



Universidade Federal de Mato Grosso  
Instituto de Ciências Exatas e da Terra  
Departamento de Matemática



---

# Um Breve Estudo sobre o Número Áureo e Sequência de Fibonacci

**Zeila Priscila Mollmann**

Mestrado Profissional em Matemática: PROFMAT/SBM

Orientador: **Prof. Dr. Ruikson Sillas de Oliveira Nunes**

Trabalho financiado pela Capes

Cuiabá - MT

Abril de 2019

# Um Breve Estudo sobre o Número Áureo e Sequência de Fibonacci

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação, devidamente corrigida e defendida por Zeila Priscila Mollmann e aprovada pela comissão julgadora.

Cuiabá, 12 de Abril de 2019.

Prof. Dr. Ruikson Sillas de Oliveira Nunes  
Orientador

## **Banca examinadora:**

Prof. Dr. Ruikson Sillas de Oliveira Nunes  
Prof. Dr. Reinaldo de Marchi  
Prof. Dr. Edgar Nascimento

Dissertação apresentada ao curso de Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT, da Universidade Federal de Mato Grosso, como requisito parcial para obtenção do título de **Mestre em Matemática**.

### **Dados Internacionais de Catalogação na Fonte.**

M726b Mollmann, Zeila Priscila.  
Um Breve estudo sobre o Número Áureo e Sequência de Fibonacci / Zeila Priscila Mollmann. -- 2019  
xiii, 43 f. : il. color. ; 30 cm.

Orientador: Ruikson Sillas de Oliveira Nunes.  
Dissertação (mestrado profissional) – Universidade Federal de Mato Grosso, Instituto de Ciências Exatas e da Terra, Programa de Pós-Graduação Profissional em Matemática, Cuiabá, 2019.  
Inclui bibliografia.

1. Potências da Constante de Ouro. 2. Segmento Áureo. 3. Retângulo Áureo. 4. Espiral Logarítmica. 5. Fórmula de Binet. I. Título.

Ficha catalográfica elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

**Permitida a reprodução parcial ou total, desde que citada a fonte.**



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO

PRÓ-REITORIA DE ENSINO DE PÓS-GRADUAÇÃO

Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

Av. Fernando Corrêa da Costa, 2367 - Boa Esperança - 78.060-900 - Cuiabá/MT

Tel: (65) 3615-8576 - E-mail: profmat@ufmt.br

## FOLHA DE APROVAÇÃO

**Título: "Um breve estudo sobre o número áureo e sequência de Fibonacci"**

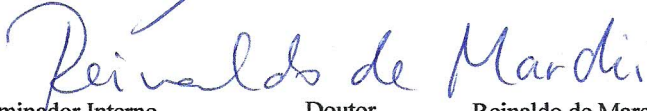
**Autor: Zeila Priscila Mollmann**

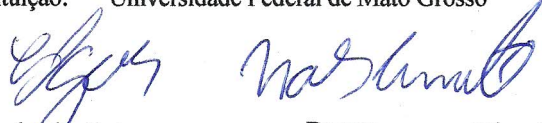
defendida e aprovada em 12/04/2019.

Composição da Banca Examinadora:

---

  
Presidente Banca/Orientador      Doutor      Ruikson Sillas de Oliveira Nunes  
Instituição:      Universidade Federal de Mato Grosso

  
Examinador Interno      Doutor      Reinaldo de Marchi  
Instituição:      Universidade Federal de Mato Grosso

  
Examinador Externo      Doutor      Edgar Nascimento  
Instituição:      Instituto Federal de Mato Grosso

Cuiabá, 12/04/2019.

*Tudo devo ao meu grande Deus.*

# Agradecimentos

Agradeço primeiramente a *Deus*. Além de todos motivos que tenho pra louvá-Lo, Ele me conduziu, Ele segurou minha mão, Ele me ajudou a não desistir mesmo diante dos obstáculos mais difíceis.

Agradeço a minha *Família* pelo apoio e orações, mas em especial ao meu esposo *Gladiston do Nascimento*, que me incentivou, esteve ao meu lado, me ajudou de verdade, te amo muito!

Gratidão também aos meus líderes de trabalho, que me compreenderam, aconselharam e apoiaram nos estudos. Sintam-se parte dessa conquista: *Pr. Levino Santos* e professora *Eleni Wordell*.

Agradeço também a Deus por ter colocado *Prof. Ruikson* para ser o orientador desse trabalho. Foi atencioso e paciente comigo. Sua atuação, conselhos, dicas e direcionamento fizeram toda a diferença. Obrigada por, juntamente com sua esposa, ficar nos sábados de prova, após o por-do-sol, para que eu pudesse realizar as avaliações. Memórias que não se apagarão com o tempo.

Aos que aqui chegaram, vale lembrar as  
palavras sábias de Salomão:

*“O homem sábio é forte, e o homem de  
conhecimento consolida a força.”*

Provérbios 24:5

# Resumo

O propósito deste trabalho é fazer um breve estudo sobre a Razão Áurea e Sequência de Fibonacci, destacando algumas de suas principais propriedades e mostrando como tais conceitos se relacionam. Além disso, propomos uma oficina de Matemática, voltada para alunos de Ensino Médio, onde é possível mostrar aos alunos algumas propriedades do Número de Ouro usando computador, régua e compasso.

**Palavras chave:** Potências da Constante de Ouro, Segmento Áureo, Retângulo Áureo, Espiral Logarítmica, Fórmula de Binet.



# Abstract

The purpose of this research is to perform a brief study about the Golden Ratio and the Fibonacci Sequence, highlighting some of their main properties and showing how such concepts relate to each other. In addition, we suggest a Math workshop, focused on High School students, where it will be possible to demonstrate to the students the Golden Ratio using computer, ruler and compass.

**Keywords:** Gold constant power, Golden Segment, Golden Rectangle, Logarithmic Spiral, Binet's Formula.

# Sumário

Agradecimentos	v
Resumo	vii
Abstract	viii
Lista de figuras	xii
Lista de tabelas	xiii
Introdução	1
<b>1 Número de Ouro</b>	<b>3</b>
1.1 Propriedades Matemáticas do $\phi$	6
1.1.1 Série de Raízes	6
1.1.2 Frações Contínuas	7
1.1.3 Inverso do $\phi$	7
1.1.4 Potências do $\phi$	10
1.2 Propriedades Geométricas	11
1.2.1 Construção da secção áurea	12
1.2.2 Construção de Retângulos de Ouro	15
1.2.3 Construção da espiral de ouro	17
1.3 Aplicações desse número especial	18
<b>2 História e Matemática de Fibonacci</b>	<b>21</b>
2.0.1 O Problema da Reprodução de Coelhos	22
2.0.2 Definição da Sequência de Fibonacci	23
2.1 A Fórmula de Binet	25

2.1.1	A Árvore Genealógica dos Zangões e Fibonacci . . . . .	27
2.2	Propriedades da Sequência de Fibonacci . . . . .	28
2.3	Relação entre Fibonacci e a Razão Áurea . . . . .	32
<b>3</b>	<b>Sugestões de Oficinas</b>	<b>35</b>
3.1	Miss e Mister Áureo . . . . .	35
3.2	Encontrando $\phi$ por meio da Sequência de Fibonacci . . . . .	36
3.3	Construção da Espiral de Ouro . . . . .	37
3.4	Potências de $\phi$ a partir de Fibonacci e da geometria . . . . .	37
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>42</b>
	<b>Apêndice: Material adicional</b>	<b>43</b>

# Lista de Figuras

1.1	Segmento Áureo. . . . .	4
1.2	Segmento Áureo. . . . .	12
1.3	Etapa 01. . . . .	12
1.4	Etapa 02. . . . .	13
1.5	Etapa 03. . . . .	13
1.6	Secção Áurea em Lisboa. . . . .	15
1.7	Passo 01. . . . .	15
1.8	Passo 02. . . . .	16
1.9	Passo 03. . . . .	16
1.10	Passo 04. . . . .	16
1.11	Passo 05. . . . .	17
1.12	Parte 01. . . . .	18
1.13	Parte 02. . . . .	18
1.14	Parte 03. . . . .	18
1.15	Selo Russo do ano 2000, em referência a Torre de Tatlin. . . . .	19
1.16	Las Escalera de Bramonte. . . . .	19
1.17	Régua Áurea. . . . .	20
1.18	Algumas aplicações na Natureza. . . . .	20
2.1	Fibonacci. . . . .	21
2.2	Árvore Genealógica de um zangão. . . . .	28
2.3	Robert Simson. . . . .	33
3.1	Oficina - Miss e Mister Áureo. . . . .	36
3.2	Área e Razões de Esferas geradas por Fibonacci. . . . .	38
3.3	Área e Razões de Cubos gerados por Fibonacci. . . . .	38

3.4	Área e Razões de Triangulos Equiláteros gerados por Fibonacci. . . . .	39
3.5	Volume e Razões de Esferas geradas por Fibonacci. . . . .	39
3.6	Volume e Razões de Cubos gerados por Fibonacci. . . . .	40
3.7	Número $\phi$ com 2000 casas decimais. . . . .	43

# Lista de Tabelas

1.1	Potências de $\phi$ . . . . .	11
2.1	Problema dos Coelhos. . . . .	23
2.2	Observando as Potências de $\phi$ . . . . .	24

# Introdução

“Todas as atividades humanas tem três características distintas, padrão, tempo e razão; todas as quais observam a série de soma de Fibonacci.”

( R. N. Elliott)

Ao longo de sua existência o homem tem procurado observar os padrões existentes nos mais variados campos da ciência. No campo da matemática é possível observar muitas formas padronizadas, como a obtenção do número  $\pi$ , do número  $e$ , as relações de paralelismo, soma de ângulos de polígonos e outros. Talvez uma das formas e padrões mais antigos conhecidos na matemática é a Razão Áurea ou Número de Ouro, o qual denotamos por  $\phi$ . O número áureo se tornou interessante, pois está relacionado a diversos elementos da natureza, arquitetura, música, botânica, além de possuir interessantíssimas propriedades matemáticas.

Outra forma matemática interessante é a Sequência de Fibonacci. Esta sequência, na verdade, é uma modelagem matemática para contar a população de coelhos em um dado tempo, gerados a partir de um único casal. Esta sequência possui muitas propriedades matemáticas. No entanto, a mais curiosa delas foi percebida por Kepler em 1611 e provada depois de mais de 100 anos, por Robert Simson, que diz que a sequência formada pela razão entre dois termos consecutivos da sequência de Fibonacci, isto é, dividindo um termo pelo seu antecessor, converge para  $\phi$ , conforme Lívio (2007) destaca em sua obra.

Neste trabalho estaremos fazendo um breve estudo sobre o número  $\phi$  e a sequência de Fibonacci mostrando, em especial, como estes dois conceitos se relacionam. Estaremos abordando tanto algumas propriedades aritméticas e geométricas relativo a estes conceitos e, além disso, apontaremos relações do número de ouro na botânica, na arquitetura, artes e etc.

Este trabalho está dividido em três capítulos. No primeiro trataremos do número

$\phi$ . Abordaremos alguns pontos históricos sobre a descoberta deste número. Trataremos ainda neste capítulo algumas propriedades aritméticas e geométricas do número  $\phi$ . No segundo capítulo trataremos da sequência de Fibonacci. De forma análoga, primeiramente faremos um pequeno relato histórico da vida pessoal de Fibonacci bem como da famosa sequência numérica que leva seu nome. Além disso, provaremos algumas propriedades aritméticas destacando em especial aquela que relaciona o número  $\phi$  com a sequência de Fibonacci.

Por último, dedicaremos um capítulo final para elaborar sugestões de uma oficina de matemática, para alunos de Ensino Médio, propondo apresentar aos mesmos algumas propriedades aritméticas e geométricas envolvendo o número de ouro.



# Capítulo 1

## Número de Ouro

Desde a antiguidade o homem se viu na necessidade de medir, contar e fazer comparações proporcionais. Isso fez com que várias civilizações, como sumérios, babilônicos, egípcios, gregos e outros, se desenvolvessem matematicamente no campo aritmético e geométrico.

No campo da geometria os gregos se destacaram. No seio das grandes escolas filosóficas se produziu muito conhecimento matemático em geometria e aritmética que possibilitou a Euclides, no século III a.C., a escrever uma coleção de livros intitulado “Elementos”, a qual contempla e expande o conhecimento matemático grego até o seu tempo.

Uma das coisas que mais fascinavam os gregos eram as razões e as proporções. Neste ambiente desenvolveram o conceito de comensurabilidade e em seguida a descoberta dos incomensuráveis (quando eles foram calcular a diagonal de um quadrado comparado com seu lado, segundo Lima (2013)) por Hipaso de Metaponto, um discípulo de Pitágoras. Não há consenso, porém, muitos autores implicam aos pitagóricos a descoberta da “Razão Áurea”, mostrando que a mesma é incomensurável. No entanto, foi Euclides, por volta do ano 300 a.C., que deu a primeira definição clara da Razão Áurea.

Conforme relata Lívio (2007) a Razão Áurea aparece em vários volumes da Coleção Elementos que é formada por treze livros, para ser mais preciso nos volumes II, V, VI e XIII. No entanto, uma definição mais clara da Razão Áurea é encontrada no volume VI. A definição de Razão Àurea dada por Euclides é feita da seguinte maneira:

Considere o seguimento de reta de extremos A e B, respectivamente, o qual será denotado por AB. Agora considerando um ponto C no seguimento AB, conforme pode

ser visto na figura:



Figura 1.1: Segmento Áureo.

O ponto C divide o seguimento AB na Razão Áurea quando a razão do comprimento AB pelo AC for igual a razão do comprimento AC pelo CB, isto é:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{CB} \quad (1.1)$$

Vale a pena lembrar que o termo Razão Áurea não foi usado por Euclides. Este termo pelo que parece foi introduzido no século XIX. Segundo Lívio (2007), este nome ganhou popularidade por volta de 1830 entre os matemáticos alemães e daí se espalhou para o resto do mundo. Nos dias de Euclides a Razão Áurea era denominada por “Razão Extremo e Médio”.

Em termos mais aritméticos podemos conhecer o valor da Razão Áurea, onde tal valor será denotado pela letra  $\phi$ , e é comumente chamado Número de Ouro ou Número Áureo.

Suponhamos que os comprimentos dos seguimentos AC e CB sejam x e y respectivamente. Então da proporção (1.1) segue que:

$$\frac{x+y}{x} = \frac{x}{y} = \phi$$

Analisando a segunda e terceira equações, temos que  $x = y\phi$

Então:

$$\frac{y\phi + y}{y\phi} = \frac{y\phi}{y}$$

Dividindo tudo por  $y$ , teremos:

$$\begin{aligned} \frac{\phi + 1}{\phi} &= \phi \\ \phi^2 &= \phi + 1 \\ \phi^2 - \phi - 1 &= 0 \end{aligned}$$

Desenvolvendo a equação do segundo grau, encontraremos o valor de  $\phi$ :

$$\phi^2 - \phi - 1 = 0$$
$$\phi = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4(-1)}}{2}$$

Logo a única solução positiva para  $\phi$  é:

$$\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$
$$\phi \approx 1,61803398875\dots$$

■

Podemos ver de maneira imediata que o número  $\phi$  é irracional. Isso significa que a representação decimal de  $\phi$  possui infinitas casas decimais após a virgula que não se repetem periodicamente. Para curiosidade do leitor, no apêndice colocaremos a figura do número  $\phi$  com 2000 (Duas mil!) casas decimais conforme (Lívio, 2007, p.100) mostra em seu livro.

Ao longo da história muitos pensadores e estudiosos se interessaram veementemente no estudo da Razão Áurea procurando entender suas propriedades aritméticas e possíveis aplicações nos mais variados campos do conhecimento. Entre esses podemos destacar, os Pitagóricos, Platão, Euclides, Kepler e mais recentemente Édouard Lucas, Binet, Luca Paccioli, dentre outros.

Mas o que tem de tão importante no número  $\phi$  que tantos pensadores se dedicaram a estudá-lo? Por incrível que pareça o número  $\phi$  está presente nos mais variados campos do conhecimento, como na matemática, na astronomia (geometria de algumas galáxias), na arquitetura (Parthenon), nas artes (Monalisa), na botânica (pinhas, girassol, ...) e outros mais.

O uso da letra  $\phi$  para representar o número de ouro foi adotado no início do século XX. Isso se deu pelo fato de muitos pesquisadores entenderem que os arquitetos gregos utilizavam a Razão Áurea para projetar as suas obras arquitetônicas. Dentre esses arquitetos gregos se destacou Phidías, construtor do Parternon. Daí o uso do  $\phi$  se dá em homenagem a este arquiteto.

## 1.1 Propriedades Matemáticas do $\phi$

Existem outras maneiras de obtermos o número  $\phi$ , dentre elas se destacam, por meio de frações contínuas e por série de raízes. A seguir apresentaremos cada uma delas.

### 1.1.1 Série de Raízes

Consideremos a série de raízes:

$$\sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}}} \quad (1.2)$$

Qual o valor dessa expressão? Para encontrarmos o valor dela chamaremos a (1.2) de  $x$ , isto é:

$$\sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}}} = x$$

Elevando ao quadrado cada lado da igualdade temos:

$$1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}} = x^2 \quad (1.3)$$

Note que a parte com raiz da equação (1.3), é a mesma de (1.4), isto é:

$$1 + \underbrace{\sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}}}_x = x^2 \quad (1.4)$$

Assim, a equação (1.4) se torna  $1 + x = x^2$  Daí, segue que:

$$x^2 - x - 1 = 0 \quad (1.5)$$

Logo o valor de  $x$  é a raiz positiva da equação (1.5), isto é:

$$x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$
$$x \approx 1,61803398875\dots,$$

Ou seja, exatamente o valor de  $\phi$ .

### 1.1.2 Frações Contínuas

O número  $\phi$  também pode ser encontrado por meio da fração contínua:

$$1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}}$$

Para encontrarmos o valor da Fração Contínua acima, chamemos-a de  $x$ , isto é:

$$1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}} = x$$

Como é contínua podemos trabalhar essa equação da mesma forma que fizemos na série de raízes anteriormente:

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{x} &= x \\ \frac{1}{x} &= x - 1 \\ x^2 - x &= 1 \\ x^2 - x - 1 &= 0 \end{aligned}$$

Daí, segue que:

$$x = \frac{x^2 - x - 1 = 0}{1 \pm \sqrt{1 - 4(-1)}} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Logo, a única solução positiva para  $x$  é:

$$\begin{aligned} x &= \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \\ x &\approx 1,61803398875\dots, \end{aligned}$$

Ou seja, exatamente o valor de  $\phi$ , agora encontrado a partir das frações contínuas.

### 1.1.3 Inverso do $\phi$

O número  $\phi$  é um número bastante interessante, pois podemos obter o seu inverso, isto é  $\frac{1}{\phi}$ , por apenas subtrair uma unidade dele mesmo. Este, juntamente com a raiz

negativa da equação 1.6, são os únicos números com tal propriedade. Se referindo a esta propriedade foi que o matemático Paul S. Bruckman publicou no *The Fibonacci Quarterly*, em 1977, um poema chamado: “Constantemente Médio”:

*A média áurea é algo absurdo,  
Não é um irracional comum.  
Se você o inverte (isso é divertido!),  
Você a obtém de novo, reduzida de um.  
Mas se pela unidade for somado,  
Acredite, isso dá seu quadrado.*

Para verificação de tal propriedade, note que o  $\phi$  é solução da equação (1.5), daí:

$$\phi^2 = \phi + 1,$$

Dividindo a última equação por  $\phi$ , temos:

$$\phi = \frac{1}{\phi} + 1$$

isto é,

$$\frac{1}{\phi} = \phi - 1$$

Daí, substituindo  $\phi$  pelo seu valor correspondente:  $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ , teremos:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\phi} &= \phi - 1 \\ \frac{1}{\phi} &= \frac{1 + \sqrt{5}}{2} - 1 \\ \frac{1}{\phi} &= \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \\ \frac{1}{\phi} &= 0,61803398875\dots\end{aligned}$$

Logo, a diferença entre  $\phi$  e seu inverso, é exatamente 1 unidade:

$$\phi - \frac{1}{\phi} = 1$$

Deste fato concluímos que os números  $\phi$  e  $\frac{1}{\phi}$  possuem os mesmos dígitos após a vírgula. Veja esses valores com as primeiras 1000 casas decimais, segundo Posamentier e Lehmann (2007):

$$\begin{aligned} \phi = & 1.618033988749894848204586834365638117720309179805762862 \\ & 13544862270526046281890244970720720418939113748475408807 \\ & 53868917521266338622235369317931800607667263544333890865 \\ & 95939582905638322661319928290267880675208766892501711696 \\ & 20703222104321626954862629631361443814975870122034080588 \\ & 79544547492461856953648644492410443207713449470495658467 \\ & 88509874339442212544877066478091588460749988712400765217 \\ & 05751797883416625624940758906970400028121042762177111777 \\ & 80531531714101170466659914669798731761356006708748071013 \\ & 17952368942752194843530567830022878569978297783478458782 \\ & 28911097625003026961561700250464338243776486102838312683 \\ & 30372429267526311653392473167111211588186385133162038400 \\ & 52221657912866752946549068113171599343235973494985090409 \\ & 47621322298101726107059611645629909816290555208524790352 \\ & 40602017279974717534277759277862561943208275051312181562 \\ & 85512224809394712341451702237358057727861600868838295230 \\ & 45926478780178899219902707769038953219681986151437803149 \\ & 9741106926088674296226757560523172777520353613936 \end{aligned}$$

E a representação do inverso:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\phi} = & 0.618033988749894848204586834365638117720309179805762862 \\ & 13544862270526046281890244970720720418939113748475408807 \\ & 53868917521266338622235369317931800607667263544333890865 \\ & 95939582905638322661319928290267880675208766892501711696 \\ & 20703222104321626954862629631361443814975870122034080588 \\ & 79544547492461856953648644492410443207713449470495658467 \\ & 88509874339442212544877066478091588460749988712400765217 \end{aligned}$$

05751797883416625624940758906970400028121042762177111777  
80531531714101170466659914669798731761356006708748071013  
17952368942752194843530567830022878569978297783478458782  
28911097625003026961561700250464338243776486102838312683  
30372429267526311653392473167111211588186385133162038400  
52221657912866752946549068113171599343235973494985090409  
47621322298101726107059611645629909816290555208524790352  
40602017279974717534277759277862561943208275051312181562  
85512224809394712341451702237358057727861600868838295230  
45926478780178899219902707769038953219681986151437803149  
9741106926088674296226757560523172777520353613936

Podemos fazer uma observação com respeito as raízes da equação

$$x^2 - x - 1 = 0$$

A raiz positiva  $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$  é aquele valor que chamamos de  $\phi$ .

A solução negativa para  $x$  é:

$$x = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

Note que:

$$\left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right) = -\left(\frac{\sqrt{5} - 1}{2}\right) = -\left(\frac{\sqrt{5} + 1}{2} - 1\right) = -(\phi - 1) = -\frac{1}{\phi}$$

Ou seja, a raiz negativa de  $x^2 - x - 1 = 0$  é o simétrico do inverso de  $\phi$ .

#### 1.1.4 Potências do $\phi$

Algumas propriedades interessantes são obtidas por meio de potências inteiras do número  $\phi$ . Lembrando que  $\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ , temos:

$$\phi^2 = \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{1 + 2\sqrt{5} + 5}{4} = \frac{2\sqrt{5} + 6}{4} = \frac{\sqrt{5} + 3}{2} = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} + 1 = \phi + 1$$

Assim  $\phi^2 = \phi + 1$

Usaremos esse valor de  $\phi^2$  para calcularmos as demais potências:



$$\phi^3 = \phi \cdot \phi^2 = \phi(\phi + 1) = \phi^2 + \phi = (\phi + 1) + \phi = 2\phi + 1$$

$$\phi^4 = \phi^2 \cdot \phi^2 = (\phi + 1)(\phi + 1) = \phi^2 + 2\phi + 1 = (\phi + 1) + 2\phi + 1 = 3\phi + 2$$

$$\phi^5 = \phi^3 \cdot \phi^2 = (2\phi + 1)(\phi + 1) = 2\phi^2 + 3\phi + 1 = 2(\phi + 1) + 3\phi + 1 = 5\phi + 3$$

$$\phi^6 = \phi^3 \cdot \phi^3 = (2\phi + 1)(2\phi + 1) = 4\phi^2 + 4\phi + 1 = 4(\phi + 1) + 4\phi + 1 = 8\phi + 5$$

$$\phi^7 = \phi^4 \cdot \phi^3 = (3\phi + 2)(2\phi + 1) = 6\phi^2 + 7\phi + 2 = 6(\phi + 1) + 7\phi + 2 = 13\phi + 8$$

$$\phi^8 = \phi^4 \cdot \phi^4 = (3\phi + 2)(3\phi + 2) = 9\phi^2 + 12\phi + 4 = 9(\phi + 1) + 12\phi + 4 = 21\phi + 13$$

$$\phi^9 = \phi^4 \cdot \phi^5 = (3\phi + 2)(5\phi + 3) = 15\phi^2 + 19\phi + 6 = 15(\phi + 1) + 19\phi + 6 = 34\phi + 21$$

$$\phi^{10} = \phi^5 \cdot \phi^5 = (5\phi + 3)(5\phi + 3) = 25\phi^2 + 30\phi + 9 = 25(\phi + 1) + 30\phi + 9 = 55\phi + 34$$

...

Juntando os resultados em uma tabela, temos então:

Potência de $\phi$	Resultado
$\phi^1$	$\phi$
$\phi^2$	$\phi + 1$
$\phi^3$	$2\phi + 1$
$\phi^4$	$3\phi + 2$
$\phi^5$	$5\phi + 3$
$\phi^6$	$8\phi + 5$
$\phi^7$	$13\phi + 8$
$\phi^8$	$21\phi + 13$
$\phi^9$	$34\phi + 21$
$\phi^{10}$	$55\phi + 34$

No próximo capítulo, quando tratarmos da Sequência de Fibonacci, vamos estabelecer uma regra geral a potência  $\phi^n$ , com  $n$  inteiro positivo.

## 1.2 Propriedades Geométricas

Além das propriedades aritméticas que vimos do número  $\phi$ , existem muitas outras envolvendo a geometria. Vamos destacar algumas que julgamos ser importantes para a compreensão do objetivo desse trabalho.

### 1.2.1 Construção da secção áurea

Também conhecido como segmento áureo ou mesmo número de ouro, a secção áurea é tal que divide um segmento em média e extrema razão, como pode-se ver na figura.



Figura 1.2: Segmento Áureo.

O ponto C divide o seguimento AB na Razão Áurea quando a razão do comprimento AB pelo AC for igual a razão do comprimento AC pelo CB, isto é:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{CB}$$

Para construir a secção áurea, usaremos de régua e compasso. Segundo imagens de Câmara (2008), com um desenvolvimento simples podemos desenhá-la:

1 - Com auxílio da régua construa o segmento AB e encontre o seu ponto médio M. Trace um segmento BD, de modo que seja perpendicular a AB e com medida igual a MB, em seguida com auxílio de um compasso centrado no ponto B desenhe o arco ligando os pontos MD, conforme a figura abaixo:

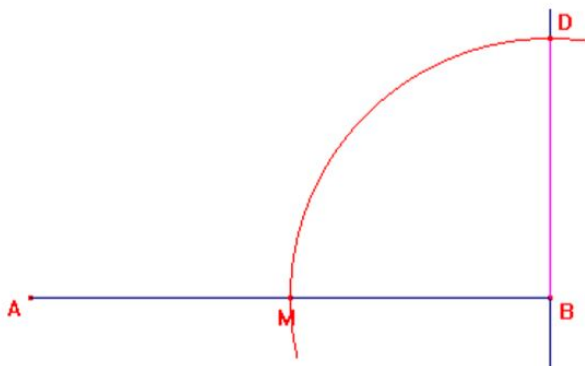


Figura 1.3: Etapa 01.

2 - Com a régua trace um segmento ligando os pontos A e D. Com o compasso centrado em D e abertura BD, trace o arco que intercepte o segmento AD no ponto E,

conforme figura abaixo:

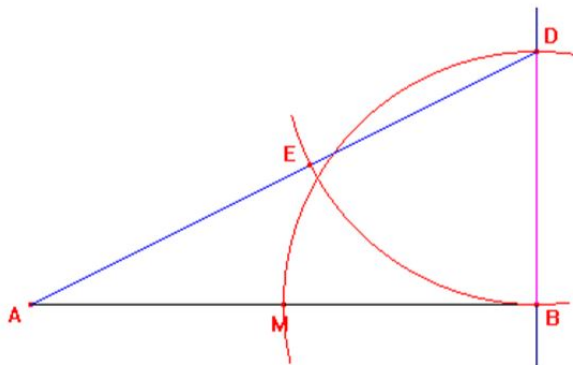


Figura 1.4: Etapa 02.

3 - Com o compasso centrado em A e abertura AE, trace o arco que intercepta o segmento AB no ponto C, conforme figura abaixo:

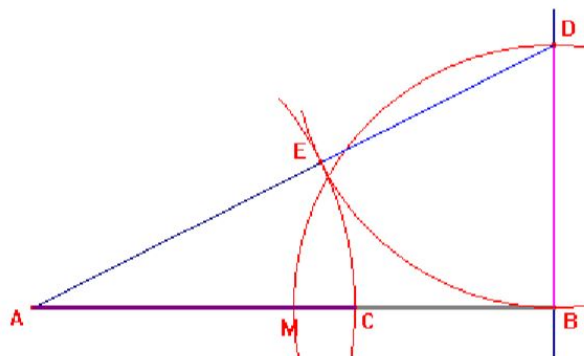


Figura 1.5: Etapa 03.

O ponto C é o ponto que divide o segmento AB em sua Razão Áurea. Logo AC é a razão áurea ou secção áurea de AB.

*Demonstração.* Através da Etapa 01, podemos definir que  $AM = MB = BD = \frac{AB}{2}$

Com a Etapa 02, podemos ver que  $ED = \frac{AB}{2}$ , já na Etapa 03 podemos perceber que  $AE = AC$  e vamos chamá-la de  $y$ , isto é,  $AE = y$  e  $AC = y$  e chamaremos  $CB = x$  e então  $AB = y + x$ . Podemos ver também que:  $AD = y + \frac{AB}{2} = H$  (Hipotenusa do triângulo retângulo em B), daí usando o *Teorema de Pitágoras* temos:

$$H^2 = \left(\frac{AB}{2}\right)^2 + (AB)^2$$

$$H^2 = \frac{(AB)^2}{4} + (AB)^2$$

$$H^2 = \frac{5(AB)^2}{4}$$

$$H = \frac{\sqrt{5}AB}{2}$$

Temos que  $AC = y = H - \frac{AB}{2}$ , daí substituindo o valor que já temos para  $H$ , podemos encontrar o valor de  $y$ :

$$y = \frac{\sqrt{5}AB}{2} - \frac{AB}{2}$$

$$y = \frac{(\sqrt{5} - 1)AB}{2}$$

Como  $CB = x = AB - y$ , substituindo o valor de  $y$  encontrado acima, podemos calcular o valor de  $x$ :

$$x = AB - \frac{(\sqrt{5} - 1)AB}{2}$$

$$x = \frac{2AB - (\sqrt{5} - 1)AB}{2}$$

$$x = \frac{(2 - \sqrt{5} + 1)AB}{2}$$

$$x = \frac{(3 - \sqrt{5})AB}{2}$$

Para finalizar a demonstração devemos verificar que o ponto C divide o segmento AB em sua Razão Áurea, isto é:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{CB}$$

Fazendo o cálculo de  $\frac{AB}{AC}$ , temos;

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AB}{\frac{(\sqrt{5} - 1)AB}{2}} = \frac{2}{\sqrt{5} - 1}$$

Calculando agora  $\frac{AC}{CB}$ , temos;

$$\frac{AC}{CB} = \frac{\frac{(\sqrt{5} - 1)AB}{2}}{\frac{(3 - \sqrt{5})AB}{2}} = \frac{\sqrt{5} - 1}{3 - \sqrt{5}} \cdot \frac{(\sqrt{5} + 1)}{(\sqrt{5} + 1)} = \frac{5 - 1}{3\sqrt{5} + 3 - 5 - \sqrt{5}} = \frac{4}{2\sqrt{5} - 2} = \frac{2}{\sqrt{5} - 1}$$

Logo,  $\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{CB}$ , então o segmento AB foi realmente dividido na proporção áurea.  $\square$

Na estação Saldanha em Lisboa há um desenho alusivo a esta secção, veja imagem de Mindcraft (2013):



Figura 1.6: Secção Áurea em Lisboa.

## 1.2.2 Construção de Retângulos de Ouro

Ao longo do tempo matemáticos e arquitetos estudaram o “Retângulo de Ouro” ou “Retângulo áureo”, cujas proporções estão presente em janelas, jogo de cartas, blocos de anotações, dimensões das fotos, etc chegando a conclusão de que os mesmos são os mais agradáveis aos olhos.

O Retângulo Áureo é definido por possuir as medidas de base e altura, tais que, dividindo esses valores nessa ordem obtêm-se exatamente o número  $\phi$ . Para a construção do mesmo, basta seguir os passos:

- 1 - Construimos um quadrado ABCD de lado  $x$ ;

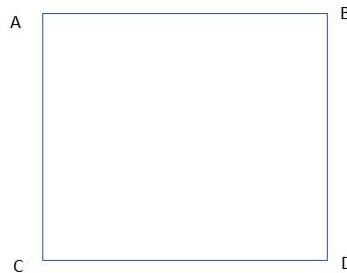


Figura 1.7: Passo 01.

- 2 - Dividimos um dos lados do quadrado ao meio;

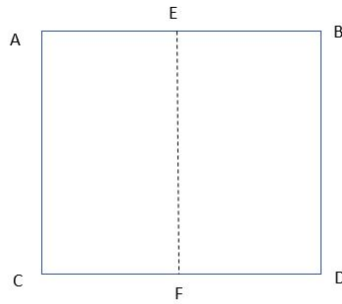


Figura 1.8: Passo 02.

3 - Traçamos uma diagonal do vértice F do último retângulo ao vértice oposto B e estendemos a base CD do quadrado do mesmo tamanho, mesma medida, da diagonal FB;

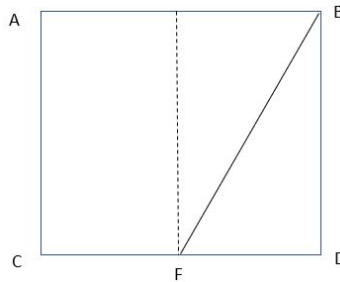


Figura 1.9: Passo 03.

4 - Usando a diagonal como raio, centramos em F abertura FB traçamos um arco que corta o segmento CD estendido marcando o ponto G;

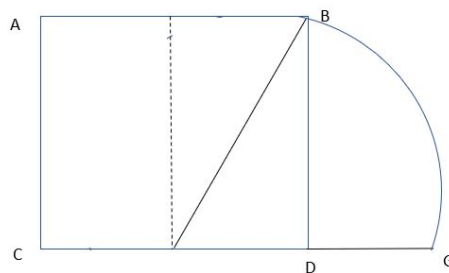


Figura 1.10: Passo 04.

5 - Pelo ponto G, traçamos um segmento perpendicular à base. Estendendo o lado superior do quadrado até encontrar este último segmento para formar o retângulo;

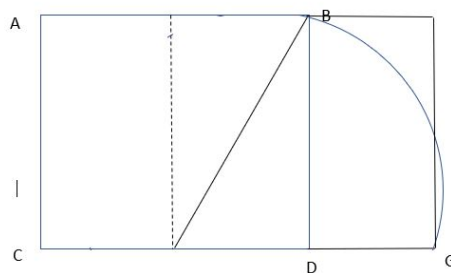


Figura 1.11: Passo 05.

Pronto, está construído nosso retângulo áureo.

*Demonstração.* Sendo  $x$  a medida dos lados do quadrado ABCD, e  $d$  a diagonal do retângulo EBF D. Destacando o triângulo retângulo BFD, podemos perceber que a medida do cateto FD é  $\frac{x}{2}$  e a do cateto BD é igual a  $x$ . Usando o *Teorema de Pitágoras* no triângulo BFD, podemos encontrar o valor dessa diagonal  $d$ :

$$\begin{aligned} d^2 &= x^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 \\ d^2 &= \frac{5x^2}{4} \\ d &= \frac{\sqrt{5}x}{2} \end{aligned}$$

Daí, calculamos a razão do lado maior dividido pelo lado menor do retângulo, isto é:

$$\begin{aligned} &= \frac{\frac{x}{2} + \frac{\sqrt{5}x}{2}}{\frac{x}{2}} \\ &= \frac{x + \sqrt{5}x}{x} \\ &= \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \\ &= \phi \end{aligned}$$

Logo, a razão é exatamente igual a  $\phi$ , e portanto, o retângulo é retângulo áureo. □

### 1.2.3 Construção da espiral de ouro

A partir do retângulo áureo construído na subseção anterior, podemos desenhar com a ajuda de um compasso a espiral de ouro. Em seu trabalho de conclusão de curso,

Azevedo (2013) mostra os passos com as figuras para o desenvolvimento da espiral.

1 - Com centro em B traçar o arco AC;

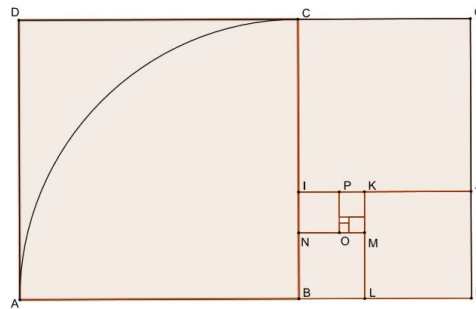


Figura 1.12: Parte 01.

2 - Com centro em I traçar o arco CJ;

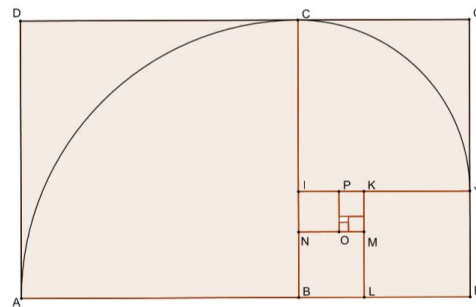


Figura 1.13: Parte 02.

3 - Continuar fazendo os arcos analogamente aos passos 1 e 2;

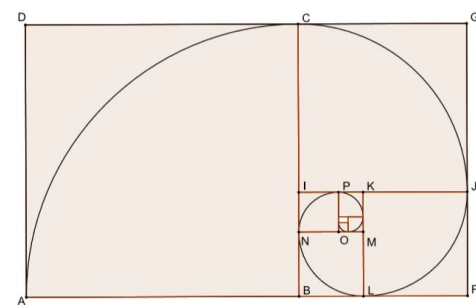


Figura 1.14: Parte 03.

### 1.3 Aplicações desse número especial

Esse número especial inspirou inclusive um monge italiano, *Lucca Pacioli*, segundo Bertato (2008) afirma, a estudar e publicar o *De Divine Proportione*, com ilustrações de seu conteúdo desenhadas por *Leonardo da Vinci*.



Em outubro de 1917, seria construído um monumento cujo nome seria: *Torre de Tatlin*. Tinha como objetivo se tornar a sede e um monumento a Terceira Internacional (uma organização que tinha o objetivo de reunir os partidos comunistas de diversos países). Projetada pelo artista plástico e arquiteto russo, Vladimir Tatlin. Esse monumento, se concretizado fosse, poderia ser um exemplo da espiral gerada pelo  $\phi$  em 3D, isto é, no espaço. Veja imagem do Selo Russo (domínio público) referindo-se a essa torre.



Figura 1.15: Selo Russo do ano 2000, em referência a Torre de Tatlin.

Outro exemplo arquitetônico da espiral áurea é *Las Escalera de Bramonte*, no museo do vaticano. Escadas que lembram o caracol. Veja foto de Villamón (2010).



Figura 1.16: Las Escalera de Bramonte.

Existe até mesmo uma “régua” para medir objetos na proporção áurea, para estética de sobancelhas inclusive, exatamente na proporção do número de ouro, como

pode-se ver na figura de Biodental (2017).



Figura 1.17: Régua Áurea.

Existem muitas outras observações e aplicações do número  $\phi$ , tanto em botânica (girassol, abacaxi, quantidades de pétalas de algumas flores, como a margarida por exemplo, superfície da pinha, conchas e caracóis,... ), artes (Monalisa, Homem Vitruviano), música, astronomia (galáxias...) e outras mais, veja imagem abaixo de Nepomuceno (2016). Para um estudo mais detalhado o leitor poderá ver as referências que utilizamos.



Figura 1.18: Algumas aplicações na Natureza.

## Capítulo 2

# História e Matemática de Fibonacci

Considerado o matemático ocidental mais importante da Idade Média, Leonardo Fibonacci nasceu na década de 1170 em Pisa, região da Toscana (Itália). Seu pai, Guglielmo dei Bonacci, trabalhava em Pisa, que era um dos grandes centros comerciais da Itália no século XXII, mais precisamente no porto em Bugia. Além disso, morou na região de Cabília, Argélia, mas viajava por toda a região do Mediterrâneo, trabalhando no comércio.



Figura 2.1: Fibonacci.

Como Fibonacci, veja imagem acima de domínio público, viajava com seu pai, teve contato logo cedo com o comércio e aprendeu técnicas matemáticas para as atividades de compras e vendas. Ele conheceu a cultura da região, teve contato com professores árabes possibilitando-o a aprender a aritmética árabe, que era muito mais desenvolvida do que a da Europa. Estudou em Constantinopla e desenvolvia ali suas atividades de

comércio.

Por volta de 1200, Fibonacci voltou para Itália e participou de uma competição em que o imperador Frederico II apresentou alguns problemas matemáticos para que os candidatos resolvessem. Fibonacci se destacou do grupo e recebeu um incentivo de um rendimento vitalício para que não precisasse mais trabalhar, apenas se dedicar aos estudos.

Com 32 anos de idade, Fibonacci escreveu o *Liber Abaci*, (O livro do ábaco) com o objetivo de levar os algarismos hindu-arábicos para o conhecimento da população Italiana e Européia. Nesse livro ele descreve como usar os algarismos, incluindo o zero (que era novidade na Europa), ele mostra como realizar operações matemáticas com esses “novos” algarismos, bem como ensina conversões monetárias, cálculo de juros, médias, problema do resto chinês, a regra da falsa posição, equações quadráticas entre outras. Esse livro se tornou um divisor de águas, pois é até difícil imaginar como era calcular com números romanos, por exemplo: MDXCIX - DCCLXXXIV = ? ou seja, 1599 - 784=?, uma subtração simples, agora pense uma equação quadrática! Seria algo mais complexo ainda.

Para Boyer (2010) “O livro em que Fibonacci descreve o novo algarismo (zero) é uma clássica célebre, completado em 1202, mas tem um título enganador - *Liber abaci* (ou livro do ábaco). Não é sobre o ábaco; é um tratado muito completo sobre métodos e problemas algébricos no qual o uso de numerais indo-arábicos é fortemente recomendado.”

Fibonacci escreveu outros livros, mas o que mais se destacou foi o *Liber Abaci*. Dentre os problemas apresentados no referido livro, o problema mais interessante aparece no capítulo 12 do *Liber Abaci* é o da reprodução de coelhos, do qual detalharemos na próxima seção. E é deste simples modelo que surge o que hoje conhecemos por Sequência de Fibonacci, a qual está intimamente relacionada com o número  $\phi$ .

O legado de Fibonacci é tamanho que existe uma estátua erguida em Pisa, em sua homenagem. Além disso, temos desde 1963 até hoje uma publicação periódica trimestral, chamada *Fibonacci Quartely* que se dedica a publicar trabalhos relacionados a Sequência de Fibonacci, e ainda existe um asteroide que contém seu nome, o 6765 *Fibonacci*.

### 2.0.1 O Problema da Reprodução de Coelhos

No *Liber Abaci*, capítulo 12, Fibonacci apresenta o seguinte problema: “Um homem pôs um par de filhotes de coelhos num lugar cercado de muro por todos os lados.

Quantos pares de coelhos podem ser gerados a partir desse par em um ano se, supostamente, todo mês cada par dá á luz a um novo par, que é fértil a partir do segundo mês?”

Temos apenas um par de coelhos (ainda filhotes) no primeiro mês. No segundo mês, continuamos com um par de coelhos, agora adultos. Já no terceiro mês, nasce um par de filhotes. Logo, temos dois pares de coelhos (um par de adultos e um par de filhotes). Daí no quarto mês, o par inicial gera o seu segundo par de filhotes, ficando um total de três pares de coelhos (o inicial, o primeiro par de filhotes, agora adultos, e o segundo par de filhotes). Observa-se que no quinto mês, o par inicial gerou o seu terceiro par de filhotes; o segundo par de adultos gerou o seu primeiro par de filhotes e o par de filhotes gerado no mês anterior, agora adulto. Então, temos três pares de adultos mais dois pares de filhotes, totalizando cinco pares de coelhos.

Percebe-se então que o número de pares de coelhos será igual ao número de pares do mês anterior mais o número de pares do anterior ao anterior, e assim para os próximos meses a frente.

Veja na tabela como fica a quantidade de pares de coelhos adultos, filhotes e total nos doze primeiros meses.

Tabela 2.1: Problema dos Coelhos.

Mês	<i>Adultos</i>	<i>Filhotes</i>	<i>Total</i>
1	0	1	1
2	1	0	1
3	1	1	2
4	2	1	3
5	3	2	5
6	5	3	8
7	8	5	13
8	13	8	21
9	21	13	34
10	34	21	55
11	55	34	89
12	89	55	144

## 2.0.2 Definição da Sequência de Fibonacci

A partir do problema da reprodução de coelhos, considerando que não haja morte e que a reprodução siga conforme as regras iniciais, podemos generalizar o total de cada mês e transformar em uma sequência de números, dada por:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, ...,  $f_{n-2}$ ,  $f_{n-1}$ ,  $f_n$ , ...,

Tal que:

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}, \text{ com } n > 2 \text{ e } f_1 = f_2 = 1.$$

Com essa recorrência, temos uma sequência de números naturais, chamada Sequência de Fibonacci, cujos termos são conhecidos por Números de Fibonacci, números esses que apresentam algumas propriedades aritméticas interessantes, onde muitas destas propriedades veremos nas seções posteriores. Essa sequência é tão investigada e gera muita curiosidade que, como comentamos, temos até um periódico intitulado: *The Fibonacci Quarterly*, fundada em 1963, com o objetivo de continuar estudando os desdobramentos desses números e suas mais diversas aplicações.

É interessante retomarmos o que fizemos na subseção 1.1.4, com respeito as potências do número  $\phi$ . Observe, na tabela abaixo, que tanto os coeficientes de  $\phi$  dos valores referentes aos resultados das potências do  $\phi$ , quanto seus termos independentes de  $\phi$  são números de Fibonacci.

Tabela 2.2: Observando as Potências de  $\phi$ .

Potência de $\phi$	Resultado
$\phi^1$	$\phi$
$\phi^2$	$\phi + 1$
$\phi^3$	$2\phi + 1$
$\phi^4$	$3\phi + 2$
$\phi^5$	$5\phi + 3$
$\phi^6$	$8\phi + 5$
$\phi^7$	$13\phi + 8$
$\phi^8$	$21\phi + 13$
$\phi^9$	$34\phi + 21$
$\phi^{10}$	$55\phi + 34$

De forma geral, uma potência n-ésima de  $\phi$  é uma soma do (n-1)-ésimo termo da sequência de Fibonacci com o produto de  $\phi$  pelo n-ésimo termo da sequência de Fibonacci, conforme pode ser visto no teorema abaixo.

**Teorema 1.** *Para qualquer número natural  $n \geq 1$ , vale a igualdade:*

$$\phi^n = f_{n-1} + f_n \cdot \phi,$$

onde  $f_n, n = 1, 2, 3, \dots$  são os números de Fibonacci e  $f_0 = 0$ .

*Demonstração.* Vamos provar com *Indução Matemática* sobre  $n$ .

(i) Para  $n = 1$ :

$$\phi^1 = \phi = f_{1-1} + f_1 \cdot \phi = 0 + 1 \cdot \phi = \phi$$

(ii) Suponhamos que a identidade seja verdadeira para  $n = k$  (hipótese de indução), ou seja, que vale:  $\phi^k = f_{k-1} + f_k \cdot \phi$

Mostra-se que vale para  $n = k + 1$ , ou seja,  $\phi^{k+1} = f_k + f_{k+1} \cdot \phi$

Utilizando a hipótese de indução e observando que:  $\phi^{k+1} = \phi^k \cdot \phi$

$$\phi^{k+1} = (f_{k-1} + f_k \cdot \phi) \cdot \phi$$

$$= f_{k-1} \cdot \phi + f_k \cdot \phi^2$$

$$= f_{k-1} \cdot \phi + f_k \cdot (1 + \phi)$$

$$= f_{k-1} \cdot \phi + f_k \cdot \phi + f_k$$

$$= (f_{k-1} + f_k) \cdot \phi + f_k$$

$$= f_k + f_{k+1} \cdot \phi.$$

□

Concluindo assim a prova do Teorema.

## 2.1 A Fórmula de Binet

Como a Sequência de Fibonacci é gerada por recorrência, pode ser trabalhoso encontrar um termo da sequência distante do primeiro termo, já que para isso seria preciso construir toda a sequência até o termo da posição procurada. Mas graças a Moivre, que em 1718 provou que esse trabalho poderia ser abreviado com a criação de uma fórmula, que posteriormente, em 1843 foi redescoberta por Jacques Philippe Marie Binet (1786-1856), matemático francês que deu seu nome a seguinte fórmula:

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[ \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right]$$

*Demonstração.* Para a demonstração dessa fórmula, usaremos o *Princípio de Indução Matemática*, para  $n = 1$  e  $n = 2$ , como Santos (2018), também faz:

Para  $n = 1$

$$f_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[ \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^1 - \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^1 \right]$$

$$f_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[ \frac{1 + \sqrt{5} - 1 + \sqrt{5}}{2} \right]$$

$$f_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{2\sqrt{5}}{2}$$

$$f_1 = 1$$

Para  $n = 2$

$$f_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[ \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^2 - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^2 \right]$$

$$f_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[ \left( \frac{1+2\sqrt{5}+5}{4} \right) - \left( \frac{1-2\sqrt{5}+5}{4} \right) \right]$$

$$f_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[ \frac{1+2\sqrt{5}+5-1+2\sqrt{5}-5}{4} \right]$$

$$f_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{4\sqrt{5}}{4}$$

$$f_2 = 1$$

Como nossa hipótese de indução, vamos supor que a fórmula é válida para  $n = k$  e  $n = k + 1$ , assim podemos concluir que também é válida para  $n = k + 2$ . Dado que  $f_{k+2} = f_{k+1} + f_k$ , segue que:

$$f_{k+2} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[ \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{k+1} - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{k+1} \right] + \frac{1}{\sqrt{5}} \left[ \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^k - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^k \right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \left[ \left( 1 + \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right) \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^k - \left( 1 + \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right) \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^k \right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \left[ \left( \frac{3+\sqrt{5}}{2} \right) \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^k - \left( \frac{3-\sqrt{5}}{2} \right) \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^k \right]$$



Analisando que:  $\frac{3 + \sqrt{5}}{2} = \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^2$  e que  $\frac{3 - \sqrt{5}}{2} = \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^2$ , podemos substituir na equação anterior:

$$f_{k+2} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[ \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^2 \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^k - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^2 \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^k \right]$$

$$f_{k+2} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[ \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^{k+2} - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^{k+2} \right]$$

Assim, através da prova por *Indução*, a fórmula de Binet é válida para todo  $n$ , natural. □

### 2.1.1 A Árvore Genealógica dos Zangões e Fibonacci

Se é questionável o fato dos coelhos do problema de Fibonacci no *Liber Abaci*, serem imortais, gerarem sempre pares de filhos, seguirem sempre esse padrão pré-estabelecido, logicamente fictício, por outro lado pode-se encontrar numa observação também na natureza, a formação da Sequência de Fibonacci de forma que não pareça ser questionável: a árvore genealógica de um zangão, o macho da abelha.

Os zangões nascem de ovos que não foram fertilizados pelas abelhas, as abelhas por sua vez, nascem de ovos fertilizados. Logo, podemos dizer que uma abelha tem “pai” e “mãe” diferentemente de um zangão que tem apenas “mãe”. Fazendo uma árvore genealógica do zangão, vemos que ele tem uma mãe, dois avós (pai e mãe de sua mãe), três bisavós (os dois pais da avó mais a mãe do avô), cinco trisavós (dois pais para cada visavó e uma mãe para o seu bisavô), etc. Formando assim nessa árvore genealógica, 1, 1, 2, 3, 5, 8, ... , a Sequência de Fibonacci, conforme figura de Pedrosa (2014).

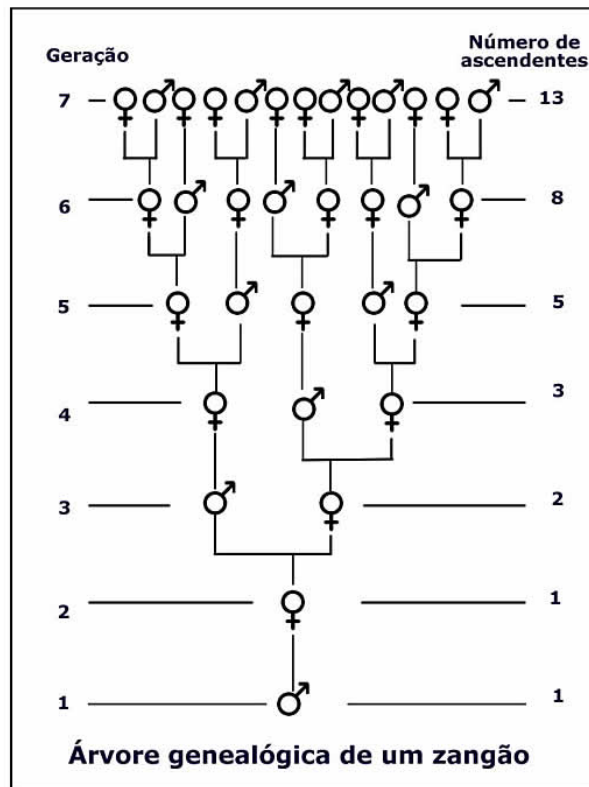


Figura 2.2: Árvore Genealógica de um zangão.

## 2.2 Propriedades da Sequência de Fibonacci

Os números da Sequência de Fibonacci geram conteúdos interessantes do ponto de vista matemático:

- Os números da Sequência de Fibonacci que são divisíveis por 2 são:  
 $f_3 = 2; f_6 = 8; f_9 = 34; f_{12} = 144; \dots$ , cujos índices também formam uma sequência:  
 $3, 6, 9, 12, \dots$ , ou seja uma PA de razão 3.
- Os números da Sequência de Fibonacci que são divisíveis por 3 são:  
 $f_4 = 3; f_8 = 21; f_{12} = 144; f_{16} = 987; \dots$ , cujos índices também formam uma  
sequência:  $4, 8, 12, 16, \dots$ , ou seja uma PA de razão 4.
- Os números da Sequência de Fibonacci que são divisíveis por 4 são:  
 $f_6 = 8; f_{12} = 144; f_{18} = 2584; f_{24} = 46368; \dots$ , cujos índices também formam uma  
sequência:  $6, 12, 18, 24, \dots$ , ou seja uma PA de razão 6.

Além dessa observação notável do ponto de vista da divisibilidade, vamos destacar outras propriedades significativas que (Almeida, 2014) também destaca em seu trabalho:

**Propriedade: 1.** *Dois números consecutivos da Sequência de Fibonacci são primos entre si.*

*Demonstração.* Usaremos a Indução Matemática para provar que  $\text{mdc}(f_{n+1}, f_n) = 1$

Para  $n = 1$ , é fácil de comprovar pois  $\text{mdc}(f_2, f_1) = \text{mdc}(1, 1) = 1$

Agora suponhamos válido para  $n$ , isto é  $\text{mdc}(f_{n+1}, f_n)$ , vamos mostrar que a propriedade é válida para  $n + 1$ .

De fato, pelo algoritmo de Euclides  $\text{mdc}(f_{n+2}, f_{n+1}) = \text{mdc}(f_{n+2} - f_{n+1}, f_{n+1}) = \text{mdc}(f_n, f_{n+1}) = 1$

Portanto, é válido para todo  $n$ . □

**Propriedade: 2.** *A soma de seis números consecutivos da Sequência de Fibonacci é divisível por 4, isto é:*

$$\sum_{r=0}^5 f_{n+r} = f_n + f_{n+1} + f_{n+2} + f_{n+3} + f_{n+4} + f_{n+5} = 4f_{n+4}$$

*Demonstração.* Vejamos para  $n \geq 0$ , (com  $n$  fixo), queremos mostrar que:

$$\sum_{r=0}^5 f_{n+r} = f_n + f_{n+1} + f_{n+2} + f_{n+3} + f_{n+4} + f_{n+5} = 4f_{n+4}$$

$$\sum_{r=0}^5 f_{n+r} = (f_n + f_{n+1}) + f_{n+2} + f_{n+3} + f_{n+4} + (f_{n+3} + f_{n+4})$$

$$\sum_{r=0}^5 f_{n+r} = 2f_{n+2} + 2f_{n+3} + 2f_{n+4}$$

$$\sum_{r=0}^5 f_{n+r} = 4f_{n+4} \quad \square$$

**Propriedade: 3.** *A soma de quaisquer dez números consecutivos da Sequência de Fibonacci é divisível por 11, isto é:*

$$n \geq 0, \text{ (com } n \text{ fixo): } \sum_{r=0}^9 f_{n+r} = 11f_{n+6}$$

*Demonstração.* Sabemos que :

$$\sum_{r=0}^9 f_{n+r} = f_n + f_{n+1} + f_{n+2} + f_{n+3} + f_{n+4} + f_{n+5} + f_{n+6} + f_{n+7} + f_{n+8} + f_{n+9}$$

$$\sum_{r=0}^9 f_{n+r} = (f_n + f_{n+1} + f_{n+2} + f_{n+3} + f_{n+4} + f_{n+5}) + f_{n+6} + f_{n+7} + f_{n+8} + f_{n+7} + f_{n+8}$$

$$\sum_{r=0}^9 f_{n+r} = 4f_{n+4} + f_{n+6} + 2f_{n+7} + 2f_{n+8}$$

$$\sum_{r=0}^9 f_{n+r} = 4f_{n+4} + 2f_{n+5} + 5f_{n+6} + 2f_{n+7}$$

$$\sum_{r=0}^9 f_{n+r} = 4f_{n+4} + 4f_{n+5} + 7f_{n+6}$$

$$\sum_{r=0}^9 f_{n+r} = 4f_{n+6} + 7f_{n+6}$$

$$\sum_{r=0}^9 f_{n+r} = 11f_{n+6} \quad \square$$

**Propriedade: 4.** Para  $n \geq 0$ ,  $\sum_{r=0}^n f_r^2 = f_n \cdot f_{n+1}$

*Demonstração.* Para isso vamos usar Indução Matemática, começando no caso de  $n = 0$ ,

$$\sum_{r=0}^0 f_r^2 = f_0^2 = 0^2 = 0 = 0 \cdot 1 = f_0 \cdot f_1 = f_0 \cdot f_{0+1}, \text{ logo é valido para } n = 0.$$

Agora suponhamos que seja válido para  $n = k (k \geq 0)$

Vamos mostrar que vale para  $k + 1$ ,

Temos que  $\sum_{r=0}^k f_r^2 = f_k \cdot f_{k+1}$  e então:

$$\sum_{r=0}^{k+1} f_r^2 = \left( \sum_{r=0}^k f_r^2 \right) + f_{k+1}^2$$

$$\sum_{r=0}^{k+1} f_r^2 = (f_k \cdot f_{k+1}) + f_{k+1}^2$$

$$\sum_{r=0}^{k+1} f_r^2 = f_{k+1} \cdot (f_k + f_{k+1})$$

$$\sum_{r=0}^{k+1} f_r^2 = f_{k+1} \cdot f_{k+2}$$

Portanto vale para  $k + 1$ , e assim pela Indução, essa propriedade é verdadeira para todo

$n \geq 0$  □

**Propriedade: 5.** Para  $n \geq 0$ ,  $\sum_{r=0}^n f_r = f_{n+2} - 1$

*Demonstração.* Essa propriedade foi descoberta do Édouard Lucas em 1876. Vamos ver a sequencia recursiva:

$$f_0 = f_2 - f_1$$

$$f_1 = f_3 - f_2$$

$$f_2 = f_4 - f_3$$

⋮

$$f_{n-1} = f_{n+1} - f_n$$

$$f_n = f_{n+2} - f_{n+1}$$

Somando todas as equações obtidas temos:

$$\begin{aligned} \sum_{r=0}^n f_r &= (f_2 - f_1) + (f_3 - f_2) + \dots + (f_{n+1} - f_n) + (f_{n+2} - f_{n+1}) \\ \sum_{r=0}^n f_r &= -f_1 + (f_2 - f_2) + (f_3 - f_3) + \dots + (f_n - f_n) + (f_{n+1} - f_{n+1}) + (f_{n+2}) \\ \sum_{r=0}^n f_r &= -f_1 + f_{n+2} \\ \sum_{r=0}^n f_r &= f_{n+2} - 1 \end{aligned}$$

□

**Propriedade: 6.** A soma dos números de Fibonacci de ordem ímpar é igual a  $f_{2n}$ , isto é para  $n \geq 1$ ,  $\sum_{r=1}^n f_{2r-1} = f_1 + f_3 + f_5 + \dots + f_{2r-1} = f_{2n}$

*Demonstração.* Vamos usar a sequência recursiva:

$$\begin{aligned} f_1 &= f_2 \\ f_3 &= f_4 - f_2 \\ f_5 &= f_6 - f_4 \\ &\vdots \\ f_{2n-1} &= f_{2n} - f_{2n-2} \end{aligned}$$

Somando as equações obtidas temos:

$$\begin{aligned} f_1 + f_3 + \dots + f_{2n-1} &= (f_2 - f_2) + (f_4 - f_4) + (f_6 - f_6) + \dots + (f_{2n-2} - f_{2n-2}) + f_{2n} \\ \sum_{r=1}^n f_{2r-1} &= f_{2n} \end{aligned}$$

□

**Propriedade: 7.** A soma dos números de Fibonacci de ordem par é igual a  $f_{2n+1} - 1$ , isto é para  $n \geq 1$ ,  $\sum_{r=1}^n f_{2r} = f_2 + f_4 + f_6 + \dots + f_{2r} = f_{2n+1} - 1$

*Demonstração.* Já vimos que a soma dos  $n$  números de Fibonacci é igual a:  $f_{n+2} - 1$ , logo a soma dos  $2n$  números será  $f_{2n+2} - 1$ , e vimos também que a soma dos números ímpares de Fibonacci é igual a:  $f_{2n}$ , conforme demonstrado nas Propriedades 5 e 6, respectivamente, daí para sabermos o valor da soma dos números pares basta subtraírmos do valor da soma total a soma dos ímpares que o resultado será o valor da soma dos pares.

Então, fazendo:

$$\sum_{r=1}^n f_{2r} = f_2 + f_4 + f_6 + \dots + f_{2n} = f_{2n+2} - 1 - f_{2n}$$

Como  $f_{2n+2} = f_{2n+1} + f_{2n}$ , substituindo na equação acima temos:

$$\sum_{r=1}^n f_{2r} = f_{2n+1} + f_{2n} - 1 - f_{2n}$$

$$\sum_{r=1}^n f_{2r} = f_{2n+1} - 1 \quad \square$$

Fica ainda, a cargo de curiosidade ao leitor, que ao analisar os últimos dígitos dos números  $f_{60}$  à  $f_{70}$ , que esses dígitos formam novamente a Sequência de Fibonacci. Muitas outras propriedades relativas ao número  $\phi$  e a sequência de Fibonacci podem ser encontradas na literatura, veja Posamentier e Lehmann (2007), Almeida (2014) e outras referências neles contidas.

## 2.3 Relação entre Fibonacci e a Razão Áurea

É atribuído a Kepler (matemático alemão, autor das três leis fundamentais da mecânica - 1571-1630) a seguinte frase: “A geometria possui dois grandes tesouros: um é o teorema de Pitágoras, o outro a divisão de uma linha em extrema e média razões. O primeiro, podemos comparar a uma medida de ouro, ao segundo, podemos chamar de jóia preciosa.” Conforme Lívio (2007) cita em seu livro: Razão Áurea.

Após muito estudo da Sequência de Fibonacci, Johannes Kepler descobriu que existia um padrão matemático quando se analisava um par de números consecutivos dessa sequência. Especialmente quanto maiores fossem os dois números analisados, a razão entre um termo da sequência e o seu termo anterior se aproximava da razão áurea ( $\phi$ ). Veja:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, \dots$$

$$\text{Fazendo o cálculo de: } \frac{233}{144} \text{ ou } \frac{144}{89} \text{ ou } \frac{89}{55} \text{ ou } \frac{55}{34} \text{ ou } \dots \approx \phi$$

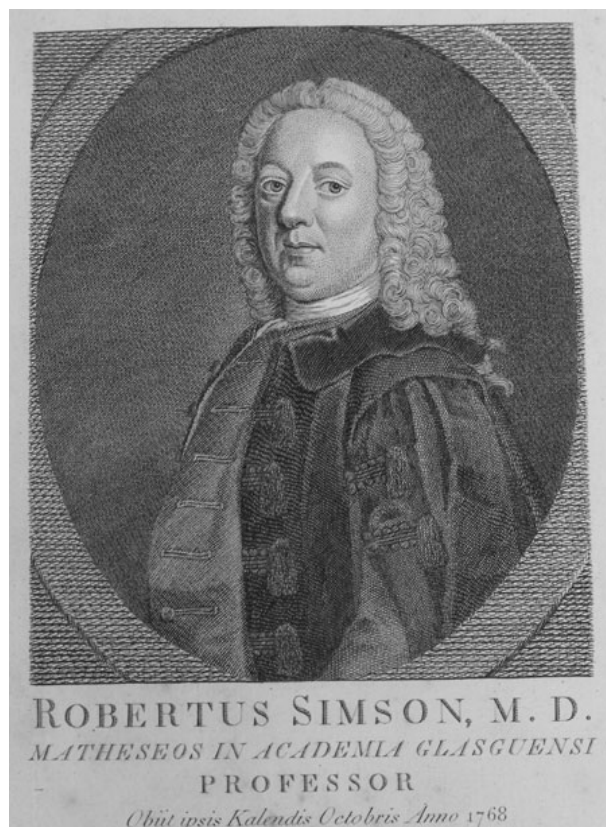


Figura 2.3: Robert Simson.

Para generalizar a relação entre a Sequencia de Fibonacci e o Número de Ouro, que Kepler percebeu em 1611, surge muito tempo depois o matemático escocês Robert Simson (figura acima de domínio público) que prova essa preposição, ou seja, cria o seguinte teorema:

**Teorema 2.** *A seqüência formada pela razão entre dois termos consecutivos da seqüência de Fibonacci, do maior pelo menor, converge para o número de ouro, isto é:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_{n+1}}{f_n} = \phi.$$

**Demonstração:** 1. *Usando a fórmula de Binet, vista anteriormente, para  $n + 1$  e  $n$ , teremos que:*

$$f_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[ \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right]$$

e

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[ \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right]$$

Dividindo as duas equações temos:

$$\frac{f_{n+1}}{f_n} = \frac{\frac{1}{\sqrt{5}} \left[ \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right]}{\frac{1}{\sqrt{5}} \left[ \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right]} = \frac{\left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1}}{\left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n}$$

então:

$$= \frac{\left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \left[ 1 - \frac{\left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1}}{\left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1}} \right]}{\left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n \left[ 1 - \frac{\left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n}{\left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n} \right]} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{1 - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}} \right)^{n+1}}{1 - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}} \right)^n}$$

Como  $-1 < \frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}} < 1$ ,

$$\text{Temos: } \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}} \right)^{n+1} = 0$$

$$\text{Portanto: } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_{n+1}}{f_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{1+\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{1 - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}} \right)^{n+1}}{1 - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}} \right)^n} \right] = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \phi$$

■

Com essa demonstração fica provado que a razão dos termos da sequência de Fibonacci se relacionam diretamente com a razão áurea, isto é, dividindo cada termo pelo seu termo anterior, aproxima-se cada vez mais da constante  $\phi$ , a medida que os seus termos tendem ao infinito.



# Capítulo 3

## Sugestões de Oficinas

Apresentaremos brevemente algumas sugestões de oficinas que poderão ser usadas em sala de aula no Ensino Médio, com o intuito de motivar e despertar o interesse dos alunos nos conteúdos matemáticos a partir da modelagem com Fibonacci e o Número de Ouro.

### 3.1 Miss e Mister Áureo

*Material Necessário:* Impressão da tabela a ser preenchida, fita métrica, calculadora, lápis e borracha.

*Metodologia:* Formar grupos de 6 alunos (as), explicar como deverá ser preenchida a tabela, dar o tempo necessário para isso e então recolher as tabelas preenchidas e analisar juntamente com um líder de cada grupo, o aluno e a aluno que tem as medidas mais próximas do valor de  $\phi$ .

Apresentaremos um modelo de tabela válido para meninos e meninas, proposto por ?, em seu trabalho para o programa de desenvolvimento educacional.

Medidas		Alunos					
		1	2	3	4	5	6
01	Altura do aluno.						
02	Comprimento do umbigo até o chão.						
03	Razão entre as medidas 01 e 02.						
04	Comprimento do braço, do ombro até a extremidade do dedo médio.						
05	Medida do cotovelo até a extremidade do dedo médio.						
06	Razão entre as medidas 04 e 05.						
07	Medida do comprimento da perna.						
08	Medida do comprimento do joelho até o chão.						
09	Razão entre as medidas 07 e 08.						
10	Média aritmética das razões 03, 06 e 09.						

Figura 3.1: Oficina - Miss e Mister Áureo.

*Avaliação:* A partir da aproximação do  $\phi$  encontrada na linha 3, 6 e 9 e na média entre essas medidas, na linha 10 da tabela, mostrar a relevância do  $\phi$ , pois o mesmo tem aplicações em muitas áreas de conhecimento, dentre elas, música, artes, botânica, etc..., ou seja, está presente em muitos lugares, objetos e até mesmo no corpo humano.

## 3.2 Encontrando $\phi$ por meio da Sequência de Fibonacci

*Material Necessário:* Computadores com Planilha Eletrônica.

*Metodologia:* Pedir para os alunos fazerem uma tabela com uma coluna contendo os números da sequência de Fibonacci a partir da história da reprodução de coelhos. Noutra coluna, pedir pra eles fazerem o cálculo do valor da razão entre um número da sequência e o seu antecessor, encontrando assim o  $\phi$ . Pode-se usar o recurso de fórmula da planilha eletrônica.

*Avaliação:* Pedir para eles analisarem as respostas da segunda coluna construída. Os números estão se aproximando de algum padrão? Por que sim ou por que não? É coincidência ou isso era esperado? Verificar a partir de qual termo das razões começam a aparecer os mesmos números da parte fracionária de  $\phi$ .

### 3.3 Construção da Espiral de Ouro

*Material Necessário:* Papel A4, régua, compasso, lápis e borracha.

*Metodologia:* Pedir para os alunos seguirem as orientações que se encontram nas subseções 1.2.2 e 1.2.3. para construção do retângulo áureo e a partir dele a espiral áurea.

*Avaliação:* Onde é possível encontrar essa espiral? Ela é relevante na atualidade?

### 3.4 Potências de $\phi$ a partir de Fibonacci e da geometria

*Material Necessário:* Computadores com Planilha Eletrônica.

*Metodologia:* Colocar os alunos para preencher as tabelas, conforme as figuras ilustrativas 3.2 à 3.6, com os valores correspondentes as áreas e volumes de alguns sólidos geométricos, usando valores de arestas, raios e lados referentes a sequência de Fibonacci.

Com a ajuda da planilha eletrônica, mais especificamente da função “fórmula”, podemos calcular a área e o volume de algumas figuras regulares, e usar como lado, raio, aresta... etc as medidas correspondentes aos números da sequência de Fibonacci. A nossa sugestão é o professor colocar os alunos no laboratório de informática e orientá-los no passo a passo da construção das tabelas a seguir e logo após fazer a análise dos resultados.

Daí, calculando ainda a razão entre as áreas e os volumes, sempre dividindo esses valores pelos seus antecessores podemos verificar que:

Raio do Circulo 1	Raio do Circulo 2	Área do Circulo 1	Área do Circulo 2	Razão entre Área 2 por Área 1
1	1	3,141592654	3,141592654	1
1	2	3,141592654	12,56637061	4
2	3	12,56637061	28,27433388	2,25
3	5	28,27433388	78,53981634	2,777777778
5	8	78,53981634	201,0619298	2,56
8	13	201,0619298	530,9291585	2,640625
13	21	530,9291585	1385,44236	2,609467456
21	34	1385,44236	3631,681108	2,621315193
34	55	3631,681108	9503,317777	2,616782007
55	89	9503,317777	24884,55541	2,618512397
89	144	24884,55541	65144,06526	2,617851281
144	233	65144,06526	170553,9236	2,618103781
233	377	170553,9236	446511,4223	2,618007331
377	610	446511,4223	1168986,626	2,618044171
610	987	1168986,626	3060442,174	2,618030099
987	1597	3060442,174	8012346,178	2,618035474
1597	2584	8012346,178	20976590,08	2,618033421
2584	4181	20976590,08	54917430,34	2,618034205
4181	6765	54917430,34	143775694,6	2,618033906
6765	10946	143775694,6	376409659,9	2,61803402

Figura 3.2: Área e Razões de Esferas geradas por Fibonacci.

Lado do Quadrado 1	Lado do Quadrado 2	Área do Quadrado 1	Área do Quadrado 2	Razão entre Área 2 e Área 1
1	1	1	1	1
1	2	1	4	4
2	3	4	9	2,25
3	5	9	25	2,777777778
5	8	25	64	2,56
8	13	64	169	2,640625
13	21	169	441	2,609467456
21	34	441	1156	2,621315193
34	55	1156	3025	2,616782007
55	89	3025	7921	2,618512397
89	144	7921	20736	2,617851281
144	233	20736	54289	2,618103781
233	377	54289	142129	2,618007331
377	610	142129	372100	2,618044171
610	987	372100	974169	2,618030099
987	1597	974169	2550409	2,618035474
1597	2584	2550409	6677056	2,618033421
2584	4181	6677056	17480761	2,618034205
4181	6765	17480761	45765225	2,618033906
6765	10946	45765225	119814916	2,61803402

Figura 3.3: Área e Razões de Cubos gerados por Fibonacci.

Lado do Triângulo Equilátero 1	Lado do Triângulo Equilátero 2	Área do Triângulo 1	Área do Triângulo 2	Razão entre Área 2 e Área 1
1	1	0,433012702	0,433012702	1
1	2	0,433012702	1,732050808	4
2	3	1,732050808	3,897114317	2,25
3	5	3,897114317	10,82531755	2,777777778
5	8	10,82531755	27,71281292	2,56
8	13	27,71281292	73,17914662	2,640625
13	21	73,17914662	190,9586015	2,609467456
21	34	190,9586015	500,5626834	2,621315193
34	55	500,5626834	1309,863423	2,616782007
55	89	1309,863423	3429,893612	2,618512397
89	144	3429,893612	8978,951386	2,617851281
144	233	8978,951386	23507,82657	2,618103781
233	377	23507,82657	61543,66231	2,618007331
377	610	61543,66231	161124,0264	2,618044171
610	987	161124,0264	421827,5508	2,618030099
987	1597	421827,5508	1104359,492	2,618035474
1597	2584	1104359,492	2891250,059	2,618033421
2584	4181	2891250,059	7569391,552	2,618034205
4181	6765	7569391,552	19816923,73	2,618033906
6765	10946	19816923,73	51881380,5	2,61803402

Figura 3.4: Área e Razões de Triângulos Equiláteros gerados por Fibonacci.

O valor da razão entre as áreas e as áreas anteriores tende a 2,618033989. Percebe-se que tende a  $\phi + 1 = \phi^2$ .

Na mesma linha de raciocínio, mas agora analisando no espaço, ou seja, os volumes de sólidos regulares, construídos com os números da sequência de Fibonacci, divididos cada um pelo volume gerado com o número anterior da sequência temos:

Raio da Esfera 1	Raio da Esfera 2	Volume da Esfera 1	Volume da Esfera 2	Razão entre Volume 2 e Volume 1
1	1	4,188790205	4,188790205	1
1	2	4,188790205	33,51032164	8
2	3	33,51032164	113,0973355	3,375
3	5	113,0973355	523,5987756	4,62962963
5	8	523,5987756	2144,660585	4,096
8	13	2144,660585	9202,77208	4,291015625
13	21	9202,77208	38792,38609	4,215293582
21	34	38792,38609	164636,2102	4,244034122
34	55	164636,2102	696909,9703	4,233029717
55	89	696909,9703	2952967,242	4,237229151
89	144	2952967,242	12507660,53	4,235624545
144	233	12507660,53	52985418,92	4,236237368
233	377	52985418,92	224446408,3	4,236003278
377	610	224446408,3	950775789,5	4,236092691
610	987	950775789,5	4027541901	4,236058538
987	1597	4027541901	17060955795	4,236071583
1597	2584	17060955795	72271345013	4,2360666
2584	4181	72271345013	3,06146E+11	4,236068504
4181	6765	3,06146E+11	1,29686E+12	4,236067777
6765	10946	1,29686E+12	5,49357E+12	4,236068054

Figura 3.5: Volume e Razões de Esferas geradas por Fibonacci.

Aresta do Cubo 1	Aresta do Cubo 2	Volume do Cubo 1	Volume do Cubo 2	Razão entre Volume 2 e Volume 1
1	1	1	1	1
1	2	1	8	8
2	3	8	27	3,375
3	5	27	125	4,62962963
5	8	125	512	4,096
8	13	512	2197	4,291015625
13	21	2197	9261	4,215293582
21	34	9261	39304	4,244034122
34	55	39304	166375	4,233029717
55	89	166375	704969	4,237229151
89	144	704969	2985984	4,235624545
144	233	2985984	12649337	4,236237368
233	377	12649337	53582633	4,236003278
377	610	53582633	226981000	4,236092691
610	987	226981000	961504803	4,236058538
987	1597	961504803	4073003173	4,236071583
1597	2584	4073003173	17253512704	4,2360666
2584	4181	17253512704	73087061741	4,236068504
4181	6765	73087061741	3,09602E+11	4,236067777
6765	10946	3,09602E+11	1,31149E+12	4,236068054

Figura 3.6: Volume e Razões de Cubos gerados por Fibonacci.

*Avaliação:* O valor da razão entre cada volume e o anterior tende a 4,236067978. Ou seja, tende a  $2\phi + 1$ , que são as potências de  $\phi$ , ou seja,  $\phi^3$ . A partir dessa atividade conversar com os alunos sobre as potências de  $\phi$ .

# Referências Bibliográficas

- Almeida, E. G. S. (2014). Propriedades e generalizações números de Fibonacci. Dissertação de Mestrado, UFPB, João Pessoa/PB.
- Azevedo, N. C. (2013). O número de ouro e construções geométricas. Dissertação de Mestrado, UFGO, Goiania/GO.
- Bertato, F. M. (2008). *The Divine Proportione, de Luca Pacioli*. Tese de Doutorado, UNICAMP, Campinas/SP.
- Biodental (2017). URL: <https://www.biodental.com.br/p/regua/regua-de-proporcao-aurea-fava-2121/4601>. Acesso 26 de mar de 2019.
- Boyer, C. B. (2010). *História da matemática*. Ed. Blucher, S.Paulo.
- Câmara, M. A. e Rodrigues, M. S. (2008). O número  $\phi$ . *FAMAT em revista*, 11:81–184.
- Lima, E. L. (2013). *Números e Funções Reais*. Ed. SBM, Rio de Janeiro.
- Lívio, M. (2007). *Razão Áurea*. Ed. Record, Rio de Janeiro.
- Minecraft (2013). URL: [https://pt.wikipedia.org/wiki/Proporção\\_áurea](https://pt.wikipedia.org/wiki/Proporção_áurea). Acesso 26 de mar de 2019.
- Nepomuceno, E. C. (2016). URL: <http://ericnep.com/2016/11/15/escolha-do-logotipo/>. Acesso 26 de mar de 2019.
- Pedrosa, H. (2014). URL: <https://slideplayer.com.br/slide/383313/>. Acesso 26 de mar de 2019.
- Posamentier, A. S. e Lehmann, I. (2007). *The Fabulous Fibonacci Numbers*. Prometheus Books, New York.

Santos, F. H. (2018). Funções de Fibonacci: Um estudo sobre a razão áurea e a sequência de Fibonacci. Dissertação de Mestrado, UFAL, Maceio/AL.

Villamón, V. (2010). URL: <https://www.pinterest.ch/pin/508836457869132396/>. Acesso 26 de mar de 2019.



# Apêndice

										Casa
										decimal
1.61803	39887	49894	84820	45868	34365	63811	77203	09179	80576	50
28621	35448	62270	52604	62818	90244	97072	07204	18939	11374	100
84754	08807	53868	91752	12663	38622	23536	93179	31800	60766	
72635	44333	89086	59593	95829	05638	32266	13199	28290	26788	200
06752	08766	89250	17116	96207	03222	10432	16269	54862	62963	
13614	43814	97587	01220	34080	58879	54454	74924	61856	95364	300
86444	92410	44320	77134	49470	49565	84678	85098	74339	44221	
25448	77066	47809	15884	60749	98871	24007	65217	05751	79788	400
34166	25624	94075	89069	70400	02812	10427	62177	11177	78053	
15317	14101	17046	66599	14669	79873	17613	56006	70874	80710	500
13179	52368	94275	21948	43530	56783	00228	78469	97829	77834	
78458	78228	91109	76250	03026	96156	17002	50464	33824	37764	
86102	83831	26833	03724	29267	52631	16533	92473	16711	12115	
88186	38513	31620	38400	52221	65791	28667	52946	54906	81131	
71599	34323	59734	94985	09040	94762	13222	98101	72610	70596	
11645	62990	98162	90555	20852	47903	52406	02017	27997	47175	
34277	75927	78625	61943	20827	50513	12181	56285	51222	48093	
94712	34145	17022	37358	05772	78616	00868	83829	52304	59264	
78780	17889	92199	02707	76903	89532	19681	98615	14378	03149	
97411	06926	08867	42962	26757	56052	31727	77520	35361	39362	1000
10767	38937	64556	06060	59216	58946	67595	51900	40055	59089	
50229	53094	23124	82355	21221	24154	44006	47034	05657	34797	
66397	23949	49946	58457	88730	39623	09037	50339	93856	21024	
23690	25138	68041	45779	95698	12244	57471	78034	17312	64532	
20416	39723	21340	44449	48730	23154	17676	89375	21030	68737	
88034	41700	93954	40962	79558	98678	72320	95124	26893	55730	
97045	09595	68440	17555	19881	92180	20640	52905	51893	49475	
92600	73485	22821	01088	19464	45442	22318	89131	92946	89622	
00230	14437	70269	92300	78030	85261	18075	45192	88770	50210	
96842	49362	71359	25187	60777	88466	58361	50238	91349	33331	
22310	53392	32136	24319	26372	89106	70503	39928	22652	63556	
20902	97986	42472	75977	25655	08615	48754	35748	26471	81414	
51270	00602	38901	62077	73224	49943	53088	99909	50168	03281	
12194	32048	19643	87675	86331	47985	71911	39781	53978	07476	
15077	22117	50826	94586	39320	45652	09896	98555	67814	10696	
83728	84058	74610	33781	05444	39094	36835	83581	38113	11689	
93855	57697	54841	49144	53415	09129	54070	05019	47754	86163	
07542	26417	29394	68036	73198	05861	83391	83285	99130	39607	
20144	55950	44977	92120	76124	78564	59161	60837	05949	87860	
06970	18940	98864	00764	43617	09334	17270	91914	33650	13715	2000

Figura 3.7: Número  $\phi$  com 2000 casas decimais.