UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ - UTFPR
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL
PROFMAT

ANDRESSA DO ESPÍRITO SANTO

CONJUNTOS INFINITOS E FUNÇÕES BIJETIVAS: UMA ABORDAGEM NA EDUCAÇÃO BÁSICA

CURITIBA

2019

ANDRESSA DO ESPÍRITO SANTO

CONJUNTOS INFINITOS E FUNÇÕES BIJETIVAS: UMA ABORDAGEM NA EDUCAÇÃO BÁSICA

Dissertação apresentada ao Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Tecnológica Federal do Paraná em Curitiba - PROFMAT-UTCT como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre.
Orientadora: Dra. Paula Olga Gneri
Coorientadora: Dra. Patricia Hess

CURITIBA

2019

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação

E77c Espírito Santo, Andressa do
Conjuntos infinitos e funções bijetivas [recurso eletrônico] : uma abordagem na educação básica / Andressa do Espírito Santo.— 2019.
1 arquivo texto (63 f.) : PDF ; 2,10 MB.

Modo de acesso: World Wide Web.
Texto em português com resumo em inglês.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Curitiba, 2019.
Bibliografia: f. 63.

1. Matemática - Dissertações. 2. Teoria dos conjuntos. 3. Funções (Matemática). 4. Infinito. 5. Professores de matemática - Formação. 6. Prática de ensino. 7. Matemática - Estudo e ensino (Ensino médio). 8. Educação de base. I. Gneri, Paula Olga, orient. II. Hess, Patricia, coorient. III. Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. IV. Título.

CDD: Ed. 23 – 510

Biblioteca Central do Câmpus Curitiba – UTFPR
Bibliotecária: Luiza Aquemi Matsumoto CRB-9/794

Ministério da Educação
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Diretoria de Pesquisa e Pós-Graduação

TERMO DE APROVAÇÃO DE DISSERTAÇÃO Nº 66

A Dissertação de Mestrado intitulada “Conjuntos Infinitos e Funções Bijetivas: uma abordagem na educação básica”, defendida em sessão pública pela candidata **Andressa do Espírito Santo**, no dia 30 de abril de 2019, foi julgada para a obtenção do título de Mestre, área de concentração Ensino de Matemática, e aprovada em sua forma final, pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT.

BANCA EXAMINADORA:

Profa. Dra. Patrícia Hess - Presidente – UTFPR
Prof. Dr. Fábio Dorini – UTFPR
Prof. Dr. Luis Antônio Ribeiro de Santana – UFPR

A via original deste documento encontra-se arquivada na Secretaria do Programa, contendo a assinatura da Coordenação após a entrega da versão corrigida do trabalho.

Curitiba, 30 de abril de 2019.

Carimbo e Assinatura do(a) Coordenador(a) do Programa

Aos meus pais e a minha irmã que com muito carinho e apoio, não mediram esforços para que eu chegasse até esta etapa de minha vida.

AGRADECIMENTOS

A Deus por minha vida, família e amigos. A UTFPR pelo ambiente criativo e amigável que proporciona. As professoras Paula Olga Gneri e Patricia Hess pela oportunidade e apoio na elaboração deste trabalho. Agradeço a minha mãe, heroína que me deu apoio, incentivo nas horas difíceis, de desânimo e cansaço. A todos os colegas de turma que direta ou indiretamente fizeram parte da minha formação, o meu muito obrigado.

À CAPES pela recomendação do PROFMAT por meio do parecer do Conselho Técnico Científico da Educação Superior.

À Sociedade Brasileira de Matemática que na busca da melhoria do ensino de Matemática da Educação Básica viabilizou a implantação do PROFMAT.

RESUMO

DO ESPIRITO SANTO, Andressa. **Conjuntos infinitos e funções bijetivas: uma abordagem no ensino básico**. 63f Dissertação - Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Curitiba, 2019.

Neste trabalho propomos uma atividade que objetiva formalizar a definição de conjunto infinito na educação básica através do conceito de função bijetiva. Para tanto, iniciamos o texto realizando a fundamentação teórica através de uma análise rigorosa dos conceitos de conjuntos e função que são fundamentais para a matemática e essenciais para definição de conjunto infinito. Na sequência, apresentamos uma breve pesquisa sobre a maneira como são abordados esses dois conceitos, bem como a existência ou não de algo relacionado a conjunto infinito em alguns livros didáticos nacionais. Finalizamos o trabalho com uma proposta de sequência didática para ser apresentada em turmas do ensino médio com o objetivo de explorar o conceito de bijeção como base fundamental para que o aluno seja capaz de diferenciar um conjunto infinito de um conjunto finito muito grande.

Palavras-chave: Conjuntos. Funções. Conjuntos Infinitos.

ABSTRACT

DO ESPIRITO SANTO, Andressa. **Infinite sets and bijective functions: an approach in basic education**. 63f. Dissertação - Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Curitiba, 2019.

This work proposes a classroom activity which is useful to help basic education students understand the formalization of infinite sets, through the concept of a bijective functions. Therefore, we begin the study presenting its theoretical basis through a detailed analysis on two fundamental concepts of mathematics and essential for definition of infinite sets: sets and functions. Following, we do a brief survey on the approach of these two concepts, as well as the existence or not of something related to infinite set in some national textbooks. We conclude the work with a proposal of a didactic sequence to be presented in high school with the objective of exploring the concept of bijection as the fundamental basis for the student to be able to differentiate an infinite set from a very large finite set.

Keywords: Sets. Functions. Infinite Sets.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

O infinito é um dos conceitos mais intrigantes da matemática básica e que muito cedo aparece em nosso cotidiano. Um exemplo disto é que desde pequenos somos estimulados a olhar para o céu e ver as estrelas, e muitas vezes, até tentar contá-las. Mais tarde, já na escola, o primeiro contato com o conceito de infinito começa em nossa aprendizagem a contar. Começamos com números pequenos e vamos aumentando até surgir a pergunta natural: onde acabam os números?

Apesar do infinito ser um conceito inerente ao ser humano, fazendo uma breve pesquisa em livros didáticos usados nas escolas nacionais, percebemos que este conceito não é explorado e nem analisado como deveria na Educação Básica. Desta forma, o objetivo central deste trabalho é formalizar a noção de conjunto infinito no Ensino Médio através do conceito de função bijetiva. Nossa ideia é que o aluno de Ensino Médio tenha um primeiro contato com o conceito formal de conjunto infinito, isto é, um conjunto que está em bijeção com um subconjunto próprio. Desta forma, esperamos que o aluno seja capaz de entender a diferença entre um conjunto finito muito grande e um conjunto infinito.

Para estudar de forma contundente a noção de conjunto infinito é necessário um conhecimento preliminar bem explorado dos conceitos de conjunto, função, injetividade, sobrejetividade e bijetividade. Enfatizamos a importância do estudo destes conceitos para o aluno por serem conceitos fundamentais na Matemática Moderna, isto é, são conceitos necessários para iniciar qualquer estudo em Matemática. Além disso, a ideia de conjunto infinito ajuda a desenvolver a abstração dos alunos, um dos objetivos de estudar matemática no Ensino Médio.

Entendemos, portanto, que o estudo de conjuntos infinitos é importante como introdução a utilização de conceitos abstratos e ainda ajuda a amadurecer os conceitos fundamentais de conjuntos e funções.

Pretendemos que essa dissertação seja usada por professores de Ensino Médio para reafirmar seus conhecimentos sobre conjuntos e funções e que tenham uma ideia de uma atividade para apresentar a noção de conjunto infinito a seus alunos. Para isso, dividimos o trabalho em quatro capítulos.

No Capítulo 1, com objetivo de dar suporte teórico, faremos uma introdução aos conceitos de conjuntos e funções com as definições básicas e com alguns dos principais teoremas. Usamos como referências o trabalho do PROFMAT (BACCARIN, 2013) , o livro (GRIFFITHS, 1975) e o livro (ARAGÓN et al., 2011) . No Capítulo 2 definiremos conjunto infinito. Para chegarmos a este conceito precisamos definir e caracterizar conjuntos finitos e, como etapa fundamental, entender que bijeções só podem ser definidas entre conjuntos com mesma quantidade de elementos. Para alguns dos resultados aqui apresentados não serão apresentadas demonstrações, optamos por apenas apresentar uma ideia intuitiva para deixar um texto de leitura mais leve e acessível para professores e alunos. Neste capítulo utilizamos como referências o trabalho do PROFMAT (BORGES, 2015) e os livros (LIMA, 2016) e (GRIFFITHS, 1975). No Capítulo 3, com o objetivo de se fazer uma pesquisa em livros didáticos nacionais, apresentaremos de que maneira os conceitos de conjuntos e função aparecem em tais livros, bem como se em algum deles foi encontrado algo relacionado a conjunto infinito. Em seguida destacamos os pontos positivos de cada livro e as diferenças conceituais entre eles. Para a pesquisa analisamos os seguintes livros didáticos: (DANTE, 2013), (LEONARDO, 2013), (GIOVANNI; BONJORNO; GIOVANNI JR, 2011) e (SOUZA; GARCIA, 2016). No Capítulo 4, apresentaremos um esboço de atividades que podem ser desenvolvidas com alunos de Ensino Médio logo após terem passado pelo estudo de conjuntos e funções. Nestas atividades, a ideia principal é fazer o aluno compreender através de exemplos a característica mais importante de bijeções descrita acima para, assim, entender a definição de conjunto infinito.

1 CONJUNTOS E FUNÇÕES

Algumas das primeiras noções matemáticas que temos na primeira infância são a de conjuntos, formas geométricas e quantidades, esta última relacionada aos números naturais. A palavra conjunto tem origem do latim *conjunctus* que significa unido, ligado, conexo, e a matemática tomou posse dessa palavra para a criação de uma grande área. Na matemática, o estudo que envolve Conjuntos foi desenvolvido a partir de 1874 por Georg Cantor [1]. Ele iniciou seus estudos, em busca de uma formalização para o conceito de infinito, chegando à conlcusão de que existem diferentes ordens infinitas. A classificação dessas ordens se torna possível quando essa questão é formulada em termos de números, denominados por ele, de transfinitos. Isso levou-o a desenvolver um formalismo matemático, conhecido hoje como Teoria dos Conjuntos. Segundo Eves [2] :

> "A moderna teoria matemática dos conjuntos é uma das mais notáveis criações do espírito humano."(EVES, 2008)

Conjuntos é um conteúdo abordado desde a educação infantil, quando pedimos por exemplo, a uma criança para separar lápis ou canetas pela cor, até o Ensino Médio[3]. De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs), nas décadas de 60 a 70, o ensino da matemática no Brasil, assim como em outros países, foi influenciado por um movimento de renovação que ficou conhecido como Matemática Moderna:

> O ensino passou a ter preocupações excessivas com formalizações, distanciando-se das questões práticas. A linguagem da Teoria dos Conjuntos, por exemplo, enfatizava o ensino de símbolos e de uma terminologia complexa comprometendo o aprendizado do cálculo aritmético, da geometria e das medidas. (BRASIL, 1998)

Na Base Nacional Comum Curricular (BNCC) encontramos as habilidades esperadas pelo estudante de 1^o ano do ensino fundamental no que diz respeito ao conceito de conjuntos:

> Estimar e comparar quantidades de objetos de dois conjuntos (em torno de 20 elementos), por estimativa e/ou por correspondência (um a um, dois a dois) para indicar tem mais, tem menos ou tem a mesma quantidade. (BRASIL, 2018)

Assim, neste capítulo, apresentaremos a parte teórica dos conceitos relacionados a Conjuntos e Funções que servirão de base para o entendimento de conjuntos finitos e infinitos no capítulo seguinte.

---

1 George Ferdinand Philipp Cantor (1845-1918): foi um matemático alemão nascido no Império Russo.

2 Howard Whitley Eves (1911-2004): foi um matemático estadunidense, especializado em geometria e história da matemática.

3 Atualmente o estudo dos conjuntos é distribuído entre os anos de 6^o a 9^o. O Ensino Médio é que aborda o tema com ênfase, propriedades, teorias, axiomas e demonstrações.

1.1 CONJUNTOS

Segundo (LIMA, 2016) um *conjunto* (ou *coleção*) é formado de objetos chamados *os seus elementos*. Dado um elemento x e um conjunto A temos como pergunta natural: x é elemento de A? Tal pergunta só tem duas respostas possíveis:

- Sim, neste caso dizemos que x pertence a A e escrevemos $x \in A$.
- Não, neste caso dizemos que x não pertence a A e escrevemos $x \notin A$.

Esta relação entre elemento e conjunto é chamada de relação de pertinência. Os conjuntos, em geral, são representados por letras maiúsculas, e seus elementos, por letras minúsculas.

A descrição de um conjunto pode ser dada de forma a listar todos os seus elementos colocados dentre chaves. Assim a descrição abreviada de um conjunto pode ser escrita na forma

$$\{x \,|\, P(x)\},$$

onde x é um elemento do conjunto que satisfaz uma propriedade $P(x)$. Por exemplo,

$$A = \{x \,|\, x \text{ é um gato}\} \qquad , B = \{x \,|\, x \text{ é ciência exata}\}.$$

Neste caso a propriedade P do conjunto A é ser gato e $P(x)$ significa que x é gato, e a propriedade P do conjunto B é ser ciência exata e $P(x)$ significa que x é ciência exata.

Para que possamos delimitar sem ambiguidade sobre um determinado conjunto, consideremos as seguintes definições:

Definição 1.1. *Um conjunto universo $\mathbb{U}$ é um conjunto que contém todos os elementos que queremos considerar em uma determinada situação.*

Definição 1.2. *O conjunto vazio é o conjunto que não possui elemento, representado pelo símbolo $\emptyset$ ou por $\{\}$.*

Voltando ao conjunto $A = \{x \,|\, x \text{ é um gato}\}$, se $\mathbb{U}$ for o conjunto de todos os mamíferos vivos, então o conjunto A representa o conjunto de todos os gatos vivos, mas se tivéssemos fixado $\mathbb{U}$ como o conjunto de todos os répteis vivos, o conjunto A seria o conjunto vazio.

Temos uma relação entre conjuntos, chamada de relação de inclusão. A inclusão é uma relação entre dois conjuntos definida da seguinte forma: dizemos que A está incluído em B, ou A está contido em B, e denotamos por $A \subset B$ se todo elemento de A é um elemento de B, ou seja:

$$A \subset B \Leftrightarrow [x \in A \Rightarrow x \in B].$$

Neste caso também dizemos que A é subconjunto de B. Note que, se existe um elemento de A que não pertence a B então A não está contido em B, e escrevemos $A \not\subset B$.

Definição 1.3. *Dizemos que A é igual a B sempre que A for subconjunto de B e B for subconjunto de A,*

$$A = B \Leftrightarrow A \subset B \text{ e } B \subset A.$$

A relação de inclusão satisfaz as seguintes propriedades:

- *Reflexiva:* $A \subset A$, para todo conjunto A.
- *Antissimétrica:* Se $A \subset B$ e $B \subset A$ então $A = B$.
- *Transitiva:* Se $A \subset B$ e $B \subset C$ então $A \subset C$.

Faremos a demonstração da propriedade transitiva. Considerando que $A \subset B$ e $B \subset C$ devemos provar que todo elemento de A é também elemento de C.

- Se $A = \emptyset$ então é imediato ver que $A \subset C$.
- Se $A \neq \emptyset$. Seja $x \in A$. Como $A \subset B$ então $x \in B$, e como $B \subset C$, então $x \in C$.

Observação 1.4. *Quando escrevemos $A \subset B$, não está excluída a possibilidade de se ter $A = B$. No caso em que $A \subset B$ e $A \neq B$, diz-se que A é um subconjunto próprio de B.*

Veremos agora mais uma definição de grande importância na teoria de conjuntos.

Definição 1.5. *Dado um conjunto A, chama-se conjunto das partes de A, denotado por $\mathcal{P}(A)$, aquele que é formado por todos os subconjuntos de A,*

$$\mathcal{P}(A) = \{X |\, X \subset A\}$$

.

Vejamos alguns exemplos:

Exemplo 1.6. Se $A = \{1\}$,então os elementos de $\mathcal{P}(A)$ são $\emptyset$ e $\{1\}$ isto é: $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}\}$.

Exemplo 1.7. Se $A = \{1,\, 2\}$, os elemento então os de $\mathcal{P}(A)$ são $\emptyset$, $\{1\}$, $\{2\}$ e $\{1,\, 2\}$, isto é, $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset,\, \{1\},\, \{2\},\, \{1, 2\}\}$.

Além das relações de pertinência e de inclusão, podemos ainda definir operações entre conjuntos: união, interseção e diferença.

Definição 1.8. *A união de dois conjuntos A e B é um conjunto representado por $A \cup B$ e escrito da seguinte maneira:*

$$A \cup B = \{x \,|\, x \in A \text{ ou } x \in B\}.$$

Em Matemática, o conectivo lógico "ou" significa que valem uma das afirmações ou ambas ao mesmo tempo.

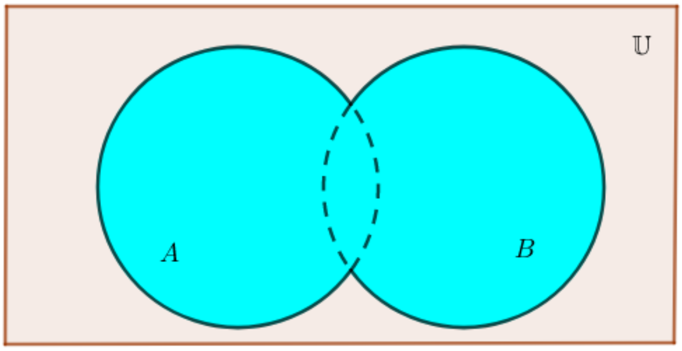


Figura 1 – A e B são cada um dos círculos e a parte colorida representa a união desses dois conjuntos.

Exemplo 1.9. Considere os conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$, então:

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10\}.$$

Observação 1.10. *Os elementos comuns aos dois conjuntos aparecerão uma única vez na união, já que eles representam o mesmo elemento.*

Definição 1.11. *A interseção de dois conjuntos A e B é um conjunto formado pelos elementos comuns ao conjunto A e ao conjunto B, representada por $A \cap B$. Assim se $x \in A \cap B$ então $x \in A$ e $x \in B$ e escrevemos:*

$$A \cap B = \{x \,|\, x \in A \text{ e } x \in B\}.$$

Caso não exista um elemento x tal que $x \in A$ e $x \in B$ então $A \cap B = \emptyset$, e nesse caso dizemos que A e B são conjuntos disjuntos.

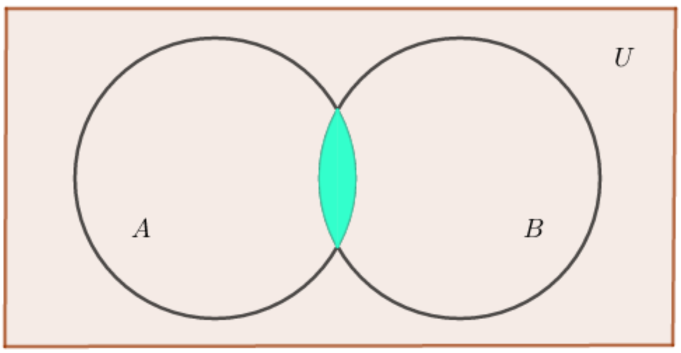


Figura 2 – Os conjuntos A e B são representados por cada um dos círculos e a parte colorida representa a interseção desses conjuntos.

Exemplo 1.12. Sejam os conjuntos $A = \{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 11,\ 13,\}$ e $B = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10\}$, então $A \cap B = \{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9\}$.

Veremos agora as propriedades que envolvem essas operações.

Proposição 1.13. *As operações de união e interseção são:*

1. ***Comutativas:*** $A \cup B = B \cup A$ *e* $A \cap B = B \cap A$.
2. ***Associativas:*** $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ *e* $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.
3. ***Distributivas:*** *cada uma delas é distributiva em relação à outra:*

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C),$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

Definição 1.14. *A diferença entre dois conjuntos A e B é um conjunto formado pelos elementos de A que não pertencem a B, representado por $A - B$. Escrevemos:*

$$A - B = \{x \,|\, x \in A \text{ e } x \notin B\}.$$

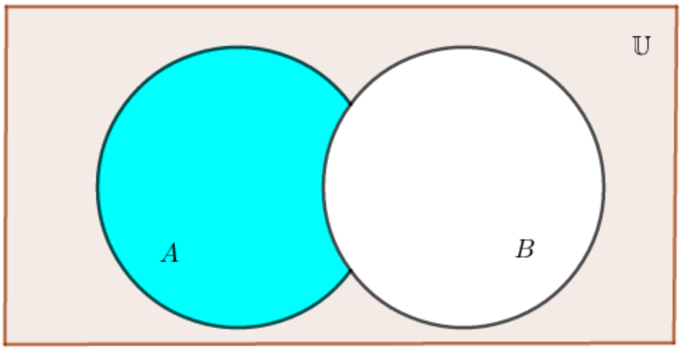


Figura 3 – Os conjuntos A e B são representados por cada um dos círculos e a parte colorida representa a diferença desses conjuntos.

Exemplo 1.15. Sejam os conjuntos $A = \{12,\ 23,\ 25,\ 31,\ 37,\ 39\}$ e $B = \{37,\ 39,\ 42,\ 57,\ 60\}$ então

$$A - B = \{12,\ 23,\ 25,\ 31\},$$

$$B - A = \{42,\ 57,\ 60\}.$$

Perceba que a diferença entre dois conjuntos não é comutativa.

Definidas as operações podemos apresentar mais um conjunto chamado de complementar de um dado conjunto A.

Definição 1.16. *Chama-se complementar do conjunto A ao conjunto A^c, formado pelos elementos de $\mathbb{U}$ que não pertencem a A,*

$$A^c = \{x \in \mathbb{U} \,|\, x \notin A\}.$$

Existem ainda outras notações para representar o complementar de um conjunto: $\bar{A}$ ou ainda $\complement_{\mathbb{U}} A$. Perceba que falar de complementar de um conjunto só faz sentido se um conjunto estiver contido em outro conjunto. Assim sempre que falarmos em complementar estaremos considerando um conjunto dentro do outro. Dessa forma podemos relacionar o complementar com a diferença entre conjuntos, assim o complementar de A é a diferença entre os conjuntos $\mathbb{U}$ e A pondendo ser representado por:

$$\complement_{\mathbb{U}} A = \mathbb{U} - A.$$

.

Vejamos agora algumas propriedades do complementar de um conjunto.

Proposição 1.17. *O complementar de um conjunto possui as seguintes propriedades.*

1. *Para todo $A \subset \mathbb{U}$, tem - se $(A^c)^c = A$ (todo conjunto é complementar de seu complementar).*

   Demonstração. Para demonstrarmos que $(A^c)^c = A$ mostraremos que $(A^c)^c \subset A$ e que $A \subset (A^c)^c$.

   - Se $A = \emptyset \Longrightarrow A^c = \mathbb{U} \Longrightarrow (A^c)^c = \emptyset$.
   - Primeiramente mostraremos que $(A^c)^c \subset A$. Seja $x \in (A^c)^c$, pela definição de complementar $x \notin A^c$, logo $x \in A$, isto é, $(A^c)^c \subset A$. Agora mostraremos que $A \subset (A^c)^c$. Seja $x \in A$, pela definição de complementar $x \notin A^c$, logo $x \in (A^c)^c$, isto é,$(A^c)^c \subset A$. Como $(A^c)^c \subset A$ e $A \subset (A^c)^c$ teremos que $(A^c)^c = A$.

   □

2. *Se $A \subset B$ então $B^c \subset A^c$ (se um conjunto está contido em outro, seu complementar contém o complementar de outro).*

   Demonstração. Se $B = \mathbb{U}$ então $B^c = \emptyset \subset A$. Seja $x \in B^c$, então pela definição de complementar $x \notin B$. Como $x \in \mathbb{U} = A \cup A^c$, então $x \in A$ ou $x \in A^c$. Se $x \in A$, teríamos por hipótese que $x \in B$, o que seria uma contradição pois $x \in B^c$. Logo $x \in A^c$. □

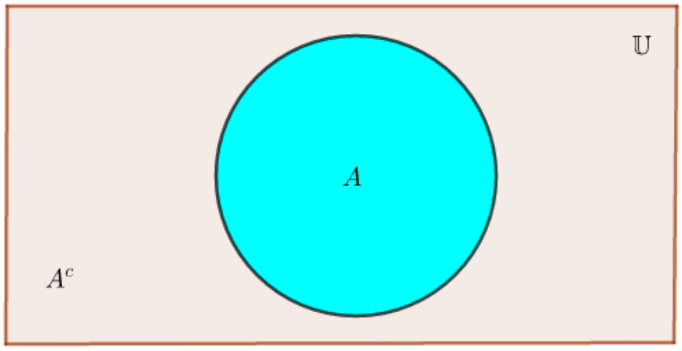


Figura 4 – A^c

Na Figura 4 temos a representação de A^c, onde A é o círculo colorido em azul e a parte de fora do círculo corresponde a A^c.

Exemplo 1.18. Sejam $\mathbb{U}$ o conjunto dos números naturais menores do que ou iguais a 10 e A o conjunto dos naturais pares em $\mathbb{U}$, $A = \{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10\}$, assim teremos $A^c = \{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9\}$.

Em relação ao complementar, existem ainda algumas relações que são atribuídas ao matemático inglês Augustus de Morgan.Vejamos a seguir quais são essas propriedades:

1. $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$.

   Demonstração. Se $x \in (A \cup B)^c$ então $x \notin (A \cup B)$. Suponha por absurdo que $x \in A$ ou $x \in B$ então teríamos que $x \in A \cup B$. Assim , $x \notin A$ e $x \notin B$, isto é, $x \in A^c$ e $x \in B^c$. Logo, segue que $x \in A^c \cap B^c$. Portanto, $(A \cup B)^c \subset A^c \cap B^c$. Agora mostraremos que $A^c \cap B^c \subset (A \cup B)^c$. Se $x \in A^c \cap B^c$ então $x \in A^c$ e $x \in B^c$. Assim, $x \notin A$ e $x \notin B$. Logo segue que $x \notin (A \cup B)$, ou seja, $x \in (A \cup B)^c$. Portanto $A^c \cap B^c \subset (A \cup B)^c$. Conclui-se que $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$. $\square$

2. $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.

   Demonstração. Se $x \in (A \cap B)^c$ então $x \notin (A \cap B)$. Suponha por absurdo que $x \in A$ e $x \in B$ então teríamos que $x \in A \cap B$ logo $x \notin A$ ou $x \notin B$, isto é , $x \in A^c$ ou $x \in B^c$. Disto segue que $x \in A^c \cup B^c$. Assim $(A \cap B)^c \subset A^c \cup B^c$. Agora mostraremos que $A^c \cup B^c \subset (A \cap B)^c$. Se $x \in A^c \cup B^c$ então $x \in A^c$ ou $x \in B^c$. Assim , $x \notin A$ ou $x \notin B$. Segue que $x \notin (A \cap B)$, ou seja, $x \in (A \cap B)^c$. Logo $A^c \cup B^c \subset (A \cap B)^c$. Conclui-se que $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$. $\square$

Neste momento do trabalho apresentaremos duas defnições que serão importantes para o estudo dos conjuntos numéricos e suas propriedades: produto cartesiano e relação entre dois conjuntos.Vale salientar que já foi citada a palavra relação quando foram apresentadas as noções de relação de pertinência e inclusão. A partir de agora, o termo relação terá outro significado mais amplo que apresentaremos adiante.

Definição 1.19. *O Produto Cartesiano de dois conjuntos A e B, representado por $A \times B$, é o conjunto de todos os pares ordenados (a, b) com $a \in A$ e $b \in B$, ou seja,*

$$A \times B = \{(a, b) \,|\, a \in A \ e \ b \in B\}.$$

Exemplo 1.20. Considere os conjuntos $A = \{1\,,2\,,3\,,4\,,5\,\}$ e $B = \{2\,,3\,,4\,\}$. No produto cartesiano $A \times B$ os elementos de A devem assumir a primeira posição e os elementos de B a segunda posição. Portanto, temos que $A \times B = \{(1, 2);\ (1, 3);\ (1, 4);\ (2, 2)\,(2, 3);\ (2, 4);\ (3, 2);\ (3, 3);$ $(3, 4); (4, 2);\ (4, 3);\ (4, 4); (5, 2);\ (5, 3);\ (5, 4)\}$.

Note que $A \times B \neq B \times A$, pois $(2, 1) \in B \times A$ e $(2, 1) \notin A \times B$. Por sua vez, $B \times A$ é dado por $\{(2, 1);\ (2, 2);\ (2, 3);\ (2, 4);\ (2, 5);\ (3, 1);\ (3, 2);\ (3, 3);\ (3, 4);\ (3, 5);\ (4, 1);\ (4, 2);$ $(4, 3);\ (4, 4);\ (4, 5)\}$.

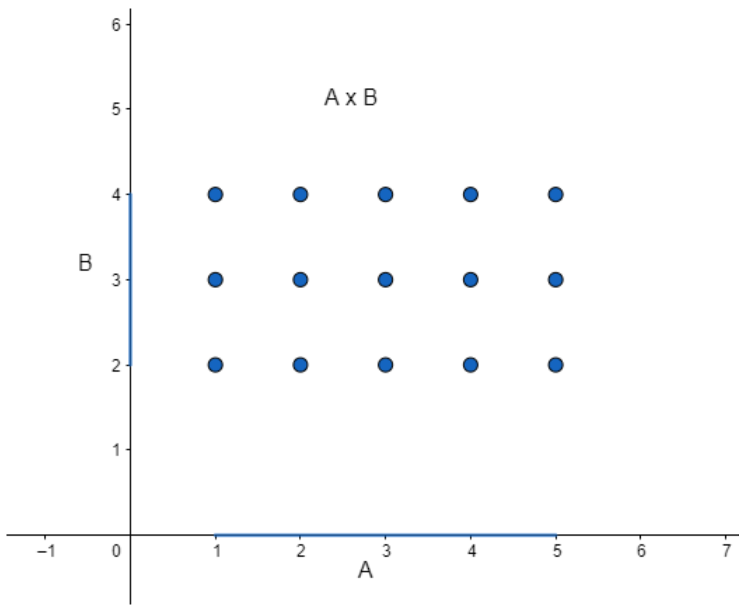


Figura 5 – $A \times B$

Na Figura 5 temos a representação geométrica do produto cartesiano $A \times B$.

Observação 1.21. *Observe também que $A \not\subset A \times B$ e $B \not\subset A \times B$, pois nem os elementos de A e nem os elementos de B são pares ordenados.*

Definição 1.22. *Seja $\mathbb{U}$ um conjunto universo fixado. Dados $A, B \subset \mathbb{U}$, uma relação entre A e B é um subconjunto R de $A \times B$. Então nessas condições, A é denominado conjunto de partida* *de R e B é denominado de conjunto de chegada de R. Ou seja, R é relação entre A e B se:*

$$R \subset A \times B.$$

Denominamos de:

1. Domínio de R o conjunto $D(R) = \{x \in A |\ \exists\, y \in B \text{ com } (x, y) \in R\} \subset A$.
2. Imagem de R o conjunto $Im(R) = \{y \in B |\ \exists\, x \in A \text{ com } (x, y) \in R\} \subset B$.
3. Contradomínio de R o conjunto B.

Exemplo 1.23. Sejam os conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $B = \{a, b, c, d, e, f\}$ e seja a seguinte relação R entre os conjuntos A e B dada por:

$$R = \{(2, a);\ (2, c);\ (3, b);\ (4, d);\ (5, d)\}.$$

Então

$$D(R) = \{2, 3, 4, 5\} \subset A,$$

$$Im(R) = \{a, b, c, d\} \subset B.$$

Tal relação pode ser descrita pelo seguinte diagrama:

$$A \longrightarrow B$$

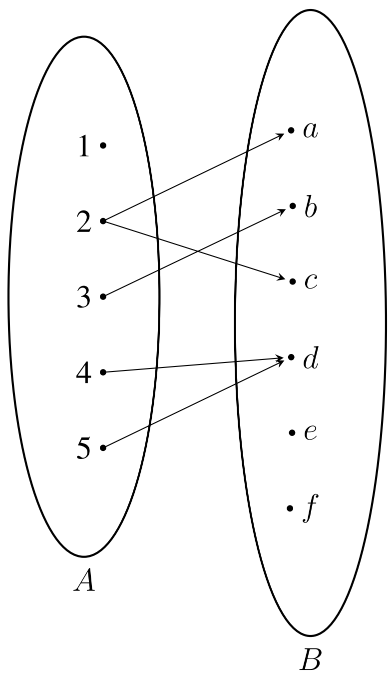


Figura 6 – Relação R entre A e B

Na Figura 6, é indicado como cada elemento de A está relacionado com os elementos de B.

1.1.1 CONJUNTOS NUMÉRICOS

Cada conjunto numérico é definido a partir de uma necessidade de se definir novos elementos e novas operações. Na matemática elementar definimos os conjuntos numéricos de acordo com as características de seus elementos. Vejamos de forma sucinta a seguir cada um deles:

Números Naturais

Denomina-se o conjunto dos números naturais - símbolo $\mathbb{N}$ - o conjunto formado pelos números $\{1, 2, 3, 4, 5, ...\}$. Neste conjunto são definidas duas operações fundamentais, a adição e a multiplicação. Isto significa que adição e multiplicação de dois números naturais é ainda um número natural. Estas operações satisfazem as seguintes propriedades:

S_1 Propriedade comutativa da adição:
$a + b = b + a$, para todo a, b em $\mathbb{N}$;

S_2 Propriedade associativa da adição:
$a + (b + c) = (a + b) + c$, para todo a, b e c em $\mathbb{N}$;

P_1 Propriedade comutativa da multiplicação:
$a.b = b.a$, para todo a, b em $\mathbb{N}$;

P_2 Propriedade associativa da multiplicação:
$a.(b.c) = (a.b).c$, para todo a, b e c em $\mathbb{N}$;

P_3 Existência de elemento neutro da multiplicação:
$1.a = a$, para todo a em $\mathbb{N}$.

Veremos que os próximos conjuntos numéricos a serem apresentados são ampliações de $\mathbb{N}$, isto é, contêm $\mathbb{N}$, têm uma adição e uma multiplicação que restritas a $\mathbb{N}$ satisfazem as propriedades acima e, sobre o conjunto maior, ganham novas propriedades.

Números Inteiros

Dado um natural a, o simétrico[4] de a não existe em $\mathbb{N}$. O símbolo $a - b := a + (-b)$ (que é a soma de a com o simétrico do natural b) não tem significado em $\mathbb{N}$ para todo $a, b \in \mathbb{N}$, ou seja, em $\mathbb{N}$ a subtração não é uma operação bem definida, pois subtração de números naturais nem sempre é um natural, por exemplo $1 - 2 \notin \mathbb{N}$. Dessa forma, justifica-se a necessidade de um novo conjunto numérico.

[4] Elemento simétrico de a é o elemento b tal que $a + b = 0$. No caso de $n \in \mathbb{N}$, seu simétrico é o inteiro $-n$.

Denomina-se o conjunto dos números inteiros - símbolo $\mathbb{Z}$ - o seguinte conjunto $\{..., -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2...\} = \{..., -4, -3, -2, -1, 0\} \bigcup \mathbb{N}$.

Neste conjunto definimos as mesmas operações de soma e multiplicação definidas $\mathbb{N}$. As cinco propriedades dessas operações (duas da soma e três da multiplicação) continuam válidas, sendo agora estendidas para os números inteiros, ou seja, soma e multiplicação de números inteiros é ainda um número inteiro. Além disso, temos a existência do elemento simétrico, assim, ao fazermos a ampliação de $\mathbb{N}$ a $\mathbb{Z}$, ganhamos duas propriedades em relação a soma:

S_3 Existência de elemento neutro da soma:
$a + 0 = a$, para todo a em $\mathbb{Z}$;

S_4 Existência de elemento simétrico da soma:
Dado $a \in \mathbb{Z}$, existe $-a \in \mathbb{Z}$ tal que $a + (-a) = 0$.

Para fixar notação, no conjunto $\mathbb{Z}$ definimos três subconjuntos:

- $\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, 3, ...\}$(denominado conjunto dos inteiros não negativos).
- $\mathbb{Z}_- = \{..., -4, -3, -2, -1, 0\}$(denominado conjunto dos inteiros não positivos).
- $\mathbb{Z}^* = \{..., -3, -2, -1, 1, 2, 3, ...\}$(denominado conjunto dos inteiros não nulos).

Números Racionais

Suponha que tivéssemos que dividir 3 maçãs para 3 pessoas. Claramente seria possível, pois cada pessoa ficaria com 1 unidade de maçã. Suponha agora que tivéssemos que dividir uma barra de chocolate para 5 pessoas. Como efetuaríamos tal operação no conjunto dos números inteiros, se ela não está definida em $\mathbb{Z}$? Este problema vem de não termos em $\mathbb{Z}$ uma propriedade para a multiplicação similar a propriedade S_4 da soma descrita acima, a falta de elemento inverso[5] em $\mathbb{Z}$, por isso temos a necessidade de estendê -lo.

Denomina-se conjunto dos números racionais - símbolo $\mathbb{Q}$ - o conjunto dos pares ordenados (ou frações) $\frac{a}{b}$, em que $a \in \mathbb{Z}$ e $b \in \mathbb{N}$, isto é

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} : a \in \mathbb{Z} \text{ e } b \in \mathbb{N} \right\}.$$

Note que se $a \in \mathbb{Z}$ então $a \in \mathbb{Q}$, pois basta identificar a com $\frac{a}{1}$.

Em $\mathbb{Q}$ definimos a soma e a multiplicação da seguinte forma:

[5] Entende-se por inverso de $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}^*$ o número $\frac{q}{p}$.

- Soma: $\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d} = \dfrac{ad+bc}{bd}$;
- Multiplicação: $\dfrac{a}{b} . \dfrac{c}{d} = \dfrac{ac}{bd}$.

Estas duas operações satisfazem as propriedades S_1, S_2, S_3, S_4, P_1, P_2, P_3 e

P_4 Existência de elemento inverso para a multiplicação:
Dado $a \in \mathbb{Q} - \{0\}$ existe $\frac{1}{a} \in \mathbb{Q} - \{0\}$ tal que $a.\frac{1}{a} = 1$.

Além disso, as operações de soma e multiplicação definidas em $\mathbb{Q}$, se restritas a $\mathbb{N}$ e a $\mathbb{Z}$, são as operações originalmente definidas nesses conjuntos. Novamente com o intuito de fixar notação, no conjunto dos racionais, destacamos os subconjuntos:

- $\mathbb{Q}_+$ = conjunto dos racionais não negativos.
- $\mathbb{Q}_-$ = conjunto dos racionais não positivos.
- $\mathbb{Q}^*$ = conjunto dos racionais não nulos.

Vejamos que ainda temos um outro conjunto numérico que não se encaixa nos três conjuntos vistos acima. Consideremos a seguinte situação, ilustrada pela Figura 7 abaixo:

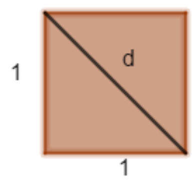


Figura 7 – Quadrado de lado igual a 1 e diagonal d

Queremos encontrar a medida da diagonal desse quadrado. Aplicando o Teorema de Pitágoras:

$$d^2 = 1^2 + 1^2 = 1 + 1 = 2.$$

O número d tal que $d^2 = 2$ será denotado por $\sqrt{2}$. A dúvida que surge nesse momento é: $\sqrt{2}$ é racional? Mostraremos que não. Suponha que $\sqrt{2}$ seja racional. Então podemos colocá-lo na forma irredutível $\dfrac{p}{q}$ onde $p, q \in \mathbb{Z}$ com $q \neq 0$ e mdc(p, q)[6] $= 1$

$$\frac{p}{q} = \sqrt{2}.$$

[6] Mdc (máximo divisor comum) entre dois números corresponde ao maior número natural que os divide simultaneamente. No caso onde mdc$(p, q) = 1$ significa que p e q são primos entre si.

Elevando ambos os membros ao quadrado, temos:

$$\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2.$$

Então $p^2 = 2q^2$. Como $2q^2$ é par, então p^2 é par e portanto p é também par, pois caso p fosse ímpar, teríamos $p^2 = (2x+1)^2 = 4x^2 + 4x + 1 = 2(2x^2 + 2x) + 1$ que é ímpar. Logo podemos chamar $p = 2m$. Substituindo na última igualdade, teremos $(2m)^2 = 2q^2$, ou seja, $4m^2 = 2q^2$ e então $2m^2 = q^2$ mostrando que q também é par. O que é absurdo, pois por hipótese, p e q são primos entre si. Logo $\sqrt{2}$ não é racional.

Assim surgiu a necessidade de se ter um conjunto para esse tipo de número, que é o conjunto dos números irracionais, ou seja, números cuja representação decimal com infinitas casas decimais não é periódica.

Números reais

Denomina-se conjunto dos números reais - símbolo $\mathbb{R}$ - aquele formado por todos os números com representação decimal, isto é, as decimais exatas, periódicas (que são números racionais) e não periódicas (chamadas números irracionais). Assim podemos representar :

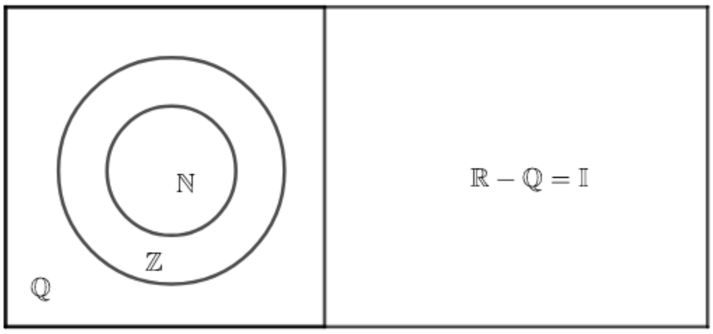


Figura 8 – $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$

Na Figura 8 temos que o conjunto dos números reais é formado pela união do conjunto dos números racionais com o conjunto dos números irracionais.

1.2 FUNÇÕES

Algumas relações entre conjuntos podem ser definidas como funções. Vejamos como isso acontece.

Definição 1.24. *Uma relação R entre dois conjuntos A e B é chamada de função (a qual denotaremos por f), se forem satisfeitas as seguintes condições:*

i) $D(f) = A$.

ii) Se $(a, b_1), (a, b_2) \in f$ *então* $b_1 = b_2$.

Neste caso, diremos que f é uma função de A em B.

Ou seja, uma função é uma regra que relaciona cada elemento do conjunto A a um único elemento de B. Usaremos a notação $f : A \to B$ para indicar que f faz corresponder a $x \in A$ o valor $f(x) \in B$.

Observação 1.25. *A relação descrita na Figura 6 não é uma função. De fato, podemos verificar facilmente que $D(R) \neq A$ pois $1 \in A$ e $1 \notin D(R)$. Este argumento já é suficiente para ver que R não é função. Mas, além disso, R não satisfaz a segunda propriedade de função pois $(2, b)$ e $(2, c) \in R$ e $b \neq c$.*

Vejamos três exemplos em que faremos a análise das relações para constatar se são ou não funções:

Exemplo 1.26. Sejam os conjuntos $A = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$ e $B = \{6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10,\ 11\}$ e a relação f entre A e B definida por $f = \{(1, 6);\ (2, 7);\ (3, 8);\ (4, 10);\ (5, 11)\}$.

$$A \longrightarrow B$$

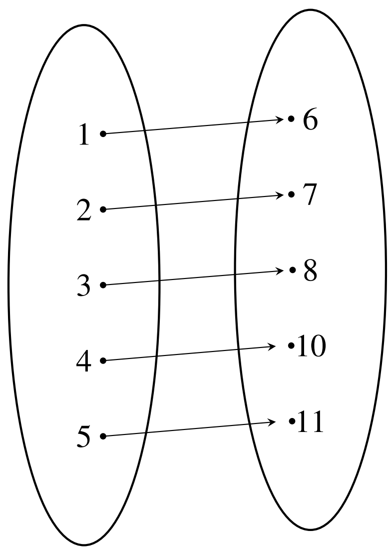


Figura 9 – Relação f entre A e B

Na Figura 9 a relação f é uma função de A em B pois para cada elemento de A há um único correspondente em B.

Exemplo 1.27. Sejam os conjuntos $A = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$ e $B = \{7,\ 8,\ 10,\ 11\}$ e a relação g entre A e B definida por $g = \{(2, 7);\ (3, 8);\ (4, 10);\ (5, 11)\}$.

$A \longrightarrow B$

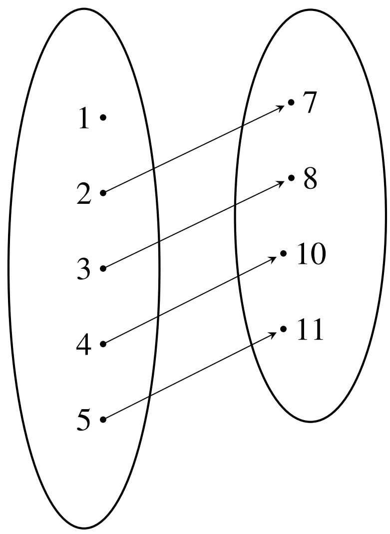


Figura 10 – Relação g entre A e B

Na Figura 10 a relação g não é uma função de A em B pois há um elemento em A que não tem correspondente em B, ou seja, g não satisfaz a primeira propriedade de função.

Exemplo 1.28. Sejam os conjuntos $A = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$ e $B = \{6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10,\ 11\}$ e a relação h entre A e B definida por $h = \{(1,6);\ (2,7);\ (3,8);\ (3,9);\ (4,10);\ (5,11)\}$.

$A \longrightarrow B$

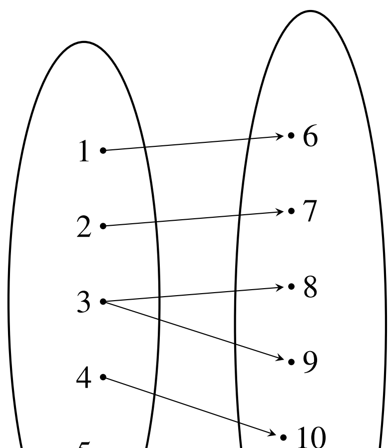


Figura 11 – Relação h entre A e B

Na Figura 11 a relação h não é uma função de A em B pois há um elemento em A com dois correspondentes em B, $(3,8)$ e $(3,9) \in h$ mas $8 \neq 9$. Neste caso, h não satisfaz a segunda propriedade de função.

Assim com esses exemplos podemos observar duas características sobre os diagramas:

- De cada elemento do domínio de f deve sair uma flecha.
- Tal flecha deve ser única, isto é, não podem sair duas (ou mais) flechas de um mesmo elemento do domínio.

Os diagramas são úteis no entendimento do que é uma função, mas se uma função tem domínio e contradomínio com muitos elementos, ou seja, os tamanhos dos conjuntos que definem a função são muito grandes para serem representados pelos diagramas, necessitamos de uma nova forma de representação da função, a qual será definida a seguir.

Definição 1.29. *O gráfico de uma função $f : A \to B$ é um subconjunto do produto cartesiano $A \times B$ formado pelos pares ordenados da forma $(x, f(x))$. Matematicamente:*

$$G(f) = \{(x, y) \in A \times B \mid y = f(x)\}.$$

Assim o gráfico de f é um subconjunto do conjunto de todos os pares ordenados (x, y) de $A \times B$. Através de uma plano cartesiano ortogonal, o gráfico de f pode ser visto como o lugar geométrico descrito pelos pontos $(x, f(x))$ quando x percorre o domínio de f.

Exemplo 1.30. Seja a função $f : A \to B$, onde A e B são subconjuntos de $\mathbb{N}$ dada por $f(x) = x + 1$.

1. Observemos que $f(x)$ só faz sentido quando $x + 1 > 0$, ou seja, $x > 0$, visto que tanto o domínio como a imagem da função são subconjuntos de $\mathbb{N}$. Logo, vamos considerar $A = \mathbb{N}$. Da mesma forma, temos que Im$(f) = \mathbb{N} - \{1\}$. O conjunto B pode ser qualquer subconjunto de $\mathbb{N}$ que contenha Im(f).

2. A imagem de f é sempre um número inteiro maior do que 0 pois $x + 1 > 0$. Alguns valores que a função assume são apresentados na Tabela 1.

3. O gráfico de f é o conjunto

$$G(f) = \{(x, x + 1) \mid x > 0\}$$

e pode ser representado pelo conjunto de pontos na Figura 12.

Figura 12 – Gráfico de $f(x) = x + 1$

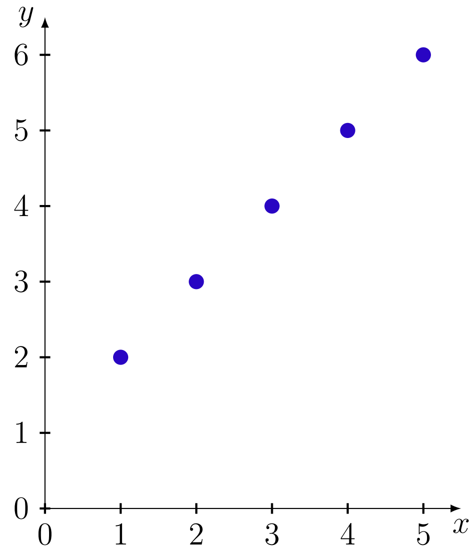


Tabela 1 – $f(x) = x + 1$

x	$f(x) = x + 1$
1	2
2	3
3	4
4	5
5	6
...	...

Algumas funções possuem propriedades relacionadas ao seu domínio, contradomínio e imagem, o que nos permitem classificá-las como: injetiva, sobrejetiva e bijetiva.Vejamos detalhadamente cada uma elas:

Função injetiva:

Uma função $f : A \to B$ é chamada de injetiva se, dados quaisquer x_1 e x_2 em A, tais que se $f(x_1) = f(x_2)$ então $x_1 = x_2$. Em outras palavras, uma função será injetiva quando elementos distintos do domínio tiverem imagens distintas.

Exemplo 1.31. Seja a função $f : A \to B$ com $A = \{-1, 0, 1, 2\}$ e $B = \{-5, 0, 5, 10\}$ definida pela Figura 13.

$A \longrightarrow B$

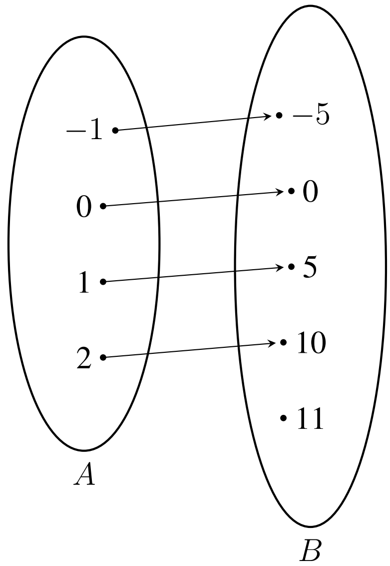


Figura 13 – Função injetiva

Como não existem flechas saindo de elementos diferentes de A chegando no mesmo elemento de B, então f é injetiva. Caso f fosse definida como na Figura 14, f não seria injetiva pois $f(1) = f(2) = 5$ (1 e 2 possuem a mesma imagem).

$A \longrightarrow B$

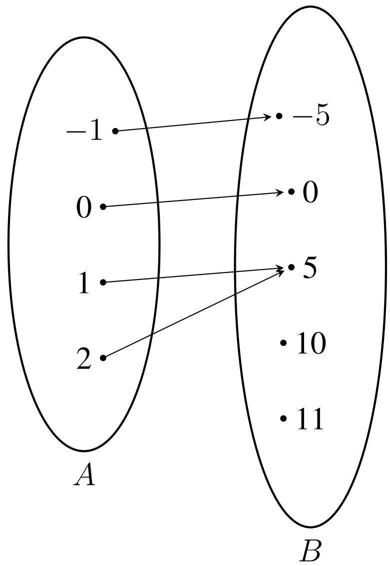


Figura 14 – Função não injetiva

Função sobrejetiva:

Uma função $f : A \to B$ é chamada de sobrejetiva quando para cada $y \in B$ existe pelo menos um $x \in A$ tal que $f(x) = y$. Resumidamente, quando $Im(f) = B$.

Exemplo 1.32. Seja a função $f : A \to B$ com $A = \{-1, 0, 1, 2\}$ e $B = \{0, 1, 4\}$ definida pela Figura 15.

$$A \longrightarrow B$$

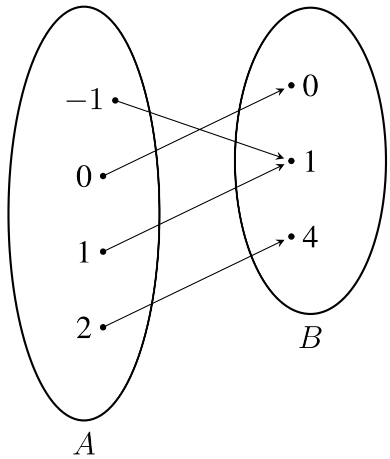


Figura 15 – Função sobrejetiva

Como em todo elemento de B chega uma flecha, segue que f é sobrejetiva. Se definirmos f pela Figura 16, teremos que f não é sobrejetiva.

$$A \longrightarrow B$$

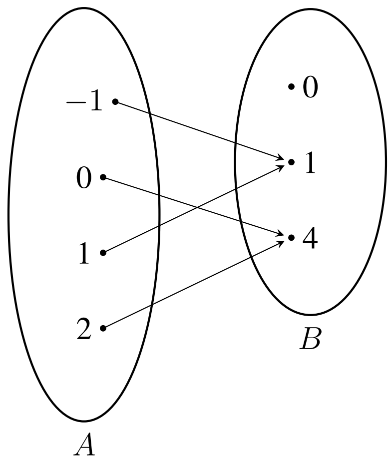


Figura 16 – Função não sobrejetiva

Função bijetiva:

Uma função $f : A \to B$ é bijetiva, ou uma bijeção, quando é injetiva e sobrejetiva simultaneamente.

Exemplo 1.33. Seja a função $f : A \to B$ com $A = \{-1, 0, 1, 2\}$ e $B = \{-3, 2, 7, 12\}$ definida pela Figura 17.

$$A \longrightarrow B$$

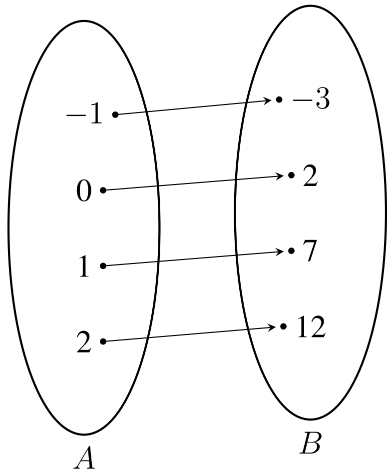


Figura 17 – Função bijetiva

Como f é injetiva, visto que não há duas flechas chegando no mesmo lugar em B, e é sobrejetiva, visto que em cada elemento de B chega uma flecha partindo de A, então f é bijetiva. Note que, com este diagrama, para termos uma bijeção é necessário que em cada elemento de B chegue uma, e somente uma, flecha.

Sendo assim, ao unirmos as condições de função com as condições de bijeção temos:

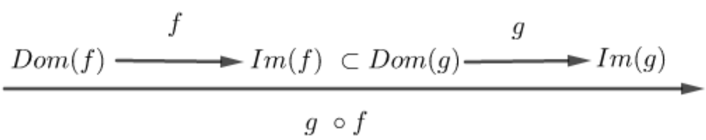
i) De cada elemento do domínio A deve sair uma e somente uma flecha.

ii) Em cada elemento do contra-domínio B deve chegar uma e somente uma flecha.

Tais condições nos levam a observar que para termos uma bijeção entre conjuntos $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ é necessário que $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ tenham o mesmo número de elementos, se ambos forem finitos.

Dadas duas funções, podemos "combiná-las" de maneira que as saídas de uma função se tornem a entrada de outra função, isso nos permite definir o que chamamos de função composta.

Definição 1.34. *Sejam $f : A \to B$ e $g : C \to D$ com $Im(f) \subset C$. Definimos a função g composta com f, denotada por $g \circ f$, como a função de A em D dada por $g \circ f(x) = g(f(x))$ para todo x em A.*



Observação 1.35. *A operação de composição de funções não é comutativa em geral :* $f \circ g \neq g \circ f$.

Exemplo 1.36. Sejam os conjuntos $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{4, 5, 6\}$ e $C = \{8, 9, 10, 11\}$ e as funções $f : A \to B$ e $g : B \to C$ dadas no diagrama da figura 18:

$$A \longrightarrow B \longrightarrow C$$

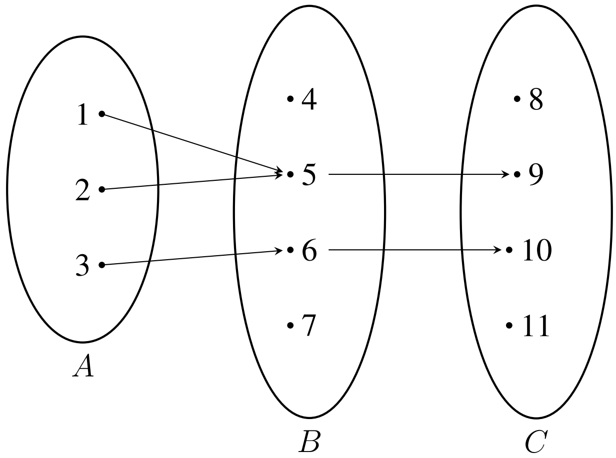


Figura 18 – Função composta

Podemos verificar que: $g \circ f(1) = 9$, $g \circ f(2) = 9$ e $g \circ f(3) = 10$.

Ao estudarmos a bijetividade de uma função, isto nos permite verificar se esta função possui *inversa*:

Definição 1.37. *Seja* $f : A \to B$ *uma função. Dizemos que f é inversível se existe* $g : B \to A$ *tal que :*

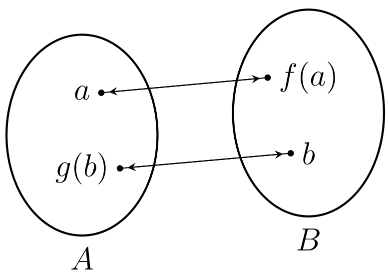
$$g \circ f(a) = g(f(a)) = a, \ \forall a \in A,$$

$$f \circ g(b) = f(g(b)) = b, \ \forall b \in B.$$

Tal g *é chamada de inversa de* f.

$$A \longrightarrow B$$

$$A \longleftarrow B$$



Observe que:

- O domínio de g é igual ao contra-domínio de f.
- Os gráficos de g e de f são curvas simétricas em relação à bissetriz do primeiro quadrante $(y = x)$ em $A \times B$.
- A inversa de uma função $f : A \to B$ é denotada por $f^{-1} : B \to A$.

Teorema 1.38. *Se $f : A \to B$ é inversível então sua inversa é única.*

Demonstração. Suponhamos que $g : B \to A$ e $h : B \to A$ sejam inversas de f. Provaremos que $g = h$. Como g e h são inversas de f temos:

i) $g(f(a)) = a$ e $h(f(a)) = a, \ \forall \ a \ \in A$.

ii) $f(g(b)) = b$ e $f(h(b)) = b, \ \forall \ b \ \in B$.

Desta forma,

$$g(b) = g(f(h(b)) = h(b) \ \forall \ b \ \in B.$$

□

Teorema 1.39. *Seja $f : A \to B$. Então:*

f é bijetiva se, e somente se, f é inversível.

Demonstração. ($\Rightarrow$) Seja f bijetiva. Como f é sobrejetiva então para cada $y \in B$ existe um $x \in A$ tal que $f(x) = y$. Como f é injetiva, esse $x \in A$ é único. Logo, seja $g : B \to A$ definida por $g(y) = x$, afirmamos que g é a inversa de f. Com efeito:

i) Seja $x \in A$, logo, $g(f(x)) = g(y) = x$ (x é o único elemento de A que por f é levado em $f(x)$).

ii) Seja $y \in B$, e seja $x \in A$ o único elemento de A tal que $f(x) = y$. Logo , $f(g(y)) = f(x) = y$.

Portanto, de i) e ii) g é a inversa de f.

($\Leftarrow$) Seja f inversível, então existe $f^{-1} : B \to A$ tal que:

i) $f^{-1}(f(x)) = x, \forall x \in A$.

ii) $f(f^{-1}(y)) = y, \forall y \in B$.

Vamos mostrar que f é injetiva. Sejam $x_1, x_2 \in A$ tais que $f(x_1) = f(x_2)$. Então por i),

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow f^{-1}(f(x_1)) = f^{-1}(f(x_2)) \Rightarrow x_1 = x_2.$$

Logo f é injetiva. Agora mostraremos que f é sobrejetiva. Seja $y \in B$. Por ii), $f(f^{-1}(y)) = y$. Então, existe $x = f^{-1}(y)$. Logo, $f(x) = y$, portanto f é sobrejetiva. Como f é injetiva e sobrejetiva, então é bijetiva. □

Observação 1.40. *Usando a notação de função composta temos que se f é inversível:*

- $f \circ f^{-1} = Id_B$ *(Id_B é a função identidade $Id : B \longrightarrow B$).*
- $f^{-1} \circ f = Id_A$ *(Id_A é a função identidade $Id : A \longrightarrow A$).*

Vejamos mais alguns exemplos:

Exemplo 1.41. Seja $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que $n \longmapsto n^2$, f é bijetiva ?

i) f é injetiva? Sim. Sejam $a, b \in \mathbb{N}$ tal que $f(a) = f(b)$, teremos $f(a) = a^2$ e $f(b) = b^2$, como $f(a) = f(b)$ então
$$a^2 = b^2 \Rightarrow a = b,$$
pois a e b são números naturais.

ii) f é sobrejetiva? Não. Contra-exemplo: $3 \in \mathbb{N}$, mas não existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n^2 = 3$. Portanto, $3 \in CD(f) = \mathbb{N}$ e $3 \notin Im(f)$.

Exemplo 1.42. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $x \longmapsto x^2$, f é bijetiva ?

i) f é injetiva? Não. Contra - exemplo: Seja $a = 2$ e $b = -2$, teremos $f(2) = 4$ e $f(-2) = 4$ porém $a \neq b$.

ii) f é sobrejetiva? Não. Contra - exemplo: $-1 \in \mathbb{R} = CD(f)$, mas $-1 \notin Im(f)$, ou seja, não existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $x^2 = -1$.

Notemos que nos exemplos 1.41 e 1.42, a lei de formação é a mesma apesar de os domínios e os contra-domínios serem diferentes. Assim sendo, não podemos concluir injetividade e sobrejetividade apenas pela lei de formação da função, mas temos que analisar também os conjuntos que definem a função.

Exemplo 1.43. Seja $f : \mathbb{N} \to m\mathbb{N}$, onde $m\mathbb{N}$ é o conjunto dos naturais múltiplos de m, tal que $n \longmapsto m.n$.

i) f é injetiva? Sim. Sejam $a, b \in \mathbb{N}$ tal que $f(a) = f(b)$, teremos $f(a) = a.m$ e $f(b) = b.m$, como $f(a) = f(b)$ então:

$$a.m = b.m \Rightarrow a = b,$$

pela lei do cancelamento do produto[7].

ii) f é sobrejetiva? Sim. Seja $p \in m\mathbb{N}$ natural múltiplo de m então, existe um $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $p = m.n_0$, ou seja, $f(n_0) = p$. Logo f é sobrejetiva, pois p é a imagem de $n_0 \in \mathbb{N}$.

Portanto f é bijetiva.

No exemplo 1.44 tiramos um elemento do contra-domínio para transformar a função em bijetiva.

Exemplo 1.44. A função $f : \mathbb{R} - \{1\} \longrightarrow \mathbb{R} - \{2\}$ definida por $f(x) = \left(\frac{2x+1}{x-1}\right)$ é bijetiva.

i) f é injetiva.

De fato, dados a e b em $\mathbb{R} - \{1\}$ temos $f(a) = \left(\frac{2a+1}{a-1}\right)$ e $f(b) = \left(\frac{2b+1}{b-1}\right)$ como $f(a) = f(b)$ então

$$\left(\frac{2a+1}{a-1}\right) = \left(\frac{2b+1}{b-1}\right) \Longleftrightarrow 2ab-2a+b-1 = 2ab-2b+a-1 \Longleftrightarrow 3b = 3a \Longleftrightarrow a = b.$$

ii) f é sobrejetiva.

De fato, se y está no conjunto imagem de f então existe $x \in \mathbb{R} - \{1\}$ tal que $f(x) = y$ onde

$$x = \left(\frac{y+1}{y-2}\right)$$

e consequentemente,

$$f(x) = \left(\frac{2\left(\frac{y+1}{y-2}\right) + 1}{\frac{y+1}{y-2} - 1}\right) = \left(\frac{\frac{2y+2}{y-2} + 1}{\frac{y+1}{y-2} - 1}\right) = \left(\frac{\frac{2y+2+y-2}{y-2}}{\frac{y+1-y+2}{y-2}}\right) = \left(\frac{3y}{3}\right) = y.$$

Veremos agora que se a função f fosse definida por $f : \mathbb{R} - \{1\} \longrightarrow \mathbb{R}$, f não seria sobrejetiva. Se y está no conjunto imagem de f então existe $x \in \mathbb{R} - \{1\}$ tal que $y = \left(\frac{2x+1}{x-1}\right)$ e então

$$(y - 2).x = 1 + y. \tag{1.1}$$

Fazendo $y = 2$ em (1.1) teremos $0 = 3$ o que é uma contradição. Logo $2 \notin Im(f)$.

Se f é uma função real[8], o gráfico de f nos permite de uma maneira intuitiva e rápida deduzir propriedades da função. Mencionaremos algumas propriedades que podemos deduzir através do gráfico de f.

---

[7] Sejam $m, n, p \in \mathbb{N}$ então $m.p = n.p \Longrightarrow m = n$.

[8] Uma função real é uma função em que tanto os elementos do domínio como os elementos da imagem são números reais, ou seja, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

1) Um valor y_0 pertencerá à imagem de f se a reta horizontal $y = y_0$ corta o gráfico de f pelo menos uma vez. Isto significa que existe pelo menos um $x_0 \in D(f)$ tal que $f(x_0) = y_0$, o que podemos observar facilmente na Figura 19:

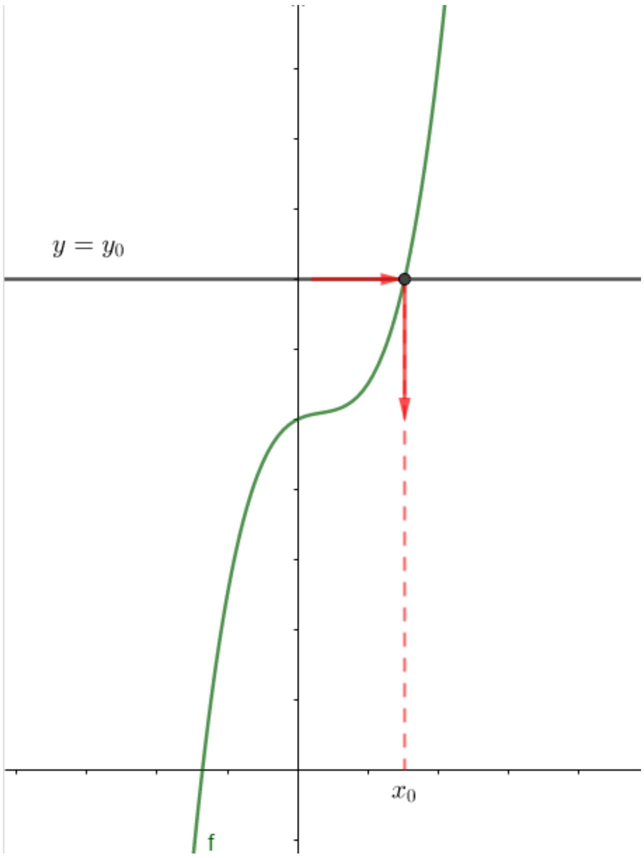


Figura 19 – Gráfico de f

2) Uma função f é injetiva se a reta horizontal $y = y_0$ corta o gráfico de f apenas uma única vez, para cada $y_0 \in Im(f)$. Note que se alguma reta horizontal, $y = y_0$, corta o gráfico de f mais de uma vez significa que existe pelo menos dois valores distintos $x_0, x_1 \in D(f)$ tais que $f(x_0) = f(x_1) = y$. Portanto, f não é injetiva.

3) Uma função f é sobrejetiva se toda reta horizontal $y = y_0$ com $y_0 \in CD(f)$, corta o gráfico de f pelo menos uma vez. Observe que se alguma reta horizontal $y = y_0$ não corta o gráfico de f significa que $y_0 \notin Im(f)$ e portanto f não é sobrejetiva. (Recordemos que $y_0 \in CD(f)$).

4) Uma função f é bijetiva se toda reta horizontal $y = y_0$ com $y_0 \in CD(f)$ corta o gráfico de f exatamente uma vez.

Podemos verificar que uma função é injetiva olhando para seu gráfico usando item 2), mas a única maneira de provar isso é usando a definição de função injetiva. No entanto, queremos enfatizar que é extremamente importante ter sempre em mente a ideia geométrica do gráfico de uma função, fazer argumentos a partir dela e depois formalizar o argumento feito tentando uma demonstração analítica. De qualquer forma, a análise do gráfico nos ajuda a ter essa visualização, mesmo que não seja uma prova formal. Ilustraremos este modo de proceder com alguns exemplos.

Exemplo 1.45. Seja $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ tal que$f(x) = \frac{1}{2}x - 1$.

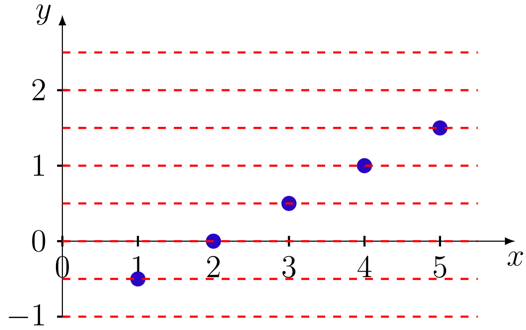


Figura 20 – Gráfico de f

Observando a Figura 20 podemos perceber que f não é bijetiva. É injetora pois cada uma das retas intercepta o gráfico em um único ponto. Mas não é sobrejetiva pois Im$(f) \neq \mathbb{R}$.

Exemplo 1.46. Seja $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ tal que $f(x) = |x - 2|$

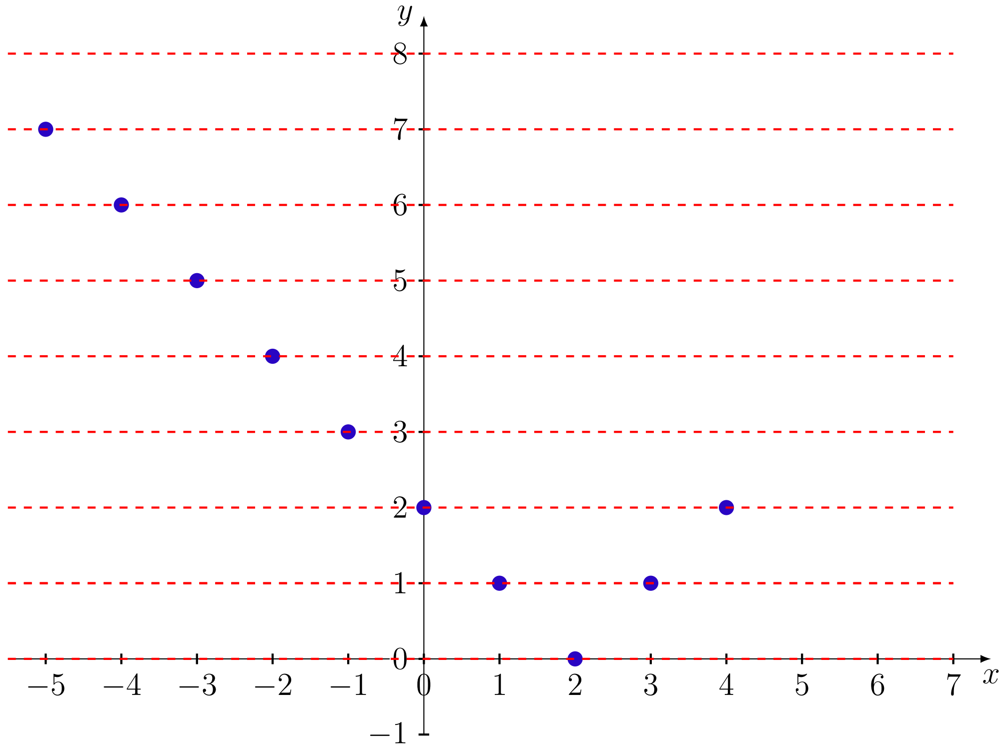


Figura 21 – Gráfico de f

Observando a Figura 21 podemos perceber que f neste caso não é bijetiva, pois as retas interceptam o gráfico em mais de um ponto, $f(1) = f(3) = 1$ e $f(0) = f(4) = 2$. Logo, f não é injetiva. Além disso não é sobrejetiva, pois Im$(f) = [0, +\infty)$.

Exemplo 1.47. Seja $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ tal que $f(x) = x^2$.

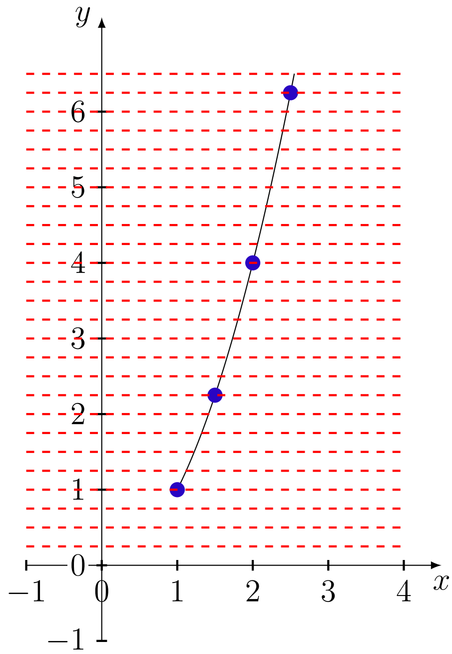


Figura 22 – Gráfico de f

Observemos na Figura 22 que uma função quadrática será bijetiva quando restringirmos o seu domínio.

2 CONJUNTOS FINITOS E INFINITOS

Neste capítulo introduziremos as definições de conjunto finito e de conjunto infinito, e para isso precisaremos de alguns resultados. Sabemos que formalmente as demonstrações devem ser feitas para termos a validade dos resultados, mas nosso objetivo aqui é trazer uma leitura mais suave para ajudar professores e alunos na compreensão deste tema. No presente capítulo falaremos sobre a comparação de quantidades de elementos entre conjuntos, bem como tentar responder a seguinte pergunta: Quantidades muito grandes são infinitas? E as noções de infinito na matemática: "muitos" ou "muito grande" ou ainda o infinito pode ser algo muito pequeno?

Neste momento denotaremos pelo símbolo I_n o conjunto dos números naturais menores ou iguais a n. Ou seja, dado $n \in \mathbb{N}$, teremos :

$$I_n = \{p \in \mathbb{N}; 1 \leq p \leq n\}.$$

Usaremos a notação $\mathcal{N}(A)$ para representar o número de elementos de um dado conjunto A.

Definição 2.1. *Um conjunto A será* ***finito*** *quando for vazio ou quando existir, para algum $n \in \mathbb{N}$, uma bijeção*

$$f : I_n \to A.$$

No primeiro caso, A terá zero elementos. No segundo caso, dizemos que a quantidade de elementos $\mathcal{N}(A)$ de A é n, isto é, $\mathcal{N}(A) = n$.

Ressaltamos aqui que tal bijeção não é única. O ato de contar elementos de um determinado conjunto A consiste em fazer corresponder a cada elemento de A um elemento do conjunto I_n e esta correspondência depende de como organizamos o conjunto A.

Por exemplo, seja $A = \{1,\ 12,\ 13,\ 20,\ 31,\ 40\}$. Podemos definir uma bijeção $f : I_6 \longrightarrow A$ por $f(1) = 1$, $f(2) = 12$, $f(3) = 13$, $f(4) = 20$, $f(5) = 31$ e $f(6) = 40$. Ou podemos definir outra bijeção $g : I_6 \longrightarrow A$ por $g(1) = 40$, $g(2) = 31$, $g(3) = 20$, $g(4) = 13$, $g(5) = 12$ e $g(6) = 1$.

Sendo assim cada bijeção estabelecida é uma forma diferente de contar os elementos do conjunto A que varia conforme a maneira como organizamos o conjunto A. Cada bijeção pode ser chamada de contagem.

É importante notar que se existe uma bijeção $f : I_n \longrightarrow A$ e outra bijeção $g : I_m \longrightarrow A$ devemos ter $n = m$. Se $n \neq m$ alguma das duas funções não é bijetiva, de onde concluímos que em alguma das duas contagens erramos no momento de contar. Isto é, as vezes pulamos um número ao contar, então a f do exemplo acima ficaria , supondo que pulamos o número 13, $f(1) = 1$, $f(2) = 12$, $f(3) = 20$, $f(4) = 31$ e $f(5) = 40$.

Esta contagem nos induziria a pensar que f tem como domínio I_5 e não I_6. Note que, $f : I_5 \longrightarrow A$ definida dessa forma não é sobrejetiva e portanto não é bijetiva. Pois não existe $a \in I_5$ com $f(a) = 13$. Outro erro que pode ocorrer é de contar duas vezes o mesmo elemento. Neste caso, nossa f ficaria, supondo que contamos o número 20 duas vezes, $f(1) = 1$, $f(2) = 12$, $f(3) = 13$, $f(4) = 20$, $f(5) = 20$, $f(6) = 31$, $f(7) = 40$. Esta contagem nos induziria a pensar que a função tem como domínio I_7 e não I_6. Desta vez, $f : I_7 \longrightarrow A$ definida assim não é injetiva pois $f(4) = 20 = f(5)$ mas $4 \neq 5$. Esta ideia nos dá uma noção intuitiva da demonstração do seguinte resultado:

Teorema 2.2. *Seja A um conjunto finito e sejam $f : I_n \longrightarrow A$ e $g : I_m \longrightarrow A$ duas funções. Se f e g são bijeções então $m = n$.*

Corolário 2.3. *Sejam $n, m \in \mathbb{N}$. Se $n \neq m$ então não existe bijeção entre os conjuntos $I_n = I_m$.*

Teorema 2.4. *Todo subconjunto B de um conjunto finito A é finito.*

Como já foi dito no início do capítulo, não faremos aqui uma demonstração formal, faremos apenas um exemplo. Sendo assim, tomemos $A = \{20,\ 21,\ 22\}$. Vejamos que cada subconjunto de A é ainda finito.

- Subconjuntos de A com 0 elemento : $\emptyset$.

- Subconjuntos de A com 1 elemento : $\{20\}$, $\{21\}$, $\{22\}$ assim $\alpha_1 : I_1 \longrightarrow \{20\}$, $\beta_1 : I_1 \longrightarrow \{21\}$ e $\gamma_1 : I_1 \longrightarrow \{22\}$ definidos de forma óbvia são bijeções e portanto estes subconjuntos de A tem 1 elemento.

- Subconjuntos de A com 2 elementos: $\{20, 21\}$, $\{20, 22\}$, $\{21, 22\}$.

  Podemos definir

  $\alpha_2 : I_2 \longrightarrow \{20, 21\}$ por $\alpha_2(1) = 20$ e $\alpha_2(2) = 21$.

  $\beta_2 : I_2 \longrightarrow \{20, 22\}$ por $\beta_2(1) = 20$ e $\beta_2(2) = 22$.

  $\gamma_2 : I_2 \longrightarrow \{21, 22\}$ por $\gamma_2(1) = 21$ e $\gamma_2(2) = 22$.

  Estes subconjuntos de A tem 2 elementos, visto que α_2, β_2 e γ_2 são bijeções.

- Subconjuntos de A com 3 elementos: temos apenas o próprio A e neste caso já temos a f definida no início que é uma bijeção de I_3 em A e portanto A tem 3 elementos.

Este último caso serve para observarmos que se um subconjunto de A tem 3 elementos então ele deve ser o próprio A temos então o seguinte corolário:

Corolário 2.5. *Se B é um subconjunto de A, onde A é um conjunto finito e B tem o mesmo número de elementos que A então $B = A$.*

Notemos que para todos os subconjuntos de um conjunto finito A podemos concluir o seguinte resultado:

Corolário 2.6. *Se B é um subconjunto de A e A é finito então $\mathcal{N}(B) \leq \mathcal{N}(A)$.*

Apresentaremos a seguir mais alguns resultados na caracterização de conjuntos finitos envolvendo ainda funções injetivas e sobrejetivas.

Corolário 2.7. *Seja A um conjunto finito. Se B é um subconjunto próprio de A então não existe bijeção entre B e A.*

Demonstração. Suponhamos por absurdo que existe bijeção $\phi : B \longrightarrow A$. Como A é finito existe n e $f : I_n \longrightarrow A$ bijeção, ou seja, A tem n elementos. Como B é subconjunto próprio de A, pelos Corolários 2.5 e 2.6 temos que $\mathcal{N}(B) < \mathcal{N}(A)$. Logo $\mathcal{N}(B) = m$ para algum $m < n$. Além disso, existe bijeção $g : I_m \longrightarrow B$. Temos então o seguinte diagrama:

$$\begin{tikzcd} I_n \arrow[r, "f"] \arrow[d, dash, dotted] & A \\ I_m \arrow[r, "g"'] & B \arrow[u, "\phi"'] \end{tikzcd}$$

Logo como ϕ é uma bijeção temos que $f^{-1} \circ \phi \circ g$ é uma bijeção entre I_n e I_m. O que é absurdo pois $n \neq m$ e seria uma contradição com o Corolário 2.3.

□

Teorema 2.8. *Sejam A e B conjuntos e $f : A \longrightarrow B$ uma função injetiva. Se B for finito então A também será e $\mathcal{N}(A) \leq \mathcal{N}(B)$.*

Demonstração. Pela primeira hipótese f é injetiva e portanto f é uma bijeção de A sobre sua imagem $f(A)$. Como $f(A)$ é subconjunto de B e B é finito, pelo Teorema 2.4, temos que $f(A)$ é finito e $\mathcal{N}(f(A)) \leq \mathcal{N}(B)$. Além disso, como f é injetiva, leva cada elemento diferente de A em um elemento diferente de $f(A)$ desta forma $\mathcal{N}(A) = \mathcal{N}(f(A))$, visto que, pela definição $f(A)$, não sobram elementos de $f(A)$ que não sejam imagem de algum elemento em A. Concluímos então que $\mathcal{N}(A) = \mathcal{N}(f(A)) \leq \mathcal{N}(B)$. □

Exemplo 2.9. Consideremos $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ e f definida pelo diagrama da Figura 23:

$$A \longrightarrow B$$

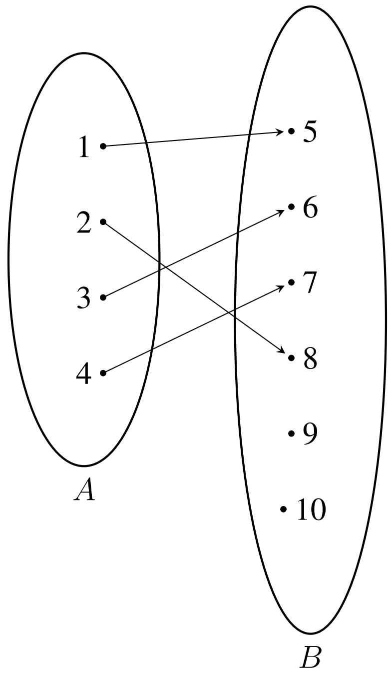


Figura 23 – Função $f : A \to B$

Por f ser injetiva cada elemento de A é levado a um elemento diferente em B. Logo temos em B um subconjunto com a mesma quantidade de elementos que A, a saber $f(A) = \{5,\, 6,\, 7,\, 8\}$.

Teorema 2.10. *Sejam A e B conjuntos e $g : A \to B$ uma função sobrejetiva. Se A for finito então B também será e $\mathcal{N}(B) \leq \mathcal{N}(A)$.*

Noção intuitiva:

Por f ser sobrejetiva, para cada elemento do conjunto $b \in B$ deve existir um elemento $a \in A$ tal que $f(a) = b$. Notemos que se temos dois elementos distintos em B, $b_1 \neq b_2$ devemos ter dois elementos distintos $a_1 \neq a_2$ em A tais que $f(a_1) = b_1$ e $f(a_2) = b_2$. Se tivéssemos $a_1 = a_2$ e $f(a_1) = b_1$ e $f(a_2) = b_2$ teríamos um problema na definição da função de f pois estaríamos associando o mesmo elemento $a_1 = a_2$ a dois elementos distintos b_1 e b_2, sendo assim f não seria função. Desta forma o número de elementos de A deve ser maior ou igual ao número de elementos de $B, \mathcal{N}(A) \geq \mathcal{N}(B)$.

Exemplo 2.11. Consideremos os conjuntos $A = \{1,\, 2,\, 3,\, 4,\, 5\}$ e $B = \{6,\, 7,\, 8,\, 9,\, 10,\, 11\}$ e f definida pelo diagrama da Figura 24:

$$A \longrightarrow B$$

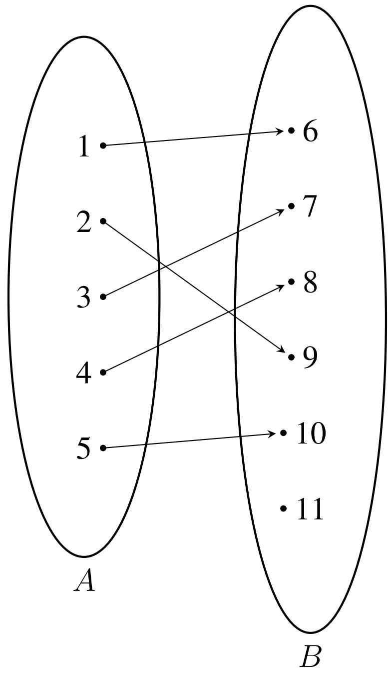


Figura 24 – Função $f : A \to B$

Neste caso temos que $\mathcal{N}(B)$ excede o número de elementos de A, com isso não é possível definir uma função sobrejetiva, pois sobraram elementos em B. Assim deveremos ter $\mathcal{N}(B) \leq \mathcal{N}(A)$. Devemos observar que se $f : A \longrightarrow B$ é sobrejetiva então $\mathcal{N}(A) \leq \mathcal{N}B$, mesmo tirando a hipótese de A ser finito.

Teorema 2.12. *Sejam A e B conjuntos finitos e $f : A \longrightarrow B$ uma função. Se f é bijeção temos que A e B tem o mesmo número de elementos.*

Demonstração. A verificação deste resultado é direta dos Teoremas 2.8 e 2.10. De fato, ao termos f bijetiva, f é injetiva e pelo Teorema 2.8 $\mathcal{N}(B) \geq \mathcal{N}(A)$. Por outro lado, ao termos f bijetiva, f é sobrejetiva e pelo Teorema 2.10 $\mathcal{N}(B) \leq \mathcal{N}(A)$. Assim, temos $\mathcal{N}(A) \leq \mathcal{N}(B)$ e $\mathcal{N}(A) \geq \mathcal{N}(B)$ e $\mathcal{N}(A) \leq \mathcal{N}(B)$ então $\mathcal{N}(A) = \mathcal{N}(B)$. $\square$

Definição 2.13. *Dizemos que um conjunto A é infinito se A não é finito. Isto significa que dado qualquer $n \in \mathbb{N}$, não existirá bijeção entre I_n e A.*

Teorema 2.14. *Um conjunto A é infinito se, e somente se, existir uma bijeção entre A e algum subconjunto próprio de A.*

Não faremos uma demonstração deste teorema pois precisaríamos de mais teoria que não temos por objetivo desenvolver.

Exemplo 2.15. O conjunto dos números naturais é infinito. De fato, seja $\mathbb{N}_{\mathbb{I}}$ o conjunto dos números ímpares positivos e $\mathbb{N}$ o conjunto dos números naturais. O conjunto dos números ímpares é um subconjunto próprio de $\mathbb{N}$. Seja

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N}_{\mathbb{I}} \\ n & \longmapsto & 2n-1 \end{array}$$

Provaremos que f é bijetiva (injetiva e sobrejetiva) e que portanto $\mathbb{N}$ é infinito.

i) f é injetiva: Sejam $a, b \in \mathbb{N}$ tais que $f(a) = f(b)$, temos $f(a) = 2a - 1$ e $f(b) = 2b - 1$, e portanto

$$2a - 1 = 2b - 1$$

$$2a = 2b$$

$$a = b.$$

Concluímos então que f é injetiva.

ii) f é sobrejetiva: Dado *m* ímpar, deve existir um $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $f(n_0) = m$. Basta escolher

$$m = 2n_0 - 1$$

$$n_0 = \frac{m+1}{2}.$$

Fazendo um caminho inverso para descobrir n_0, temos as equivalências

$$f(n_0) = f\left(\frac{m+1}{2}\right)$$

$$f(n_0) = 2\left(\frac{m+1}{2}\right) - 1$$

$$f(n_0) = m + 1 - 1 = m.$$

Logo , escolhendo $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n_0 = \dfrac{m+1}{2}$, teremos f(n_0) = m, logo f é sobrejetiva. Portanto, f é bijetiva e $\mathbb{N}$ é infinito.

Teorema 2.16. *Sejam A e B conjuntos tais que exista uma bijeção $f : A \longrightarrow B$. Então A é um conjunto infinito se, e somente se, B é um conjunto infinito.*

Um fato bastante curioso é que conjunto infinito e conjunto limitado não são conceitos mutuamente excludentes, mesmo que possam parecer duas noções contraditórias. Vejamos o seguinte exemplo:

Exemplo 2.17. *Consideremos a função $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Q}$ tal que $f(n) = \frac{1}{n}$. Claramente esta função é injetiva. Observemos que, como o conjunto dos números naturais é infinito, logo o conjunto imagem de f também o será já que, se fosse finito teríamos $\mathbb{N}$ finito pelo teorema 2.8. A imagem está contida em $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$, e mesmo que esse conjunto possa ser considerado "pequeno", já que está contido no intervalo limitado $[0, 1]$ e com "números tão pequenos", da forma $\frac{1}{n}$, esse conjunto é infinito.*

Podemos ainda demonstrar que existem bijeções entre $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$ e entre $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Q}$. Tais bijeções podem ser encontradas na referência (LIMA, 2016). Assim, mesmo sabendo que eles são conjuntos infinitos, poderíamos considerar de uma maneira muito simplificada, que estes conjuntos têm o mesmo "número" de elementos.

Vejamos também que existem infinitos de "tamanhos" diferentes. Ou seja, existem conjuntos infinitos para os quais não é possível encontrar uma bijeção entre eles. Podemos tomar como exemplo os conjuntos $\mathbb{N}$ e $\mathbb{R}$: como já vimos, $\mathbb{N}$ é infinito e como $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$, $\mathbb{R}$ também é infinito, porém, numa linguagem informal, a quantidade de elementos de $\mathbb{R}$ é diferente da quantidade de elementos de $\mathbb{N}$.

Para ampliar nosso estudo sobre conjunto infinito terminaremos esse capítulo deixando como curiosidade dois exemplos de aplicação:

Exemplo 2.18. Paradoxo de Zenão : Dicotomia.(USP, 2017)

O problema fala sobre a "impossibilidade" de um atleta chegar ao seu percurso final se fracionarmos a distância total a ser percorrida. Consideremos a seguinte hipótese: O espaço e o tempo são divisíveis sem limite. Zenão então teria apresentado dois paradoxos para refutar esta alternativa, um deles é o da Dicotomia.

Um corredor pretende cobrir uma certa extensão, digamos de 100 m. Antes de chegar ao final, ele terá que passar por um ponto localizado no meio do percurso, $\frac{1}{2}$ da extensão total. Após isso, ele tem que passar pelo ponto que corresponde a $\frac{3}{4}$ do percurso. Depois disso, pelo ponto $\frac{7}{8}$, depois $\frac{15}{16}$, depois $\frac{31}{32}$, etc. Como, pela hipótese , o espaço é divisível sem limite, há um número infinito de pontos que o corredor deve percorrer antes de chegar ao final de seu percurso. Assim, concluiu Zenão que ele nunca chegaria ao final!

Exemplo 2.19. Paradoxo de Hilbert

O problema mostra o gerente do Hotel Hilbert, que possui infinitos quartos, tratando o problema de acomodar novos hóspedes quando o hotel já tem infinitos hóspedes. Cada hóspede em um quarto. O gerente fala que o hotel está lotado, no sentido de que há infinitos hóspedes, mas não no sentido de que não caiba mais hóspedes. Num primeiro momento, ele gera mais uma vaga deslocando cada hóspede de seu quarto atual para o seguinte. Quando um ônibus com infinitos passageiros procura o hotel, o gerente realoca novamente seus hóspedes, mas desta vez cada hospede vai para um quarto cujo número é o dobro do número do seu quarto atual. Agora, todos os quartos de número ímpar estão vagos, portanto o Hotel Hilbert dispõe de infinitas vagas e pode hospedar todos os passageiros do ônibus. Então, um desafio ainda maior se apresenta ao gerente do Hotel Hilbert: acomodar os passageiros de uma excursão com infinitos ônibus cada um com infinitos passageiros. O gerente resolve este problema realocando seus hóspedes - desta vez, um hóspede que esteja no quarto n deverá se mudar para o quarto $2n$. O gerente dispõe de infinitas vagas novamente. Depois, o gerente associa a cada ônibus um número primo diferente de dois. Então, ele acomoda os passageiros segundo a seguinte regra: o passageiro que está na cadeira n do ônibus p ocupará o quarto de número p^n.

3 LIVROS DIDÁTICOS

Neste capítulo apresentaremos o resultado de uma pesquisa descritiva feita em alguns livros didáticos nacionais, com o objetivo de se fazer uma sondagem para verificar de que forma os conceitos de conjunto finito e funções aparecem em tais livros, bem como se existe algum tipo de abordagem relacionada a conjunto infinito.

1. **Matemática: Contexto e aplicações, Luiz Roberto Dante**-2013: (DANTE, 2013)

   Sequência apresentada pelo livro:

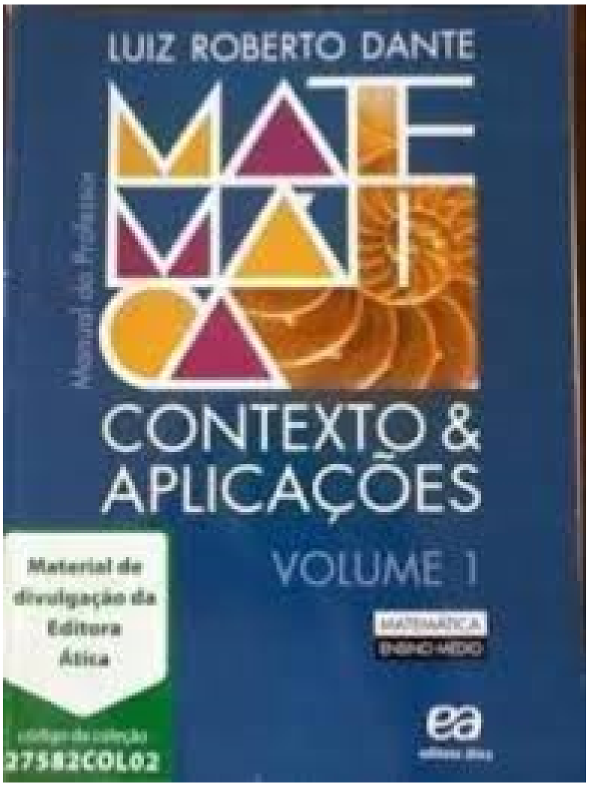
   Capítulo 1: Conjuntos Numéricos

   - Números
   - A noção de conjunto
   - Conjunto dos números naturais ($\mathbb{N}$)
   - Conjunto dos números inteiros ($\mathbb{Z}$)
   - Conjunto dos números racionais ($\mathbb{Q}$)
   - Números Irracionais
   - Conjunto dos números reais ($\mathbb{R}$)
   - A linguagem de conjuntos
   - Intervalos reais
   - Situações-problema envolvendo números reais, grandezas e medidas

   Capítulo 2: Funções

   - Um pouco da história das funções
   - Explorando intuitivamente a noção de função
   - A noção de função por meio de conjuntos
   - Domínio, contradomínio e conjunto imagem
   - Estudo do domínio de uma função real
   - Coordenadas cartesianas
   - Gráfico de uma função
   - Função crescente e função decrescente: analisando gráficos
   - Taxa de variação média de uma função
   - Função injetiva, sobrejetiva e bijetiva

- Função e sequências



- **Conjuntos:**

  Abordagem inicial: Para abordar o conceito inicial de conjunto, o autor faz um resgaste histórico sobre a necessidade do surgimento dos conjuntos numéricos, rel a cio nan do a definição de conjunto como uma "coleção de objetos". Na sequência são definidos todos os elementos importantes no estudo dos conjuntos: representação, inclusão dos elementos de um conjunto e subconjunto. Posteriormente são definidos todos os conjuntos numéricos citando o número de ouro e a demonstração de que $\sqrt{2}$ é irracional, ao definir o conjunto dos números irracionais. Ao abordar o conjunto dos números reais destaca bastante a distância entre dois pontos na reta real definindo módulo de um número real.

  Operações: Além de definir as operações entre conjuntos o autor define também a inclusão entre conjuntos e o complementar de um conjunto. Ao trabalhar com as operações entre conjuntos é trabalhado como se definir a quantidade de elementos da união de conjuntos bem como a demostração dessa propriedade.

  Intervalos: Os intervalos reais e suas operações são definidos matematicamente sem conter nenhum exemplo ou exercício resolvido.

  Situações-problema: Ao final do primeiro capítulo, há três páginas contendo exercícios e situações-problema envolvendo o conceito de conjunto e na sessão *Um pouco* *mais...*, há uma texto mostrando as técnicas de demonstração como a contrapositiva.

- **Funções:**

  Abordagem inicial: A abordagem inicial de funções é feita partindo de um exemplo com duas variáveis dependentes uma da outra. Posteriormente o autor exibe um pouco da história das funções: matemáticos que contribuíram para que se chegasse ao conceito atual de função. Para explorar intuitivamente a noção de função são apresentados alguns exemplos mostrando como se pode escrever uma grandeza em **função** da outra. A noção de função por meio de conjuntos é apresentada através dos diagramas de Venn, explicando em que situações temos ou não uma função para em seguida apresentar a definição matemática de função e suas propriedades: domínio, contradomínio e conjunto imagem.

  Coordenadas cartesianas: Antes do estudo do gráfico de funções é feita uma abordagem sobre o sistema cartesiano ortogonal, distância entre dois pontos e equação da circunferência.

  Gráfico: Para trabalhar com o conceito e as propriedades do gráfico de uma função, inicialmente o autor mostra como verificar se um conjunto de pontos é ou não o gráfico de uma função. Em seguida mostra a construção do gráfico, crescimento e decrescimento abordando os conceitos de ponto máximo de uma função, simetria, zero de uma função e função constante.

  Taxa de variação: É apresentada a definição matemática com bastante rigor acompanhada de exemplos de aplicação da taxa de variação.

  Função: injetiva, sobrejetiva e bijetiva: Além de mostrar as definições dessas funções e exemplos com diagrama de Venn, mostra também como verificar se uma função é ou não injetora através do seu gráfico.

  Função e sequências: Relaciona dois exemplos de funções com os conceitos de progressão aritmética e progressão geométrica.

  Exercícios: A maioria dos exercícios não são relacionados com outras áreas do conhecimento, são de aplicação de definições matemáticas, com exceção dos exercícios ao final de cada capítulo que são questões de edições passadas do ENEM e vestibulares.

  Considerações: Ao mesmo tempo que o livro é bem completo, a linguagem é bem difícil para um aluno por exemplo com dificuldades de aprendizagem, pois as definições são apresentadas com bastante rigor matemático, sendo que alguns tópicos trabalhados não apresentam nenhum exemplo. Na seção que apresenta as coordenadas cartesianas ao mostrar a distância entre dois pontos e a equação da circunferência, pode - se gerar algum tipo de confusão para o aluno fazendo-o levar a pensar de forma equivocada que a equação da circunferência possa ser considerada uma função. Da mesma forma no tópico que mostra a taxa de variação, ele poderia ser apresentado nos próximos capítulos, visto que o aluno teria um certo amadurecimento para relacionar o conceito de taxa com o conceito de função. O diferencial do livro se dá quando o autor trata do complementar de um conjunto e ao falar sobre função injetiva no qual mostra como verificar se a função é ou não injetiva através do seu gráfico.

2. **Conexões com a Matemática - Fabio Martins de Leonardo - 2013**: (LEONARDO, 2013)

   Sequência apresentada pelo livro didático

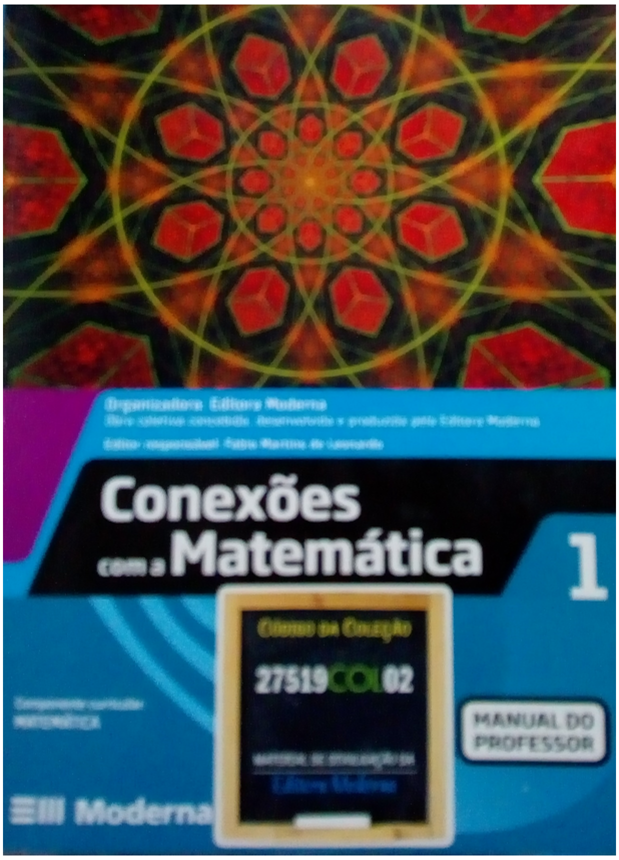
   Capítulo 2: Conjuntos

   - Conjuntos
   - Operações entre conjuntos
   - Aplicação das operações entre conjuntos
   - Conjuntos Numéricos
   - Intervalos
     - Exercícios complementares
     - Resumo do capítulo
     - Autoavaliação
     - Solução comentada

   Capítulo 3: Funções

   - Conceito de função
   - Gráfico de uma função
   - Análise de gráficos de uma função
   - Função Polinomial
   - Funções definidas por mais de uma sentença
   - Função composta
   - Função inversa
   - Função par e função ímpar

- Exercícios complementares
- Resumo do Capítulo
- Autoavaliação
- Resolução comentada
- Compreensão de texto



- **Conjuntos:**

  Abordagem inicial: O autor faz a abordagem inicial de conjuntos apresentando um gráfico de setores sobre a Distribuição da população brasileira segundo o sexo e a cor (2010) explicando que tanto o sexo como a cor proporcionaram a formação de conjuntos.

  Representação de um conjunto: É apresentada através da enumeração dos elementos (entre chaves), também considerando uma propriedade própria dos elementos e através do diagrama de Venn.

  Relação de pertinência, igualdade, conjuntos vazio, unitário e universo, subconjunto, e operações: É apresentada a definição sempre seguida de um exemplo e exercícios resolvidos. Além disso algumas observações e reflexões que ajudam a reforçar os conceitos apresentados.

Conjuntos numéricos: A apresentação dos conjuntos numéricos é feita de forma bem sucinta, mostrando os símbolos utilizados para cada conjunto. Na representação fracionária dos números racionais, propõe - se uma atividade bem interessante sobre a média aritmética de dois números racinais (sugere uma reflexão para verificar se a média aritmética de dois números racionais é sempre um número racional). Ao apresentar o conjunto dos números irracionais, dá como exemplos o problema da medida da diagonal de um quadrado e o número π. Algo que chama a atenção é o exercício resolvido da página 47:"Demonstrar que $\sqrt{2}$ é um número irracional", na qual o autor faz uma demosntração por absurdo. A representação de um número irracional na reta é feita através de um procedimento geométrico: através da construção de triângulos retângulos, partindo da medida da diagonal de um quadrado de lado 1. A relação de inclusão entre os conjuntos numéricos é feita juntamente com a apresentação do conjunto dos números reais.

Intervalos: A representação de subconjuntos por intervalos (e as operações) é mostrada através de um quadro-resumo contendo a representação geométrica e algébrica e a descrição de cada intervalo.

Exercícios: Os exercícios de modo geral são de aplicações diretas de propriedades e definições,com exceção da última seção de exercícios do capítulo na qual contém exercícios do Enem. O tópico autoavaliação propõe ao aluno uma retomada de conceitos: há algumas questões contemplando todo o assunto abordado ao longo do capítulo seguidas de uma tabela a ser assinalada (pelo próprio aluno) das questões que não acertou contendo qual o conceito que deve ser estudado novamente.

Resolução comentada: É apresentada a resolução de uma questão da UFRJ, resolvida de três formas diferentes: diagrama de Venn, prova por absurdo e princípio de Dirichlet.

Compreensão de texto: Aborda o tema de uma pesquisa *O sonho brasileiro*, realizada em 2010, seguida de algumas perguntas a serem respondidas utilizando os dados dessa pesquisa.

Considerações: De maneira geral tanto a abordagem inicial como o desenvolvimento dos conceitos ao longo do capítulo estão bem completas. Os exercícios são bem variados desde a aplicação direta de definições como também questões que fazem o aluno refletir e conjecturar sobre determinado conceito estimulando a interação em grupos.

- **Funções:**

Abordagem inicial: A abordagem inicial do conceito de função é intitulada da seguinte forma: “A ideia de função no cotidiano” no qual apresenta um problema inicial : quantidade de pães comprados e o preço correspondente a essa quantidade, explicando que o preço é **função** da quantidade de pães. A seguir mostra - se um exemplo de função na geometria e a seguir a definição formal de função juntamente com exemplos de diagramas que são (e que não são) funções.

Domínio, contradomínio, imagem e zero de uma função: Os conceitos são apresentados diretamente pela definição formal , apenas dois exemplos são mostrados.

Gráfico: A representação gráfica de uma função é iniciada através de um exemplos com gráficos de linhas, e na sequência mostra-se o plano cartesiano e suas características. A construção de gráfico é feita via uma tabela (atribuindo valores para uma das variáveis). Faz-se ainda o reconhecimento de gráficos que representam funções (apresentando as características que o gráfico deve ter para ser classificado como gráfico de função).

Crescimento, decrescimento, valor máximo e valor mínimo: O crescimento e decrescimento são mostrados através de exemplos com gráficos seguidos das definições matemáticas de crescimento e decrescimento. Os valores máximo e mínimo são apresentados por meio de gráficos de diversas funções (inclusive quadráticas).

Estudo do sinal, função polinomial e funções definidas por mais de uma sentença: O estudo do sinal é definido e em seguida mostrado através de um exemplo. Dois tópicos diferentes com relação aos outros livros é o da função polinomial, ainda o autor faz a definição desta função (de diversos graus), acompanhada de exemplos gráficos, e o tópico sobre funções definidas por mais de uma sentença.

Função sobrejetiva, injetiva e bijetiva: Primeiramente é apresentada a definição matemática de cada uma seguida de exemplos contendo a lei da função e os diagramas.

Função inversa e gráfico da função inversa: Antes de mostrar a definição matemática de função inversa o autor apresenta um exemplo referente a uma função relacionando o número de camisetas ao preço e depois mostra que é possível definir uma segunda função, mas agora relacionando o preço ao número de camisetas. A essa segunda função é dada o nome de **inversa**. Termina-se o capítulo mostrando que o gráfico de uma função com a sua inversa são simétricos em relação à bissetriz dos quadrantes ímpares.

Exercícios: Os exercícios são bem diferenciados, indo do mais simples ao mais elaborado, com uma vasta aplicação do tema em diversas áreas. No entanto, a quantidade é excessiva pois há uma seção de exercícios ao término de cada tópico abordado.

Autoavaliação: Da mesma forma e com a mesma abordagem do capítulo anterior.

Compreensão de texto: Há um texto com o título: "A matemática dos ossos", seguido de perguntas a serem respondidas com base no texto.

Considerações: O capítulo é bem completo, porém há um excesso de informações que poderiam ser abordadas ao longo de todo o estudo de funções que vem na sequência dos demais capítulos.

3. **Matemática Fundamental uma nova abordagem - Giovanni, Giovanni Jr e Bonjorno** - 2011 : (GIOVANNI; BONJORNO; GIOVANNI JR, 2011)

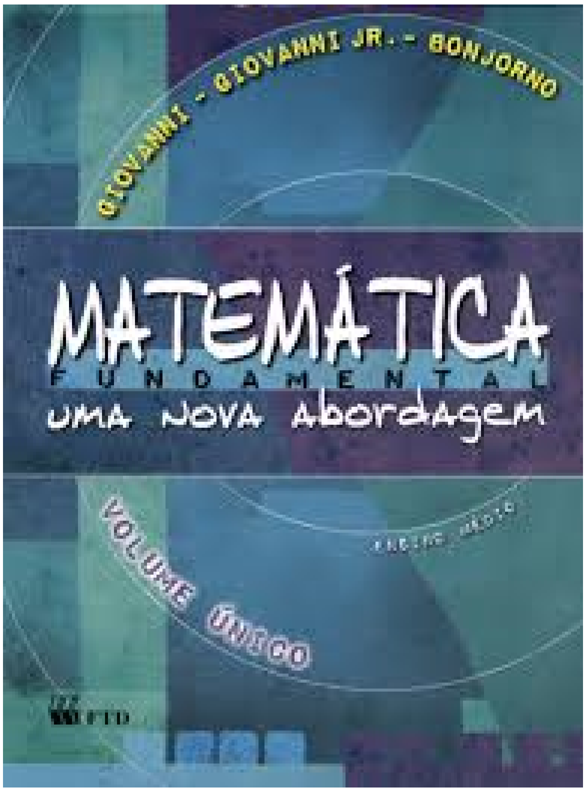
   Sequência apresentada pelo livro didático:

   Capítulo 1: Conjuntos

   - Noções básicas
   - Operações
   - Conjuntos numéricos
   - Intervalos

   Capítulo 2: Funções

   - A ideia de função
   - O conceito matemático de função
   - Gráfico de uma função
   - Crescimento e decrescimento de uma função
   - Função composta
   - Função sobrejetora, injetora e bijetora
   - Função inversa



- **Conjuntos:**

  Abordagem inicial: O autor faz a abordagem inicial de conjuntos citando como exemplos: lista de pessoas convidadas para uma festa, ao formar um time,etc. Já mostra também a representação por extensão e através do *diagrama de Venn*. Depois define-se igualdade, conjunto universo, conjunto unitário, conjunto vazio e subconjuntos, seguida das operações: união, intersecção e diferença.

  Conjuntos numéricos: De forma bem sucinta descreve números naturais, inteiros, racionais,irracionais e reais. Na descrição dos irracionais cita o problema da diagonal do quadrado de lado 1.

  Intervalos: Definidos como subconjuntos dos números reais que são determinados por desigualdades. Com exemplos ilustra as nomenclaturas dos tipos de intervalos: *aberto, fechado, semiaberto à esquerda, etc.* Nas operações com intervalos é mostrado um exemplo de cada operação.

- **Funções:**

  Abordagem inicial: O capítulo de funções começa com um problema inicial clássico que relaciona duas grandezas, mostrando que uma é dependente da outra. Para definir o conceito matemático de função o autor define produto cartesiano e relação entre dois conjuntos, e em seguida domínio, contradomínio e imagem de uma função. Na parte gráfica mostra como determinar o domínio e a imagem de uma função a partir do gráfico, crescimento e decrescimento e quando uma função é constante.

Função composta, sobrejetiva, injetiva e bijetiva: Na abordagem de função sobrejetora, injetora e bijetora, mostra-se como reconhecer através do gráfico se uma função é ou não bijetora.

Função inversa: A função inversa é apresentada inicialmente através de um exemplo entre duas funções (f e g) mostrando que uma é *inversa* da outra e posteriormente é feita a determinação da função inversa.

Exemplos: Os exemplos são colocados tanto de aplicação direta de definições, como também exemplos relacionando temas de outras áreas (campanha de vacinação).

Exercícios: Os exercícios são todos envolvendo algum tipo de contexto com outros temas: pesquisas, belezas naturais, esportes, economia, tecnologias, etc. Ao final de cada capítulo há uma sessão com exercícios de vestibulares.

Considerações: O livro de modo geral apresenta uma linguagem acessível ao aluno, contendo os conceitos fundamentais para o estudo do conceito inicial de função. Na abordagem do conceito de função comparando com o livro (LEONARDO, 2013), podemos perceber que o livro (GIOVANNI; BONJORNO; GIOVANNI JR, 2011) define produto cartesiano enquanto o livro (LEONARDO, 2013) não apresenta essa definição. O mesmo acontece na abordagem sobre função bijetiva, o livro (GIOVANNI; BONJORNO; GIOVANNI JR, 2011) é o único, entre os analisados neste trabalho, que mostra como verificar através do gráfico se uma função é ou não bijetiva.

4. **Contato Matemática - Joamir Souza e Jacqueline Garcia - 2016: (SOUZA; GARCIA, 2016)**

   Sequência apresentada pelo livro didático:

   Capítulo 1: Os conjuntos

   - Estudando conjuntos
   - Igualdade de conjuntos
   - Conjuntos unitário,vazio e universo
   - Subconjuntos
   - Operações com conjuntos

- Problemas envolvendo conjuntos
- Conjuntos numéricos
- Intervalos

Capítulo 2: As funções

- Noção intuitiva de função
- Produto cartesiano
- Conceito de função
- Gráfico de uma função
- Funções crescente,decrescente e constante
- Funções injetiva,sobrejetiva e bijetiva

- **Conjuntos**

Abordagem inicial: Para abordar o conceito inicial de conjunto os autores iniciam o capítulo com um texto sobre a classificação dos seres vivos para exemplificar a ideia de conjunto, mostrando juntamente as formas de se representar um conjunto, seguidas das definições de igualdade, conjuntos unitário, vazio, universo, subconjuntos e operações com conjuntos. Além disso, define-se complementar de um conjunto e as propriedades da união e da interseção de conjuntos.

Conjuntos numéricos: Para fazer a definição dos conjuntos numéricos aborda temas de outras áreas como energia elétrica e jogos Pan-Americanos. Na definição do conjuntos dos números irracionais cita como exemplo a medida do lado de um quadrado de área igual a 2 cm^2.

Intervalos: É apresentada a definição matemática dos tipos de intervalos e as operações são ilustradas por meio de exemplos.

- **Funções**

  Abordagem inicial: A abordagem inicial de funções é feita através de um texto de uma pesquisa feita pelo IBGE sobre estimativa populacional. Na sequência são trabalhados alguns exemplos que mostram como duas grandezas podem se relacionar mostrando a noção intuitiva de função.

  Definição de função: Para definir matematicamente função os autores definem primeiramente o produto cartesiano e as relações (subconjuntos do produto cartesiano). A definição de função (bem como a definição de domínio, contradomínio e imagem) vem ilustrada com exemplos (através do diagrama de Venn). O gráfico bem como sua análise e o crescimento e decrescimento de uma função são apresentados de forma breve complementados com exemplos.

  Funções injetiva, sobrejetiva, bijetiva, composta e inversa: São mostrados nessa sequência pelos autores com todas as definições matemáticas seguidas de exemplos.

  Exercícios: Os exercícios são variados, alguns contextualizados, ou seja, relacionando com outras áreas e outros de aplicações diretas de definições. Há também no término de algumas seções dos capítulos bem como no término deles textos e curiosidades como o que há na página 70 sobre Criptografia.

  Considerações: O livro apresenta uma linguagem bem acessível ao aluno, direta mas ao mesmo tempo completa. O índice é bem organizado e de fácil manuseio. Os exercícios são do nível adequado ao aluno da primeira série do Ensino Médio.

4 PROPOSTA DE SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Neste capítulo apresentaremos algumas sugestões de atividades envolvendo os conceitos de conjunto finito, função e conjunto infinito. Visto que na pesquisa feita no capítulo 3 não encontramos nenhum exercício que abordasse algo envolvendo o conceito de infinito.

4.1 OBJETIVOS GERAIS

O objetivo desta proposta é de trazer para sala de aula o conceito de conjunto infinito como uma aplicação após o estudo de funções.

Desta forma, esperamos que os alunos amadureçam as noções de função, função injetiva, função sobrejetiva e função bijetiva. Além disso, esperamos que tenham um contato formal com a noção de infinito, noção esta que aparece naturalmente desde as séries iniciais do ensino básico com o inicio da contagem.

4.2 PRIMEIRA ATIVIDADE

Fazer o aluno descobrir através de exemplos, que se existe bijeção entre dois conjuntos é porque eles tem o mesmo número de elementos. Notando que se são conjuntos com quantidade de elementos diferentes qualquer função estabelecida entre eles não será injetiva ou sobrejetiva.

1. Dança das Cadeiras

   Descrição da brincadeira: É uma brincadeira em uma roda de cadeiras e outra de pessoas sendo que o número de cadeiras deve ser sempre um a menos do que o número de pessoas. Toca-se uma música. Quando a música parar, todos devem sentar-se em alguma cadeira. Aquela pessoa que não conseguir sentar sai do jogo e retira-se mais uma cadeira. Será o vencedor quem sentar na última cadeira.

   Suponhamos que temos um grupo com 10 crianças para a brincadeira da dança das cadeiras. Então:

   a) Quantas cadeiras devemos ter para o inicio da brincadeira?

   b) O que aconteceria se tivéssemos 12 cadeiras?

   c) O que aconteceria se tivéssemos 7 cadeiras?

   d) O que aconteceria se tivéssemos 10 cadeiras?

   e) Descreva as quatro situações dos itens anteriores com diagramas que representem funções entre o conjunto de crianças e o conjunto de cadeiras (tomando o devido cuidado em cada caso na decisão do conjunto de partida e do conjunto de chegada para conseguir estabelecer uma função entre eles).

f) As funções descritas no item anterior são injetivas? Sobrejetivas? Por quê? Qual será o único caso em que teremos uma bijeção?

2. Curiosidades dos alunos

Nesta atividade o professor poderá envolver diretamente os alunos na criação dos conjuntos do contradomínio, relacionando o nome de cada aluno ao seu número de RG (pedir que cada aluno diga ou mostre o número do seu RG), pedindo a cada aluno que diga a numeração do seu calçado e ainda na contagem do número de carteiras dentro da sala de aula (se tem carteira sobrando ou não).

Para iniciar considere as seguintes funções:

$f : \{\text{alunos da turma}\} \longrightarrow \{\text{número do RG}\}$

$g : \{\text{alunos da turma}\} \longrightarrow \{\text{calçados}\}$

$h : \{\text{alunos da turma}\} \longrightarrow \{\text{carteiras}\}$

a) Quais destas funções são injetivas, sobrejetivas e bijetivas?

b) Qual o número de elementos de cada um desses conjuntos?

3. Considere os conjuntos finitos $A = \{1,\ 2,\ 6,\ 7,\ 8\}$ e $B = \{a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f\}$.

a) É possível construir uma bijeção $A \longrightarrow B$? Justifique. (Represente a situação por meio de um diagrma de Venn e diga o que falhou: a injetividade ou a sobrejetividade).

b) É possível construir uma bijeção entre $B \longrightarrow A$? Justifique. (Represente a situação por meio de um digrama de Venn e diga o que falhou a injetividade ou a sobrejetividade).

4. Comparar conjuntos grandes:

Considere os conjuntos $A = \{1, 2, 3, ..., 20\}$ e $B = \{2, 4, 6, ..., 20\}$.

a) Qual é o conjunto com maior número de elementos sem contar os elementos?

b) Faça uma associação entre os elementos dos dois conjuntos através de um diagrama de Venn.

4.3 SEGUNDA ATIVIDADE

O objetivo desta atividade é fazer o aluno verificar que para conjuntos finitos é impossível estabelecer uma bijeção entre um conjunto e uma parte própria dele. (Obviamente porque tem número de elementos diferentes).

1. Considere o conjunto $A = \{2,\ 7,\ 9,\ 23,\ 27,\ 30\}$ e determine:

    a) Todos os subconjuntos do conjunto A.

    b) O que podemos notar no que diz respeito ao número de elementos do conjunto A e de qualquer subconjunto de A?

    c) É possível estabelecer bijeções entre A e algum subconjunto de A?

4.4 TERCEIRA ATIVIDADE

Nesta atividade precisamos formalizar a definição de função injetiva e função sobrejetiva, pois é através desta formalização que a próxima atividade será realizada. Esta formalização deve ser realizada em conjunto: alunos e professor.

1. VERIFICAR, ATRAVÉS DA DEFINIÇÃO, AS INJETIVIDADES E SOBREJETIVIDADES QUE APARECERAM NAS QUESTÕES ANTERIORES.

4.5 QUARTA ATIVIDADE

Fazer o aluno descobrir que para conjuntos infinitos é possível estabelecer uma bijeção entre um conjunto e determinadas partes próprias. Ou seja, que em conjuntos infinitos é possível ter subconjuntos com o mesmo "número" de elementos que o conjunto.

1. Considere $\mathbb{N}_{\mathbb{P}}$ o conjunto dos números naturais pares e defina $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}_{\mathbb{P}}$ tal que $f(x) = 2x$.

    a) A função f é bijetiva?

    b) O que podemos concluir sobre o "número" de elementos do conjunto dos números naturais e dos naturais pares? É maior, menor ou igual ?

    c) De acordo com a sua resposta da atividade 2, se considerarmos um conjunto infinito X e um subconjunto A de X onde $A \neq X$, o subconjunto pode possuir a mesma "quantidade" de elementos do conjunto infinito? O que podemos concluir?

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho propôs, como objetivo geral buscar uma maneira de se trabalhar o conceito de infinito na educação básica relacionando-o diretamente com a bijetividade de uma função, através de uma linguagem mais acessível a professores e alunos.

Diante de toda a sondagem realizada em alguns livros didáticos nacionais, notou-se a ausência em quase todos de uma abordagem sobre conjunto infinito. A importância de se explorar o conceito de infinito através de atividades propostas que não estão nos livros permite aos estudantes formular hipóteses para a resolução das atividades, fazendo o aluno pensar matematicamente o que proporciona um maior entendimento em conceitos abstratos envolvendo bijetividade de funções. Ao propor atividades envolvendo objetos concretos como o número do RG, o número do calçado, a quantidade de carteiras, a dança das cadeiras, etc, fazemos o aluno enxergar as definições que estão apenas escritas nos livros didáticos.

Dada à importância do assunto, torna-se necessário o desenvolvimento de diferentes formas de se mostrar ao aluno que a abstração matemática possa ser representada através de exemplos concretos presentes em seu dia-a-dia. Com isso as atividades presentes nessa dissertação permitirão aos professores que explorem com seus alunos através de uma linguagem mais simplificada os conceitos de bijetividade e conjunto infinito.

REFERÊNCIAS

ARAGÓN, A. et al. **Introducción a la matemática para el primer ciclo universitario**. Buenos Aires: Universidad Nacional de General Sarmiento, 2011.

BACCARIN, F. L. **Conjuntos infinitos e suas surpresas:**: uma sequência de atividades. Dissertação (PROFMAT) — Universidade Estadual de Londrina, 2013.

BORGES, B. A. **O infinito na matemática**. Dissertação (PROFMAT) — USP - São Carlos, 2015.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais: terceiro e quarto ciclos do ensino fundamental - introdução aos parâmetros curriculares nacionais**. Brasília : MEC / SEF, 1998. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf>. Acesso em: 20 ago. 2018.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília : MEC / SEB, 2018. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/wp-content/uploads/2018/12/BNCC_19dez2018_site.pdf>. Acesso em: 15 jan. 2018.

DANTE, L. R. **Matemática: contexto e aplicações**. v.1. São Paulo: Editora Ática, 2013.

EVES, H. **Introdução à História da Matemática**. São Paulo: Unicamp, 2008.

GIOVANNI, J. R.; BONJORNO, J. R.; GIOVANNI JR, J. R. **Matemática fundamental: uma nova abordagem**. São Paulo: FTD, 2011.

GRIFFITHS, H. **Matemática Clássica**: Uma interpretação contemporânea. São Paulo: Universidade de São Paulo, 1975.

LEONARDO, F. M. d. **Conexões com a matemática**. v.1. São Paulo: Moderna, 2013.

LIMA, E. L. **Curso de Análise**. Rio de Janeiro: IMPA, 2016.

SOUZA, J.; GARCIA, J. **Contato matemática**. v.1. São Paulo: FTD, 2016.

USP. **Paradoxos de Zenão. Questão: O espaço e o tempo são contínuos ou discretos?** USP - São Paulo, 2017. Disponível em: <http://opessoa.fflch.usp.br/sites/opessoa.fflch.usp.br/files/FiFi-17-Cap05.pdf>. Acesso em: 24 abr. 2019.