



Universidade Federal  
de São João del-Rei

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO JOÃO DEL REI –  
UFSJ**

**Departamento de Matemática e Estatística  
Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT**

**UMA APLICAÇÃO DA SEQUÊNCIA DE FIBONACCI NA  
BISSECCÃO DE ÁREAS DE FIGURAS PLANAS**

**PAULO ROGÉRIO SANTOS ARAÚJO**

**São João del-Rei  
Abril de 2019**

**PAULO ROGÉRIO SANTOS ARAÚJO**

**UMA APLICAÇÃO DA SEQUÊNCIA DE FIBONACCI NA  
BISSECÇÃO DE ÁREAS DE FIGURAS PLANAS**

Dissertação apresentada ao Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT da Universidade Federal de São João del-Rei, na área de concentração em Matemática, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática

Orientador: Professor Doutor Fábio Alexandre de Matos

**São João del-Rei  
Abril de 2019**

**PAULO ROGÉRIO SANTOS ARAÚJO**

**UMA APLICAÇÃO DA SEQUÊNCIA DE FIBONACCI NA  
BISSECÇÃO DE ÁREAS DE FIGURAS PLANAS**

Aprovada em 25 de abril de 2019

**BANCA EXAMINADORA**

---

Prof. Dr. Fábio Alexandre de Matos  
Universidade Federal de São João del-Rei

---

Prof. Dr. Sílvio Antônio Bueno Salgado  
Universidade Federal de Alfenas

---

Prof. Dr. Francinildo Nobre Ferreira  
Universidade Federal de São João del-Rei

## **DEDICATÓRIA**

Dedico este trabalho à minha querida família: meus pais Juvino e Ozires, com todo amor e gratidão. Às minhas irmãs (Jane e Maria Aparecida), meus exemplos e incentivadores.

Dedico, especialmente, a vocês, Inês (minha esposa), João Pedro (meu filho), razão pela qual depus todo meu esforço e meu compromisso para a realização deste trabalho.

## AGRADECIMENTOS

A Deus, por ter me dado sabedoria e inspiração e por ter me guiado nessa caminhada. “O Senhor é meu Pastor, nada me falta”.

Agradeço ao meu orientador e também professor do curso, Prof. Dr. Fábio Alexandre de Matos, pela dedicação, pelo constante apoio e pela competência com que conduziu este trabalho deixando muitas e enriquecedoras sugestões para sua construção.

A todos os professores da turma 2016 do mestrado PROFMAT na UFSJ, que conduziram o curso com dedicação e apoio inestimável. Aos funcionários, Marcos, Meira e Kátia, da secretaria do PROFMAT/UFSJ pela disponibilidade e presteza que sempre dispensaram a nós alunos.

Aos membros da banca, pelas análises, sugestões e pelas correções enriquecedoras.

À CAPES, pela concessão de apoio financeiro durante o curso.

Aos colegas da turma 2016, mais que um grupo de colegas, fizemos grandes laços de amizade. Dividimos o estresse dos estudos, a ansiedade nas vésperas de provas, estudamos muito, choramos, rezamos juntos para pedir luz e sabedoria. Tudo valeu a pena! Vencemos.

Ao Departamento de Matemática da UFV – Viçosa, MG, por me proporcionar a dispensa para estudos.

Enfim, a todos os meus familiares, que me apoiaram em todos os momentos de dificuldade nesse curso e que comemoraram comigo os momentos de vitória. Sei que vocês sempre torceram por mim. Principalmente, minha mulher e meu filho, que muitas vezes ficaram sem a minha atenção e foram “trocados” por dias de estudos, obrigado por compreenderem e pela força que sempre me deram.

## RESUMO

O presente trabalho tem o objetivo de contextualizar o estudo de aplicação da sequência de Fibonacci. Especificamente, trataremos do problema da bissecção de áreas de figuras planas através de caminhos poligonais com pontos obtidos através da sequência de Fibonacci. Finalmente, apresentaremos uma proposta de aula investigativa com aplicações dos resultados apresentados utilizando o *software* Geogebra.

**Palavras-chave:** Área de figuras planas, Sequências, Caminhos poligonais, Divisão de áreas, Aplicações.

## ABSTRACT

The present work has the objective to contextualize the study of one more of the many applications of Fibonacci sequence. Specifically, we will address the problem of sexing of areas of plane figures through polygonal paths with points obtained through the Fibonacci sequence. Finally, we will present a proposal for investigative classrooms with applications of the results presented using the software Geogebra.

**Key words:** Area of plane figures, Sequences, Polygonal paths, Division of areas, Applications.

## LISTA DE FIGURAS

<b>FIGURA 1</b> - Área da região demarcada (S) da função matemática $f$ na variável $x$ , no intervalo $(a, b)$ .....	13
<b>FIGURA 2</b> - Polígono convexo.....	14
<b>FIGURA 3</b> - Polígono não convexo.....	14
<b>FIGURA 4</b> - Região retangular.....	15
<b>FIGURA 5</b> - Região quadrada de lado medindo $u$ .....	16
<b>FIGURA 6</b> - Região retangular de dimensões $5u$ e $3u$ .....	16
<b>FIGURA 7</b> - Figuras planas congruentes.....	16
<b>FIGURA 8</b> - Figuras congruentes.....	17
<b>FIGURA 9</b> - Quadrado de lado medindo $a$ .....	17
<b>FIGURA 10</b> - Retângulo de base medindo $a$ e altura $b$ .....	18
<b>FIGURA 11</b> - Quadrados de lados de medidas $a$ , $b$ e $a + b$ .....	18
<b>FIGURA 12</b> - Paralelogramo $ABCD$ .....	19
<b>FIGURA 13</b> - Retângulo $AEFD$ .....	19
<b>FIGURA 14</b> - Triângulo $ABC$ .....	20
<b>FIGURA 15</b> - Paralelogramo $ABCD$ .....	20
<b>FIGURA 16</b> - Trapézio $ABCD$ .....	21
<b>FIGURA 17</b> - Triângulos $ADC$ e $ABC$ .....	21
<b>FIGURA 18</b> - Sistema de coordenadas $OXY$ .....	30
<b>FIGURA 19</b> - Segmento de reta $AB$ .....	31
<b>FIGURA 20</b> - Segmento orientado $AB$ .....	32
<b>FIGURA 21</b> - Segmentos de reta consecutivos.....	32



	9
<b>FIGURA 22</b> - Segmentos colineares.....	32
<b>FIGURA 23</b> - Segmentos adjacentes.....	33
<b>FIGURA 24</b> - Caminho poligonal.....	33
<b>FIGURA 25</b> - Caminho poligonal crescente e não decrescente.....	34
<b>FIGURA 26</b> - Caminho passando pelos vértices opostos de um retângulo.....	35
<b>FIGURA 27</b> - Retângulo de áreas $A_1$ , $A_2$ , $B_1$ e $B_2$ .....	36
<b>FIGURA 28</b> - Caminho poligonal $P_0P_1P_2...P_{m+1}$ .....	38
<b>FIGURA 29</b> - $A_m = \text{Área}(P_0P_1P_2...P_mX_m)$ .....	39
<b>FIGURA 30</b> - $B_m = \text{Área}(P_0P_1P_2...P_mY_m)$ .....	39
<b>FIGURA 31</b> - Caminho poligonal.....	40
<b>FIGURA 32</b> - Área $A_5$ .....	40
<b>FIGURA 33</b> - Área $B_5$ .....	41
<b>FIGURA 34</b> - Divisão do retângulo $F_0X_{2n+1}F_{2n+1}Y_{2n+1}$ em duas regiões de mesma área.....	42
<b>FIGURA 35</b> - Caminho poligonal $P_0P_1P_2...P_{m+1}$ .....	43
<b>FIGURA 36</b> - Divisão do retângulo através do caminho poligonal $F_0F_1$ .....	48
<b>FIGURA 37</b> - Divisão do retângulo através do caminho poligonal $F_0F_1F_2F_3$ .....	49
<b>FIGURA 38</b> - Divisão do retângulo através do caminho poligonal $F_0F_1F_2F_3F_4F_5$ .....	50

## SUMÁRIO

<b>1.</b>	<b>INTRODUÇÃO.....</b>	<b>11</b>
<b>2.</b>	<b>Área de figuras planas.....</b>	<b>13</b>
2.1.	Postulado da unidade de áreas.....	14
<b>3.</b>	<b>Sequências.....</b>	<b>22</b>
3.1.	Sequência de Fibonacci.....	24
<b>4.</b>	<b>Caminhos poligonais.....</b>	<b>29</b>
4.1.	O plano cartesiano.....	29
4.2.	Segmento de reta.....	31
4.3.	Caminho Poligonal.....	33
<b>5.</b>	<b>Bissecção de áreas através de caminhos poligonais.....</b>	<b>38</b>
<b>6.</b>	<b>Aplicações .....</b>	<b>46</b>
6.1.	Dividir retângulos em figuras de mesma área.....	46
6.2.	Planejamento: Área de Figuras Planas.....	46
	<b>REFERÊNCIAS.....</b>	<b>51</b>

# Capítulo 1

## Introdução

Atualmente tem-se percebido uma grande dificuldade em atrelar os conteúdos matemáticos ao cotidiano e estimular os alunos para as aulas. Diante disso percebe-se que demonstrar mais uma das várias aplicações da Sequência de Fibonacci pode despertar os jovens para um olhar investigativo e curioso, quebrando as barreiras existentes no ensino/aprendizagem de Matemática, Barco (1987).

Dentre as muitas atribuições de um professor, está, a de explorar o ensino da matemática em situações que envolvam novos conceitos vistos agora com uma roupagem nova, que incentivem o aluno a desenvolver seu pensamento de forma mais abrangente, Facco (2003). Todavia, por experiências do autor lecionando aulas para o Ensino Médio e por contato com outros professores do mesmo nível de ensino, observa-se prevalecer, ainda, a abordagem das sequências de Fibonacci desvinculada às suas aplicações, limitada a analisar as propriedades dessas sequências sem um contexto que justifique esse estudo. Essa prática gera frustração e desinteresse por parte do aluno ao estudar o conteúdo.

Na busca de uma nova alternativa de abordagem desse assunto, houve o desenvolvimento do presente trabalho. O objetivo é propor aos professores do Ensino Médio suporte teórico e um plano de aula que engloba a bissecção de áreas de figuras planas através de caminhos poligonais.

Com o uso do *software* Geogebra podemos evidenciar tal propriedade de forma dinâmica e prática. Para garantir ao docente um suporte teórico para o desenvolvimento da prática proposta e de outras similares, o trabalho traz uma revisão de conteúdos fundamentais de domínio do professor para o direcionamento adequado da atividade. Esses conceitos são as áreas de figuras planas, sequências e caminhos poligonais. Com esse trabalho há o desejo de incentivar outras práticas contextualizadas na abordagem das sequências de Fibonacci, aumentando assim o interesse nesse conteúdo, fato que se tornou a motivação principal para o desenvolvimento do presente trabalho.

Quanto ao embasamento teórico, área de figuras planas elementares tais como o retângulo, o triângulo e o trapézio e suas propriedades é o assunto do segundo capítulo. No terceiro capítulo apresentaremos as sequências numéricas de um modo geral e mais adiante a sequência de Fibonacci, conteúdo de suma importância no embasamento do nosso trabalho. No quarto capítulo apresentaremos o conceito de caminho poligonal e um exemplo de aplicação do mesmo na divisão da área de um retângulo. No quinto capítulo trataremos da bissecção de áreas de figuras planas através de caminhos poligonais conforme mencionado no capítulo 2 e objetivo principal do nosso trabalho.

No último capítulo, há a proposta de aula investigativa para alunos do Ensino Médio sobre a bissecção de áreas planas. Na aula, propomos para o aluno a construção, a experimentação, a verificação e a justificativa dos resultados. Para o suporte dessa atividade utilizamos o *software* Geogebra, de fácil aquisição e utilização dos alunos.

Com esse trabalho há um desejo de despertar em outros professores a criação de atividades semelhantes ou complementares à proposta, dando prioridade ao ensino da Matemática contextualizada de forma a estimular a aprendizagem de modo prazeroso e significativo.

## Capítulo 2

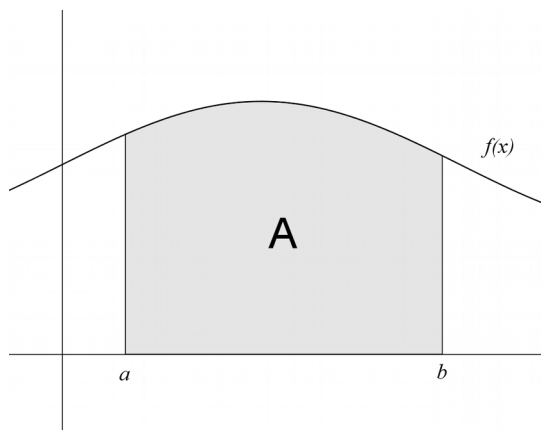
# Área de figuras planas

Como já mencionado na introdução, nosso trabalho entrelaça conceitos de geometria e aritmética de números inteiros. Neste capítulo abordaremos alguns conceitos elementares que serão utilizados na parte principal do trabalho. Começaremos, na primeira seção, com área de figuras planas.

Segundo Facco (2003), uma figura plana é uma região plana fechada por curvas. Na geometria, as formas mais conhecidas de figuras planas são: círculo, quadrado, triângulo, retângulo, trapézio, hexágono, pentágono, paralelogramo e losango.

Os cálculos relacionados a áreas de figuras planas regulares são de certa forma realizados facilmente, devido às fórmulas matemáticas existentes. No caso de figuras como o triângulo, quadrado, retângulo, trapézios, losangos, paralelogramo entre outras, basta relacionarmos as fórmulas à figura e realizar os cálculos necessários. Algumas situações exigem ferramentas auxiliares na obtenção de áreas, como exemplo as regiões existentes sob uma curva. Para tais situações utilizamos os cálculos envolvendo as noções de integrações desenvolvidas por Isaac Newton e Leibniz.

Nem sempre podemos representar algebricamente uma curva no plano através de uma lei de formação chamada função. A integral de uma função foi criada no intuito de determinar áreas sob uma curva no plano cartesiano. Os cálculos envolvendo integrais possuem diversas aplicações na Matemática e na Física. Observe a ilustração a seguir:



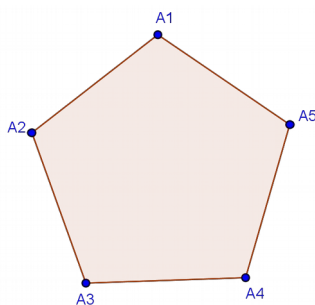
**Figura 1** – Área da região demarcada (A) da função matemática  $f$  na variável  $x$ , no intervalo  $(a, b)$ .

Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

Para calcular a área da região demarcada (A) utilizamos a integração da função  $f$  na variável  $x$ , entre o intervalo  $a$  e  $b$ , mas isso é um estudo mais aprimorado que não engloba o nosso trabalho. Para mais informações sobre o assunto veja por exemplo Leithold (1994).

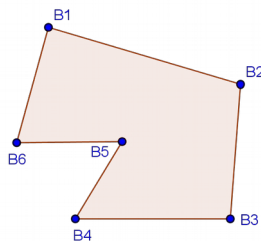
Denotamos por  $\mathbf{P}$  o conjunto de todos os polígonos de um plano. Um polígono é convexo se está sempre contido em um dos semiplanos determinados pelas retas que contêm os seus lados.

Na figura 2 o polígono é convexo e na figura 3 o polígono é não convexo.



**Figura 2** – Polígono convexo.

Fonte: Elaborado pelo próprio autor.



**Figura 3** – Polígono não convexo.

Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

## 2.1 Postulado da unidade de áreas

Para cada figura plana, convexa ou não, podemos associar um número real positivo, chamado de área da figura.

Por definição a área de uma figura plana é um número real positivo associado a esta região de forma que:

Para todo polígono convexo  $A$ , existe uma única aplicação  $u_S : A \rightarrow ]0, +\infty [$  tal que:

(i)  $u_S(A) > 0, \forall A \in P$ ;

(ii) Para todo polígono  $A_1$  e  $A_2$  de  $P$ ,  $u_S(A_1 \cup A_2) = u_S(A_1) + u_S(A_2)$  se  $A_1 \cap A_2 = \emptyset$  (propriedade aditiva);

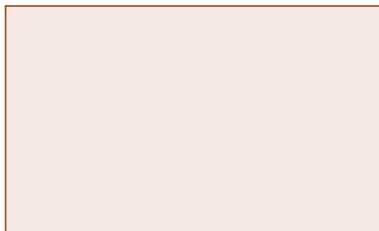
(iii) Se uma área  $A_1$  está contida em outra área  $A_2$ , então a área de  $A_1$  é menor do que (ou igual) a área de  $A_2$ .

**Definição.** Chama-se medida da área  $A_1$  e a indicaremos por  $m(A_1)$  ao número real positivo associado a  $A_1$ , tal que a aplicação  $m(A_1) = u_S(A_1)$ .

Apresentaremos as áreas das figuras planas que mais utilizaremos no nosso trabalho.

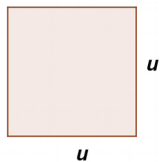
### Áreas de Figuras Planas

Área de um polígono é a reunião do polígono com o seu interior. A figura a seguir mostra uma região retangular.



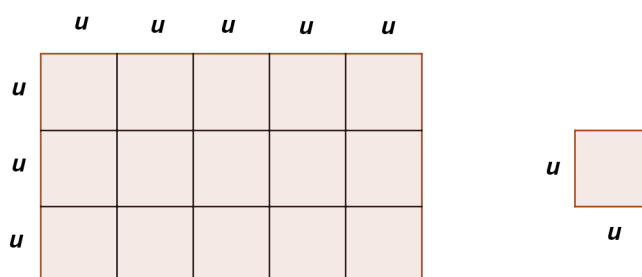
**Figura 4** – Região retangular.  
Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

Na figura a seguir temos uma região delimitada por um quadrado de lado medindo  $u$ .



**Figura 5** – Região quadrada de lado medindo  $u$ .  
Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

Considere o retângulo de dimensões  $5u$  e  $3u$ , figura 6.

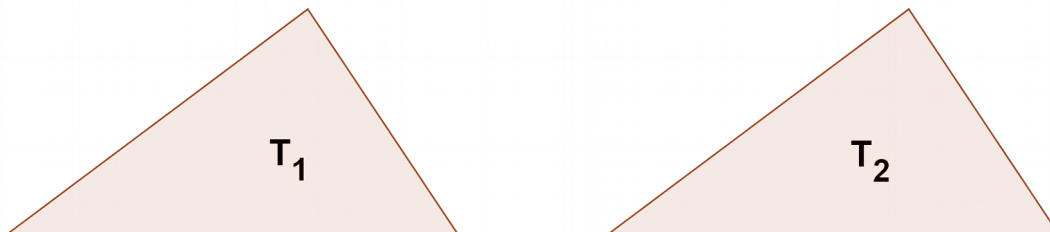


**Figura 6** – Região retangular de dimensões  $5u$  e  $3u$ .  
Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

A área dessa região é igual a  $15u^2$ .

### Figuras planas congruentes

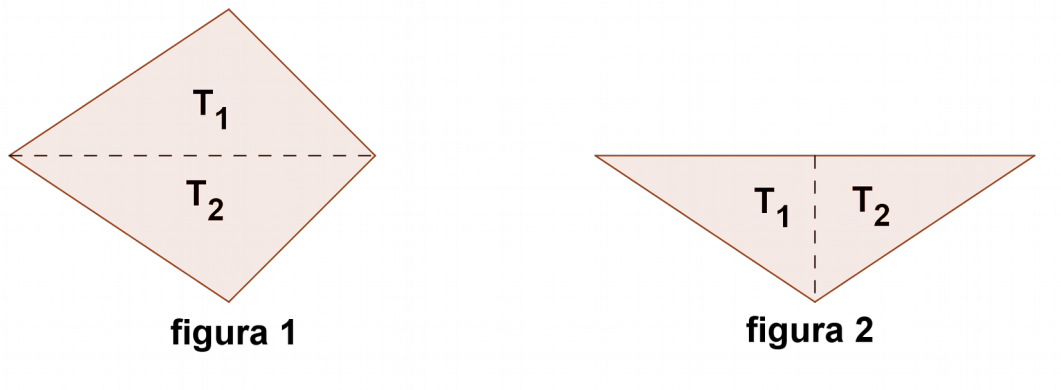
Duas figuras planas são denominadas congruentes se têm a mesma área. Assim, na figura 7, os triângulos são congruentes e daí,  $\text{área } T_1 = \text{área } T_2$ .



**Figura 7** – Figuras planas congruentes.  
Fonte: Elaborado pelo próprio autor.



A figura 8, a seguir apresenta duas figuras congruentes:



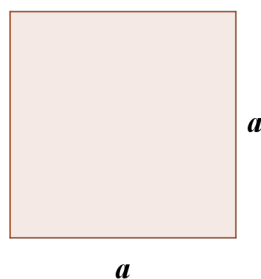
**Figura 8** – Figuras congruentes.  
Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

De fato, como

$$\text{área}_{\text{figura 1}} = \text{área } T1 + \text{área } T2 \text{ e } \text{área}_{\text{figura 2}} = \text{área } T1 + \text{área } T2$$

$$\text{Então } \text{área}_{\text{figura 1}} = \text{área}_{\text{figura 2}}$$

Na figura, o quadrado de lado  $a$  tem área  $a^2$ .



**Figura 9** – Quadrado de lado medindo  $a$ .  
Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

**Observações:**

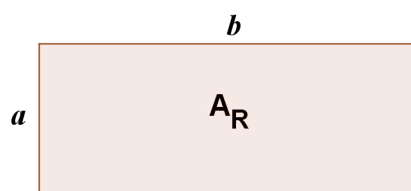
- 1) Quando nos referirmos à área de um quadrado, de um triângulo, etc., estamos nos referindo à área da respectiva figura plana;
- 2) Em um retângulo, dois lados adjacentes constituem a base e a altura do retângulo.

### Área de um retângulo

**Teorema 1:** A área de um retângulo é o produto da base pela sua altura.

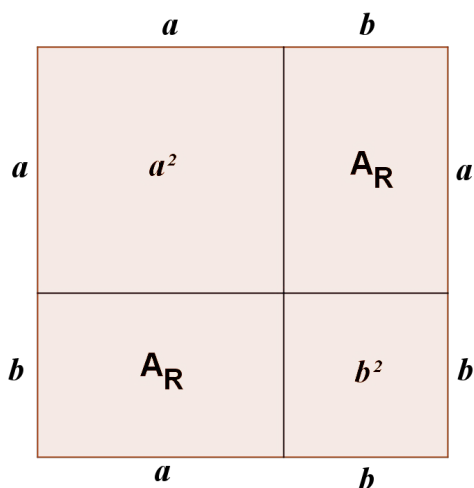
### Demonstração:

Considere um retângulo de base  $a$ , altura  $b$  e área  $A_R$ , figura 10.



**Figura 10** – Retângulo de base medindo  $a$  e altura  $b$ .  
Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

Vamos considerar os quadrados de lados medindo  $a$ ,  $b$  e  $a + b$ , figura 11.



**Figura 11** – Quadrados de lados de medidas  $a$ ,  $b$  e  $a + b$ .  
Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

Dado o retângulo  $R$ , de base  $b$  e altura  $a$ , construiremos o quadrado  $Q$ , de lado  $a + b$ , o qual contém 2 cópias de  $R$  e mais dois quadrados, um de lado  $a$  e outro de lado  $b$ , figura 11.

Como

$$A_Q = (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Temos pelos postulados de áreas que:

$$a^2 + A_R + A_R + b^2 = (a + b)^2$$

$$\text{Ou seja, } a^2 + 2A_R + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

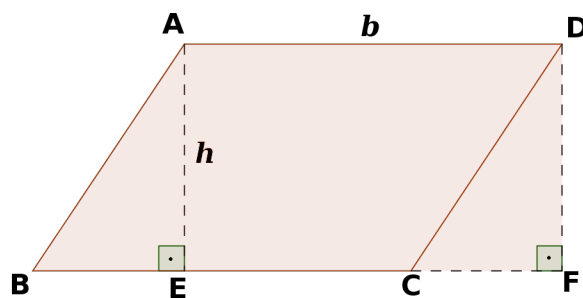
$$\text{Então } A_R = ab.$$

□

**Teorema 2:** Todo paralelogramo é equivalente a um retângulo de base e altura respectivamente congruentes às do paralelogramo.

**Demonstração:**

Considere o paralelogramo  $ABCD$  da figura 12.



**Figura 12** – Paralelogramo  $ABCD$ .

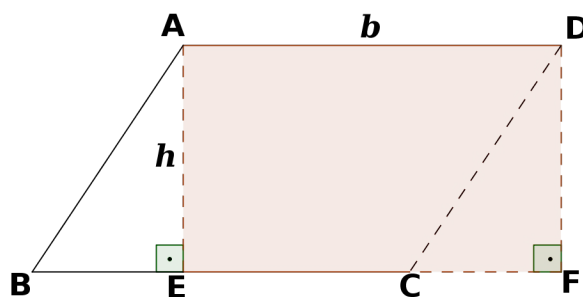
Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

Pelos vértices  $A$  e  $D$ , traçam-se perpendiculares  $AE$  e  $DF$  à reta suporte do lado  $BC$ .

Devemos provar que os triângulos  $ABE$  e  $DCF$  são congruentes. Como  $AB = CD$  pois são os lados opostos de um paralelogramo e  $AE = DF$  logo  $\hat{AEB} = \hat{DFC}$ .

Então a área do paralelogramo  $ABCD$  é congruente à área do retângulo  $AEFD$ , já que as áreas são iguais.

□



**Figura 13** – Retângulo  $AEFD$ .

Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

Denotando por  $b$  e  $h$  as medidas da base e altura comuns, temos  $A_P = A_R$ . Como  $A_R = b \cdot h$  (Teorema 1) então  $A_P = b \cdot h$ .

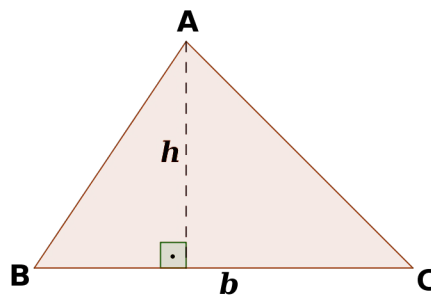
Portanto, a área de um paralelogramo é igual ao produto da base pela altura.

### Área de um triângulo

**Teorema 3:** A área de um triângulo é igual à metade do produto da base pela altura.

#### Demonstração:

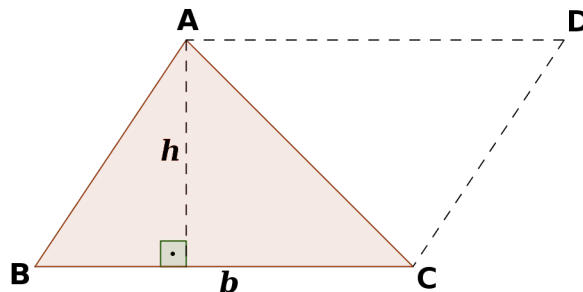
Considere o triângulo  $ABC$  de base  $b$  e altura  $h$ , figura 14.



**Figura 14** – Triângulo  $ABC$ .

Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

Trace  $AD$  e  $CD$ , respectivamente, paralelas aos lados  $BC$  e  $AB$ , figura 15, daí temos o paralelogramo  $ABCD$ .



**Figura 15** – Paralelogramo  $ABCD$ .

Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

Como  $\Delta ABC \cong \Delta CDA$ , pois  $AD = BC$ ,  $AB = CD$  e  $AC$  comum.

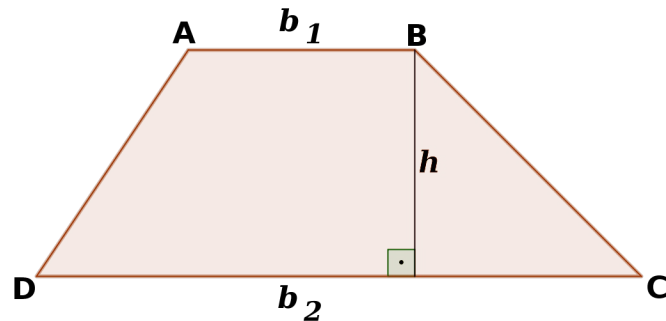
Então  $A_T = A_P/2 = b \cdot h/2$

### Área de um trapézio

**Teorema 4:** A área de um trapézio é igual à metade do produto da medida da altura pela soma das medidas das bases.

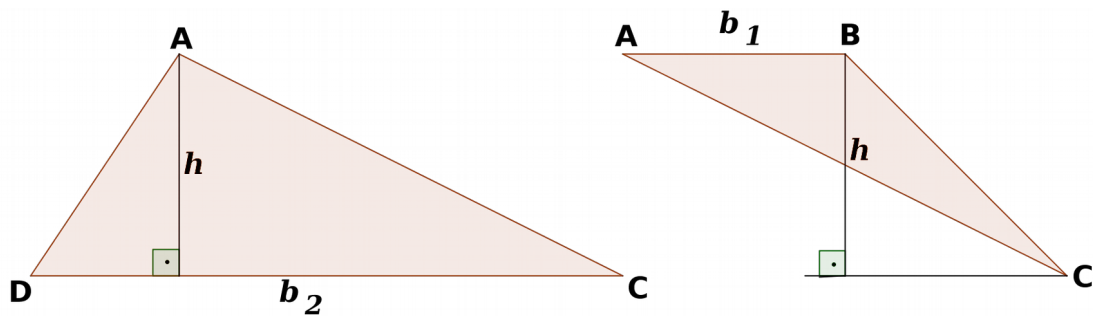
#### Demonstração:

Considere o trapézio  $ABCD$  de bases medindo  $b_1$  e  $b_2$ , e altura medindo  $h$ , figura



**Figura 16** – Trapézio  $ABCD$ .  
Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

Podemos dividir este trapézio em dois triângulos que são:  $\triangle ADC$  e  $\triangle ABC$  de mesma altura  $h$ , figura 17.



**Figura 17** – Triângulos  $ADC$  e  $ABC$ .  
Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

$$\text{Então } A_{\text{trapézio}} = b_2 \cdot \frac{h}{2} + b_1 \cdot \frac{h}{2}$$

$$\text{Ou seja, } A_{\text{trapézio}} = (b_1 + b_2) \frac{h}{2}.$$

Estas figuras elementares serão utilizadas mais adiante no desenvolvimento do nosso trabalho.

# Capítulo 3

## Sequências

Como já mencionado no capítulo 2, nosso trabalho entrelaça conceitos de geometria e aritmética de números inteiros. Neste capítulo abordaremos alguns conceitos elementares que serão utilizados na parte principal do trabalho. Começaremos, na próxima seção, com sequências e mais especificamente a sequência definida pelos números de Fibonacci que determinará o caminho poligonal que irá fazer a bisseção da área de uma figura plana.

Neste capítulo, trataremos inicialmente das sequências numéricas de forma geral e, posteriormente da sequência de Fibonacci.

Em muitas situações da vida diária aparece a ideia de *sequência* ou *sucessão*. Assim, por exemplo, temos:

- a sequência finita representada pelos dias da semana (domingo, segunda, ..., sábado);
- a sequência finita representada pelos meses do ano (janeiro, fevereiro, ..., dezembro);
- a sequência infinita representada pelos números naturais (0, 1, 2, 3, 4, ...).

Em todas essas situações observamos uma certa ordem nos elementos da sequência. Esses elementos são também chamados *termos* da sequência. Na sequência dos meses do ano, temos:

1º termo: janeiro, 2º termo: fevereiro, ..., 12º termo: dezembro.

Os elementos são representados por letras latinas minúsculas indexadas pela ordem em que aparece na sequência.

Se representarmos o 1º termo por  $a_1$  (lê-se **a** índice um, ou **a** um), o 2º termo por  $a_2$ , o 3º por  $a_3$ , e assim por diante, até o termo de ordem **n**, ou enésimo termo ( $a_n$ ), essa sequência pode ser representada por:

$$(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$$

Neste exemplo, temos:

- $a_1 =$  janeiro;
- $a_7 =$  julho;
- $a_{10} =$  outubro;
- $a_{12} =$  dezembro.

### **Definição.**

Uma sequência numérica é uma função cujo domínio é o conjunto numérico  $\mathbb{N}$ . Os números do contradomínio são indicados por  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ .

$S: A \rightarrow B$ , onde  $A \subseteq \mathbb{N}$ .

### **Exemplos.**

1º) A sequência dos números ímpares positivos é infinita:  $(1, 3, 5, 7, 9, \dots)$ , na qual  $a_1 = 1, a_2 = 3, a_3 = 5, a_4 = 7, a_5 = 9$ , etc;

2º) A sequência dos quatro primeiros múltiplos de 5 é finita:  $(0, 5, 10, 15)$ . Nesse caso,  $a_1 = 0, a_2 = 5, a_3 = 10$  e  $a_4 = 15$ ;

3º) A sequência dos números quadrados perfeitos é infinita:  $(1, 4, 9, 16, 25, \dots)$ ;

4º) A sequência do número de dias dos 12 meses de um ano bissexto é finita:  $(31, 29, 31, 30, 31, 30, 31, 31, 30, 31, 30, 31)$ . Esse exemplo mostra ainda que os termos de uma sequência são não necessariamente distintos;

5º) A sequência  $17, 12, 7, 2, -3, -8$  é uma sequência finita de 6 termos.

### **Determinação de uma sequência**

Algumas sequências são dadas por regras ou leis matemáticas chamadas *leis de formação*, que possibilitam explicitar todos os seus termos.

A sequência  $a_n = 2n - 1, n \in \mathbb{N}^*$ , é dada por:

- para  $n = 1 \Rightarrow a_1 = 2 \cdot 1 - 1 = 1$ ;
- para  $n = 2 \Rightarrow a_2 = 2 \cdot 2 - 1 = 3$ ;
- para  $n = 3 \Rightarrow a_3 = 2 \cdot 3 - 1 = 5$ ;
- para  $n = 4 \Rightarrow a_4 = 2 \cdot 4 - 1 = 7$ ; etc.

Portanto, a sequência é  $(1, 3, 5, 7, \dots)$ , ou seja, a dos números naturais ímpares.

Outras sequências infinitas que não conhecemos as *leis de formação*.

### Exemplos.

1º) A sequência dos números primos:  $(2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, \dots)$ ;

2º) A sequência dos números naturais nas casas decimais no número  $\pi$ :  $(1, 4, 1, 5, 9, \dots)$ .

### Exemplo.

Vamos determinar o termo  $a_n$ , chamado *termo geral*, na sequência dos números quadrados perfeitos  $(1, 4, 9, 16, 25, \dots)$ .

Observamos que:

- $n = 1 \Rightarrow a_1 = 1 = 1^2$
- $n = 2 \Rightarrow a_2 = 4 = 2^2$
- $n = 3 \Rightarrow a_3 = 9 = 3^2$
- $n = 4 \Rightarrow a_4 = 16 = 4^2$

...

- para um  $n$  qualquer  $\Rightarrow a_n = n^2$

Logo,  $a_n = n^2$  é o termo geral da sequência, com  $n \in \mathbb{N}^*$ .



### 3.1 Sequência de Fibonacci

Leonardo de Pisa (1170-1250) nasceu no centro comercial italiano de Pisa. Seu pai, Guilelmo, era funcionário da alfândega em Bugia, atual Argélia, e foi quem ensinou a seu filho os símbolos numéricos inventados pelos hindus e pelos árabes. Somente no século XIX o nome Fibonacci (filho de Bonaccio) lhe foi atribuído e assim é conhecido até hoje.

Mais tarde Leonardo tornou-se comerciante e escreveu: "Gostei tanto das instruções que continuei a estudar matemática durante viagens de negócios ao Egito, Síria, Grécia, Sicília e Provença, e gostei de debater com os estudiosos desses lugares," Eves (2004).

Sua principal obra foi Liber Abaci (livro de ábaco), publicado em 1202, mas ao contrário do que o título sugere, não se trata de um livro sobre ábaco e sim um texto aritmético escrito utilizando os símbolos e métodos hindus e arábicos.

Fibonacci foi o primeiro matemático europeu a utilizar a barra para representação de frações da mesma forma como é usado hoje.

Um dos problemas apresentados no Liber Abaci, trata de um modelo idealizado de reprodução de coelhos, apresentado na segunda parte do capítulo 15.

Segundo Barco (1987), a sequência de Fibonacci torna-se interessante pela frequência e variedade de suas aparições na natureza e na arte, por exemplo, o número de pequenas flores que formam o miolo do girassol é um dos números da sequência de Fibonacci e alguns poetas romanos, como Virgílio, escreveram poemas nos quais a métrica está definida conforme a regra da sequência de Fibonacci. Apesar das notórias contribuições de Fibonacci para a matemática nas mais diversas áreas, ele é hoje, no entanto, mais conhecido pela chamada sequência de Fibonacci, apresentada no Liber Abaci como resposta para um problema envolvendo o crescimento de uma população de coelhos. Vejamos o problema proposto por Fibonacci. Quantos casais de coelhos teriam ao final de 1 ano se:

- No primeiro mês temos um coelho macho e um coelho fêmea. Estes dois coelhos acabaram de nascer.
- Um coelho só atinge a maturidade sexual ao final de um mês.
- O período de gestação de um coelho dura um mês.
- Ao atingirem a maturidade sexual, a fêmea irá dar à luz todos os meses.
- A mãe irá dar à luz todos os meses um coelho

macho ou um coelho fêmea. • Os coelhos nunca morrem. Este problema pode ser representado segundo a tabela abaixo:

<b>Mês</b>	<b>Casais Maduros</b>	<b>Casais Novos</b>
01	1	0
02	1	1
03	2	1
04	3	2
05	5	3
06	8	5
07	13	8
08	21	13
09	34	21
10	55	34
11	89	55
12	144	89

Este modelo de crescimento do número de casais de coelhos é utilizado para apresentar uma sequência numérica conhecida como Sequência de Fibonacci.

Denotando por  $f_n$  o número de casais de coelhos ao fim do  $n$ -ésimo mês, tem-se

que:

$$f_1 = 1$$

$$f_2 = 1$$

$$f_3 = f_2 + f_1 = 1 + 1 = 2$$

$$f_4 = f_3 + f_2 = 2 + 1 = 3$$

$$f_5 = f_4 + f_3 = 3 + 2 = 5$$

$$f_6 = f_5 + f_4 = 5 + 3 = 8$$

$$f_7 = f_6 + f_5 = 8 + 5 = 13$$

E assim por diante. Isto é,

$$(f_n) = (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, \dots, f_n = f_{n-1} + f_{n-2}, \dots), n \in \mathbb{N}, n > 2.$$

Assim a solução para o problema anterior é:

$$(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144).$$

Fibonacci em suas observações percebeu que cada termo da sequência a partir do terceiro termo é obtido através da soma dos dois termos antecedentes. A sequência supracitada será essencial para nosso objetivo final.

Para escrever formalmente a lei que gera esta sequência, será utilizada a definição a seguir.

### **Definindo a Sequência de Fibonacci**

Na matemática, os números de Fibonacci são uma sequência ou sucessão definida como recursiva pela fórmula:

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}, \text{ com } n > 2 \text{ e } f_1 = f_2 = 1.$$

Os primeiros números de Fibonacci são:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, \dots, f_{n-2}, f_{n-1}, f_n, \dots$$

Essa relação define, por recorrência, uma sequência de números naturais, chamada Sequência de Fibonacci, cujos termos são chamados de Números de Fibonacci.

Os Números de Fibonacci apresentam propriedades aritméticas notáveis que são, até hoje, objeto de investigação. Existe até uma revista intitulada *The Fibonacci Quarterly*, criada em 1963, dedicada à pesquisa em torno desses números. Mas o que mais nos impressiona é o fato de que esses números aparecem na geometria, na Teoria dos Números, na genética, assim como surgem, inesperadamente, em fenômenos aparentemente desconexos, tais como, na distribuição das sementes dentro de um girassol, na árvore genealógica de um zangão e na relação com o Número de Ouro.

# Capítulo 4

## Caminhos Poligonais

Neste capítulo trataremos da classificação de caminho poligonal definido pelos números de Fibonacci. Antes de mostrarmos esse conceito, buscamos gradativamente construir os principais tópicos envolvidos.

### 4.1 O plano cartesiano

Dois eixos orientados ( $X$  e  $Y$ ) são dispostos ortogonalmente, dando origem à divisão do plano em quatro partes, cada uma das quais denominada quadrante. Os quatro quadrantes são numerados no sentido anti-horário, como mostra a figura 18, os eixos e a interseção entre eles são denominados, respectivamente, eixo das abscissas ( $X$ ), eixo das ordenadas ( $Y$ ) e origem ( $O$ ) do sistema de coordenadas.

Um *par ordenado* de números é o conjunto formado por dois números em certa ordem. Usa-se a notação  $(x, y)$  para indicar o par ordenado em que  $x$  é a abscissa e  $y$  é a ordenada. Vejamos alguns exemplos:

**Exemplo 1.**  $(1, 3)$  é o par ordenado em que a abscissa é 1 e a ordenada é 3.

**Exemplo 2.**  $(3, 1)$  é o par ordenado em que a abscissa é 3 e a ordenada é 1.

Note que os pares  $(1, 3)$  e  $(3, 1)$  diferem entre si pela ordem de seus elementos.

A cada ponto  $P$  do plano cartesiano corresponde um par ordenado  $(x, y)$  de números reais e, inversamente, cada par  $(x, y)$  tem como seu correspondente um ponto  $P$  do plano; escrevemos  $P(x, y)$  para indicar esses fatos.

A reta que divide ao meio os quadrantes ímpares é chamada *primeira bissetriz* e a que divide os quadrantes pares é a *segunda bissetriz*.

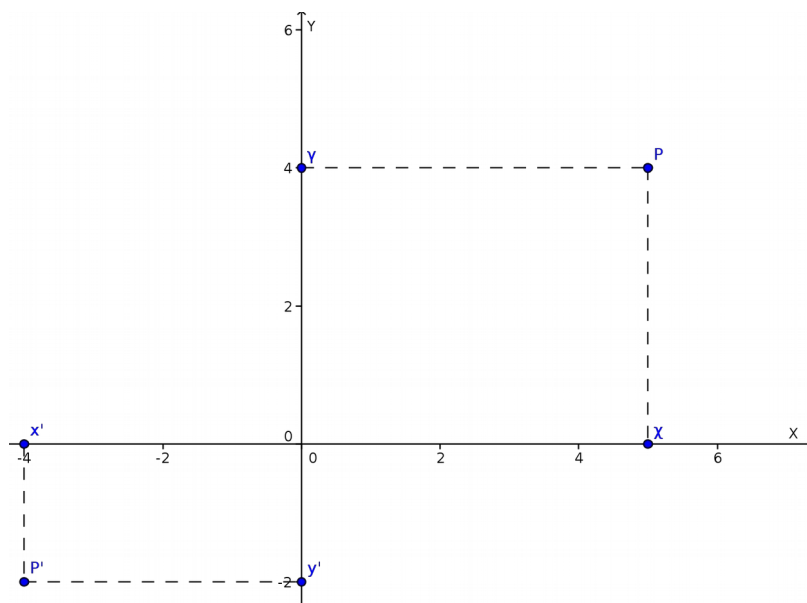
Também são mostrados os sinais das coordenadas em cada quadrante.

### Coordenadas no plano

A escolha de um sistema de coordenadas no plano  $\Pi$  permite estabelecer uma correspondência biunívoca entre  $\Pi$  e  $\mathbb{R}^2$ . Temos que  $\mathbb{R}^2$  é o conjunto dos pares ordenados  $(x, y)$  de números reais. A cada ponto  $P$  do plano  $\Pi$  corresponde um par ordenado  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ . Os números  $x$  e  $y$  são as *coordenadas* do ponto  $P$  relativamente ao sistema  $OXY$ :  $x$  é a *abscissa* e  $y$  é a *ordenada* de  $P$ . As coordenadas  $x, y$  do ponto  $P$  são definidas do seguinte modo:

Se  $P$  estiver sobre o eixo  $OX$ , o par ordenado que lhe corresponde é  $(x, 0)$ , onde  $x$  é a coordenada de  $P$  no eixo  $OX$ . Se  $P$  estiver sobre o eixo  $OY$ , a ele corresponde o par  $(0, y)$ , onde  $y$  é a coordenada de  $P$  nesse eixo. Se  $P$  não está em qualquer dos eixos, traçamos por  $P$  uma paralela ao eixo  $OY$ , a qual corta  $OX$  no ponto de coordenada  $x$  e uma paralela ao eixo  $OX$ , a qual corta  $OY$  no ponto de coordenada  $y$ . Então  $x$  será a abscissa e  $y$  a ordenada do ponto  $P$ . Noutras palavras,  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  é o par ordenado de números reais que corresponde ao ponto  $P$ .

Um *sistema de coordenadas* (cartesianas) no plano  $\Pi$  consiste num par de eixos perpendiculares  $OX$  e  $OY$  contidos nesse plano, com a mesma origem  $O$ . Chama-se  $OX$  o eixo das *abscissas* e  $OY$  é o eixo das *ordenadas*. O sistema é indicado com a notação  $OXY$ .



**Figura 18** – Sistema de coordenadas  $OXY$ .

Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

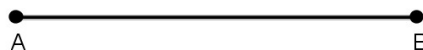
O ponto  $O$ , origem do sistema de coordenadas, tem abcissa e ordenada ambas iguais a zero. Assim, a ele corresponde  $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$ .

Se  $x$  é a abcissa e  $y$  é a ordenada do ponto  $P$ , o ponto  $P'$  de coordenadas  $(x, 0)$  chama-se a *projeção de  $P$*  sobre o eixo  $OX$  enquanto o ponto  $P''$ , de coordenadas  $(0, y)$  é chamado a *projeção de  $P$*  sobre o eixo  $OY$ .

## 4.2 Segmento de reta

**Definição.** Dados dois pontos distintos, a reunião do conjunto desses dois pontos com o conjunto dos pontos que estão compreendidos entre eles é um *segmento de reta*.

Assim, dados  $A$  e  $B$ ,  $A \neq B$ , o segmento de reta  $AB$  encontra-se representado na figura 19 e pode ser escrito como  $AB = \{A, B\} \cup \{X \mid X \text{ está compreendido entre } A \text{ e } B\}$ .



**Figura 19** – Segmento de reta  $AB$ .

Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

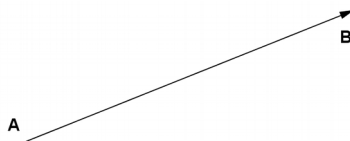
Os pontos  $A$  e  $B$  são as *extremidades* do segmento  $AB$  e os pontos que estão compreendidos entre  $A$  e  $B$  são pontos *internos* do segmento  $AB$ .

Se os pontos  $A$  e  $B$  coincidem ( $A = B$ ), dizemos que o segmento  $AB$  é o *segmento nulo*.

### Segmentos consecutivos

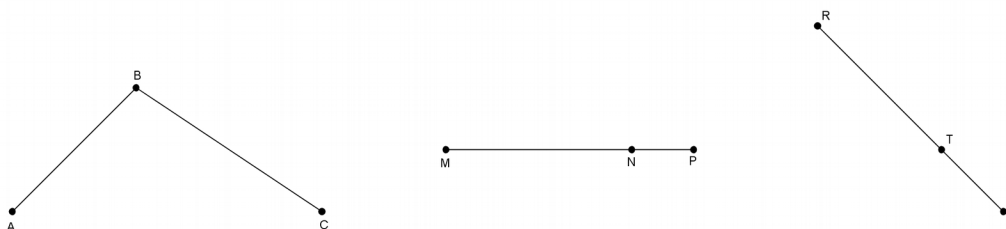
Dois segmentos de reta são *consecutivos* quando uma extremidade de um deles é também extremidade do outro (uma extremidade de um coincide com uma extremidade do outro). Um segmento orientado é determinado por um par ordenado de pontos, o primeiro chamado *origem* do segmento, o outro chamado *extremidade*. Um segmento  $AB$  é dito orientado quando há uma distinção entre os pontos  $A$  e  $B$  que o determinam,

sendo um deles chamado origem e o outro de extremidade do segmento orientado. Se o ponto A é a origem de um segmento orientado e o ponto B é a sua extremidade, denotamos esse segmento por AB e dizemos que o sentido da orientação de AB é de A para B. Se, por outro lado, B for a origem e A a extremidade, denotamos o segmento orientado por BA e dizemos que o sentido da orientação é de B para A. É geometricamente indicado por uma seta que caracteriza visualmente o sentido do segmento conforme figura abaixo.



**Figura 20** – Segmento orientado AB.  
Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

**Exemplos de segmentos consecutivos.** A figura a seguir apresenta três pares de segmentos consecutivos:  $AB$  e  $BC$ ,  $MN$  e  $NP$ ,  $RS$  e  $ST$ .



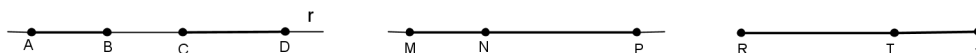
**Figura 21** – Segmentos de reta consecutivos.  
Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

### Segmentos colineares

Dois segmentos de reta são *colineares* quando possuem a mesma direção.

### Exemplos.

Os segmentos  $AB$  e  $CD$ ,  $MN$  e  $NP$ ,  $RT$  e  $TS$ , da figura 22 são colineares sendo  $AB$  e  $CD$  não consecutivos.





**Figura 22** – Segmentos colineares.  
Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

### Segmentos adjacentes

Dois segmentos *consecutivos* e *colineares* são *adjacentes* quando possuem em comum apenas uma extremidade (não têm pontos internos comuns).

### Exemplos.

Os segmentos  $MN$  e  $NP$ , figura 23, são adjacentes (são consecutivos colineares, tendo somente  $N$  comum isto é,  $MN \cap NP = \{N\}$ ).

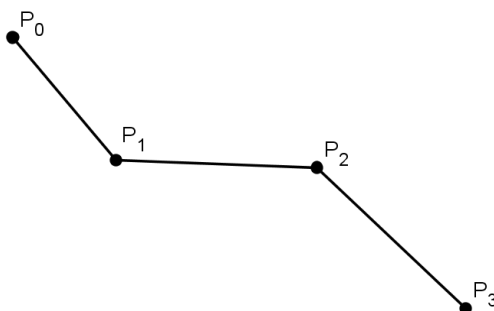


**Figura 23** – Segmentos adjacentes.  
Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

Já os segmentos  $RS$  e  $ST$  não são adjacentes (são consecutivos colineares e além de  $S$  têm outros pontos comuns, ou seja,  $RS \cap ST = ST$ ).

### 4.3 Caminho Poligonal

**Definição.** Um caminho poligonal é uma sucessão de segmentos consecutivos e não-colineares, dois a dois. Denotamos um caminho poligonal fornecendo a sequência dos pontos extremos dos segmentos que o formam, ou seja, o caminho poligonal  $P_0P_1P_2 \dots P_{n-1}P_n$  corresponde a reunião dos segmentos  $P_0P_1, P_1P_2, \dots, P_{n-1}P_n$ . Na figura a seguir temos o caminho poligonal  $P_0P_1P_2P_3$ :

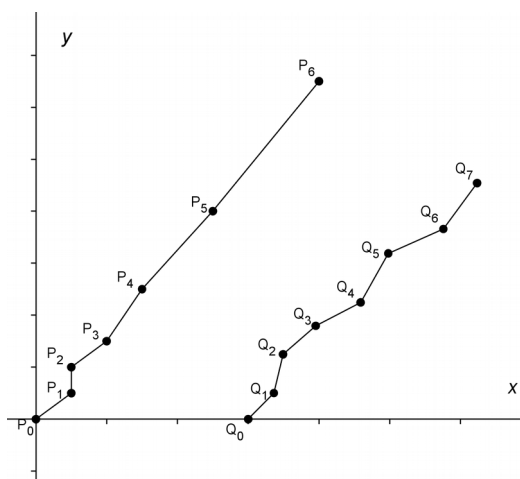


**Figura 24** – Caminho poligonal.

Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

Um caminho poligonal  $P_0P_1P_2\dots P_n$  será chamado crescente, se as abscissas e as ordenadas dos vértices dos pontos  $P_0, P_1, P_2, \dots$  formarem seqüências crescentes, ou seja,  $P_i(x_i, y_i)$  e  $P_{i+1}(x_{i+1}, y_{i+1})$  para  $i \geq 0$ ,  $x_i < x_{i+1}$  e  $y_i < y_{i+1}$ .

Na figura a seguir o caminho poligonal  $P_0P_1\dots P_6$  é crescente.



**Figura 25** – Caminho poligonal crescente e não decrescente.

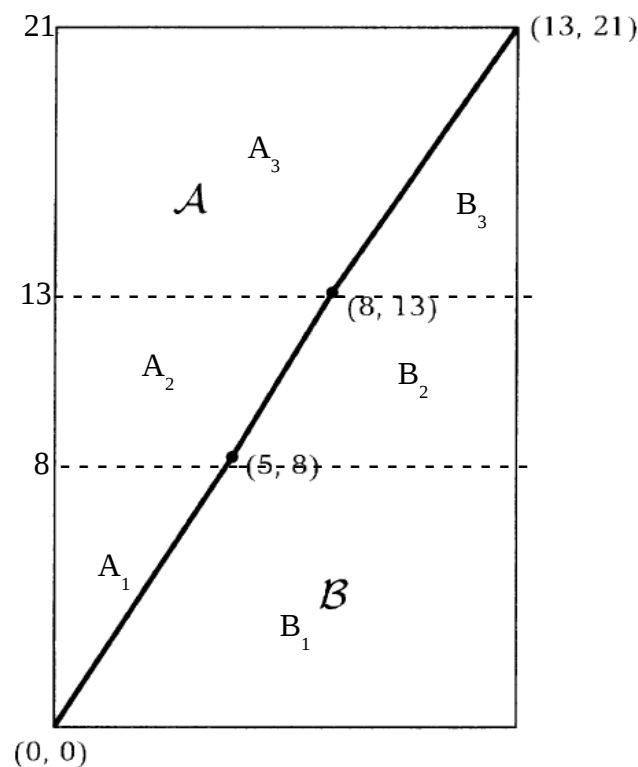
Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

Um caminho poligonal  $P_0P_1P_2\dots P_n$  será chamado *não decrescente* se as abscissas e as ordenadas dos vértices dos pontos  $P_0, P_1, P_2, \dots, P_n$  formarem seqüências não decrescentes,  $P_i(x_i, y_i)$  e  $P_{i+1}(x_{i+1}, y_{i+1})$  para  $i \geq 0$ ,  $x_i \leq x_{i+1}$  e  $y_i \leq y_{i+1}$ .

Na figura 25 o caminho poligonal  $Q_0Q_1\dots Q_7$  é não decrescente.

**Exemplo 1.**

Consideremos um caminho poligonal passando por dois vértices opostos de um retângulo. Em um exemplo particular figura 26. O caminho começa na origem,  $(0, 0)$  e passa, por segmentos consecutivos de linha reta, através dos pontos  $(5, 8)$ ,  $(8, 13)$  e  $(13, 21)$ , dividindo assim o retângulo em duas regiões que são rotuladas por  $A$  (acima) e  $B$  (abaixo).



**Figura 26** – Caminho passando pelos vértices opostos de um retângulo.  
Fonte: Mathematical Reflections.

Vocês acham que há algo interessante sobre as áreas dessas regiões? Tome alguns minutos para calcular cada uma de suas áreas.

Surpreso? Vamos ao cálculo.

A área  $A$  que compreende o triângulo  $A_1$  de vértices  $(0, 0)$ ,  $(0, 8)$  e  $(5, 8)$ , o trapézio  $A_2$  de vértices  $(0, 8)$ ,  $(5, 8)$ ,  $(8, 13)$  e  $(0, 13)$  e o trapézio  $A_3$  de vértices  $(0, 13)$ ,  $(8, 13)$ ,  $(13, 21)$  e  $(0, 21)$  e que após utilizar as fórmulas para o cálculo de áreas de figuras planas vista no capítulo 2, temos

$$\text{A área } A = \text{Área } A_1 + \text{Área } A_2 + \text{Área } A_3$$

que é,

$$\text{A área } A = 5 \times 8 / 2 + (5+8) \times 5 / 2 + (8+13) \times 8 / 2 = 20 + 32,5 + 84 = 136,5.$$

A área  $B$  que compreende o trapézio  $B_1$  de vértices  $(0, 0)$ ,  $(13, 0)$ ,  $(13, 8)$  e  $(5, 8)$ , o trapézio  $B_2$  de vértices  $(5, 8)$ ,  $(13, 8)$ ,  $(13, 13)$  e  $(8, 13)$  e o triângulo  $B_3$  de vértices  $(8, 13)$ ,  $(13, 13)$  e  $(13, 21)$  e que após utilizar as fórmulas para o cálculo de áreas de figuras planas vista no capítulo 2, temos:

$$A \text{ área } B = \text{Área } B_1 + \text{Área } B_2 + \text{Área } B_3$$

que é,

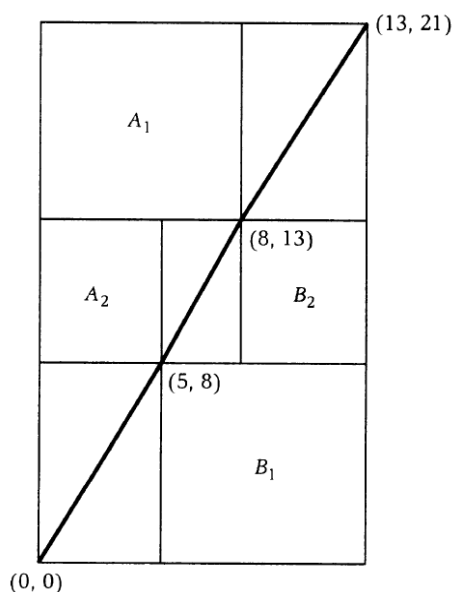
$$A \text{ área } B = (8+13) \times 8/2 + (5+8) \times 5/2 + 5 \times 8/2 = 84 + 32,5 + 20 = 136,5.$$

Logo as áreas são iguais.

Você acha que tínhamos que escolher as coordenadas dos pontos de "quebra" de forma especial para as áreas A e B? Você já pode ter notado que as coordenadas dos pontos de quebra (exceto para a origem) são, de fato, retirados dos números de Fibonacci consecutivos 5, 8, 13, 21.

Em seguida mostraremos gradativamente a divisão das primeiras figuras planas até a dedução da fórmula e das hipóteses necessárias para a conclusão da sua aplicação.

A figura a seguir apresenta o retângulo de áreas  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $B_1$  e  $B_2$ :



**Figura 27** – Retângulo de áreas  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $B_1$  e  $B_2$ .  
Fonte: Mathematical Reflections.

Segundo Hilton (1993), podemos ver muito mais do que apenas a prova deste caso em particular. Na verdade, o que torna as áreas dos quadrados  $A_1$ ,  $B_1$  iguais, e as áreas dos quadrados  $A_2$ ,  $B_2$  iguais, não é o fato de que os números que escolhemos serem números de Fibonacci, mas simplesmente o fato de que os números de Fibonacci  $F_n$ ,  $n \geq 1$ , são números positivos que satisfazem a relação geral de recorrência  $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$ .

Ainda segundo Hilton (1993), se começarmos na origem e passarmos ao longo de segmentos de reta através de  $P_1(f_n, f_{n+1})$ ,  $P_2(f_{n+1}, f_{n+2})$ , e  $P_3(f_{n+2}, f_{n+3})$ , temos um caminho que divide o retângulo em duas regiões de áreas iguais. A figura 27, com os pontos devidamente rotulados, serve como exemplo dessa afirmação muito mais geral.

## Capítulo 5

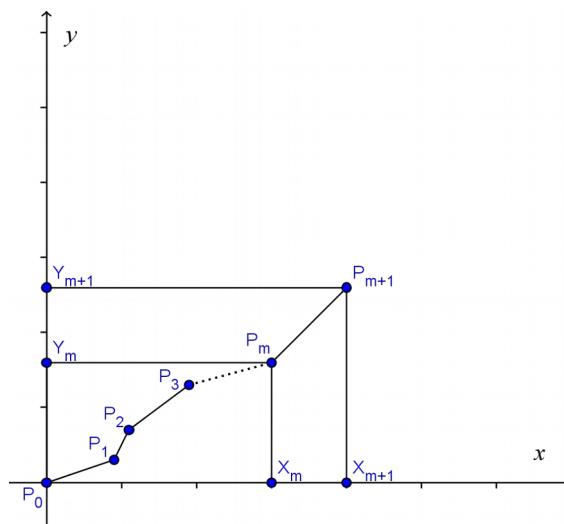
# Bissecção de áreas através de caminhos poligonais

Como já mencionado no capítulo 4, nosso trabalho entrelaça conceitos de geometria e sequências. Neste capítulo aplicaremos alguns conceitos elementares que foram apresentados na parte principal do trabalho na bissecção de áreas através de caminhos poligonais.

Neste capítulo trataremos desta importante aplicação que se refere à bissecção de áreas através de uma caminho poligonal definido pelos números de Fibonacci. Antes de demonstrarmos tal aplicação, buscamos gradativamente construir e relembrar os principais conceitos envolvidos, para que assim se possa ter argumentos suficientes para mais esta importante aplicação da sequência de Fibonacci. O objetivo aqui é dar uma prova geométrica elementar de seu resultado citado e, em seguida, dar uma prova algébrica elementar de uma versão generalizada deste resultado.

É válido relembrar que um caminho poligonal  $P_0P_1P_2\dots P_{m+1}$  onde  $P_i(x_i, y_i)$  é não decrescente se  $P_i(x_i, y_i)$  e  $P_{i+1}(x_{i+1}, y_{i+1})$  para  $i \geq 0$ ,  $x_i \leq x_{i+1}$  e  $y_i \leq y_{i+1}$ , conforme apresentado na página 37.

A figura a seguir apresenta o caminho poligonal  $P_0P_1P_2\dots P_{m+1}$ :

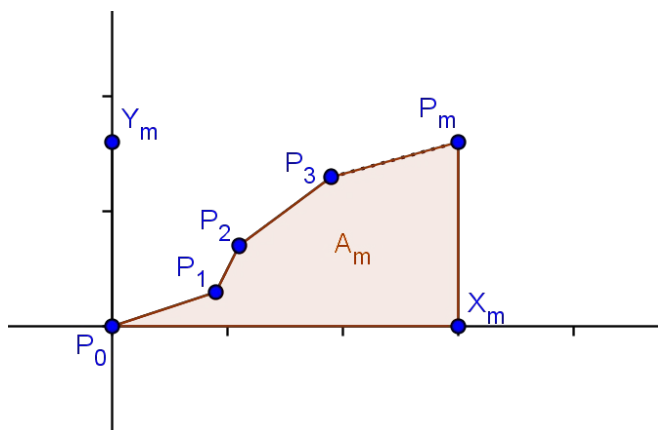


**Figura 28** – Caminho poligonal  $P_0P_1P_2\dots P_{m+1}$ .

Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

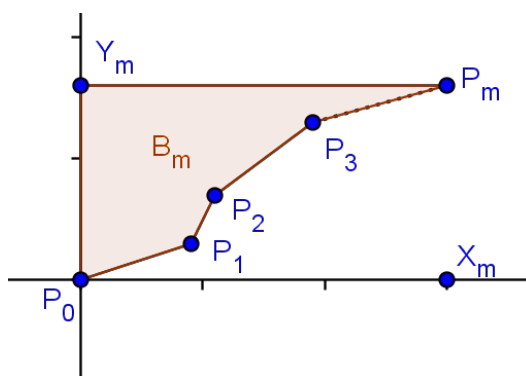
Note, pela figura acima, que para todo  $m$  natural podemos formar um retângulo no plano com os vértices nos pontos  $(0,0)$ ,  $(x_{m+1},0)$ ,  $(x_{m+1},y_{m+1})$  e  $(0,y_{m+1})$ . Aqui,  $(x_{m+1},0)$  e  $(0,y_{m+1})$  são as projeções do ponto  $P_{m+1}$  nos eixos coordenados. Denotaremos o retângulo  $P_0X_mP_mY_m$  por  $R_m$ . E, além disso, o caminho poligonal divide o retângulo em duas regiões, que denotaremos por  $A_m$  e  $B_m$ , onde  $A_m$  é a região determinada pelos pontos  $P_0, P_1, P_2, \dots, P_{m+1}, (x_{m+1},0)$  e  $B_m$ , a região formada pelos  $P_0, P_1, P_2, \dots, P_{m+1}, (0,y_{m+1})$ .

A figura a seguir apresenta a área  $A_m = \text{Área}(P_0P_1P_2\dots P_mX_m)$ :

**Figura 29** –  $A_m = \text{Área}(P_0P_1P_2\dots P_mX_m)$ .

Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

A figura a seguir apresenta a área  $B_m = \text{Área}(P_0P_1P_2\dots P_mY_m)$ :

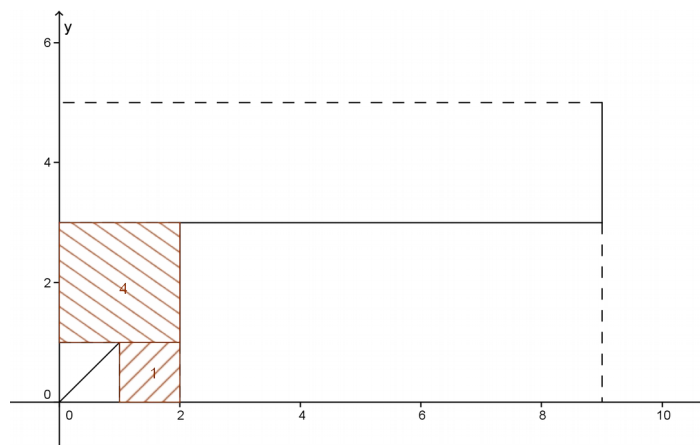
**Figura 30** –  $B_m = \text{Área}(P_0P_1P_2\dots P_mY_m)$ .

Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

**Definição:** Uma *divisão de área* através de um  $k$ -caminho ( $k \geq 2$ ) é um caminho poligonal não decrescente  $P_0P_1P_2\dots P_{m+1}$  tal que para todo  $n \geq 0$ , temos que a área da região  $A_n$  é igual à área da região  $B_n$ . Aqui  $A_n$  e  $B_n$  tem significado igual ao apresentado acima.

A seguir apresentaremos um exemplo de uma divisão de área através de um  $k$ -caminho:

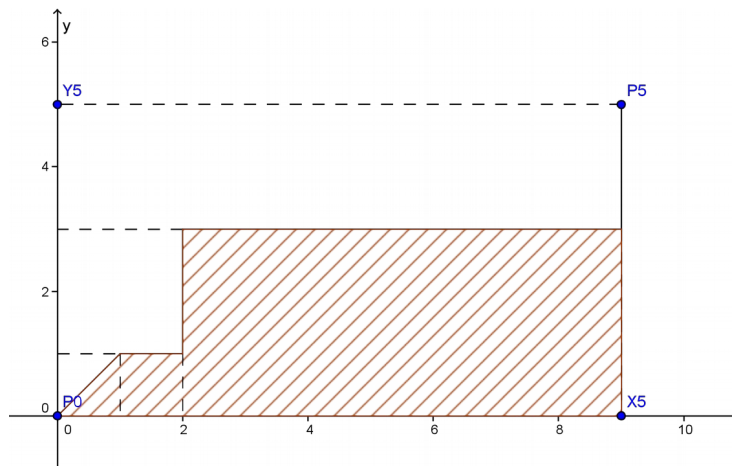
**Exemplo:** Considere os pontos  $P_0(0,0)$ ,  $P_1(1,1)$ ,  $P_2(2,1)$ ,  $P_3(2,3)$ ,  $P_4(9,3)$  e  $P_5(9,5)$  e a representação dada pela figura 31:



**Figura 31** – Caminho poligonal.  
Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

Observe que  $P_0(0,0)$ ,  $X_5(9,0)$ ,  $Y_5(0,5)$  e  $P_5(9,5)$  são vértices de um retângulo.

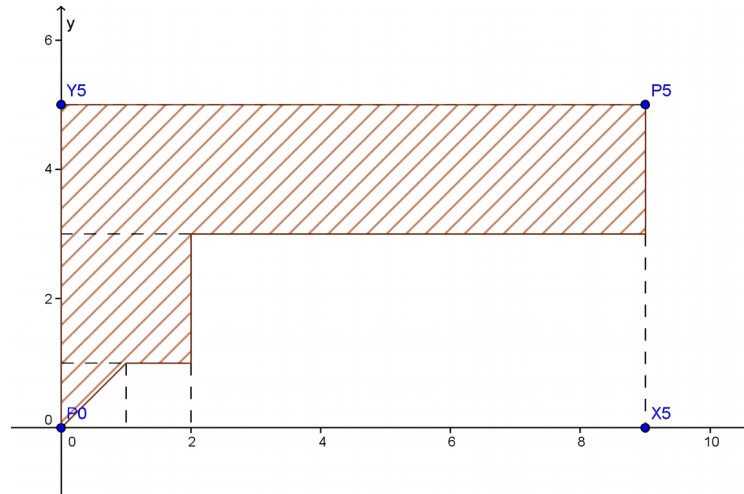
A figura a seguir apresenta a Área  $A_5$ :





**Figura 32 – Área  $A_5$ .**  
Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

Em seguida a figura 33 apresenta a Área  $B_5$ :



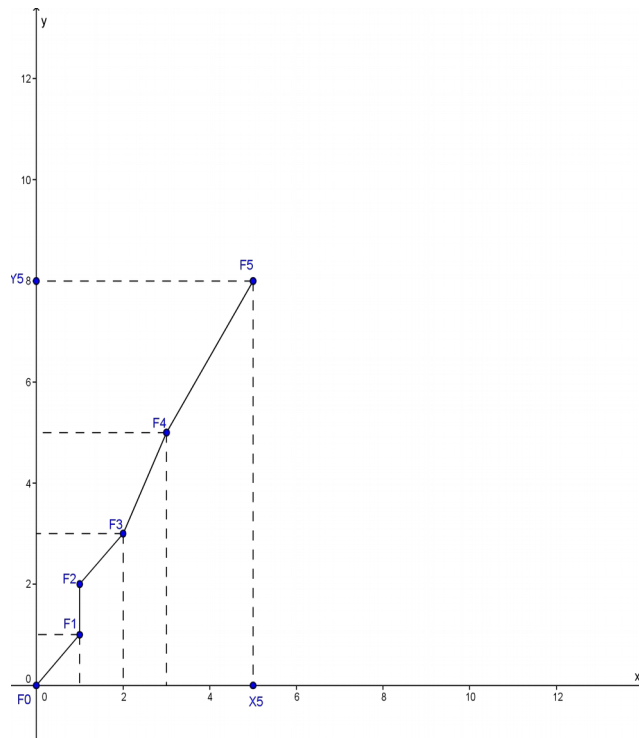
**Figura 33 – Área  $B_5$ .**  
Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

Observe que a área  $A_5 = \text{área } B_5$  que é igual a 22,5. Entretanto  $A_3$  e  $B_3$  têm áreas diferentes. Isto segue que a poligonal não é um 2-caminho.

Para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 1$ , devemos provar que: o caminho poligonal  $F_0 F_1 F_2 \dots F_{2n+1}$  divide o retângulo  $F_0 X_{2n+1} F_{2n+1} Y_{2n+1}$  em duas regiões de áreas iguais. A figura 32 ilustra esta divisão de área proposta para  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n = 0, 1, 2$ .

**Exemplo:** Considere o caminho poligonal  $F_0, F_1, \dots, F_5$ ,

$F_0(0,0)$ ,  $F_1(f_0, f_1) = (1,1)$ ,  $F_2(f_1, f_2) = (1,2)$ ,  $F_3(f_2, f_3) = (2,3)$ ,  $F_4(f_3, f_4) = (3,5)$ ,  $F_5(f_4, f_5) = (5,8)$ .  
Observe que os pontos são obtidos utilizando os números da sequência de Fibonacci  $f_n$ , para  $n$  natural.



**Figura 34** – Divisão do retângulo  $F_0X_{2n+1}F_{2n+1}Y_{2n+1}$  em duas regiões de mesma área.  
Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

Observe que  $A_5=B_5$ ,  $A_3=B_3$ ,  $A_1=B_1$ . Pela definição de divisão de área por  $k$ -caminho, o exemplo acima sugere que o caminho poligonal dado por pontos obtidos pela sequência de Fibonacci é candidato a um 2-caminho! Veremos adiante que este fato é realmente verdadeiro.

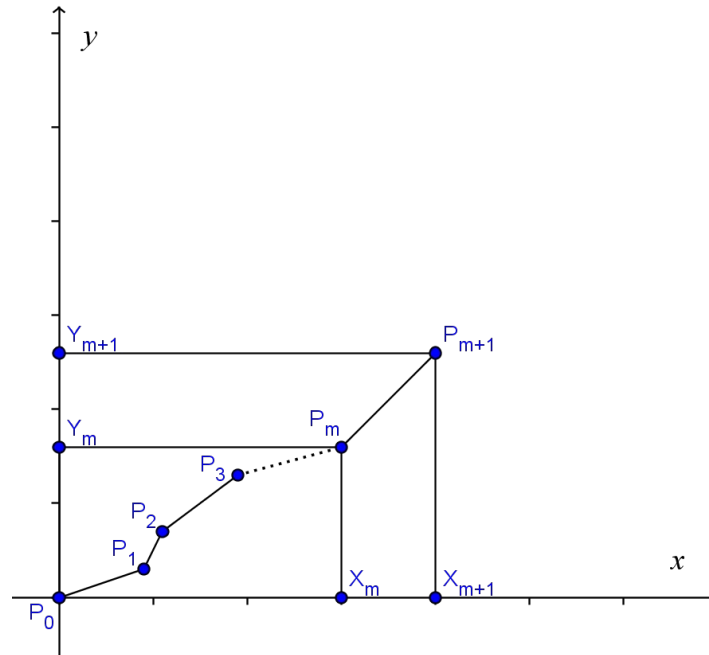
**Teorema 5 (Caracterização de  $k$ -caminhos poligonais):** Um caminho não decrescente

$P_0P_1\dots P_m$  é um  $k$  caminho se, e somente se,

$$\det \begin{pmatrix} x_{nk+1} & y_{nk+1} \\ x_{nk+2} & y_{nk+2} \end{pmatrix} + \dots + \det \begin{pmatrix} x_{(n+1)k} & y_{(n+1)k} \\ x_{(n+1)k+1} & y_{(n+1)k+1} \end{pmatrix} = 0, \text{ para todo } n \geq 0.$$

**Demonstração:**

Considere um caminho poligonal não decrescente  $P_0, P_1, \dots, P_m$ .



**Figura 35** – Caminho poligonal  $P_0P_1P_2\dots P_{m+1}$ .  
Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

Observe que os pontos  $P_m$  e  $P_{m+1}$  e suas projeções  $X_m$ ,  $X_{m+1}$ ,  $Y_m$ ,  $Y_{m+1}$  produzem dois trapézios. Denotando por  $C_m$  a área do trapézio  $P_mP_{m+1}X_{m+1}X_m$  e por  $D_m$  a área do trapézio  $Y_mP_mP_{m+1}Y_{m+1}$ , temos que

$$C_m = \frac{1}{2}(x_{m+1} - x_m)(y_{m+1} + y_m)$$

$$2C_m = x_{m+1}y_{m+1} + x_{m+1}y_m - x_m y_{m+1} - x_m y_m$$

$$2C_m = x_{m+1}y_{m+1} - x_m y_m + x_{m+1}y_m - x_m y_{m+1}$$

$$2C_m = x_{m+1}y_{m+1} - x_m y_m - (x_m y_{m+1} - x_{m+1}y_m)$$

$$2C_m = x_{m+1}y_{m+1} - x_m y_m - \det \begin{pmatrix} x_m & y_m \\ x_{m+1} & y_{m+1} \end{pmatrix}$$

$$D_m = \frac{1}{2}(y_{m+1} - y_m)(x_{m+1} + x_m)$$

$$2D_m = y_{m+1}x_{m+1} + y_{m+1}x_m - y_m x_{m+1} - y_m x_m$$

$$2D_m = y_{m+1}x_{m+1} - y_m x_m + y_{m+1}x_m - y_m x_{m+1}$$

$$2D_m = y_{m+1}x_{m+1} - y_mx_m + \det \begin{pmatrix} x_m & y_m \\ x_{m+1} & y_{m+1} \end{pmatrix}$$

E igualando as duas áreas, temos que:

$$2C_m = 2D_m, \text{ ou seja,}$$

$$x_{m+1}y_{m+1} - x_my_m - \det \begin{pmatrix} x_m & y_m \\ x_{m+1} & y_{m+1} \end{pmatrix} = y_{m+1}x_{m+1} - y_mx_m + \det \begin{pmatrix} x_m & y_m \\ x_{m+1} & y_{m+1} \end{pmatrix}$$

E cancelando os termos semelhantes, temos:

$$-\det \begin{pmatrix} x_m & y_m \\ x_{m+1} & y_{m+1} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} x_m & y_m \\ x_{m+1} & y_{m+1} \end{pmatrix}$$

Logo,

$$2 \det \begin{pmatrix} x_m & y_m \\ x_{m+1} & y_{m+1} \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \det \begin{pmatrix} x_m & y_m \\ x_{m+1} & y_{m+1} \end{pmatrix} = 0.$$

**Corolário:** Considere a poligonal  $F_0, F_1, \dots, F_m, \dots$ , onde  $F_0(0,0)$  e  $F_n(f_{n-1}, f_n)$ , para todo  $n \geq 1$ . Então a poligonal é um 2-caminho.

**Demonstração:**

Pelo Teorema 5, devemos mostrar que

$$\det \begin{pmatrix} x_{2n+1} & y_{2n+1} \\ x_{2n+2} & y_{2n+2} \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} x_{2n+2} & y_{2n+2} \\ x_{2n+3} & y_{2n+3} \end{pmatrix} = 0.$$

Usando que a poligonal nos dá  $x_m = f_{m-1}$  e  $y_m = f_m$ , devemos mostrar que

$$\det \begin{pmatrix} f_{2n} & f_{2n+1} \\ f_{2n+1} & f_{2n+2} \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} f_{2n+1} & f_{2n+2} \\ f_{2n+2} & f_{2n+3} \end{pmatrix} = 0, \forall n \geq 1.$$

Como  $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ , temos que  $f_{2n} = f_{2n+2} - f_{2n+1}$  e  $f_{2n+3} = f_{2n+2} + f_{2n+1}$ . Calculando os determinantes temos

$$\begin{aligned}
& \det \begin{pmatrix} f_{2n} & f_{2n+1} \\ f_{2n+1} & f_{2n+2} \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} f_{2n+1} & f_{2n+2} \\ f_{2n+2} & f_{2n+3} \end{pmatrix} = f_{2n}f_{2n+2} - (f_{2n+1})^2 - (f_{2n+2})^2 + f_{2n+1}f_{2n+3} \\
& = (f_{2n+2} - f_{2n+1})f_{2n+2} - (f_{2n+1})^2 - (f_{2n+2})^2 + (f_{2n+1})(f_{2n+2} + f_{2n+1}) \\
& = (f_{2n+2})^2 - f_{2n+1}f_{2n+2} - (f_{2n+1})^2 - (f_{2n+2})^2 + (f_{2n+1})^2 + f_{2n+1}f_{2n+2} \\
& = 0.
\end{aligned}$$

Portanto  $F_0, F_1, \dots, F_m$  é um 2-caminho.

# Capítulo 6

## Aplicações

Como já mencionado no capítulo 5, nosso trabalho entrelaça conceitos de geometria e aritmética de números inteiros. Neste capítulo abordaremos alguns conceitos elementares que serão utilizados na parte principal do trabalho. Começaremos, na primeira seção, com as aplicações.

Um dos elementos que utilizaremos com bastante frequência será o de área de figuras planas.

Diremos que um caminho poligonal determinado pelos números de Fibonacci divide uma região plana se, a medida da área de cada região tiver o mesmo valor.

Neste capítulo abordaremos o conceito de divisão de áreas de figuras planas através de caminhos poligonais e de que forma podemos fazer a aplicação do mesmo nas séries iniciais do ensino médio.

### **6.1 Dividir retângulos em figuras de mesma área**

A divisão de figuras em partes com igual área apresenta um contexto interessante a ser trabalhado na sala de aula, pois desta forma poderá ser estudado importante conceito matemático que é o de bissecção de áreas de figuras planas.

### **6.2 Planejamento: Área de Figuras Planas**

#### Síntese

Uma das grandes carências do Ensino de Matemática na Escola Básica é a formação de alunos com a capacidade dedutiva ou lógica para conseguir, através da observação, desenvolver uma linha de raciocínio de forma a construir suas associações, o que poderíamos simplificar como a “fórmula final” e por não ter compreendido o processo de formação de tais, acabam recorrendo à “decoreba” para aplicá-las ao exercício das avaliações. E assim, quando a memória falhar – pela falta de exercício da questão – e for novamente exigido o conhecimento deste conceito, eles não sabem nem por onde começar. Deste modo, o Ensino da Matemática promove a capacidade de

observação, interpretação e raciocínio, de modo à poder recorrer a sua própria capacidade de raciocínio para conseguir desenvolver e alcançar a solução final.

A partir desta perspectiva, proponho um método de explanação dos conteúdos de matemática de forma a proporcionar o aluno conseguir construir e compreender de modo que possa deduzir as fórmulas intuitivamente. Assim sendo, sugiro um modelo de aula sobre “Área de Figuras Planas” e “Bissecção de Áreas de Figuras Planas” para alunos do 9º ano do Ensino Fundamental. A finalidade deste é estimular e desenvolver no aluno, maiores associações e capacidades para lidar com áreas de figuras geométricas.

#### Proposta

O primeiro tema (Área) deve ser dividido em pelo menos 2 aulas para não sobrecarregar o aluno, e permiti-lo ter tempo para formar as associações necessárias sobre área; para então, após, três aulas sobre bissecção de áreas de figuras planas. Caso seja uma turma mais avançada no conteúdo, e este queira ser transmitido mais como uma curiosidade, ou algo extra, então é possível ministrar tudo em menos tempo, no ritmo que o entendimento dos alunos corresponderem.

Proponho em dividir da seguinte maneira:

1ª Aula: Área de Figuras Planas

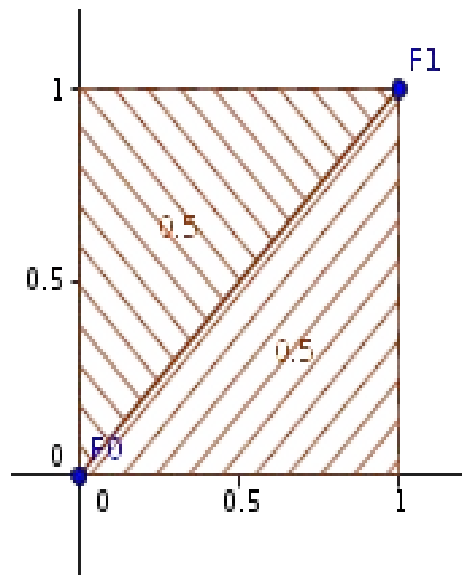
2ª Aula: Exercícios Especiais

3ª Aula: Bissecção de Áreas de Figuras Planas

4ª Aula: Bissecção de Quadrados

5ª Aula: Bissecção de Retângulos

A figura a seguir representa a divisão do retângulo através do caminho poligonal  $F_0F_1$ :

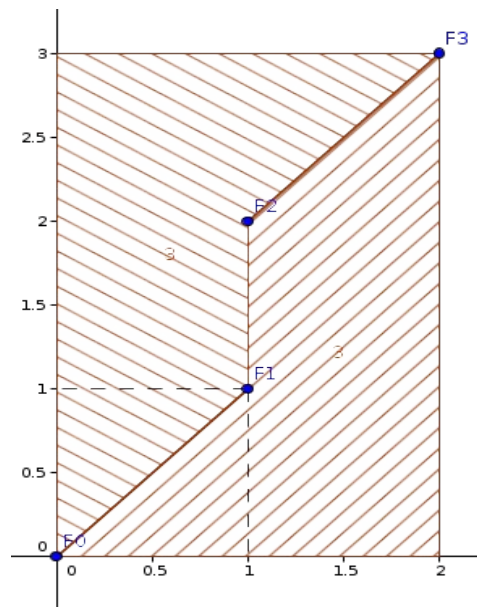


**Figura 36** – Divisão do retângulo através do caminho poligonal  $F_0F_1$ .  
Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

A partir da visualização da secção da área do quadrado em 2 áreas iguais, assim, verificar que o caminho poligonal  $F_0F_1$  determinado pelos números de Fibonacci divide o quadrado em duas regiões de mesma área.

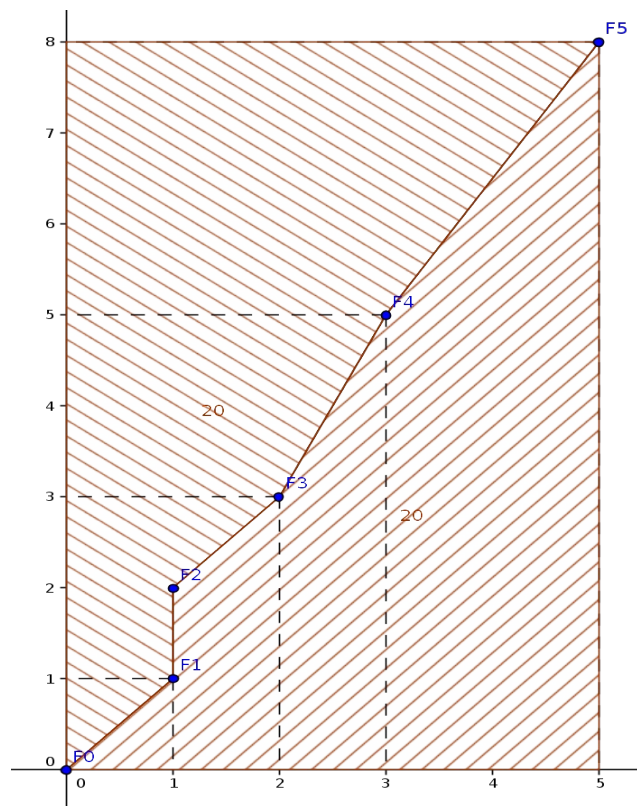


A seguir, a figura 38 representa a divisão do retângulo através do caminho poligonal  $F_0F_1F_2F_3$ :



**Figura 37** – Divisão do retângulo através do caminho poligonal  $F_0F_1F_2F_3$ .  
Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

A partir do retângulo da figura acima, verificar através do cálculo de áreas de figuras geométricas planas como triângulos e trapézios que, o caminho poligonal  $F_0F_1F_2F_3$  determinado pelos números de Fibonacci divide este retângulo em duas regiões de mesma área.



**Figura 38** – Divisão do retângulo através do caminho poligonal  $F_0F_1F_2F_3F_4F_5$ .  
 Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

A partir do retângulo da figura acima, verificar através do cálculo de áreas de figuras geométricas planas como retângulos, triângulos e trapézios que, o caminho poligonal  $F_0F_1F_2F_3F_4F_5$  determinado pelos números de Fibonacci divide este retângulo em duas regiões de mesma área.

## REFERÊNCIAS

BARBOSA, João Lucas. **Geometria Euclidiana Plana**. SBM, Coleção do Professor de Matemática, 10ª edição.

BARCO, L. **O cientista é um privilegiado leitor da natureza**. Revista Superinteressante, Edição 001, outubro de 1987.

EVES, H. **Introdução à História da Matemática**. Trad. Hygino H. Domingues. Campinas, SP: Unicamp, 2004.

FACCO, S. R. **Conceito de área: uma proposta de ensino-aprendizagem**. Dissertação de Mestrado. – São Paulo, SP: Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2003. Disponível em: [https://www.pucsp.br/pensamentomatematico/dissertacao\\_sonia\\_facco.pdf](https://www.pucsp.br/pensamentomatematico/dissertacao_sonia_facco.pdf). Acesso em: 22 nov. 2018.

HILTON, P.; HOLTON, D.; PEDERSEN, J. 1996: **Mathematical reflections: In a room with many mirrors**. New York, 1996.

HILTON, P. and PEDERSEN, J. 1993: **A Note on a Geometrical Property of Fibonacci Numbers**.

LEITHOLD, L. **Cálculo com geometria analítica**. Tradução: Cyro de Carvalho Patarra. São Paulo: Harbra, 1994.

LIMA, E. L.; CARVALHO, P. C. P.; MORGADO, A. C. Wagner, E. **A Matemática do Ensino Médio, volume 2**. SBM, Coleção do Professor de Matemática, 6ª Edição.

PAGE, W. and SASTRY, K. R. S. 1992: **Area-Bisecting Polygonal Paths**. The Fibonacci Quarterly 30.3:263-73.