26x + 39y = 65$.

Solução *Dividindo os coeficientes da equação* $-26x + 39y = 65$ *por* 13, *obtemos a equação equivalente* $-2x + 3y = 5$.

Como o $mdc(2, 3) = 1$, *esta última equação possui solução, e portanto a equação dada também.*

Agora, devemos encontrar $(x_0\ , y_0)$, *solução de* $-2x + 3y = 1$, *que gera o par* $(5x_0\ , 5y_0)$, *solução da equação original.*

Aplicando o algoritmo de Euclides para o cáculo de mdc temos:

	1	2
3	2	1
1		

desse modo,

$$\begin{aligned} 1 &= 3.1 - 2.1 \\ 1 &= -2.1 + 3.1 \end{aligned}$$

daí, como $(x_0\ , y_0) = (1\ , 1)$. *Logo* $(5x_0\ , 5y_0) = (5\ , 5)$ *é uma solução particular da equação dada, e sua solução geral se apresenta assim:*

$$x = 5 + 3t \qquad e \qquad y = 5 + 2t \qquad \text{com } t \in \mathbb{Z}.$$

Capítulo 2

Equações Diofantinas Lineares com mais de duas Variávies

Neste capítulo, tomando como base HEFEZ [2011] e DOMINGUES [1991], mostraremos como encontrar uma solução particular e a solução geral de equações diofantinas lineares com mais de duas variáveis.

2.1 Equação Diofantina Linear com Três Variáveis

Consideremos agora a equação $a_1x + a_2y + a_3z = b$, onde cada a_i , com $i = 1$, 2, 3, sejam inteiros não nulos simultaneamente.

A mesma argumentação usada para provar a **Proposição 1.6** garante que essa equação admite soluções se, $d = mdc(a_1, a_2, a_3)$ divide b.

No capítulo 1, em **Máximo Divisor Comum**, consta que é possivel calcular o mdc de uma quantidade finita de números, então, primeiro analisaremos o $mdc(a_1, a_2) = d_1$ e a partir deste, o $mdc(d_1, a_3) = d$.

Se $d_1 = mdc(a_1, a_2)$, então existem $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ para os quais $a_1k_1 + a_2k_2 = d_1$. E como $d = mdc(d_1, a_3)$, então existem $k, z_0 \in \mathbb{Z}$ de maneira que $d = d_1k + a_3z_0$. Logo:

$$d = (a_1k_1 + a_2k_2)k + a_3z_0 = a_1(k_1k) + a_2(k_2k) + a_3z_0.$$

Fazendo $k_1k = x_0$ e $k_2k = y_0$, então:

$$a_1x_0 + a_2y_0 + a_3z_0 = d.$$

Assim, se $a_1x + a_2y + a_3z = b$ admite solução e como $b = dq$, para algum $q \in \mathbb{Z}$, então,

$$a_1(x_0q) + a_2(y_0q) + a_3(z_0q) = dq = b$$

o que mostra que (x_0q, y_0q, z_0q) é uma de suas soluções particulares.

2.1.1 Solução Geral da Equação Diofantina Linear de Três Variáveis

Para encontrar a solução geral de uma equação diofantina linear de três variáveis, utilizaremos os seguintes passos:

(i) Por meio de uma substituição, reduziremos a equação original a uma equação com duas variáveis e resolveremos essa equação.

(ii) A partir dessa solução, retornaremos na substituição feita inicialmente e resolveremos mais uma equação com duas variáveis. Obtendo assim a solução geral.

Considere a equação $a_1x+a_2y+a_3z = b$, com a_1, a_2 e a_3 não nulos simultneamente.
Se a equação possui solução então $d = mdc(a_1, a_2, a_3) \mid b$.
Reduzindo essa equação para duas variáveis, considerando $a_1x + a_2y = p$, temos

$$p \ + a_3z = b$$

que possui solução, pois $mdc(1, a_3) = 1$ e $1 \mid b$, e tem como solução geral,

$$\mathbf{S_1} = \left\{ \left(p_0 + \frac{a_3}{d_1}t_1 \ , z_0 - \frac{1}{d_1}t_1 \right) \ / \ t_1 \in \mathbb{Z} \right\}$$

e como o $mdc(1, a_3) = 1$, segue que

$$\mathbf{S_1} = \{(p_0 + a_3t_1 \ , z_0 - t_1) \ / \ t_1 \in \mathbb{Z}\}.$$

Daí, a partir dessa solução geral encontrada, escolheremos um valor conveniente para t_1, que satisfaça:

$$d_2 = mdc(a_1, a_2) \mid (p_0 + a_3t_1)$$

e daremos continuidade para encontrar a solução geral da equação $a_1x + a_2y = p = p_0 + a_3t_1$, e a partir dessa, a solução geral da equação original.

Agora, basta analisar a equação gerada pela substituição feita,

$$a_1x + a_2y = p = p_0 + a_3t_1$$

que tem como solução geral,

$$\mathbf{S_2} = \left\{ \left(x_0 + \frac{a_2}{d_2}t_2 \ , y_0 - \frac{a_1}{d_2}t_2 \right) \ / \ t_2 \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Logo, a solução geral da equação original é

$$\mathbf{S} = \left\{ \left(x_0 + \frac{a_2}{d_2}t_2 \ , y_0 - \frac{a_1}{d_2}t_2 \ , z_0 - t_1 \right) \ / \ t_1 \ e \ t_2 \in \mathbb{Z} \right\}$$

que é gerada a partir de um valor apropriado, atribuído ao parâmetro t_1 no processo de descoberta dessa solução.

Com isso, podemos afirmar que, a cada t_1 apropriado será gerado um novo conjunto solução.

Exemplo 6 *Vejamos como encontrar uma solução particular de* $100x + 72y + 90z = 6$.

Solução *Como o* $mdc(100, 72, 90) = 2$ *e* $2 \mid 6$ *, então a equação possui solução.*

Consideremos agora a equação dada na forma equivalente, $50x + 36y + 45z = 3$.

Usando o algoritmo de Euclides para o cáculo do $mdc(50, 36)$ *temos:*

	1	2	1	1	3
50	36	14	8	6	2
14	8	6	2		

então,

$$\begin{aligned} 14 &= 50 - 36.1 \\ 8 &= 36 - 14.2 \\ 6 &= 14 - 8.1 \\ 2 &= 8 - 6.1 \end{aligned}$$

daí,

$2 = 8 - 6.1 = 8 - (14 - 8.1) = 8.2 - 14 = (36 - 14.2).2 - 14 = 36.2 - 14.5 = 36.2 - (50 - 36.1).5 = -50.5 + 36.7 = 50.(-5) + 36.7$

Aplicando novamente o algoritmo de Euclides para o $mdc(2, 45)$*, vem:*

	22	2
45	2	1
1		

então,

$1 = 45 - 2.22$ *e como* $2 = 50.(-5) + 36.7$ *segue que:*

$$\begin{aligned} 1 &= 45 - [50\ .(-5)\ + 36.7]\,.22 \\ 1 &= 45.1 + 50.110 + 36.(-154) \\ 1 &= 50.110 + 36.(-154) + 45.1 \end{aligned}$$

Daí, o terno $(110, -154, 1)$ *é solução de* $50x+36y+45z = 1$*, logo* $(3x_0,\ 3y_0, 3z_0) = (330,\ -462, 3)$ *é uma solução particular da equação dada.*

Exemplo 7 *Encontre a solução geral da equação* $100x + 72y + 90z = 6$.

Solução *Como foi visto no exemplo 6, a equação possui solução. Vamos agora por partes, encontrar sua solução geral, considerando sua forma equivalente,* $50x+36y+45z = 3$.

Seja $p = 50x + 36y$*, que gera a equação,* $p + 45z = 3$ *(1), que também possui solução, pois* $mdc(1, 45) = 1$ *e* $1 \mid 3$.

Então, conseguimos encontrar uma solução particular para a equação (1), fazendo:

$$\begin{aligned} 1 &= 1.(-44) + 45.1 \\ 3 &= 1.(-132) + 45.3 \end{aligned}$$

que nos leva a solução geral de (1) como:

$$\mathbf{S_1} = \{(-132 + 45t_1,\ 3 - t_1)\ /\ t_1 \in \mathbb{Z}\}.$$

Para encontrar a solução geral da equação original, devemos agora encontrar a solução geral da equação $50x + 36y = p = -132 + 45t_1$ *(2).*

Para que essa equação possua solução, o mdc$(50, 36) = 2$ *deve dividir* $-132{+}45t_1$.

Tendo satisfeita a condição acima, basta encontrar a solução geral, assim:

Pelo algoritmo de Euclides para o mdc, vem:

	1	2	1	1	3
50	36	14	8	6	2
14	8	6	2		

disso, segue que,

$$\begin{aligned} 14 &= 50 - 36.1 \\ 8 &= 36 - 14.2 \\ 6 &= 14 - 8.1 \\ 2 &= 8 - 6.1 \end{aligned}$$

daí,

$2 = 8 - 6.1 = 8 - (14 - 8.1) = 8.2 - 14.1 = (36 - 14.2).2 - 14.1 = 36.2 - 14.5 = 36.2 - (50 - 36.1).5 = 36.7 - 50.5 = 50.(-5) + 36.7$

logo, como

$$\begin{aligned} 2 &= 50.(-5) + 36.7 \\ \left(\frac{-132 + 45t_1}{2}\right).2 &= 50.(-5).\left(\frac{-132 + 45t_1}{2}\right) + 36.7.\left(\frac{-132 + 45t_1}{2}\right) \\ -132 + 45t_1 &= 50.\left(\frac{660 - 225t_1}{2}\right) + 36.\left(\frac{-924 + 315t_1}{2}\right) \end{aligned}$$

temos que a solução geral de (2) é

$$\mathbf{S_2} = \left\{\left(\frac{660 - 225t_1}{2} + \frac{36}{2}t_2,\ \frac{-924 + 315t_1}{2} - \frac{50}{2}t_2\right)\ /\ t_1\ e\ t_2 \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Com isso, podemos concluir que a solução geral da equação diofantina linear de três variáveis é:

$$\mathbf{S} = \left\{ \left(\frac{660 - 225t_1}{2} + 18t_2,\ \frac{-924 + 315t_1}{2} - 25t_2,\ 3 - t_1 \right) / \ t_1 \ e \ t_2 \in \mathbb{Z} \right\}.$$

2.2 Equação Diofantina Linear com Quatro Variáveis

Consideremos agora a equação $a_1x + a_2y + a_3z + a_4w = b$, onde cada a_i , com $i = 1,\, 2,\, 3,\, 4$, sejam inteiros, não nulos simultaneamente.

A mesma argumentação usada para provar a **Proposição 1.6** garante que essa equação admite soluções se, $d = mdc(a_1, a_2, a_3, a_4)$ divide b.

De forma análoga ao que foi mostrado para equação diofantina de três variáveis, faremos para a de quatro variáveis. Veja.

Se $d_1 = mdc(a_1, a_2)$, então existem $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ para os quais $a_1k_1 + a_2k_2 = d_1$. E como $d_2 = mdc(d_1, a_3)$, então existem $k_3, k_4 \in \mathbb{Z}$ de maneira que $d_2 = d_1k_3 + a_3k_4$.

Além disso $d = mdc(d_2, a_4)$, então existem k e $w_0 \in \mathbb{Z}$, para os quais $d_2k + a_4w_0 = d$. Logo,

$$\begin{aligned}
d &= d_2k + a_4w_0 \\
d &= (d_1k_3 + a_3k_4)k + a_4w_0 \\
d &= d_1(k_3k) + a_3(k_4k) + a_4w_0 \\
d &= [a_1k_1 + \ a_2k_2]\,(k_3k) + a_3(k_4k) + a_4w_0 \\
d &= a_1(k_1k_3k) + a_2(k_2k_3k) + a_3(k_4k) + a_4w_0
\end{aligned}$$

Fazendo $k_1k_3k = x_0$, $k_2k_3k = y_0$ e $k_4k = z_0$. Obtemos:

$$a_1x_0 + a_2y_0 + a_3z_0 + a_4w_0 = d$$

assim, se $a_1x + a_2y + a_3z + a_4w = b$ admite solução e como $b = dq$, para algum $q \in \mathbb{Z}$, então:

$$a_1(x_0q) + a_2(y_0q) + a_3(z_0q) + a_4(w_0q) = dq = b$$

o que mostra que $(x_0q,\ y_0q,\ z_0q,\ w_0q)$ é uma de suas soluções particulares.

2.2.1 Solução Geral da Equação Diofantina Linear de Quatro Variáveis

Para encontar a solução geral de uma equação diofantina linear de quatro variáveis, procederemos de forma análoga ao que foi feito para encontrar a solução geral de uma equação diofantina linear de três variáveis, só que temos que introduzir mais substituições de parâmetros .

Seja a equação $a_1x + a_2y + a_3z + a_4w = b$, com a_1, a_2, a_3, a_4, inteiros não nulos simultaneamente.

Se a equação possui solução então $d = mdc(a_1\ , a_2, a_3, a_4\ ) \mid b$.

Reduzindo essa equação para duas variáveis, considerando $a_1x + a_2y + a_3z = p'$, obtemos:

$$p' + a_4w = b$$

que possui solução, pois $mdc(1, a_4) = 1$ e $1/midb$, e tem como solução geral

$$\mathbf{S_1} = \left\{ \left(p'_0 + \frac{a_4}{d_1}t_1\ , w_0 - \frac{1}{d_1}t_1 \right) /\ t_1 \in \mathbb{Z} \right\}$$

e como o $mdc(1, a_4) = 1$, segue que

$$\mathbf{S_1} = \{(p'_0 + a_4t_1\ , w_0 - t_1)/\ t_1 \in \mathbb{Z}\}.$$

Daí, a partir dessa solução geral encontrada, escolheremos um valor conveniente para t_1, que satisfaça

$$d_2 = mdc(a_1, a_2, a_3) \mid (p'_0 + a_4t_1)$$

e daremos continuidade para encontrar a solução geral da equação

$$a_1x + a_2y\ + a_3z = p' = p'_0 + a_4t_1.$$

Para isso, faremos uma nova substituição, considerando $a_1x + a_2y = p''$.

Analisando a equação gerada pela substituição feita, temos

$$p'' + a_3 z = p'_0 + a_4 t_1$$

que assim como a anterior, possui solução, pois $mdc(1, a_3) = 1$, e tem como solução geral,

$$\mathbf{S_2} = \left\{ \left(p''_0 + \frac{a_3}{d_2} t_2 \ , z_0 - \frac{1}{d_2} t_2 \right) \ / \ t_2 \in \mathbb{Z} \right\},$$

e como o $mdc(1, a_3) = 1$, segue que

$$\mathbf{S_2} = \{ (p''_0 + a_3 t_2 \ , z_0 - t_2) \ / \ t_2 \in \mathbb{Z} \}.$$

Agora, basta encontrar a solução geral da equação $a_1 x + a_2 y = p'' = p''_0 + a_3 t_2$, escolhendo um valor conveniente para t_2, que satisfaça,

$$d_3 = mdc(a_1, a_2) \mid (p''_0 + a_3 t_2).$$

Assim, a solução geral da equação

$$a_1 x + a_2 y = p''_0 + a_3 t_2$$

é dada por:

$$\mathbf{S_3} = \left\{ \left(x_0 + \frac{a_2}{d_3} t_3, y_0 - \frac{a_1}{d_3} t_3 \right) \ / \ t_3 \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Então, a solução geral da equação original é:

$$\mathbf{S} = \left\{ \left(x_0 + \frac{a_2}{d_3} t_3, y_0 - \frac{a_1}{d_3} t_3 \ , z_0 - t_2, w_0 - t_1 \right) \ / \ t_1, \ t_2 \ \text{ e } \ t_3 \in \mathbb{Z} \right\},$$

que a cada valor conveniente atribuído aos parâmetros t_1 e t_2, gera uma nova solução geral, pois o valor de z, é obtido através do valor atribuído ao parâmetro t_1, no processo de descoberta da solução geral da equação gerada pela primeira substituição feita na equação original, além do valor atribuído ao parâmetro t_2, assim como os valores de x e y são obtidos a partir do valor atribuído anteriormente a t_1 e um valor conveniente atribuído a t_2, no processo de descoberta da solução geral da nova equação gerada pela segunda substituição.

Com isso podemos concluir que o número de parâmetros na solução geral de uma equação diofantina linear se dá da seguinte forma:

$\Diamond$ Se a equação possui duas variáveis, a solução geral estará em função de um parâmetro;

$\Diamond$ Se a equação possui três variáveis, a solução geral estará em função de dois parâmetros;

$\Diamond$ Se a equação possui quatro variáveis, a solução geral estará em função de três parâmetros;

Assim, indutivamente, uma equação diofantina linear com n variáveis, terá sua solução geral em função de $n-1$ parâmetros.

Exemplo 8 *Vejamos como encontrar a solução geral de* $120x + 65y + 90z + 45w = 25$.

Solução *Como o* $mdc(120, 65, 90, 45) = 5$ *e* $5 \mid 25$ *, então a equação possui solução.*

Dividindo a equação dada por 5 *obtemos a equação equivalente,* $24x+13y+18z+9w = 5$.

Considerando $p = 24x + 13y + 18z$ *temos que* $p+9w = 5$ *(1), que possui solução, pois* $mdc(1, 9) = 1$ *e* $1 \mid 5$.

Devemos agora encontrar a solução geral de (1).

Como o $mdc(1, 9) = 1$*, podemos fazer:*

$$\begin{aligned} 1 &= 1.(-8) + 9.1 \\ 5 &= 1.(-40) + 9.5 \end{aligned}$$

Disso temos que $(p_0, w_0) = (-40, 5)$ *é uma solução particular de (1) e*

$$\mathbf{S_1} = \{(-40 + 9t_1,\ 5 - t_1)\ /\ t_1 \in \mathbb{Z}\}$$

representa a solução geral de (1).

Voltando para a primeira substituição, temos:

$$24x + 13y + 18z \;=\; p \;=\; -40 + 9t_1$$

que possui solução qualquer que seja o valor de t_1*, pois*

$$mdc(24, 13, 18) = 1 \;\; e \; 1 \mid (-40 + 9t_1).$$

Para continuar nossa busca pela solução geral, devemos fazer uma nova substituição. Então, seja $p' = 24x + 13y$.

Dessa segunda substituição, segue que $p' + 18z = -40 + 9t_1$ *(2), que também possui solução qualquer que seja o valor de* t_1 *pois,*

$$mdc(1, 18) = 1 \;\; e \; 1 \mid (-40 + 9t_1).$$

Agora, devemos encontrar a solução geral de (2).

Já sabemos que $mdc(1, 18) = 1$*, então podemos fazer:*

$$\begin{aligned} 1 &= 1.(-17) + 18.1 \\ -40 + 9t_1 &= 1.(-17).(-40 + 9t_1) + 18.1.(-40 + 9t_1) \\ -40 + 9t_1 &= 1.(680 - 153t_1) + 18.(-40 + 9t_1) \end{aligned}$$

disso concluímos que $(p'_0, z_0) = (680 - 153t_1,\ -40 + 9t_1)$ *e a solução geral de (2) é*

$$\mathbf{S_2} = \{(680 - 153t_1 + 18t_2,\ -40 + 9t_1 - t_2) \ / \ t_1 \;\; e \; t_2 \in \mathbb{Z}\}.$$

Após ter encontrado as soluções de (1) e (2), basta agora encontrar a solução geral de

$$24x + 13y = p' \;=\; 680 - 153t_1 + 18t_2 \quad \textit{(3)}$$

que possui solução qualquer que sejam os valores de t_1 *e* t_2*, pois*

$$mdc(24,13) = 1 \text{ e } 1 \mid (680 - 153t_1 + 18t_2).$$

Utilizando o algoritmo de Euclides para mdc vem:

	1	1	5	2
24	13	11	2	1
11	2	1		

disso, segue que

$$\begin{aligned} 11 &= 24 - 13.1 \\ 2 &= 13 - 11.1 \\ 1 &= 11 - 2.5 \end{aligned}$$

logo,

$1 = 11 - 2.5 = 11 - (13 - 11.1).5 = 11.6 - 13.5 = (24 - 13.1).6 - 13.5 = 24.6 - 13.11 = 24.6 + 13.(-11)$

então,

$$\begin{aligned} 1 &= 24.6 + 13.(-11) \\ 680 - 153t_1 + 18t_2 &= 24.6.(680 - 153t_1 + 18t_2) + 13.(-11).(680 - 153t_1 + 18t_2) \\ 680 - 153t_1 + 18t_2 &= 24.(4080 - 918t_1 + 108t_2) + 13.(-7480 + 1683t_1 - 198t_2) \end{aligned}$$

disso, obtemos $(x_0,\ y_0) = (4080 - 918t_1 + 108t_2, 7480 + 1683t_1 - 198t_2)$ *e a solução geral de (3) é*

$$\mathbf{S_3} = \{(4080 - 918t_1 + 108t_2 + 13t_3,\ -7480 + 1683t_1 - 198t_2 - 24t_3)\ /\ t_1,\ t_2 \text{ e } t_3 \in \mathbb{Z}\}.$$

Com isso obtemos a solução geral para a equação $120x + 65y + 90z + 45w = 25$*,* *que é expressa por*

$$\mathbf{S} = \{(4080 - 918t_1 + 108t_2 + 13t_3, -7480 + 1683t_1 - 198t_2 - 24t_3, -40 + 9t_1 - t_2, 5 - t_1)/ \\ t_1,\ t_2 \ e\ t_3 \in \mathbb{Z}\}.$$

Tomando $t_1 = 3$, $t_2 = 2$ *e* $t_3 = 1$, *obtemos:*

$$\begin{aligned} w &= 2 \\ z &= -40 + 9.3 - 2 \ = \ -15 \\ y &= -7480 + 1683.3 - 198.2 - 24.1 \ = \ -2851 \\ x &= 4080 - 918.3 + 108.2 + 13.1 \ = 1555 \end{aligned}$$

ou seja, $(1555,\ -2851,\ -15,\ 2)$ *é uma solução particular de* $120x+65y+90z+45w = 25$.

Logo, a cada valor atribuído aos parâmetros t_1, t_2 *e* t_3, *será gerada uma nova solução particular para a equação diofantina linear de quatro variáveis dada.*

2.3 Equação Diofantina Linear com n Variáveis

Consideremos agora a equação $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + ... + a_{n-1}x_{n-1} + a_nx_n = b$, onde cada a_i , com $i = 1, 2, 3, ..., n$, sejam inteiros não nulos simultaneamente.

A mesma argumentação usada para provar a **Proposição 1.6** garante que essa equação admite soluções se, $d = mdc(a_1, a_2, a_3, ..., a_n)$ divide b.

Se $d_1 = mdc(a_1, a_2)$, então existem k_1 e $k_2 \in \mathbb{Z}$ para os quais $a_1k_1 + a_2k_2 = d_1$. E como $d_2 = mdc(d_1, a_3)$, então existem k_3, $k_4 \in \mathbb{Z}$ de maneira que $d_2 = d_1k_3 + a_3k_4$.

Procedendo de forma análoga $n - 1$ vezes, chegaremos em $d = mdc(d_{n-1}, a_n)$, então,

$$a_1(x_{1_0}q) + a_2(x_{2_0}q) + a_3(x_{3_0}q) + ... + a_{n-1}(x_{(n-1)_0}q) + a_n(x_{n_0}q) = dq = b$$

para algum $q \in \mathbb{Z}$, o que mostra que

$$(x_{1_0}q,\ x_{2_0}q,\ x_{3_0}q, ...,\ x_{(n-1)_0}q,\ x_{n_0}q)$$

é uma de suas soluções particulares.

2.3.1 Solução Geral da Equação Diofantina Linear de n Variáveis

Para encontrar a solução geral de uma equação diofantina linear de n variáveis, $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + ... + a_{n-1}x_{n-1} + a_nx_n = b$, onde cada a_i, com $i = 1,\ 2,\ 3, ..., n$, sejam inteiros não nulos simultaneamente, devemos utilizar o processo de reduzi-la a uma equação diofantina linear de duas variáveis. Para isso, faremos uma substituição de $n-1$ variáveis, por uma outra variável qualquer, diferente das já existentes. Feito isso, basta encontrar a solução geral desta nova equação gerada.

Aplicando esse processo repetidas vezes, encontraremos todos os valores de x_{i_0} com $i = 1,\ 2, 3, ..., n$, assim como desenvolvido para encontrar a solução geral das equações diofantinas lineares de três e quatro variáveis.

Então, a solução geral de uma equação diofantina linear de n variáveis, se apresenta da seguinte forma:

$$\mathbf{S} = \left\{ \left(x_{1_0} + \frac{a_2}{d_{n-1}} t_{n-1},\ x_{2_0} - \frac{a_1}{d_{n-1}} t_{n-1},\ x_{3_0} - t_{n-2}, ...,\ x_{n_0} - t_1 \right) / t_i \in \mathbb{Z}, \text{com } i = 1, 2, 3, ..., n-1 \right\}$$

sendo $d_{n-1} = mdc(a_1, a_2)$.

Exemplo 9 *Encontre a solução geral de* $32x - 60y - 24z + 42w + 14u = 12$.

Solução *Como o* $mdc(32, 60, 24, 42, 14) = 2$ *e* $2 \mid 12$ *, então a equação possui solução.*

Dividindo a equação dada por 2 *obtemos a equação equivalente,* $16x - 30y - 12z + 21w + 7u = 6$.

Seja $p = 16x - 30y - 12z + 21w$*, daí,* $p + 7u = 6$ *(1), também possui solução, pois* $mdc(1, 7) = 1$ *e* $1 \mid 6$.

Então,

$$\begin{aligned} 1 &= 1.(-6) + 7.1 \\ 6 &= 1.(-36) + 7.6 \end{aligned}$$

logo, $(-36, 6)$ *é uma solução particular de (1), que nos leva a solução geral*

$$\mathbf{S_1} = \{(-36 + 7t_1\ , 6 - t_1)\ /\ t_1 \in \mathbb{Z}\}.$$

Para continuarmos nossa busca pela solução geral, faremos

$$16x - 30y - 12z + 21w = p = -36 + 7t_1$$

que possui solução, qualquer que seja o valor para t_1 *, pois* $mdc(16, 30, 12, 21) = 1$.

Considerando $p' = 16x - 30y - 12z$, *obtemos* $p' + 21w = -36 + 7t_1$ *(2) e como o* $mdc(1, 21) = 1$, *qualquer que seja o valor de* t_1 *teremos o* $mdc(1, 21)$ *dividindo* $-36 + 7t_1$.

Então, podemos fazer

$$\begin{aligned} 1 &= 1.(-20) + 21.1 \\ -36 + 7t_1 &= 1.(-20).(-36 + 7t_1) + 21.1.(-36 + 7t_1) \\ -36 + 7t_1 &= 1.(720 - 140t_1) + 21.(-36 + 7t_1) \end{aligned}$$

que possui $(720 - 140t_1, -36 + 7t_1)$ *como uma solução particular e*

$$\mathbf{S_2} = \{(720 - 140t_1 + 21t_2, -36 + 7t_1 - t_2) \ / \ t_1 \ e \ t_2 \in \mathbb{Z}\}$$

como solução geral de (2).

Seja agora,

$$16x - 30y - 12z = p' = 720 - 140t_1 + 21t_2$$

que possui solução atribuindo um valor para t_2, *de forma que* $720 - 140t_1 + 21t_2$ *seja divisível por* $2 = mdc(16, 30, 12)$.

Tomando $p'' = 16x - 30y$, *obtemos* $p'' - 12z = 720 - 140t_1 + 21t_2$ *(3). Assim como anteriormente, qualquer que seja o valor de* t_2 *teremos o* $mdc(1, 12)$ *dividindo* $720 - 140t_1 + 21t_2$, *logo,*

$$\begin{aligned} 1 &= 1.13 - 12.1 \\ 720 - 140t_1 + 21t_2 &= 1.13.(720 - 140t_1 + 21t_2) - 12.1.(720 - 140t_1 + 21t_2) \\ 720 - 140t_1 + 21t_2 &= 1.(9360 - 1820t_1 + 273t_2) - 12.(720 - 140t_1 + 21t_2) \end{aligned}$$

que possui como uma solução particular $(9360 - 1820t_1 + 273t_2, 720 - 140t_1 + 21t_2)$ *e*

$$\mathbf{S_3} = \{(9360 - 1820t_1 + 273t_2 - 12t_3, 720 - 140t_1 + 21t_2 - t_3) \ / \ t_1 \ , \ t_2 \ e \ t_3 \in \mathbb{Z}\}$$

como solução geral de (3).

Finalmente, seja

$$16x - 30y = p'' = 9360 - 1820t_1 + 273t_2 - 12t_3 \qquad (4)$$

e como $mdc(16, 30) = 2$ *devemos escolher um valor conveniente para* t_3 *que faça com que* 2 *divida* $9360 - 1820t_1 + 273t_2 - 12t_3$.

Utilizando o algoritmo de Euclides para o mdc, vem:

	1	1	7
30	16	14	2
14	2		

então,

$$\begin{aligned} 14 &= 30 - 16.1 \\ 2 &= 16 - 14.1 \end{aligned}$$

daí,

$$2 = 16 - 14.1 = 2 = 16 - (30 - 16.1).1 = 16.2 - 30.1$$

com isso, temos

$$\begin{aligned} 2 &= 16.2 - 30.1 \\ 2.\left(\frac{9360 - 1820t_1 + 273t_2 - 12t_3}{2}\right) &= 16.2.\left(\frac{9360 - 1820t_1 + 273t_2 - 12t_3}{2}\right) - \\ &\quad -30.1.\left(\frac{9360 - 1820t_1 + 273t_2 - 12t_3}{2}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 9360 - 1820t_1 + 273t_2 - 12t_3 &= 16.(9360 - 1820t_1 + 273t_2 - 12t_3) - \\ &\quad -30.\left(\frac{9360 - 1820t_1 + 273t_2 - 12t_3}{2}\right) \end{aligned}$$

que possui como solução particular

$$\left(9360 - 1820t_1 + 273t_2 - 12t_3, \frac{9360 - 1820t_1 + 273t_2 - 12t_3}{2}\right)$$

e

$$\mathbf{S_4} = \left\{\left(9360 - 1820t_1 + 273t_2 - 12t_3 - \frac{30}{2}t_4, \frac{9360 - 1820t_1 + 273t_2 - 12t_3}{2} - \frac{16}{2}t_4\right) / t_1, t_2, t_3, t_4 \in \mathbb{Z}\right\}$$

como solução geral de (4).

Assim, podemos concluir que

$$\mathbf{S} = \left\{\left(9360 - 1820t_1 + 273t_2 - 12t_3 - 15t_4, \frac{9360 - 1820t_1 + 273t_2 - 12t_3}{2} - 8t_4,\right.\right.$$
$$\left. 720 - 140t_1 + 21t_2 - t_3,\ -36 + 7t_1 - t_2,\ 6 - t_1) / t_1, t_2, t_3\ e\, t_4 \in \mathbb{Z}\right\}$$

é a solução geral da equação $32x - 60y - 24z + 42w + 14u = 12$.

Agora, a partir da solução geral obtida, é possível encontrar uma solução particular qualquer para a equação.

Tomando $t_1 = 7$, $t_2 = 4$, $t_3 = 2$ *e* $t_4 = 11$, *obtemos*

$$\begin{aligned}
u &= -1 \\
w &= -36 + 7.7 - 4 = 9 \\
z &= 720 - 140.7 + 21.4 - 2 = -178 \\
y &= \frac{9360 - 1820.7 + 273.4 - 12.2}{2} - 8.11 = -1244 \\
x &= 9360 - 1820.7 + 273.4 - 12.2 - 15.11 = -2477
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\mathbf{S} = \{(-2477, -1244, -178, 9, -1)\}$$

que é uma solução particular da equação dada, logo

$$32.(-2477) - 60.(-1244) - 24.(-178) + 42.9 + 14.(-1) = 12.$$

Exemplo 10 *Encontre a solução geral para* $45x - 15y - 27z + 36w + 16u - 8v = 43$.

Solução *Temos que o* $mdc(45, 15, 27, 36, 16, 8) = 1$ *e* $1 \mid 43$, *então a equação possui solução.*

Fazendo uma substituição de cinco variáveis por uma, daremos início no processo de descoberta da solução geral da referida equação.

Considerando $p = 45x - 15y - 27z + 36w + 16u$, *obtemos* $p - 8v = 43$ *(1), que também possui solução, pois* $mdc(1, 8) = 1$ *e* $1 \mid 43$.

Do fato de se ter $mdc(1, 8) = 1$, *podemos fazer:*

$$\begin{aligned} 1 &= 1.9 - 8.1 \\ 43 &= 1.387 - 8.43 \end{aligned}$$

e disso, encontramos $(p_0, v_0) = (387, 43)$, *que representa uma solução particular de (1) e*

$$\mathbf{S_1} = \{(387 - 8t_1,\ 43 - t_1)/\ t_1 \in \mathbb{Z}\}$$

como solução geral de (1).

Voltando para a primeira substituição, temos:

$$45x - 15y - 27z + 36w + 16u = p = 387 - 8t_1$$

que possui solução qualquer que seja o valor de t_1, *pois* $mdc(45, 15, 27, 36, 16) = 1 \mid 43$.

Com uma nova substituição de quatro variáveis por uma, considerando $p' = 45x - 15y - 27z + 36w$, *obtemos* $p' + 16u = 387 - 8t_1$ *(2), que também possui solução pois* $mdc(1, 16) = 1 \mid (387 - 8t_1)$.

Então, como $mdc(1, 16) = 1$ *segue que*

$$\begin{aligned} 1 &= 1.(-15) + 16.1 \\ 387 - 8t_1 &= 1.(-15).(387 - 8t_1) + 16.1.(387 - 8t_1) \\ 387 - 8t_1 &= 1.(-5805 + 120t_1) + 16.(387 - 8t_1) \end{aligned}$$

então, $(p_0', u_0) = (-5805 + 120t_1, 387 - 8t_1)$ *e a solução geral de (2) é*

$$\mathbf{S_2} = \{(-5805 + 120t_1 + 16t_2,\ 387 - 8t_1 - t_2)/\ t_1 \ e\ t_2 \in \mathbb{Z}\}.$$

Voltando para a segunda substituição, temos:

$$45x - 15y - 27z + 36w = p' = -5805 + 120t_1 + 16t_2$$

e para que a equação acima possua solução, devemos atribuir valores a t_1 *e* t_2*, de forma que*

$$mdc(45, 15, 27, 36) = 3 \mid (-5805 + 120t_1 + 16t_2).$$

Para continuar nossa busca pela solução geral, faremos uma substituição de três variáveis por uma, considerando $p'' = 45x - 15y - 27z$.

Dessa substituição, obtemos $p'' + 36w = -5805 + 120t_1 + 16t_2$ *(3), que possui solução pois* $mdc(1, 36) = 3 \mid (-5805 + 120t_1 + 16t_2)$ *qualquer que sejam os valores de* t_1 *e* t_2.

Daí,

$$\begin{aligned}
1 &= 1.(-35) + 36.1 \\
-5805 + 120t_1 + 16t_2 &= 1.(-35).(-5805 + 120t_1 + 16t_2) + 36.1.(-5805 + 120t_1 + 16t_2) \\
-5805 + 120t_1 + 16t_2 &= 1.(203175 - 4200t_1 - 560t_2) + 16.(-5805 + 120t_1 + 16t_2)
\end{aligned}$$

que resulta em, $(p_0'', w_0) = (203175 - 4200t_1 - 560t_2, -5805 + 120t_1 + 16t_2)$ *e gera*

$$\mathbf{S_3} = \{(203175 - 4200t_1 - 560t_2 + 36t_3,\ -5805 + 120t_1 + 16t_2 - t_3)/\ t_1,\ t_2\ e\ t_3 \in \mathbb{Z}\}$$

como solução geral de (3).

Agora, devemos voltar na terceira substituição feita, ou seja,

$$45x - 15y - 27z = p'' = 203175 - 4200t_1 - 560t_2 + 36t_3$$

e para que essa equação possua solução, devemos atribuir valores convenientes a t_1, t_2 *e*

t_3, de forma que

$$mdc(45,15,27) = 3 \mid (203175 - 4200t_1 - 560t_2 + 36t_3).$$

Com a substituição de duas variáveis por uma, considerando $p''' = 45x - 15y$, obtemos $p''' - 27z = 203175 - 4200t_1 - 560t_2 + 36t_3$ (4), que possui solução qualquer que sejam os valores de t_1, t_2 e t_3, pois $mdc(1,27) = 1 \mid (203175 - 4200t_1 - 560t_2 + 36t_3)$.

Resolvendo (4), vem:

$$\begin{aligned}
1 &= 1.28 - 27.1 \\
203175 - 4200t_1 - 560t_2 + 36t_3 &= 1.28.(203175 - 4200t_1 - 560t_2 + 36t_3) - \\
&\qquad -27.1.(203175 - 4200t_1 - 560t_2 + 36t_3) \\
203175 - 4200t_1 - 560t_2 + 36t_3 &= 1.(5688900 - 117600t_1 - 15680t_2 + 1008t_3) - \\
&\qquad -27.1.(203175 - 4200t_1 - 560t_2 + 36t_3)
\end{aligned}$$

que gera $(p_0''', z_0) = (5688900 - 117600t_1 - 15680t_2 + 1008t_3, 203175 - 4200t_1 - 560t_2 + 36t_3)$ e tem como solução geral para (4),

$$\mathbf{S_4} = \{(5688900 - 117600t_1 - 15680t_2 + 1008t_3 - 27t_4, 203175 - 4200t_1 - 560t_2 + 36t_3 - t_4)/t_1, t_2, t_3 \text{ e } t_4 \in \mathbb{Z}\}.$$

Finalmente, basta voltar para a quarta substituição e resolver a equação, ou seja,

$$45x - 15y = p''' = 5688900 - 117600t_1 - 15680t_2 + 1008t_3 - 27t_4 \quad (5)$$

e para que essa equação possua solução, devemos atribuir valores convenientes a t_1, t_2, t_3 e t_4, de forma que

$$mdc(45,15) = 15 \mid (5688900 - 117600t_1 - 15680t_2 + 1008t_3 - 27t_4).$$

Do fato de se ter $mdc(45,15) = 15$, segue que

$$15 = 45.1 - 15.2$$

$$15.\left(\frac{5688900 - 117600t_1 - 15680t_2 + 1008t_3 - 27t_4}{15}\right) =$$

$$= 45.1.\left(\frac{5688900 - 117600t_1 - 15680t_2 + 1008t_3 - 27t_4}{15}\right) -$$

$$-15.2.\left(\frac{5688900 - 117600t_1 - 15680t_2 + 1008t_3 - 27t_4}{15}\right)$$

$$5688900 - 117600t_1 - 15680t_2 + 1008t_3 - 27t_4 =$$

$$= 45.\left(379260 - 7840t_1 - \frac{3136}{3}t_2 + \frac{336}{5}t_3 - \frac{9}{5}t_4\right) -$$

$$-15.\left(758520 - 15680t_1 - \frac{6272}{3}t_2 + \frac{672}{5}t_3 - \frac{18}{5}t_4\right)$$

Com isso, obtemos (x_0, y_0) como sendo

$$\left(379260 - 7840t_1 - \frac{3136}{3}t_2 + \frac{336}{5}t_3 - \frac{9}{5}t_4,\ 758520 - 15680t_1 - \frac{6272}{3}t_2 + \frac{672}{5}t_3 - \frac{18}{5}t_4\right)$$

e

$$\mathbf{S_5} = \left\{\left(379260 - 7840t_1 - \frac{3136}{3}t_2 + \frac{336}{5}t_3 - \frac{9}{5}t_4 - \frac{15}{15}t_5, 758520 - 15680t_1 - \frac{6272}{3}t_2 + \frac{672}{5}t_3 - \right.\right.$$
$$\left.\left. - \frac{18}{5}t_4 - \frac{45}{15}t_5\right) \textit{tal que } t_1, t_2, t_3, t_4 \textit{ e } t_5 \in \mathbb{Z}\right\}.$$

como solução geral de (5).

Logo, a solução geral para a equação original é

$$\mathbf{S} = \left\{\left(379260 - 7840t_1 - \frac{3136}{3}t_2 + \frac{336}{5}t_3 - \frac{9}{5}t_4 - t_5, 758520 - 15680t_1 - \frac{6272}{3}t_2 + \frac{672}{5}t_3 - \frac{18}{5}t_4 - \right.\right.$$
$$-3t_5, 203175 - 4200t_1 - 560t_2 + 36t_3 - t_4, -5805 + 120t_1 + 16t_2 - t_3, 387 - 8t_1 - t_2, 43 - t_1)$$
$$\textit{tal que } t_1, t_2, t_3, t_4 \textit{ e } t_5 \in Z\}.$$

Para encontrar uma solução particular, basta atribuir valores convenientes aos *parâmetros, então, se* $t_1 = 1$, $t_2 = 3$, $t_3 = -1$, $t_4 = -4$ *e* $t_5 = 2$, *temos:*

$$\begin{aligned}
v &= 42\\
u &= 387 - 8.1 - 3 = 376\\
w &= -5805 + 120.1 + 16.3 - (-1) = 636\\
z &= 203175 - 4200.1 - 560.3 + 36.(-1) - (-4) = 197263\\
y &= 758520 - 15680.1 - \frac{6272}{3}.3 + \frac{672}{5}.(-1) - \frac{18}{5}.(-4) - 3.2 = 736442\\
x &= 379260 - 7840.1 - \frac{3136}{3}.3 + \frac{336}{5}.(-1) - \frac{9}{5}.(-4) - 2 = 368222
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\mathbf{S} = \{(42, 376, 636, 197263, 736442, 368222)\}.$$

Capítulo 3

Resolução de Problemas

Sabemos que a interpretação e resolução de problemas é recorrente na área de exatas e após uma observação em POMMER [2008], onde são apresentados problemas envolvendo duas variáveis, em POMMER [2012] e em HEFEZ [2009], fizemos a construção desse capítulo.

Analisando o fato de que atualmente, com a aplicação das provas do ENEM, a interpretação de problemas tem sido de fundamental importância para um bom desempenho, juntamente com os conhecimentos científicos adquiridos durante a vida estudantil. Além disso, uma de uma boa visão de mundo e atualidades. Sendo assim, entendemos que é de grande valia a abordagem dessa questão.

Como a interpretação e resolução de problemas está presente em situações do nosso cotidiano, deve ser trabalhada efetivamente com os alunos da educação básica, mostrando ao aluno a aplicação de tais conhecimentos nessas situações, por esse motivo, além de simplesmente mostrar como resolver equações diofantinas lineares, também resolveremos problemas cuja interpretação matemática gera uma equação diofantina linear.

Neste capítulo, aplicaremos os conceitos mostrados nos capítulos anteriores, considerados pré-requisitos, na interpretação e resolução dos seguintes problemas.

Problema 1 *Um parque de diversões cobra R$ 1,00 a entrada de crianças e R$ 3,00 a entrada de adultos. Para que a arrecadação de um dia seja R$ 200,00; qual o menor número de pessoas, entre adultos e crianças, que poderiam estar no parque nesse dia? Quantas crianças? Quantos adultos?*

Solução *Considerando o número de crianças sendo x e o número de adultos como y, a interpretação matemática do problema gera a equação $1x + 3y = 200$, que é uma equação diofantina linear com duas variáveis. Agora, para encontrar a solução desse problema basta resolver a equação diofantina gerada.*

Como o $mdc(1,3) = 1$ *e* $1 \mid 200$ *a equação possui solução, daí,*

$$1 = 1.(-2) + 3.1$$

então

$$200 = 1.(-400) + 3.200$$

logo, todos os possíveis valores para x e y se apresentam da seguinte forma:

$$x = -400 + 3t \quad e \quad y = 200 - t \ \ com \ t \in \mathbb{Z}.$$

Como x e y representam números de pessoas, eles devem ser números naturais, sendo assim, devemos fazer:

$$-400 + 3t \geq 0 \ \ e \ \ 200 - t \geq 0$$

que geram o intervalo,

$$134 \leq t \leq 200.$$

Além disso, devemos encontrar o menor número de pessoas e para que isso ocorra, t deve assumir o menor valor no intervalo, que é 134.

Então, com base nesses dados, segue que,

$$x = -400 + 3.134 = 2 \quad e \quad y = 200 - 134 = 66.$$

Então, o menor número de pessoas que esteve no parque nesse dia foi 68 pessoas, sendo 2 crianças e 66 adultos.

Problema 2 *Uma certa quantidade de maçãs é dividida em 37 montes de igual número. Após serem retiradas 17 frutas, as restantes são acondicionadas em 79 caixas, cada uma com a mesma quantidade. Quantas maçãs foram colocadas em cada caixa? Quantas maçãs tinha cada monte?*

Solução *Considerando que o número total de maçãs é x e o número de maçãs em cada monte é y, temos:*

$$\frac{x}{37} = y$$

que representa a primeira equação do problema.

Analisando a segunda informação do problema, onde, x representa o número de maçãs e z representa o número de maçãs em cada caixa, vem:

$$\frac{x-17}{z} = 79$$

que representa a segunda equação do problema.

Das duas equações, vem:

$$37y - 17 = 79z$$

que é uma equação diofantina linear de duas variáveis, daí, para encontrar a solução do problema, basta resolver a equação diofantina gerada.

Organizando a equação $37y - 17 = 79z$, obtemos $37y - 79z = 17$, e como $mdc(37, 79) = 1$ e $1 \mid 17$ a equação possui solução, agora devemos encontrá-la.

Utilizando o algoritmo de Euclides, temos:

	2	7	2	2
79	37	5	2	1
5	2	1		

que gera:

$$\begin{aligned} 5 &= 79 - 37.2 \\ 2 &= 37 - \ \ 5.7 \\ 1 &= \ \ 5 - \ \ 2.2 \end{aligned}$$

logo,

$1 = 5-2.2 = 5-2.(37-5.7) = 5.15-2.37 = (79-37.2).15-2.37 = 79.15-37.32 = 37.(-32) - 79.(-15)$

daí,

$$\begin{aligned} 1 &= 37.(-32) - 79.(-15) \\ 17 &= 37.(-32.17) - 79.(-15.17) \\ 17 &= 37.(-544) - 79.(-255) \end{aligned}$$

que tem como solução geral:

$$y = -544 - 79t \quad e \quad z = -255 - 37t \quad com \ \ t \in \mathbb{Z}.$$

Mas como o problema trata sobre maçãs, então, y e z devem ser números naturais, sendo assim,

$$-544 - 79t \geq 0 \quad e \ -255 - 37t \geq 0$$

que são equivalentes a,

$$t \leq -7$$

logo, o menor número de maçãs em cada monte, y, é obtido com $t = -7$, que é o maior valor possível para t, daí

$$y = -544 - 79.(-7) = 9, \ z = -255 - 37.(-7) = 4 \ \ e \ \ x = 37.9 = 333.$$

Então, foram colocadas 4 maçãs em cada caixa e em cada monte havia 9 maçãs, no mínimo.

Fazendo uma análise ao problema, podemos fazer a seguinte analogia:

$$y = 9 + 79t \quad e \quad z = 4 + 37t \quad com \quad t \in \mathbb{N}$$

que nos dá o número de maçãs em cada monte e o número de maçãs em cada caixa, respectivamente.

Problema 3 *Deseja-se sacar R\$ 1000,00 em notas de R\$ 2,00, R\$ 5,00 e R\$ 10,00. Apresente um método para encontrar formas distintas de efetuar esse saque?*

Solução *De acordo com o problema podemos gerar a seguinte equação diofantina:* $2x + 5y + 10z = 1000$, *onde x representa o número de notas de 2, y o número de notas de 5 e z o número de notas de 10, onde é obrigatório o saque de pelo menos uma nota de cada tipo.*

Para responder a pergunta basta encontrar a solução geral da equação gerada.

Como $mdc(2, 5, 10) = 1$ *e* $1 \mid 1000$, *segue que o problema possui solução.*

Fazendo $2x + 5y = p$, *temos,* $p + 10z = 1000$ *e como* $mdc(1, 10) = 1$, *podemos fazer:*

$$\begin{aligned} 1 &= 1.(-9) + 10.1 \\ 1000 &= 1.(-9000) + 10.1000 \end{aligned}$$

daí,

$p = -9000 + 10t_1$ *e* $z = 1000 - t_1$, *e como p e z devem ser números inteiros positivos, devemos ter,*

$$-9000 + 10t_1 > 0 \Leftrightarrow 10t_1 > 9000 \Leftrightarrow t_1 > 900$$

$$e$$

$$1000 - t_1 > 0 \Leftrightarrow -t_1 > -1000 \Leftrightarrow t_1 < 1000$$

que gera, $900 < t_1 < 1000$ *com* $t_1 \in \mathbb{Z}$.

Para encontrar x e y devemos escolher um valor conveniente para t_1, de forma que o $mdc(2, 5)$ *divida p.*

Como o $mdc(2,5) = 1$, *então* t_1 *pode assumir qualquer valor no intervalo.*

Seja $t_1 = 901$, *então,* $2x + 5y = p = -9000 + 10t_1 = -9000 + 10.901 = 10$.

Utilizando o algoritmo de Euclides para o $mdc(2,5)$, *temos:*

	2	2
5	2	1
1		

então,

$$\begin{aligned} 1 &= 5.1 - 2.2 \\ 1 &= 2.(-2) + 5.1 \\ 10 &= 2.(-20) + 5.10 \end{aligned}$$

daí,

$x = -20 + 5t_2$ *e* $y = 10 - 2t_2$ *e como* x *e* y *devem ser números inteiros positivos, devemos ter,*

$$-20 + 5t_2 > 0 \Leftrightarrow 5t_1 > 20 \Leftrightarrow t_1 > 4$$

e

$$10 - 2t_1 > 0 \Leftrightarrow -2t_1 > -10 \Leftrightarrow t_1 < 5$$

que gera, $4 < t_2 < 5$, *logo, para* $t_1 = 901$, *não há* $t_2 \in \mathbb{Z}$ *que satisfaça, ou seja, nenhuma forma de efetuar o saque.*

Agora, seja $t_1 = 902$, *então,* $2x + 5y = p = -9000 + 10t_1 = -9000 + 10.902 = 20$.

Como já foi mostrado, temos que

$$1 = 2.(-2) + 5.1$$

então,

$$20 = 2.(-40) + 5.20$$

daí,

$x = -40 + 5t_2$ *e* $y = 20 - 2t_2$ *e como* x *e* y *devem ser números inteiros positivos,* *devemos ter* $8 < t_2 < 10$, *que resulta em* $t_2 = 9$, *que representa uma maneira de efetuar o saque.*

Para $t_1 = 903$, *temos,* $2x + 5y = p = -9000 + 10t_1 = -9000 + 10.903 = 30$, *que pode ser representada assim,*

$$\begin{aligned} 1 &= 2.(-2) + 5.1 \\ 30 &= 2.(-60) + 5.30 \end{aligned}$$

daí,

$x = -60 + 5t_2$ *e* $y = 30 - 2t_2$ *e como* x *e* y *devem ser números inteiros positivos, segue que,* $12 < t_2 < 15$, *ou seja, duas maneiras de efetuar o saque.*

Tomando qualquer valor para t_1 *no referido intervalo, teremos também uma determinada quantidade de* t_2, *com isso encontraremos todas as maneiras de efetuar o saque.*

Com $t_1 = 950$, *temos,* $2x + 5y = p = -9000 + 10t_1 = -9000 + 10.950 = 500$, *daí,*

$$\begin{aligned} 1 &= 2.(-2) + 5.1 \\ 500 &= 2.(-1000) + 5.500 \end{aligned}$$

que gera,

$x = -1000 + 5t_2$ *e* $y = 500 - 2t_2$ *e como* x *e* y *devem ser números inteiros positivos, devemos ter* $200 < t_2 < 250$, *ou seja,* $250 - 200 - 1 = 49$ *maneiras de efetuar o saque.*

Com base no que foi mostrado acima, podemos concluir que existem várias maneiras diferentes de se efetuar o saque. Para encontrar todas essas maneiras, devemos analisar os intervalos de t_2 *e* t_1, *e para fazer esta análise de forma mais eficiente, basta colocarmos* t_2 *em função de* t_1 *, pois a partir da escolha de um valor conveniente para* t_1, *encontraremos o intervalo apropriado para* t_2.

Para encontrar t_2 *em função de* t_1, *faremos* $2x + 5y = p = -9000 + 10t_1$.

Utilizando o algoritmo de Euclides, temos:

	2	2
5	2	1
1		

que gera

$$\begin{aligned}
1 &= 5.1 - 2.2 \\
1 &= 2.(-2) + 5.1 \\
-9000 + 10t_1 &= 2.(-2)(-9000 + 10t_1) + 5.1.(-9000 + 10t_1) \\
-9000 + 10t_1 &= 2.(18000 - 20t_1) + 5.(-9000 + 10t_1)
\end{aligned}$$

daí,

$x = 18000 - 20t_1 + 5t_2$ *e* $y = -9000 + 10t_1 - 2t_2$ *e como* x *e* y *devem ser números inteiros positivos, devemos ter:*

$$18000 - 20t_1 + 5t_2 > 0 \Longleftrightarrow t_2 > 4t_1 - 3600$$

e

$$-9000 + 10t_1 - 2t_2 > 0 \Longleftrightarrow t_2 < 5t_1 - 4500$$

ou seja,

$$4t_1 - 3600 < t_2 < 5t_1 - 4500$$

que representa o intervalo procurado, pois gera, juntamente com o intervalo de t_1*, cada uma das diferentes maneiras de efetuar o saque.*

Façamos alguns testes.

Se $t_1 = 901$*, temos*

$$4t_1 - 3600 < t_2 < 5t_1 - 4500$$

$$4.901 - 3600 < t_2 < 5.901 - 4500$$

$$4 < t_2 < 5$$

ou seja, para $t_1 = 901$ *não existe* t_2*, gerando assim, nenhuma maneira de efetuar o saque, tal como foi mostrado anteriormente.*

Seja agora, $t_1 = 902$*, daí,*

$$4t_1 - 3600 < t_2 < 5t_1 - 4500$$

$$4.902 - 3600 < t_2 < 5.902 - 4500$$

$$8 < t_2 < 10$$

ou seja, para $t_1 = 902$*, temos* $10 - 8 - 1 = 1$ *maneira de efetuar o saque.*

Se $t_1 = 950$*, vem,*

$$4t_1 - 3600 < t_2 < 5t_1 - 4500$$

$$4.950 - 3600 < t_2 < 5.950 - 4500$$

$$200 < t_2 < 250$$

ou seja, para $t_1 = 950$*, temos* $250 - 200 - 1 = 49$ *maneiras de efetuar o saque.*

Com isso, fica provado que o intervalo encontrado para t_2 *nos dá de forma eficiente, todas as possíveis maneiras de efetuar o saque, baseados no intervalo de* t_1*, ou seja, o método apresentado é verdadeiro.*

Problema 4 *Deseja-se sacar R$ 40,00 em notas de R$ 2,00, R$ 5,00 ou R$ 10,00. De quantas maneiras é possível efetuar esse saque?*

Solução *Podemos perceber que este problema é semelhante ao exemplo anterior, com a diferença que neste, podemos considerar também, saques com notas apenas de um tipo ou saques com notas de dois tipos.*

Como já foi mostrado, a equação diofantina gerada é: $2x + 5y + 10z = 40$*, onde* x *representa o número de notas de 2,* y *o número de notas de 5 e* z *o número de notas de 10.*

Para responder a pergunta basta encontrar a solução geral da equação gerada.

Aproveitando os cálculos desenvolvidos no exemplo anterior, temos:

$2x + 5y = p$, daí, $p + 10z = 40$ e como $mdc(1, 10) = 1$, podemos fazer:

$$\begin{aligned} 1 &= 1.(-9) + 10.1 \\ 40 &= 1.(-360) + 10.40 \end{aligned}$$

então,

$p = -360 + 10t_1$ e $z = 40 - t_1$ e como p e z devem ser números naturais, devemos ter,

$$-360 + 10t_1 \geq 0 \Leftrightarrow 10t_1 \geq 360 \Leftrightarrow t_1 \geq 36$$

e

$$40 - t_1 \geq 0 \Leftrightarrow -t_1 \geq -40 \Leftrightarrow t_1 \leq 40$$

que gera $36 \leq t_1 \leq 40$ com $t_1 \in \mathbb{Z}$.

Para encontrar os valores para x e y , faremos:

$$2x + 5y = p = -360 + 10t_1$$

e como o $mdc(2, 5) = 1$, qualquer que seja o valor de t_1 sempre teremos 1 dividindo $p = -360 + 10t_1$, então,

$$\begin{aligned} 1 &= 2.(-2) + 5.1 \\ -360 + 10t_1 &= 2.(-2).(-360 + 10t_1) + 5.1.(-360 + 10t_1) \\ -360 + 10t_1 &= 2.(720 - 20t_1) + 5.(-360 + 10t_1) \end{aligned}$$

daí,

$x = 720 - 20t_1 + 5t_2$ e $y = -360 + 10t_1 - 2t_2$ e como x e y devem ser números naturais, devemos ter

$$720 - 20t_1 + 5t_2 \geq 0 \Longleftrightarrow t_2 \geq 4t_1 - 144$$

e

$$-360 + 10t_1 - 2t_2 \geq 0 \Longleftrightarrow t_2 \leq 5t_1 - 180$$

que gera, $4t_1 - 144 \ \leq t_2 \leq 5t_1 - 180$ *com* $t_2 \in \mathbb{Z}$.

Então, para encontrar todas as possíveis formas de efetuar o saque faremos as escolhas para t_1 *no intervalo* $[36, 40]$.

1. *Se* $t_1 = 36$*, temos que,* $4.36 - 144 \ = 0 \leq t_2 \leq 5.36 - 180 = 0$*, ou seja,* $t_2 = 0$*, que representa* ***uma*** *maneira de efetuar o saque.*

   Para encontrar a configuração desse saque, basta substituirmos os valores encontrados para t_1 *e* t_2 *em* x*,* y *e* z*, assim,*

   $z = 40 - t_1 = 40 - 36 = 4$

   $y = -360 + 10t_1 - 2t_2 = -360 + 10.36 - 2.0 = 0$

   $x = 720 - 20t_1 + 5t_2 = 720 - 20.36 + 5.0 = 0$

   ou seja, o saque será feito somente com quatro notas de dez.

2. *Se* $t_1 = 37$*, temos que,* $4.37 - 144 = 4 \leq t_2 \leq 5.37 - 180 = 5$*, ou seja,* ***duas*** *maneiras de efetuar o saque.*

   Nesse caso, para encontrar essa configuração, procederemos como ao anterior, mas, devendo analisar, $t_2 = 4$ *e* $t_2 = 5$*;*

   I) *para* $t_1 = 37$ *e* $t_2 = 4$

   $z = 40 - t_1 = 40 - 37 = 3$

   $y = -360 + 10t_1 - 2t_2 = -360 + 10.37 - 2.4 = 2$

   $x = 720 - 20t_1 + 5t_2 = 720 - 20.37 + 5.4 = 0$

   ou seja, o saque será feito apenas com duas notas de cinco e três notas de dez;

   II) *para* $t_1 = 37$ *e* $t_2 = 5$

   $z = 40 - t_1 = 40 - 37 = 3$

   $y = -360 + 10t_1 - 2t_2 = -360 + 10.37 - 2.5 = 0$

   $x = 720 - 20t_1 + 5t_2 = 720 - 20.37 + 5.5 = 5$

   então, o saque será feito apenas com cinco notas de dois e três notas de dez.

3. *Se* $t_1 = 38$*, temos que,* $4.38 - 144 = 8 \leq t_2 \leq 5.38 - 180 = 10$*, ou seja,* ***três*** *maneiras de efetuar o saque.*

Nesse caso, analisaremos, $t_2 = 8$*,* $t_2 = 9$ *e* $t_2 = 10$*;*

I) *para* $t_1 = 38$ *e* $t_2 = 8$

$z = 40 - t_1 = 40 - 38 = 2$

$y = -360 + 10t_1 - 2t_2 = -360 + 10.38 - 2.8 = 4$

$x = 720 - 20t_1 + 5t_2 = 720 - 20.38 + 5.8 = 0$

ou seja, o saque será feito apenas com quatro notas de cinco e duas notas de dez;

II) *para* $t_1 = 38$ *e* $t_2 = 9$

$z = 40 - t_1 = 40 - 38 = 2$

$y = -360 + 10t_1 - 2t_2 = -360 + 10.38 - 2.9 = 2$

$x = 720 - 20t_1 + 5t_2 = 720 - 20.38 + 5.9 = 5$

então, o saque será feito com cinco notas de dois, duas notas de cinco e duas notas de dez;

III) *para* $t_1 = 38$ *e* $t_2 = 10$

$z = 40 - t_1 = 40 - 38 = 2$

$y = -360 + 10t_1 - 2t_2 = -360 + 10.38 - 2.10 = 0$

$x = 720 - 20t_1 + 5t_2 = 720 - 20.38 + 5.10 = 10$

neste, o saque será feito apenas com dez notas de dois e duas notas de dez.

4. Se $t_1 = 39$*, temos que,* $4.39 - 144 = 12 \leq t_2 \leq 5.39 - 180 = 15$*, ou seja,* ***quatro*** *maneiras de efetuar o saque;*

I) *para* $t_1 = 39$ *e* $t_2 = 12$

$z = 40 - t_1 = 40 - 39 = 1$

$y = -360 + 10t_1 - 2t_2 = -360 + 10.39 - 2.12 =$

$x = 720 - 20t_1 + 5t_2 = 720 - 20.39 + 5.12 = 0$

ou seja, o saque será feito apenas com seis notas de cinco e uma nota de dez;

II) *para* $t_1 = 39$ *e* $t_2 = 13$

$z = 40 - t_1 = 40 - 39 = 1$

$y = -360 + 10t_1 - 2t_2 = -360 + 10.39 - 2.13 = 4$

$x = 720 - 20t_1 + 5t_2 = 720 - 20.39 + 5.13 = 5$

então, o saque será feito com cinco notas de dois, quatro notas de cinco e uma nota de dez;

III) *para* $t_1 = 39$ *e* $t_2 = 14$

$z = 40 - t_1 = 40 - 39 = 1$

$y = -360 + 10t_1 - 2t_2 = -360 + 10.39 - 2.14 = 2$

$x = 720 - 20t_1 + 5t_2 = 720 - 20.39 + 5.14 = 0$

neste, o saque será feito com dez notas de dois, duas notas de cinco e uma nota de dez;

IV) *para* $t_1 = 39$ *e* $t_2 = 15$

$z = 40 - t_1 = 40 - 39 = 1$

$y = -360 + 10t_1 - 2t_2 = -360 + 10.39 - 2.15 = 0$

$x = 720 - 20t_1 + 5t_2 = 720 - 20.39 + 5.15 = 15$

neste, o saque será feito apenas com quinze notas de dois e uma nota de dez.

5. *Se* $t_1 = 40$, *temos que,* $4.40 - 144 = 16 \leq t_2 \leq 5.40 - 180 = 20$, *ou seja,* ***cinco*** *maneiras de efetuar o saque;*

I) *para* $t_1 = 40$ *e* $t_2 = 16$

$z = 40 - t_1 = 40 - 40 = 0$

$y = -360 + 10t_1 - 2t_2 = -360 + 10.40 - 2.16 = 8$

$x = 720 - 20t_1 + 5t_2 = 720 - 20.40 + 5.16 = 0$

ou seja, o saque será feito somente com oito notas de cinco;

II) *para* $t_1 = 40$ *e* $t_2 = 17$

$z = 40 - t_1 = 40 - 40 = 0$

$y = -360 + 10t_1 - 2t_2 = -360 + 10.40 - 2.17 = 6$

$x = 720 - 20t_1 + 5t_2 = 720 - 20.40 + 5.17 = 5$

então, o saque será feito apenas com cinco notas de dois e seis notas de cinco;

III) *para* $t_1 = 40$ *e* $t_2 = 18$

$z = 40 - t_1 = 40 - 40 = 0$

$y = -360 + 10t_1 - 2t_2 = -360 + 10.40 - 2.18 = 4$

$x = 720 - 20t_1 + 5t_2 = 720 - 20.40 + 5.18 = 10$

neste, o saque será feito apenas com dez notas de dois e quatro notas de cinco;

IV) *para* $t_1 = 40$ *e* $t_2 = 19$

$z = 40 - t_1 = 40 - 40 = 0$

$y = -360 + 10t_1 - 2t_2 = -360 + 10.40 - 2.19 = 2$

$x = 720 - 20t_1 + 5t_2 = 720 - 20.40 + 5.19 = 15$

neste, o saque será feito apenas com quinze notas de dois e duas notas de cinco;

V) *para* $t_1 = 40$ *e* $t_2 = 20$

$z = 40 - t_1 = 40 - 40 = 0$

$y = -360 + 10t_1 - 2t_2 = -360 + 10.40 - 2.20 = 0$

$x = 720 - 20t_1 + 5t_2 = 720 - 20.40 + 5.20 = 20$

neste, o saque será feito somente com vinte notas de dois.

Logo, somando todas as possibilades mostradas, podemos concluir que é possível efetuar o saque de quinze maneiras diferentes.

Problema 5 *Com pacotes de papel higiênico contendo 8 unidades, de sabonete, 16 unidades, de pasta de dente, 12 unidades e de shampoo, 4 unidades. Quantas maneiras distintas existem, para montar quites com 56 unidades, que contenham pelo menos um pacote de cada ítem?*

Solução *Observando o problema, vem:*

$$8x + 16y + 12z + 4w = 56$$

onde, x representa o número de pacotes de papel higiênico, y o número de pacotes de sabonete, z o número de pacotes de pasta de dente e w o número de pacotes de shampoo.

Para resolve-lo, primeiramente devemos analisar se o mesmo possui solução.

Como $mdc(8, 16, 12, 4) = 4$ *e* $4 \mid 56$, *o problema possui solução, devemos agora, encontrá-la, calculando sua solução geral.*

Seja, $8x + 16y + 12z = p'$*, então,* $p' + 4w = 56$*, como* $mdc(1,4) = 1$ *e* $1 \mid 56$*, podemos fazer:*

$$\begin{aligned} 1 &= 1.(-3) + 4.1 \\ 56 &= 1.(-168) + 4.56 \end{aligned}$$

daí,

$p' = -168 + 4t_1$ *e* $w = 56 - t_1$ *e como* p' *e* w *devem ser números inteiros positivos, devemos ter* $42 < t_1 < 56$ *com* $t_1 \in \mathbb{Z}$*.*

Escolhendo um valor conveniente para t_1*, de modo que* $mdc(8,16,12)$ *divida* p'*, teremos:*

$$8x + 16y + 12z = p' = -168 + 4t_1$$

fazendo uma nova substituição em $8x+16y+12z = -168+4t_1$*, considerando* $8x+16y = p''$*, vem,*

$$p'' + 12z = -168 + 4t_1$$

e como $mdc(1,12) = 1$ *e* $1 \mid (-168 + 4t_1)$ *, qualquer que seja o valor de* t_1 *no intervalo encontrado, podemos continuar nossa busca pela solução, assim:*

$$\begin{aligned} 1 &= 1.(-11) + 12.1 \\ -168 + 4t_1 &= 1.(-11)(-168 + 4t_1) + 12.1.(-168 + 4t_1) \\ -168 + 4t_1 &= 1.(1848 - 44t_1) + 12.(-168 + 4t_1) \end{aligned}$$

logo, $p'' = (1848 - 44t_1) + 12t_2$ *e* $z = (-168 + 4t_1) - t_2$ *e como* p'' *e* z *devem ser inteiros positivos, devemos ter:*

$$(1848-44t_1)+12t_2 > 0 \Leftrightarrow 12t_2 > -1848+44t_1 \Leftrightarrow t_2 > \frac{-1848 + 44t_1}{12} \Leftrightarrow t_2 > -154+\frac{11}{3}t_1$$

e

$$(-168 + 4t_1) - t_2 > 0 \Leftrightarrow -t_2 > -(-168 + 4t_1) \Leftrightarrow t_2 < -168 + 4t_1$$

gerando, $-154 + \dfrac{11}{3}t_1 < t_2 < -168 + 4t_1$ *com* $t_2 \in \mathbb{Z}$*.*

Dando continuidade, devemos agora, escolher um valor conveniente para t_2 de forma que $mdc(8,16)$ divida p'', sendo assim, faremos,

$$8x + 16y = p'' = 1848 - 44t_1 + 12t_2$$

daí, como $mdc(8,16) = 8$, vem:

$$\begin{aligned}
8 &= 8.(-1) + 16.1 \\
8.\left(\frac{1848 - 44t_1 + 12t_2}{8}\right) &= 8.(-1)\left(\frac{1848 - 44t_1 + 12t_2}{8}\right) + 16.1\left(\frac{1848 - 44t_1 + 12t_2}{8}\right) \\
1848 - 44t_1 + 12t_2 &= 8.\left(-231 + \frac{11}{2}t_1 - \frac{3}{2}t_2\right) + 16.\left(231 - \frac{11}{2}t_1 + \frac{3}{2}t_2\right)
\end{aligned}$$

logo, teremos:

$$x = -231 + \frac{11}{2}t_1 - \frac{3}{2}t_2 + \frac{16}{8}t_3 = -231 + \frac{11}{2}t_1 - \frac{3}{2}t_2 + 2t_3$$

$$y = 231 - \frac{11}{2}t_1 + \frac{3}{2}t_2 - t_3$$

com x e y números inteiros positivos, então, devemos proceder assim:

$$-231 + \frac{11}{2}t_1 - \frac{3}{2}t_2 + 2t_3 > 0 \Leftrightarrow 2t_3 > 231 - \frac{11}{2}t_1 + \frac{3}{2}t_2 \Leftrightarrow t_3 > \frac{231}{2} - \frac{11}{4}t_1 + \frac{3}{4}t_2$$

e

$$231 - \frac{11}{2}t_1 + \frac{3}{2}t_2 - t_3 > 0 \Leftrightarrow -t_3 > -\left(231 - \frac{11}{2}t_1 + \frac{3}{2}t_2\right) \Leftrightarrow t_3 < 231 - \frac{11}{2}t_1 + \frac{3}{2}t_2$$

gerando, $\frac{231}{2} - \frac{11}{4}t_1 + \frac{3}{4}t_2 < t_3 < 231 - \frac{11}{2}t_1 + \frac{3}{2}t_2$ com $t_3 \in \mathbb{Z}$.

Depois de ter analisado todas as restrições de t_1, t_2 e t_3, encontramos:

$$42 < t_1 < 56$$

$$e$$

$$-154+\frac{11}{3}t_1 < t_2 < -168+4t_1$$

$$e$$

$$\frac{231}{2}-\frac{11}{4}t_1+\frac{3}{4}t_2 < t_3 < 231-\frac{11}{2}t_1+\frac{3}{2}t_2$$

com t_1, t_2 *e* $t_3 \in \mathbb{Z}$.

Para responder a pergunta do problema, procederemos da seguinte forma:

1. *Se* $t_1 = 43$, *temos* $-154+\frac{11}{3}.43 = 3,6667 < t_2 < -168+4.43 = 4$, *logo como não existe* $t_2 \in \mathbb{Z}$ *neste caso, então* $t_1 = 43$ *não gera formas de montar o quite.*

2. *Se* $t_1 = 44$, *temos* $-154+\frac{11}{3}.44 = 7,3333 < t_2 < -168+4.44 = 8$ *logo não existe* $t_2 \in \mathbb{Z}$ *, assim como ao anterior,* $t_1 = 44$ *não gera formas de montar o quite.*

3. *Se* $t_1 = 45$, *temos* $-154+\frac{11}{3}.45 = 11 < t_2 < -168+4.45 = 12$ *e como não existe* $t_2 \in \mathbb{Z}$ *, assim como aos anteriores,* $t_1 = 45$ *não gera formas de montar o quite.*

4. *Se* $t_1 = 46$, *temos* $-154+\frac{11}{3}.46 = 14,667 < t_2 < -168+4.46 = 6$, *ou seja,* $t_2 = 15$, *para encontrar* t_3, *primeiramente devemos analisar se* $mdc(8,16) = 8$ *divide* $1848-44t_1+12t_2$, *caso divida, continuaremos o processo, caso não divida, concluímos o processo, sem encontrar formas de montar o quite para os respectivos valores de* t_1 *e* t_2. *Como* $1848-44.46+12.15 = 4$ *e* $8 \nmid 4$ *segue que* $t_1 = 46$ *não gera formas de montar o quite.*

5. *Se* $t_1 = 47$, *temos* $-154+\frac{11}{3}.47 = 18,333 < t_2 < -168+4.47 = 20$, *ou seja,* $t_2 = 19$, *para encontrar* t_3, *procederemos como no anterior:*

   $1848-44.47+12.19 = 8$ *e como* $8 \mid 8$, *continuaremos o processo para encontrar valor de* t_3, *caso exista, então,*
   $\frac{231}{2}-\frac{11}{4}.47+\frac{3}{4}.19 = 0,5 < t_3 < 231-\frac{11}{2}.47+\frac{3}{2}.19 = 1$
   e como não existe $t_3 \in \mathbb{Z}$, $t_1 = 47$ *não gera formas de montar o quite.*

6. *Se* $t_1 = 48$, *temos* $-154+\frac{11}{3}.48 = 22 < t_2 < -168+4.48 = 24$ *, ou seja,* $t_2 = 23$, *daí*

$1848 - 44.48 + 12.23 = 12$ *e como* $8 \nmid 12$ *segue que* $t_1 = 48$ *não gera formas de montar o quite.*

7. *Se* $t_1 = 49$, *temos* $-154 + \frac{11}{3}.49 = 25,667 < t_2 < -168 + 4.49 = 28$, *analisando cada caso, vem:*

   para $t_2 = 26$, *obtemos* $1848 - 44.49 + 12.26 = 4$ *e como* $8 \nmid 4$ *não é possível encontrar valor para* t_3,

   para $t_2 = 27$, *obtemos* $1848 - 44.49 + 12.27 = 16$ *e como* $8 \mid 16$, *segue que,*

   $\frac{231}{2} - \frac{11}{4}.49 + \frac{3}{4}.27 = 1 < t_3 < 231 - \frac{11}{2}.49 + \frac{3}{2}.27 = 2$, *que não gera valor para* t_3,

   então, para $t_1 = 49$, *não encontramos formas de montar o quite.*

8. *Se* $t_1 = 50$, *temos* $-154 + \frac{11}{3}.50 = 29,333 < t_2 < -168 + 4.50 = 32$, *analisando cada caso, vem:*

   para $t_2 = 30$, *obtemos* $1848 - 44.50 + 12.30 = 8$ *e como* $8 \mid 8$ *segue que,*

   $\frac{231}{2} - \frac{11}{4}.50 + \frac{3}{4}.30 = 0,5 < t_3 < 231 - \frac{11}{2}.50 + \frac{3}{2}.30 = 1$, *que não gera* t_3,

   para $t_2 = 31$, *obtemos* $1848 - 44.50 + 12.31 = 20$ *e como* $8 \nmid 20$ *não é possível encontrar valor para* t_3, *então,* $t_1 = 50$ *não gera formas de montar o quite.*

9. *Se* $t_1 = 51$, *temos* $-154 + \frac{11}{3}.51 = 33 < t_2 < -168 + 4.51 = 36$, *analisando cada caso, vem:*

   para $t_2 = 34$, *obtemos* $1848 - 44.51 + 12.34 = 12$ *e como* $8 \nmid 8$ *não é possível encontrar valor para* t_3,

   para $t_2 = 35$, *obtemos* $1848 - 44.51 + 12.35 = 24$ *e como* $8 \mid 24$ *segue que,*

   $\frac{231}{2} - \frac{11}{4}.51 + \frac{3}{4}.35 = 1,5 < t_3 < 231 - \frac{11}{2}.51 + \frac{3}{2}.35 = 3$, *que gera* $t_3 = 2$,

   então, para $t_1 = 51$, *temos* ***uma*** *forma de montar o quite.*

10. *Se* $t_1 = 52$, *temos* $-154 + \frac{11}{3}.52 = 36,667 < t_2 < -168 + 4.52 = 40$, *analisando cada caso, vem:*

    para $t_2 = 37$, *obtemos* $1848 - 44.52 + 12.37 = 4$ *e como* $8 \nmid 4$ *não é possível encontrar valor para* t_3, *para* $t_2 = 38$, *obtemos* $1848 - 44.52 + 12.38 = 16$ *e como* $8 \mid 16$ *segue que,*

$\frac{231}{2} - \frac{11}{4}.52 + \frac{3}{4}.38 = 1 < t_3 < 231 - \frac{11}{2}.52 + \frac{3}{2}.38 = 2$, *que não gera valor para* t_3,

para $t_2 = 39$, *obtemos* $1848 - 44.52 + 12.39 = 28$ *e como* $8 \nmid 28$ *não é possível encontrar valor para* t_3, *então,* $t_1 = 52$ *não gera formas de montar o quite.*

11. Se $t_1 = 53$, *temos* $-154 + \frac{11}{3}.53 = 40,333 < t_2 < -168 + 4.53 = 44$, *analisando cada caso, vem:*

para $t_2 = 41$, *obtemos* $1848 - 44.53 + 12.41 = 8$ *e como* $8 \mid 8$ *segue que,*

$\frac{231}{2} - \frac{11}{4}.53 + \frac{3}{4}.41 = 0,5 < t_3 < 231 - \frac{11}{2}.53 + \frac{3}{2}.41 = 1$, *que não gera valor de* t_3,

para $t_2 = 42$, *obtemos* $1848 - 44.53 + 12.42 = 20$ *e como* $8 \nmid 20$ *não é possível encontrar valor para* t_3,

para $t_2 = 43$, *obtemos* $1848 - 44.53 + 12.43 = 32$ *e como* $8 \mid 32$ *segue que,*

$\frac{231}{2} - \frac{11}{4}.53 + \frac{3}{4}.43 = 2 < t_3 < 231 - \frac{11}{2}.53 + \frac{3}{2}.43 = 4$, *ou seja,* $t_3 = 3$, *então, para*

$t_1 = 53$, *temos* ***uma*** *forma de montar o quite.*

12. Se $t_1 = 54$, *temos* $-154 + \frac{11}{3}.54 = 44 < t_2 < -168 + 4.54 = 48$, *analisando cada caso, vem:*

para $t_2 = 45$, *obtemos* $1848 - 44.54 + 12.45 = 12$ *e como* $8 \nmid 12$ *não é possível encontrar valor para* t_3,

para $t_2 = 46$, *obtemos* $1848 - 44.54 + 12.46 = 24$ *e como* $8 \mid 24$ *segue que,*

$\frac{231}{2} - \frac{11}{4}.54 + \frac{3}{4}.46 = 1,5 < t_3 < 231 - \frac{11}{2}.54 + \frac{3}{2}.46 = 3$, *ou seja,* $t_3 = 2$,

para $t_2 = 47$, *obtemos* $1848 - 44.54 + 12.47 = 36$ *e como* $8 \nmid 36$ *não é possível encontrar valor para* t_3, *então, para* $t_1 = 54$, *temos* ***uma*** *forma de montar o quite.*

13. Se $t_1 = 55$, *temos* $-154 + \frac{11}{3}.55 = 47,667 < t_2 < -168 + 4.55 = 52$, *analisando cada caso, vem:*

para $t_2 = 48$, *obtemos* $1848 - 44.55 + 12.48 = 4$ *e como* $8 \nmid 4$ *não é possível encontrar valor para* t_3, *para* $t_2 = 49$, *obtemos* $1848 - 44.55 + 12.49 = 16$ *e como* $8 \mid 16$ *segue que,*

$\dfrac{231}{2} - \dfrac{11}{4}.55 + \dfrac{3}{4}.49 = 1 < t_3 < 231 - \dfrac{11}{2}.55 + \dfrac{3}{2}.49 = 2$, *que não gera valor para* t_3,

para $t_2 = 50$, *obtemos* $1848 - 44.55 + 12.50 = 28$ *e como* $8 \nmid 28$ *não é possível encontrar valor para* t_3,

para $t_2 = 51$, *obtemos* $1848 - 44.55 + 12.51 = 40$ *e como* $8 \mid 40$ *segue que,*

$\dfrac{231}{2} - \dfrac{11}{4}.55 + \dfrac{3}{4}.51 = 2,5 < t_3 < 231 - \dfrac{11}{2}.55 + \dfrac{3}{2}.51 = 5$, *ou seja, dois valores para* t_3, *então, para* $t_1 = 55$, *temos* ***duas*** *formas de montar o quite.*

Agora, basta somar todas as possibilidades acima para encontrar o total de maneiras, M, *de montar o quite.*

Assim:

$$M = 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 1 + 0 + 1 + 1 + 2 = 5$$

logo, há 5 maneiras diferentes de montar o quite.

Considerações Finais

Neste trabalho apresentamos como é possivel encontrar soluções de uma equação diofantina linear que contenha um número qualquer de variáveis, e também, mostramos que é possível a aplicação desse tipo de equação em situações do nosso cotidiano. Dessa forma, trabalhamos objetivamente o conceito mais geral de *máximo divisor comum* e do *algoritmo euclidiano* e que os mesmos não se resumem apenas em descobrir qual é o maior divisor entre números inteiros, mas também, que sua aplicabilidade, auxiliada pelo algoritmo de Euclides, possui uma significativa importância no processo de resolução das equações diofantinas lineares.

Explicamos também que uma equação diofiantina linear em duas variáveis $ax + by = c$ pode ser resolvida pelo *algoritmo euclidiano*. Vimos também que estas equações tem solução quando $d = mdc(a, b) \mid c$. Para encontrar uma solução da equação diofantina linear de n variáveis $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + ... + a_{n-1}x_{n-1} + a_nx_n = c$, novamente precisamos verificar se $d = mdc(a_1, a_2, a_3, ..., a_{n-1}, a_n) \mid c$ e indutivamente reduzimos a equação a uma equação de $n - 1$ variáveis.

Além disso, este é um material que pode ser desenvolvido a partir das últimas séries do ensino fundamental, sendo as aplicações das equações diofantinas lineares com duas variáveis no fundamental e as aplicações das equações diofantinas lineares com três variáveis no ensino médio. Tais aplicações, também vem sendo exploradas pelos professores do Programa de Mestrado Profissional - PROFMAT e do Programa de Iniciação Científica da *OBMEP*.

Nas escolas públicas cabe ao professor explorá-lo da forma que lhe pareça mais conveniente, sempre buscando instigar a curiosidade de cada aluno em sua forma de aplicação. Em nossa bibliografia encontra-se alguns livros, tais como HEFEZ [2011], HEFEZ [2009] e DOMINGUES [1991], que podem contribuir com este tema tão rico em aplicações envolvendo os números inteiros.

O PROFMAT, atinge as metas contidas em SBM [2013], pois possibilita ao professor se qualificar, oportunizando ao mesmo aprofundar seus conhecimentos e melhorar a qualidade de suas aulas, que é algo constantemente solicitado dos professores da educação básica.

Referências Bibliográficas

Carl B. BOYER. *História da Matemática.* Revista por Uta C. Merzabach; tradução Elza F. Gomide. Edgard Blücher, São Paulo, 2003.

Luiz Roberto DANTE. *Matemática: Contexto & Aplicações*, volume 1, 2, 3. Atica, São Paulo, 2012.

Hygino Hugueros DOMINGUES. *Fundmentos de Aritmética.* Atual, São Paulo, 1991.

GALEÃO. *Cantinho da Matemática.* Núcleo de Estágio, 2009/2010. http://www.estagiariasgaleao.hostoi.com/index.php?p=1_8_Diofante-Alexandria. Acesso em 15/01/2013.

Márcio Cintra GOULART. *Matemática no Ensino Médio*, volume 1, 2, 3. Scipione, São Paulo, 2008.

Abramo HEFEZ. *Iniciação à Aritmética.* SBM/IMPA/MEC, Rio de Janeiro, 2009.

Abramo HEFEZ. *Elementos de Aritmética.* SBM, Rio de Janeiro, 2011.

Paulo Cezar Pinto; WAGNER Eduardo. MORGADO; Augusto César LIMA, Elon Lages; CARVALHO. *A Matemática do Ensino Médio*, volume 1. SBM, Rio de Janeiro, 2006.

Antonio Caminha MUNIZ NETO. *Tópicos de Matemática Elementar - Teoria dos Números*, volume 5. SBM, Rio de Janeiro, 2012.

Manoel PAIVA. *Matemática*, volume 1, 2, 3. Moderna, São Paulo, 2004.

Wagner Marcelo POMMER. *Equações Diofantinas Lineares: Um Desafio Motivador para Alunos do Ensino Médio - Dissertação de Mestrado em Educação Matemática.* PUC, São

Paulo, 2008. http://www.pucsp.br/pos/edmat/ma/dissertacao/wagner_pommer.pdf. Acesso em 20/01/2013.

Wagner Marcelo POMMER, 2012. http://www.sbemrn.com.br/site/III%20erem/comunica /doc/CC_Pommer.pdf. Acesso em 16/12/2012.

Jackson RIBEIRO. *Matemática: Ciência, Linguagem e Tecnologia*, volume 1, 2, 3. Scipione, São Paulo, 2010.

José Plínio de Oliveira SANTOS. *Introdução à Teoria dos Números*. SBM, Rio de Janeiro, 1998.

SBM. Profmat regimento, 2013. http://www.profmat-sbm.org.br/regimento.asp. Acesso em 20/01/2013.

UFCG. Biografias, 2012. http://www.dec.ufcg.edu.br/biografias/DiofanAl.html. Acesso em 16/12/2012.