UFRRJ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT

DISSERTAÇÃO

Binômio de Newton: Uma Abordagem no Campo da Análise Combinatória para o Ensino Médio

Alex Alves Magalhães dos Santos

2019

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO RIO DE JANEIRO
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT

BINÔMIO DE NEWTON: UMA ABORDAGEM NO CAMPO DA ANÁLISE COMBINATÓRIA PARA O ENSINO MÉDIO

ALEX ALVES MAGALHÃES DOS SANTOS

Sob a Orientação do Professor
Orlando dos Santos Pereira

Dissertação submetida como requisito parcial para obtenção do grau de **Mestre**, no Curso de Pós-Graduação em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, Área de Concentração em Matemática.

Seropédica, RJ
Março de 2019

Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro
Biblioteca Central / Seção de Processamento Técnico

Ficha catalográfica elaborada
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

S237b Santos, Alex Alves Magalhães dos, 1972-
Binômio de Newton: Uma Abordagem no Campo da Análise Combinatória para o Ensino Médio / Alex Alves Magalhães dos Santos. - 2019.
107 f.: il.

Orientador: Orlando dos Santos Pereira.
Dissertação(Mestrado). -- Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Curso de Pós-Graduação em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional-PROFMAT, 2019.

1. Binômio de Newton. 2. Polinômio de Leibniz. I. Pereira, Orlando dos Santos, 1976-, orient. II Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro. Curso de Pós-Graduação em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional-PROFMAT III. Título.

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO RIO DE JANEIRO
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT

ALEX ALVES MAGALHÃES DOS SANTOS

Dissertação submetida como requisito parcial para obtenção do grau de **Mestre** em Matemática, no Curso de Pós-Graduação em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, área de concentração em Matemática.

DISSERTAÇÃO APROVADA EM 27/03/2019

Orlando dos Santos Pereira Dr. UFRRJ
(Orientador)

Aline Mauricio Barbosa Dr[a]. UFRRJ

Wallace Vallory Nunes Dr. IFRJ

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus por tudo que me concede dia após dia e, por mais esta graça alcançada de estar concluindo este Mestrado, que é muito significativo para mim. Peço ao meu Deus que continue a iluminar a estrada de minha vida.

Agradeço em especial ao professor Dr. Orlando dos Santos Pereira, pela sua atenção e dedicação na correção deste trabalho, que muito contribuiu com seu senso crítico para a conclusão do mesmo.

Agradeço também a todo corpo docente do PROFMAT da UFRRJ, pela sua dedicação na transmissão de novos conhecimentos, que foi de grande valia para ampliação de novos horizontes, são eles, os professores:
Dra. Aline Mauricio Barbosa, Dr. André Luiz Martins Pereira, Dr. Cláudio Cesar Saccomori Júnior, Dr. Douglas Monsôres de Meio Santos, Dr. Edivaldo Figueiredo Fontes Júnior, Dra. Eulina Coutinho Silva do Nascimento, Dr. Luciano Vianna Félix, Dr. Montauban Moreira de Oliveira Júnior, Dr. Pedro Carlos Pereira, Dr. Vinícius Leal do Forte.

Agradeço à toda minha família, em especial a minha amada irmã Alessandra Alves Magalhães dos Santos por todo apoio, compreensão e carinho recebido no decorrer desta jornada.

A todos que, de alguma forma, contribuíram direta ou indiretamente para que chegasse até aqui, meu muito obrigado.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

This Study was financed in party by the Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Finance Code 001.

“O que sabemos é uma gota, o que ignoramos é um oceano”.

“Eu consigo calcular o movimento dos corpos celestiais, mas não a loucura das pessoas”.

“Nenhuma grande descoberta foi feita jamais sem um palpite ousado”.

Isaac Newton (1643-1726)

RESUMO

SANTOS, Alex Alves Magalhães dos. Binômio de Newton: uma abordagem no campo da análise combinatória para o Ensino Médio.2019. 107p Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT). Instituto de Ciências Exatas, Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Seropédica, RJ, 2019.

Este trabalho de revisão de literatura tem por objetivo estabelecer conexões dos conteúdos do Binômio de Newton sob uma perspectiva combinatória para alunos do Ensino Médio e, também trata de uma sequência didática sobre o referido tema, que pode ser aplicada em sala de aula pelo professor de matemática. Como professor do Ensino Médio observou-se que os estudantes apresentam várias deficiências em matemática, especialmente, em combinatória e probabilidade. Muitos conhecem apenas fórmulas, não entendem suas aplicações, enquanto que outros apresentam completo desconhecimento em tais assuntos e, grande parte deles, não conseguem solucionar problemas comuns de contagem do Ensino Fundamental. No entanto, despertava interesse da parte dos alunos, mesmo aqueles sem aptidões para as disciplinas exatas, quando eram aplicados exercícios que estavam associados às situações do cotidiano, como, por exemplo, o jogo da Mega-Sena. Verifica-se que a ausência de interesse dos alunos nas Escolas do Ensino Médio, grande parte, é fruto do pouco valor dado pelos docentes aos assuntos. Não resta dúvida, que o estudo do Binômio de Newton é fantástico, desde que haja o entendimento de como ocorre a expansão binomial. O propósito é contribuir para novas abordagens de atuação e, consequentemente, ser um tema instigante para os alunos, desenvolvendo, assim, significativamente sua capacidade de reunir as ideias e raciocinar logicamente.

Palavras-chave: Binômio de Newton. Análise combinatória. Ensino Médio.

ABSTRACT

SANTOS, Alex Alves Magalhães dos. Binomial of Newton: an approach in the field of combinatorial analysis for High School.2019. 107p. Dissertation (Mestrado Professional em Matemática em Rede Nacional - ROFMAT) Instituto de Ciências Exatas, Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Seropédica, RJ, 2019.

This work of literature review aims to establish connections of the contents of Newton's binomial under a combinatorial perspective for high school students,and it also deals with a didactic sequence on the subject, which can be applied in the classroom by the mathematics teacher.As a High school teacherwas observed that students havepresented several deficiencies in mathematics, especially in combinatorial and probability.Many know only formulas, do not understand their applications, while others have complete ignorance in such matters, and most of them can’t solve common problems of counting Elementary school. However, it was aroused interest on part of the students, even those with no aptitude for the exact disciplines, when exercises were applied that were associated with daily situations, such as the Mega-Sena game.It is verified the student absence of interest in the High Schools, majority, is fruit of the little value given by the teachers to the subjects. There is no doubt that the study of Newton's binomial is fantastic, provided there is an understanding of how binomial expansion occurs. The purpose is to contribute to new approaches of action and, consequently, to be an exciting topic for students, thus developing significantly their ability to gather ideas and reason logically.

Key words: Binomial of Newton. Combinatory analysis. High school.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

CAPÍTULO I – INTRODUÇÃO

O germe deste trabalho de dissertação começou em 2003 quando eu ministrava aulas de análise combinatória para algumas turmas do 2º do Ensino Médio, na ocasião os alunos apresentavam bastante dificuldade para resolver os exercícios de combinatória, pois eles não entendiam ou achavam que a matéria, técnicas de contagem, seria apenas decorar as fórmulas e aplicar nos exercícios, isto me incomodava muito porque além de me preocupar em ser entendido sabia que a análise combinatória era muito mais que uma simples bateria de fórmulas, eu buscava uma maneira de estimular e explorar e senso crítico dos alunos despertando o interesse deles para com a matéria e para minha infelicidade eu não encontrava na literatura nacional exercícios criativos e contextualizados.

O emprego de ferramentas algébricas nas resoluções de problemas sempre apresenta dúvidas e dificuldades para uma grande parte dos alunos. Dessa forma, é de extrema relevância que o educando obtenha habilidades para solucionar problemas dentro de uma perspectiva algébrica mais apurada. Assim, o aluno terá um melhor entendimento sobre certos problemas matemáticos e de áreas afins.

Nesse sentido, a abordagem pretendida é sobre os números binomiais, apresentando-os sob o ponto de vista algébrico, como, em geral, é ensinado no Ensino Médio e, em especial, sob a visão combinatória. Acredita-se que pode ser desenvolvido no educando o interesse pela área, provocando-o a apresentar respostas mais simples para os problemas, sem, contudo, não abrir mão do rigor da matemática na elaboração desses resultados.

A delimitação da temática é em relação aos números binomiais ressaltando uma abordagem combinatória voltada para o Ensino Médio. Quanto às questões norteadoras são as seguintes: a) Quais são os elementos relevantes para o desenvolvimento binomial? B) Quais são os conceitos básicos e as principais técnicas de contagem para as demonstrações combinatórias? C) Como se organizam os números multinomiais no Triângulo de Pascal e no polinômio de Leibniz?

Neste sentido, o objetivo geral é estabelecer conexões dos conteúdos do Binômio de Newton sob uma perspectiva combinatória para alunos do Ensino Médio em conjunto com uma sequência didática, que pode ser aplicada em sala de aula pelo professor de matemática. Em relação aos objetivos específicos são: a) identificar os elementos importantes para o desenvolvimento binomial; b) levantar os conceitos e as principais técnicas de contagem para as demonstrações combinatórias; c) investigar a organização dos números multinomiais no Triângulo de Pascal e no Polinômio de Leibniz.

O estudo do Binômio de Newton abre espaço para o estudo de inúmeros outros assuntos matemáticos, tais como: polinômios, equações polinomiais, cálculo diferencial e integral com funções polinomiais de graus variados, entre outros, pois por meio das habilidades adquiridas com o trabalho algébrico torna-se mais entendível o desenvolvimento de algumas propriedades e demonstrações destas. Portanto, a escolha da temática justifica-se por entender que os conteúdos do Binômio de Newton tornam o aprendizado mais enriquecedor.

A metodologia utilizada é descritiva e bibliográfica. Nesta perspectiva, foi realizado um levantamento bibliográfico contemplando livros, artigos científicos, monografias de graduação, dissertações de mestrado e teses de doutorado.

A literatura trabalhada é nacional. Procurou selecionar material bibliográfico dos últimos 10 anos, porém são usadas algumas referências mais antigas, por considerar publicações importantes e pertinentes à temática abordada. As bases de dados acessadas foram: Scielo; Google Acadêmico e várias bases de dados de universidades federais e estaduais brasileiras.

Os descritores empregados para buscar o material bibliográfico foram: binômio de Newton, teorema binomial, números binomiais, análise combinatória, polinômio de Leibniz, expansão multinomial, teorema multinomial, triângulo aritmético.

O presente estudo é elaborado numa sequência clara e objetiva para que o leitor adquira saberes necessários, de forma a acompanhar o desenvolvimento binomial com suas propriedades e aplicações e, assim, propiciar aos educandos do Ensino Médio um aprendizado mais significativo. Assim, a dissertação apresenta cinco capítulos, além das respostas dos exercícios de fixação, respostas dos exercícios propostos, respostas dos desafios, conclusão e referências.

O primeiro capítulo intitulado introdução descreve um resumo de todo o trabalho apresentado em questão.

O segundo capítulo tece uma abordagem sobre o Binômio de Newton, apresentando uma breve história do surgimento do estudo do desenvolvimento binomial com suas propriedades e aplicações. Em seguida, trata do desenvolvimento do Binômio de Newton, mas antes de adentrar no assunto propriamente dito, tratou-se a respeito dos números binomiais, do Triângulo de Pascal, faz considerações sobre o legado deixado por Isaac Newton, para depois abordar o ensino do Binômio de Newton com bastantes exemplos.

O terceiro capítulo trata dos conceitos e das aplicações da análise combinatória no Ensino Médio. Dentro deste contexto, são apresentados os requisitos para resolução de problemas combinatórios; o princípio fundamental de contagem; o conceito de agrupamentos simples, englobando permutações simples, arranjos simples e combinações simples, com inúmeros exemplos. Logo, a seguir, são apresentados exemplos práticos empregando o Binômio de Newton na genética e na Mega-Sena.

O quarto capítulo aborda os números multinomiais. Primeiro, faz um breve resumo da vida e obra de Gottfried Wilhelm Von Leibniz. Na sequência, é demonstrada a potenciação de polinômios na potência de binômios, por associação sucessiva dos seus termos denominada de processo espontâneo, apresentando muitos exemplos com as devidas aplicações. Logo, a seguir, é estudada a fórmula de Leibniz, denominado de processo sistemático, bem como, são exibidos vários exemplos. Por último, são trabalhadas aplicações práticas.

O quinto capítulo apresenta uma sequência didática distribuída em 8 etapas: fatorial, princípio fundamental da contagem, arranjo simples, permutação simples, combinação simples, Triângulo Pascal, Binômio de Newton, e Polinômio de Leibniz. Cada etapa dispõe de objetivos específicos, planejamento, carga horária e exercícios para complementarem o processo de ensino-aprendizagem.

CAPÍTULO II – BINÔMIO DE NEWTON

2.1 Aspectos Históricos

É comum na história do conhecimento científico, a denominação de certas teorias com o nome de seu descobridor ou do cientista que teve uma maior contribuição para provar determinado resultado. Quando se refere ao Teorema de Pitágoras, por exemplo, uma pessoa que frequentou a escola até o nível de Ensino Médio deduz que se trata de algumas das relações métricas existentes no triângulo retângulo. Da mesma maneira, quando se fala das Leis de Newton, trata-se das três leis fundamentais da Mecânica Clássica. Adentrando nas especialidades, é de fácil percepção para um físico quando se evoca as Equações de Maxwell, ou o Número de Avogadro para um químico, ou a Teoria de Darwin para o biólogo (NOBRE, 2004).

Na Matemática, existem muitos exemplos como: Princípio de Cauchy, Princípio de Cavalieri, Triângulo de Pascal, Teorema de L'Hospital, Binômio de Newton, Coordenadas Cartesianas, entre outros. A nomeação de certas matérias, seja em Física, Química, Biologia ou Matemática, representa uma maneira de evidenciar a relevância que o personagem teve em seu desfecho. Nobre (2004) destaca a justiça feita ao atribuir a Albert Einstein a paternidade da Teoria da Relatividade. No entanto, destaca-se o pensamento de Isaac Newton, quando em atitude de respeito àqueles que de certa forma contribuíram para as teorias, as quais alcançou resultados, expressou: "se enxerguei mais longe é porque me apoiei em ombros de gigantes". (NOBRE, 2004, p. 532).

O processo de descoberta científica possui uma história que não é imutável, pois as verdades mudam e se atualizam ao longo do tempo. Assuntos que eram considerados como verdades absolutas transformam-se em verdades relativas, o que leva os historiadores e pesquisadores a analisarem criticamente obras escritas no passado, com a finalidade de efetivarem as necessárias correções. Esse fato cria um ciclo – com o aprofundamento das investigações históricas, novas verdades surgem, novas interpretações são dadas a elas e a escrita da história adquire novos caminhos (NOBRE, 2004).

Houve distorções na história de algumas denominações que foram atribuídas de forma errônea a alguns personagens. Nobre (2004) cita os exemplos: Princípio de Cavalieri não deveria ser assim denominado, o Triângulo de Pascal não é de Pascal, o Teorema de L'Hospital não pertence ao Marquês de L'Hospital, o que se conhece como Binômio de Newton não pode ser atribuído a Isaac Newton, o princípio de Cauchy não é de Cauchy, as Coordenadas Cartesianas não foram inseridas por Renè Descartes, e assim por diante.

Quanto ao estudo do desenvolvimento binomial com suas propriedades e aplicações, não foi objeto de estudo do físico e matemático inglês Isaac Newton (1642-1727), muito embora leve o nome de “Binômio de Newton”. De acordo com Miranda (2018), o binômio foi conceituado por Newton como um estudo que veio para complementar o estudo de produto notável. Esse estudo abrange: coeficientes binomiais e suas propriedades; Triângulo de Pascal e suas propriedades; e fórmula do desenvolvimento do Binômio de Newton

De acordo com Eves (2008), Newton descreveu e explicou o teorema do desenvolvimento do binômio generalizado para potências com expoente fracionário, o qual o mesmo representou sob a forma:

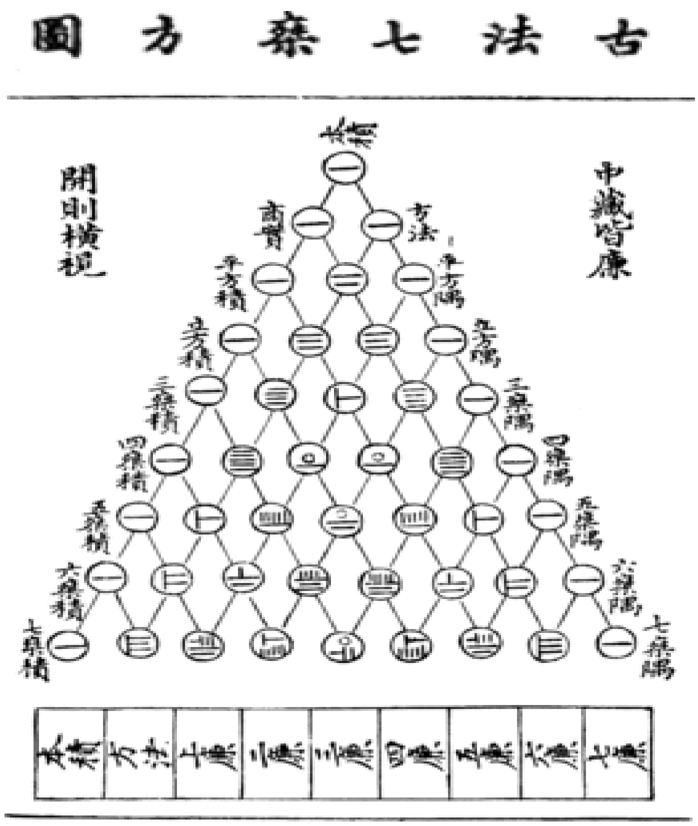
$$(P + Q)^{m/n} = P^{m/n} + \frac{m}{n} AQ + \frac{m - n}{2n} BQ + \frac{m - 2n}{3n} CQ + \ldots,$$

Onde A representa o primeiro termo ($P^{m/n}$), B representa o segundo termo ($\frac{m}{n} AQ$), C representa o terceiro termo e assim em diante. Os devidos ajustes com suas restrições do desenvolvimento binomial para qualquer valor complexo do expoente, só foi criado mais de um século e meio depois pelo matemático norueguês N. H. Abel (1802-1829).

O desenvolvimento binomial demanda alguns conceitos que foram introduzidos durante vários anos por inúmeros matemáticos. Não se pode tratar em desenvolvimento binomial sem ter conhecimento prévio de análise combinatória, já que os coeficientes binomiais – coeficientes dos termos do desenvolvimento binomial – são alcançados pela fórmula que dá o número de combinações de n objetos tomados p de cada vez. Tais coeficientes binomiais foram denominados pelo matemático alemão Michael Stifel (1486-1567), e, foram organizados numa tabela na forma de triângulo, conhecido como Triângulo Aritmético, Triângulo de Yang-Hui, ou Triângulo de Pascal/Tartaglia (BOYER ; MERZBACH, 2012).

A figura 1 ilustra o Triângulo de Yang Hui, apresentado em 1303, na capa do Espelho Precioso, de Zhu Shijie.

Figura 1 – Triângulo de Yang Hui, apresentado em 1303



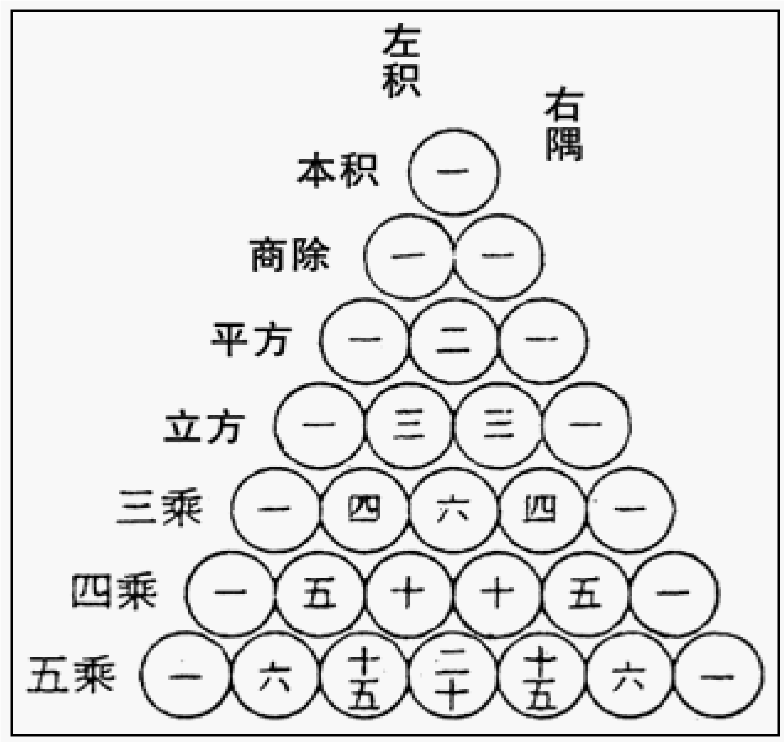
Fonte: Bower e Merzbach, (2012)

De acordo com Bower e Merzbach (2012), o Espelho Precioso inicia com um diagrama do triângulo aritmético, onde tem os coeficientes das expansões binomiais até a oitava potência, dadas em numerais em barra e um símbolo redondo para o zero.

Por volta do século XI (aproximadamente em 1050), o Manual de Matemática de Jia Xian, na China, já apresentava o Triângulo Aritmético. Depois disso, o matemático e astrônomo persa Omar Khayyam (1048 – 1122), também mencionou o triângulo aritmético em alguns de seus trabalhos, por volta de 1100.

A figura 2 mostra o Triângulo de Jia Xian, apresentado por volta do ano de 1050, na China.

Figura 2 – Triângulo de Jia Xian, apresentado por volta de 1050



Fonte: Bower e Merzbach, (2012)

Na Europa, um século antes de Pascal, alguns matemáticos também trabalharam com o triângulo aritmético. Bower e Merzbach (2012) apontam dentre muitos matemáticos, o alemão Petrus Apianus (1495 – 1552) que, em 1527, publicou o livro que ilustrava em sua capa o desenho do triângulo aritmético.

Tognato II (2013) comenta que o Binômio de Newton é uma das temáticas mais elegantes da história da Matemática. Sabe-se que esta ferramenta apresenta muita dificuldade na aprendizagem no ensino básico, contudo, sabe-se da sua relevância e utilidade notórias nos segmentos fundamentais da Matemática moderna. Segundo o autor, o Binômio de Newton era conhecido como Teorema Binomial e tratava de um desenvolvimento algébrico que iniciou antes da época de Newton, conforme mencionado acima, entretanto, somente Newton conseguiu tomar plena posse desta ferramenta e de toda sua potencialidade.

Tognato II (2013) e Silva (2016) também lembram que a Matemática ao longo da história nunca se constituiu de modo instantâneo, e sim sempre foi montada por partes, com inúmeras colaborações de grandes matemáticos. Dessa forma, ocorreu com as Equações Algébricas, Geometria Analítica, o Cálculo e outros. No caso de Binômio de Newton, foi objeto de estudo de diversos matemáticos, tais como: Chu Shi-Kié (1303) e Blaise Pascal (1623), os quais foram notáveis percussores e com esses estudos possibilitaram que Newton desenvolvesse seu Binômio.

De acordo com Boyer e Merzbach (2012), um dos primeiros matemáticos ocidentais a elaborar uma tabela reunindo o número de combinações possíveis num lançamento de um dado foi o matemático italiano Niccolo Tartaglia (1499-1559), então, o matemático Tartaglia requereu a criação do triângulo aritmético, o que se vê em alguns países, até nos dias atuais, que o triângulo aritmético é denominado como Triângulo de Tartaglia.

No entanto, o matemático francês Blaise Pascal (1623-1662) foi o primeiro a descobrir o denominado triângulo aritmético no ocidente, e em decorrência das aplicações que Pascal fazia das propriedades deste, o triângulo aritmético passou a ser conhecido como Triângulo de Pascal. Tal reconhecimento tornou-se mais notório em 1739, quando Abraham de Moivre (1667-1754) publicou um trabalho impactante naquela ocasião, nomeado de *triangulum arithmeticum pascalium* a respeito do triângulo aritmético (BOYER ; MERZBACH, 2012).

O teorema do desenvolvimento binomial também foi estudado pelo matemático alemão Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646-1716). De acordo com Eves (2008), Leibniz realizou a generalização do teorema do desenvolvimento binomial para o teorema multinomial, o que consiste em realizar a expansão de $(a_1 + a_2 + ... + a_n)^r$.

2.2 Desenvolvimento do Binômio de Newton

2.2.1 Números (coeficientes) binomiais

Definição:

Um número binomial, também denominado de coeficiente binomial, n sobre k, com $n \geq k$ e $n, k \in \mathbb{N}$, consiste no total de combinações de n elementos tomados k a k e é simbolizado por $\binom{n}{k}$, onde n é também conhecido como numerador e k, de denominador (CUNHA, 2017).

Dessa forma:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

Exemplo 1:

$$\binom{5}{2} = \frac{5!}{2!\,(5-2)!} = 10.$$

Iezzi*et e outros* (2002) define fatorial como sendo um número natural n, $n \geq 2$, o fatorial de n (é indicado por $n!$) corresponde o produto dos n primeiros números naturais positivos, escritos desde n até 1, ou seja:

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \ldots 3 \cdot 2 \cdot 1.$$

Exemplos:

$5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120.$

$8! = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 40320.$

São consideradas as seguintes convenções especiais:

$0! = 1$ e $1! = 1$.

Quando se tratar de análise combinatória, o número $C_{n.p}$ significa o total de combinações de p elementos que podem formar a partir de um conjunto de n elementos. De acordo com Silva (2013), cada subconjunto com p elementos é denominado de uma combinação simples de classe p dos n objetos $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$.

Silva (2013) considera os coeficientes binomiais como sendo dois números naturais n e p, sendo $n \geq p$. Denomina-se de coeficiente binomial n sobre p, e é indicado, conforme mencionado anteriormente, por $\binom{n}{p}$, o número dado por:

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!} = C_{n.p}$$

Exemplo 2:

$$\binom{6}{2} = C_{6.2} = \frac{6!}{2!(6-2)!} = \frac{6!}{2!\,.4!} = \frac{6\,.5\,.4!}{2!\,.4!} = 15.$$

2.2.2 Triângulo de Pascal

Os coeficientes binomiais podem ser distribuídos em tabela, denominada de triângulo aritmético ou Triângulo de Pascal. O físico e matemático francês Blaise Pascal (1623 – 1662) recebeu a homenagem de nomear o triângulo com seu nome por conta de sua descoberta da maioria de suas propriedades e relações (CUNHA, 2017).

Tognato II (2013) define o Triângulo de Pascal como um agrupamento de números escritos em formato triangular, em que a n-ésima linha representa os coeficientes binomiais da expansão binomial algébrica de $(x + a)^n$, onde n é um número natural qualquer.

Neste triângulo, os coeficientes binomiais de mesmo numerador fazem parte da mesma linha e os de mesmo denominador fazem parte da mesma coluna. Desse modo, a linha k representa todos os coeficientes desde $\binom{k}{0}$até $\binom{k}{k}$. A seguir, o Triângulo Aritmético de Pascal está representado pelos respectivos coeficientes binomiais (CUNHA, 2017):

Linha 0 $\binom{0}{0}$

Linha 1 $\binom{1}{0}\binom{1}{1}$

Linha 2 $\binom{2}{0}\binom{2}{1}\binom{2}{2}$

Linha 3 $\binom{3}{0}\binom{3}{1}\binom{3}{2}\binom{3}{3}$

Linha 4 $\binom{4}{0}\binom{4}{1}\binom{4}{2}\binom{4}{3}\binom{4}{4}$

...

Linha n $\binom{n}{0}\binom{n}{1}\binom{n}{2} \dots \binom{n}{n-1}\binom{n}{n}$

Há algumas propriedades pertinentes ao Triângulo Aritmético de Pascal que são relevantes para o seu desenvolvimento, porque possibilitam determinar os coeficientes binomiais sem que haja a necessidade de calcular todos eles. A seguir, são listadas algumas dessas propriedades (DANTE, 2010; SILVA, 2013; CUNHA, 2017):

- Toda linha começa e termina por 1

Demonstração:

Os coeficientes binomiais que começam cada linha são do tipo:

$$\binom{p}{0} = \frac{p!}{0!\,p!} = 1, \forall\ p \in \mathbb{N}$$

- Em uma mesma linha, os coeficientes binomiais equidistantes dos extremos são iguais.

Demonstração:

Sejam $\binom{n}{p}$ ... $\binom{n}{n-p}$ dois números binomiais equidistantes dos extremos, dispostos na linha *n* do Triângulo de Pascal. Observa-se que $\binom{n}{p}$ é precedido de *p* termos:$\binom{n}{0}\binom{n}{1}$ ... $\binom{n}{p-1}$ e que $\binom{n}{n-p}$ é sucedido de p termos: $\binom{n}{n-p+1}\binom{n}{n-p+2}$ ...$\binom{n}{n}$.

Dessa forma:

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}$$

$$= \frac{n!}{[n-(n-p)]!\,(n-p)!}$$

$$= \binom{n}{n-\ p}$$

- A partir da linha 2 do triângulo aritmético, cada número binomial *p*, com exceção o primeiro, é concebido pela soma dos dois binomiais consecutivos da linha anterior, cujo último acha-se acima de *p*. (relação de Stifel).
  Esta propriedade é denominada como relação de Stifel. Resumindo essa relação, fica da seguinte forma:

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$$

Demonstração:

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!} + \frac{(n-1)!}{k!\,(n-k-1)!}$$

$$= \frac{k\,(n-1)! + (n-k)(n-1)!}{k!\,(n-k)!}$$

$$= \frac{[k + \ (n-k)](n-1)!}{k!\,(n-k)!}$$

$$= \frac{n\,(n-1)!}{k!\,(n-k)!}$$

$$= \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

$$= \binom{n}{k}$$

- Soma dos binômios em uma mesma linha. Retomando os binomiais no triângulo aritmético, tem-se:

Demonstração:

Linha 0 $\binom{0}{0} = 1 = 2^0$

Linha 1 $\binom{1}{0} + \binom{1}{1} = 2 = 2^1$

Linha 2 $\binom{2}{0} + \binom{2}{1} + \binom{2}{2} = 4 = 2^2$

Linha 3 $\binom{3}{0} + \binom{3}{1} + \binom{3}{2} + \binom{3}{3} = 8 = 2^3$

...+...+...+ ... + ...

Linha n $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n-1}{n} + \binom{n}{n} = 2^n$

Desse modo, em uma mesma linha *n*, o somatório dos números binomiais resulta em 2^n, $n \in \mathbb{N}$.

Considerando as propriedades apresentadas, o Triângulo de Pascal fica da seguinte maneira:

1

11

12 1

13 3 1

14 6 4 1

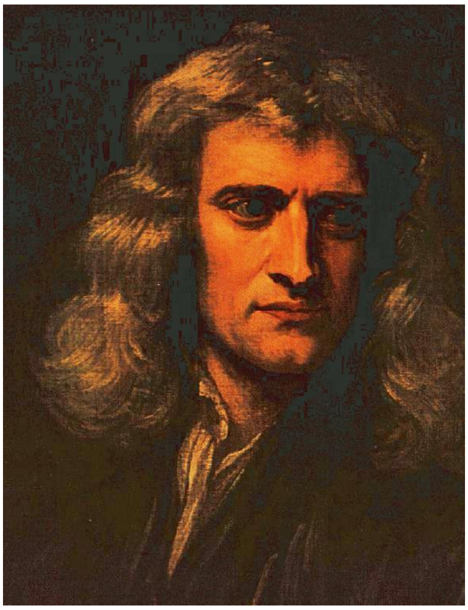
15 10 10 5 1

... Assim, por diante.

2.2.3 Resumo da vida e obra de Isaac Newton

Isaac Newton nasceu em Woolsthorpe-by-Colsterworth, Lincolnshire, Inglaterra, no dia 25 de dezembro de 1642 – de acordo com o calendário da época, juliano; ou em 4 de janeiro de 1643 – segundo o calendário utilizado hoje em dia, gregoriano. Seu pai faleceu semanas antes do seu nascimento. Então, sua mãe o criou sozinha até os 3 anos de idade, quando casou novamente e Isaac passou a morar com os avós (www.biografiaisaacnewton, 2019); (www.siteastronomia.com, 2019).

Figura 3 – Isaac Newton



Fonte: http://astro.if.ufrgs.br/bib/newton.htm

Isaac frequentou a faculdade Trinity College, na Universidade de Cambridge, custeada por seu tio, e graduou-se em 1665 (www.canalciencia.ibict.br, 2019). Antes de ser formar, uma terrível peste bubônica (também chamada peste negra) atingiu a Inglaterra e a universidade ficou fechada por aproximadamente 2 anos. Foi nessa época que ele mais trabalhou e fez descobertas (www.biografiaisaacnewton, 2019).

Muito embora não tenha sido um aluno brilhante, desde criança Isaac gostava de inventar e construir objetos. Ele era conhecido por seu comportamento introspectivo e dedicou-se aos estudos nas mais distintas áreas como: física, matemática, filosofia, astronomia, alquimia, teologia e astrologia. No período em que a Universidade Cambridge ficou fechada por conta da peste negra, ele realizou muitas descobertas que ampliaram os horizontes da ciência, tais como: Teorema Binomial, o Cálculo e a natureza das cores (www.canalciencia.ibict.br, 2019).

A história relata que um fenômeno banal – uma maçã caindo de uma árvore – o levou a pensar que haveria uma força puxando a fruta para o chão e, que essa mesma força, poderia também estar puxando a lua, impedindo-a de escapar da órbita da Terra. Anos mais tarde, estudou as obras de Euclides, Descartes, Johannes Kepler e Galileu Galilei, entre outros, e realizou suas próprias experiências e cálculos, então, Isaac formulou a Lei da Gravidade Universal, em que demonstrou que a velocidade com que um objeto cai, seja a maçã ou a lua, quando é atraído pela Terra, é proporcional à força gravitacional. Essa velocidade diminui com o aumento da distância ente o objeto e a Terra (www.canalciencia.ibict.br, 2019); (www.siteastronomia.com, 2019).

Isaac Newton desenvolveu o cálculo infinitesimal, descobriu também a aceleração circular uniforme. Em 1668, construiu o primeiro telescópio refletor. Até aquela data, todos os telescópios eram refratores (parte ótica formada unicamente por lentes). O gênio (Newton é considerado o pai da física clássica, pois descobriu as leis da física que regem o Universo) criou o seu próprio telescópio em que a objetiva é um espelho e não uma lente, solucionando, dessa forma, o problema da aberração cromática, que é característica dos telescópios refratores (lunetas). Esse tipo de telescópio ficou conhecido como telescópio newtoniano (www.siteastronomia.com, 2019). A figura 3 ilustra a réplica do telescópio refletor de Isaac Newton.

Figura 4 – Réplica do telescópio refletor de Isaac Newton

Fonte: www.siteastronomia.com, 2019

Ele foi quem primeiro observou o espectro visível que se pode conseguir pela decomposição da luz solar ao incidir sobre uma das faces de um prisma triangular transparente. Então, pela teoria corpuscular de propagação da luz, enunciando-a em 1675, e, assim, contrariou a teoria ondulatória de Huygens (www.canalciencia.ibict.br, 2019).

Suas realizações foram muitas e suas obras contribuíram muito para a matemática e a física. As investigações experimentais do gênio inglês apresentavam grande teor matemático e, por isso, tornaram-se modelo de investigação para as ciências dos séculos posteriores. É um dos nomes mais importantes da História da ciência (www.siteastronomia.com, 2019).

Seu livro "*Philosophia e Naturalis Principia Mathematica*" (Princípios Matemáticos de Filosofia Natural) foi escrito em 1687, em três volumes. Essa obra contém a fundamentação da mecânica clássica, a famosa lei da gravitação universal, as três leis de Newton, e outros. A lei de gravitação universal é, atualmente, usada para lançar satélites e sondas para o espaço. As três leis de Newton referem-se ao movimento dos corpos e a relação entre o movimento e as forças aplicadas aos corpos. Sua obra é tida, até os dias de hoje, como uma das obras científicas mais importantes do mundo (www.canalciencia.ibict.br, 2019); (www.siteastronomia.com, 2019).

A contribuição do gênio inglês, conforme já mencionado, foi verdadeiramente notável. Deixou um extenso legado nas áreas da astronomia, física, matemática e da ótica. Deu continuidade aos trabalhos de outros cientistas, como, por exemplo, Galileu Galilei.

Reconhecendo isso, ele disse: “Se vi mais longe foi por estar de pé sobre ombros de gigantes” (www.siteastronomia.com, 2019).

Isaac Newton fez parte do parlamento britânico, ocupou cargos na Casa da Moeda britânica (www.siteastronomia.com, 2019). O cientista inglês foi presidente da Royal Society e sagrado cavaleiro, passando a ser chamado de Sir Isaac Newton (www.canalciencia.ibict.br, 2019).

Faleceu em 20 de março de 1726, com 84 anos de idade, decorrente de complicações pela idade considerada muito elevada para aquela época (www.canalciencia.ibict.br, 2019). Pelo calendário juliano, foi em 20 de março de 1727 (www.siteastronomia.com, 2019).

Algumas frases de Isaac Newton: “O que sabemos é uma gota, o que ignoramos é um oceano”; “Eu consigo calcular o movimento dos corpos celestiais, mas não a loucura das pessoas”; “Nenhuma grande descoberta foi feita jamais sem um palpite ousado” (www.canalciencia.ibict.br, 2019).

2.2.4 Binômio de Newton

O ensino do Binômio de Newton na Educação Básica engloba especificamente o desenvolvimento de binômios da maneira $(x + y)^n$. Entretanto, o aluno deve construir caminhos que levem ao desenvolvimento de potências binomiais para valores elevados de n, bem como na descoberta de termos do desenvolvimento sem sua expansão por completa (CUNHA, 2013).

O desenvolvimento de potências com expoente natural de um binômio é denominado de Binômio de Newton ou Teorema Binomial (CUNHA, 2017). Verifica-se que o desenvolvimento do Binômio de Newton é simples em casos como $(x + y)^0 = 1$ *ou* $(x + y)^1 = x + y$, ou ainda, no produto notável explorado com alunos do Ensino Fundamental, $(x + y)^2 = x^2 + 2.x.y + y^2$, quando também se apresenta que o quadrado da soma é igual ao quadrado do primeiro termo, mais o duplo produto do primeiro pelo segundo termo, mais o quadrado do segundo termo. No entanto, para binômios do tipo $(x + y)^n$, com $n \geq 3$ os procedimentos começam a apresentar maiores dificuldades e podem ter uma série de multiplicações demoradas e exaustivas, que não ajudam a aumentar o conhecimento de quem os desenvolve (CUNHA, 2013).

Nesse contexto, deve-se preparar um procedimento para alunos do Ensino Médio que justifique e comprove como se dá o desenvolvimento do binômio com o auxílio do Triângulo de Pascal e algum conhecimento de análise combinatória. Portanto, não é suficiente generalizar a expansão $(x + y)^n = C_n^0 . x^n . y^0 + C_n^1 . x^{n-1} . y^1 + ... + C_n^n . x^0 . y^n$, após a realização de algumas multiplicações. É necessário que este conhecimento seja fundamentado para despertar interesse na aprendizagem (CUNHA, 2013).

Ao considerar que uma potência com expoente natural é uma multiplicação com fatores iguais, pode-se alcançar potências do binômio efetuando diversas multiplicações que resultaria num trabalho muito grande e cansativo quanto maior for a potência n(CUNHA, 2013).

Dessa forma, a potência $(x + y)^3$ pode ser obtida com a multiplicação sucessiva dos binômios $(x + y).(x + y).(x + y)$, resultando a sequência $(x . x + x . y + y . x + y . y) . (x + y)$, que segueem $(x . x . x + x . x . y + x . y . x + x . y . y + y . x . x + y . x . y + y . y . x + y . y. x + y . y . y)$. Ao reduzir os termos semelhantes, tem-se: $x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$.

Entretanto, o difícil é realizar o desenvolvimento de binômios com potências maiores, ou mesmo calcular determinado termo de um binômio de forma prática e rápida, sem que haja necessidade de fazer o cálculo de todas as multiplicações, para isso emprega-se o conhecimento de técnicas desenvolvidas por Newton.

Assim, desenvolvem-se expressões do tipo $(x + a)^n$, com n no conjunto dos números naturais. Então, fazendo n variar, alcança-se:

Para $n = 0$, tem-se que: $(x + a)^0 = 1$.

Para $n = 1$, tem-se que: $(x + a)^1 = 1x + 1a$.

Para n = 2, tem-se que: $(x + a)^2 = 1x^2 + 2xa + 1a^2$.

Para n = 3, tem-se que: $(x + a)^3 = 1x^3 + 3x^2a + 3xa^2 + 1a^3$.

Para n = 4, tem-se que: $(x + a)^4 = 1x^4 + 4x^3a + 6x^2a^2 + 4xa^3 + 1a^4$.

Observa-se que neste desenvolvimento os coeficientes dos respectivos termos são os números binomiais, cujas linhas representam o expoente do binômio correspondente, isto é, essas linhas são exatamente as do Triângulo de Pascal. Dessa forma, pode ser reescrito o desenvolvimento do seguinte modo:

Para $n = 0$, tem-se que: $(x + a)^0 = \binom{0}{0} x^0 a^0$.

Para $n = 1$, tem-se que: $(x + a)^1 = \binom{1}{0} x^1 a^0 + \binom{1}{1} x^0 a^1$.

Para $n = 2$, tem-se que: $(x + a)^2 = \binom{2}{0} x^2 a^0 + \binom{2}{1} x^1 a^1 + \binom{2}{2} x^0 a^2$.

Para $n = 3$, tem-se que: $(x + a)^3 = \binom{3}{0} x^3 a^0 + \binom{3}{1} x^2 a^1 + \binom{3}{2} x^1 a^2 + \binom{3}{3} x^0 a^3$.

Para $n = 4$, tem-se que: $(x + a)^4 = \binom{4}{0} x^4 a^0 + \binom{4}{1} x^3 a^1 + \binom{4}{2} x^2 a^2 + \binom{4}{3} x^1 a^3 + \binom{4}{4} x^0 a^4$.

Cunha (2017) ressalta que se deve levar em conta algumas observações:

- O desenvolvimento de $(x + a)^n$ apresenta $(n + 1)$ termos.
- Os expoentes de x decrescem de n até 0 e os expoentes de a crescem de 0 até n.
- Cada expoente de x é igual à diferença entre o numerador e o denominador do coeficiente (número binomial) correspondente e cada expoente de a é igual ao respectivo denominador do número binomial correspondente.
- A soma dos expoentes das variáveis, em cada termo, é sempre n.

Desse modo, pode escrever a forma do Teorema Binomial da seguinte maneira:

$$(x + a)^n = \binom{n}{0} x^n a^0 + \binom{n}{1} x^{n-1} a^1 + \ldots + \binom{n}{n-1} x^1 a^{n-1} + \binom{n}{n} x^0 a^n.$$

Contudo, pode-se abreviar, reescrevendo o Teorema Binomial da forma abaixo:

$$(x + a)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^{n-i} a^i.$$

Demonstração:

Utilizando a indução em n, e fazendo $n = 0$, vem: $(x + a)^0 = \binom{0}{0} x^0 y^0 = 1$, isto é, a igualdade é satisfeita para $n = 0$.

Para n = 1, tem-se: $(x + a)^1 = \binom{1}{0} x^1 a^0 + \binom{1}{1} x^0 a^1 = x + a$.

Dessa forma, a igualdade é válida para $n = 1$.

Seja n um inteiro maior ou igual a 1, deve-se atentar que a relação vale também para $n + 1$.

Pela hipótese de indução, tem-se:

$$(x + a)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^{n-i} a^i.$$

Para $n + 1$, tem-se:

$$(x + a)^{n+1} = (x + a).(x + a)^n$$

Daí temos:

$$(x + a)^{n+1} = (x + a) \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^{n-i} a^i.$$

Empregando distributiva do produto quanto à soma, tem-se:

$$(x + a)^{n+1} = x^{n+1} + x \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} x^{n-i} a^i + a \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i} x^{n-i} a^i + a^{n+1}.$$

Reescrevendo, tem-se:

$$(x + a)^{n+1} = x^{n+1} + x \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} x^{n-i} a^i + a \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i-1} x^{n-i+1} a^{i-1} + a^{n+1}.$$

Que equivale a:

$$(x + a)^{n+1} = x^{n+1} + \sum_{i=1}^{n} \left[\binom{n}{i} + \binom{n}{i-1}\right] x^{n-i+1} a^{i} + a^{n+1}.$$

Pela relação de Stifel, é considerado:

$$(x + a)^{n+1} = x^{n+1} + \sum_{i=1}^{n} \binom{n+1}{i} . x^{n-i+1} a^{i} + a^{n+1}.$$

Organizando e reescrevendo o somatório, tem-se:

$$(x + a)^{n+1} = \sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} . x^{n+1-i} a^{i}$$

Assim, a relação também é válida para $n + 1$.

Logo a relação $(x + a)^{n} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^{n-i} a^{i}$. é válida para todo n natural.

Com base em toda essa exposição, foi selecionado o seguinte exercício para resolução de questões envolvendo Binômio de Newton.

Exemplo 3:

No binômio $\left(2^{x} + \frac{1}{4^{x}}\right)^{n}$ a soma dos coeficientes binomiais do segundo e do terceiro termos é igual a 36 e o terceiro termo é sete vezes maior que o segundo. Nestas circunstâncias qual é o valor de x? (BACHX, 1975).

A resolução do exercício demanda conhecimento do termo geral do binômio, bem como a resolução de equações exponenciais.

O segundo e terceiro termos serão dados por $T_{p+1} = \binom{n}{p} . x^{n-p} . y^{p}$,em que $p = 1$ e $p = 2$, respectivamente. Para facilitar a resolução, considera-se $2^{x} = y$, transformando o binômio em $\left(y + \frac{1}{y^{2}}\right)^{n}$. Então:

$T_2 = \binom{n}{p} \cdot x^{n-p} \cdot y^p = \binom{n}{1} \cdot y^{n-1} \cdot y^{-2} = n \cdot y^{-3}$

e

$T_3 = \binom{n}{p} \cdot x^{n-p} \cdot y^p = \binom{n}{2} \cdot y^{n-2} \cdot y^{-4} = \, = \frac{n\,¡}{(n-2)!\,2!} \cdot y^{-6} = \frac{n(n-1)}{2} \cdot y^{-6}$

Como a soma dos coeficientes é igual a 36, tem-se $n + \frac{n\,(n-1)}{2} = 36$ implica $n = -9$ ou $n = 8$. Como a resposta deve ser natural, conclui-se que $n = 8$. Tem ainda que:

$\frac{n\,(n-1)}{2} \cdot y^{-6} = 7 \cdot n \cdot y^{-3}$,

Isto é: $\frac{8.7}{2} \cdot y^{-6} = 7 \cdot 8 \cdot y^{-3}$.

Assim: $y^{-6} = 2 \cdot y^{-3}$

Ao simplificar, tem-se $y^{-3} = 2$.

Ao retornar à variável original, obtêm $2^{-3x} = 2$.

Por fim, pela injetividade da função exponencial, conclui-se que $x = -\frac{1}{3}$.

Exemplo 4:

Calcule sem desenvolver a soma dos coeficientes dos termos do desenvolvimento de $(2x - 3xy)^{100}$ (CUNHA, 2013).

A solução do exercício desperta interesse ao aluno, porque desafia por conta da potência ser um número elevado, inviabilizando qualquer pensamento de expansão.

É necessário entender que há uma igualdade entre $(2x - 3xy)^{100}$ e a expressão $\sum_{p=0}^{100} C_{100}^{\,p} \cdot (2x)^{100-p} \cdot (-3xy)^p$ fato que possibilita obter a soma dos coeficientes solicitada.

Sabe-se que o desenvolvimento dos termos binomiais é dado por:

$(2x - 3xy)^{100} = \sum_{p=0}^{100} C_{100}^{p} . (2x)^{100-p} . (-3xy)^{p}$

Pode ser reescrita da seguinte forma:

$(2x - 3xy)^{100} = \sum_{p=0}^{100} (-1)^{p} . C_{100}^{p} . 2^{100-p} . 3^{p} . x^{100} . y^{p}$

O valor numérico do coeficiente de cada termo é dado pela expressão:

$(-1)^{p} . C_{100}^{p} . 2^{100-p} . 3^{p}$

Como procura-se a soma dos coeficientes, e a igualdade vale para quaisquer valores de *x* e *y*, deve-se excluir a parte algébrica e, assim, atribuir os valores de $x = 1$ e $y = 1$, que resulta na expressão:

$\sum_{p=0}^{100} (-1)^{p} . C_{100}^{p} . 2^{100-p} . 3^{p} = (2 - 3)^{100} = (-1)^{100} = 1.$

CAPÍTULO III – ANÁLISE COMBINATÓRIA NO ENSINO MÉDIO

3.1 Aspectos Conceituais e Aplicações da Análise Combinatória

A análise combinatória estuda os conjuntos discretos e as configurações que podem ser obtidas por meio dos seus elementos, de determinadas transformações que provocam mudanças na estrutura ou na composição dos mesmos. De modo geral, pode-se dizer que é a parte da Matemática que verifica estruturas e relações entre conjuntos discretos. As configurações obtidas pela reorganização dos elementos de um conjunto discreto distinguem-se entre dois tipos de agrupamentos: um que leva em conta a ordem e a natureza dos elementos dentro do agrupamento e o outro em que a ordem dos elementos é irrelevante (RIBNIKOV apud HOMA; GROENWALD, 2013).

A análise combinatória é uma das áreas essenciais da Matemática discreta e da probabilidade. Nos dias de hoje, existe um vasto campo de aplicação, com investigação ativa e numerosas aplicações teóricas e práticas em Geologia, Química, Gestão Empresarial, Informática e Engenharia (ALMEIDA; FERREIRA, 2010). Machado (1986) lembra que a análise combinatória é aplicada na teoria das probabilidades, no desenvolvimento do Binômio de Newton, em processos estocásticos discretos, na Teoria da Comunicação, em lógica e Teoria de Autômatos, nas Ciências da Computação e Matemática recreativa.

Em termos históricos, o principal estímulo aos estudos e ao desenvolvimento da análise combinatória, de acordo com Boyer e Merzbach (2012), foi a necessidade de calcular o número de possibilidades existentes nos conhecidos jogos de azar. Esses estudos tiveram início no século XVI, pelo matemático italiano Niccollo Fontana (1499-1557), conhecido como Tartaglia, depois surgiram os franceses Pierre de Fermat (1601-1661) e Blaise Pascal (1623-1662).

Homa e Groenwald (2013) destacam que a análise combinatória é um componente primordial da Matemática discreta e, como tal, exerce relevante papel na Matemática da escola. Os autores enfatizam que além da sua relevância no desenvolvimento da idéia de probabilidade, a capacidade combinatória é um componente essencial do pensamento formal.

Dentre os motivos relacionados por Kapur apud Homa e Groenwald (2013) para o ensino da análise combinatória ressaltam-se as oportunidades propiciadas pelos problemas combinatórios, tais como:

- Os conceitos de contagem, a modelagem matemática, a possibilidade de conjecturar, contando sem contar através de generalizações, as otimizações.

- As aplicações nas esferas das Ciências.

- O desenvolvimento de conceitos de relações, funções, classes de equivalência, isomorfismo.

- Auxilia no desenvolvimento de pensamento combinatório que verifica todas as possibilidades, elenca e encontra a melhor solução e, pelo planejamento adequado, trabalha com problemas que não dependem de cálculos complexos, possibilitando que sejam apresentados nos vários níveis escolares.

A principal vantagem desse conteúdo, segundo Munsignatti Junior (2010), é o raciocínio, pois conhecer as fórmulas de arranjo e combinação, entre outras, não é o bastante. Os alunos do Ensino Médio apresentam grandes dificuldades sobre esse assunto. Na mesma corrente, Homa e Groenwald (2013) apontam como vantagem desse conteúdo o estimulo da capacidade de abstração do aluno para solucionar problemas, sendo possível criar atividades contextualizadas socio-culturalmente, fazendo uma aproximação da realidade, possibilitando, assim, vivenciar situações próximas, que lhes permitam reconhecer a diversidade ao seu redor e reconhecer-se como pessoa capaz de ler e atuar nessa realidade.

Para Morgado e outros (1996), a solução de uma questão combinatória demanda, em geral, engenhosidade e o entendimento pleno da situação descrita pelo problema. Tal competência está inserida nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN+) – Ensino Médio (Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias) (BRASIL, 2002).

3.2 A Matemática no Ensino Médio com Foco na Análise Combinatória

No Ensino Médio, PCN+ destacam que a Matemática deve ser entendida como uma parcela do conhecimento humano fundamental na formação dos jovens, que “contribui para a construção de uma visão de mundo, para ler e interpretar a realidade e para desenvolver capacidades que deles serão exigidas ao longo da vida social e profissional” (BRASIL, 2002, p. 111).

Nessa fase da escolaridade a Matemática vai além de seu cunho instrumental, “colocando-se como ciência com características próprias de investigação e de linguagem e com papel integrador importante junto às demais Ciências da Natureza”. A Matemática como ciência, “sua dimensão histórica e sua estreita relação com a sociedade e a cultura em diferentes épocas ampliam e aprofundam o espaço de conhecimentos não só nesta disciplina, mas nas suas inter-relações com outras áreas do saber” (BRASIL, 2002, p. 111).

Os desafios e as situações que o aluno do Ensino Médio terá de encarar na escola, no mercado de trabalho e no exercício da cidadania fazem parte de um processo complexo, em que as informações representam apenas parte de um todo articulado, pautado pela mobilização de conhecimentos e habilidades (BRASIL, 2002).

Ensinar a Matemática de um modo contextualizado, integrado e relacionado a outros conhecimentos insere-se no desenvolvimento de competências e habilidades que são fundamentalmente formadoras, quando à medida que instrumentalizam e estruturam “o pensamento do aluno, capacitando-o para compreender e interpretar situações, para se apropriar de linguagens específicas, argumentar, analisar e avaliar, tirar conclusões próprias, tomar decisões, generalizar e para muitas outras ações necessárias à sua formação” (BRASIL, 2002, p. 111).

De acordo com os PCN+, as habilidades de descrever e analisar um grande número de dados, fazer inferências e realizar previsões baseadas em amostra de população, aplicar as idéias de probabilidade e combinatória a fenômenos naturais e do dia a dia são aplicações da Matemática em assuntos da vida real, que apresentaram um crescimento e tornaram-se muito complexas (BRASIL, 2002).

Técnicas e raciocínios estatísticos e probabilísticos são instrumentos tanto das Ciências da Natureza quanto das Ciências Humanas. Isso demonstra como é relevante uma criteriosa abordagem dos conteúdos de contagem, estatística e probabilidade no Ensino Médio, alargando a interface entre o aprendizado da Matemática e das outras Ciências e áreas. As definições matemáticas relacionadas a conjuntos finitos de dados têm também papel de destaque para as Ciências Humanas e para o cidadão, que se vê envolto numa grande quantidade de informações de natureza estatística e probabilística (HOMA; GROENWALD, 2013).

A Matemática do Ensino Médio pode ser essencial para a leitura das informações que circulam na mídia e em outras áreas do conhecimento no modo de gráficos, tabelas e dados de cunho estatístico. No entanto, é esperado do estudante nessa etapa da escolaridade que ele seja capaz de ultrapassar a leitura de informações e refletir mais de forma crítica a respeito de seus significados. Dessa forma, a temática proposta deve ir além da simples descrição e representação de dados, alcançando a investigação sobre esses dados e a tomada de decisões (MEC, 2002).

A contagem ou análise combinatória permite uma tratativa mais completa da probabilidade, conforme comentado anteriormente possibilita também o desenvolvimento de uma nova maneira de pensar Matemática, denominada de raciocínio combinatório, isto é, decidir sobre o modo mais apropriado de organizar números ou informações para poder contar os casos possíveis e não deve ser aprendido como um apanhado de fórmulas, mas como um processo que requer o desenvolvimento de um modelo simplificado e explicativo da situação (BRASIL, 2002).

As fórmulas, portanto, devem ser vistas como consequência do pensamento combinatório construído face à solução de problemas vários e devem ter a função de simplificar cálculos quando a quantidade de dados é imensa. Tais conteúdos devem ter maior espaço e empenho de trabalho no Ensino Médio, conservando próximo a perspectiva da solução de problemas aplicados para evitar a teorização em demasia e estéril. Espera-se, dessa forma, que o aluno possa se nortear diante das informações de caráter estatístico ou probabilístico.

Nesse viés, as calculadoras e o computador têm importância como instrumentos que possibilitam a tratativa de problemas com dados reais, ao mesmo tempo, que o estudante tem a oportunidade de se familiarizar com os hardwares e softwares.

O conteúdo e a habilidade propostos para ser trabalhado nesse tema de contagem, que trata de princípio multiplicativo e problemas de contagem são (BRASIL, 2002):

- Decidir sobre a maneira mais apropriada de organizar os números e as informações visando simplificar cálculos em situações do mundo real englobando grande quantidade de dados ou de eventos.

- Identificar regularidades para estipular regras e propriedades em situações nos quais são necessários para os processos de contagem.

- Identificar dados e relações envolvidas numa situação-problema que tenha o raciocínio combinatório, empregando os processos de contagem.

3.3 Requisitos para Resolução de Problemas Combinatórios

O estudo de análise combinatória demanda conhecimento de diversos conceitos de álgebra abstrata, dentre eles (HOMA; GROENWALD, 2013):

- Conjunto, subconjunto e operações entre subconjuntos de um determinado conjunto; conjunto de partes e partição de um conjunto.

- Produto cartesiano de conjuntos.

- Relação binária; propriedades de equivalência; relação de ordem; grafos atrelados às relações binárias.

- Correspondências e aplicações: injetiva, sobrejetiva e bijetiva.

- Cardinalidade de um conjunto; equipotência.

Para as atividades voltadas para o Ensino Médio não é preciso o uso explícito desses conceitos, podendo ser apresentadas apenas as operações de subconjuntos que desenvolvem as regras da soma, do produto e do quociente que fundamentam o princípio aditivo, o princípio multiplicativo e a combinação como a razão entre o número de arranjos e as permutações.

Na introdução à análise combinatória, de acordo com Homa e Groenwald (2013), devem ser trabalhados vários tipos de problemas combinatórios, considerando certas condições, de maneira que o número de possibilidades não seja elevado, permitindo a solução por meio da enumeração sistemática de todos os agrupamentos possíveis. Após o desenvolvimento da capacidade de solução desses problemas, explora-se a capacidade de entendimento dos algoritmos para geração sistemática de todas as soluções e, dessa forma, deduzir as respectivas fórmulas de contagem.

Os autores acima referendados salientam que o uso da recursividade e indução possibilita ao estudante contar sem contar, determinando o número de possibilidades ou eventos de uma situação que se apresente, sendo especialmente útil na resolução de problemas com um alto número de agrupamentos. A recursividade, como um método geral de solução de problemas, implica a identificação de um processo ou procedimento que invoca ele mesmo, sendo necessário, portanto, a diminuição do problema apresentado em um problema menor que se repita nele mesmo.

O método de indução para generalizar um processo recursivo assegura a sua validade em um cenário de infinitos objetos ou eventos. A operação fatorial definida no primeiro capítulo e mais uma vez apresentada no item 2.4 (fatorial) pode ser desenvolvida na construção do conceito de permutação simples, onde $P(n) = F(n)$, sendo um exercício do pensamento lógico formal no uso da recursão e indução.

Para desenvolver o raciocínio combinatório recursivo por meio da resolução de problemas, como permutações e arranjos apresentados no Ensino Médio, com um número fixo e finito de elementos, Homa e Groenwald (2013) identificam os processos relacionados a seguir:

- Formação efetiva ou enumeração completa dos agrupamentos para um número pequeno de objetos.

- Descrição do processo de construção de todos os agrupamentos.

- Demonstração lógica do processo usado, para assegurar que não falte nenhum agrupamento.

A dificuldade no desenvolvimento de um modelo sistemático de enumeração está associada ao completo entendimento do problema, pois mesmo conhecendo os tipos de agrupamentos básicos e suas fórmulas, a falta de entendimento do problema conduz ao uso incorreto dos modelos matemáticos básicos (fórmulas matemáticas).

Para Homa e Groenwald (2013), as principais dificuldades atreladas ao entendimento dos problemas combinatórios, é o não reconhecimento do conjunto correto de eventos desejados no problema. O emprego de notação inadequada que corresponda toda a informação e as condições do problema também criam outras dificuldades, associações com a variável x para a quantidade de eventos, concebendo um viés algébrico na procura da solução, ou mesmo variáveis indexadas, tais como: $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, e $x_n = n$ para representar as quantidades de elementos, ao contrário do uso de n, conduzindo a uma complexidade maior, que impede a total compreensão do problema.

Em alguns casos, a compreensão acaba sendo entendida como um conjunto de enunciados particulares e não como um problema com parâmetro variável. Outra dificuldade é a capacidade de generalização, em que, muitas vezes, mesmo sendo capaz de solucionar para casos particulares de n, o estudante é incapaz de generalizar a solução (HOMA; GROENWALD, 2013).

3.4 Fatorial

Conforme visto no capítulo I, o fatorial de *n* (é indicado por *n!*) corresponde o produto dos n primeiros números naturais positivos, escritos desde *n* até *1*, ou seja:

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \ldots 3 \cdot 2 \cdot 1.$$

Exemplo 5:

$6! = 6 \cdot 5! = 6 \cdot 120 = 720$

3.5 Princípio Fundamental de Contagem

Uma sequência é composta por *k* elementos $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k)$, onde:

- a_1 pode ser escolhido de $n_1$maneiras diferentes.
- a_2 pode ser escolhido de n_2 maneiras diferentes, a partir de cada uma das escolhas anteriores.
- a_3 pode ser escolhido de n_3 maneiras diferentes, a partir de cada uma das escolhas anteriores.
- a_k pode ser escolhido de n_k maneiras diferentes, a partir de cada uma das escolhas anteriores.

Dessa forma, o número de possibilidades para se conseguir a sequência $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k)$ é fornecido por: $n_1 . n_2 . n_3 \ldots n_k$.

Esse resultado é denominado de Princípio Fundamental da Contagem (PFC) ou Princípio Multiplicativo ou Arranjos.

O conceito do PFC com e sem repetição de elementos pode ser explorado com o uso de números, letras e figuras geométricas. Os estudos relatados por Fischbein e Gazit apud Homa e Groenwald (2013) apontaram que 80% dos alunos, nas faixas etárias entre 10 e 15 anos, construíram a árvore de possibilidades sem nenhum tipo de auxílio.

Nessa perspectiva, a organização de uma sequência didática com o conteúdo da análise combinatória considera as várias categorias de problemas e as possíveis estratégias a serem empregadas, deve começar por situações introdutórias aos conceitos combinatórios, em que seja possível a enumeração sistemática de todas as configurações com um número de possibilidades não alto. A partir da capacitação em solucionar tais problemas é possível o entendimento dos algoritmos de geração sistemática de todas as possibilidades.

Exemplo 6:

Um homem possui 4 ternos, 8 camisas e 5 pares de sapatos. De quantas formas distintas o indivíduo pode vestir um terno, uma camisa e um par de sapatos? (CUNHA, 2017):

Resolução:

a_1 pode ser escolhido de 4 formas, a_2 de 8 formas, a_3 de 5 maneiras. Pelo PFC, o total de maneiras diferentes é fornecido por: $a_1 . a_2 . a_3$

Então, $4 . 8 . 5 = 160$.

Portanto, o homem pode vestir um terno, uma camisa e um par de sapatos de 160 formas diferentes.

3.6 Agrupamentos Simples

3.6.1 Permutações simples

Segundo os relatos dos estudos desenvolvidos por Fischbein e Gazit apud Homa e Groenwald (2013), uma vez que seja inserido o Princípio Fundamental da Contagem é recomendável a inserção do conceito de permutações simples, cuja solução consiste na mudança da ordem dos elementos, e a estratégia para a dedução da fórmula e sua conexão com a árvore de possibilidades.

Os mesmos autores identificaram que os estudantes apresentam maiores dificuldades para os conceitos de permutação e arranjo com repetição, seguido de arranjos e combinações simples. Em relação à natureza dos objetos a serem trabalhados, após os alunos estarem acostumados a operar mentalmente com números e letras, é possível fazer o emprego de objetos como bandeiras e comissões.

Definição:

Considerando um conjunto com *n* objetos diferentes, cada ordenação dos *n* objetos é denominada de uma permutação simples desses *n* objetos. O número total de permutações simples desses n objetos é fornecido por P_n, onde $P_n = n!$

A seguir, é realizada a demonstração pelo método da indução matemática.

Demonstração:

Para provar a fórmula $P_n = n!$ pelo método de indução matemática, deve-se verificar se é válida para $n = 1$, e então, se vale para um natural *k*, também será verificada para $k + 1$.

Para $n = 1$, o resultado é óbvio uma vez que considerando apenas um objeto, só existe uma possibilidade de posicioná-lo.

Dessa forma, $P_1 =1! = 1$. Então, vê-se que a fórmula vale para $n = 1$.

Considerando válida a proposição $P_k = k!$ com $k \geq 1$ *e* $k \in \mathbb{N}$ deve-se mostrar que a proposição vale para $k + 1$.

Estabelecendo um objeto na primeira posição entre os $k + 1$ disponíveis, tem-se que existem *k* objetos restantes que serão permutados entre si. Assim, ocorrem *k!* permutações com esse objeto fixo conforme a hipótese de indução. Dessa forma, verificando as demais posições, tem-se também que o total de permutações considerando um elemento fixo em cada uma das $k + 1$ posições é fornecido por *k!*.

Sendo assim, o total de permutações desses $k + 1$ objetos será igual a $(k + 1) . k!$. Conclui que $P_{k+1} = (k + 1)!$, confirmando a validade da fórmula para $k + 1$. Então, a fórmula $P_n = n!$ é válida $\forall n \in \mathbb{N}$ com $n \geq 1$.

Exemplo 7:

De quantas formas podem-se dispor cinco pessoas lado a lado em uma mesa de cinco lugares? (CUNHA, 2017)

Resolução:

Os agrupamentos formados são alcançados trocando-se a ordem dos cinco indivíduos. Desse modo: $P_n = n! \rightarrow P_5 = 5! = 5 .4 .3 .2 . 1 = 120.$

3.6.2 Arranjos simples

Considerado um conjunto com *n* elementos diferentes, denomina-se arranjo simples dos *n* elementos, tomados *p* a *p*, com $n \geq p$, cada agrupamento ordenado de *p* elementos diferentes escolhidos entre os *n* existentes.

A quantidade de arranjos simples desses *n* elementos é alcançada pela seguinte fórmula:

$$A_{n,\,p} = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Será empregada a fórmula equivalente $A_{n,\,p} = n\ .\ (n - 1)\ .\ (n - 2) \ldots (n - p + 1)$ e a demonstração será realizada mediante o método de indução matemática.

Demonstração:

Seja P_n : O número de arranjos simples de *n* elementos tomados *p* a *p* é igual a $n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot\cdot\cdot (n - p + 1)$, para n fixado.

Para $p = 1$, tem-se que $A_{n,1} = n = (n - 1 + 1)$, ou seja, a proposição é válida para $p = 1$.

Supõe válida a proposição $P_n = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot\cdot\cdot (n - p + 1)$ para $1 < p < n$, deve-se mostrar que a proposição é válida para $p + 1$, isto é, $A_{n,p+1} = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot\cdot\cdot (n - p)$.

Ao escolher os arranjos de *n* elementos tomados *p* a *p*, acrescentando ao final de cada um deles um dos $n - p$ elementos restantes, serão alcançados os arranjos de *n* elementos tomados $p + 1$ *a* $p + 1$.

Além disso, os arranjos de *n* elementos, tomados $p + 1$ a $p + 1$, desse modo são diferentes e qualquer arranjo de *n* elementos tomados $p + 1$ a $p + 1$ situa entre estes.

Portanto, conclui-se que o número de arranjos dos *n* elementos tomados $p + 1$ a $p + 1$ é $A_{n,p} \cdot (n - p) = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot\cdot\cdot (n - p + 1) \cdot (n - p)$, e a proposição vale para $p + 1$.

Assim, por indução matemática, $A_{n,p} = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \cdot \cdot (n - p + 1)$, que é análoga a $A_{n,p} = n!/ (n - p)!$.

As permutações são um caso particular de arranjo, para $p = n$, tem-se:

$$A_{n,n} = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = n! = P_n.$$

Exemplo 8:

Considerar os dígitos 1, 2, 3, 4 e 5. Quantos são os números naturais de três algarismos diferentes? (SILVA, 2015)

Resolução:

Para compor um número de três algarismos diferentes é preciso selecionar de forma ordenada 3 dígitos distintos entre os 5 dígitos possíveis, isto é, cada número representa a uma tripla ordenada (a, b, c), com a ≠ b ≠ c ≠ a, onde *a* corresponde o algarismo das centenas, *b* corresponde o algarismo das dezenas e *c* corresponde o algarismo das unidades. Então:

$$A_{5,3} = \frac{5!}{2!} = 5 \,.\, 4 \,.\, 3 = 60$$

Assim, os números naturais de três algarismos diferentes são 60.

Exemplo 9:

Considerar os dígitos 1, 2, 3, 4 e 5. Quantos são os números naturais de cinco algarismos diferentes? (SILVA, 2015)

Resolução:

Para compor um número de cinco algarismos diferentes é preciso selecionar de forma ordenada 5 dígitos distintos entre os 5 dígitos possíveis. Então:

$$A_{5,5} = \frac{5!}{0!} = 5! = 5 \,.\, 4 \,.\, 3 \,.\, 2 \,.\, 1 = 120$$

Assim, os números naturais de cinco algarismos distintos são 120.

Exemplo 10:

Quantos anagramas a palavra ALICE possui?

Resolução:

Note que cada anagrama da palavra ALICE representa a uma ordenação das letras A, L, I, C, E. Dessa forma, existem P_6 = 6! = 6 .5 .4 .3 .2 . 1 = 720.

Assim, os anagramas da palavra ALICE são 720.

Exemplo 11:

Quantos números de três algarismo diferentes podem ser formados com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5 e 6?

Resolução:

Tem-se: $p = 3$ e $n = 6$. Usando a fórmula do arranjo:

$$A_{6,3} = \frac{6!}{(6-3)!} = \frac{6!}{3!} = 6 \,.5 \,.\, 4 = 120$$

Dessa forma, existe um total de 120 números de três algarismos.

Exemplo 12:

Numa corrida de carros estão participando 20 pilotos. Quantos resultados são possíveis para o pódio (1°, 2° e 3° lugares)? (SILVA, 2015).

Resolução:

Para formar um pódio é preciso escolher 3 pilotos diferentes ordenadamente dentre os 20 pilotos participantes, isto é, cada pódio equivale a uma tripla ordenada (a, b, c), com a ≠ b ≠ c ≠ a, onde *a* representa o piloto que chegou em primeiro, *b* representa o piloto que chegou em segundo e *c* representa o piloto que chegou em terceiro. Então:

$$A_{20,3} = \frac{20!}{(20-3)!} = \frac{20!}{17!} = 20\ .19\ .\ 18 = 6.840$$

Dessa forma, existem 6.840 resultados possíveis para o pódio.

3.6.3 Combinações simples

Definição:

Considerando um conjunto com n elementos diferentes, é denominado de combinação simples dos n elementos, tomados *p* a *p*, com $n \geq p$, cada subconjunto constituído por *p* elementos diferentes escolhidos entre os *n* existentes. O total de combinações simples desses *n* elementos é dado pela seguinte fórmula (CUNHA, 2017):

$$C_{n,p} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}$$

Por conveniência, é considerada a relação análoga:

$$C_{n,p} = \frac{n\ .\ (n-1)\ .\ (n-2)\ \ldots\ (n-p+1)}{1\ .2\ .3\ \ldots\ p}$$

Demonstração:

Seja P_n a proposição: o número de combinações de *n* elementos tomados *p* a *p* é $C_{n,p} = \frac{n\ .(n-1)\ .\ (n-2)\ \ldots\ (n-p+1)}{1\ .2\ .3\ \ldots\ p}$.

- Para $p = 1$, tem-se que $C_{n,1} = m = \frac{m-1+1}{1}$, tornando válida a proposição.

- Ao considerar válida a proposição P_n para $p \geq 1$, deve-se mostrar que também vale para $p + 1$, com $1 < p < n$, isto é, para $p + 1$, $C_{n,p+1} = \frac{n\,.\,(n-1)\,.\,(n-2)\,...\,(n-p)}{1\,.2\,.3\,...\,p\,.\,(p+1)}$.

Ao selecionar as combinações de *n* elementos tomados *p* a *p* e acrescentando a cada uma delas, como o *p+1* - ésimo elemento, um dos *n* - *p* elementos restantes,tornam-se, dessa forma, todas as combinações dos *n* elementos tomados $p + 1$ a $p + 1$.

Desse modo, são contadas $C_{n,p}.(n - p)$ combinações.

Então, cada uma dessas combinações aparece $p + 1$ vezes.

Daí, para contar o número correto de combinações de *n* elementos tomados $p + 1$ a $p + 1$, é fazer o cálculo $C_{n,p}.(n - p)$, e excluir os conjuntos contados a mais, isto é, dividir $C_{n,p}.(n - p)$ por $p + 1$.

Portanto, o total de combinações é fornecido por:

$$C_{n,\,p+1} = \frac{C_{n,p}\,.\,(n-p)}{p+1}$$

$$= \frac{n\,.\,(n-1)\,.\,(n-2)\,...\,(n-p)}{1\,.2\,.3\,...\,p\,.\,(p+1)}.$$

Dessa forma, por indução matemática, a proposição também é válida para p + 1.

Então, $C_{n,p} = \frac{n\,.\,(n-1)\,.\,(n-2)\,...\,(n-p+1)}{1\,.2\,.3\,...\,p}$.

A conclusão que se chega é que a relação $C_{n,\,p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$ é válida.

Exemplo 13:

Quantas comissões formadas por 4 indivíduos, escolhidas entre 7 podem ser compostas? (CUNHA, 2017).

Resolução:

Trata-se de um caso de combinação por conta do fato da ordem de escolha dos elementos estipularem os mesmos subconjuntos.

Dessa forma, $p = 4$ e $n = 7$.

Aplica-se a fórmula da combinação:

$$C_{7,4} = \frac{7!}{4!\,(7-4)}$$
$$= \frac{7!}{4!\,3!}$$
$$= \frac{7\,.\,6\,.\,5\,.\,4!}{4!\,.\,3\,.\,2}$$
$$= 35.$$

Assim, existem 35 comissões que podem ser formadas.

Exemplo 14:

Considerar o alfabeto com 23 letras (com a exclusão das letras K, Y e W). De quantas maneiras pode compor uma senha de duas letras diferentes?

Resolução:

Observe que para compor uma senha de duas letras diferentes é preciso selecionar de modo ordenado 2 letras distintas entre as 23 letras possíveis do alfabeto, isto é, cada senha representa a um par ordenado (a, b), com $a \neq b$, onde a corresponde a primeira letra e b corresponde a segunda. Então:

$$A_{23,2} = \frac{23!}{21!} = 23\,.\,22 = 506$$

Assim, as maneiras de compor uma senha de duas letras diferentes são 506.

Exemplo 15:

Considerar o alfabeto com 23 letras (com a exclusão das letras K, Y e W). De quantas maneiras podem-se escolher duas letras diferentes? (SILVA, 2015).

Resolução:

No exercício anterior, verificou-se que existem 506 maneiras de compor uma senha de duas letras diferentes. No caso presente, para apenas escolher duas letras, basta considerar que para cada uma das escolhas possíveis existem duas senhas (a escolha de O e S deveria ser contada uma única vez, já que foram contadas duas vezes, por meio das senhas OS e SO). Então:

$$506/2 = 253$$

Desse modo, as maneiras de escolher duas letras diferentes são 253.

Exemplo 16:

Recapitulando o *exercício 3*, considerar os dígitos 1, 2, 3, 4 e 5. Quantos são os números naturais de três algarismos diferentes? (SILVA, 2015)

Resolução:

Para compor um número de três algarismos diferentes é preciso selecionar de forma ordenada 3 dígitos distintos entre os 5 dígitos possíveis, isto é, cada número representa a uma tripla ordenada (a, b, c), com $a \neq b \neq c \neq a$, onde a corresponde o algarismo das centenas, b corresponde o algarismo das dezenas e c corresponde o algarismo das unidades. Então:

$$A_{5,3} = \frac{5!}{2!} = 5 \,.\, 4 \,.\, 3 = 60$$

Assim, os números naturais de três algarismos diferentes são 60.

Exemplo 17:

Quantos são os subconjuntos de três elementos do conjunto {1, 2, 3, 4, 5}? (SILVA, 2015).

Resolução:

No exercício anterior, concluiu que existem 60 números naturais de três algarismos diferentes. Neste exercício é para compor um subconjunto de três elementos, então, é considerar que para cada um dos subconjuntos possíveis existem 3! = 6 números naturais de três algarismos diferentes (o subconjunto {1, 3, 5} deveria ser contado uma única vez, já que foi contado seis vezes, através dos números 135, 153, 315, 351, 513 e 531). Portanto, existem 60/6 = 10 subconjuntos de três elementos.

Exemplo 18:

A aposta simples na Mega-Sena é formada de seis números escolhidos de um total de sessenta dígitos (de 01 a 60), de quantas maneiras podem ser feitas uma aposta simples?

Resolução:

Para fazer uma aposta simples, deve escolher não ordenadamente 6 das 60 dezenas dígitos. Então:

$$A_{60,6} = \frac{60!}{6!\ .\ 54!} = \frac{60\,.\,59\,.\,58\,.\,57\,.\,56\,.\,55}{6\,.\,5\,.\,4\,.\,3\,.\,2\,.\,1} = 50.063.860$$

Assim, para fazer uma aposta simples existem 50.063.860 maneiras.

Exemplo 19:

Num hospital, cada equipe de plantão deve ter 2 médicos e 3 enfermeiras. Sabe-se que o hospital dispõe de 7 médicos e 10 enfermeiras, de quantas maneiras a equipe de plantão pode ser constituída? (SILVA, 2015)

Resolução:

Para compor a equipe de plantão, tem que escolher não ordenadamente 2 médicos, que equivale:

$$C_{7,2} = \frac{7!}{2!\,.\,5!} = \frac{7\,.\,6\,.\,5}{10} = 21$$

Logo: são 21 maneiras e, em seguida, tem que escolher não ordenadamente as 3 enfermeiras, que corresponde:

$$C_{10,3} = \frac{10!}{3!\,.\,7!} = \frac{10\,.\,9\,.\,8}{3.\,2} = 120$$

Daí: são 120 maneiras. Assim, pelo princípio multiplicativo, existem $C_{7,2}$. $C_{10,3}$ = 21 . 120 = 2.520 maneiras de compor a equipe de plantão.

Exemplo 20:

Considerar o alfabeto com 23 letras (exceto as letras K, Y e W), de quantas maneiras pode formar uma senha de cinco letras diferentes, sendo duas vogais e três consoantes?

Resolução:

Devem ser escolhidas as duas vogais distintas:

$$C_{5,2} = \frac{5!}{2!\,.\,3!} = \frac{5\,.\,4}{2} = 10$$

Logo: são 10 maneiras e, em seguida, devem ser escolhidas não ordenadamente as três consoantes distintas:

$$C_{18,3} = \frac{18!}{3!\,.\,15!} = \frac{18\,.\,17\,.\,16}{3.\,2} = 816$$

Daí: são 816 maneiras. Uma vez de posse das cinco letras diferentes, devem ser ordenadas para formar uma senha:

P_5 = 5!= 5 .4 .3 .2 . 1 = 120 maneiras.

Assim, pelo princípio multiplicativo, existem: $C_{5,2}$. $C_{18,3}$. P_5 = 10 .816 . 120 = 979.200 maneiras de compor uma senha de cinco letras diferentes, sendo duas vogais e três consoantes

3.6.4 Emprego do binômio na genética

Uma das áreas em que o Binômio de Newton é empregado é a genética. No caso de herança quantitativa (FERREIRA, 2015). Quando existe a herança quantitativa ou poligênica, onde participam dois ou mais pares de genes a interação que ocorre entre os genes (poligenes)[1], que transmitem as características herdadas, acontece de tal maneira que cada um deles é responsável por uma parcela do fenótipo[2] resultante. No caso do padrão de distribuição de herança segue o padrão do Binômio de Newton, sendo $(p + q)^n$, onde n é o número de poligenes. Dentre os exemplos de herança quantitativa, se tem peculiaridades como cor de pele, cor de olhos, altura, peso e cor do cabelo (SILVA, 2016).

[1]Poligenes é uma nomenclatura usada na Biologia (genética) que se refere a cada um dos genes independentes que se associam na produção de variação quantitativa, como a altura ou a pigmentação (www.infopedia,2019).

[2]Fenótipo refere-se ao aspecto de um organismo, considerando determinados caracteres dentro do campo da hereditariedade (www.infopedia, 2019).

Silva (2013) em sua dissertação de mestrado analisa o caso da cor da pele, considerando que a quantidade de melanina produzida depende de os pares de genes, os quais agregam de modo independente. Supõe-se que qualquer um dos alelos[3] (A ou B) acrescente ao fenótipo básico a mesma quantidade de melanina, sendo denominados de genes aditivos, enquanto os genes (a ou b) nada acrescentam ao fenótipo básico. A tabela 1 apresenta os fenótipos e o número de genes aditivos.

Tabela 1 – Fenótipos e número de genes aditivos

Genótipos	Fenótipos	N° de genes aditivos
AABB	Negro	4
AABb e AaBB	Mulato escuro	3
AAbb, aaBB, AaBb	Mulato médio	2
Aabb e aaBb	Mulato claro	1
Aabb	Branco	0

Fonte: Silva, 2013

Note abaixo o quadro 1, sobre o cruzamento entre dois heterozigotos[4] AaBb x AaBb:

Quadro 1 – Cruzamento de heterozigotos

Gametas	AB	Ab	aB	Ab
AB	AABB	AABb	AaBB	AaBb
Ab	AABb	AAbb	AaBb	Aabb
aB	AaBB	AaBb	aaBB	aaBb
Ab	AaBb	Aabb	aaBb	Aabb

Fonte: Silva, 2013

[3]Alelos são os genes que se unem para formar uma determinada característica e se encontram no mesmo lócus nos cromossomos homólogos. Por exemplo, a característica semente amarela, em ervilhas, é codificada pelos alelos VV, se homozigota e Vv, se heterozigota. Os alelos estarão sempre aos pares nos cromossomos, pois um dos alelos é proveniente de um gameta masculino e o outro de um gameta feminino. Disponível em <http://www.infoescola.com/biologia/termos-usados-em-genetica>. Acesso: 27 nov. 2018.

[4]Heterozigoto refere-se o indivíduo que possui os dois alelos diferentes para determinar uma característica. São também chamados de híbridos. Todos os indivíduos da geração F1 de Mendel eram heterozigotos Vv, que codificava a característica de semente amarela (www.infoescola.com, 2019).

Nos quadros sugeridos por Silva (2013), todos os fenótipos possíveis ocorrem do branco ao negro. Verifica-se que a menor proporção obtida é sempre a dos fenótipos extremos: 1/16 de negros (AABB) e 1/16 de brancos (aabb), sendo que as pessoas intermediárias, mulatos médios (AAbb, aaBB, AaBb), aparecem em maior proporção: 6/16. Estes fenótipos se distribuíram segundos coeficientes do desenvolvimento do binômio $(p + q)^n$, em que p representa os genes aditivos *(A e B)*, q representa os genes que não condicionaram acréscimo ao fenótipo *(a e b)* e n representa o número de genes envolvidos $(n = 4)$. Acrescenta, ainda, que no binômio apresentado, o valor de p refere-se à pessoa negra, enquanto o valor de q refere-se à pessoa branca.

Ao desenvolver o binômio, tem-se:

$$(p + q)^4 = 1p^4 + 4p^3 q + 6p^2 q^2 + 4pq^3 + 1q^4$$

A tabela 2 também proposta por Silva (2013), apresenta a quantidade de pessoas estudadas.

Tabela 2–Número de pessoas, tipo de fenótipo e número de genes aditivos

Número de pessoas	Fenótipo	N° de genes aditivos
1	Negro	4
4	Mulato escuro	3
6	Mulato médio	2
4	Mulato claro	1
1	Branco	0

Fonte: Silva, 2013

Para Silva (2013), no cálculo do número total de pessoas (combinações) na prole do resultado do cruzamento de heterozigotos para k pares de alelos ($n = 2k$ genes, envolvidos), é só fazer o somatório dos elementos da linha n do triângulo de Pascal que, segundo propriedade, é dada por 2^n. Cada linha do triângulo de Pascal corresponde à distribuição fenotípica da prole resultante do cruzamento entre pessoas heterozigotos. No exemplo usado, tem-se um total de: $1 + 4 + 6 + 4 + 1 = 2^4 = 16$ pessoas.

O emprego do binômio na genética evidencia a possibilidade da união de dois campos de conhecimento humano, a biologia e a matemática, pois o binômio ajuda no estudo dos resultados, tornando mais precisa a medição de características e números de pessoas no cruzamento genético apresentado.

3.6.5 Emprego do binômio na Mega-Sena

Em 1996, foi criada a Mega-Sena e se tornou um jogo muito popular no nosso país, em que muitos brasileiros apostam e acreditam que um dia podem ganhar o prêmio máximo e se tornarem milionários. A Mega-Sena é uma das modalidades atuais de loterias da Caixa Econômica Federal, têm sorteios ordinários duas vezes por semana (quartas-feiras e sábados) (MORAIS, 2012).

O jogo da Mega-Sena consiste em escolher de 6 a 15 números dentre os 60 números possíveis, ordenados de 01 a 60, em que o apostador para ganhar o primeiro prêmio (sena), precisa acertar os seis números diferentes que são sorteados. A Mega-Sena também dá prêmios ao jogador que acertar a quina, isto é, acertar cinco números dentre os seis números sorteados; e a quadra, ou seja, quem acerar quatro números dentre os seis números sorteados, muito embora, o prêmio seja maior para o acertador da sena (MORAIS, 2012).

De acordo com Fonseca (2015), é 33 vezes mais fácil ser atingido por um raio do que receber o prêmio integral da Mega-Sena da virada[5]. Segundo os cálculos da Caixa Econômica Federal, a chance de ganhar sozinho o valor total é de uma em 50 milhões, ou de 0,000002%, já um acidente com raio tem probabilidade de 1 em 1,5 milhão de acontecer.

O matemático Davi Castiel Menda fez um levantamento de probabilidades dos sorteios desde o primeiro concurso da Mega-Sena, em 1996, e concluiu que na primeira bolinha 90% das pessoas caem, isto é, na primeira dezena sorteada essas pessoas já perdem a esperança de acertar as seis dezenas. A tabela 3 apresenta a probabilidade de acertos segundo a quantidade de números jogados.

[5]Mega-Sena da virada é um concurso especial da Mega-Sena realizado no dia 31 de dezembro de cada ano. As regras para jogar neste concurso especial são iguais aos outros concursos da Mega-Sena. Mas, o percentual da arrecadação destinado ao prêmio principal é maior. Disponível em<http://www.gigasena.com.br/loterias/megasena/> Acesso 28 ago. 2016

Tabela 3 – Probabilidade de acerto na Mega-Sena

PROBABILIDADE DE ACERTO NA MEGA-SENA				
Quantidade de números jogados	**Valor da aposta (R$)**	**Probabilidade de acerto (1 em ...)**		
		Sena	**Quina**	**Quadra**
6	3,50	50.063.860	154.518	2.332
7	24,50	7.151.980	44.981	1.038
8	98,00	1.787.995	17.192	539
9	294,00	595.998	7.791	312
10	735,00	238.399	3.973	195
11	1.617,00	108.363	2.211	129
12	3.234,00	54.182	1.317	90
13	6.006,00	29.175	828	65
14	10.515,50	16.671	544	48
15	17.517,50	10.003	370	37

Fonte:www.loterias.caixa.gov.br, 2019

Silva (2015) destaca que as chances de acerto dos seis números são calculadas por meio de uma combinação simples de sessenta elementos tomados seis a seis, $C_{60,\ 6}$. Os possíveis números de combinações são calculados conforme a seguinte expressão matemática:

$$C_{n,\ p} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}$$

$$C_{n,\ p} = \binom{n}{p}$$

Silva (2013) explica que a expressão acima é denominada de Teorema Binomial aplicado nas probabilidades, que na verdade é um Binômio de Newton, o qual é muito usado no cálculo de probabilidades de loterias. O autor lembra que combinações simples são agrupamentos de elementos diferentes que se distinguem entre si pela natureza dos elementos. Nos cálculos englobando combinações utiliza-se o fatorial de um número natural que consiste na multiplicação desse número por todos os seus antecessores até o número um, como, por exemplo: 4! = 24.

Sendo:

C = número de combinações possíveis.

n = 60

p = 6

$$C_{6,\,60} = \frac{60!}{6!\,(60-6)!}$$

$$C_{6,\,60} = \frac{60!}{6!\,(54)!} = \frac{60.59.58.57.56.55.54!}{6!\,(54)!}$$

$$C_{6,\,60} = \frac{60.59.58.57.56.55.}{6!}$$

$$C_{6,\,60} = \frac{36.045.979.200}{720} = 50.063.860$$

Tem-se, portanto, 50.063.860 (cinquenta milhões sessenta e três mil e oitocentos e sessenta) combinações possíveis das seis dezenas da Mega-Sena, no universo de 01 a 60.

O binômio evidencia as difíceis chances que uma pessoa tem para ganhar o prêmio da Mega-Sena, são probabilidades pequenas e milhões de combinações possíveis, desse modo, com pouca margem de acerto, mas o fator sorte é uma situação complexa, que a matemática, mesmo considerando a riqueza de suas ferramentas, até nos dias de hoje, mostrou-se incapaz de determinar.

CAPÍTULO IV – NÚMEROS MULTINOMIAIS

4.1 Resumo da Vida e Obra de Gottfried Wilhelm Von Leibniz

Gottfried Wilhelm Von Leibniz nasceu em Leipzig, Alemanha, no dia 1º de julho de 1646. Ficou órfão de pai cedo e foi criado pela mãe, que lhe passou rígidos ensinamentos religiosos. Entrou para a escola Nicolau, com sete anos de idade. Estudou latim e grego e adquiriu conhecimento de modo autodidata (www.brasilescola.com, 2019); (www.ebiografia.com, 2019).

Figura 5 - Gottfried Wilhelm Von Leibniz

Fonte: https://voltairefoundation.wordpress.com

Ingressou na universidade precocemente aos quatorze anos de idade e, aos dezessete, já tinha obtido o diploma de bacharel em filosofia. Estudou teologia, direito, filosofia e matemática. Para diversos historiadores, ele é considerado como o último erudito que possuía conhecimento universal (www.brasilescola.com, 2019).

Aos vinte anos de idade, já estava preparado para receber o título de doutor em direito, mas a universidade o achou muito jovem para conceder tal título, então, ele deixou a cidade de Leipzig e, em Nuremberg, recebeu seu título de doutor pela Universidade de Altdorf. Seguiu a carreira diplomática, como influente representante do governo, assim, ele viajou muito ao longo de sua vida (www.brasilescola.com, 2019); (www.ebiografia.com, 2019).

Tinha como objetivo estabelecer a paz interna entre o sacro império romano germânico.Vislumbrou um pensamento que era a união entre o catolicismo e protestantismo para apaziguar os conflitos existentes naquela ocasião. Em Londres, participou da Royal Society e foi eleito membro, depois de apresentar a sua invenção, a máquina de calcular (www.ebiografia.com, 2019).

Em 1672, foi para Paris, onde conheceu Huygens, que sugeriu a leitura dos tratados de 1658 de Blaise Pascal, se quisesse tornar-se um matemático. Em 1673, viajou a Londres, onde comprou uma cópia do *Lectiones Geometricae,* de Isaac Barrow e, nessa ocasião, tornou-se membro da Royal Society. Houve rumores naquela época de que Leibniz talvez tivesse visto o trabalho de Isaac Newton, que por sua vez o teria influenciado na descoberta do Cálculo, pondo em dúvida a legitimidade de suas descobertas voltadas para o assunto (www.brasilescola.com, 2019).

No entanto, sabe-se que isso não teria sido possível, porque Leibniz, durante aquela visita a Londres, não tinha conhecimentos de geometria e análise suficientes para entender o trabalho de Newton. A partir de então, a matemática tornou-se muito presente em sua vida (www.brasilescola.com, 2019).

Estudioso do cálculo integral e do cálculo binário, que seria essencial para o estabelecimento dos programas de computadores. Criador da teoria das Mônadas – unidades primárias do universo, que formam todos os corpos (www.ebiografia.com, 2019).

Da mesma forma que ocorreu com Isaac Newton, o estudo de séries infinitas foi muito relevante no início de suas descobertas. Relacionando o Triângulo de Pascal e o triângulo harmônico, Leibniz percebeu um modo de achar o resultado de inúmeras séries infinitas convergentes. Então, ele debruçou-se para o trabalho de Blaise Pascal, "*Traitédessinusdu quart de cercle*", que enxergou um importante *insight*: a determinação da tangente a uma curva dependia das diferenças das abscissas e ordenadas na medida em que essas se tornassem infinitamente pequenas e que a quadratura, isto é, a área, dependia da soma das ordenadas ou retângulos infinitamente finos (www.brasilescola.com, 2019).

Em 1676, esse *insight* levou Leibniz a chegar as mesmas conclusões a que havia chegado Newton alguns anos antes: ele tinha em mãos um método muito relevante por conta de sua abrangência. Independente de uma função ser racional ou irracional, algébrica outranscendente, nomenclatura criada por Leibniz, as operações de encontrar somas (integrais) ou diferenças (diferenciais) poderiam ser sempre aplicadas. Leibniz teve a tarefa de elaborar uma notação apropriada para estas operações, assim como o termo – Cálculo Diferencial e Cálculo Integral, ambas usadas nos dias de hoje (www.brasilescola.com, 2019).

Em 1677, divulgou o desenvolvimento do teorema fundamental do cálculo, que foi aplicado na Europa, muito embora, conforme mencionado, Isaac Newton já tinha estudos não publicados sobre a matéria (www.ebiografia.com, 2019).

Além do cálculo, Leibniz contribuiu para outros campos da matemática. Ele foi responsável pela generalização do teorema do binômio em Teorema do Multinômio, para expansões do tipo $(x + y + z)^n$. A primeira referência do método dos determinantes no mundo ocidental também é realizada por ele. O matemático reelaborou e desenvolveu o conceito de lógica simbólica. Contribuiu também para a teoria de probabilidades e a análise combinatória (www.brasilescola.com, 2019).

Leibniz publicou obras importantes como "Novos ensaios sobre o entendimento humano" (escritos em 1714 e publicados em 1765) e "Monadologia e princípios da natureza humana", publicado em 1714 (www.ebiografia.com, 2019).

Leibniz e Newton foram os dois maiores protagonistas na descoberta da poderosa ferramenta matemática, o Cálculo. Leibniz é tido também como um dos sete filósofos modernos mais importantes (www.brasilescola.com, 2019).

Faleceu em Hanôver, Alemanha, no dia 14 de novembro de 1716, solitário, vítima de uma crise de gota, longe da aristocracia, onde conviveu boa parte da vida (www.brasilescola.com, 2019); (www.ebiografia.com, 2019).

4.2 Processo espontâneo

O teorema multinomial, polinômio de Leibniz, ou fórmula do multinômio de Newton é uma generalização do binômio de Newton.

Regra

Fazer recair a potenciação de polinômios na de binômios, por associação sucessiva dos seus termos (MENEZES, 1959).

Exemplos:

21) $(a + b + c)^m$, sendo $(a + b) = x$

$= (x + c)^m = x^m + mcx^{m-1} + \frac{m\,(m-1)}{2!}c^2x^{m-2} + \dots + c^m$

$= (a + b)^m + mc\,(a + b)^{m-1} + \frac{m\,(m-1)}{2!}c^2\,(a + b)^{m-2} + \dots + c^m$

O cálculo agora:

$(a + b)^m$, $(a + b)^{m-1}$, $(a + b)^{m-2}$, ...para obter o desenvolvimento final de $(a + b + c)^m$.

22) $(a + b + c + d + e)^m$, sendo $(a + b + c + d) = x$
$= (x + e)^m$

No cálculo das diferentes potências de x cumprirá fazer:

$x = (a + b + c + d)$, sendo $(a + b + c) = y$
$= y + d$

No cálculo das diferentes potências de y cumprirá fazer:
$y = (a + b + c)$, sendo $(a + b + c) = z$
$= z + c$; e assim por diante.

Evidentemente, trata-se de processo moroso, sobretudo quando o número de termos do polinômio e o grau da potência são grandes.

4.3 Processo sistemático (fórmula de Leibniz)

A - Potência de expoente inteiro positivo

a) Desenvolvimento:

Regra:
O desenvolvimento de $(a + b + c + ... + l)^m$ é dado pela fórmula de Leibniz:

$$(a + b + c + ... + l)^m = \sum \frac{m!}{\alpha!\ \beta!\ \gamma! \dots \lambda!} \,.\, a^{\alpha} . b^{\beta} . c^{\gamma} ... l^{\lambda} \text{, sendo } \alpha + \beta + \gamma + \dots + \lambda = m.$$

Do seguinte modo:

1° - Determinar todas as maneiras distintas possíveis de realizar com valores inteiros, positivos ou nulos, atribuídos a $\alpha, \beta, \gamma, \ \dots \ , \lambda$, a condição estipulada de ser $\alpha + \beta + \gamma + \ \dots \ + \lambda =$ m, sem computar os modos que resultem de simples permutações das parcelas.

2º - A cada solução da referida equação de condição estipulada, corresponderá um desdobramento da somação indicada no segundo membro da fórmula de Leibniz, substituindo-se aí $\alpha, \beta, \gamma, \ \dots \ , \lambda$ pelos seus valores inteiros, positivos ou nulos, encontrados (MENEZES, 1959).

Exemplo 23:

Determinar a expressão do quadrado de um polinômio, ou de $(a + b + c + \dots + l)^2$. Serão soluções inteiras da equação de condição $\alpha + \beta + \gamma + \dots \ + \lambda = 2$, sem permutação de parcelas (MENEZES, 1959):

$$\begin{cases} 2 + 0 + 0 + \dots + 0 = 2 \ (1) \\ 1 + 1 + 0 + \dots + 0 = 2 \ (2) \end{cases}$$

De (1), decorrem: $\alpha = 2, \beta = 0, \gamma = 0, \dots, \lambda = 0$, e $\sum \frac{2!}{2!\,0!\,0!\,\dots\,0!} a^2\, b^0\, c^0 \ \dots \ l^0 = \sum a^2$

De (2), decorrem: $\alpha = 1, \beta = 1, \gamma = 0, \dots , \lambda = 0$,e $\sum \frac{2!}{1!\,1!\,0!\,\dots\,0!} a^1\, b^1\, c^0 \ \dots \ l^0 = 2 \sum ab$

□ $(a + b + c + \ \dots \ + l)^2 = \sum \ a^2 + \ 2 \sum ab$

Exemplo 24:

Determinar a expressão do cubo de um polinômio, ou de $(a + b + c + \ \dots \ + l)^3$. Serão soluções inteiras de $\alpha + \beta + \gamma + \dots \lambda = 3$, sem permutação de parcelas (MENEZES, 1959):

$$\begin{cases} 3 + 0 + 0 + 0 + \dots + 0 = 3 \ \ (1) \\ 2 + 1 + 0 + 0 + \dots + 0 = 3 \ (2) \\ 1 + 1 + 1 + 0 + \dots + 0 = 3 \ \ (3) \end{cases}$$

De (1): $\alpha = 3, \beta = 0, \gamma = 0, \dots, \lambda = 0$, e $\sum \frac{3!}{3!0!0!\,\dots\,0!} a^3 b^0\, c^0 \ \dots \ l^0 = \ \sum a^3$

De (2), decorrem: $\alpha = 2, \beta = 1, \gamma = 0, \dots, \lambda = 0$, e $\sum \frac{3!}{2!1!0!\,\dots\,0!} a^2 b^1\, c^0 \ \dots \ l^0 \ = 3 \sum a^2 b$

De (3), decorrem: $\alpha = 1, \beta = 1, \gamma = 1, \mu = 0, \ldots, \lambda = 0$, e $\sum \frac{3!}{1!1!1!0!\ldots 0!} a^1 b^1 c^1 d^0 \ \ldots\ l^0 =$

$= 6 \sum abc$ □ $(a + b + c + \ldots + l)^3 = \sum a^3 + 3 \sum a^2 b + 6 \sum abc$

Exemplo 25:

Determinar a expressão da quarta potência de um polinômio. Das soluções inteiras da equação de condição: $\alpha + \beta + \gamma + \delta + \ldots + \lambda = 4$ (MENEZES, 1959):

$$\begin{cases} 4 + 0 + 0 + 0 + 0 + \ldots + 0 = 4 \\ 3 + 1 + 0 + 0 + 0 + \ldots + 0 = 4 \\ 2 + 2 + 0 + 0 + 0 + \ldots + 0 = 4 \\ 2 + 1 + 1 + 0 + 0 + \ldots + 0 = 4 \\ 1 + 1 + 1 + 1 + 0 + \ldots + 0 = 4 \end{cases}$$

Decorrerá o desdobramento que se segue:

$$(a + b + c + d + \ldots + l)^4 = \sum \frac{4!}{4!0!0!\ldots 0!} a^4 b^0 c^0 d^0 \ldots l^0 + \sum \frac{4!}{3!1!0!\ldots 0!} a^3 b^1 c^0 d^0 \ldots l^0 +$$

$$+ \sum \frac{4!}{2!2!0!\ldots 0!} a^2 b^2 c^0 d^0 \ldots l^0 + \sum \frac{4!}{2!1!1!0!\ldots 0!} a^2 b^1 c^1 d^0 \ldots l^0 +$$

$$+ \sum \frac{4!}{1!1!1!1!0!\ldots 0!} a^1 b^1 c^1 d^1 e^0 \ldots l^0$$

$$= \sum a^4 + 4 \sum a^3 b + 6 \sum a^2 b^2 + 12 \sum a^2 bc + 24 \sum abcd$$

Exemplo 26:

Considere os números reais $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_p$ e um número natural n. Então (SILVA, 2013):

$$(x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_p)^n = \sum \frac{n!}{\alpha_1!\ \alpha_2!\,\alpha_3!\ldots \alpha_p!} x^{\alpha 1}{}_1\, x^{\alpha 2}{}_2 \ldots x^{\alpha p}{}_p$$

Estendendo-se o somatório a todos os valores naturais de $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$, tais que $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_p = n$.

Justificativa:

$$(x_1 + x_2 + ... + x_p)^n = (x_1 + ... + x_p) . (x_1 + ... + x_p) ... (x_1 + ... + x_p).$$

O termo genérico do produto é alcançado escolhendo-se em cada parênteses um x_i e multiplicando-se os escolhidos. Veja, se em α_1 dos parênteses escolher x_1, em α_2 dos parênteses escolher x_2, etc. Obtêm-se:

$$x_1^{\alpha 1} x_2^{\alpha 2} ... x_p^{\alpha p} \ (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_p \text{ naturais e } \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_p = n)$$

O termo $x_1^{\alpha 1} x_2^{\alpha 2} ... x_p^{\alpha p}$ aparece tantas vezes quantos são os modos de escolher n parêntesesα_1 deles para pegar o x_1 para fator, α_2 dentre os que sobraram para pegar o x_2 como fator, etc.; mas isso pode ser feito dos modos, a seguir:

$$\binom{n}{\alpha_1} . \binom{n - \alpha_1}{\alpha_2} ... \binom{n - \alpha_1 - \ ... - \alpha_{n-1}}{\alpha_n} = \frac{n!}{\alpha_1! \ \alpha_2! ... \ \alpha_n!}$$

Logo, $x_1^{\alpha 1} . x_2^{\alpha 2} ... x_p^{\alpha p}$ aparece no desenvolvimento$\frac{n!}{\alpha_1! \, \alpha_2! ... \, \alpha_n!}$ vezes.

Exemplo 27:

Deduzir a lei do binômio de Newton através da fórmula de Leibniz. Trata-se de desenvolver $(x + a)^m$, e a equação de condição é $\alpha + \beta = m$. As soluções inteiras desta equação serão (MENEZES, 1959):

$$\begin{cases} m + 0 = m \\ (m - 1) + 1 = m \\ (m - 2) + 2 = m \\ (m - 3) + 3 = m \\ .... \end{cases}$$

 Tendo em vista que há somente duas parcelas, x e a, os desdobramentos dos somatórios indicados por $\sum$ são facilmente realizáveis:

$$(x + a)^m = \sum \frac{m!}{m!0!} x^m a^0 + \sum \frac{m!}{(m-1)!1!} x^{m-1} a^1 + \sum \frac{m!}{(m-2)!\,2!} x^{m-2} a^2 + \ldots$$

$$= x^m + a^m + \frac{m}{1!} x^{m-1} a + \frac{m}{1!} x\, a^{m-1} + \frac{m\,(m-1)}{2!} x^{m-2} a^2 + \frac{m\,(m-1)}{2!} x^2 a^{m-2} + \ldots$$

$$= x^m + \frac{m!}{1!} a x^{m-1} + \frac{m\,(m-2)}{2!} a^2 x^{m-2} + \ \ldots \ + a^m$$

Exemplo 28:

Achar o coeficiente de x^4no desenvolvimento de $(1 - 2x + 3x^2)^5$. Pela fórmula de Leibniz, deve-se ter (MENEZES, 1959):

$$(1 - 2x + 3x^2)^5 = \sum \frac{5!}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!} \ . \ 1^{\alpha} \ . \ (-2x)^{\beta} \ . \ (3x^2)^{\gamma}$$

$$= \sum \frac{5!}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!} \ . \ (-2)^{\beta} \ . \ (3)^{\gamma} \ . \ x^{\beta + 2\gamma}$$

Equações de condição do problema $\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 5 \\ \beta + 2\gamma \quad = 4 \end{cases}$

A cada solução inteira deste sistema, onde α, β, γ só poderão receber valores inteiros positivos ou nulos, corresponderá um termo em x^4, e a soma dos coeficientes de todos esses termos em x^4 será o coeficiente reclamado.

Soluções:

De $\alpha + \beta + \gamma = 5$ $\begin{cases} 5 + 0 + 0 = 5 \\ 4 + 1 + 0 = 5 \\ 3 + 2 + 0 = 5 \\ 3 + 1 + 1 = 5 \\ 2 + 2 + 1 = 5 \end{cases}$ Soluções aceitáveis para $\beta + 2\gamma = 4$ $\begin{cases} \text{Para } \alpha = 1, \beta = 4, \gamma = 0 \quad \text{tem-se } 4 + 2 \,.\, 0 = 4 \\ \text{Para } \alpha = 3, \beta = 0, \gamma = 2 \quad \text{tem-se } 0 + 2 \,.\, 2 = 4 \\ \text{Para } \alpha = 2, \beta = 2, \gamma = 1 \quad \text{tem-se } 2 + 2 \,.\, 1 = 4 \end{cases}$

 Coeficiente de x^4 =

ou $C_x^4 = \frac{5!}{1!4!0!} \ . \ (-2)^4 \ . \ 3^0 + \frac{5!}{3!0!2!} \ (-2)^0 \ . \ 3^2 + \frac{5!}{2!2!1!} \ (-2)^2 \ . \ 3^1 = 530$

Justificativa:

Dado $(a + b + c + ... + l)^m = (a + b + c + ... + l)\,(a + b + c + ... + l)\,...\,(a + b + c + ... + l)$, trata-se, primeiramente de estruturar a expressão do termo geral do produto indicado. Para fazê-lo, tomar-se-á um monômio de cada um dos m polinômios fatores, e o produto de tais monômios deverá ser um dos termos da potência considerada. Como poderá ocorrer que um mesmo monômio seja escolhido em mais de um polinômio fator, a expressão do produto dos monômios escolhidos será da forma:

$$a^{\alpha}.\ b^{\beta}.\ c^{\gamma}...\ l^{\lambda},$$

Podendo os expoentes $\alpha, \beta, \gamma, ..., \lambda$ serem inteiros positivos ou nulos satisfazendo, porém, à condição primordial de:

$$\alpha + \beta + \gamma + ... + \lambda = m$$

Fixando-se valores para $\alpha + \beta + \gamma + ... + \lambda$, o termo $a^{\alpha}\ .\ b^{\beta}\ .c^{\gamma}\ \ ...l^{\ \lambda}$ surgirá no desenvolvimento procurado tantas vezes quantas forem as permutações de m elementos, dos quais α são idênticos a a, β idênticos a b, γ idênticos a c, ..., λ idênticos a l.

Então, a estrutura do termo geral do desenvolvimento da potência proposta será:

$$\frac{m!}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!\,...\,\lambda!} = a^{\alpha}\,.\,b^{\beta}\,.\,c^{\gamma}\ ...\ l^{\lambda}$$

Atendendo-se ao fato de $\alpha, \beta, \gamma, ...\ \lambda$ poderem receber todos os possíveis valores inteiros positivos ou nulos, que sejam soluções da equação $\alpha + \beta + \gamma + ... + \lambda = m$, o desenvolvimento da potência dada será representado pelo símbolo da soma de todos os termos análogos ao termo geral estruturado, isto é, por:

$$(a + b + c + ... + l)^m = \sum \frac{m!}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!...\,\lambda!}\ .\ \ a^{\alpha}\ .\ b^{\beta}.\ c^{\gamma}\ \ ...l^{\lambda},$$

Logo, trata-se da fórmula de Leibniz para expoente m inteiro positivo.

Exemplo 29:

Efetue o desenvolvimento de $(x^2 + 2x - 1)^4$ (SILVA, 2015).

Solução:

Pela expansão multinomial tem-se:

$$(x^2 + 2x - 1)^4 = \sum \frac{4!}{\alpha_1!\,\alpha_2\,!\,\alpha_3!}\,(x^2)^{\alpha 1}(2x)^{\alpha 2}(-1)^{\alpha 3}$$

$$= \sum \frac{4!}{\alpha_1!\,\alpha_2\,!\,\alpha_3\,!} 2^{\alpha 2}\,(-1)^{\alpha 3}\,x^{2\alpha 1 + \alpha 2}\,,$$

Onde $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ são números naturais tais que $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 4$.

É apresentada abaixo uma tabela dos possíveis valores de α_1, α_2, α_3 e os correspondentes termos do desenvolvimento.

Quadro 2 – Desenvolvimento do Polinômio de Leibniz

α_1	α_2	α_3	T
4	0	0	X^8
0	4	0	$16x^4$
0	0	4	1
3	1	0	$8x^7$
3	0	1	$-4x^6$
1	0	3	$-4x^2$
1	3	0	$32x^5$
0	1	3	$-8x$
0	3	1	$-32x^3$
2	1	1	$-24x^5$
1	2	1	$-48x^4$
1	1	2	$24x^3$
2	2	0	$24x^6$
2	0	2	$6x^4$
0	2	2	$24x^2$

Efetuando a soma e fazendo a redução dos termos semelhantes, tem-se:

$(x^2 + 2x - 1)^4 = x^8 + 8x^7 + 20x^6 + 8x^5 - 26x^4 - 8x^3 + 20x^2 - 8x + 1.$

b - Número de termos de $(a + b + c + ... + l)^m$

Regra

O número t de termos do desenvolvimento da potência m de um polinômio de k termos, quando m é inteiro positivo, é dado pelo número de combinações com repetições de k elementos tomados m a m, ou o número de combinações simples de $k + m - 1$ elementos tomados m a m; isto é:

$$t = (CR)_k^m = C_{k+m-1}^m$$

O referido número t corresponde também ao número total de soluções inteiras positivas de $\alpha + \beta + \gamma + ... + \lambda = m$, incluídas as soluções que decorrerem de permutações entre as parcelas.

Exemplo 30:

Achar o número de termos do desenvolvimento de $(a + b + c + d + e)^3$ (SILVA, 2013).

$m = 3; k = 5$ □ $t = C_{5+3-1}^3 = C_7^3 = \frac{7!}{3!4!} = 35.$

Portanto, existem *35* termos.

Exemplo 31:

Achar o número de termos do desenvolvimento de $(l - x - 2x^2 + 3x^3)^6$ (MENEZES, 1959).

$m = 6; k = 4$ □ $t = C^5{}_{4+6-1} = C^6{}_9 = \frac{9!}{6!3!} = 84.$

Há *84* termos.

Justificativa:

Seja $(a + b)^m = \sum \frac{m!}{\alpha!\beta!}.\ a^\alpha\ .\ b^\beta$, onde $\alpha + \beta = m$.

Para $m = 2$, as soluções, sem permutações, de $\alpha + \beta + 2$ são $\begin{cases} 2 + 0 = 2 \\ 1 + 1 = 2 \end{cases}$

e $(a + b)^2 = \sum a^2 + 2 \sum ab$

Há *3* termos de $(a + b)^2$ $\begin{cases} \sum a^2 = a^2 + b^2 \\ 2 \sum ab = 2ab \end{cases}$

Há *3* soluções de $\alpha + \beta = 2$ (com permutações) $\begin{cases} 2 + 0 = 2 \\ 0 + 2 = 2 \\ 1 + 1 = 2 \end{cases}$

Para $m = 3$, as soluções sem permutações de $\alpha + \beta = 3$ são $\begin{cases} 3 + 0 = 3 \\ 2 + 1 = 3 \end{cases}$

e $(a + b)^3 = \sum a^3 + 3 \sum a^2 b$

Há *4* termos de $(a + b)^3$ $\begin{cases} \sum a^3 = a^3 + b^3 \\ 3 \sum a^2 b = 3a^2 b + 3ab^2 \end{cases}$

Há 4 soluções de $\alpha + \beta = 3$ (com permutações) $\begin{cases} 3 + 0 = 3 \\ 0 + 3 = 3 \\ 2 + 1 = 3 \\ 1 + 2 = 3 \end{cases}$

Para $m = 4$, as soluções sem permutações, de $\alpha + \beta = 4$ são
$$\begin{cases} 4 + 0 = 4 \\ 3 + 1 = 4 \\ 2 + 2 = 4 \end{cases}$$

e

$$(a + b)^4 = \sum a^4 + 4 \sum a^3 b + 6 \sum a^2 b^2$$

Há 5 termos de $(a + b)^4$
$$\begin{cases} \sum a^4 = a^4 + b^4 \\ 4 \sum a^3 b = 4 a^3 b + 4 a b^3 \\ 6 \sum a^2 b^2 = 6 a^2 b^2 \end{cases}$$

Há 5 soluções de $\alpha + \beta = 4$

(com permutações)
$$\begin{cases} 4 + 0 = 4 \\ 0 + 4 = 4 \\ 3 + 1 = 4 \\ 1 + 3 = 4 \\ 2 + 2 = 4 \end{cases}$$

Para m qualquer, sabe-se que haverá $(m + 1)$ termos e induz-se que haverá também $(m + 1)$ soluções da equação $\alpha + \beta = m$

Seja, agora, $(a + b + c)^2$, onde $\alpha + \beta + \gamma = 2$, cujas soluções, sem permutações são:

$$\begin{cases} 2 + 0 + 0 = 2 \\ 1 + 1 + 0 = 2 \end{cases}$$

e

$$(a + b + c)^2 = \sum a^2 + 2 \sum a b$$

Há 6 termos de $(a + b + c)^2$
$$\begin{cases} \sum a^2 = a^2 + b^2 + c^2 \\ 2.\sum ab = 2ab + 2 a c + 2 b c \end{cases}$$

Há *6* soluções de $\alpha + \beta + \gamma = 2$ (com permutações)

$$\begin{cases} 2 + 0 + 0 = 2 \\ 0 + 2 + 0 = 2 \\ 0 + 0 + 2 = 2 \\ 1 + 1 + 0 = 2 \\ 1 + 0 + 1 = 2 \\ 0 + 1 + 1 = 2 \end{cases}$$

Seja, agora, $(a + b + c + d + e)^3$ onde $\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon = 3$

Cujas soluções sem permutações são

$$\begin{cases} 3 + 0 + 0 + 0 + 0 = 3 \\ 2 + 1 + 0 + 0 + 0 = 3 \\ 1 + 1 + 1 + 0 + 0 = 3 \end{cases}$$

$$(a + b + c + d + e)^3 = \sum a^3 + 3 \sum a^2 b + 6 \sum a\, b\, c$$

Há *35* termos de $(a + b + c + d + e)^3$

$$\begin{cases} \sum a^3 = a^3 + b^3 + c^3 + d^3 + e^3 \\ \sum a^2 b = a^2 b + a^2 c + a^2 d + a^2 e \\ \quad + ab^2 + a c^2 + a d^2 + a e^2 \\ \quad + b^2 c + b^2 d + b^2 e \\ \quad + b c^2 + b d^2 + b e^2 \\ \quad + c^2 d + c^2 e \\ \quad + c d^2 + c e^2 \\ \quad + d^2 e \\ \quad + d e^2 \\ \sum a\, b\, c = ab c + abd + a bc + a cd + a c e + a d e \\ \quad + b c d + b c e + b d e \\ \quad + c d e \end{cases}$$

Há *35* soluções de $\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon = 3$ (com permutações)

Prosseguindo nesta análise, induz que:

1º - o número de termos do desenvolvimento da potência de um polinômio corresponde ao número total de soluções inteiras positivas de $\alpha + \beta + \gamma + \ldots + \lambda = m$.

2º - o número de termos do desenvolvimento é dado pelo número de combinações com repetições dos *k* termos do polinômio tomados *m* a *m*, isto é, por:

$$(CR)_k^m, \text{ ou } C_{k+m-1}^m$$

Como já se sabe através de uma propriedade das combinações com repetições.

Observação: É fácil verificar que os *35* termos de $(a + b + c + d + e)^3$, por exemplo, correspondem as combinações com repetições dos *5* termos do polinômio tomados *3* a *3*, como consta do seguinte quadro:

Quadro de $(CR)_5^3 = C_{5+3-1}^3 = C_7^3 = 35$

aaaaabaacaadaae
abb abc abd abe
accacd ace
addadc
aee
bbbbbcbbdbbe
bccbcdbce
bddbde
bee
cccccdcce
cddcde
cee
ddddde
dee
eee

B – Potência de expoente negativo ou fracionário

Regra:

O desenvolvimento de $(a + b + c + ... + l)^m$, para m negativo ou fracionário, de um número ilimitado de termos, é dado, por extensão da fórmula de Leibniz, pela expressão:

$$(a + b + c + ... + l)^m = \sum \frac{m\,(m-1)(m-2)...(m-n+1)}{\beta!\,\gamma!...\,\lambda!} \,.\, a^{m-n} \,.\, b^{\beta} \,.c^{\gamma} \,...l^{\lambda},$$

Para m negativo ou fracionário, sendo $n = \beta + \gamma + ... + \lambda$.

Exemplo 32:

Achar o coeficiente de x^4 no desenvolvimento de $P^{1/3} = (3 + x + x^2 - 2\,x^3)^{1/3}$ (MENEZES, 1959).

Aplicando a fórmula:

$$P^{1/3} = \sum \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{3}-2\right)...\left(\frac{1}{3}-n+1\right)}{\beta!\,\gamma!\,\delta!} \;.\; 3^{1/3-n}.x^{\beta} \,.\, (x^2)^{\gamma} \,.(- 2x^3)^{\delta}$$

$$= \sum \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{3}-2\right)...\left(\frac{1}{3}-n+1\right)}{\beta!\,\gamma!\,\delta!} .\; 3^{1/3-n} \;.(- 2)^{\delta} \,.\; x^{\beta + 2\gamma + 3\delta},$$

Para $\beta + \gamma + \delta = n$

Como o expoente de x deve ser, neste problema, igual a 4, surgirão assim duas equações de condição:

$$\begin{cases} \beta + 2\gamma + 3\delta = 4 & (1) \\ \beta + \gamma + \delta = n & (2) \end{cases}$$

Através da equação *(1)* serão pesquisados os valores inteiros positivos ou nulos para β, γ,δ, que lhes satisfaçam, para cada solução de *(1)*, obtém-se em *(2)* um valor correspondente para n. Então:

$$\begin{cases} \delta = 1 \ ; \ \gamma = 0 \ ; \beta = 1 \quad e \quad n = 2 \\ \delta = 0 \ ; \ \gamma = 2 \ ; \ \beta = 0 \quad e \quad n = 2 \\ \delta = 0 \ ; \gamma = 0 \ ; \ \beta = 4 \quad e \quad n = 4 \end{cases}$$

Afinal:

Coeficiente de x^4 =

para $\beta = 1, \gamma = 2, \delta = 1$
$n = 2$

$$\left\{ \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3} - 1\right)}{1!0!1!} . \ 3^{1/3-\ 2} (-2)^1 \quad + \right.$$

para $\beta = 0, \gamma = 2, \delta = 0$
$n = 2$

$$\left\{ \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3} - 1\right)}{0!2!0!} . \ 3^{1/3-\ 2} (-2)^0 \quad + \right.$$

para $\beta = 4, \gamma = 0, \delta = 0$
$n = 4$

$$\left\{ \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3} - 1\right)\left(\frac{1}{3} - 2\right)\left(\frac{1}{3} - 3\right)}{4!0!0!} . \ 3^{1/3-\ 4} (-2)^0 \right.$$

$$= \frac{1}{3} . \left(-\frac{2}{3}\right) . \ 3^{-5/3} . (-2) + \frac{1}{3} . \left(-\frac{2}{3}\right) . 3^{-5/3} \ . \ \frac{1}{2} + \frac{1}{3} . \left(-\frac{2}{3}\right) . \left(-\frac{5}{3}\right) . \left(-\frac{8}{3}\right) . \ 3^{-11/3} . \ \frac{1}{24}$$

$$= \frac{4}{3^3 . \sqrt[3]{3^2}\,3} - \frac{1}{3 . \sqrt[3]{3^2}} - \frac{10}{3^3 . \sqrt[3]{3^2}}$$

$$= \frac{3^6 - 10}{3^8 . \sqrt[3]{3^2}}$$

Justificativa:

Para estender-se a fórmula de Leibniz, instituída para m inteiro positivo, ao caso de expoente negativo ou fracionário, é preciso modificar o aspecto, de sorte que não existam expressões fatoriais do expoente.

É o que consegue através da marcha seguinte:

$(a + b + c + ... + l)^m = [a + (b + c + ... + l)]^m$, cujo termo geral pela lei binomial de Newton será:

$$T_{n+1} = \frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-n+1)}{n!} \cdot a^{m-n} \cdot (b + c + ... + l)^n ,$$

Onde n, número de termos que precedem o termo de ordem n + 1, é sempre inteiro positivo.

No desenvolvimento de $(b + c + ... + l)^n$, o termo geral é o que intervém na fórmula de Leibniz, de estrutura:

$$\frac{n!}{\beta!\ \gamma! \dots \lambda!} \cdot b^{\beta} \cdot c^{\gamma} \dots l^{\lambda}$$

Para $\beta + \gamma + ... + \lambda = n$

Assim, o termo geral do desenvolvimento da potência *m* do polinômio dado, qualquer que seja *m*, será:

$$T_{n+1} = \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!} \cdot \frac{n!}{\beta!\,\gamma! \dots \lambda!} \cdot a^{m-n} \cdot b^{\beta} \cdot c^{\gamma} \dots l^{\lambda}$$

E o desenvolvimento da referida potência será representado simbolicamente por:

$$(a + b + c + ... + l)^m = \sum \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{\beta!\,\gamma! \dots \lambda!} \cdot a^{m-n} \cdot b^{\beta} \cdot c^{\gamma} \dots l^{\lambda}$$

3.4 Aplicações

São apresentadas algumas sugestões de aplicações, de forma a construir com os estudantes do Ensino Médio, o desenvolvimento do Binômio de Newton.

Exemplo 33:

Uma situação bem simples: perguntar aos alunos qual seria o valor de $\sqrt{1,01}$. Sem o conhecimento já trabalhado, possivelmente, os alunos, se pudessem usar uma calculadora, simplesmente seguiriam o método de "chutar" alguns valores para a raiz, calculando o seu quadrado, e comparando o número obtido com *1,01*; e a seguir "chutando" valores cada vez mais aproximados. No entanto, uma vez que o desenvolvimento binomial para expoentes negativos e fracionários já tenha sido trabalhado, bastaria apenas ao aluno, seguir o raciocínio (LEACHENSKI, 2017):

$$\sqrt{1,01} = \sqrt{1 + 0,01} = (1 + 0,01)^{1/2},$$

Expressão que pelo desenvolvimento binomial ficaria:

$$(1 + 0,01)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2} \, . \, (0,01) + \frac{\frac{1}{2} \, . \frac{-1}{2} \, . \, (0,01)^2}{2!} + \frac{\frac{1}{2} \, . \, \frac{-1}{2} \, . \, \frac{-3}{2} \, . \, (0,01)^3}{3!} + \frac{\frac{1}{2} \, . \, \frac{-1}{2} \, . \, \frac{-3}{2} \, . \frac{-5}{2} \, . \, (0,01)^4}{4!} \ldots$$

Ou, fazendo as operações:

$$(1 + 0,01)^{1/2} = 1 + 0,005 - 0,0000125 + 0,0000000625 + \ldots$$

Isto é, levando em consideração apenas 4 termos da série, o aluno pode obter o valor:

$$(1 + 0,01)^{1/2} \cong 1,004987563,$$

Que é o número procurado, apresentando um erro apenas na nona casa decimal.

Exemplo 34:

Achar $\sqrt[3]{24,3}$ou $\sqrt[3]{75}$:

Para calcular esse tipo de raiz, a estratégia seria identificar um número cúbico perfeito maior que o radicando, escrever o radicando como uma subtração, e colocar o número cúbico em evidência, isto é:

$$\sqrt[3]{75} = \sqrt[3]{125 - 50} = \sqrt[3]{125 \cdot (1 - \frac{50}{125})} = \sqrt[3]{125} \cdot \sqrt[3]{(1 - \frac{50}{125})} = 5 \cdot (1 - 0,4)^{1/3}.$$

O professor de matemática Leachenski (2017) durante a elaboração de sua dissertação de mestrado, trabalhava numa escola rural, na cidade de Ipiranga, Paraná, e como uma alternativa de abordagem, não utilizou o método de desenvolvimento binomial, pois no seu entendimento ele acha que o docente deve se adequar à realidade da escola, onde trabalha, se possível empregando ferramentas de modelagem matemática. O autor entende que o estudante aprende melhor quando se sente fazendo parte do desenvolvimento do conteúdo que está sendo trabalhado, para isso o mesmo busca fundamentação na Lei de Diretrizes e Bases da Educação, artigo 28, que determina as seguintes regras:

> Na oferta da educação básica para a população rural, os sistemas de ensino proverão as adaptações necessárias à sua adequação, às peculiaridades da vida rural e de cada região, especialmente:
> I - conteúdos curriculares e metodologias apropriadas às reais necessidades e interesses dos alunos da zona rural;
> II - organização escolar própria, incluindo a adequação do calendário escolar às fases do ciclo agrícola e às condições climáticas;
> III - adequação à natureza do trabalho na zona rural (BRASIL, 1996).

Como se vê, os itens I e III apontam o caminho para criar uma abordagem apropriada ao conteúdo a ser trabalhado em escolas do campo: o conteúdo Binômio de Newton deve ser aplicado no Ensino Médio, mas da maneira que aparece nos livros, os estudantes dessas regiões não conseguem ver seu emprego no meio em que vivem. Uma vez que a maioria dos alunos residem em sítios, chácaras e fazendas, que possuem açude ou represa para a criação de peixes, isso pode possibilitar a criação de um problema fictício que torne o conceito a ser trabalhado um caminho natural, como, por exemplo, a construção de um viveiro para a recria de alevinos.

Sabe-se que para o desenvolvimento dos peixes e uma melhor produtividade futura depende de um ecossistema aquático equilibrado, onde diversos parâmetros devem ser controlados como: temperatura, oxigênio dissolvido, pH, alcalinidade, entre outros elementos. Sem adentrar nas especificidades da medição e do controle de cada um destes parâmetros, sabe-se que alguns deles podem ser controlados com a adição de suplementos à água, como, por exemplo, aumento do pH pode ser obtido com o acréscimo de uma solução de cal, num processo denominado de calagem (LEACHENSKI, 2017).

Exemplo 35:

Para facilitar o manejo do viveiro e a adição desses suplementos, deseja-se que o viveiro tenha $1\ m^3$ de volume, assim, ao acrescentar *1 kg* de suplemento, a concentração desse suplemento no viveiro seria aumentada em *1 mg/ml*. Para alcançar este volume do modo mais fácil e economizar material, optou-se por um viveiro no formato de cubo, com arestas internas de 1 m de comprimento (LEACHENSKI, 2017).

No entanto, foi contratado um pedreiro com pouca experiência ou atrapalhado para construir esse viveiro. Na primeira tentativa, ele construiu um viveiro com arestas internas de *1 m* de comprimento, mas esqueceu de considerar o reboco. Quando rebocou e impermeabilizou as paredes internas do viveiro, ele ficou, na verdade, com *99 cm* de aresta. Assim, o volume final do viveiro ficou com:

$$V = (0,99)^3\ m^3$$

Se o produtor acrescentar *1 kg* do suplemento, como era sua intenção, qual será a porcentagem de acréscimo no aumento da concentração do suplemento na água?

O problema consiste na divisão da unidade inicial do produto, diluída no novo volume:

$$\frac{1}{(1\ -\ 0,01)^3}$$

Deve-se calcular $(1-\ 0,01)^{-3}$, que por sua vez pode ser escrito como:

$$(1 + 0,01)^{-3} = 1 - 3\ .\ (0,01) + \frac{-3\,.-4\,.(-0,01)^2}{2!} + \frac{-3\,.-4\,.-5\ .\ (-0,01)^3}{3!} + \frac{-3\,.-4\,.-5\,.-6\,.\ (-0,01)^4}{4!} \ldots$$

E, se utilizar como aproximação os primeiros 5 termos, o que é aceitável, então:

$$(1 - 0{,}01)^{-3} \approx 1 + 0{,}03 + 0{,}0006 + 0{,}00001 + 0{,}00000015$$

Isto é:

$$(1 - 0{,}01)^{-3} \approx 1,\ 0306015$$

Dessa forma, o aumento da concentração do suplemento quanto ao pretendido originalmente foi de cerca de *3,06%*.

Entretanto, se além de esquecer do reboco, o pedreiro se confundiu mais um pouco e usou um metro (instrumento de medição) que na verdade estava com *99 cm*, e acabou deixando a aresta interna com *0,98 cm* de comprimento?

Para não mencionar todas as confusões que o pedreiro poderia ter feito, acabando por deixar a medida interna com $1 + x$ metros onde $0 < x < 1$, e x é dado em centímetros, qual será a porcentagem de erro nesses casos?

Para responder a esta pergunta, calcula-se, de uma forma geral, usando:

$$\frac{1}{(1+x)^3} = (1 + x)^{-3} = 1 - 3 \,.\, (x) + \frac{-3 \,.\, -4 \,.\, (x)^2}{2!} + \frac{-3 \,.\, -4 \,.\, -5 \,.\, (x)^3}{3!} + \frac{-3 \,.\, -4 \,.\, -5 \,.\, -6 \,.\, (x)^4}{4!} \ldots$$

Donde, pode-se concluir que a alteração da concentração do suplemento, em porcentagem, pode ser expressa como a soma:

$$-\,3\,x + 6\,x^2 - 10\,x^3 + 15\,x^4 \ldots$$

O método acima não é o mais fácil de ser trabalhado quando se quer obter apenas um valor em uma situação específica (por exemplo, na situação anterior, onde a aresta interna ficou com *99 cm* de comprimento), mas se aplicado também obtém o valor desejado com completa precisão. Tem a grande vantagem de poder ser aplicado a qualquer outra situação hipotética que surja, mostrando, dessa forma, uma das maravilhas da matemática, a capacidade de abstração e generalização.

CAPÍTULO V – SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Neste capítulo são apresentadas as etapas construídas e aplicadas na sequência didática. Esses passos foram criados em oito etapas com objetivos específicos e, ao mesmo tempo, interligados.

Os objetivos gerais são: proporcionar embasamento necessário e suficiente, referente aos conhecimentos adquiridos, proporcionando aos discentes as melhores condições para compreender novos fundamentos; reconhecer a interrelação entre os assuntos; ativar o raciocínio lógico e a capacidade de abstração dos alunos; desenvolver a capacidade de analisar, relacionar, comparar, classificar, ordenar, sintetizar, generalizar e criar; desenvolver a capacidade de obter, a partir de condições dadas, resultados válidos em situações novas; desenvolver no aluno o espírito de observação, a capacidade de raciocínio, explorar o senso crítico, o acerto e a presteza dos cálculos construindo uma maturidade matemática.

A primeira etapa trata de fatorial; a segunda foca a apropriação do conceito de princípio fundamental da contagem (P.F.C.); a terceira, quarta e quinta etapas exploram arranjo simples, combinação simples e permutação simples respectivamente; a sexta etapa realiza uma tratativa do Triângulo de Pascal; a sétima etapa destaca o Binômio de Newton; e a oitava e última etapa aborda o Polinômio de Leibniz.

A sequência didática proposta é somente uma sugestão de trabalho que objetiva propiciar o diálogo entre os conteúdos de Matemática descritos acima, de forma a despertar interesse junto aos alunos do Ensino Médio. As habilidades a serem trabalhadas são o desenvolvimento do raciocínio lógico, matemático e manipulação algébrica.

O método utilizado em todas as etapas são aulas expositivas; uso de livro didático e de paradidático; exercícios de fixação, propostos e desafios. As atividades desenvolvidas em sala de aula e/ou em casa, em grupos e/ou individualmente, tem sempre a figura do professor como o mediador entre o aluno e o conhecimento, de forma a estimular o discente mais do que somente aprender, a criar suas próprias ideias, ou seja, aprender a aprender.

Os procedimentos de avaliação da aprendizagem devem ser usados como instrumento norteador das ações desenvolvidas pelo docente em sala de aula, isto é, a aferição deve ser feita de forma diagnóstica e não punitiva. Ao avaliar, o professor deve lembrar de que tal processo é bidirecional, ou seja, a avaliação qualifica não somente o desempenho do aluno, mas também a prática pedagógica do docente. Trata-se de um processo auto avaliativo.

O processo avaliador deve ser contínuo e pode ser realizado empregando os seguintes meios: observação das atividades previstas; testes; trabalhos individuais e provas.

Foram elaborados uma bateria de exercícios para todas as etapas: 24 exercícios de fixação,16 exercícios propostos e 8 desafios, totalizando 48 exercícios.

5.1 Etapa I – Fatorial

a) Objetivos específicos

Entender o conceito de fatorial e realizar operações com fatorial.

b) Planejamento e cronograma de execução

Realização de 4 aulas de 50 minutos cada.

São apresentados, a seguir, 3 exercícios de fixação; 2 exercícios propostos; e 1 exercício desafio. Todos têm as respostas com as suas respectivas sugestões.

Exercícios de fixação:

1)(Fei-96) Se (n+4)! + (n+3)! = 15(n+2)!, então:

a) n = 4

b) n = 3

c) n = 2

d) n = 1

e) n = 0

2)(Fei-96) A expressão $n!3^{n+1}/[3^{n-2}(n+2)!]$ é equivalente a:

a) $27/(n^2+3n+2)$

b) (n-1)/(9n+18)

c) n + 1

d) $27n^2 + 81n + 54$

e) 27n + 54

3)(Unitau-95) Sendo n $\neq 0$, o(s) valor(es) de n tal que [(n+1)!-n!]/(n-1)! =7n são:

a) 7

b) 0 e 7

c) 0 e 10

d) 1

e) 0 e 2

Exercícios Propostos:

1)(Unaerp-96) Se [x!(x+1)!]/(x-1)!x! = 20, então x vale:

a) – 6 b) – 5 c) 4 d) 5 e) 6

2)(UElondrina-96) A solução n da equação a seguir é um número inteiro múltiplo de:

$$\frac{\binom{n+1}{4}}{\binom{n-1}{2}} = \frac{7}{2}$$

a) 11 b) 9 c) 7 d) 5 e) 3

Desafio:

1)(UFF-99) Escreva usando fatorial, o produto 20 . 18. 16. 14. ... .6 . 4 . 2 é equivalente a:

a) 20! / 2

b) 2.10!

c) 20! / 2^{10}

d) 2^{10}.10!

e) 20! / 10!

5.2 Etapa II – Princípio Fundamental da Contagem (P.F.C.)

a) Objetivos específicos

Entender e usar o princípio fundamental de contagem na resolução de problemas, aplicando as técnicas de contagem.

b) Planejamento e cronograma de execução

Realização de 6 aulas de 50 minutos cada.

São apresentados, a seguir, 3 exercícios de fixação; 2 exercícios propostos; e 1 exercício desafio. Todos têm as respostas com as suas respectivas sugestões.

Exercícios de fixação:

4)(Uelondrina-96) Para responder a certo questionário, preenche-se o cartão apresentado a seguir, colocando-se um "x" em uma só resposta para cada questão.

CARTÃO RESPOSTA					
QUESTÕES	1	2	3	4	5
SIM	☐	☐	☐	☐	☐
NÃO	☐	☐	☐	☐	☐

De quantas maneiras distintas pode-se responder a esse questionário?

a) 3 125

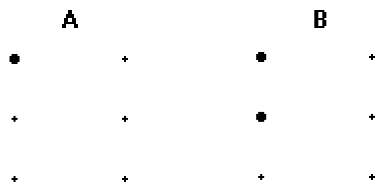
b) 120

c) 32

d) 25

e) 10

5)(Fuvest-92) A escrita Braille para cegos é um sistema de símbolos onde cada caractere é formado por uma matriz de 6 pontos dos quais pelo menos um se destaca em relação aos outros. Assim por exemplo:



Qual o número máximo de caracteres distintos que podem ser representados neste sistema de escrita?

a) 63

b) 89

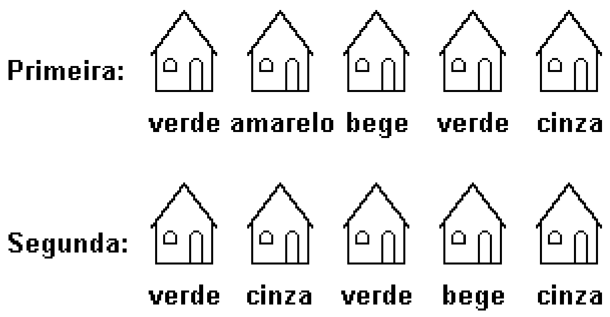
c) 26

d) 720

e) 36

6)(UFRJ-97) Um construtor dispõe de quatro cores (verde, amarelo, cinza e bege) para pintar cinco casas dispostas lado a lado. Ele deseja que cada casa seja pintada com apenas uma cor e que duas casas consecutivas não possuam a mesma cor.

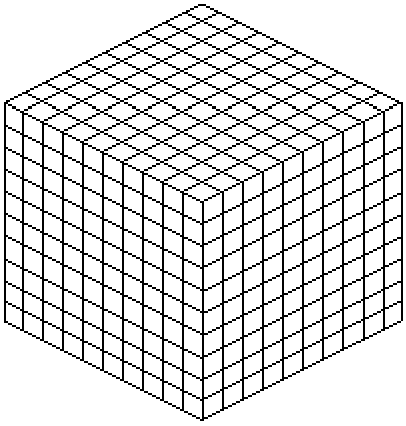
Por exemplo, duas possibilidades diferentes de pintura seriam:



Determine o número de possibilidades diferentes de pintura:

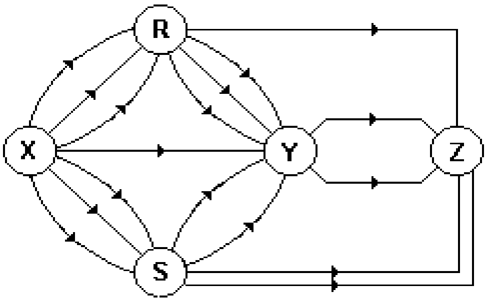
Exercícios Propostos:

3)(UFRJ-98) Um marceneiro cortou um cubo de madeira maciça pintado de azul em vários cubos menores da seguinte forma: dividiu cada aresta em dez partes iguais e traçou as linhas por onde serrou, conforme indica a figura a seguir.



Determine o número de cubos menores que ficaram sem nenhuma face pintada de azul:

4)(UFMG-98) Observe o diagrama abaixo.



O número de ligações distintas entre X e Z é:

a) 39

b) 41

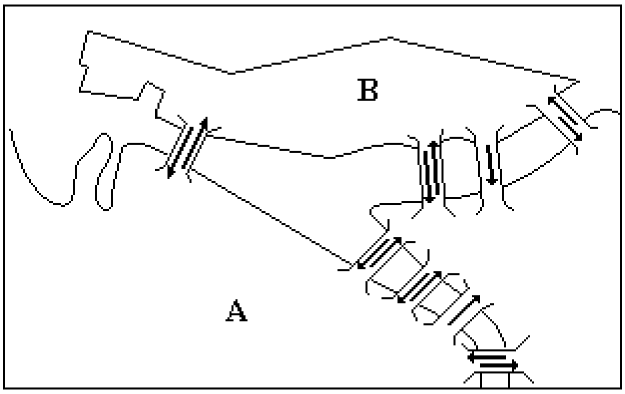
c) 35

d) 45

e) 55

Desafio:

2)(UFPE-96) Na figura a seguir temos um esboço de parte do centro da cidade do Recife com suas pontes. As setas indicam o sentido do fluxo de tráfego de veículos. De quantas maneiras, utilizando apenas o esboço, poderá uma pessoa ir de carro do ponto A ao ponto B (marco zero) e retornar ao ponto de partida passando exatamente por três pontes distintas?



a) 8

b) 13

c) 17

d) 18

e) 20

5.3 Etapa III – Arranjo Simples

a) Objetivos específicos

Entender e desenvolver o conceito e resolver problemas sobre o assunto aplicando o PFC sempre que possível.

b) Planejamento e cronograma de execução

Realização de 6 aulas de 50 minutos cada.

A seguir, são apresentados3 exercícios de fixação; 2 exercícios propostos; e 1 exercício desafio. Todos têm as respostas com as suas respectivas sugestões.

Exercícios de fixação:

7)(FUVEST-08) O número de anagramas da palavra FUVEST que terminam e começam com vogal é:

a) 144 b) 120 c) 96 d) 48 e) 24

8)(Mackenzie-98) Os números pares com 4 algarismos distintos, que podemos obter com os elementos do conjunto {0; 3; 4; 5; 6; 7; 8}, são em número de:

a) 6^3 b) 420 c) 5.6^2 d) 5.4^3 e) 380

9)(UFMG-94) Considere formados e dispostos em ordem crescente todos os números que se obtêm permutando os algarismos 1, 3, 5, 7 e 9. O número 75391 ocupa, nessa disposição, o lugar:

a) 21° b) 64° c) 88° d) 92° e) 120°

Exercícios Propostos:

5)(Cesgranrio-95) Durante a Copa do Mundo, que foi disputada por 24 países, as tampinhas de Coca-Cola traziam palpites sobre os países que se classificariam nos três primeiros lugares (por exemplo: 1° lugar, Brasil; 2° lugar, Nigéria; 3° lugar, Holanda).
Se, em cada tampinha, os três países são distintos, quantas tampinhas diferentes poderiam existir?

a) 69 b) 2024 c) 9562 d) 12144 e) 13824

6)(UFMG-95) Duas das cinqüenta cadeiras de uma sala serão ocupadas por dois alunos. O número de maneiras distintas possíveis que esses alunos terão para escolher duas das cinqüenta cadeiras, para ocupá-las, é:

a) 1225

b) 2450

c) 2^{50}

d) 49!

e) 50!

Desafio:

3)(FGV-95) Uma pessoa vai retirar dinheiro num caixa eletrônico de um banco mas, na hora de digitar a senha, esquece-se do número. Ela lembra que o número tem 5 algarismos, começa com 6, não tem algarismos repetidos e tem o algarismo 7 em alguma posição. O número máximo de tentativas para acertar a senha é:

a) 1680

b) 1344

c) 720

d) 224

e) 136

5.4 Etapa IV – Permutação Simples

a) Objetivos específicos

Entender o conceito de permutação simples e resolver problemas sobre o assunto.

b) Planejamento e cronograma de execução

Realização de 6 aulas de 50 minutos cada.

Abaixo, são propostos 3 exercícios de fixação; 2 exercícios propostos; e 1 exercício desafio. Todos têm as respostas com as suas respectivas sugestões.

Exercícios de fixação:

10)(Mackenzie-98) Cada um dos círculos da figura a seguir deverá ser pintado com uma cor, escolhida dentre quatro disponíveis. Sabendo que dois círculos consecutivos nunca serão pintados com a mesma cor, então o número de formas de se pintar os círculos é:

a) 7^4

b) 7! . 4!

c) 3 . 7!

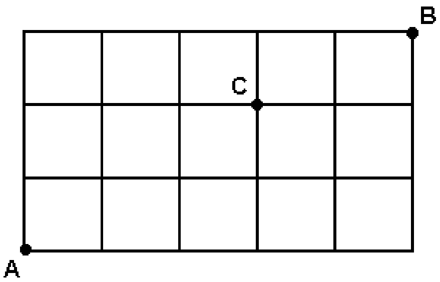
d) 4^7

e) 2916

11)(PUCcamp-98) O número de anagramas da palavra EXPLODIR, nos quais as vogais aparecem juntas, é:

a) 360 b) 720 c) 1.440 d) 2.160 e) 4.320

12)(UFRS-98) No desenho a seguir, as linhas horizontais e verticais representam ruas, e os quadrados representam quarteirões. A quantidade de trajetos de comprimento mínimo ligando A e B que passam por C é:



a) 12 b) 13 c) 15 d) 24 e) 30

Exercícios Propostos

7)(Fuvest-98) Com as 6 letras da palavra FUVEST podem ser formadas 6!=720 "palavras" (anagramas) de 6 letras distintas cada uma. Se essas "palavras" forem colocadas em ordem alfabética, como num dicionário, a 250ª "palavra" começa com:

a) EV

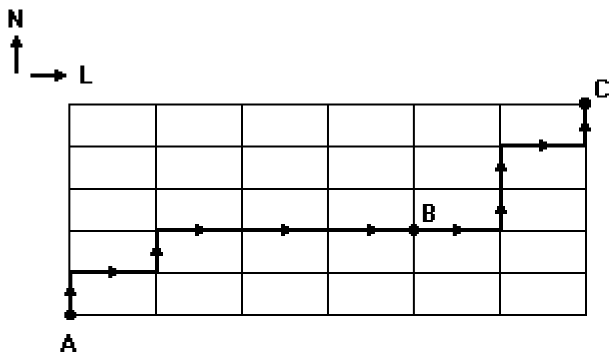
b) FU

c) FV

d) SE

e) SF

8)(Fuvest-93) A figura a seguir representa parte do mapa de uma cidade onde estão assinalados as casas de João(A), de Maria(B), a escola(C) e um possível caminho que João percorre para, passando pela casa de Maria, chegar à escola. Qual o número total de caminhos distintos que João poderá percorrer, caminhando somente para o Norte ou Leste, para ir de sua casa à escola, passando pela casa de Maria?



Desafio:

4)(ITA-98) O número de anagramas da palavra VESTIBULANDO, que não apresentam as cinco vogais juntas, é:

a) 12!

b) (8!) (5!)

c) 12! - (8!) (5!)

d) 12! - 8!

e) 12! - (7!) (5!)

5.5 Etapa V– Combinação Simples

a) Objetivos específicos

Trabalhar o conceito de combinação simples e resolver problemas sobre o assunto.

Identificar quando usar permutação, arranjo ou combinações.

b) Planejamento e cronograma de execução

Realização de 6 aulas de 50 minutos cada.

São propostos, abaixo, 3 exercícios de fixação; 2 exercícios propostos; e 1 exercício desafio. Todos têm as respostas com as suas respectivas sugestões.

Exercícios de fixação:

13)(UERJ-07) Sete diferentes figuras foram criadas para ilustrar, em grupos de quatro, o Manual do Candidato do Vestibular Estadual 2007. Um desses grupos está apresentado a seguir.

Considere que cada grupo de quatro figuras que poderia ser formado é distinto de outro somente quando pelo menos uma de suas figuras for diferente. Nesse caso, o número total de grupos distintos entre si que poderiam ser formados para ilustrar o Manual é igual a:

a) 24 b) 35 c) 70 d) 140 e) 80

14) Uma comissão de cinco alunos deve ser formada para discutir e planejar o desenvolvimento das partes esportiva de sua escola. Sabendo-se que estes cinco alunos devem ser escolhidos de um grupo de 10 alunos, então o número possível de escolha é:

a) 360

b) 180

c) 21600

d) 252

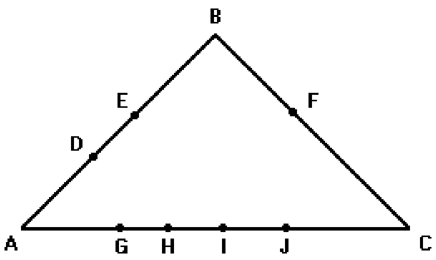
e) 210

15)(Unitau-95) O número de maneiras que se pode escolher uma comissão de três elementos num conjunto de dez pessoas é:

a) 120 b) 210 c) 102 d) 220 e) 110

Exercícios Propostos:

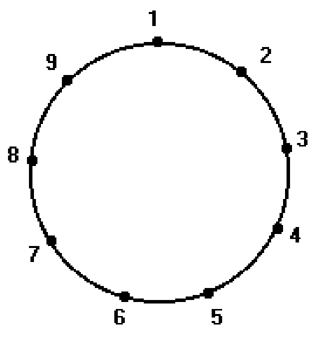
9)(UFMG-94) Observe a figura abaixo.



Nessa figura, o número de triângulos que se obtém com vértices nos pontos D, E, F, G, H, I, J é:

a) 20 b) 21 c) 25 d) 31 e) 35

10)(Mackenzie-97) Os polígonos de k lados (k múltiplo de 3), que podemos obter com vértices nos 9 pontos da figura abaixo, são em número de:



a) 83

b) 84

c) 85

d) 168

e) 169

Desafio:

5)(Mackenzie-02) 12 professores, sendo 4 de matemática, 4 de geografia e 4 de inglês, participam de uma reunião com o objetivo de formar uma comissão que tenha 9 professores, sendo 3 de cada disciplina. O número de formas distintas de se compor essa comissão é:

a) 64

b) 36

c) 48

d) 16

e) 108

5.6 Etapa VI– Triângulo de Pascal

a) Objetivos específicos

Construir o Triângulo de Pascal e por meio dele solucionar problemas de desenvolvimento de binômios.

b) Planejamento e cronograma de execução

Realização de 6 aulas de 50 minutos cada.

São apresentados 3 exercícios de fixação; 2 exercícios propostos; e 1 exercício desafio. Todos têm as respostas com as suas respectivas sugestões.

Exercícios de fixação:

16) Calcule o valor de $\sum_{k=0}^{10}\binom{10}{k}$:

17) Se um número natural **n** é tal que $\binom{10}{5}+\binom{10}{6}+\binom{11}{7}=\binom{12}{n^2-2}$, então **n** é:

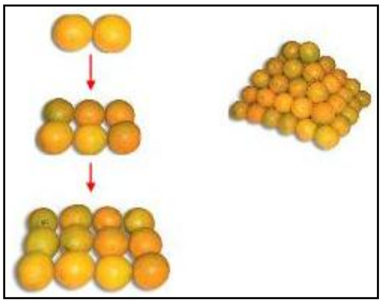
a) igual a 6 ou – 6 b) um número par c) um quadrado perfeito

d) divisor de 15 e) um número primo

18) Um palácio tem 7 portas. De quantos modos pode ser aberto o palácio?

Exercícios Propostos:

11) Em uma barraca de frutas, as laranjas são arrumadas em camadas retangulares, obedecendo à seguinte disposição: uma camada de duas laranjas encaixa-se sobre uma camada de seis; essa camada de seis encaixa-se sobre outra de doze; e assim por diante, conforme a ilustração a seguir.



Sabe-se que a soma dos elementos de uma coluna do triângulo de Pascal pode ser calculada pela fórmula $C_p^p + C_{p+1}^p + C_{p+2}^p + ... + C_n^p = C_{n+1}^{p+1}$, na qual **n** e **p** são números naturais, **n** ≥ **p** e C_n^p corresponde ao número de combinações simples de **n** elementos tomados **p** a **p**. Com base nessas informações, calcule:

a) a soma 1 + $C_2^2 + C_3^2 + C_4^2 + ... + C_{18}^2$;

b) o número total de laranjas que compõem quinze camadas mais 20.

12)(UFC-00) Se $\sum_{p=0}^{m} \binom{m}{p} 3^p = 256$, então calcule o valor de m:

Desafio:

6)(ITA-95) Para cada n ∈ N, temos que: $1 - \binom{4n}{2} + \binom{4n}{4} - ... - \binom{4n}{4n-2} + 1$ é igual a:

a) $(-1)^n 2^{2n}$

b) 2^{2n}

c) $(-1)^n 2^n$

d) $(-1)^{n+1} 2^{2n}$

e) $(-1)^{n+1} 2^n$

5.7 Etapa VII – Binômio de Newton

a) Objetivos específicos

Trabalhar o conceito de número binomial e suas propriedades bem como deduzir e desenvolver binômios de Newton.

b) Planejamento e cronograma de execução

Realização de 6 aulas de 50 minutos cada.

São apresentados, a seguir, 3 exercícios de fixação; 2 exercícios propostos; e 1 exercício desafio. Todos têm as respostas com as suas respectivas sugestões.

Exercícios de fixação:

19)(PUCmg-97) No desenvolvimento de $[x + (a/x)]^7$, com $a > 0$, o coeficiente do termo em x^3 é 84. O valor de a é:

a) 2 b) 3 c) 4 d) 5 e) 6

20)(UECE-97) O coeficiente de x^6 no desenvolvimento de $(\sqrt{2} \,.\, X^2 + 2)^5$ é:

a) $40\sqrt{2}$

b) $48\sqrt{2}$

c) $60\sqrt{2}$

d) $80\sqrt{2}$

e) 50

21)(UECE-96) Se m e q são, respectivamente, os coeficientes de x^5 e x^7 no desenvolvimento de $(x+1/\sqrt{3})^9$, então m+q é igual é igual a:

a) 23 b) 24 c) 25 d) 26 e) 27

Exercícios Propostos:

13)(UElondrina-94) Se um dos termos do desenvolvimento do binômio $(x+a)^5$, com $a \in \mathbb{R}$, é $80x^2$, então o valor de a é:

a) 6 b) 5 c) 4 d) 3 e) 2

14)(Fei-94) A soma de todos os coeficientes do desenvolvimento de $(14x - 13y)^{237}$ é:

a) 0

b) 1

c) -1

d) 331.237

e) 1.973.747

Desafio:

7)(Fund. de Matemática Elementar – Vol.5) Calcule aproximadamente $(1{,}002)^{20}$, usando o Teorema Binomial:

5.8 Etapa VIII – Polinômio de Leibniz

a) Objetivos específicos

Entender o conceito de polinômios, solucionar problemas sobre o assunto usando a fórmula de Leibniz e com soluções alternativas.

b) Planejamento e cronograma de execução

Realização de 6 aulas de 50 minutos cada.

São sugeridos 3 exercícios de fixação; 2 exercícios propostos; e 1 exercício desafio. Todos têm as respostas com as suas respectivas sugestões.

Exercícios de Fixação:

22) Determine quatro mais o termo independente de x em $(1 + x + 2/x)^3$:

23) Qual é a soma de 2 com o coeficiente de x^8 no desenvolvimento de $(1 + x^2 - x^3)^9$?

24) Determine a soma de 10 com o coeficiente de x^3 no desenvolvimento de $(1 + 3x + 2x^2)^{10}$:

Exercícios Propostos:

15) Calcular o 4º termo de $(1 – x^2)^{1/2}$:

16) Calcular a 5º termo de $(x + 2x^2)^{-2}$:

Desafio

8) Calcular a soma dos coeficientes dos termos do desenvolvimento de $(x + a)^6$, sem efetuá-lo, verificar o resultado mediante a construção do triângulo de Pascal correspondente:

RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

Exercício – 1:

Resposta: Letra E. Sugestão: Aplicar a definição de fatorial e simplificar ao máximo.

Exercício – 2:

Resposta: Letra A. Sugestão: Aplicar a definição de fatorial e simplificar ao máximo.

Exercício – 3:

Resposta: Letra A. Sugestão: Aplicar a definição de fatorial e simplificar ao máximo.

Exercício – 4:

Resposta: Letra C. Sugestão: 2^5

Exercício – 5:

Resposta: Letra A. Sugestão: 2^6-1

Exercício – 6:

Resposta: 324. Sugestão: Aplicar o conceito do Princípio Fundamental da Contagem.

Exercício – 7:

Resposta: Letra D. Sugestão: 2.1.4!

Exercício – 8:

Resposta: Letra B. Sugestão: 4.6.5.4 – 1.3.4.5

Exercício – 9:

Resposta: Letra C. Sugestão: 4! + 4! + 4! + 3! + 3! + 2! + 2!

Exercício – 10:

Resposta: Letra E. Sugestão: 4.3.3.3.3.3.3

Exercício – 11:

Resposta: Letra E. Sugestão: 3!6!

Exercício – 12:

Resposta: Letra E. Sugestão: $P_5^{3,2} . P_3^{2,1}$

Exercício – 13:

Resposta: Letra B. Sugestão: $C_{7,4}$

Exercício – 14:

Resposta: Letra D. Sugestão: $C_{10,5}$

Exercício – 15:

Resposta: Letra A. Sugestão: $C_{10,3}$

Exercício – 16:

Resposta: 1024. Sugestão: Utilize uma propriedade do triângulo de Pascal.

Exercício – 17:

Resposta: D. Sugestão: Aplicar a Relação de Stifel.

Exercício – 18:

Resposta: 127. Sugestão: Há C_7^1 modos de abrir o palácio abrindo uma só porta; C_7^2 modos de abrir o palácio abrindo duas portas, etc. Então, o número de modos de abrir o palácio é:

$$C_7^1 + C_7^2 + \ldots + C_7^7 = 2^7 - C_7^0 = 128 - 1 = 127.$$

Exercício – 19:

Resposta: Letra A. Sugestão: Aplicar o Teorema Binomial

Exercício – 20:

Resposta: Letra D. Sugestão: Aplicar o Teorema Binomial

Exercício – 21:

Resposta: Letra D. Sugestão: Aplicar o Teorema Binomial

Exercício – 22:

Resposta: 17. Sugestão: Aplicar a Fórmula de Leibniz

Exercício – 23:

Resposta: 380. Sugestão: Aplicar a Fórmula de Leibniz.

Exercício – 24:

Resposta: 3790. Sugestão: Aplicar a Fórmula de Leibniz

RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Exercício – 1:

Resposta: Letra C. Sugestão: Aplicar a definição de fatorial e simplificar ao máximo.

Exercício – 2:

Resposta: E. Sugestão: Aplicar a definição de número binomial e simplificar ao máximo.

Exercício – 3:

Resposta: 544. Sugestão: 1000 - 456

Exercício – 4:

Resposta: Letra B. Sugestão: 3.3.2 + 3.1 + 3.2 + 3.2.2 + 1.2

Exercício – 5:

Resposta: Letra D. Sugestão: 24.23.22

Exercício – 6:

Resposta: Letra B. Sugestão: 50.49

Exercício – 7:

Resposta: Letra D. Sugestão: 5! + 5! + 4!

Exercício – 8:

Resposta: 150. Sugestão: $P_6^{2,4}.P_5^{2,3}$

Exercício – 9:

Resposta: Letra D. Sugestão: $C_{7,3}-C_{4,3}$

Exercício – 10:

Resposta: Letra E. Sugestão: $C_{9,3}+C_{9,6}+C_{9,9}$

Exercício – 11:

Resposta: a) 970. Sugestão: Utilize uma propriedade do triângulo de Pascal.

b) 1380. Sugestão: Aplicar o conceito de PA de 2º ordem.

Exercício – 12:

Resposta: 4. Sugestão: $(1+3)^m = 2^8$

Exercício – 13:

Resposta: Letra E. Sugestão: Aplicar o Teorema Binomial

Exercício – 14:

Resposta: Letra B. Sugestão: Fazer $x = 1$ e $y = 1$

Exercício – 15:

Resposta: $T_4 = \frac{1}{16}x^6$. Sugestão: Aplicar o conceito apresentado na página 73.

Exercício – 16:

Resposta: $T_5 = 80x^2$. Sugestão: Aplicar o conceito apresentado na página 73.

RESPOSTAS DOS DESAFIOS

Exercício – 1:

Resposta: Letra D. Sugestão: Fatorar cada termo e aplicar propriedade de potenciação.

Exercício – 2:

Resposta: Letra C. Sugestão: 1.3.3 + 4.2.1

Exercício – 3:

Resposta: Letra B. Sugestão: 1.8.7.6.4

Exercício – 4:

Resposta: Letra C. Sugestão: Calcular todas as possibilidades e diminuir das que não convém.

Exercício – 5:

Resposta: Letra A. Sugestão: $C_{4,3} \cdot C_{4,3} \cdot C_{4,3}$

Exercício – 6:

Resposta: Letra A. Sugestão: Aplicar propriedade do Triângulo de Pascal.

Exercício – 7:

Resposta: 1,04. Sugestão: Vamos mostrar que $(1 + x)^n \cong 1 + nx$, para *nx* pequeno. De fato:

$$(1 + x)^n = \binom{n}{1} \cdot 1 + \binom{n}{1} \cdot x + \binom{n}{1} \cdot x^2 + \ldots \binom{n}{1} \cdot x^n$$

$$(1 + x)^n = 1 + nx + \frac{n \cdot (n-1)}{2!} \cdot x^2 + \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{3!} \cdot x^3 + \ldots + x^n \text{ . Porém,}$$

$$\left|\frac{n \cdot (n-1)}{2!}\right| < \left|\frac{n^2x^2}{2}\right| \quad \text{e} \quad \left|\frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot x^3}{3!}\right| < \left|\frac{n^3x^3}{3!}\right| \quad .$$

Se *nx* é pequeno (próximo de zero), então n^2x^2, n^3x^3, etc são muito pequenos, comparados com *nx* , então, desprezando os termos do desenvolvimento a partir do 3º termo, teremos: $(1 + x)^n \cong 1 + nx$. No nosso exemplo: $(1{,}002)^{20} = (1 + 0{,}002)^{20} \cong 1 + 20 \cdot 0{,}002 = 1{,}04$.

Exercício – 8:

Resposta: 64. Sugestão: Aplicar os conceitos apresentados nas páginas 22 e 33.

CONCLUSÃO

Com base em minha experiência profissional como professor do Ensino Médio pude observar que, muitas vezes, os estudantes apresentavam sérias deficiências em matemática, principalmente, em combinatória e probabilidade. Eles tinham conhecimento apenas de fórmulas, não entendendo suas aplicações, enquanto que em outros casos, apresentavam completo desconhecimento em tais matérias e, grande parte deles, não conseguiam solucionar problemas simples de contagem do Ensino Fundamental.

Neste trabalho propus-me a abordar esses assuntos, uma vez que eu conseguia, de forma significativa, motivá-los a se interessar pelo estudo de combinatória e probabilidade, melhorando a aprendizagem dos estudantes e, com frequência, a admiração por tais assuntos. Observei que despertou nos alunos uma vontade de aprofundar mais o conhecimento adquirido até aquele momento e, mesmo para os alunos que não apresentavam muito interesse aparente pela matemática, quando tais assuntos eram abordados, era demonstrada uma admiração, em especial, quando os exercícios aplicados estavam atrelados às situações do dia a dia, como, por exemplo, o jogo da Mega-Sena.

Destaca-se no último capítulo a apresentação de uma sequência didática, onde o discente pode desenvolver sua capacidade de relacionar a matemática com problemas práticos, motivando seu espírito crítico e criativo, com o propósito de compreender o inter-relacionamento dos inúmeros assuntos abordados.

Cabe ressaltar a relevância desses assuntos, uma vez que o teorema binomial e o teorema multinomial são empregados na matemática aplicada, como, por exemplo, em genética, o estudante precisa calcular probabilidade binomial quando tem problemas com dois prognósticos possíveis (possui ou não uma certa característica genética). Além disso, o conteúdo do Binômio de Newton está inserido nas Diretrizes Curriculares da Educação Básica.

Assim sendo, acredito que o presente trabalho possa resgatar numa perspectiva desafiadora, deixada um pouco de lado, pelo corpo docente. A ausência de interesse dos alunos nas Escolas do Ensino Médio é fruto do pouco valor que se dá as demonstrações aqui expostas e da relação com outros conteúdos matemáticos.

Pude constatar que, ao longo desta singela dissertação fica claro a importância da análise combinatória e o estudo do Binômio de Newton, pela suas aplicações em várias situações do nosso cotidiano, desde que haja o entendimento de como ocorre a expansão binomial. O intuito é contribuir para novas abordagens de atuação e, por consequência, possa ser um tema instigante aos alunos, desenvolvendo de modo significativo sua capacidade de reunir as ideias e de raciocinar logicamente.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, A.; FERREIRA, A. **Aprendendo análise combinatória através da resolução de problemas***:* um estudo com classesde 9º ano do Ensino Fundamental e 2º ano doEnsino Médio. Disponível em:<http://www2.rc.unesp.br/eventos/matematica/ebrapem2008/upload/261-1-A-gt11_almeida_e_ferreira_ta.pdf>.Acesso em: 18 nov. 2018.

BACHX, A; POPPE, L. TAVARES, R. O. **Prelúdio àanálise combinatória**. São Paulo: Nacional, 1975.

BOYER, C.; MERZBACH, U. **História da matemática**. São Paulo: Blucher, 2012.

BRASIL, **Lei nº 9.394**, de 20 de dezembro de 1996 (Lei de Diretrizes e Bases).Brasília, 1996.Disponível em: <http://www.lei-n.9394.gov.br>. Acesso em: 1 mar. 2019.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN+)** – Ensino Médio. 2002. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf>. Acesso em: 15 nov. 2018.

CUNHA, Leandro. **Uma conexão entre binômio de Newton e probabilidade**. Dissertação (Mestrado em matemática), Universidade Federal da Bahia, Salvador, 2017.

CUNHA, Sandro. **O desenvolvimento do binômio de Newton**. Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2013.

DANTE, L. **Matemática:** contexto e aplicações. São Paulo: Ática, 2010.

EVES, H. **Introdução à história da matemática**. São Paulo: Unicamp, 2008.

FERREIRA, C. **Binômio de Newton**, 2015. Disponível em: <http://www.todoestudo.com.br/matematica/binomio-de-newton>. Acesso em: 12 fev. 2019.

FONSECA, M. **É mais fácil ser atingido por um raio do que ganhar na mega-sena**, 2015. Disponível em: <http://www1.folha.uol.com.br/mercado/2015/12/1724077-e-mais-facil-seratingido-por-um-raio-do-que-ganhar-mega-da-virada.shtml>. Acesso em: 11 fev. 2019.

HOMA, A.; GROENWALD, C. Análise combinatória no ensino médio. **Educação Matemática em Revista** - RS(EMR-RS), ano 14, v. 1, n. 14, p. 65-74, 2013.

IEZZI, G.; DOLCE, O.; DEGENSZJZ, D.; PÉRIBO, R. **Matemática**. São Paulo: Atual, 2002.

LEACHENSKI, A.**Binômio de Newton com expoente negativo e fracionário.** Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática). Universidade Estadual de Ponta Grossa, Ponta Grossa, Paraná, 2017.

MACHADO, A. **Matemática**: temas e metas. São Paulo: Atual, 1986.

MENEZES, D. **Abecedário da álgebra**. V. 2, 2. ed. Belo Horizonte: O Evoluir, 1959.

MIRANDA, D. **Binômio de Newton**. Disponível em: <http://brasilescola.uol.com.br/matematica/binomio-de-newton.html> Acesso em: 2 out.2018.

MORAIS, S. **Probabilidade na mega-sena.** Monografia (Graduação em Licenciatura em Matemática), Universidade Estadual de Goiás, Anápolis,2012.

MORGADO, A. et al. **Análise combinatória e probabilidade**. Rio de Janeiro: Impa/Vitae, 1996.

MUNSIGNATTI JR., M. Combinatória: números de soluções inteiras e não negativas de uma equação. **Revista do Professor de Matemática**. SãoPaulo: SBM, v.28, n.73, 3ºquadrimestre, 2010.

NOBRE, S. Leitura crítica da história: reflexões sobre a história da matemática. **Ciência & Educação**, v. 10, n. 3, p. 531-543, 2004. Disponível em: <https://repositorio.unesp.br/bitstream/handle/11449/26461/S1516-73132004000300015.pdf?sequence=1&isAllowed=y>. Acesso em: 9 out. 2018.

SILVA, M. **Chances de ganhar na megasena**. 2015. Disponível em:<http://brasilescola.uol.com.br/matematica/chances-ganhar-na-mega-sena.htm>. Acesso em:12 fev. 2019.

SILVA, P. **Usos do binômio de Newton em diferentes contextos.**Trabalho de Graduação (Graduaçãoem Matemática), Universidade Estadual Paulista, Unesp, Guaratinguetá, São Paulo, 2016.

SILVA, S. **Estudo do binômio de Newton.** Dissertação (Mestrado profissional em matemática), Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2013.Disponível em: <http://tede.biblioteca.ufpb.br/bitstream/tede/7526/2/arquivototal.pdf>. Acesso em: 1out. 2018.

SILVA, M. **Números binomiais**: uma abordagem combinatória para o ensino médio. Dissertação (Mestrado em matemática), Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2015.

TOGNATO II, J. O. **O binômio de Newton**. Trabalho de Graduação (Graduaçãoem Matemática), Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2013.

Disponível em:<http://www.biografiaisaacnewton.com.br/p/resumo-vida-e-obra-de-isaac-newton.html>. Acesso em: 8 fev. 2019.

Disponível em: <http://www.brasilescola.com/matematica/leibniz.htm>. Acesso em: 9 fev. 2019.

Disponível em: <http://www.ebiografia.com/gottfried_leibniz>. Acesso em: 9 fev. 2019.

Disponível em:<http://www.gigasena.com.br/loterias/megasena/>. Acesso em: 8fev. 2019.

Disponível em:<http://www.canalciencia.ibict.br/personalidades_ciencia/Isaac_Newton.html>. Acesso em: 8 fev. 2019.

Disponível em:<http://www.infoescola.com/biologia/termos-usados-em-genetica/>. Acesso em: 11 fev. 2019.

Disponível em:<http://www.infopedia.pt/dicionarios/lingua-portuguesa/poligenes> Acesso em: 13 fev. 2019.

Disponível em: <http://www.loterias.caixa.gov.br/wps/portal/loterias/landing/megasena/>. Acesso em: 10 fev. 2019.

Disponível em: <http://www.siteastronomia.com/isaac-newton-biografia-vida-e-obra>. Acesso em: 8 fev. 2019.