



Universidade Federal de Mato Grosso

Instituto de Ciências Exatas e da Terra

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA



Abordagem alternativa no estudo dos quadriláteros

Liliana Karla Jorge de Moura

Mestrado Profissional em Matemática: PROFMAT/SBM

Orientador: **Prof. Dr. Andre Krindges**

Trabalho financiado pela Capes

Cuiabá - MT

Março de 2013

Abordagem alternativa no estudo dos quadriláteros

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação devidamente corrigida e defendida por Lilliana Karla Jorge de Moura e aprovada pela comissão julgadora.

Cuiabá, 16 de março de 2013.

Prof. Dr. Andre Krindges
Orientador

Banca examinadora:

Prof. Dr. André Krindges (UFMT)

Prof. Dr. Moiseis dos Santos Ceconello (UFMT)

Prof. Dr. Jefferson Cruz dos Santos Leite (UFPI)

Dissertação apresentada ao curso de Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT da Universidade Federal de Mato Grosso, como requisito parcial para obtenção do título **de Mestre em Matemática.**

Dados Internacionais de Catalogação na Fonte.

M929a Moura, Liliana Karla Jorge de.
Abordagem alternativa no estudo dos quadriláteros / Liliana Karla Jorge de Moura. -- 2013
88 f. : il. color. ; 30 cm.

Orientador: Andre Krindges.
Dissertação (mestrado profissional) - Universidade Federal de Mato Grosso, Instituto de Ciências Exatas e da Terra, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Cuiabá, 2013.
Inclui bibliografia.

1. Ensino e aprendizagem. 2. Geometria Euclidiana Plana. 3. Quadriláteros. 4. GeoGebra. I. Título.

Ficha catalográfica elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Permitida a reprodução parcial ou total, desde que citada a fonte.

Dissertação de Mestrado defendida em 16 de março de 2013 e aprovada pela
banca examinadora composta pelos Professores Doutores

Prof. Dr. Andre Krindges

Prof. Dr. Moiseis dos Santos Cecconello

Prof. Dr. Jefferson Cruz dos Santos Leite

*Dedico esta dissertação a meu filho
Lupércio Henrique, minha fonte eterna
de inspiração e força; a Deus, por me
conceder as oportunidades de aquisição
de conhecimento, trabalho, luz para re-
flexões e coragem para enfrentar esta
longa caminhada de estudo.*

Agradecimentos

A Deus, pela concessão da vida, saúde e forças espiritual e material para enfrentar tantas dificuldades.

Ao orientador Professor Dr. Andre Krindges, pela paciência, apoio e confiança depositada.

Aos professores da banca examinadora pelas valiosas contribuições e sugestões para a concretização dessa dissertação.

A todos os professores e tutores do curso pelo comprometimento com o aprender e a generosidade ao ensinar.

A CAPES pelo financiamento do curso.

Aos meus pais, pelo apoio e dedicação a toda minha família.

Ao meu esposo, pela compreensão e paciência.

Ao meu filho Lupércio Henrique, por me proporcionar uma alegria imensa desde a maternidade e por me incentivar a fazer este mestrado.

A todos os familiares que viveram juntos os momentos das dificuldades e torceram pelo meu sucesso.

Aos colegas de curso, pela amizade e companheirismo.

A SBM pela criação do PROFMAT.

Ao IFMT - Campus Cáceres pelo apoio.

Enfim, a aqueles que fizeram e fazem parte do meu processo de vida e, a todos os professores que no decorrer da minha vida escolar, imprimiram em mim um pouco de suas crenças e expectativas.

A educação é um ato de amor e, portanto, um ato de coragem. Não pode temer o debate, a análise da realidade; não pode fugir à discussão criadora, sob pena de ser uma farsa.

Paulo Freire.

Um bom ensino da Matemática forma melhores hábitos de pensamento e habilita o indivíduo a usar melhor a sua inteligência.

Irene de Albuquerque.

Resumo

Este trabalho apresenta um estudo dos quadriláteros de forma diferenciada, motivadora e aprofundada. Iniciamos com definições e teoremas de um quadrilátero qualquer e dos quadriláteros notáveis. Na sequência, apresentamos uma série de construções geométricas com a utilização dos instrumentos régua, compasso e o software GeoGebra que contribui com a interpretação matemática. No capítulo dois aprimoramos o conceito geral de área bem como as relações para o cálculo da área de um quadrilátero convexo e dos quadriláteros notáveis. Com o objetivo de aprofundar os estudos, realizamos várias demonstrações de relações geométricas envolvendo diversas definições e teoremas. Realizamos um estudo dos quadriláteros inscritos e circunscrito, bem como a demonstração da fórmula de Brahmagupta, fórmula esta utilizada para o cálculo da área de um quadrilátero inscrito e pouco ou nada discutida nas salas de aula do ensino médio. Para aplicar a teoria apresentada no decorrer do trabalho, elaboramos uma lista de problemas resolvidos que servirão como material de apoio para o professor de matemática e poderão ser aplicados aos alunos com objetivo de ampliar a criatividade, desenvolver o raciocínio lógico e aplicar as relações demonstradas. Este objetivo visa contribuir com o processo de ensino e aprendizagem da matemática que ainda hoje é tão criticado pelo alto índice de reprovações e fracasso escolar.

Palavras chave: Ensino e aprendizagem; Geometria Euclidiana Plana; Quadriláteros; GeoGebra.

Abstract

This work presents a research about the quadrilaterals of different form, motivated and profound. We began with definitions and theorems on any quadrilateral and of the main class of quadrilaterals. After that, we present a series of geometric constructions with the use of instruments such as ruler, compass and the software GeoGebra that contributes to the mathematical interpretation. In chapter two we have improved the general concept of area and ending with the relations to calculation of a convex quadrilateral area and with the main class of quadrilaterals. With the objective to profound the studies, we have done different statements of the Brahmagupta formula which is used to the calculation of quadrilateral area inscribed and little or nothing discussed in the classroom. To apply the theory presented along the work, we elaborated a list of solved problems that will serve as support material to the Mathematics teacher and may be applied to students with objective to expand creativity, to develop logical reasoning and to apply the demonstrating relations. This objective intends to contribute with the Mathematics teaching and learning process that is still criticized by the level of educational failure.

Keywords: Teaching and learning; Euclidian Plane Geometry; Quadrilaterals; GeoGebra.

Sumário

Introdução	14
1 Estudo básico sobre quadriláteros	18
1.1 Definição	18
1.2 Quadriláteros notáveis	19
1.2.1 Trapézio	20
1.2.2 Paralelogramo	25
1.2.3 Retângulo	27
1.2.4 Quadrado	28
1.2.5 Losango	29
1.3 Construções geométricas	30
1.3.1 Construção 1: Paralelogramo	31
1.3.2 Construção 2: Paralelogramo	32
1.3.3 Construção 3: Retângulo	33
1.3.4 Construção 4: Losango	34
1.3.5 Construção 5: Losango	35
1.3.6 Construção 6: Quadrado	36
1.3.7 Construção 7: Quadrado	37
2 Área dos quadriláteros convexos	39
2.1 Área dos quadriláteros notáveis	40
2.1.1 Área do quadrado	40
2.1.2 Área do retângulo	45
2.1.3 Área do paralelogramo	46
2.1.4 Área do trapézio	46

2.1.5	Área do losango	47
2.2	Teorema de Varignon	48
2.3	Área de um quadrilátero convexo qualquer.	56
3	Quadriláteros inscritíveis e circunscritíveis na circunferência	60
4	Aplicações da teoria	69

Lista de Figuras

1.1	Quadrilátero e suas partes	18
1.2	Soma dos ângulos internos de um quadrilátero	19
1.3	Trapézio: definição	20
1.4	Trapézio isósceles	20
1.5	Trapézio escaleno	21
1.6	Trapézio retângulo	21
1.7	Demonstração do teorema 1.2	22
1.8	Base média do trapézio 1	23
1.9	Base média do trapézio 2	23
1.10	Mediana de Euler	24
1.11	Paralelogramo	25
1.12	Quadrilátero convexo com lados opostos congruentes	26
1.13	26
1.14	Retângulo	27
1.15	Retângulo com diagonais congruentes	27
1.16	Quadrado	28
1.17	Losango	29
1.18	Paralelogramo com diagonais perpendiculares	29
1.19	Construção de um paralelogramo	32
1.20	Construção de um paralelogramo	33
1.21	Construção de um retângulo	34
1.22	Construção de um losango	35
1.23	Construção de um losango	36
1.24	Construção de um quadrado	37
1.25	Construção de um quadrado	38

2.1	Curvas fechadas	39
2.2	Área de um quadrado de lado n	41
2.3	Os segmentos de comprimentos l , 1 e a	41
2.4	Quadrados de lados x_k , l e y_k	42
2.5	43
2.6	Esboço do gráfico de $f(k)$	44
2.7	Área do retângulo	45
2.8	Área do paralelogramo	46
2.9	Área do trapézio	46
2.10	Área do losango	47
2.11	Quadriláteros - definição de Coxeter	49
2.12	Área do quadrilátero convexo	49
2.13	Área do quadrilátero reentrante	50
2.14	Área do quadrilátero cruzado I	50
2.15	Área do quadrilátero cruzado II	51
2.16	Teorema de Varignon - Quadrilátero convexo	51
2.17	Teorema de Varignon - Quadrilátero reentrante	53
2.18	Teorema de Varignon - Quadrilátero cruzado	54
2.19	56
3.1	Formas de inscrever um quadrilátero de lados a , b , c e d	60
3.2	Quadrilátero inscritível	62
3.3	63
3.4	Trapézio inscritível	63
3.5	Quadrilátero circunscritível	64
3.6	Quadrilátero circunscritível	65
3.7	$abcd$ é um quadrilátero inscrito.	67
4.1	Problema 1	70
4.2	Problema 2	71
4.3	Problema 3	72
4.4	Problema 4	73
4.5	Problema 5	74

4.6	Problema 6	75
4.7	Problema 7	76
4.8	Problema 7	77
4.9	Problema 8	78
4.10	Problema 9	79
4.11	Problema 10	80
4.12	Problema 11	81

Introdução

A vida da humanidade mudou de forma substantiva devido às transformações consequentes do processo de internacionalização da economia e de novas concepções políticas no cenário mundial. Tudo isso interfere de forma muito manifesta no cotidiano e na organização da sociedade. Ao falar sobre educação, neste contexto, percebemos que ela tem um papel fundamental, tanto como opção técnica sintonizada com todas essas mudanças radicais que acontecem no mundo do trabalho e necessitam de novas e diferenciadas demandas, mas principalmente como uma alternativa para a construção de uma sociedade democrática, solidária e com justiça social (FREIRE,2001).

As escolas brasileiras, mesmo com muitas mudanças e avanços conceituais, continuam impregnadas pelo modelo de escolarização do século XIX e a maioria das instituições ainda permanece fundamentada sobre o instrucionismo da era industrial, ao avaliar seus alunos com base na reprodução, e reprovar atitudes e ações criativas. As instituições que assim se apresentam estão em déficit com a sociedade, pois desta forma não estão tendo êxito na missão de atender as demandas sociais do nosso tempo.

Sendo assim, é preciso que urgentemente se introduzam mudanças no ensino da matemática. Necessitamos de um novo pensar, haja vista os resultados da avaliação do Programa Internacional de Avaliação de Alunos - PISA (INEP,2013), no qual observamos que os estudantes brasileiros melhoraram o desempenho, todavia continuam nas últimas colocações da lista dos países avaliados. Podemos, portanto, tomar estes resultados como pressuposto para dizer que é imprescindível repensar todos os fatores que envolvem o ensino aprendizagem da matemática.

De fato, não obstante todo o esforço pessoal e coletivo dos educadores, todo esforço de iniciativas isoladas e por vezes tão fragmentadas, na busca de melhoria do ensino, de novas posturas pedagógicas, percebemos a evidência de um ensino anacrônico, perverso, que muito pouco se tem feito para mudar ou, pelo menos, amenizar esse quadro

educacional caótico, que teima em caminhar na contramão da história de uma educação de qualidade.

De forma geral, o ensino e aprendizagem no Brasil estão aquém do ideário imaginado. Há uma clara compreensão de que é preciso que se promova a aprendizagem, que se estimule este ensino deficitário e, caso nada seja feito, o fracasso se perpetuará.

Se por um lado, há evidências claras do anacronismo do processo ensino e aprendizagem, como um todo, imaginamos, então como estará o ensino da disciplina de matemática nas escolas? (RANGEL,1992) afirma que “a Matemática, no contexto da problemática do fracasso escolar, destaca-se entre as outras disciplinas por seus altos índices de reprovação, por colaborar sobremaneira para a evasão observada em todo o sistema educacional brasileiro”.

Percebemos que o ensino da matemática ainda está pautado em respostas prontas, fórmulas acabadas, o que contrapõem Freire (FREIRE,2005) “... ensinar não é transmitir conhecimento, mas criar possibilidades para a sua produção ou a sua construção”.

De acordo com o Regimento do PROFMAT: Artigo I, Capítulo I (SBM,2013):

*O Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) tem como objetivo proporcionar formação **matemática aprofundada**, relevante e articulada com o exercício da docência no Ensino Básico, visando fornecer ao egresso qualificação certificada para o exercício da profissão do professor de Matemática. (Grifo nosso)*

Diante disso, este trabalho desenvolve uma proposta diferenciada e aprofundada como alternativa no estudo dos quadriláteros no Ensino Médio, através da demonstração de relações, demonstrações essas quase não encontradas nos livros didáticos, construções geométricas e resolução de problemas como papéis motivadores das aulas de Matemática, pois tanto o professor quanto o aluno terão maiores oportunidades de compreender a utilização dos conceitos, propriedades e teoremas relacionados ao estudo dos quadriláteros.

De acordo com Freire (FREIRE,2005) “ensinar exige alegria e esperança”. Portanto, objetivamos demonstrar as relações utilizadas para resolução de problemas, ao propor atividades que envolvem conceitos, propriedades, teoremas e construções que podem se destacar como ferramenta de mediação pedagógica para a aprendizagem significativa dos conteúdos matemáticos no Ensino Médio e despertar nos educandos, a curiosidade e a criatividade matemática e, principalmente, gerar prazer na aprendizagem com base no

conhecimento profundo.

Nas construções geométricas foram empregados dois instrumentos importantes para a compreensão matemática. A construção com régua e compasso e a utilização do software GeoGebra (HOHENWATER,2012), trabalhados nas disciplinas MA-13 e MA-36, respectivamente, do PROFMAT. Utilizamos também o GeoGebra na construção das figuras ilustrativas das demonstrações. O interesse por este software se deu após as aulas de recursos computacionais do mestrado profissional em matemática.

O estudo dos quadriláteros pode ser desenvolvido em todas as séries do Ensino Médio, desde que observados alguns pré-requisitos. O aluno precisa ter domínio dos conceitos, propriedades e teoremas dos triângulos, semelhança de triângulos, base média triangular, área do triângulo dada a medida de seus lados e o ângulo entre eles, Teorema de Pitágoras, Lei dos Senos e Cossenos, paralelismo e congruência de polígonos.

Para aplicação da proposta de demonstrações não há necessidade de equipamentos espantosos. O professor deverá ter conhecimento mínimo de informática e ter disponível um laboratório básico de informática. Não há necessidade de computador individual, pois o trabalho pode ser desenvolvido em dupla ou trio. Além do conteúdo aprofundado, o professor terá espaço para trabalhar o compartilhamento de conhecimentos. O software é de acesso livre e fácil instalação.

Este trabalho foi dividido em quatro capítulos. No primeiro capítulo exibimos definições de quadriláteros, conceitos, propriedades e teoremas nos quadriláteros notáveis. Além disso, apresentamos uma série de construções geométricas com a utilização de régua e compasso e do GeoGebra com objetivo de melhorar a compreensão dos conceitos matemáticos através do raciocínio lógico e da curiosidade, como diz Freire (FREIRE,2005) “Ensinar exige curiosidade”.

No segundo capítulo objetivamos demonstrar as fórmulas usadas para o cálculo de área dos quadriláteros convexos. E, no mesmo capítulo, calculamos a área dos quadriláteros notáveis. É muito interessante para o aluno saber por que a área de um quadrado de lado l é dada por l^2 , informação esta não passada nas escolas de educação básica. Ainda, são apresentadas as definições de quadriláteros baseados em Coxeter (COXETER,1967), inovadoras em relação às trabalhadas nas atuais salas de aula.

No terceiro capítulo enfatizamos os quadriláteros inscritos e circunscritos, bem como a fórmula de Brahmagupta.

A seguir, no quarto capítulo, apresentamos uma série de problemas resolvidos que podem, posteriormente, servir para que os alunos resolvam com o objetivo de observar a aplicabilidade dos seus conhecimentos pós-discussão dos estudos dos quadriláteros.

Para ter êxito nessas atividades, preferencialmente, o professor deverá ter disponibilidade para preparação das aulas. É necessário, no mínimo, 4 aulas semanais por turma, para que dê tempo suficiente para discutir entre os alunos e, em seguida, o professor mediador adentrar ao processo de resolução.

Capítulo 1

Estudo básico sobre quadriláteros

Neste capítulo serão apresentados definições, propriedades e teoremas dos quadriláteros convexos, bem como construções geométricas com a utilização de régua e compasso e software GeoGebra.

1.1 Definição

Sejam A , B , C e D quatro pontos de um mesmo plano, todos distintos e três não colineares. Se os segmentos AB , BC , CD , e DA interceptam-se apenas nas extremidades, a reunião desses quatro segmentos é um quadrilátero, segundo (DOLCE,2005).

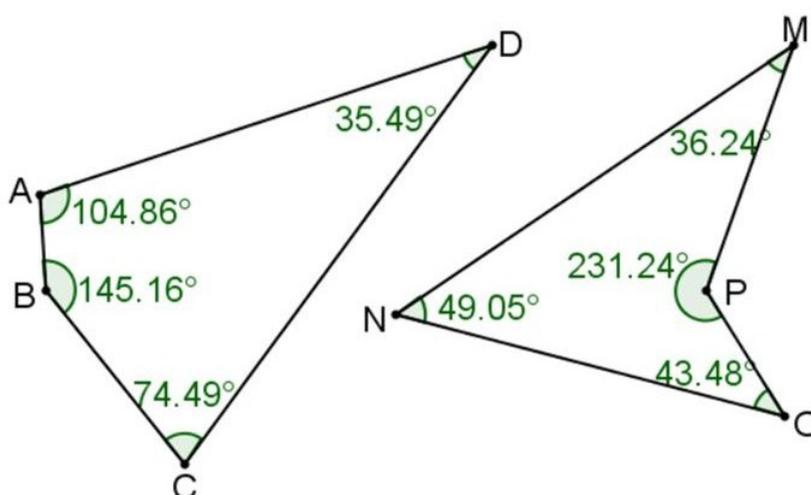


Figura 1.1: Quadrilátero e suas partes

A Figura 1.1 apresenta um quadrilátero convexo $ABCD$, onde AB , BC , CD , e

DA são os lados e $D\hat{A}B$, $A\hat{B}C$, $B\hat{C}D$ e $C\hat{D}A$ são ângulos e AC e BD são as diagonais.

Ainda na Figura 1.1, $MNOP$ é um quadrilátero côncavo, onde NP e OM são as diagonais.

A soma das medidas dos ângulos internos de cada quadrilátero, $ABCD$ e $MNOP$ é 360° . Intencionamos verificar se esta propriedade é válida para todos os quadriláteros.

Com o uso do GeoGebra, desenhe quadriláteros quaisquer, marque os ângulos e determine a soma dos ângulos internos de cada quadrilátero. Veja Figura 1.2. A medida encontrada sempre será 360° .

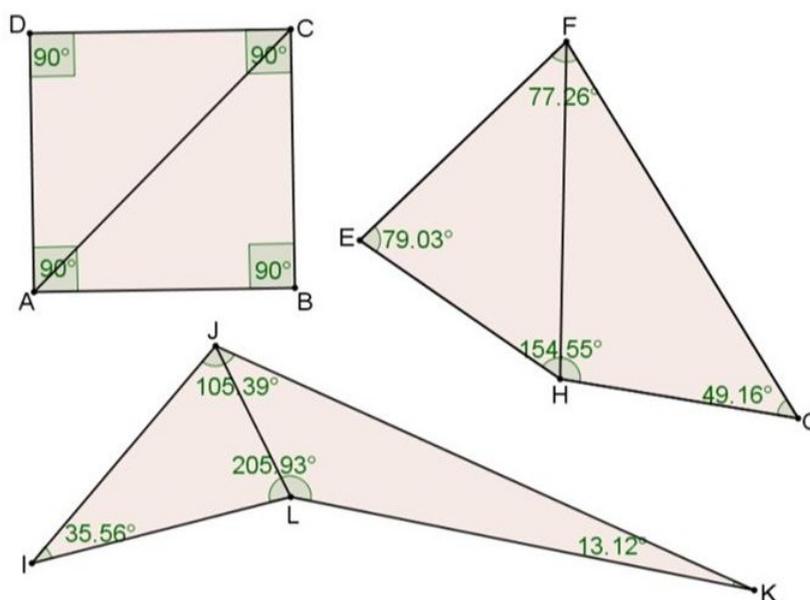


Figura 1.2: Soma dos ângulos internos de um quadrilátero

Demonstração: Ao traçar as diagonais AC , FH e JL , percebemos que estas dividem os quadriláteros $ABCD$, $EFGH$ e $IJKL$, respectivamente, em dois triângulos. Como a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180° , concluímos que a soma dos ângulos internos de um quadrilátero é sempre 360° .

□

1.2 Quadriláteros notáveis

O objetivo desta seção é esplanar sobre os quadriláteros notáveis bem como teoremas relacionados a esses. Para as definições e teoremas, tomamos com base o livro de Geometria I de Morgado, Wagner e Jorge (MORGADO et al.,1990) e o livro Fundamentos de Matemática Elementar de Dolce e Pompeo (DOLCE,2005).

1.2.1 Trapézio

Definição 1.1 *Um quadrilátero plano convexo é um trapézio se, e somente se possui dois lados paralelos.*

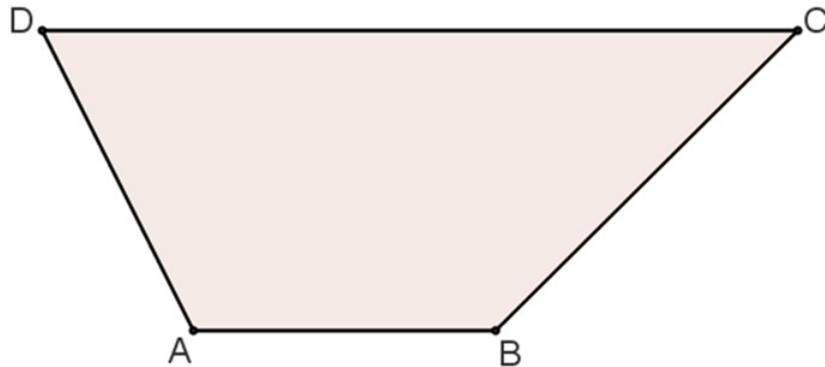


Figura 1.3: Trapézio: definição

Em outras palavras, se $AB \parallel DC$ ou $AD \parallel CB$, então $ABCD$ é um trapézio, como ilustra na Figura 1.3. No trapézio, os lados paralelos são chamados bases.

Existem três formas de trapézio:

Trapézio isósceles: Lados não paralelos são congruentes.

Seja $ABCD$ um quadrilátero em que $AB \parallel DC$, então $ABCD$ é um trapézio. Se $AD = BC$, então $ABCD$ é um trapézio isósceles. Temos ainda que se $AB \parallel DC$ e $AD = BC$, então $\widehat{DAB} \equiv \widehat{CBA}$ e $\widehat{ADC} \equiv \widehat{BCD}$.

Exemplo:

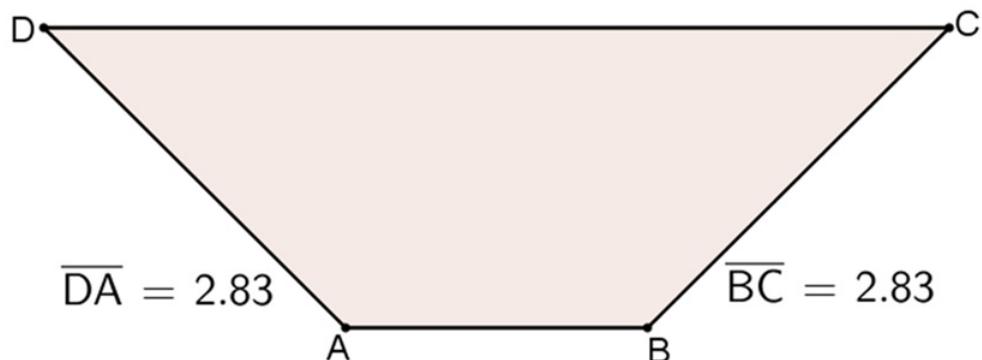


Figura 1.4: Trapézio isósceles

Trapézio escaleno: Lados não paralelos não são congruentes.

Seja o trapézio $ABCD$, se $AD \neq BC$, então $ABCD$ é um trapézio escaleno.

Exemplo:

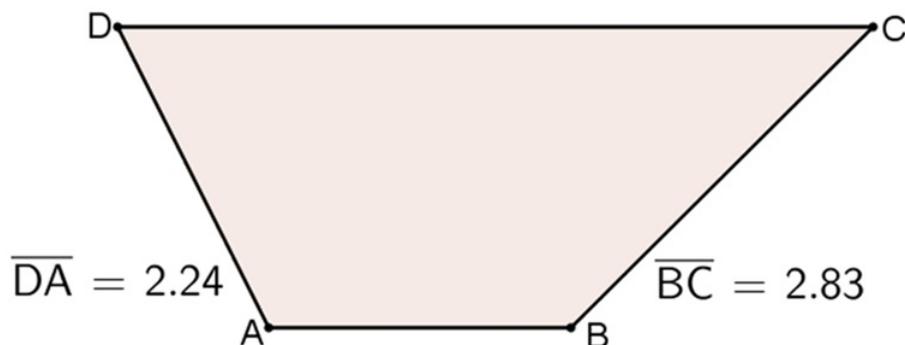


Figura 1.5: Trapézio escaleno

Trapézio retângulo: Possui dois ângulos retos.

Seja $ABDC$ um trapézio cujas bases são AB e CD e cuja medida dos ângulos $\hat{B} = \hat{C} = 90^\circ$, então $ABCD$ é um trapézio retângulo.

Exemplo:

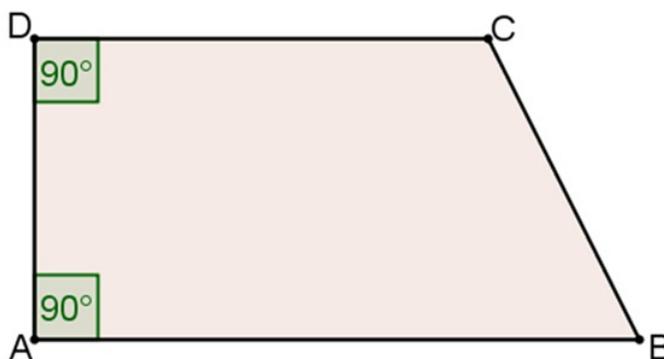


Figura 1.6: Trapézio retângulo

Teorema 1.1 Em qualquer trapézio $ABCD$ de bases AB e CD tem-se que $\hat{A} + \hat{D} = \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$

Demonstração: Se AB e CD é base do trapézio $ABCD$, então $AB \parallel CD$, logo AD é transversal $\Rightarrow \hat{A} + \hat{D} = 180^\circ$ (ângulos colaterais) e BC é outra transversal $\Rightarrow \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$. Portanto, $\hat{A} + \hat{D} = \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$.

□

Teorema 1.2 *Em todo trapézio isósceles de bases AB e CD tem-se que $\hat{A} \equiv \hat{B}$ e $\hat{C} \equiv \hat{D}$.*

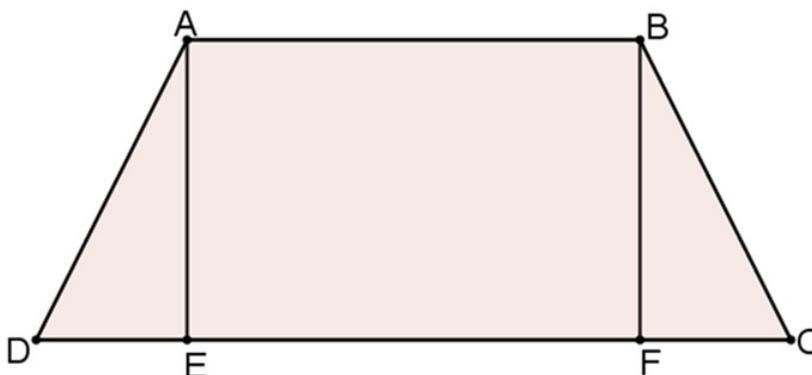


Figura 1.7: Demonstração do teorema 1.2

Demonstração: No trapézio $ABCD$, Figura 1.7, traçamos os segmentos AE e BF , tal que ambos sejam perpendiculares a base DC . Então, os triângulos ADE e BCF são retângulos e, AE tem a mesma medida de BF , os ângulos $\hat{A}ED = \hat{C}FB = 90^\circ$ e $AD = BC$. Logo, $\triangle ADE \equiv \triangle BFC$ pelo caso especial de semelhança dos triângulos retângulos. Assim, $\hat{D} \equiv \hat{C}$. Além disso, temos que \hat{A} e \hat{B} são suplementares dos ângulos \hat{D} e \hat{C} , respectivamente. Portanto, $\hat{A} \equiv \hat{B}$.

□

1.2.1.1 Base média dos trapézios

Teorema 1.3 *Se um segmento tem extremidade nos pontos médios dos lados não paralelos de um trapézio, então:*

- I) *ele é paralelo às bases;*
- II) *ele é igual à semi-soma das bases.*

Seja um trapézio de bases AB e CD , Figura 1.8.

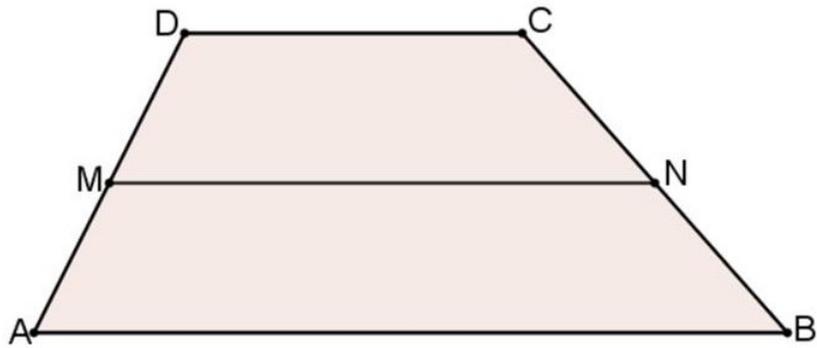


Figura 1.8: Base média do trapézio 1

Hipótese: $AM = DM$; $BN = CN$

Tese: I) $MN \parallel AB \parallel CD$

$$II) MN = \frac{AB + CD}{2}$$

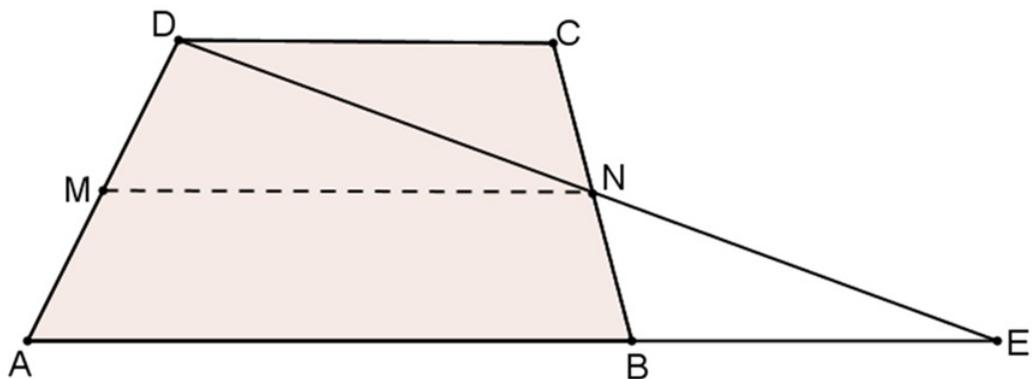


Figura 1.9: Base média do trapézio 2

Demonstração: Conforme Figura 1.9, sejam $ABCD$ um trapézio, E o ponto de intersecção das retas \overleftrightarrow{DN} e \overleftrightarrow{AB} e CB a transversal em relação as paralelas $AB \parallel CD$, então $\hat{E}BN \equiv \hat{N}CD$ (ângulos alternos). Temos também que $\hat{B}NE \equiv \hat{C}ND$ (o.p.v) e $CN = BN$. Logo, $\triangle EBN \equiv \triangle DCN$ (caso ALA) $\implies DN \equiv NE$ e $BE \equiv CD$ e no $\triangle ADE$, $AM \equiv MD$ e $DN \equiv NE$.

Portanto, pela base média triangular:

$$I) MN \parallel AE \implies MN \parallel AB \parallel CD;$$

$$II) MN = \frac{AE}{2} \implies MN = \frac{AB + BE}{2} \implies MN = \frac{AB + CD}{2}.$$

1.2.1.2 Mediana de Euler

Definição 1.2 *Mediana de Euler é o segmento gerado pela interseção da base média com as diagonais do trapézio e, também une os pontos médios das diagonais de um quadrilátero.*

Teorema 1.4 *Um segmento que tem extremidade no ponto médio das diagonais de um trapézio é igual a metade da diferença entre as bases (maior e menor).*

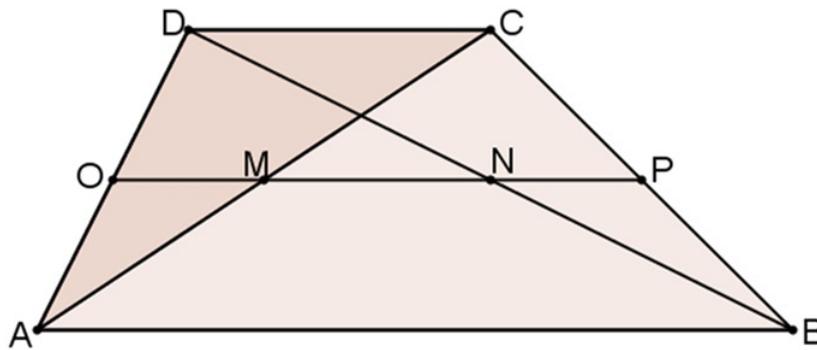


Figura 1.10: Mediana de Euler

Demonstração: Seja $ABCD$ um trapézio, cujas diagonais são AC e BD , Figura 1.10. Sejam M e N os pontos médios de AC e BD , respectivamente. Pela base média triangular temos que $OM = \frac{DC}{2}$ e $NP = \frac{DC}{2}$. Segue-se que $OM = NP$. Além disso, $OP = OM + MN + NP$. Então:

$$OP = \frac{DC}{2} + MN + \frac{DC}{2}. \quad (1.1)$$

Pela base média do trapézio :

$$OP = \frac{DC + AB}{2} \quad (1.2)$$

Por 1.1 e 1.2 temos:

$$\frac{DC}{2} + MN + \frac{DC}{2} = \frac{DC + AB}{2}$$

$$MN = \frac{DC + AB}{2} - DC$$

$$MN = \frac{DC + AB - 2DC}{2}$$

$$MN = \frac{AB - DC}{2}$$

1.2.2 Paralelogramo

Definição 1.3 *Um quadrilátero plano convexo é um paralelogramo se, e somente se, possui lados opostos paralelos.*



Figura 1.11: Paralelogramo

Ou seja, $ABCD$ é um paralelogramo $\iff AB \parallel CD$ e $AD \parallel BC$. A Figura 1.11 ilustra um paralelogramo.

Teorema 1.5 *Todo quadrilátero convexo que possui ângulos opostos congruentes é paralelogramo.*

Hipótese: $\hat{A} \equiv \hat{C}$, $\hat{B} \equiv \hat{D}$

Tese: $ABCD$ é paralelogramo.

Demonstração: Seja $ABCD$ um quadrilátero convexo qualquer, então $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} = 360^\circ$ e $\hat{A} + \hat{B} = \hat{C} + \hat{D} \Rightarrow 2 \cdot (\hat{A} + \hat{B}) = 360^\circ \Rightarrow \hat{A} + \hat{B} = 180^\circ$ e $\hat{C} + \hat{D} = 180^\circ$. Logo, $AD \parallel BC$ e $AB \parallel CD$. Portanto, $ABCD$ é paralelogramo. □

Teorema 1.6 *Todo quadrilátero convexo que possui lados opostos congruentes é paralelogramo.*

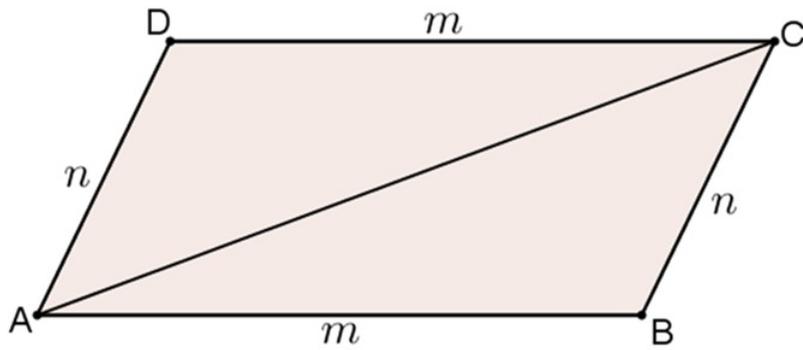


Figura 1.12: Quadrilátero convexo com lados opostos congruentes

Hipótese: $AB \equiv CD$ e $BC \equiv DA$.

Tese: $ABCD$ é paralelogramo.

Demonstração: Seja AC a diagonal de um quadrilátero convexo $ABCD$, ilustrado pela Figura 1.12. Por hipótese, $AB \equiv CD$ e $BC \equiv DA$ e AC é lado comum dos $\triangle ABC$ e $\triangle ADC$. Então, pelo caso *LLL*, temos que $\triangle ABC \equiv \triangle ADC$. Logo, $\hat{B}\hat{C}A \equiv \hat{D}\hat{A}C \Rightarrow AD \parallel BC$ e $\hat{B}\hat{A}C \equiv \hat{D}\hat{C}A \Rightarrow AB \parallel CD$. Portanto, $ABCD$ é paralelogramo.

□

Teorema 1.7 *Todo quadrilátero convexo em que as diagonais interceptam-se nos respectivos pontos médios é paralelogramo.*

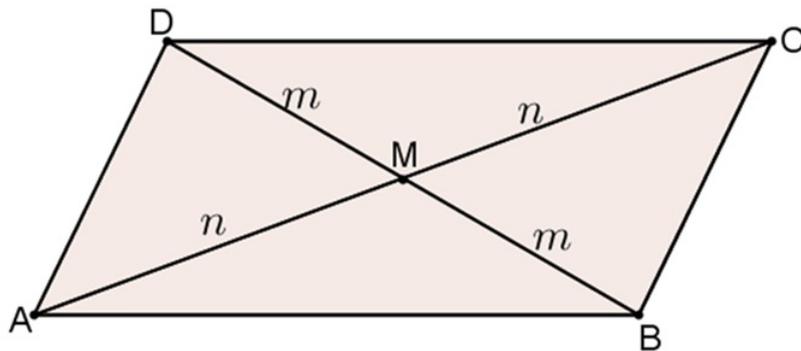


Figura 1.13:

Hipótese: $AC \cap BD = M$ e $AM \equiv MC$, $BM \equiv MD$.

Tese: $ABCD$ é paralelogramo.

Demonstração: Seja $ABCD$ um quadrilátero convexo, Figura 1.13. Apresenta-se, por hipótese, que $AM \equiv MC$, $BM \equiv DM$ e como $\hat{D}MA \equiv \hat{C}MB$ (o.p.v) segue-se que, $\triangle AMD \equiv \triangle BMC$ e $\triangle DMC \equiv \triangle AMB$ pelo caso LAL . Logo, $\hat{A}BD \equiv \hat{C}DB \Rightarrow AB \parallel CD$ e $\hat{D}AC \equiv \hat{A}CB \Rightarrow AD \parallel BC$. Portanto, $ABCD$ é paralelogramo. \square

1.2.3 Retângulo

Definição 1.4 *Um quadrilátero plano convexo é um retângulo se, e somente, possui os quatro ângulos congruentes.*

Exemplo:



Figura 1.14: Retângulo

Em outras palavras, $ABCD$ é um retângulo $\iff \hat{A} \equiv \hat{B} \equiv \hat{C} \equiv \hat{D}$

Teorema 1.8 *Um paralelogramo é retângulo se, e só se possui diagonais congruentes.*

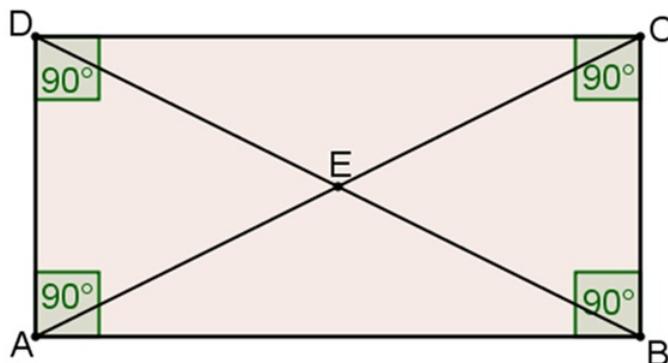


Figura 1.15: Retângulo com diagonais congruentes

Demonstração: Se $ABCD$ é um paralelogramo retângulo, ver Figura 1.15, então $AB \parallel CD$ e $AD \parallel BC$, $AB = CD$ e $AD = BC$, $\hat{B} = \hat{D} = 90^\circ$. Logo, $\triangle BAD \equiv \triangle DCB$ pelo caso LAL . Portanto, $AC = BD$. Reciprocamente, suponhamos que $ABCD$ é um paralelogramo tal que $AC = BD$. Como $AB = CD$ e $AD = BC$ e AD é lado comum dos $\triangle DAB$ e $\triangle ADC$, então $\triangle DAB \equiv \triangle ADC$ pelo caso LLL . Logo, $\hat{DAB} \equiv \hat{ADC}$. Como $ABCD$ é um paralelogramo, $\hat{DAB} + \hat{ADC} = 180^\circ$ e $\hat{ABC} + \hat{BCD} = 180^\circ$. Assim, $\hat{DAB} \equiv \hat{ADC} = 90^\circ$ e $\hat{ABC} \equiv \hat{BCD} = 90^\circ$. Então, $ABCD$ é um retângulo. □

Teorema 1.9 *Todo retângulo é um paralelogramo.*

Demonstração: Seja $ABCD$ um retângulo. Então $\hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = \hat{D} = 90^\circ$, segue-se que $AB \parallel CD$ e $BC \parallel AD$. Logo, $ABCD$ é um paralelogramo. □

1.2.4 Quadrado

Definição 1.5 *Um quadrilátero plano convexo é um quadrado se, e somente se, possui os quatro lados congruentes e os quatro ângulos congruentes.*

Exemplo:

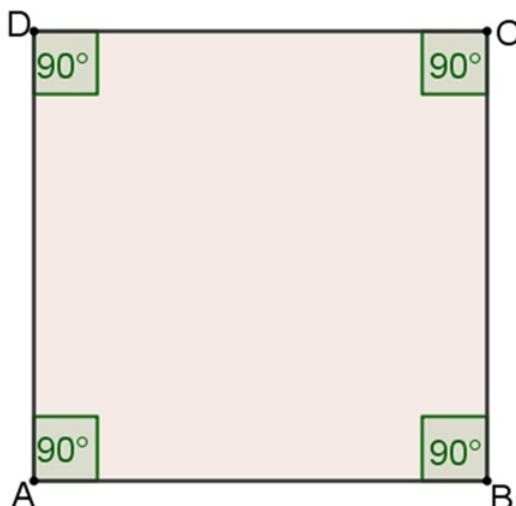


Figura 1.16: Quadrado

Ou, $ABCD$ é um quadrado $\iff AB \equiv BC \equiv CD \equiv DA$ e $\hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = \hat{D}$.

1.2.5 Losango

Definição 1.6 *Um quadrilátero plano convexo é losango se, e somente se, possui os quatro lados congruentes.*

Exemplo:

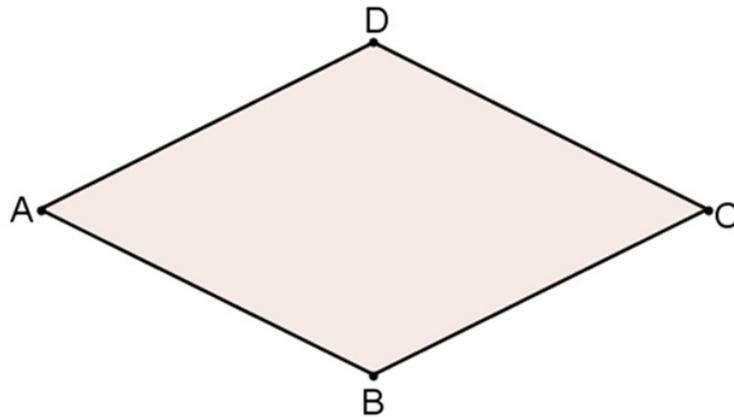


Figura 1.17: Losango

Ou, $ABCD$ é losango $\iff AB \equiv BC \equiv CD \equiv DA$

Teorema 1.10 *Um paralelogramo é um losango se, e somente se, suas diagonais são perpendiculares.*

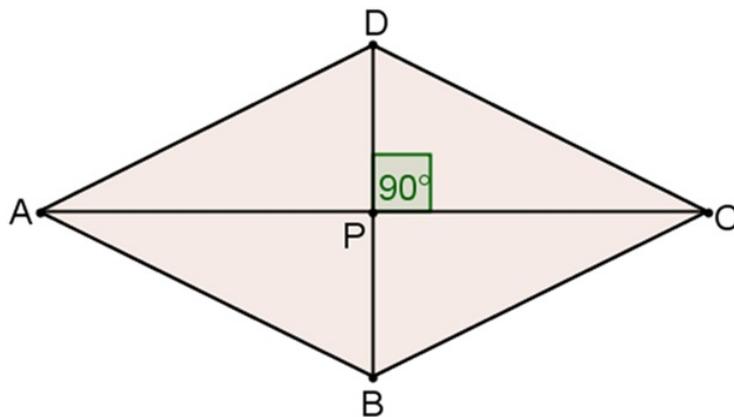


Figura 1.18: Paralelogramo com diagonais perpendiculares

Hipótese: um paralelogramo é um losango.

Tese: suas diagonais são perpendiculares.

Demonstração: Seja $ABCD$, Figura 1.18, um paralelogramo que é um losango. Então, $AB = BC = CD = DA$ e suas diagonais interceptam-se em seus pontos médios. Seja P o ponto de interseção das diagonais. Então, $\Delta BPC \equiv \Delta DPC$ (pelo caso LLL). Segue-se que $C\hat{P}B = C\hat{P}D$ e como $C\hat{P}B + C\hat{P}D = 180$, temos que $C\hat{P}B = C\hat{P}D = 90^\circ$. Portanto, $AC \perp BD$.

Hipótese: diagonais de um paralelogramo são perpendiculares.

Tese: o paralelogramo é um losango.

Demonstração: Seja $ABCD$ um paralelogramo cujas diagonais AC e BD são perpendiculares. Seja P o ponto de interseção das diagonais. Então, $AP = CP$ e $BP = DP$. Segue-se que $\Delta CPB \equiv \Delta CPD$ (pelo caso LAL). Logo, $BC = CD$. Como $ABCD$ é um paralelogramo, $AB = CD$ e $BC = AD$. Então, $AB = BC = CD = DA$. Portanto, $ABCD$ é um losango. □

Teorema 1.11 *Todo losango é um paralelogramo.*

Demonstração: Seja $ABCD$ um losango. Então, $AB = BC = CD = DA$. Ao considerar a diagonal AC , temos que $\Delta ABC \equiv \Delta ADC$ (pelo caso LLL) e que ΔABC e ΔADC são isósceles. Então, $B\hat{A}C = D\hat{C}A = A\hat{C}B = C\hat{A}D$. Logo, $AB \parallel CD$ e $BC \parallel AD$. Portanto, $ABCD$ é um paralelogramo. □

1.3 Construções geométricas

Cabe a esta seção mostrar algumas construções geométricas com o uso de régua e compasso e outras, o software GeoGebra. A utilização da régua e compasso é uma aplicação da aprendizagem das aulas de geometria do curso PROFMAT- MA13, enquanto o GeoGebra é aplicação da aprendizagem obtida nas aulas de recursos computacionais - MA36.

A construção geométrica possibilita uma melhor compreensão dos conceitos matemáticos, bem como a aplicação de teoremas e propriedades da geometria. Como diz

Ribeiro, (RIBEIRO,2009):

Por meio da construção interativa de figuras e objetos, podemos melhorar a compreensão dos alunos através da visualização, percepção dinâmica de propriedade, estímulo heurístico à descoberta e obtenção de conclusões “validadas” na experimentação.

O GeoGebra é um software de acesso livre de Geometria Dinâmica desenvolvido por Markus Hohenwater da Universidade de Salzburg, Áustria.

O software permite uma abordagem de diversos conteúdos, de forma dinâmica, em todos os níveis da Educação Matemática. Neste trabalho, ele foi utilizado para desenhar as figuras ilustrativas e terá uma abordagem nas construções geométricas.

Além dos conhecimentos relativos a aprendizagem no curso de mestrado, usamos como referência os autores Maziero (MAZIERO,2011), Gerônimo, Barros, e Franco, (GERÔNOMO et al.,2010), Ribeiro (RIBEIRO,2009) e Neto (NETO,2009).

Em toda construção desta seção será apresentada uma figura ilustrativa.

1.3.1 Construção 1: Paralelogramo

Construção de um paralelogramo $ABCD$, dadas as medidas de dois lados consecutivos.

Uma possível construção:

Sejam m_1 e m_2 as medidas respectivas dos lados AB e AD . Sem perda de generalidade, podemos tomar $m_1 \geq m_2$

- 1) Construa as circunferências λ e φ , de centro D e raio m_1 e centro B e raio m_2 , respectivamente. Seja C o ponto de interseção das circunferências λ e φ .
- 2) Construa as circunferências λ_1 e φ_1 , de centro D e raio m_2 e centro B e raio m_1 , respectivamente. Seja A o ponto de interseção das circunferências λ_1 e φ_1 .

$ABCD$ é um paralelogramo.

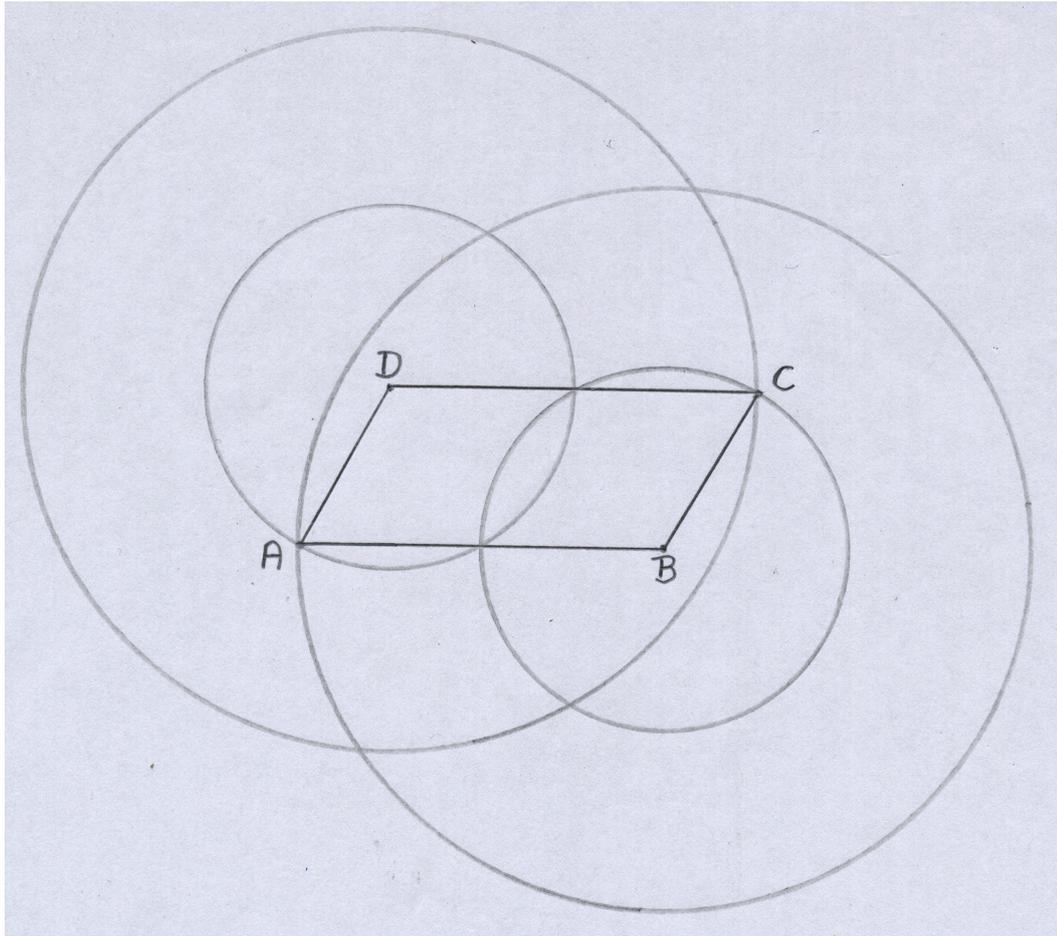


Figura 1.19: Construção de uma paralelogramo

1.3.2 Construção 2: Paralelogramo

Construção de um paralelogramo $ABCD$ usando o GeoGebra.

Uma possível construção:

- 1) Marque três pontos quaisquer e nomeie A , B e C , respectivamente;
- 2) Trace os segmentos AB e BC ;
- 3) Trace uma reta s , paralela a BC que passa pelo ponto A ;
- 4) Trace uma reta r , paralela a AB que passa pelo ponto C ;
- 5) Marque o ponto D de interseção das retas s e r .

$ABCD$ é um paralelogramo.

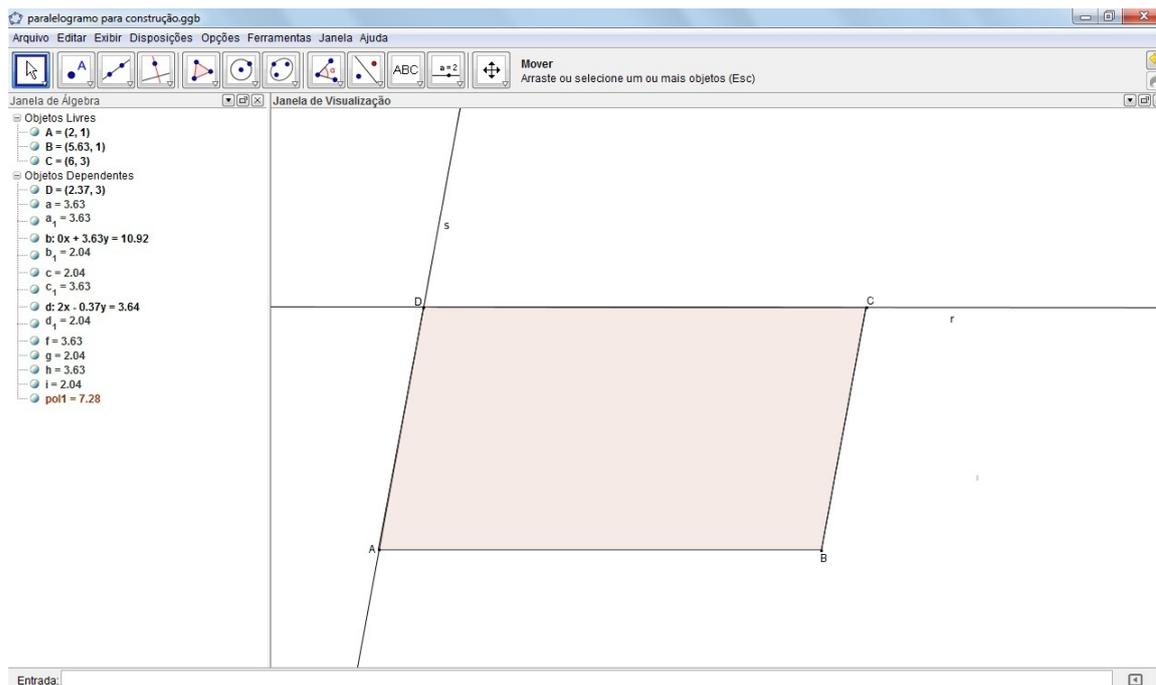


Figura 1.20: Construção de uma paralelogramo

1.3.3 Construção 3: Retângulo

Construção de um retângulo $ABCD$.

Uma possível construção:

- 1) Trace um segmento AB ;
- 2) Trace por A , uma reta s , perpendicular a AB ;
- 3) Trace por B , uma reta t , perpendicular a AB ;
- 4) Com centro em A e raio qualquer, trace uma circunferência φ ;
- 5) Marque o ponto D de interseção $\varphi \cap s$;
- 6) Com o mesmo raio e centro em B , trace a circunferência μ ;
- 7) Marque o ponto C de interseção $\mu \cap t$;
- 8) $ABCD$ é um retângulo.

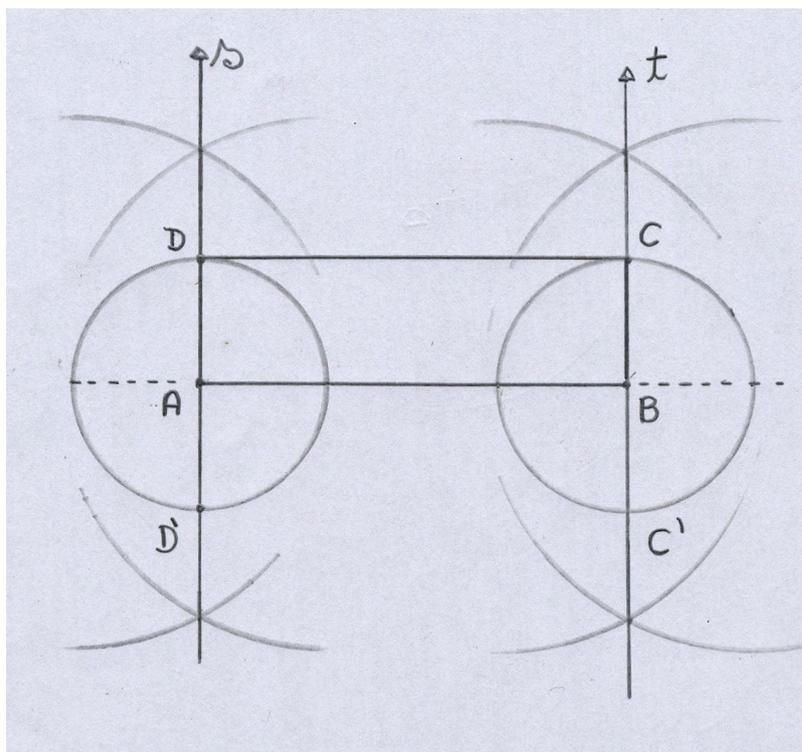


Figura 1.21: Construção de um retângulo

1.3.4 Construção 4: Losango

Construção de um losango dada uma diagonal AC .

Uma possível construção:

- 1) Desenhe a diagonal AC ;
- 2) Construa uma circunferência μ de centro A e raio maior que $AC/2$
- 3) Construa uma circunferência μ' de mesmo raio que μ e centro C ;
- 4) Marque os pontos B e D , interseção de μ e μ' . A reta BD é mediatriz do segmento AC ;
- 5) $ABCD$ é um losango.

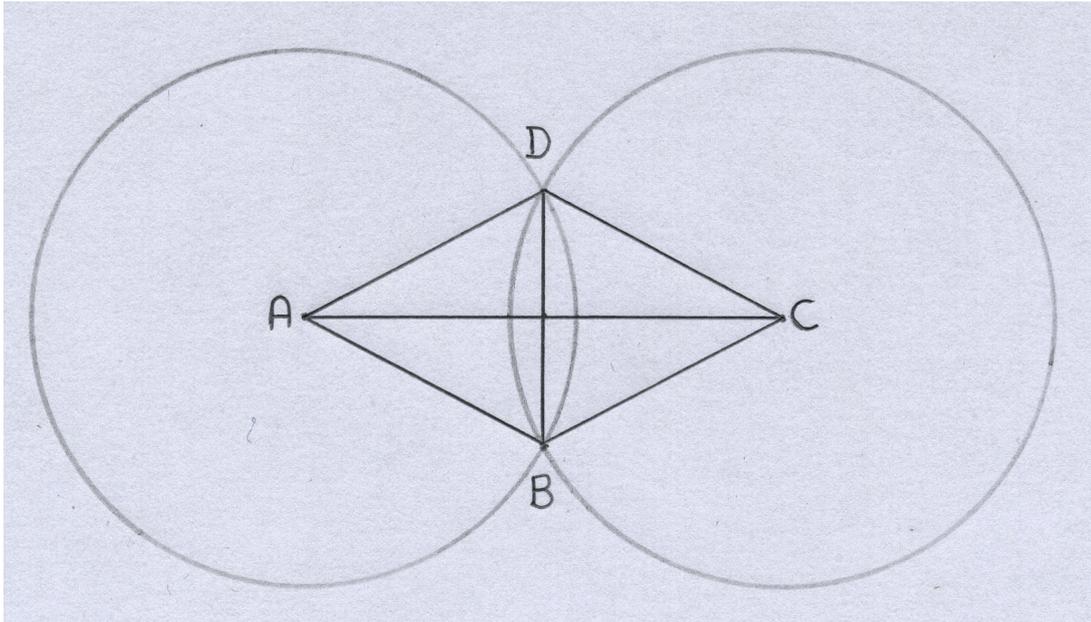


Figura 1.22: Construção de um losango

1.3.5 Construção 5: Losango

Construção de um losango usando o GeoGebra.

Uma possível construção:

- 1) Trace um segmento AB ;
- 2) Trace a mediatriz do segmento AB ;
- 3) Marque a interseção I do segmento AB e a mediatriz;
- 4) Trace uma circunferência de centro I e raio qualquer;
- 5) Marque os pontos C e D , interseção da mediatriz e a circunferência;
- 6) Trace os segmentos AC, CB, BD e DA ;

$ABCD$ é um losango.

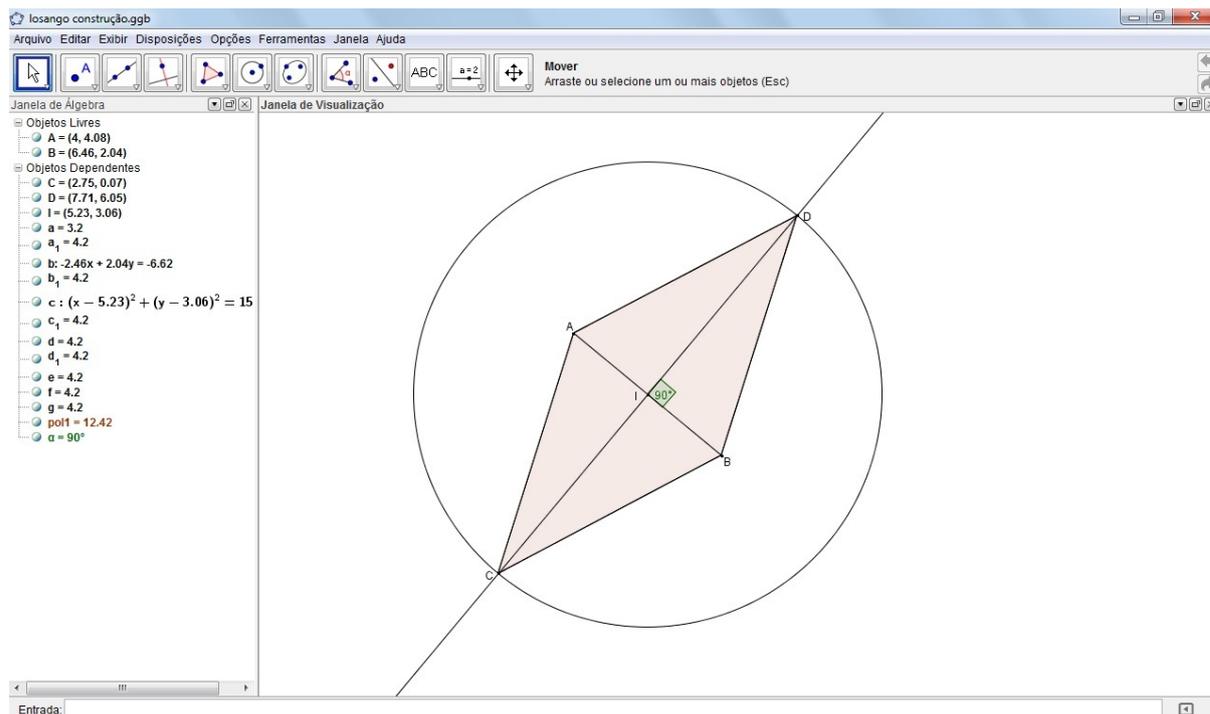


Figura 1.23: Construção de um losango

1.3.6 Construção 6: Quadrado

Construção de um quadrado usando o GeoGebra.

Uma possível construção:

- 1) Trace um segmento AB ;
- 2) Trace a mediatriz do segmento AB ;
- 3) Marque a interseção I do segmento AB e a mediatriz;
- 4) Trace uma circunferência de centro I e raio IA ;
- 5) Trace os pontos C e D , interseção da mediatriz e a circunferência;
- 6) Trace os segmentos AC, CB, BD e DA .

$ABCD$ é um quadrado.

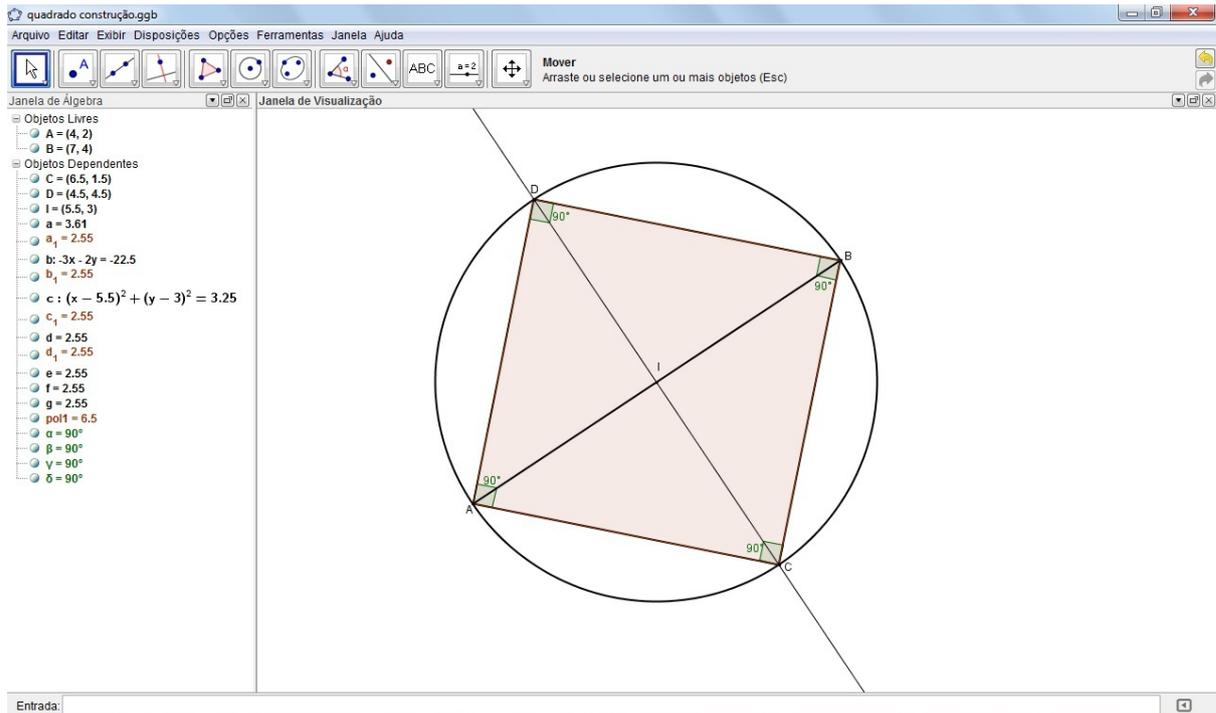


Figura 1.24: Construção de um quadrado

1.3.7 Construção 7: Quadrado

Construção de um quadrado a partir de um lado AB .

Uma possível construção:

- 1) Construa um segmento de medida AB ;
- 2) Construa uma reta m , perpendicular ao segmento AB e passando por A ;
- 3) Construa as circunferências λ e φ de centro A e B , respectivamente, e raio AB ;
- 4) Construa uma reta r , perpendicular ao segmento AB e passando por B ;
- 5) Chame de C a interseção $\varphi \cap r$;
- 6) Construa a reta t , perpendicular a r , e passando por C ;
- 7) Chame de D a interseção de m e t .

$ABCD$ é um quadrado.

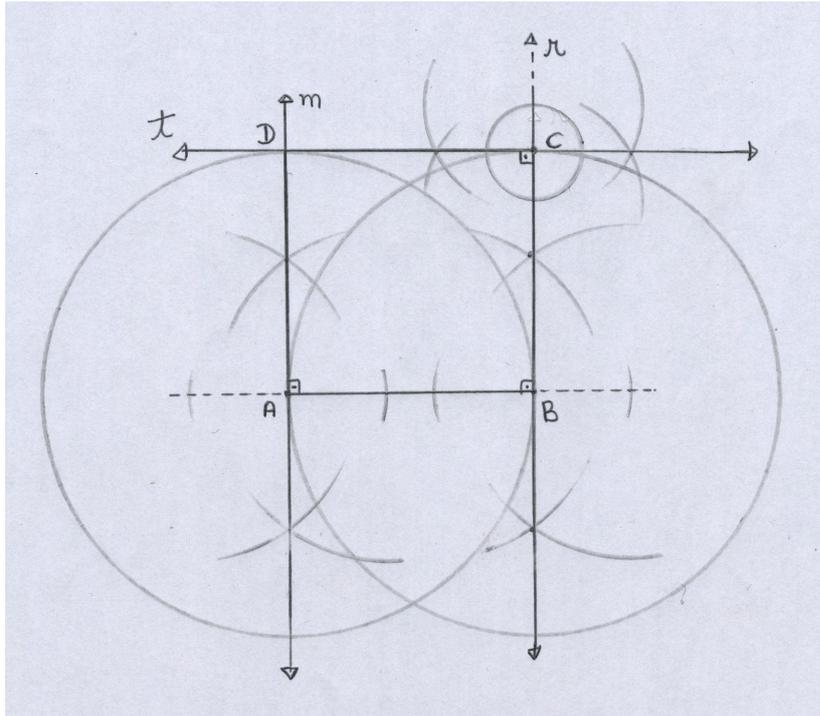


Figura 1.25: Construção de um quadrado

Capítulo 2

Área dos quadriláteros convexos

Este capítulo tem como objetivo demonstrar as relações usadas para o cálculo da área dos quadriláteros convexos.

Antes de definir a área de um quadrilátero serão apresentadas algumas definições que ajudam na compreensão dos teoremas, bem como a área de uma região plana.

Segundo Pinho, Batista e Carvalho (PINHO et al.,2010), “*O conceito de área só é admissível para regiões do plano delimitadas por uma curva fechada*”.

Definição 2.1 *Uma curva parametrizada $x = x(t)$ é fechada se para $a \leq t \leq b$, tem-se que $x(a) = x(b)$, isto é, as extremidades coincidem.*

Exemplo:

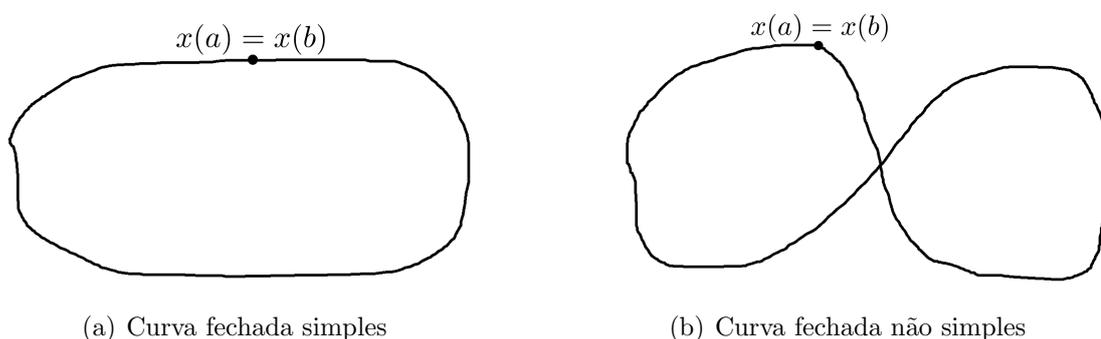


Figura 2.1: Curvas fechadas

Definição 2.2 *Uma curva fechada simples é uma curva que possui uma única interseção, as extremidades.*

Pelo teorema ?? segue-se que há duas regiões no plano, uma interior e outra exterior. A área de uma região plana está submetida a região interior de uma curva fechada simples.

Intuitivamente, a área dessa região é um número real positivo a ela associado, que serve para quantificar o espaço ocupado pela mesma. Mais precisamente devemos ter:

Definição 2.3 *Seja α uma região plana, delimitada por uma curva fechada simples. A área de α é um número real positivo denotado por (α) , satisfazendo as seguintes condições:*

- a) *Se $\alpha_1 \equiv \alpha_2$ então $(\alpha_1) = (\alpha_2)$, isto é, duas figuras congruentes possuem a mesma área;*
- b) *Se duas regiões, α_1 e α_2 , se intersectam, no máximo, pela sua fronteira, então $(\alpha_1 \cup \alpha_2) = (\alpha_1) + (\alpha_2)$. Logo, a área é uma grandeza aditiva;*
- c) *Sejam α_1 e α_2 regiões e (α_1) e (α_2) suas respectivas áreas. Se $\alpha_1 \subset \alpha_2$, então $(\alpha_1) < (\alpha_2)$;*
- d) *Um quadrado de lado igual a 1 possui área igual a 1.*

Observação: A condição c) da definição 2.3, poderia ser suprimida, tendo em vista que pode ser demonstrada usando as demais:

Pela condição a), $\alpha_1 \equiv \alpha_2 \implies (\alpha_1) = (\alpha_2)$. Se $\alpha_1 \subsetneq \alpha_2$, então $\alpha_1 \equiv \alpha_2 \cup (\alpha_1 - \alpha_2)$. Por fim, por b), temos: $(\alpha_1) = (\alpha_2) + (\alpha_1 - \alpha_2) \implies (\alpha_1) < (\alpha_2)$

Após definir a área de uma região plana é possível realizar o estudo da área dos quadriláteros.

2.1 Área dos quadriláteros notáveis

Esta seção terá como foco a demonstração das relações da área dos quadriláteros notáveis. Iniciará pela área do quadrado e na sequência a área do retângulo. As outras relações serão obtidas a partir do quadrado e do retângulo.

2.1.1 Área do quadrado

Teorema 2.1 *A área de um quadrado de lado l é dada por $A_l = l^2$.*

Demonstração: Tomando um quadrado cujo lado é um número inteiro n , são necessários n^2 quadrado de área 1 para cobrir inteiramente o quadrado de lado n . Como a área é aditiva podemos garantir que o quadrado de lado n possui área n^2 , conforme Figura 2.2

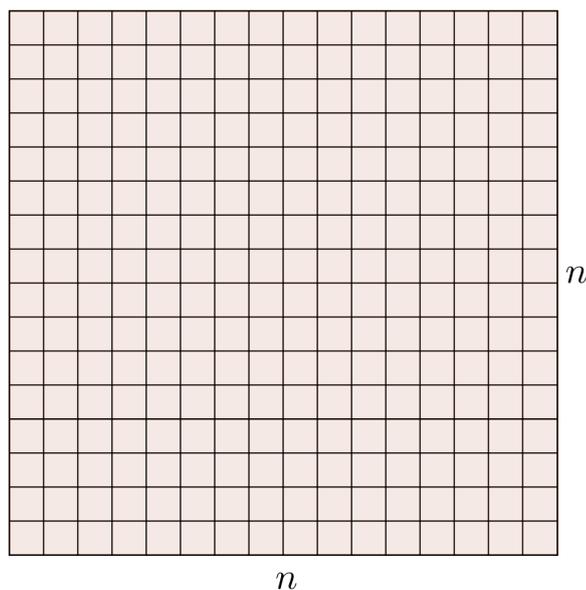


Figura 2.2: Área de um quadrado de lado n

Quando o valor do lado a de um quadrado não é um número inteiro, mas é um número racional, basta escolher uma nova unidade de comprimento l , tal que $1 = n.l$ e $a = m.l$. Portanto:

$$a = \frac{m}{n} \quad (2.1)$$

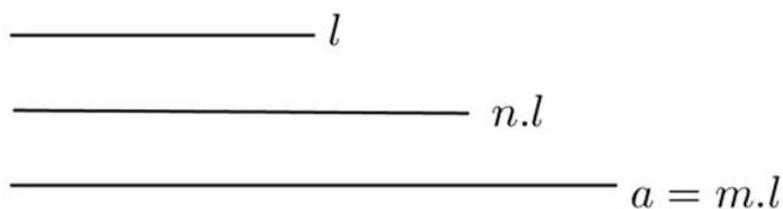


Figura 2.3: Os segmentos de comprimentos l , 1 e a

O quadrado de lado 1 possui uma área igual a n^2 vezes a área do quadrado de lado l . Denotando por A_l a área do quadrado de lado l , temos:

$$1 = n^2 . A_l \implies A_l = \frac{1}{n^2} \quad (2.2)$$

O quadrado de lado a possui área igual a m^2 vezes a área do quadrado de lado l . Denotando por S a área do quadrado de lado a , temos que $S = m^2 . A_l$. Substituindo 2.2

em S , temos:

$$S = m^2 \cdot \frac{1}{n^2} = \frac{m^2}{n^2} \quad (2.3)$$

Elevando 2.1 ao quadrado, temos:

$$a^2 = \frac{m^2}{n^2} \quad (2.4)$$

Comparando 2.3 e 2.4, concluimos que:

$$S = \frac{m^2}{n^2} = a^2$$

Para o caso em que o número a é um número irracional. Considere os quadrados de lados $x_k \in \mathbb{Q}$ e $y_k \in \mathbb{Q}$, com $k \in \mathbb{N}$, tal que $x_k < l < y_k$ e $y_k - x_k < \frac{1}{k}$.

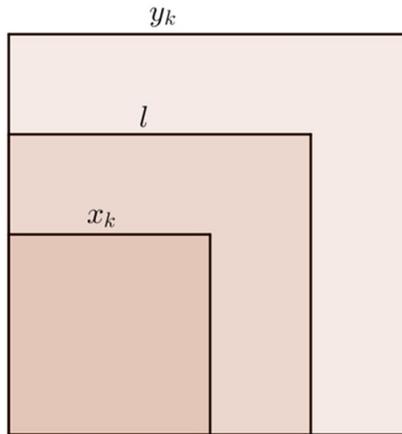


Figura 2.4: Quadrados de lados x_k , l e y_k

1ª Parte: Se $x_k < l$, então $x_k^2 < l^2$

Demonstração: Se $x_k < l$ (multiplicando por x_k), temos $x_k \cdot x_k < l \cdot x_k$ e então:

$$x_k^2 < l \cdot x_k \quad (2.5)$$

Da mesma forma se $x_k < l$ (multiplicando por l), temos $x_k \cdot l < l \cdot l$ e então:

$$x_k \cdot l < l^2 \quad (2.6)$$

Por 2.5 e 2.6, temos por fim:

$$x_k^2 < l^2 \quad (2.7)$$

2ª Parte: Se $l < y_k$, então $l^2 < y_k^2$

Demonstração: Se $l < y_k$ (multiplicando por l), temos $l.l < y_k.l$ e então:

$$l^2 < y_k.l \quad (2.8)$$

Da mesma forma se $l < y_k$ (multiplicando por y_k), temos $y_k.l < y_k.y_k$ e então:

$$y_k.l < y_k^2 \quad (2.9)$$

Por 2.8 e 2.9, temos por fim:

$$l^2 < x_k^2 \quad (2.10)$$

Por 2.7 e 2.10, temos:

$$x_k^2 < l^2 < y_k^2$$

Seja A_l a área do quadrado de lado l . Pela condição c da definição 2.3, temos que $x_k^2 < A_l < y_k^2$

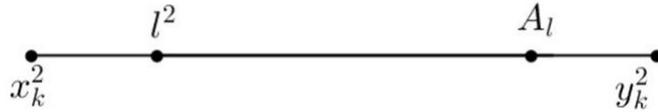


Figura 2.5:

$$|A_l - l^2| < y_k^2 - x_k^2, \text{ mas,}$$

$$y_k^2 - x_k^2 = (y_k - x_k)(y_k + x_k) = (y_k - x_k)(y_k - x_k + 2x_k)$$

$$|A_l - l^2| < (y_k - x_k)(y_k - x_k + 2x_k)$$

$$\text{Como } y_k - x_k < \frac{1}{k}$$

$$|A_l - l^2| < \frac{1}{k} \left(\frac{1}{k} + 2x_k \right); \text{ mas, } x_k < l, \text{ então } 2x_k < 2l$$

$$|A_l - l^2| < \frac{1}{k} \left(\frac{1}{k} + 2l \right), \text{ para todo } k \in \mathbb{N} \quad (2.11)$$

A partir de 2.11, sabemos que $|A_l - l^2| = 0$, pois do contrário, teríamos que $|A_l - l^2| = a > 0$. Sabemos que existe $k \in \mathbb{N}$, tal que: $\frac{1}{k} \left(\frac{1}{k} + 2l \right) < \frac{a}{2}$, de fato:

$$\frac{1}{k^2} + \frac{2l}{k} < \frac{a}{2}$$

$$\frac{1}{k^2} + \frac{2l}{k} - \frac{a}{2} < 0$$

$$2 + 4lk - ak^2 < 0$$

$$f(k) = ak^2 - 4lk - 2 > 0$$

$$k = \frac{4l \pm \sqrt{16l^2 + 8a}}{2a} = \frac{4l \pm \sqrt{4(4l^2 + 2a)}}{2a} = \frac{2l \pm \sqrt{4l^2 + 2a}}{a} \implies \begin{cases} k_1 = \frac{2l + \sqrt{4l^2 + 2a}}{a} \\ k_2 = \frac{2l - \sqrt{4l^2 + 2a}}{a} \end{cases}$$

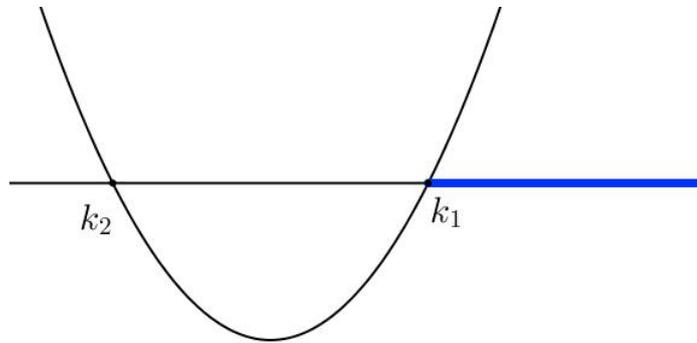


Figura 2.6: Esboço do gráfico de $f(k)$

Observando o esboço do gráfico de $f(k)$, vemos que não há necessidade de estudar o sinal de k_2 , pois k_1 é positivo e qualquer valor maior que k_1 satisfaz a inequação. Então, basta tomar:

$$k > \frac{2l + \sqrt{4l^2 + 2a}}{a}$$

Por fim,

$$a = |(A_l) - l^2| < \frac{1}{k} \left(\frac{1}{k} + 2l \right) < \frac{a}{2}, \quad \forall k > \frac{2l + \sqrt{4l^2 + 2a}}{a}, \text{ ou seja:}$$

$$a < \frac{a}{2} \text{ (absurdo)}$$

Logo, $|A_l - l^2| = 0 \implies A_l = l^2$

Portanto, a área de um quadrado de lado l é igual a l^2 .

□

Para facilitar a notação, doravante, sendo $A_1\dots A_n$ um polígono com vértices A_1, \dots, A_n e $a_1\dots a_n$ um polígono com lados a_1, \dots, a_n , denotaremos por (A_1, \dots, A_n) e (a_1, \dots, a_n) suas respectivas áreas.

2.1.2 Área do retângulo

Teorema 2.2 *A área do retângulo de lados a e b é igual a $a.b$.*

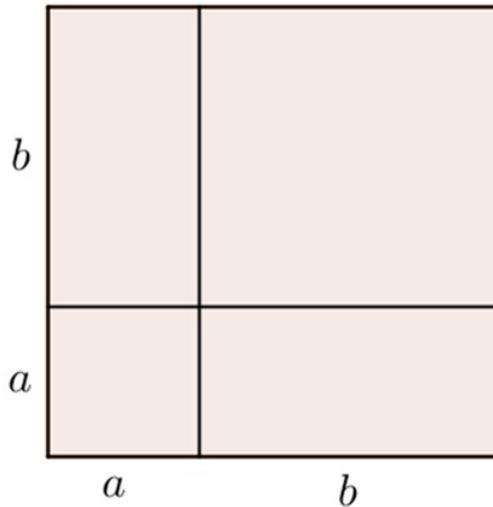


Figura 2.7: Área do retângulo

Demonstração: Seja o quadrado $ABCD$ de lados iguais a $a + b$, Figura 2.7. A área do quadrado é igual a soma das áreas do quadrado de lado a , do quadrado de lado b , e duas vezes a área do retângulo de lados a e b que será denotada por $A(a, b)$. Então, a área do quadrado $ABCD$ é dada por:

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2A(a, b) \quad (2.12)$$

Por outro lado,

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2.a.b \quad (2.13)$$

Ao compararmos as equações 2.12 e 2.13, temos que:

$$A(a, b) = a.b.$$

□

2.1.3 Área do paralelogramo

Teorema 2.3 *A área de um paralelogramo é igual ao produto da base pela altura.*

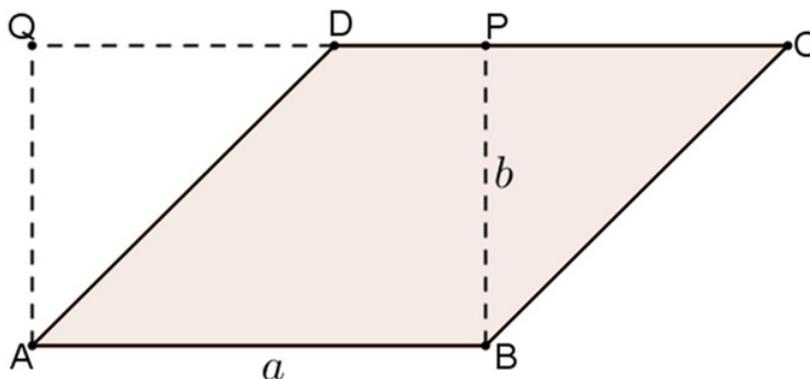


Figura 2.8: Área do paralelogramo

Demonstração: Seja o paralelogramo $ABCD$ de base AB e altura BP , Figura 2.8. Pelos pontos A e B , traçam-se duas perpendiculares a AB até encontrarem CD . Assim formarão o retângulo $ABPQ$ de área $A = a \cdot b$. Os triângulos $\triangle AQP$ e $\triangle BPC$ são congruentes, pois possuem hipotenusas congruentes (AD e BC são lados paralelos do paralelogramo $ABCD$) e catetos congruentes. Logo, $(ABCD) = (ABPQ) = a \cdot b$.

□

2.1.4 Área do trapézio

Teorema 2.4 *A área do trapézio é igual ao produto da média aritmética de suas bases pela sua altura.*

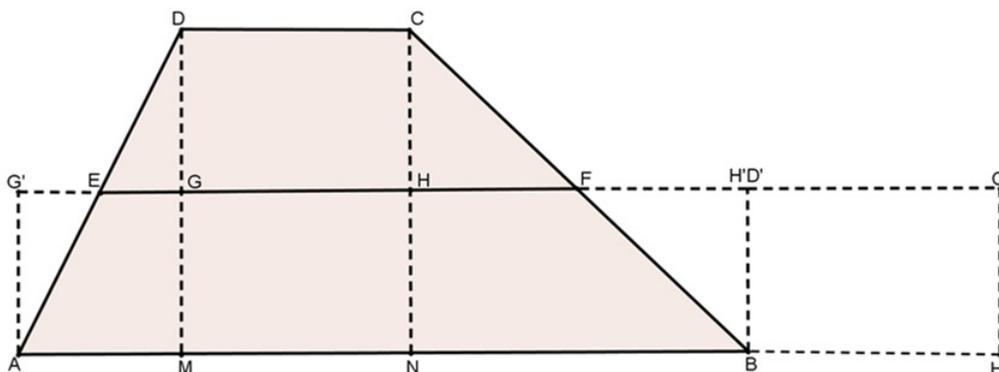


Figura 2.9: Área do trapézio

Demonstração: Seja o trapézio $ABCD$ de bases a , b e altura h , Figura 2.9. Sendo E e F , pontos médios dos lados AD e CB , respectivamente, temos que EF é base média do trapézio. Traçamos DG, CH, AG' e BH' , tais que DG, CH, AG' e BH' sejam perpendiculares a EF . Segue-se que $EA = ED$, pois E é o ponto médio de AD ; $\hat{A}G'E = \hat{E}GD = 90^\circ$; $D\hat{E}G = A\hat{E}G'$ (o.p.v.). Então, $\triangle DEG \equiv \triangle EG'A$ (pelo caso LAA). De forma análoga, $\triangle EHF \equiv \triangle FH'B$.

Posteriormente traçamos $H'C'$ perpendicular a AB e prolongamos EF , tal que $D'C' = DC$ e AB , tal que $BH' = GH$. Pela base média, temos que $DC // EF // AB$, $DG = GM$ e $CH = HN$. Então, $DC = D'C$ e $GH = BH'$. Segue-se que os quadriláteros $GHCD$ e $BH'C'D'$ são retângulos (quatro ângulos retos) congruentes. Portanto, $(ABCD) = (AH'C'G') = (a + b)\frac{h}{2} = \left(\frac{a + b}{2}\right)h$. □

2.1.5 Área do losango

Teorema 2.5 *A área do losango é igual a metade do produto dos comprimentos de suas diagonais.*

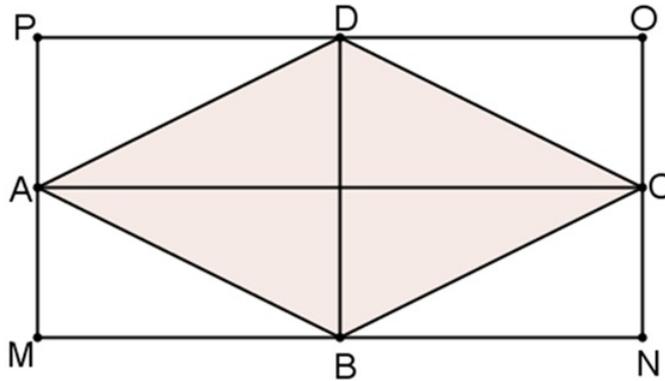


Figura 2.10: Área do losango

Demonstração: Seja o losango $ABCD$, cujas diagonais são AC e BD , Figura 2.10. Ao traçar retas paralelas às diagonais pelos vértices do losango forma-se o retângulo $MNOP$, cuja área é o dobro da área do losango. Então:

$$(MNOP) = AC \cdot BD$$

$$(MNOP) = 2(ABCD)$$

$$AC \cdot BD = 2(ABCD)$$

$$(ABCD) = \frac{AC \cdot BD}{2}$$

□

2.2 Teorema de Varignon

O objetivo desta seção é apresentar a demonstração do Teorema de Varignon. Como no primeiro capítulo dessa dissertação, definimos, segundo Dolce e Pompeo, apenas os quadriláteros convexos (duas diagonais internas) e côncavos (uma diagonal interna) e o Teorema é válido para outro quadrilátero, chamado por Coxeter e Greitzer, de quadrilátero cruzado (duas diagonais externas). Então, faremos estudo dos quadriláteros convexos, reentrantes e cruzados baseados nesses autores.

Para compreender esta nova concepção de quadriláteros, definimos polígonos, também baseados em Coxeter e Greitzer.

Segundo Coxeter e Greitzer (COXETER,1967), um polígono pode ser definido como consistindo de um número de pontos (chamados vértices), ciclicamente ordenados em um plano, e igual número de segmentos de linhas que ligam vértices consecutivos, não possuindo três pontos sucessivos colineares.

O polígono recebe o nome de acordo o número de vértices e o número de lados: no caso de n vértices, n -gono. Assim, temos um pentágono ($n = 5$), hexágono ($n = 6$) e assim por diante. A exceção ocorre quando $n = 3$ e $n = 4$, nestes dois casos, o polígono é chamado de triângulo e quadrilátero, respectivamente.

Como o objetivo do trabalho é fazer um estudo dos quadriláteros, apresentaremos nesta seção definições, propriedades e teoremas sobre quadriláteros baseados nos autores ora citados.

Definição 2.4 *Dois lados de um quadrilátero são adjacentes quando eles têm vértices em comum, caso contrário, são ditos opostos;(COXETER,1967)*

Definição 2.5 *Dois vértices são adjacentes quando eles pertencem a um mesmo lado, caso contrário são ditos opostos;*

Definição 2.6 *A linha que junta um par de vértices opostos é chamada de diagonal;*

Os quadriláteros $ABCD$ abaixo têm lados AB, BC, CD e DA e diagonais AC e BD .

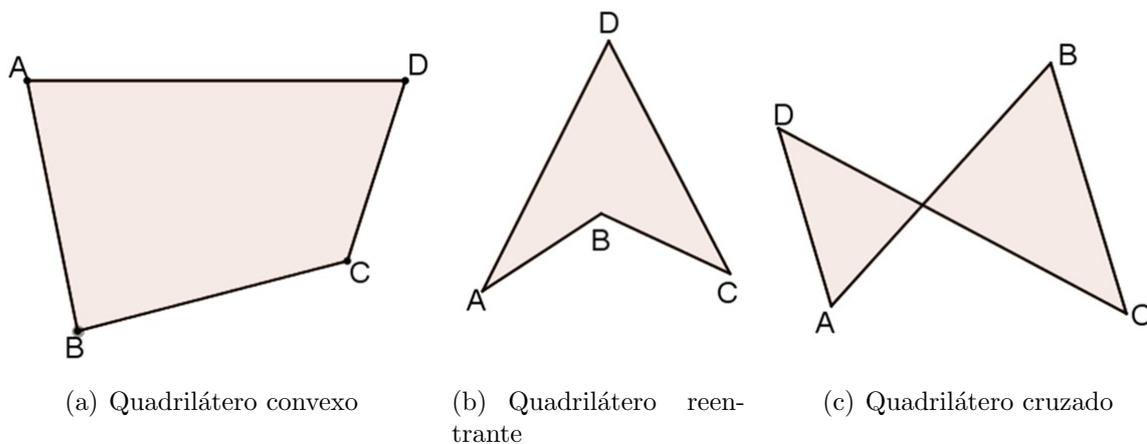


Figura 2.11: Quadriláteros - definição de Coxeter

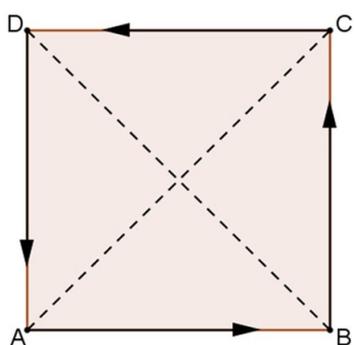
A Figura 2.11 representa três tipos de quadriláteros:

Figura 2.11(a): Quadrilátero convexo - as duas diagonais são internas;

Figura 2.11(b): Quadrilátero reentrante - possui uma diagonal interna e outra externa;

Figura 2.11(c): Quadrilátero cruzado - as duas diagonais são externas.

A área de um quadrilátero convexo é definida pela soma das áreas dos dois triângulos em que foram compostos pelas diagonais.



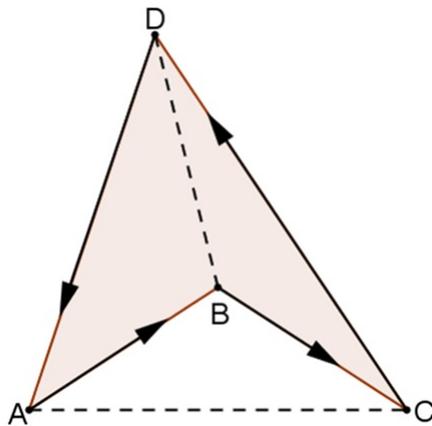
$$\begin{aligned} (ABCD) &= (ABC) + (CDA) \\ &= (BCD) + (DAB). \end{aligned}$$

Figura 2.12: Área do quadrilátero convexo

Essa fórmula pode ser estendida para os quadriláteros reentrantes. A área dos triângulos é considerada negativa ou positiva de acordo a ordem de nomeação dos vértices no sentido anti-horário e horário, respectivamente.

$$(ABC) = (BCA) = (CAB) = -(CBA).$$

Então, a área do quadrilátero representado pela Figura 2.11(b) é dada por:



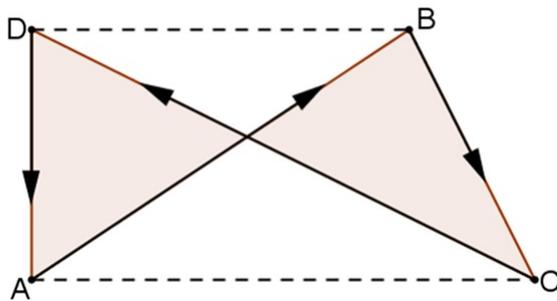
$$\begin{aligned} (ABCD) &= (BCD) + (DAB) \\ &= (ABC) + (CDA). \end{aligned}$$

Como $(ABC) = -(CBA)$, então:

$$(ABCD) = (CDA) - (CBA).$$

Figura 2.13: Área do quadrilátero reentrante

A área do quadrilátero cruzado é dada pela diferença entre a área dos dois triângulos pequenos, dos quais o quadrilátero é composto, ou seja:



$$\begin{aligned} (ABCD) &= (BCD) + (DAB) \\ &= (ABC) + (CDA). \end{aligned}$$

Como $(ABC) = -(CBA)$, então:

$$(ABCD) = (CDA) - (CBA). \quad (2.14)$$

Figura 2.14: Área do quadrilátero cruzado I

Considerando a Figura 2.15, seja M a interseção dos lados AB e CD . A partir disso, podemos conceber uma interessante caracterização da área do quadrilátero cruzado. Usando a equação 2.14, temos:

$$\begin{aligned} (ABCD) &= (CDA) - (CBA) \\ &= [(CMA) + (MDA)] - [(CBM) + (CMA)] \\ &= (MDA) - (CBM) \end{aligned}$$

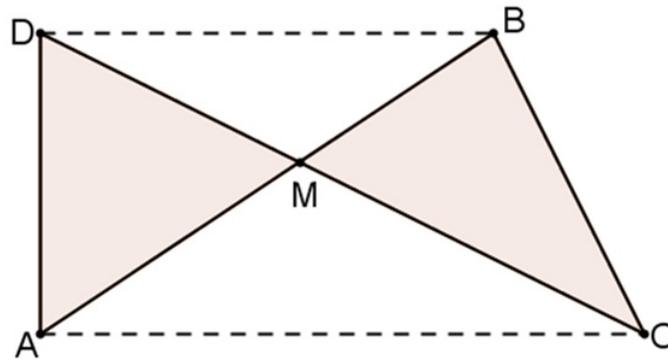


Figura 2.15: Área do quadrilátero cruzado II

Teorema 2.6 (Varignon¹) *A figura formada pelos pontos médios de um quadrilátero ABCD é um paralelogramo e sua área é a metade da área do quadrilátero.*

A seguir faremos a demonstração do teorema que será dividida em três casos (tipos de quadriláteros): convexos, reentrantes e cruzados.

Demonstração: quadrilátero convexo

Para esta demonstração seguiremos as notações da Figura 2.16.

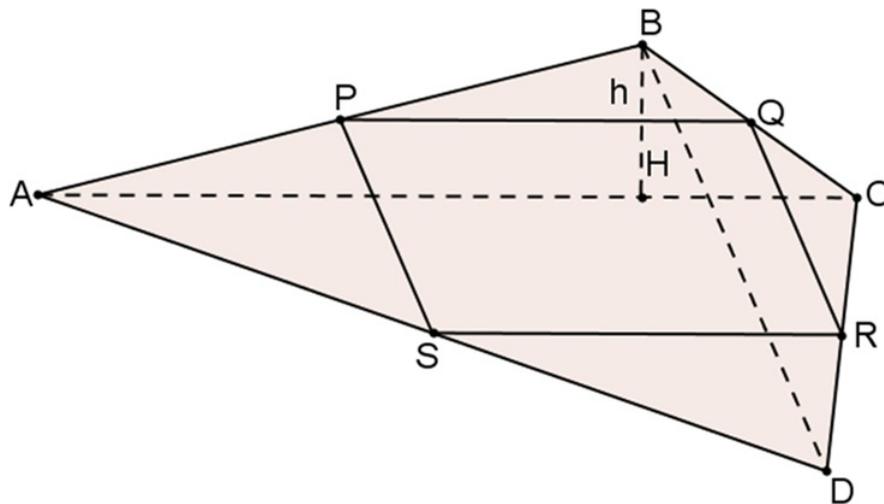


Figura 2.16: Teorema de Varignon - Quadrilátero convexo

Parte I

¹Pierre Varignon nasceu em Caen - França, foi educado no Colégio Jesuítas e estudou na Universidade de Caen, onde recebeu seu MA em 1682. Em 1688, Varignon tornou-se professor de matemática e sua principal contribuição foi a estática gráfica e mecânica. Foi também um dos primeiros estudiosos a desenvolver dinâmica analítica. Em 1702, aplicou o cálculo para relógios impulsionados por uma mola (Wikipedia,2012c).

Ao traçar a diagonal AC , pela base média triangular temos que $PQ//AC$ e $SR//AC \implies PQ//SR$. De forma análoga, ao traçar a diagonal BD , temos que $PS//BD$ e $QR//BD \implies PS//QR$.

Portanto, $PQRS$ é um paralelogramo.

Parte II

$$(ABC) = \frac{AC.H}{2}$$

$$(ABC) = \frac{1}{2}.AC.H$$

Pela base triangular $AC = 2PQ$ e $H = 2h$

$$(ABC) = \frac{1}{2}.2PQ.2h$$

$$(ABC) = \frac{1}{2}.PQ.h.4$$

$$(ABC) = \left(\frac{PQ.h}{2}\right).4$$

$$(ABC) = (PQB).4$$

$$(PQB) = \frac{1}{4}(ABC)$$

De forma análoga temos que :

$$(PSA) = \frac{1}{4}(BDA)$$

$$(SDR) = \frac{1}{4}(ACD)$$

$$(RQC) = \frac{1}{4}(DBC)$$

Então:

$$\begin{aligned} (PQRS) &= (ABCD) - [(PQB) + (SRD) + (RQC) + (PSA)] \\ &= (ABCD) - \left[\frac{1}{4}(ABC) + \frac{1}{4}(ACD) + \frac{1}{4}(DBC) + \frac{1}{4}(BDA) \right] \\ &= (ABCD) - \left\{ \frac{1}{4}[(ABC) + (ACD)] + \frac{1}{4}[(DBC) + (BDA)] \right\} \\ &= (ABCD) - \frac{1}{4}(ABCD) - \frac{1}{4}(ABCD) \\ &= \frac{1}{2}(ABCD) \end{aligned}$$

□

Demonstração: quadrilátero reentrante

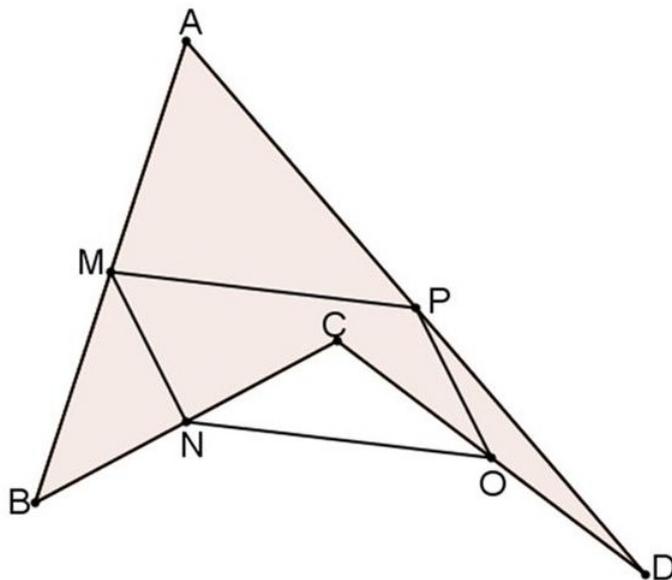


Figura 2.17: Teorema de Varignon - Quadrilátero reentrante

Parte I

Seja $ABCD$ um quadrilátero reentrante (Figura 2.17), em que os pontos médio dos lados AB , BC , CD e DA são respectivamente M , N , O e P .

Ao traçarmos a diagonal AC , pela base média triangular temos que:

$$\left. \begin{array}{l} MN // AC \\ PO // AC \end{array} \right\} \Rightarrow MN // PO$$

De forma análoga, ao traçarmos a diagonal BD , temos que:

$$\left. \begin{array}{l} NO // BD \\ MP // BD \end{array} \right\} \Rightarrow NO // MP$$

Portanto, $MNOP$ é um paralelogramo.

Parte II

Analogamente a demonstração do primeiro caso deste teorema (quadriláteros convexos), pela Figura 2.17 segue:

$$(AMP) = \frac{1}{4}(ABD)$$

$$(MBN) = \frac{1}{4}(ABC)$$

$$(POD) = \frac{1}{4}(ACD)$$

$$(CNO) = \frac{1}{4}(CBD)$$

$$(BDNO) = (CBD) - \frac{1}{4}(CBD) = \frac{3}{4}(CBD)$$

Então:

$$\begin{aligned} (MNOP) &= (ABD) - (AMP) - (MBN) - (POD) - \frac{3}{4}(CBD) \\ &= (ABD) - \frac{1}{4}(ABD) - \frac{1}{4}(ABC) - \frac{1}{4}(ACD) - \frac{3}{4}(CBD) \\ &= \frac{3}{4}(ABD) - \frac{1}{4}(ABCD) - \frac{3}{4}(CBD) \\ &= \frac{3}{4}[(ABD) - (CBD)] - \frac{1}{4}(ABCD) \\ &= \frac{3}{4}(ABCD) - \frac{1}{4}(ABCD) = \frac{1}{2}(ABCD) \end{aligned}$$

□

Demonstração: quadrilátero cruzado

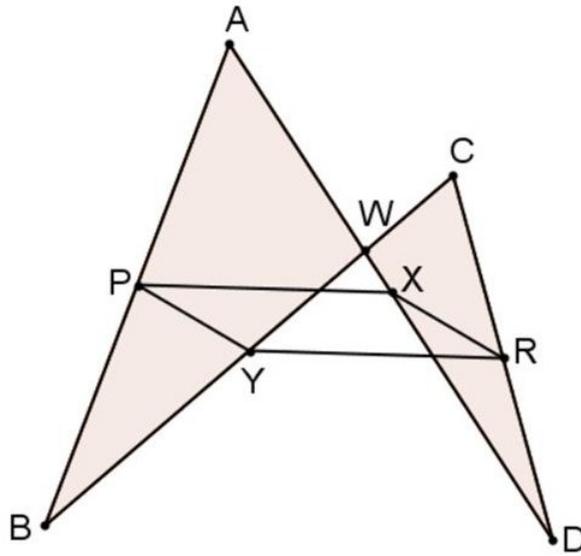


Figura 2.18: Teorema de Varignon - Quadrilátero cruzado

Parte I

Seja $ABCD$ um quadrilátero cruzado, em que os pontos médio dos lados AB , BC , CD e DA são respectivamente P , Y , R e X , como mostra na Figura 2.18.

Ao traçarmos as diagonais AC e BD , pela base média triangular temos que:

$$\left. \begin{array}{l} PY // AC \\ XR // AC \end{array} \right\} \Rightarrow PY // XR \quad \text{e}$$

$$\left. \begin{array}{l} YR // BD \\ PX // BD \end{array} \right\} \Rightarrow YR // PX$$

Portanto, $PYRX$ é um paralelogramo.

Parte II

$$(PYRX) = (ABCD) - (AXRC) - (APX) - (PBY) - (YBDR)$$

De forma análoga a demonstração do primeiro caso deste teorema (quadriláteros convexos), temos:

$$(AXRC) = \frac{3}{4}(ADC)$$

$$(APX) = \frac{1}{4}(ABD)$$

$$(PBY) = \frac{1}{4}(ABC)$$

$$(YBDR) = \frac{3}{4}(BDC)$$

Então:

$$\begin{aligned} (PYRX) &= (ABCD) - \frac{3}{4}(ADC) - \frac{1}{4}(ABD) - \frac{1}{4}(ABC) - \frac{3}{4}(BDC) \\ &= (ABCD) - \frac{1}{2}(ADC) - \frac{1}{4}(ADC) - \frac{1}{4}(ABD) - \frac{1}{4}(ABC) - \frac{1}{2}(BDC) - \frac{1}{4}(BDC) \\ &= (ABCD) - \left[\frac{(ADC) + (BDC)}{2} \right] - \left[\frac{(ADC) + (ABD) + (ABC) + (BDC)}{4} \right] \\ &= (ABCD) - \left[\frac{(ADC) + (BDC)}{2} \right] - \left[\frac{(ABCD) + (ABCD)}{4} \right] \\ &= (ABCD) - \left[\frac{(ADC) + (BDC)}{2} \right] - \frac{(ABCD)}{2} \\ &= \frac{(ABCD)}{2} - \left[\frac{(ADC) + (BDC)}{2} \right] \end{aligned}$$

Mas como:

$$(ABCD) = (ABW) + (BDW) + (DCW) + (CAW)$$

$$(ADC) = (CAW) + (DCW)$$

$$(BDC) = (BDW) + (DCW)$$

Segue que:

$$\begin{aligned} (PYRX) &= \frac{(ABW) + (BDW) + (DCW) + (CAW)}{2} - \left[\frac{(CAW) + (DCW) + (BDW) + (DCW)}{2} \right] \\ &= \frac{(ABW) - (DCW)}{2} \\ &= \frac{(ABCD)}{2} \end{aligned}$$

□

Teorema 2.7 *Uma diagonal divide um quadrilátero em dois triângulos de áreas iguais se, e somente se, ela intersecta a outra diagonal no ponto médio.*

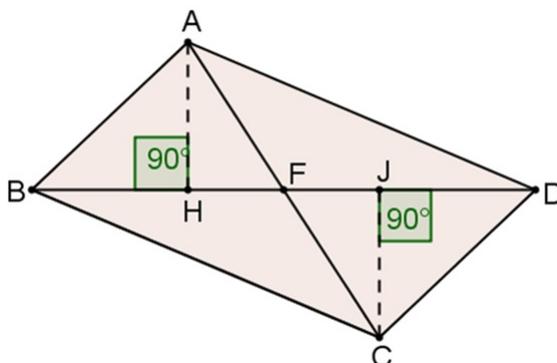


Figura 2.19:

Demonstração: A partir da Figura 2.19, suponhamos que BD divide $ABCD$ em dois triângulos de áreas iguais e BD é a base comum dos triângulos BAD e BCD , então $AH = JC$. Os ângulos $H\hat{F}A \equiv C\hat{F}J$ (o.p.v.); $A\hat{H}F = C\hat{J}F = 90^\circ$. Logo, $\Delta HAF \equiv \Delta JCF$ pelo caso LAA . Portanto, $AF = FC$ e F é o ponto médio de AC .

Reciprocamente, suponhamos que F é o ponto médio de AC , então $AF = FC$. Os ângulos $H\hat{F}A \equiv C\hat{F}J$ (o.p.v.) e $A\hat{H}F = C\hat{J}F = 90^\circ$. Logo, $\Delta HAF \equiv \Delta JCF$ pelo caso LAA . Então, $AH = JC$. Como BD é lado comum dos triângulos ΔBAD e ΔBCD e as alturas AH e JC são congruentes, os triângulos ΔBAD e ΔBCD têm as mesmas áreas.

□

2.3 Área de um quadrilátero convexo qualquer.

O teorema 2.8 ilustra uma fórmula geral que serve para o cálculo da área de qualquer quadrilátero convexo, desde que se conheça a medida dos seus lados e dois ângulos opostos.

Teorema 2.8 *Dado um quadrilátero convexo $ABCD$. Denotando seus lados AB, BC, CD e DA por a, b, c e d , respectivamente e diagonal AC e AD por x e y , respectivamente. Sendo $2s = a + b + c + d$, sua área K é dada por:*

$$K^2 = (s - a)(s - b)(s - c)(s - d) - abcd \cdot \cos^2 \alpha. \quad (2.15)$$

Demonstração: Chamando $\hat{A} + \hat{C} = 2\alpha$, K_1 a área do $\triangle ABD$ e K_2 a área do $\triangle BCD$, segue-se que:

$$K_1 = \frac{1}{2}.ad.\text{sen}\hat{A} \text{ e } K_2 = \frac{1}{2}.bc.\text{sen}\hat{C}$$

$$\text{Então: } K = K_1 + K_2$$

$$K = \frac{1}{2}.ad.\text{sen}\hat{A} + \frac{1}{2}.bc.\text{sen}\hat{C}$$

$$2K = ad.\text{sen}\hat{A} + bc.\text{sen}\hat{C} \quad (2.16)$$

Pela lei dos cossenos, segue-se que: $\begin{cases} y^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos\hat{C} \\ y^2 = a^2 + d^2 - 2ad.\cos\hat{A} \end{cases}$, ou seja:

$$a^2 + d^2 - 2ad.\cos\hat{A} = b^2 + c^2 - 2bc.\cos\hat{C}$$

$$a^2 + d^2 - b^2 - c^2 = 2ad.\cos\hat{A} - 2bc.\cos\hat{C}$$

$$\frac{1}{2}(a^2 + d^2 - b^2 - c^2) = ad.\cos\hat{A} - bc.\cos\hat{C} \quad (2.17)$$

Elevando 2.16 ao quadrado, temos:

$$(2K)^2 = (ad.\text{sen}\hat{A} + bc.\text{sen}\hat{C})^2$$

$$4K^2 = a^2d^2.\text{sen}^2\hat{A} + 2.abcd.\text{sen}\hat{A}.\text{sen}\hat{C} + b^2c^2.\text{sen}^2\hat{C}$$

$$4K^2 = a^2d^2.(1 - \cos^2\hat{A}) + 2.abcd.\text{sen}\hat{A}.\text{sen}\hat{C} + b^2c^2.(1 - \cos^2\hat{C})$$

$$4K^2 = a^2d^2 - a^2d^2\cos^2\hat{A} + 2.abcd.\text{sen}\hat{A}.\text{sen}\hat{C} + b^2c^2 - b^2c^2\cos^2\hat{C} \quad (2.18)$$

Elevando 2.17 ao quadrado, temos:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 (a^2 + d^2 - b^2 - c^2)^2 = (ad.\cos\hat{A} - bc.\cos\hat{C})^2$$

$$\frac{1}{4}(a^2 + d^2 - b^2 - c^2)^2 = a^2d^2\cos^2\hat{A} - 2.abcd.\cos\hat{A}.\cos\hat{C} + b^2c^2\cos^2\hat{C} \quad (2.19)$$

Somando 2.18 e 2.19, membro a membro, temos:

$$4K^2 + \frac{1}{4}(a^2 + d^2 - b^2 - c^2)^2 = a^2d^2 + b^2c^2 - a^2d^2 \cos^2 \hat{A} + a^2d^2 \cos^2 \hat{A} + \\ + 2.abcd. \text{sen} \hat{A}. \text{sen} \hat{C} - 2.abcd. \cos \hat{A}. \cos \hat{C} - \\ - b^2c^2 \cos^2 \hat{C} + b^2c^2 \cos^2 \hat{C}$$

$$a^2d^2 + b^2c^2 - 2abcd(\cos \hat{A}. \cos \hat{C} - \text{sen} \hat{A}. \text{sen} \hat{C}) = 4K^2 + \frac{1}{4}(a^2 + d^2 - b^2 - c^2)^2$$

$$a^2d^2 + b^2c^2 - 2abcd(\cos \hat{A} + \hat{C}) = 4K^2 + \frac{1}{4}(a^2 + d^2 - b^2 - c^2)^2$$

$$a^2d^2 + b^2c^2 - 2abcd. \cos 2\alpha = 4K^2 + \frac{1}{4}(a^2 + d^2 - b^2 - c^2)^2$$

$$4(a^2d^2 + b^2c^2) - 4.2abcd. \cos 2\alpha = 4.4K^2 + 4. \frac{1}{4}(a^2 + d^2 - b^2 - c^2)^2$$

$$4(a^2d^2 + b^2c^2) - 8.abcd. \cos 2\alpha = 16K^2 + (a^2 + d^2 - b^2 - c^2)^2$$

$$4a^2d^2 + 4b^2c^2 - 8.abcd.(2 \cos^2 \alpha - 1) - (a^2 + d^2 - b^2 - c^2)^2 = 16K^2$$

$$4a^2d^2 + 4b^2c^2 + 8.abcd - 16abcd \cos^2 \alpha - (a^2 + d^2 - b^2 - c^2)^2 = 16K^2$$

$$(2ad + 2bc)^2 - (a^2 + d^2 - b^2 - c^2)^2 - 16abcd. \cos^2 \alpha = 16K^2$$

$$(2ad + 2bc + a^2 + d^2 - b^2 - c^2)(2ad + 2bc - a^2 - d^2 + b^2 + c^2) - 16.abcd. \cos^2 \alpha = 16K^2$$

$$[(a^2 + 2ad + d^2) - (b^2 - 2bc + c^2)][(b^2 + 2bc + c^2) - (a^2 - 2ad + d^2)] - 16abcd. \cos^2 \alpha = 16K^2$$

$$[(a + d)^2 - (b - c)^2][(b + c)^2 - (a - d)^2] - 16abcd. \cos^2 \alpha = 16K^2$$

$$[(a + d + b - c)(a + d - b + c)][(b + c + a - d)(b + c - a + d)] - 16abcd. \cos^2 \alpha = 16K^2$$

$$[(a + b + c + d - 2c)(a + b + c + d - 2b)][(a + b + c + d - 2d)(a + b + c + d - 2a)] -$$

$$-16abcd. \cos^2 \alpha = 16K^2$$

$$(2s - 2c)(2s - 2b)(2s - 2d)(2s - 2a) - 16abcd. \cos^2 \alpha = 16K^2$$

$$2.(s - c).2.(s - b).2.(s - d).2.(s - a) - 16abcd. \cos^2 \alpha = 16K^2$$

$$16(s - a)(s - b)(s - c)(s - d) - 16abcd. \cos^2 \alpha = 16K^2$$

$$K^2 = (s - a)(s - b)(s - c)(s - d) - abcd \cos^2 \alpha$$

Observação: Para esta demonstração, tomamos os ângulos opostos \hat{A} e \hat{C} . Mas, a fórmula não se altera ao usar os ângulos opostos \hat{B} e \hat{D} . De fato, ao tomarmos $\hat{A} + \hat{C} = 2\alpha$, temos

que $\alpha = \frac{\hat{A} + \hat{C}}{2}$. Logo, $\cos \alpha = \cos \left(\frac{\hat{A} + \hat{C}}{2} \right)$. Se $\hat{A} + \hat{C} = 2\alpha$, então $\hat{B} + \hat{D} + 2\alpha = 360^\circ$

e $\frac{\hat{B} + \hat{D}}{2} = (180^\circ - \alpha)$.

$$\begin{aligned} \cos^2 \left(\frac{\hat{B} + \hat{D}}{2} \right) &= \cos^2 (180^\circ - \alpha) \\ &= (\cos(180^\circ - \alpha))^2 \\ &= (-\cos \alpha)^2 \\ &= \cos^2 \alpha \end{aligned}$$

Portanto, a fórmula é válida ao tomarmos quaisquer pares de ângulos opostos do quadrilátero convexo.

Capítulo 3

Quadriláteros inscritíveis e circunscritíveis na circunferência

Conforme Coxeter e Gretzer (COXETER,1967), dado quatro comprimentos a, b, c e d , tais que cada um é menor que a soma dos outros três pode-se formar um quadrilátero convexo, tal que os vértices do quadrilátero tangenciam uma circunferência.

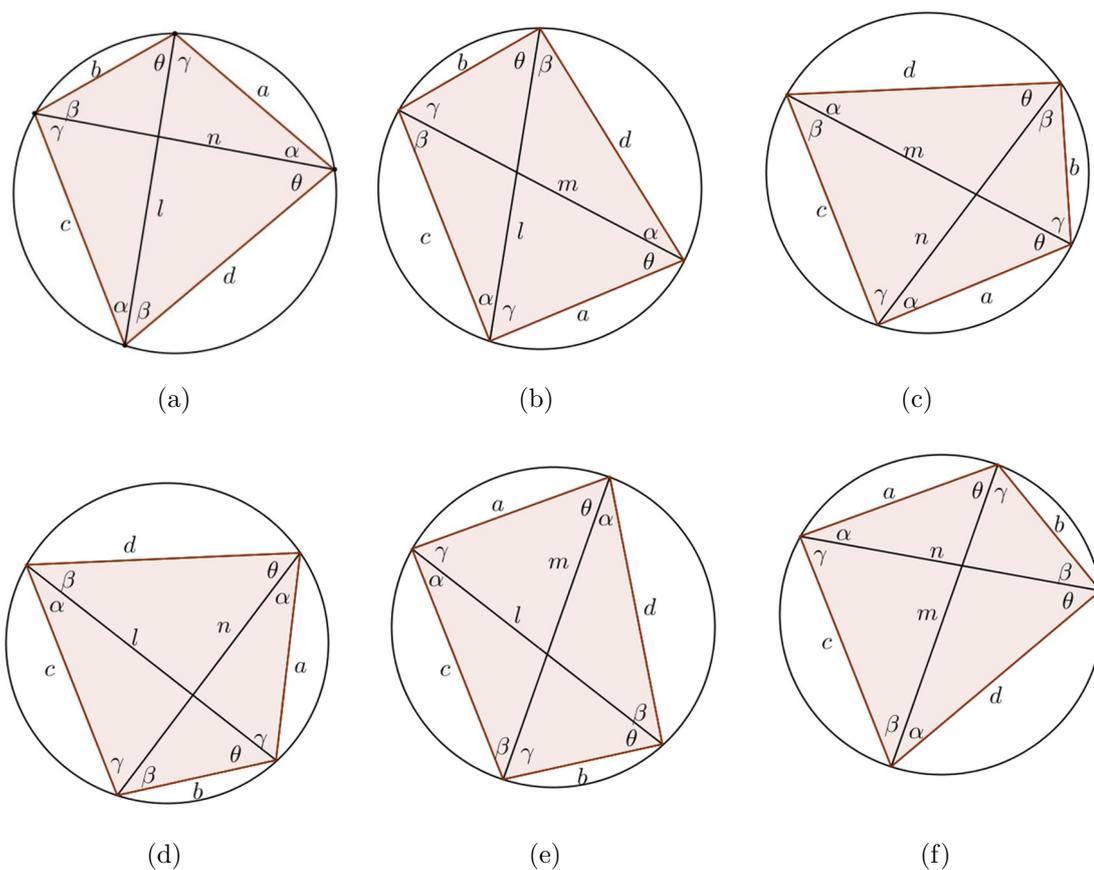


Figura 3.1: Formas de inscrever um quadrilátero de lados a, b, c e d

Ao observarmos a Figura 3.1, é notório que o quadrilátero $adbc$ foi obtido a partir da separação do quadrilátero $abcd$ ao longo da diagonal l , juntando-o novamente, depois de invertido o Δald . Repetimos o processo, agora separando o quadrilátero $adbc$ ao longo da diagonal m . Juntando o Δbmd , depois de invertido, obtemos o quadrilátero $abdc$. Separando $abdc$ pela diagonal n e invertendo Δabn obtemos $adcb$. Na sequência, separamos em l e giramos Δadl , formamos $acbd$ e por fim, separamos em m , giramos Δbdm e obtemos $acdb$.

É fácil observar que ao dar sequência no processo de separação ao longo de uma diagonal e inverter o triângulo, obter-se-á um quadrilátero, ora citado acima. Logo, há seis possibilidades de quadriláteros inscritos na mesma circunferência: $abcd$, $abdc$, $acbd$, $acdb$, $adbc$ e $adcb$.

Ainda é possível perceber que em cada quadrilátero existem pares de ângulos congruentes, formados por uma diagonal e um lado. Esta congruência é garantida pelo fato de serem ângulos de um arco capaz. Por exemplo, o ângulo formado pelo lado a e pela diagonal n e o ângulo formado pelo lado c e a diagonal l , são congruentes, pois ambos são iguais ao arco b .

A partir disso, temos que $\Delta ald \equiv \Delta adl$ e $\Delta abn \not\equiv \Delta amc$, o que leva a concluir que $abcd$ e $adbc$ têm uma diagonal congruente e outra não congruente. De forma análoga, $abcd$ tem uma diagonal congruente a $adbc$ e outra a $abcd$. A partir da Figura 3.1(d), as diagonais se repetem. Este fato permite concluir que, embora haja seis possibilidades de quadriláteros inscritos no mesmo círculo, existem apenas três diagonais distintas, l , m e n .

Pelo Teorema de Ptolomeu¹: “se um quadrilátero é inscrito numa circunferência, a soma dos produtos de dois lados opostos é igual ao produto das diagonais.” (COXETER,1967). Então, nas Figuras 3.1(a), 3.1(b) e 3.1(c), respectivamente, obtemos:

$$n.l = c.a + b.d \tag{3.1}$$

$$m.l = a.b + c.d \tag{3.2}$$

$$m.n = b.c + a.d \tag{3.3}$$

¹Cláudio Ptolomeu ou Ptolomeu foi um cientista grego que viveu em Alexandria - Egito (Wikipedia,2012b). Foi reconhecido pelos trabalhos desenvolvidos em matemática, astrologia, astronomia, geografia e cartografia. Escreveu também *Harmônica - um tratado sobre teoria matemática da música*.

Teorema 3.1 *Um quadrilátero é inscrito em uma circunferência se, e somente se, os seus ângulos opostos forem suplementares.*

Hipótese: $ABCD$ é um quadrilátero inscrito.

Tese: os ângulos opostos são suplementares.

Demonstração: Suponhamos que $ABCD$, Figura 3.2, seja um quadrilátero inscrito em uma circunferência.

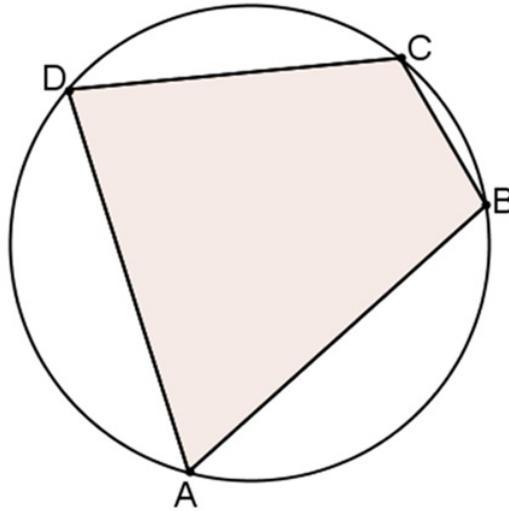


Figura 3.2: Quadrilátero inscrito

Então, $\hat{A} = \frac{\widehat{BCD}}{2}$ e $\hat{C} = \frac{\widehat{BAD}}{2}$. Logo, $\hat{A} + \hat{C} = \frac{\widehat{BCD}}{2} + \frac{\widehat{BAD}}{2} = \frac{360^\circ}{2} = 180^\circ$.

De forma análoga, temos que $\hat{B} + \hat{D} = 180^\circ$.

Hipótese: os ângulos opostos de um quadrilátero $ABCD$ são suplementares.

Tese: $ABCD$ é inscrito em alguma circunferência.

Suponhamos que $\hat{A} + \hat{C} = \hat{B} + \hat{D} = 180^\circ$ e também que a circunferência passa por A , B e D . Intencionamos provar que C pertence a circunferência. Digamos por absurdo, que C não pertence a circunferência, então C é interior ou exterior a ela.

Suponhamos C interior. Figura 3.3(a)

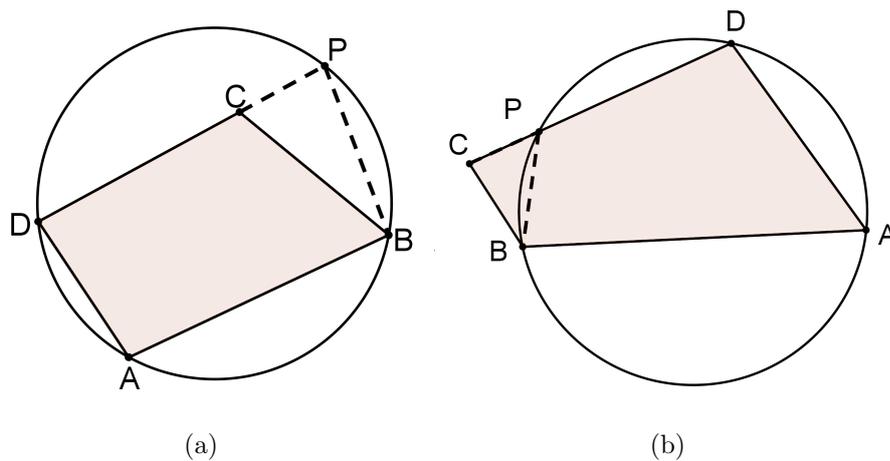


Figura 3.3:

Então, ao prolongarmos o lado DC , este intersecta a circunferência no ponto P . O quadrilátero $ABPD$ é inscritível, e pela primeira parte deste teorema, temos que $\hat{A} + \hat{P} = 180^\circ$. Mas, o ângulo \hat{BCD} é externo em relação ao \hat{BCP} do $\triangle BCP$. Segue que: $\hat{C} > \hat{P}$.

Por outro lado, $\hat{A} + \hat{C} = \hat{A} + \hat{P} = 180^\circ$, que resulta em $\hat{C} = \hat{P}$, o que é uma contradição. De forma análoga, quando C é exterior. Figura 3.3(b), chegamos numa contradição. Portanto, $ABCD$ é inscritível numa circunferência.

Teorema 3.2 *Um trapézio é inscritível se, e somente se, ele for isósceles.*

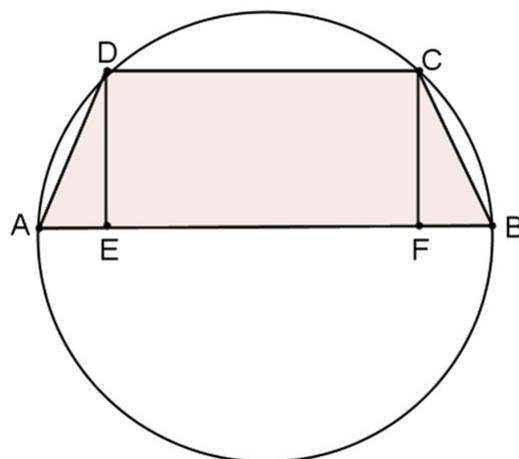


Figura 3.4: Trapézio inscritível

Demonstração: Seja $ABCD$ um trapézio isósceles de base AB e CD , Figura 3.4. Então, $D\hat{A}B + B\hat{C}D = A\hat{B}C + A\hat{D}C = 180^\circ$. Portanto, $ABCD$ é inscritível.

Suponha-se agora que $ABCD$ seja inscritível, então $D\hat{A}B + B\hat{C}D = A\hat{B}C + A\hat{D}C = 180^\circ$, onde A e C são vértices opostos. Mas, $B\hat{A}D + A\hat{D}C = A\hat{B}C + B\hat{C}D = 180^\circ$. Logo, $D\hat{A}B = A\hat{B}C$ e $A\hat{D}C = D\hat{C}B$. Portanto, $ABCD$ é um trapézio isósceles.

Teorema 3.3 *Um quadrilátero é circunscritível se, e somente se, as somas das medidas dos lados opostos são iguais.*

Hipótese: um quadrilátero $ABCD$ é circunscritível.

Tese: a soma das medidas dos lados opostos são iguais.

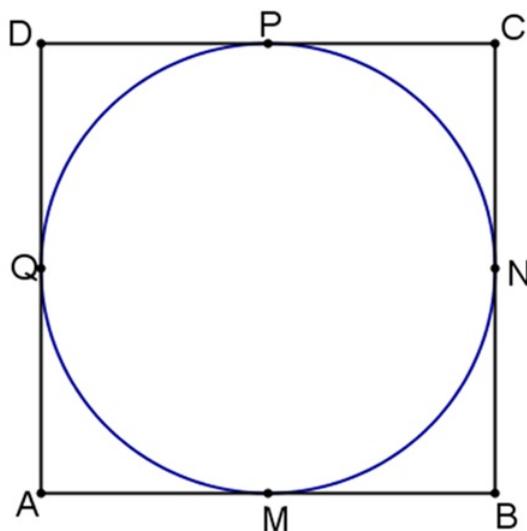


Figura 3.5: Quadrilátero circunscritível

Demonstração: Suponhamos $ABCD$ um quadrilátero circunscritível e sejam M, N, P e Q , respectivamente, os pontos de tangência da circunferência inscrita no quadrilátero com os lados AB, BC, CD e DA , (ver Figura 3.5). Então:

$$AM = AQ$$

$$BM = BN$$

$$CP = CN$$

$$DP = DQ$$

Somando as igualdades temos:

$$AM + BM + CP + DP = AQ + BN + CN + DQ$$

$$(AM + BM) + (CP + DP) = (BN + CN) + (AQ + DQ)$$

$$AB + CD = BC + AD$$

Hipótese: a soma das medidas dos lados opostos de um quadrilátero $ABCD$ são iguais.

Tese: $ABCD$ é circunscritível a uma circunferência.

Suponhamos que $ABCD$ seja um quadrilátero tal que $AB + CD = BC + AD$. Intencionamos provar que ele é circunscritível a uma circunferência.

Seja φ uma circunferência inscrita tangente aos três lados AB , AD e BC do quadrilátero. Devemos provar que o quarto lado, CD , também é tangente a φ .

Digamos por absurdo que CD não é tangente a φ . Então CD é exterior a circunferência, ou CD intercepta a circunferência em dois pontos.

Suponhamos que CD não intercepta a circunferência, conforme ilustrado na Figura 3.6. Seja E o ponto de AD tal que CE seja tangente à circunferência no ponto P . Note que E está entre A e D e, portanto $AE + ED = AD$.

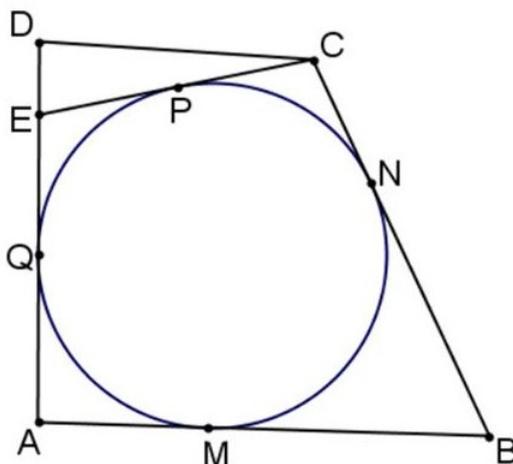


Figura 3.6: Quadrilátero circunscritível

Então, temos que $BC + AE = AB + CE$. Somando ED aos dois membros, obtemos:

$$BC + AE + ED = AB + CE + ED, \text{ ou}$$

$$BC + AD = AB + CE + ED > AB + CD$$

Pela desigualdade triangular no $\triangle CED$, segue-se que $CD < CE + ED$.

Então, chegamos a uma contradição com a hipótese. O caso em que CD intercepta a circunferência em dois pontos, prova-se de forma análoga.

□

Teorema 3.4 *Quaisquer quatro comprimentos desiguais, cada um menor que a soma dos outros três, servirão como lados de três diferentes quadriláteros inscritos, tendo todos a mesma área.*

Demonstração: Pela passagem da Figura 3.1(a) para a Figura 3.1(b), temos que:

$$\Delta dal \equiv \Delta adl \implies (dal) = (adl)$$

$$\Delta bcl \equiv \Delta bcl \implies (bcl) = (bcl)$$

Logo, $(abcd) = (adbc)$.

Pela passagem da Figura 3.1(b) para a Figura 3.1(c), temos que:

$$\Delta bmd \equiv \Delta bdm \implies (bmd) = (bdm)$$

$$\Delta amc \equiv \Delta amc \implies (amc) = (amc)$$

Logo, $(bcad) = (cabd)$.

Portanto, $(adbc) = (abdc) = (cabd)$.

Corolário 3.5 *A área de um quadrilátero inscrito é uma função simétrica dos quatro lados.*

Teorema 3.6 *Se um quadrilátero inscrito, tem lados a, b, c e d e semi-perímetro s , sua área K é dada por:*

$$K^2 = (s - a)(s - b)(s - c)(s - d). \quad (3.4)$$

A fórmula 3.4 é conhecida como fórmula de Brahmagupta², usada para calcular área de um quadrilátero inscrito e pode ser vista como uma extensão da fórmula de Heron.

²Brahmagupta foi um matemático e astrônomo da Índia (Wikipedia, 2012a). Devido suas contribuições, é considerado o pai da aritmética, da álgebra e da análise numérica. Em geometria, o resultado mais famoso de Brahmagupta é a fórmula para o cálculo de área dos quadriláteros inscritos numa circunferência.

$$4K = 2(ab + cd) \operatorname{sen} E \quad (3.6)$$

Elevando ao quadrado 3.5 e 3.6, temos:

$$4(ab + cd)^2 \cos^2 E = (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2 \quad (3.7)$$

$$4(ab + cd)^2 \operatorname{sen}^2 E = 16K^2 \quad (3.8)$$

Somando 3.7 e 3.8, temos:

$$4(ab + cd)^2 (\cos^2 E + \operatorname{sen}^2 E) = (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2 + 16K^2$$

$$4(ab + cd)^2 = (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2 + 16K^2$$

$$4(ab + cd)^2 - (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2 = 16K^2$$

$$(2ab + 2cd)^2 - (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2 = 16K^2$$

$$[2ab + 2cd - (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)] [2ab + 2cd + (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)] = 16K^2$$

$$[2ab + 2cd - a^2 - b^2 + c^2 + d^2] [2ab + 2cd + a^2 + b^2 - c^2 - d^2] = 16K^2$$

$$[(c^2 + 2cd + d^2) - (a^2 - 2ab + b^2)] [(a^2 + 2ab + b^2) - (c^2 - 2cd + d^2)] = 16K^2$$

$$[(c + d)^2 - (a - b)^2] [(a + b)^2 - (c - d)^2] = 16K^2$$

$$\{[(c+d)+(a-b)][(c+d)-(a-b)]\} \{[(a+b)+(c-d)][(a+b)-(c-d)]\} = 16K^2$$

$$[(c + d + a - b)(c + d - a + b)] [(a + b + c - d)(a + b - c + d)] = 16K^2$$

$$[(a+b+c+d-2b)(a+b+c+d-2a)] [(a+b+c+d-2d)(a+b+c+d-2c)] = 16K^2$$

$$[(2s - 2b)(2s - 2a)] [(2s - 2d)(2s - 2c)] = 16K^2$$

$$2(s - b)2(s - a)2(s - d)2(s - c) = 16K^2$$

$$16(s - b)(s - a)(s - d)(s - c) = 16K^2$$

$$K^2 = (s - a)(s - b)(s - c)(s - d)$$

Capítulo 4

Aplicações da teoria

“As aplicações são parte ancilar da Matemática. São a conexão entre a abstração e a realidade. Para um grande número de alunos, são o lado mais atraente das aulas, o despertador que os acorda, o estímulo que o incita a pensar” (LIMA,2001, p. 184)

A resolução de problemas é uma metodologia que deve merecer atenção no ensino da matemática. Como prática da disciplina Resolução de Problemas - MA21 do curso de verão do Profmat, percebemos que esta metodologia tem grande poder motivador, pois envolve situações novas e diferentes atitudes e conhecimentos.

Para a compreensão de problemas não é suficiente apenas a decodificação das palavras, da linguagem e dos símbolos apresentados, mas é imprescindível assumir a busca da sua solução, e superar dificuldades e obstáculos apresentados.

Os problemas propostos têm como objetivo principal aplicar os conceitos e teoremas apresentados nesta dissertação. Além disso, para uma resolução com êxito é necessária a aplicação de outros conhecimentos não transcritos aqui, uma vez que não fazem parte diretamente dos estudos dos quadriláteros, tais como: ângulos, propriedade dos triângulos, semelhança de triângulos, base média triangular, Teorema de Pitágoras, paralelismo, lei dos senos e dos cossenos, dentre outros.

Problema 1 (CARDOSO,2010) *Num retângulo $ABCD$, temos que M é o ponto médio do lado CD e o triângulo ABM é equilátero. Se P é o ponto de interseção da diagonal BD com AM e a medida do segmento AB é igual a 96. Determine medida do segmento AP .*

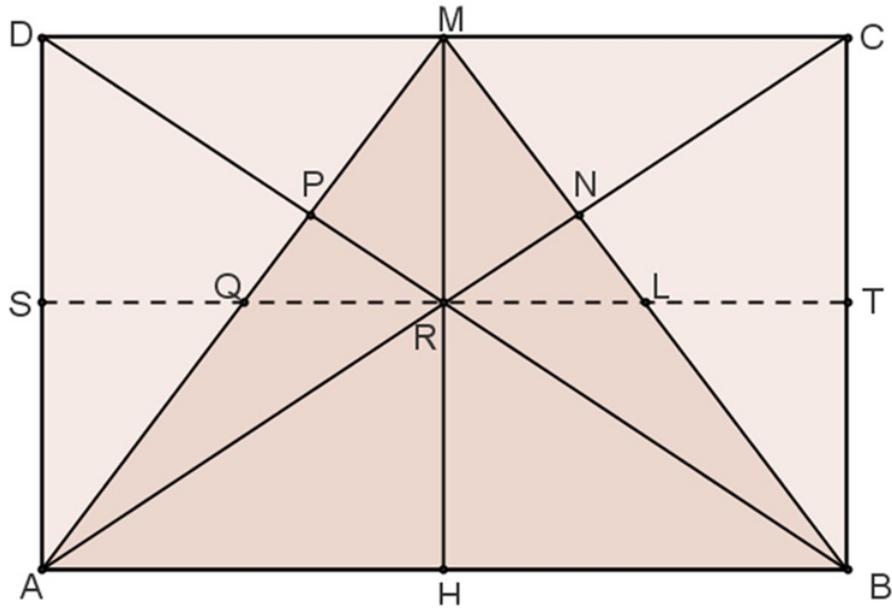


Figura 4.1: Problema 1

Uma possível resolução:

Como $ABCD$ é retângulo e $AB = 96$, AD também é igual a 96, $AB \parallel CD$ e $BC \parallel AD$ e todos os seus ângulos são retos. M é o ponto médio do lado CD , então $DM = CM = 48$.

Usando o Teorema de Pitágoras nos triângulos $\triangle BCM$ e $\triangle ABC$ temos que:

$$96^2 = 48^2 + CB^2$$

$$9216 = 2304 + CB^2$$

$$CB^2 = 9216 - 2304$$

$$CB^2 = 6912$$

$$CB = 48\sqrt{3}$$

$$AC^2 = 96^2 + (48\sqrt{3})^2$$

$$AC^2 = 16128$$

$$AC = 48\sqrt{7}$$

Sejam S e T os pontos médios dos lados AD e BC , respectivamente. Ao traçar o segmento ST , temos que QL é base média do $\triangle ABM$ e o $\triangle QLM$ é equilátero. Logo, $QL = \frac{AB}{2} = 48$. MH é mediana do $\triangle ABC$, então MR é mediana do $\triangle QLM$. Segue-se que $QR = 24$. Chamando o ângulo $\hat{A}BD = a$, temos que $\hat{A}BD = \hat{C}DB = a$ (ângulos alternos), então $\hat{D}PM = 120^\circ - a$. Logo, $\hat{Q}PR = 120^\circ - a$ (o.p.v.). Como $\triangle QLM$ é equilátero, o ângulo $\hat{P}QR = 60^\circ$. Sendo assim, $\hat{Q}RP = a$. Como as diagonais de um

retângulo são congruentes e se encontram nos seus pontos médios, $AR = BR = 24\sqrt{7}$. Portanto, $\triangle ARB$ é isósceles de base AB . Segue que $\hat{B}AR = a$. $\hat{B}AR = \hat{R}CD = a$ (ângulos alternos). Então, $\hat{C}NM = 120^\circ - a$. Logo, os triângulos QPR e CNM são semelhantes (caso AA). Os triângulos DPM e MNC são congruentes (caso LAA), então $PM = MN$. Chamando $PQ = x$, tem-se que $PM = MN = 48 - x$ e pela razão de semelhança nos triângulos QPR e MNC segue-se:

$$\frac{24}{48} = \frac{x}{48 - x}$$

$$1152 = 48x + 24x$$

$$72x = 1152$$

$$x = 16$$

$$AP = AQ + QP = 48 + x$$

$$\text{Portanto } AP = 64$$

Problema 2 (CARDOSO,2010) Um trapézio, são dadas as bases $AB = 20\text{cm}$ e $CD = 12\text{cm}$. Considere os pontos P e Q médios das diagonais AC e BD , respectivamente e, depois os pontos R e S , médios dos lados BC e AD , respectivamente. Calcule os segmentos PR , RQ e RS .

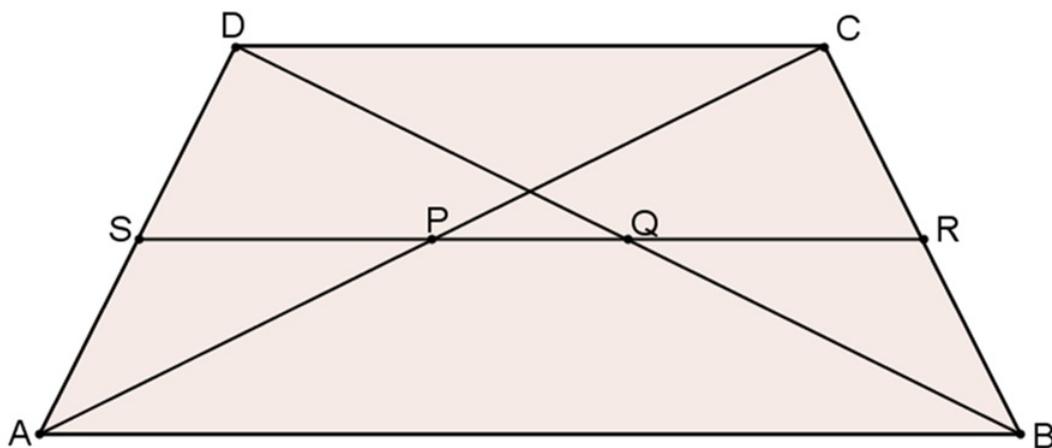


Figura 4.2: Problema 2

Uma possível resolução:

Como S e R são pontos médios dos lados BC e AD , respectivamente, RS é base médio do trapézio $ABCD$. Logo, $RS = \frac{AB + CD}{2} = \frac{20 + 12}{2} = 16\text{cm}$.

Temos ainda que:

$$\hat{B}AJ + \hat{A}BJ + \hat{B}JA = 180^\circ$$

$$2a + b + \hat{B}JA = 180^\circ$$

$$\text{Como } 2a + 2b = 180^\circ \implies \hat{B}JA = b$$

Segue-se, $\triangle BJA$ é isósceles de base $BJ \implies AJ = AB$.

Logo, $JA = AB = BE = EJ$.

Como $JA = AB = BE = EJ$, $AE \perp BJ$ e I é o ponto médio das diagonais AE e BI . Concluimos então que, $ABEJ$ é um losango.

Seja S e M os pontos médio de AJ e AB , respectivamente, então $IS = SA = AM = MI \implies AMIS$ é losango. Então, $AM = 2cm$ e $AB = 4cm$.

De forma análoga, temos que $D'P$ e $A'P$ são bissetrizes, alturas e medianas dos triângulos $A'CD'$ e $BD'A'$, respectivamente. Temos ainda que os triângulos $A'D'C$ e $BD'A'$ são isósceles de bases $A'C$ e BD' , respectivamente. Então, $A'B = BC = CD' = D'A'$. Segue -se que $A'BCD'$ é losango. Seja T e N pontos médios de CD' e CB , respectivamente. Então, $PT = PN = TC = CN = 5cm$. Logo, $CB = 10cm$.

Portanto, $AB = CD = 4cm$ e $BC = AD = 10cm$.

Problema 4 (NETO,2012) Uma reta r é exterior a um paralelogramo $ABCD$. As distâncias dos vértices dos ângulos A, B e C até r são respectivamente, $2cm, 4cm$ e $10cm$. Qual é a distância do ponto D até r ?

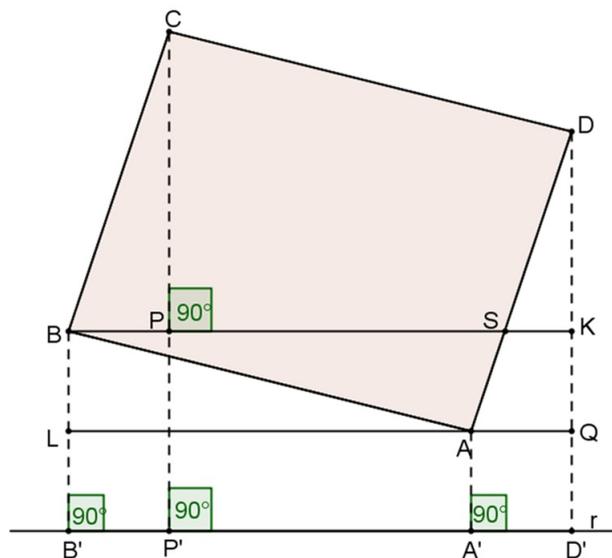


Figura 4.4: Problema 4

Uma possível resolução:

Primeiro vamos traçar $BS//r$ e $LA//r$.

Como $ABCD$ é paralelogramo, $BC = AD$ e $C\hat{B}P = D\hat{A}Q$.

Ainda temos que $B\hat{P}C = A\hat{Q}D = 90^\circ$.

Então, $\Delta BPC \equiv \Delta AQD$ (pelo caso LAA). Logo, $PC = QD = 6\text{cm}$.

Pelo enunciado, $AA' = 2$ e como $LA//r$, $AA' = QD' = 2$

Portanto, $DD' = DQ + QD' = 6 + 2 = 8\text{cm}$.

Problema 5 (MOREIRA,2009) No quadrilátero convexo $ABCD$ são dados os ângulos $B\hat{A}C = 30^\circ$, $C\hat{A}D = 20^\circ$, $A\hat{B}D = 50^\circ$ e $D\hat{B}C = 30^\circ$. Seja P o ponto de interseção das diagonais AC e BD , prove que $PC = PD$.

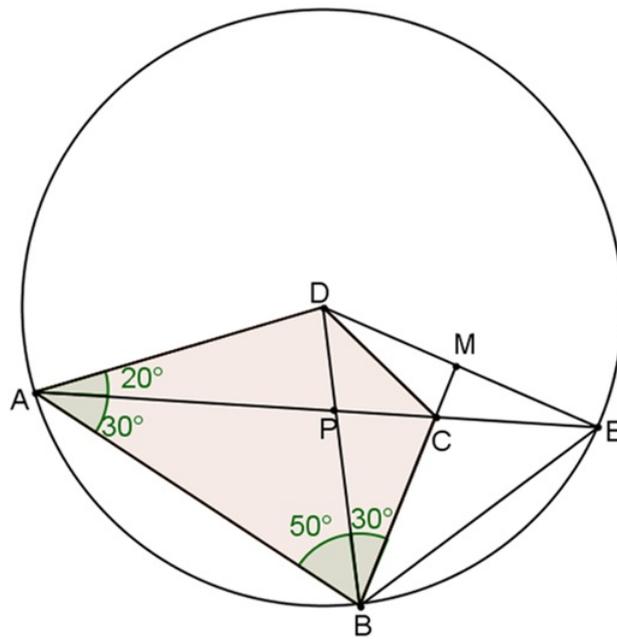


Figura 4.5: Problema 5

Uma possível resolução:

O ΔABD é isósceles de base AB , pois, $D\hat{A}B = A\hat{B}D = 50^\circ$, então $AD = BD$.

Construa uma circunferência de centro D e raio $AD = BD$.

Prolongando AC até intersectar a circunferência em E , formamos o segmento AE .

Como $E\hat{A}B = 30^\circ$ é inscrito na circunferência, temos que $B\hat{D}E = 60^\circ$, pois um ângulo inscrito é metade do ângulo central correspondente (DOLCE,2005). $BD = DE =$

raio $\implies \triangle BDE$ é isósceles de base BE . Então, $\hat{D}BE = \hat{D}EB = 60^\circ$. Logo, $\triangle BDE$ é equilátero.

Como $\hat{D}BC = \hat{C}BE$, BM é bissetriz relativa ao lado DE . Mas, o triângulo BDE é equilátero, então BM é bissetriz, mediana e altura relativa ao lado DE . Segue-se que $DC = CE$, isto implica que $\triangle CDE$ é isósceles de base DE e $AD = DE =$ raio da circunferência, então o $\triangle ADE$ é isósceles de base AE . Assim, $\hat{A}ED = 20^\circ$ e $\hat{E}DC = 20^\circ$. Logo, $\hat{P}DC = 60^\circ - 20^\circ = 40^\circ$.

O ângulo $\hat{P}CD$ é externo ao $\triangle CDE \implies \hat{P}C^\circ$. Concluimos que o $\triangle CPD$ é isósceles de base CD . Portanto, $PC = PD$.

Problema 6 (COXETER,1967) Prove que o perímetro do paralelogramo de Varignon é igual a soma das diagonais do quadrilátero original.

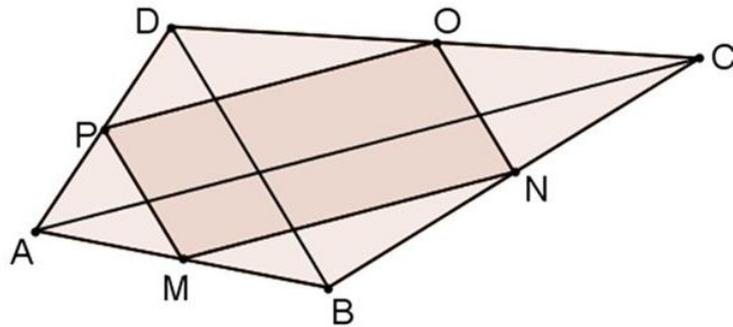


Figura 4.6: Problema 6

Uma possível resolução:

Para este problema, consideraremos somente o quadrilátero convexo.

Como M, N, O e P são pontos médio dos lados AB, BC, CD e DA , respectivamente, então MN, NO, OP e PM são bases médias dos triângulos ABC, BCD, CDA e DAB , respectivamente. Logo, pela base média triangular $MN = \frac{1}{2}AC$, $PO = \frac{1}{2}AC$, $NO = \frac{1}{2}BD$ e $PM = \frac{1}{2}BD$.

Portanto, $MN + NO + OP + PM = \frac{1}{2}AC + \frac{1}{2}AC + \frac{1}{2}BD + \frac{1}{2}BD = AC + BD$.

Problema 7 (Avaliação PROFMAT 2012) O losango $ABCD$ tem lado 3 e ângulo $\hat{A} = 60^\circ$. Os pontos M, N, P e Q pertencem aos lados AB, BC, CD e DA , respectivamente e são tais que $AM = BN = CP = DQ = 1$.

- a) Justifique, de forma breve, porque o quadrilátero $MNOP$ é um paralelogramo;
- b) Calcule a área do quadrilátero $MNPQ$;
- c) Calcule a distância entre os pontos M e P .

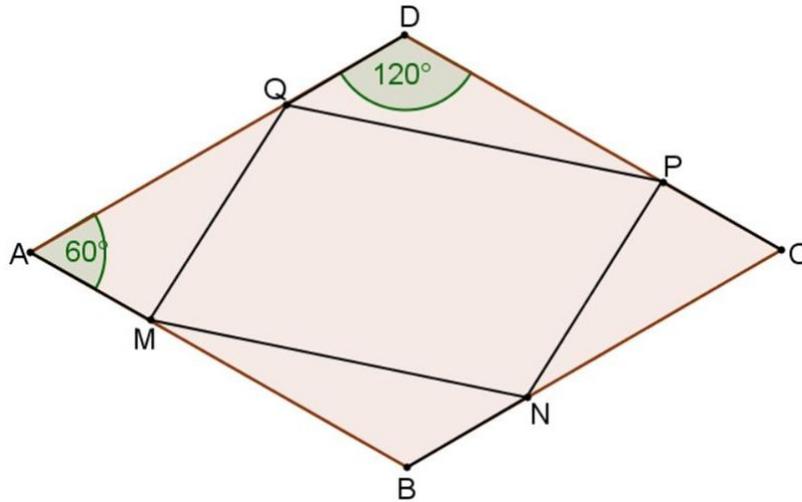


Figura 4.7: Problema 7

Solução a): Como $ABCD$ é losango, temos que $AB = BC = CD = DA$, mas, $AM = BN = CP = DQ = 1$, então $MB = NC = PD = QA = 2$. Ainda por ser losango, $\hat{B}AD = \hat{B}CD$ e $\hat{A}BC = \hat{A}DC$. Logo, $\triangle AMQ \cong \triangle PCN$ e $\triangle QDP \cong \triangle NBM$ (caso LAL). Segue-se que $PN = QM$ e $PQ = MN$. Assim, o quadrilátero $MNPQ$ possui dois pares de lados opostos congruentes. Portanto, é paralelogramo.

Solução b):

$$(MNPQ) = (ABCD) - (MQA) - (MNB) - (NPC) - (PQD)$$

$$(ABCD) = 2 \cdot \frac{3 \cdot 3 \cdot \text{sen}60^\circ}{2} = \frac{9\sqrt{3}}{2}$$

$$(MQA) = \frac{1 \cdot 2 \cdot \text{sen}60^\circ}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Como os ângulos de } 60^\circ \text{ e } 120^\circ \text{ possuem o mesmo seno, } (MQA) = (MNB) = (NPC) = (PQD) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Então, } (MNPQ) = \frac{9\sqrt{3}}{2} - 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 5 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Solução c):

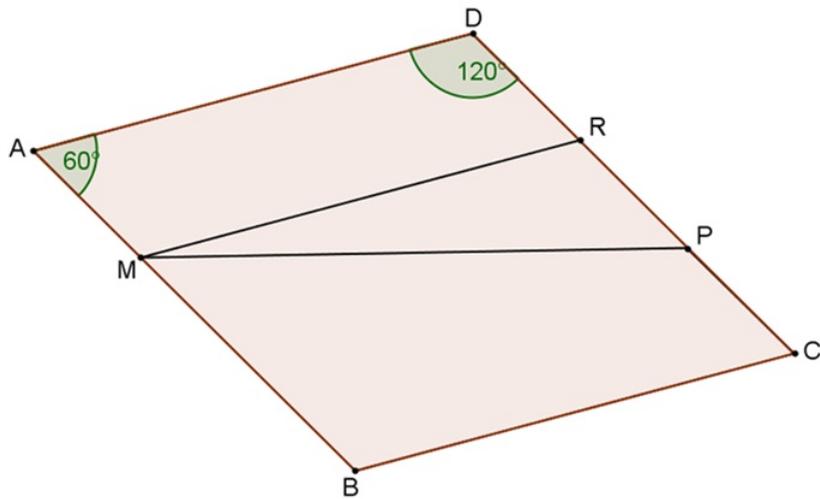


Figura 4.8: Problema 7

Seja R o ponto médio de PD (ver Figura 4.8), então $DR = RP = 1$, $AM \parallel DR$ e $AM = DR = 1$. Logo, $AD \parallel MR$ e $AD = MR = 3$.

Considerando DR transversal em relação as paralelas AD e MP , temos que $M\hat{R}P = A\hat{D}P = 120^\circ$.

Assim, pela lei dos cossenos, segue-se:

$$MP^2 = 3^2 + 1^2 - 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot \cos 120^\circ$$

$$MP^2 = 10 - 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot \left(\frac{-1}{2}\right)$$

$$MP^2 = 10 + 3 = 13$$

$$MP = \sqrt{13}$$

Problema 8 (COXETER, 1967) Prove que num trapézio isósceles de bases b e c , lado oblíquo a , altura h e diagonal d vale a igualdade $d^2 = a^2 + bc$.

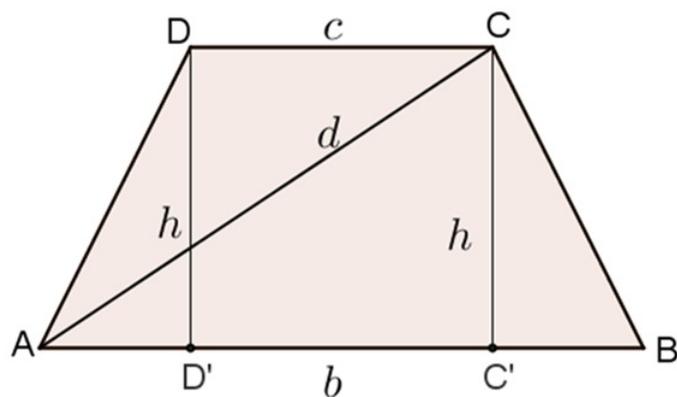


Figura 4.9: Problema 8

Uma possível resolução:

A Figura 4.9 ilustra informações apresentadas na resolução deste problema. Sejam DD' e CC' as perpendiculares a AB que passam por D e C , respectivamente.

$$\text{No } \triangle AD'D \text{ temos que: } a^2 = h^2 + \left(\frac{b-c}{2}\right)^2$$

$$a^2 = h^2 + \frac{b^2 - 2bc + c^2}{4}$$

$$h^2 = a^2 - \left(\frac{b^2 - 2bc + c^2}{4}\right)$$

$$\text{No } \triangle AC'C, \text{ temos que: } d^2 = h^2 + \left(c + \frac{b-c}{2}\right)^2$$

$$d^2 = h^2 + \left(\frac{c+b}{2}\right)^2$$

$$d^2 = h^2 + \frac{c^2 + 2bc + b^2}{4}$$

Substituindo h^2 , temos:

$$d^2 = a^2 + \left(\frac{-b^2 + 2bc - c^2}{4}\right) + \frac{c^2 + 2bc + b^2}{4}$$

$$d^2 = a^2 + \frac{4bc}{4}$$

$$d^2 = a^2 + bc$$

Problema 9 (COXETER,1967) *Seja P um ponto qualquer no plano de um retângulo $ABCD$. Prove que $PA^2 - PB^2 + PC^2 - PD^2 = 0$.*

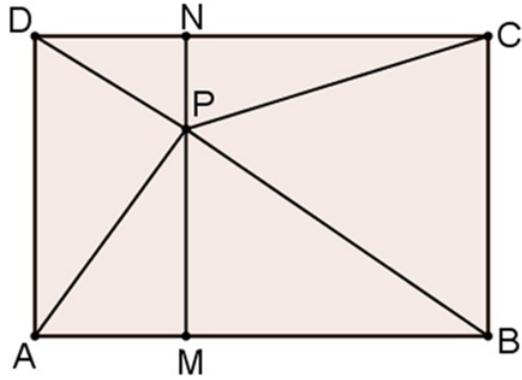


Figura 4.10: Problema 9

Uma possível resolução:

Pelo enunciado do problema, temos que:

$$PA^2 - PB^2 + PC^2 - PD^2 = 0 \implies PA^2 + PC^2 = PB^2 + PD^2$$

Como $ABCD$ é um retângulo, $CD \parallel AB$. Considere um segmento $MN \perp AB$ e $MN \perp DC$ que passa pelo ponto P . Pelo Teorema de Pitágoras temos as igualdades:

$$PA^2 = PM^2 + AM^2 \tag{4.1}$$

$$PC^2 = PN^2 + CN^2 \tag{4.2}$$

$$PD^2 = PN^2 + ND^2 \tag{4.3}$$

$$PB^2 = PM^2 + BM^2 \tag{4.4}$$

Somando 4.1 e 4.2 (membro a membro):

$$PA^2 + PC^2 = PM^2 + AM^2 + PN^2 + CN^2 \tag{4.5}$$

Somando 4.3 e 4.4 (membro a membro):

$$PD^2 + PB^2 = PN^2 + ND^2 + PM^2 + BM^2 \tag{4.6}$$

Temos ainda que $CN = BM$ e $ND = AM$

Então, por 4.5 e 4.6:

$$\left. \begin{array}{l} PA^2 + PC^2 = PM^2 + PN^2 + ND^2 + CN^2 \\ PD^2 + PB^2 = PM^2 + PN^2 + ND^2 + CN^2 \end{array} \right\} \Rightarrow PA^2 + PC^2 = PD^2 + PB^2$$

Portanto, $PA^2 - PB^2 + PC^2 - PD^2 = 0$

Problema 10 (NETO,2012) $ABCD$ é um retângulo de lados $AB = 32\text{cm}$ e $BC = 20\text{cm}$. Os Pontos E e F são, respectivamente, os pontos médios dos lados AB e AD . Calcule a área do quadrilátero $AECF$.

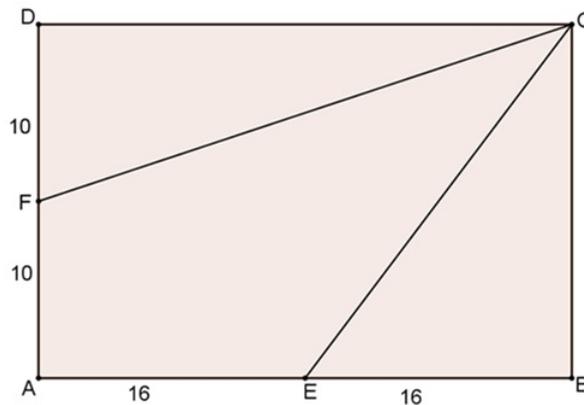


Figura 4.11: Problema 10

Uma possível resolução:

$$(EBC) = \frac{16 \cdot 20}{2} = 160\text{cm}^2$$

$$(CFD) = \frac{32 \cdot 10}{1} = 160\text{cm}^2$$

$$(ABCD) = 32 \cdot 20 = 640\text{cm}^2$$

$$(AECF) = (ABCD) - (EBC) - (CFD)$$

$$(AECF) = 640 - 160 - 160 = 320\text{cm}^2.$$

Problema 11 (MORGADO et al.,2002) Seja $ABCD$ um quadrilátero convexo qualquer de diagonais $AC = p$ e $BD = q$, sendo α o ângulo formado por elas. Seja K a área do quadrilátero, prove que $K = \frac{1}{2}pq \cdot \text{sen}\alpha$

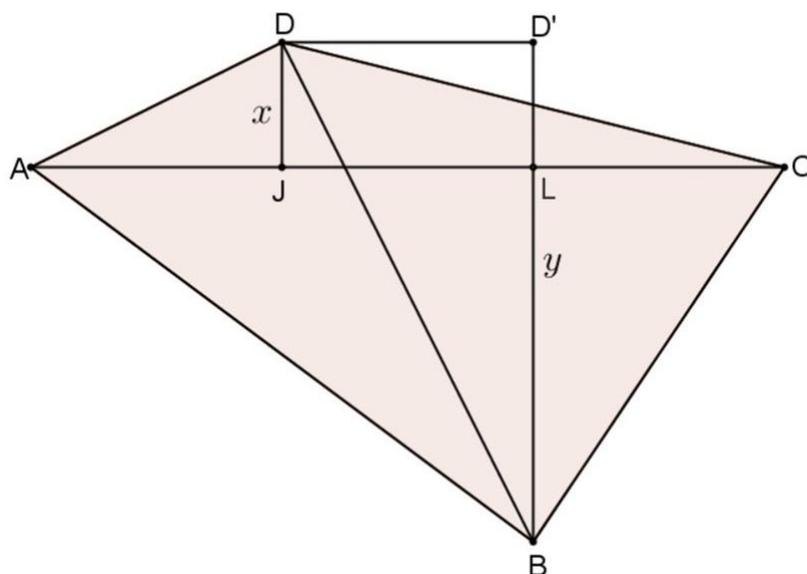


Figura 4.12: Problema 11

Uma possível resolução:

Sejam $DJ = x$ e $BL = y$, perpendiculares a AC que passam pelos pontos D e B , respectivamente.

$$(ACD) = \frac{AC \cdot DJ}{2} = \frac{px}{2}$$

$$(ABC) = \frac{AC \cdot LB}{2} = \frac{py}{2}$$

$$K = (ACD) + (ABC)$$

$$K = \frac{px}{2} + \frac{py}{2}$$

$$K = \frac{1}{2}p(x + y) \tag{4.7}$$

Ao traçar $DD' // AC$, tem-se que $B\hat{D}D' = \alpha$ (ângulos correspondentes). Assim, pela Lei dos Senos: $\frac{x + y}{\text{sen}\alpha} = \frac{q}{\text{sen}90^\circ}$

$$x + y = q \cdot \text{sen}\alpha \tag{4.8}$$

Substituindo 4.8 em 4.7, obtemos:

$$K = \frac{1}{2}pq \cdot \text{sen}\alpha$$

Problema 12 (COXETER,1967) Seja K a área de um quadrilátero de lados a, b, c e

d , inscrito num círculo e circunscrito sobre outro círculo. Prove que $K^2 = a.b.c.d$.

Uma possível resolução:

Seja o quadrilátero $ABCD$ de lados a, b, c e d , inscrito e circunscrito no círculo.

Como $ABCD$ é circunscrito, então $a + c = b + d$.

A partir daí, seguem as seguintes igualdades:

$$a - b = d - c$$

$$b - c = a - d$$

$$d - a = c - b$$

$$c - d = b - a$$

$ABCD$ também é inscrito, então sua área K pode ser dada pela fórmula de Brahmagupta, ou seja, $K^2 = (s - a)(s - b)(s - c)(s - d)$, sendo $s = \frac{1}{2}(a + b + c + d)$.

$$(s - a) = \frac{1}{2}(-a + b + c + d) = \frac{1}{2}(d - a + b + c) = \frac{1}{2}(c - b + b + c) = \frac{1}{2}.2c = c \quad (4.9)$$

$$(s - b) = \frac{1}{2}(a - b + c + d) = \frac{1}{2}(a - b + c + d) = \frac{1}{2}(d - c + c + d) = \frac{1}{2}.2d = d \quad (4.10)$$

$$(s - c) = \frac{1}{2}(a + b - c + d) = \frac{1}{2}(b - c + a + d) = \frac{1}{2}(a - d + a + d) = \frac{1}{2}.2a = a \quad (4.11)$$

$$(s - d) = \frac{1}{2}(a + b + c - d) = \frac{1}{2}(c - d + a + d) = \frac{1}{2}(b - a + a + b) = \frac{1}{2}.2b = b \quad (4.12)$$

Substituindo 4.9, 4.10, 4.11 e 4.12 na fórmula de Brahmagupta, obtemos:

$$K^2 = (s - a)(s - b)(s - c)(s - d)$$

$$K^2 = c.d.a.b = abcd.$$

Para a resolução dos problemas 13 e 14 serão considerados os dados das Figuras 3.1(a), 3.1(b) e 3.1(c).

Problema 13 (COXETER, 1967) Seja K a área de cada quadrilátero das Figuras 3.1(a), 3.1(b) e 3.1(c). Prove que

$$K = \frac{l.m.n}{4R}.$$

Uma possível resolução:

Seja K a área do quadrilátero inscrito, de lados a, b, c e d .

Pela Figura 3.1(a), segue-se que:

$$K_1 = \frac{ad}{2} = \text{sen}(\alpha + \theta)$$

$$K_2 = \frac{cb}{2} = \text{sen}(\gamma + \beta)$$

$$K_1 + K_2 = K$$

$$K_3 = \frac{ab}{2} = \text{sen}(\gamma + \theta)$$

$$K_4 = \frac{cd}{2} = \text{sen}(\alpha + \beta)$$

$$K_3 + K_4 = K$$

Pela Figura 3.1(b), segue que:

$$K_5 = \frac{bd}{2} = \text{sen}(\theta + \beta)$$

$$K_6 = \frac{ac}{2} = \text{sen}(\alpha + \gamma)$$

$$K_5 + K_6 = K$$

Segue ainda que:

$$\frac{l}{\text{sen}(\alpha + \theta)} = \frac{l}{\text{sen}(\gamma + \beta)} = \frac{n}{\text{sen}(\gamma + \theta)} = \frac{n}{\text{sen}(\alpha + \beta)} = \frac{m}{\text{sen}(\theta + \beta)} = \frac{m}{\text{sen}(\alpha + \gamma)} = 2R$$

Então:

$$K_1 = ad \frac{l}{4R}$$

$$K_2 = cb \frac{l}{4R}$$

$$K_3 = ab \frac{n}{4R}$$

$$K_4 = cd \frac{n}{4R}$$

$$K_5 = bd \frac{m}{4R}$$

$$K_6 = ac \frac{m}{4R}$$

Somando as expressões membro a membro:

$$K_1 + K_2 + K_3 + K_4 + K_5 + K_6 = ad \frac{l}{4R} + cb \frac{l}{4R} + ab \frac{n}{4R} + cd \frac{n}{4R} + bd \frac{m}{4R} + ac \frac{m}{4R}$$

$$3K = \frac{1}{4R} [l(ad + cb) + n(ab + cd) + m(bd + ac)]$$

Pelo Teorema de Ptolomeu (equações 3.1, 3.2 e 3.3):

$$nl = ca + bd, \quad ml = ab + cd \quad \text{e} \quad mn = ad + cb$$

$$3K = \frac{1}{4R} (lmn + nml + mnl)$$

$$3K = \frac{3lmn}{4R}$$

$$K = \frac{lmn}{4R}$$

Problema 14 (COXETER,1967) *Seja K a área de um quadrilátero convexo de lados a, b, c e d inscrito num círculo de raio R . Prove que:*

$$K^2 = \frac{(bc + ad)(ca + bd)(ab + cd)}{16R^2}.$$

Uma possível resolução:

Pelo Teorema de Ptolomeu (equações 3.1, 3.2 e 3.3):

$$\text{Pelo problema 13, } K = \frac{l.m.n}{4R}$$

Substituindo ml por 3.2 em K , temos:

$$K = \frac{(ab + cd).n}{4R} \text{ (elevando ao quadrado)}$$

$$K^2 = \frac{(ab + cd)^2 .n^2}{16R^2}$$

$$K^2 = \frac{(ab + cd)(ab + cd).n.n}{16R^2}$$

Por 3.2, $cd = ml - ab$

$$K^2 = \frac{(ab + cd)(ab + ml - ab).n.n}{16R^2}$$

$$K^2 = \frac{(ab + cd)m.l.n.n}{16R^2}$$

$$K^2 = \frac{(ab + cd).n.l.m.n}{16R^2}$$

Substituindo nl e mn , respectivamente por 3.1 e 3.3 em K^2 , temos:

$$K^2 = \frac{(ab + cd)(ca + bc)(bc + ad)}{16R^2}$$

Problema 15 (HOBSON et al.,1918) *Seja K a área de um quadrilátero de lados a, b, c e d , circunscrito em um círculo. Prove que*

$$K = \sqrt{abcd} \operatorname{sen} \left(\frac{\hat{A} + \hat{C}}{2} \right).$$

Uma possível resolução:

Para resolver este problema, será considerado a fórmula da área de um quadrilátero convexo demonstrada na seção 2.3, bem como as informações usadas na demonstração.

$$K^2 = (s - a)(s - b)(s - c)(s - d) - abcd. \cos^2 \alpha \quad (4.13)$$

O quadrilátero de lados a, b, c e d , é circunscrito em um círculo, portanto

$$a + c = b + d \quad (4.14)$$

Sabemos também que:

$$2s = a + b + c + d \quad (4.15)$$

$$\hat{A} + \hat{C} = 2\alpha \quad (4.16)$$

Substituindo 4.15 em 4.13, vem:

$$\begin{aligned} K^2 &= \left(\frac{a+b+c+d}{2} - a\right)\left(\frac{a+b+c+d}{2} - b\right)\left(\frac{a+b+c+d}{2} - c\right)\left(\frac{a+b+c+d}{2} - d\right) - abcd \cos^2 \alpha \\ &= \left(\frac{b+c+d-a}{2}\right)\left(\frac{a+c+d-b}{2}\right)\left(\frac{a+b+d-c}{2}\right)\left(\frac{a+b+c-d}{2}\right) - abcd \cos^2 \alpha \end{aligned}$$

Ao aplicar a igualdade 4.14, segue que:

$$\begin{aligned} K^2 &= \left(\frac{a+c+c-a}{2}\right)\left(\frac{b+d+d-b}{2}\right)\left(\frac{a+c+a-c}{2}\right)\left(\frac{b+d+b-d}{2}\right) - abcd \cos^2 \alpha \\ &= \left(\frac{2c}{2}\right)\left(\frac{2d}{2}\right)\left(\frac{2a}{2}\right)\left(\frac{2b}{2}\right) - abcd \cos^2 \alpha \\ &= abcd - abcd \cos^2 \alpha \\ &= abcd (1 - \cos^2 \alpha) \\ &= abcd \sin^2 \alpha \end{aligned}$$

Ou seja, temos que $K = \sqrt{abcd} \sin \alpha$. Sabendo que $\alpha = \frac{\hat{A} + \hat{C}}{2}$, chegamos por fim que:

$$K = \sqrt{abcd} \sin \left(\frac{\hat{A} + \hat{C}}{2} \right).$$

Considerações finais

Esta dissertação propôs-se a contribuir com o processo de ensino e aprendizagem da Matemática do Ensino Médio de forma diferenciada, motivadora e aprofundada.

É necessário transformar as aulas e promover uma mudança no aprender e ensinar a matemática, pois, a sociedade moderna valoriza a criatividade e a iniciativa junto ao domínio do conteúdo. É imprescindível que as escolas despertem em seus alunos tais potenciais, ao propor atividades que visem aprofundar os conhecimentos e que instiguem ao pensamento, à busca de alternativas para resoluções e à aplicação da teoria.

De acordo com Elon L. Lima (LIMA,2001), “São praticamente inesgotáveis as possibilidades de enriquecer os livros didáticos - e conseqüentemente as aulas...”. Diante disso, este trabalho é de suma valia, porque poderá contribuir tanto para o professor quanto para o aluno, pois algumas relações apresentadas não são trabalhadas na sala de aula, outras poucas valorizadas e ainda dificilmente encontram-se nos livros didáticos. Por exemplo, a demonstração da área do quadrado de lado l é igual a l^2 , as relações utilizadas para o cálculo da área de um quadrilátero inscrito, circunscrito e ao mesmo tempo inscrito e circunscrito e a relação da área de um quadrilátero convexo qualquer.

Além disso, esta dissertação destacou a necessidade de conhecer, entender, manipular e aplicar as definições e teoremas sobre os quadriláteros. Tais situações colaboram com o desempenho dos alunos, pois desenvolvem a capacidade de análise, o espírito crítico, a criatividade e agilidade com argumentos fundamentados.

Após o fechamento desta proposta foi possível percebermos que o ensino da matemática não está impossível de mudar. Para que haja mudanças, os professores devem fazer um movimento no pensamento e inquirir para si mesmo: o que quero ensinar/aprender; quais razões que me levam a querer ensinar/aprender; como quero ensinar/aprender; para quê quero ensinar/aprender; o que quero com o ensino e a aprendizagem matemática. Ficam essas reflexões a cada um dos atores que atuam no palco do ensino da matemática.

Referências Bibliográficas

- [CARDOSO,2010] CARDOSO, W. C. **Geometria Plana - Simples Assim**. Rio de Janeiro, Ciências Moderna,2010.
- [COXETER,1967] COXETER, H.S.M; GREITZER, S. **Geometry revisited**, volume 19. Washington, D.C, The Mathematical Association of America,1967.
- [DOLCE,2005] DOLCE, O.; POMPEO, J. N. **Fundamentos de Matemática Elementar 9: Geometria Plana**. São Paulo, Atual,2005.
- [FREIRE,2001] FREIRE, P. **Pedagogia da Autonomia: Saberes Necessários Práticos Educativos**. São Paulo, Paz e Terra,2001.
- [FREIRE,2005] FREIRE, P. **Pedagogia da Autonomia: Saberes Necessários Práticos Educativos**. São Paulo, Paz e Terra,2005.
- [GERÔNOMO et al.,2010] GERÔNOMO, J. R., BARROS, R. M. O., e FRANCO, V. S. **Geometria Euclidiana Plana- Um estudo com o Software Geogebra**. Maringá, Eduem,2010.
- [HOBSON et al.,1918] HOBSON, E., D., S., LL.D, e F.R.S. **A Treatise on Plane Trigonometry**. Cambridge, Cambridge: University Press,1918.
- [HOHENWATER,2012] HOHENWATER, M.,2012. Geogebra.
<http://www.geogebra.org/> Acesso em 15/03/2012.
- [INEP,2013] INEP,2013. Pisa. <http://portal.inep.gov.br/> Acesso em 08/02/2013.
- [LIMA,2001] LIMA, E. L. **Matemática e Ensino**. Rio de Janeiro, SBM,2001.
- [MAZIERO,2011] MAZIERO, L. M. **Quadriláteros: Construções Geométricas com o uso de Régua e Compasso**.Dissertação de Mestrado Profissional. São Paulo,

- PUC. www.pucsp.br/pos/edmat/mp/dissertacao/lieth_maria_maziero.pdf. Acesso em 05/10/2012,2011.
- [MOREIRA,2009] MOREIRA, C. G. O. e. a. **Olimpíadas Brasileiras de Matemática- 9^ª a 16^ª**. Rio de Janeiro, SBM,2009.
- [MORGADO et al.,1990] MORGADO, A., WAGNER, E., e JORGE, M. **Geometria I**. Rio de Janeiro, F. Alves,1990.
- [MORGADO et al.,2002] MORGADO, A., WAGNER, E., e JORGE, M. **Geometria II**. Rio de Janeiro, FC,2002.
- [NETO,2012] NETO, A. C. M. **Tópicos de Matemática Elementar- Geometria Euclidiana Plana**. Rio de Janeiro, SBM,2012.
- [NETO,2009] NETO, S. L. **Construções Geométricas: Exercícios e Soluções**. Rio de Janeiro, SBM,2009.
- [PINHO et al.,2010] PINHO, J. L. R., BATISTA, E., e CARVALHO, N. T. B. **Geometria I**. Florianópolis, UFSC, 2 edition,2010.
- [RANGEL,1992] RANGEL, A. C. S. **Educação matemática e a construção do número pela criança: uma experiência em diferentes contextos sócio-econômicos**. Porto Alegre, Artes Médicas,1992.
- [RIBEIRO,2009] RIBEIRO, A. R. e. a. **Geogebra: Aplicações ao Ensino Médio. Programa de Verão do Departamento de Matemática**. Curitiba, UFPR. Disponível em <http://tophqbooks.com/books/356053>. Acesso em 28/11/2012,2009.
- [SBM,2013] SBM,2013. Profmat regimento. <http://www.profmat-sbm.org.br/regimento.asp> Acesso em 08/01/2013.
- [Wikipedia,2012a] Wikipedia,2012a. Brahmagupta. <http://pt.wikipedia.org/wiki/Brahmagupta> Acesso em 27/12/2012.
- [Wikipedia,2012b] Wikipedia,2012b. Ptolomeu. <http://pt.wikipedia.org/wiki/Ptolomeu> Acesso em 27/12/2012.
- [Wikipedia,2012c] Wikipedia,2012c. Varignon. <http://www.apprendre-math.info/portugal/historyDetail.htm?id=Varignon> Acesso em 27/12/2012.