

**UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ - UTFPR
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL
PROFMAT**

FERNANDA MOCELIN SCHENA

**A HISTÓRIA DO SURGIMENTO DA GEOMETRIA NÃO EUCLIDIANA: O
DESPERTAR PARA NOVOS MUNDOS E OS MODELOS DE BELTRAMI**

CURITIBA

2019

FERNANDA MOCELIN SCHENA

**A HISTÓRIA DO SURGIMENTO DA GEOMETRIA NÃO EUCLIDIANA: O
DESPERTAR PARA NOVOS MUNDOS E OS MODELOS DE BELTRAMI**

Dissertação apresentada ao Mestrado Profissional em
Matemática em Rede Nacional da Universidade Tec-
nológica Federal do Paraná em Curitiba - PROFMAT-
UTCT como requisito parcial para obtenção do grau
de Mestre.

Orientador: Prof. Dr. Márcio Rostirolla Adames

CURITIBA

2019

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação

S324h Schena, Fernanda Mocelin

A história do surgimento da geometria não euclidiana [recurso eletrônico] : o despertar para novos mundos e os modelos de Beltrami / Fernanda Mocelin Schena.-- 2019.

1 arquivo texto (98 f.) : PDF ; 5,31 MB.

Modo de acesso: World Wide Web.

Texto em português com resumo em inglês.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Curitiba, 2019.

Bibliografia: f. 96-98.

1. Matemática - Dissertações. 2. Beltrami, Eugenio, 1835-1900. 3. Geometria não-euclidiana - História. 4. Geometria diferencial. 5. Curvatura. 6. Hiperboloide. 7. Modelos geométricos. 8. Geometria - Estudo e Ensino. 9. Professores de matemática - Formação. 10. Prática de ensino. I. Adames, Márcio Rostirolla, orient. II. Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. III. Título.

CDD: Ed. 23 – 510

TERMO DE APROVAÇÃO DE DISSERTAÇÃO Nº 63

A Dissertação de Mestrado intitulada “A História do Surgimento da Geometria Não Euclidiana: o despertar para novos mundos e os modelos de Beltrami”, defendida em sessão pública pelo(a) candidato(a) Fernanda Mocelin Schena, no dia 15 de abril de 2019, foi julgada para a obtenção do título de Mestre, área de concentração Matemática, e aprovada em sua forma final, pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT.

BANCA EXAMINADORA:

Prof(a). Dr(a). Márcio Rostirolla Adames - Presidente – UTFPR

Prof(a). Dr(a). Mateus Bernardes - UTFPR

Prof(a). Dr(a). Carlos Eduardo Durán Fernández - UFPR

A via original deste documento encontra-se arquivada na Secretaria do Programa, contendo a assinatura da Coordenação após a entrega da versão corrigida do trabalho.

Curitiba, 15 de abril de 2019.

Carimbo e Assinatura do(a) Coordenador(a) do Programa

AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Dr. Márcio Rostirolla Adames, pelo valoroso tempo de orientação, no qual sempre esteve presente com inigualável sabedoria, competência e profissionalismo.

À minha família: pais José e Rosa, esposo Wallace, filhos Eduardo e Matheus, pelo apoio incondicional e compreensão nas horas de minha dedicação aos estudos.

Aos meus colegas e amigos do PROFMAT, na troca de experiências profissionais enriquecedoras e companheirismo nos momentos mais desafiadores do curso.

Aos professores do PROFMAT, pela dedicação a um ensino de qualidade e por todos os saberes compartilhados aula a aula.

Aos membros da banca examinadora, pelos comentários, sugestões e contribuições significativas para a redação final desta dissertação.

Aos meus colegas e amigos de trabalho do Colégio Nossa Senhora de Sion, juntamente com meus queridos alunos, pelo convívio diário na busca de uma educação eficaz e libertadora.

À Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR), por sediar e incentivar o programa do PROFMAT na sede de Curitiba.

À Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), por estimular a divulgação de conhecimentos matemáticos na sociedade, bem como o aprimoramento do conhecimento científico pelo país.

À CAPES, pelo apoio à minha pesquisa.

Descobrir por si mesmo uma relação, enunciar o teorema correspondente e possuir as palavras para demonstrá-lo corretamente, é algo verdadeiramente capaz de enaltecer o espírito.

(MONTESSORI, 1934, p.63, tradução nossa)

RESUMO

Schena, Fernanda Mocelin. **A história do surgimento da geometria não euclidiana: o despertar para novos mundos e os modelos de Beltrami**. 98 f. Dissertação - Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Curitiba, 2019.

O presente trabalho traz uma breve apresentação histórica do desenvolvimento dos modelos das geometrias não euclidianas propostos por Eugenio Beltrami. A partir da sistematização precisa de Euclides, apresentamos certas indagações e desconfiâncias em relação a validade pontual e global do postulado das paralelas, incluindo algumas tentativas equivocadas de sua demonstração ao longo de mais de 2000 anos, como o trabalho de Saccheri, as inquietações de Gauss expressas em cartas, até as contribuições de János Bolyai. Finalmente, destacamos o papel de Beltrami com a publicação de seus artigos *Saggio e Teoria*, apresentando as métricas referentes aos espaços de curvatura constante e negativa. São discutidos alguns conceitos introdutórios da geometria diferencial e, em especial, os modelos do hiperboloide, *modelo do disco de Beltrami-Klein*, *modelo do disco (conformal) de Riemann-Beltrami-Poincaré* e *modelo do semiplano (conformal) de Liouville-Beltrami*.

Palavras-chave: Geometria não euclidiana. Beltrami. Hiperboloide.

ABSTRACT

Schena, Fernanda Mocelin. **The history of the emergence of non-Euclidean geometry: the awakening to new worlds and the Beltrami models.** 98 f. Dissertation - Professional Master's Program in Mathematics in National Network - PROFMAT, Universidade Tecnológica Federal Paraná. Curitiba, 2019

The present work presents a brief historical presentation of the development of the non-Euclidian models proposed by Eugenio Beltrami. From the precise systematization of Euclid, we present certain inquiries and misgivings about the local validity and global validity of the postulate of the parallels, including some misguided attempts at its demonstration over more than 2000 years, such as the work of Saccheri, and Gauss's worries expressed in letters, to the contributions of János Bolyai. Finally, we highlight the role of Beltrami with the publication of his articles *Saggio e Teoria*, presenting metrics referring to spaces of constant and negative curvature. Some concepts of differential geometry are discussed, especially the models of the hyperboloid, *Beltrami-Klein disc model*, *Riemann-Beltrami-Poincaré disk (conformal)* and *Liouville-Beltrami (conformal) semiplane model*.

Keywords: Non-Euclidean geometry. Beltrami. Hyperboloid.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Euclides de Alexandria	16
Figura 2 – Manuscrito presente na Biblioteca do Vaticano	17
Figura 3 – Tradução inglesa de <i>Elementos</i> escrita por Henry Billingsley (1570)	18
Figura 4 – Livro I, Proposição XV	20
Figura 5 – Livro I, Proposição VI	21
Figura 6 – Cronologia das tentativas de prova do quinto postulado	26
Figura 7 – Quinto postulado de Euclides	27
Figura 8 – Se $\alpha + \beta < 180$, então existirá P , interseção das retas dadas por \overline{PR} e \overline{QR}	28
Figura 9 – John Playfair (1748-1819)	28
Figura 10 – Equivalência entre os enunciados de Euclides e Playfair	29
Figura 11 – Unicidade da reta paralela	30
Figura 12 – Postulado das paralelas e a versão de Playfair	30
Figura 13 – Quadrilátero de Saccheri	33
Figura 14 – Quadrilátero de Lambert	34
Figura 15 – Euclides livre de todas as máculas	35
Figura 16 – Quadrilátero de Saccheri	36
Figura 17 – Congruência dos triângulos ABC e BAD	37
Figura 18 – Congruência dos triângulos ACD e BCD	37
Figura 19 – Retos, obtusos ou agudos?	38
Figura 20 – Lema de Saccheri	39
Figura 21 – Johann Heinrich Lambert (1728 - 1777)	42
Figura 22 – Quadrilátero de Lambert	43
Figura 23 – Cédula alemã de 10 marcos (1989) em homenagem a Gauss	46
Figura 24 – Selo alemão em homenagem a Gauss	47
Figura 25 – Farkas Bolyai (1775-1856)	49
Figura 26 – Pontos não coplanares estão sempre sobre uma mesma esfera	50
Figura 27 – Quadrado na geometria esférica	51
Figura 28 – János Bolyai (1802 - 1860)	52
Figura 29 – Tentamen, Farkas Bolyai	52
Figura 30 – Geometria absoluta, de Johannes von Frischauf	55
Figura 31 – Selo húngaro de 1932, número 479, em homenagem a Farkas Bolyai	55
Figura 32 – Selo húngaro de 1975, número 2347, em homenagem a Farkas Bolyai	55
Figura 33 – Selo húngaro em comemoração ao centenário da morte de János Bolyai	56
Figura 34 – Nikolai Ivanovich Lobachevsky (1792-1856)	57
Figura 35 – Traço de $\lambda(t) = (3 \cos t, 3 \sin t, 2t), t \in \mathbb{R}$	61
Figura 36 – Traço de $\lambda(t) = (t^3, t^2)$	62

Figura 37 – Ângulo formado entre duas curvas	63
Figura 38 – $\lambda(t) = (\cos t, \sin t)$	63
Figura 39 – Obtenção de uma tratriz	65
Figura 40 – Superfície regular	67
Figura 41 – \vec{X}_1 é uma bijeção de U em $S \cap V_1$	68
Figura 42 – S^2 é uma superfície regular	69
Figura 43 – Um dos mapas baseados nas coordenadas esféricas	69
Figura 44 – Tratriz e a tractoide	70
Figura 45 – Pseudo-esfera	70
Figura 46 – Projeção no disco do ramo superior da pseudo-esfera	70
Figura 47 – $\vec{X} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$	71
Figura 48 – $\vec{X} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$	73
Figura 49 – Curvatura gaussiana: negativa, nula e positiva	75
Figura 50 – Por que a curva entre os pontos A e B não representa uma geodésica? . . .	76
Figura 51 – Qual é a geodésica entre A e B ?	76
Figura 52 – Curvaturas principais: k_1 (eixo vermelho) e k_2 (eixo azul).	78
Figura 53 – Giuseppe Battaglini (1826 - 1894)	79
Figura 54 – Eugenio Beltrami (1835 - 1900)	80
Figura 55 – Superfícies de curvatura constante e negativa	81
Figura 56 – Superfície de curvatura constante e negativa	82
Figura 57 – Projeção da esfera no plano	84
Figura 58 – Felix Christian Klein (1849 - 1925)	85
Figura 59 – Distância no modelo de disco projetivo	85
Figura 60 – Modelo Beltrami-Klein para o plano	86
Figura 61 – Modelo (conformal) de Riemann-Beltrami-Poincaré para o plano	87
Figura 62 – Modelo (conformal) de Liouville-Beltrami para o semiplano	87
Figura 63 – Henri Poincaré (1854 - 1912)	88
Figura 64 – Folha superior do hiperboloide H^2	90
Figura 65 – Rotação	91
Figura 66 – Reflexão	91
Figura 67 – Transf. de Lorentz	91
Figura 68 – Reflexões no hiperboloide levam geodésicas em geodésicas	92
Figura 69 – Geodésicas do hiperboloide (pontos suficientemente próximos)	92
Figura 70 – Projeção do hiperboloide com centro na origem	93
Figura 71 – As geodésicas do modelo Beltrami-Klein	94
Figura 72 – Projeção do hiperboloide com centro em $S = (-1, 0, 0)$	94
Figura 73 – As geodésicas do modelo do disco de Riemann-Beltrami-Poincaré	95
Figura 74 – Inversão do modelo do disco	96

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	12
1.1	Questões de Pesquisa	13
1.2	Objetivo Geral	13
1.3	Objetivos Específicos	13
1.4	Estrutura da Dissertação	14
2	EUCLIDES E O SURGIMENTO DO MÉTODO AXIOMÁTICO	15
2.1	Euclides de Alexandria e sua obra magna	15
2.2	A estrutura de <i>Elementos</i>	19
2.3	Opiniões a respeito de <i>Elementos</i>	22
2.4	Um pouco de Euclides e de seu método axiomático	23
3	O POSTULADO DAS PARALELAS	25
3.1	Os postulados de Euclides	25
3.2	Novas versões para o 5º postulado	27
3.3	Tentativas equivocadas de prova do 5º postulado	31
3.3.1	As contribuições de Saccheri	35
3.3.2	As contribuições de Lambert	42
4	ORIGENS DAS GEOMETRIAS NÃO EUCLIDIANAS	45
4.1	Gauss e seus manuscritos	46
4.2	De pai para filho Bolyai	48
4.3	Lobachevsky e a pangeometria	56
5	A INTEGRAÇÃO ENTRE GEOMETRIA E CÁLCULO	59
5.1	Curvas diferenciáveis	60
5.2	Superfícies e curvaturas	66
5.3	Cálculo usando mapas	70
5.4	Geodésicas	74
5.5	Teorema Egregium	77
6	A REVOLUÇÃO DAS MÉTRICAS DE BELTRAMI	79
6.1	Um pouco sobre Eugenio Beltrami	80
6.2	A brilhante contribuição de Beltrami	81
6.3	Beltrami e seus artigos <i>Saggio e Teoria</i>	82
6.4	Considerações a respeito de Euclides e Beltrami	88

7	O MODELO DO HIPERBOLOIDE	90
7.1	Simetrias e geodésicas do hiperboloide	91
7.2	Modelo do disco de Beltrami-Klein	92
7.3	Modelo do disco (conformal) de Riemann-Beltrami-Poincaré	93
7.4	Modelo do semiplano (conformal) de Liouville-Beltrami	96
8	CONCLUSÃO	97
	REFERÊNCIAS	98

1 INTRODUÇÃO

As geometrias são ferramentas criadas pelo homem para melhor trabalhar com o mundo que o cerca. Qual delas é a melhor? Qual é a verdadeira? Tudo depende do contexto na qual será aplicada. Segundo Gauss, *a determinação de qual geometria é a mais adequada para descrever o mundo real é um problema experimental*. (MANFREDO, 1987, apud)

Como resultado do Renascimento europeu, o desenvolvimento da geometria foi fortemente influenciado por suas aplicações nos campos da astronomia, geodésia, cartografia, mecânica, óptica, arquitetura e artes visuais, gerando uma grande variedade de novos desafios. Segundo Schreiber e Scriba (2015), os esforços para superá-los visavam o desenvolvimento dos quatro pilares da matemática moderna no século XVII: o conceito de função, de coordenadas, o cálculo diferencial e o cálculo integral. A geometria fomentou o crescimento desses pilares e em seguida foi sutilmente substituída, perdendo sua posição de destaque. Fórmulas e cálculos foram tomando cada vez mais o poder durante todo o século XVIII e parte do século seguinte.

Somente no final do século XIX, a geometria euclidiana voltou a ser estudada de forma efêmera, possibilitando uma enorme abrangência ao seu significado e variadas aplicações, conforme Schreiber e Scriba (2015). Matemáticos como Euclides, Proclus, Wallis, Saccheri, Lambert, Legendre, Gauss, Bolyai, Lobachevsky, Beltrami, Riemann, Klein e Poincaré, entre tantos outros, contribuíram para a fundamentação precisa e rigorosa das geometrias euclidiana e não euclidiana. Em particular, os trabalhos de Gauss, János Bolyai e Lobachevsky indicavam a existência de uma geometria "estranha", a qual só se materializou mais tarde.

Buscamos assim, contar a evolução desses acontecimentos, dando destaque às contribuições da geometria diferencial, que forneceu ferramentas para Beltrami desenvolver a geometria de outras superfícies, não somente àquelas da geometria euclidiana. As parametrizações das superfícies de curvatura constante e negativa trouxeram novas ideias de espaços que foram aproveitadas por ele. Posteriormente, tais parametrizações foram aplicadas por Klein, Liouville e Poincaré em problemas importantes de outros ramos da Matemática, motivo pelo qual os três últimos são vinculados aos nomes dos modelos criados por Beltrami. Partimos do pressuposto de não apresentar a geometria não euclidiana simplesmente como uma negação da euclidiana, mas sim como uma geometria consistente que só se materializou graças à geometria diferencial e aos modelos de Beltrami.

A importância das aplicações das geometrias em diversas áreas do conhecimento e a riqueza histórica em relação a detalhes e descobertas por mais de dois mil anos de sua construção, motivaram o presente trabalho. Muitos materiais didáticos e paradidáticos atuais contemplam os conceitos das geometrias não euclidianas no ensino básico, embora ainda sejam pouco explorados nas salas de aula. A relevância do tema é citada nas Diretrizes Curriculares da Educação Básica

do Estado do Paraná (2008), segundo a qual, muitos problemas do cotidiano e do mundo científico só são resolvidos pelas geometrias não euclidianas.

1.1 QUESTÕES DE PESQUISA

- Qual a estruturação da obra *Elementos*, de Euclides, bem como as críticas feitas em torno de seu 5º postulado?
- Como o postulado das paralelas induziu ao desenvolvimento da geometria não euclidiana?
- Quais foram as contribuições de János Bolyai e Lobachevsky?
- Por que devemos manter a intuição sob controle ao estudar uma nova teoria?
- Quais os fundamentos básicos da geometria diferencial que garantiram um estudo mais aprofundado sobre curvas em superfícies de curvatura constante e negativa?
- Como os estudos de Gauss e Riemann influenciaram as descobertas de Beltrami?
- Quais as ideias de Beltrami, divulgadas em *Saggio e Teoria*, que introduziram e inspiraram o trabalho de Klein e Poincaré?
- A participação de Beltrami no desenvolvimento das geometrias não euclidianas recebe seu devido reconhecimento na atualidade?

1.2 OBJETIVO GERAL

Apresentar os principais fatos que levaram ao surgimento das geometrias não euclidianas, desde a obra produzida por Euclides, *Elementos*, passando pela interação entre os campos da Geometria e do Cálculo Diferencial, até os modelos propostos por Eugenio Beltrami e contextualizados por Klein, Liouville e Poincaré, disponibilizando um texto histórico de apoio a professores do ensino básico de Matemática.

1.3 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Apresentar alguns dos principais aspectos da obra de Euclides e do surgimento do método axiomático, inclusive discutindo algumas das críticas feitas ao seu texto.
- Descrever o postulado das paralelas e algumas das principais tentativas equivocadas de sua demonstração, as quais indicam que o postulado não foi tão bem aceito como o restante da obra.
- Introduzir o estudo das geometrias não euclidianas com suas principais semelhanças e diferenças em relação à geometria euclidiana.

- Identificar a real participação dos matemáticos Gauss, Bolyai, Beltrami, Riemann, Klein e Poincaré na descoberta e fundamentação da geometria não euclidiana.
- Verificar os conceitos introdutórios da geometria diferencial essenciais ao estudo das superfícies de curvatura constante e negativa.
- Analisar o modelo do hiperboloide e suas respectivas métricas para cada um dos três modelos: *Beltrami-Klein*, *Riemann-Beltrami-Poincaré* e *Liouville-Beltrami*.

1.4 ESTRUTURA DA DISSERTAÇÃO

Com o intuito de apresentar um texto conciso sobre o desenvolvimento das geometrias não euclidianas para professores da educação básica, o trabalho foi dividido nos seguintes capítulos:

- **Capítulo 2:** Histórico sucinto da origem, desenvolvimento e importância do método axiomático no pensamento científico, proposto por Euclides, em sua obra *Elementos*.
- **Capítulo 3:** Breve apresentação de algumas tentativas equivocadas de demonstração do postulado das paralelas, com destaque para o trabalho de Saccheri e Lambert.
- **Capítulo 4:** Descrição das primeiras ideias e reconhecimento da existência das geometrias não euclidianas, com uma síntese das contribuições de János Bolyai e Nikolai Lobachevsky.
- **Capítulo 5:** Introdução aos conceitos da geometria diferencial sobre curvas diferenciáveis, incluindo a determinação de suas parametrizações, geodésicas e o cálculo de curvaturas.
- **Capítulo 6:** Estudo das contribuições de Eugenio Beltrami, em seus artigos *Saggio* e *Teoria*, para a fundamentação precisa das geometrias não euclidianas.
- **Capítulo 7:** Apresentação do modelo do hiperboloide em correspondência às métricas dos modelos propostos por Beltrami.

2 EUCLIDES E O SURGIMENTO DO MÉTODO AXIOMÁTICO

Embora a Geometria fosse considerada nas primeiras culturas (como no antigo Egito, Mesopotâmia, Índia, China, etc.) basicamente um campo de aplicação de uma Matemática essencialmente orientada pela Aritmética, ela se tornou o centro de principal interesse dessa ciência exata na Grécia Antiga. Desde então, vagas noções e procedimentos que eram explicados apenas por tentativa e erro foram transformados em teoria com definições, axiomas, teoremas e demonstrações¹. (SCHREIBER, 2015, p.1, tradução nossa)

2.1 EUCLIDES DE ALEXANDRIA E SUA OBRA MAGNA

Os registros históricos revelam que até o século III a.C, os problemas deveriam ser resolvidos sem maiores ênfases ao método utilizado, de acordo com Roque (2012). A primeira exposição axiomática dedutiva da matemática apareceu na obra de Euclides, *Elementos*, escrita no século V e composta por 13 livros com axiomas, postulados, proposições, teoremas, demonstrações e construções da matemática elementar, estudados desde a época de 600 a.C até 300 a.C. Segundo Schreiber e Scriba (2015), antecedendo Euclides, foram notórias as descobertas geométricas de Tales, Oenopides, Hipócrates, Leon, Pitágoras, Eudoxus e Theaetetus, dentre outros, como também a filosofia de Platão e a metodologia de Aristóteles. Bastou a Euclides elaborar uma síntese das descobertas de seus predecessores, juntamente com seu exímio contributo pessoal.

Por volta de 300 a.C, no litoral sul do mar Mediterrâneo, um pouco a oeste do rio Nilo, na Alexandria, viveu um homem cuja obra teve a influência que rivalizou com a Bíblia. Sua abordagem deu nova forma à filosofia e definiu a natureza da matemática até o século XIX. Sua obra integrou a educação superior durante a maior parte desse tempo, e continua sendo até hoje. A redescoberta de sua obra foi uma chave para a renovação da civilização europeia na Idade Média. Spinoza tentou imitá-lo. Abraham Lincoln o estudou. Kant o defendeu. (MLODINOW, 2008, p.39)

Segundo Schreiber e Scriba (2015), um dos fragmentos mais antigos de *Elementos* que temos conhecimento data dos anos 100 d.C, em Oxyrhynque, cidade às margens do rio Nilo, no Egito. Porém, o manuscrito de pergaminho mais antigo conhecido e mantido até hoje está na Biblioteca Bodleian, em Oxford, escrito em Bizâncio no ano de 888, aproximadamente 1200 anos após a data assumida do surgimento de sua obra original. O pergaminho representa uma versão escrita pelo matemático alexandrino Theon, em aproximadamente 370. Somente em 1808, uma outra versão foi encontrada na Biblioteca do Vaticano e, apesar de ter sido escrita mais tarde

¹ Even though geometry was mainly considered as one application of a primarily arithmetically oriented mathematics amongst many others in the earliest cultures (such as in ancient Egypt, Mesopotamia, India, China, etc.), it became the core and main interest of mathematics in Ancient Greece. It was there and then that vague notions and procedures justified only by trial and error were transformed into a theory with definitions, axioms, theorems and proofs. (SCHREIBER, 2015, p.1).

Figura 1 – Euclides de Alexandria



Fonte: (IMAGES, 2019)

(data do século X), serve de base para as versões modernas mas, provavelmente, também não é original. No total, 120 linhas de textos de fragmentos de papiro foram encontrados até o presente momento, todos muito mais antigos do que os manuscritos nomeados anteriormente. No que diz respeito ao conteúdo, eles pertencem a *Elementos*, mas sua redação deriva do texto aceito hoje em dia como canônico.

Carrera (2012) afirma que no século XV, quando a imprensa foi criada e Gutenberg desenvolveu a prensa móvel, *Elementos* foi um dos primeiros trabalhos científicos a ser publicado, no ano de 1482, em Veneza, totalizando até hoje mais de mil edições diferentes, número somente superado pela Bíblia.

No desenvolvimento da matemática grega, fundamentalmente da geometria, há um antes e um depois desta obra magna. Outros tratados de caráter fundamental de geometria, de astronomia ou de aritmética (como a *Syntaxis*, de Cláudio Ptolemeu, a *Aritmética*, de Diofanto, ou a *Sintaxe Matemática*, de Papo de Alexandria) são herdeiros do seu estilo dedutivo. (CARRERA, 2012, p.20)

Não se sabe basicamente nada sobre a vida pessoal de Euclides, o qual supõe-se ter nascido em Alexandria por volta de 325 a.C, mas sua produção intelectual foi tamanha que por muito tempo seu nome era relacionado como sinônimo de *matemática* ou de *geometria*. Ainda hoje podemos notar a sua presença em nomenclaturas dadas por *espaço euclidiano*, *geometria euclidiana*, *métrica euclidiana* e *anel euclidiano*. Euclides também foi responsável pela revolução do conceito de espaço, do nascimento da abstração e da ideia de demonstração. Até o século XIX, era considerado autoridade absoluta na área da Matemática.

Figura 2 – Manuscrito presente na Biblioteca do Vaticano



Fonte: (SCHREIBER, 2015, p.64)

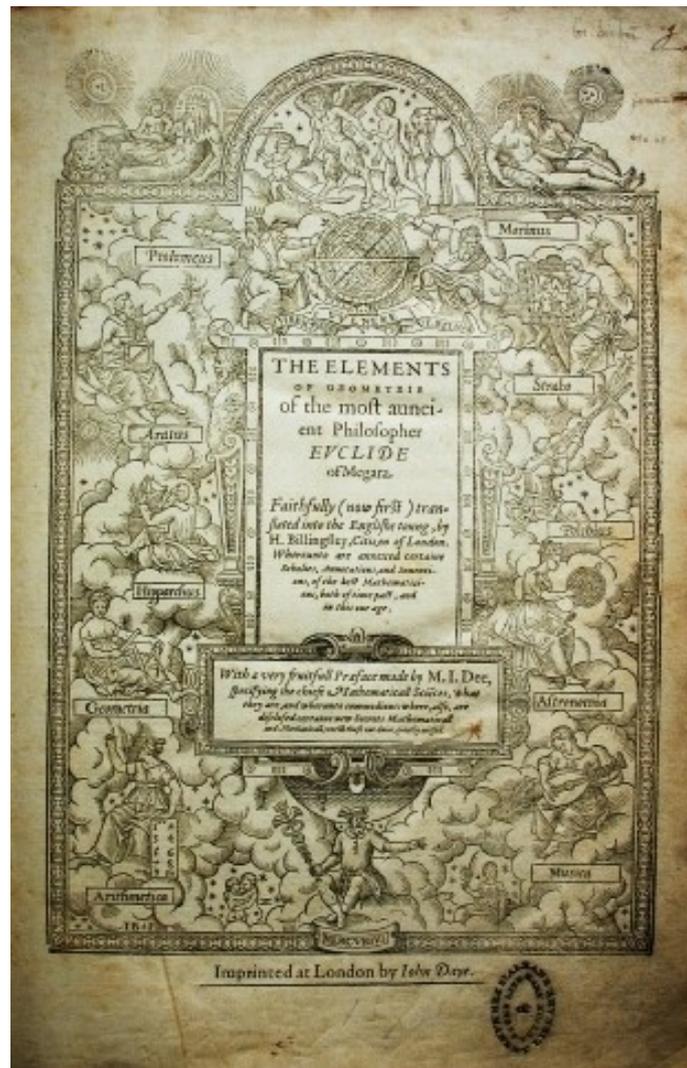
Não sabemos nada sobre ele; para dizer a verdade, atualmente consideramo-lo mais como um ramo do saber do que como um homem. (CARRERA, 2012, p.27)

Os 13 volumes de sua obra magna eram enumerados com algarismos romanos. Iniciavam apresentando definições, postulados e noções comuns, concluindo com proposições, problemas, teoremas e suas respectivas demonstrações.

Os treze livros de Euclides continham 140 conjecturas básicas - 130 definições, 5 postulados e 5 noções comuns - e 465 proposições derivadas daquelas - 93 problemas e 372 teoremas - assim como alguns resultados auxiliares: 19 corolários e 16 lemas. (CARRERA, 2012, p.51)

Schreiber e Scriba (2015) descrevem que o primeiro livro de Euclides abrangia os princípios básicos da geometria plana, incluindo construções de triângulos, equivalência de áreas e o famoso teorema de Pitágoras, entre outros. No Livro II, destaque para o estudo das igualdades entre áreas de retângulos e quadrados, como também, operações algébricas

Figura 3 – Tradução inglesa de *Elementos* escrita por Henry Billingsley (1570)



Fonte: (SCHREIBER, 2015, p.55)

envolvendo quantidades geométricas. Livro III, a teoria do círculo, supostamente pitagórica. No livro IV, observavam-se as propriedades dos círculos, incluindo o processo de inscrever e circunscrever polígonos. As proporcionalidades apareciam no Livro V e suas aplicações à geometria plana no livro VI. Nos livros VII, VIII e IX foi desenvolvido o estudo dos números naturais e dos números inteiros. Livro X, aplicações desafiadoras com bússola e medidas incomensuráveis. No livro XI, os fundamentos sobre geometria espacial. Livro XII, descrevia os teoremas sobre volumes. Finalizando com o livro XIII, sobre a construção dos cinco poliedros de Platão e uma prova trivial da inexistência de outros poliedros regulares.

No decorrer do trabalho, daremos preferência à linguagem moderna da Matemática. Sendo assim, empregaremos o termo *segmento de reta* em substituição à *linha reta* (de Euclides).

2.2 A ESTRUTURA DE *ELEMENTOS*

As *definições* que iniciam *Elementos* referem-se aos objetos matemáticos que serão explorados ao longo da obra (como *ponto*, *segmento de reta*, *círculo*, *ângulo reto*, *superfície* e *plano*), de caráter intuitivo. Uma *definição* é um tipo de hipótese na qual não se tem justificativa evidente, mas faz-se uma concessão àquele que a ensina e a mesma é aceita sem demonstração. Vejamos, por exemplo, segundo Carrera (2012):

Definição: Um **círculo** é uma figura plana limitada por uma única linha - a circunferência - em relação à qual todos os segmentos de reta que incidem sobre ela, traçados a partir de um ponto comum em seu interior, possuem o mesmo comprimento.

Definição: O referido ponto é denominado **centro** do círculo.

Definição: O **diâmetro** de um círculo é um segmento de reta que passa por seu centro e possui os extremos sobre a própria circunferência. Esse segmento de reta divide o círculo em duas partes iguais.

Algumas definições citadas por Euclides e que não foram aplicadas no decorrer do seu texto, ficaram de lado no atual estudo geométrico. Tratadas como conceitos primitivos, todas de cunho filosófico e desprovidas de conteúdo matemático propriamente dito, desnecessárias do ponto de vista moderno. Conforme Bicudo (2009), podemos citar:

Definição: Um **ponto** é aquele que não tem parte.

Definição: Um **segmento de reta** é um comprimento sem largura.

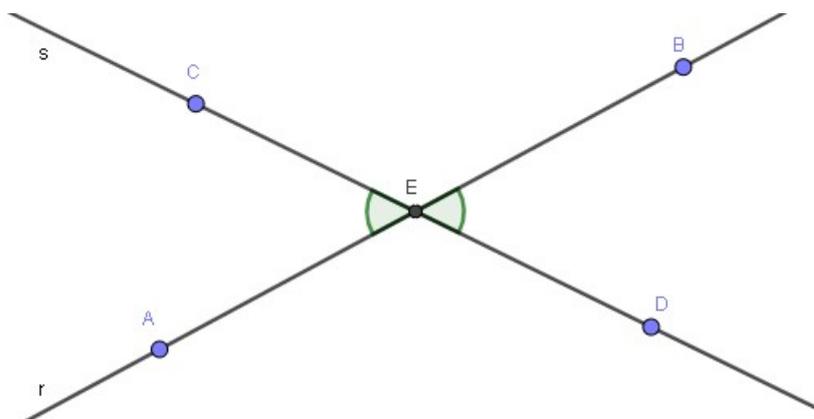
Quando um enunciado é desconhecido e proposto como verdade, munido de uma argumentação lógica-dedutiva, é formulada uma *proposição*. Cada proposição contempla objetos (pontos, segmentos de reta, círculos, etc.), para os quais as hipóteses necessárias são listadas previamente e suas consequências são deduzidas logo em seguida. Por exemplo:

Proposição: Se duas retas se interceptarem, formarão ângulos opostos verticalmente iguais entre si (de mesma medida)². (BICUDO, 2009)

Demonstração. Consideremos duas retas concorrentes r e s tais que \overline{AB} está contido em r e \overline{CD} está contido em s , interceptando-se no ponto E . Assim, os ângulos \widehat{AEC} e \widehat{BED} serão congruentes. Notemos que \overline{AE} delimita \widehat{AEC} e \widehat{AED} , os quais formam juntos um ângulo raso. Da mesma forma, sobre \overline{AB} , serão delimitados \widehat{AED} e \widehat{BED} , iguais a dois ângulos retos. Logo, o ângulo formado por \widehat{AEC} e \widehat{AED} possui a mesma medida do ângulo formado por \widehat{AED} e \widehat{BED} . Ao retirarmos a parte que possuem em comum, \widehat{AED} , restarão os ângulos \widehat{AEC} e \widehat{BED} , sendo $\angle AEC = \angle BED$. Podemos proceder de forma similar para provar que $\angle BEC = \angle AED$. \square

² Todas as imagens do trabalho de "autoria própria" foram criadas no aplicativo *GeoGebra*.

Figura 4 – Livro I, Proposição XV



Fonte: Autoria própria

Nem sempre as demonstrações de Euclides foram diretas como no exemplo anterior. Para tanto, ele optou por um método indireto, conhecido por *redução ao absurdo*. Supondo o contrário do que se quer provar, é encontrada uma contradição. Por conseguinte, como a afirmação inicial é falsa, sua contradição ou negativa (o que se pretende provar) é verdadeira. Vejamos um exemplo:

Proposição: Se dois ângulos de um triângulo forem iguais, os lados opostos a esses ângulos iguais, também serão iguais. (BICUDO, 2009)

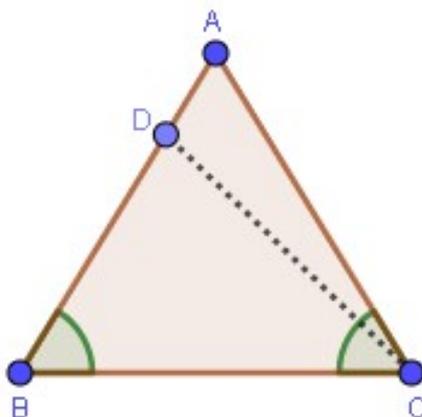
Demonstração. Seja o $\triangle ABC$, com $\angle ABC = \angle ACB$. Então, os lados \overline{AB} e \overline{AC} são congruentes. Se não o forem, um desses dois segmentos de reta terá comprimento maior do que o outro. Caso \overline{AB} seja o de maior comprimento, marquemos o ponto D sobre \overline{AB} de forma que $BD \equiv AC$, de menor medida. Tracemos \overline{CD} . Como $BD \equiv AC$ e os triângulos ABC e CBD possuem o lado \overline{BC} em comum, \overline{BD} e \overline{BC} são congruentes a \overline{AC} e \overline{BC} , respectivamente. Porém, \widehat{CBD} e \widehat{ACB} apresentam a mesma medida. Logo, \overline{CD} possuirá o mesmo comprimento de \overline{AB} e os triângulos ABC e CBD serão congruentes, o que é um absurdo, pois \widehat{CBD} possui uma abertura menor do que \widehat{ACB} , por hipótese. Assim, os segmentos \overline{AB} e \overline{AC} não são diferentes, isto é, suas medidas são iguais, $AB \equiv AC$. Como resultado dessa proposição, podemos verificar que todo triângulo equiângulo é também um triângulo equilátero.

□

A partir de um encadeamento lógico-dedutivo de todas as noções usadas, a nova ideia formulada era verificada por uma série de conhecimentos prévios. Schreiber e Scriba (2015) afirmam que essa necessidade de comprovar as ideias propostas ao longo de um estudo também apareceu na antiga matemática egípcia e mesopotâmica, mas por meio de exemplos numéricos.

Demonstrar cada afirmação significa, em particular, que a intuição, embora seja um guia valioso, deve ser conferida por um teste de demonstração. A frase "é intuitivamente óbvio" não é uma justificativa adequada para um passo em uma demonstração. Somos falíveis demais para isso. (MLODINOW, 2008, p. 40)

Figura 5 – Livro I, Proposição VI



Fonte: Autoria própria

De maneira geral, os *axiomas* e os *postulados* descrevem enunciados válidos e de fácil compreensão. Hoje, a distinção entre axiomas e postulados não é mais aplicada. Originalmente, os axiomas eram considerados princípios básicos gerais e incontestáveis de uma determinada teoria, também conhecidos por *noções comuns*, enquanto os postulados abordavam princípios básicos, porém específicos e discutíveis. Vejamos alguns exemplos de axiomas ou noções comuns:

- Coisas iguais são iguais entre si.
- Se quantidades iguais são adicionadas a iguais, os totais são iguais.
- Se quantidades iguais são subtraídas de iguais, os restos são iguais.
- Coisas que coincidem uma com a outra são iguais.
- O todo é maior do que qualquer de suas partes.

Ao concordar com os axiomas e os seus consequentes resultados, Euclides conseguiu mostrar, por exemplo:

- que o quadrado da hipotenusa é igual a soma dos quadrados dos catetos;
- a existência de uma infinidade de números primos;
- a existência de números irracionais;
- a existência dos 5 sólidos regulares;
- que um ângulo pode ser dividido em duas partes iguais com régua e compasso;
- que os polígonos regulares com 3, 4, 5, 6, 8, 10 e 12 lados podem ser construídos com régua e compasso, mantendo-se a precisão.

2.3 OPINIÕES A RESPEITO DE *ELEMENTOS*

Há indícios de que Euclides tenha escrito *Elementos* ao contrário, ou seja, enunciando os resultados primeiro e, posteriormente, os axiomas que possibilitariam suas respectivas demonstrações, reforçando a suposição das proposições terem sido enunciadas em função de suas provas e, não, a partir de seus problemas originários.

Segundo Roque (2012), um dos possíveis motivos que levou Euclides a fazer esse encadeamento dedutivo dos enunciados foi a necessidade de elaborar um texto de caráter pedagógico, procurando transmitir os resultados de forma clara e compreensível ao leitor, embora muitos passos fossem omitidos, considerados como conhecidos por todos *a priori*.

A sistematização efetuada em *Elementos* tinha o encadeamento dedutivo como uma de suas principais preocupações, o que deve ter levado a um reordenamento artificial de enunciados que pertenciam a uma mesma cultura prática. Ao dizer *artificial*, destaca-se o fato das proposições terem sido organizadas em função das técnicas de demonstração usadas para atestar sua validade, e não a partir dos problemas efetivos aos quais se aplicavam. (ROQUE, 2012, p.184)

Contudo, esse ponto de vista não é consenso entre todos os historiadores matemáticos. Por exemplo, Schreiber e Scriba (2015) afirmam:

Podemos acreditar (embora isso seja subjetivo) que Euclides não tinha a intenção de criar uma enciclopédia de tudo que era conhecido até então, mas planejou de maneira exemplar demonstrar um (altamente construtivista) programa científico³. (SCHREIBER, 2015, p.61, tradução nossa)

Existem ainda, dúvidas justificáveis de que Euclides não tenha escrito seu próprio texto e sim, reestruturado as notas de seus alunos. Como também, alguns autores criticam a falta de motivações e exemplos em seus manuscritos:

À luz de tantas origens e fontes de *Elementos*, Euclides negou inúmeras vezes suas próprias realizações científicas e descreveu-se como um mero “escritor de livros didáticos”, embora muito bem sucedido e inteligente. (...) Há dúvidas evidentes de que Euclides não escreveu propriamente o texto existente; que seus ensinamentos não eram um discurso oral segundo as tradições da época; e que o texto foi desenvolvido com base nas anotações de seus alunos. Além disso, suas definições controversas podem ter sido apenas anotações mal escritas de uma extensa explicação propedêutica. Se, no entanto, ele mesmo escreveu *Elementos*, devemos criticar claramente seu estilo árido, a lista impassível de definição, teorema e comprovação, bem como a falta de motivação e exemplos⁴. (SCHREIBER, 2015, p.56, tradução nossa)

³ We may come to believe (although this is subjective) that Euclid did not intend to compose an encyclopaedia of everything known back then, but planned exemplarily to demonstrate a (highly constructivist) scientific program. (SCHREIBER, 2015, p.61)

⁴ In light of so many roots and sources of ‘Elements’, Euclid was multiply denied his own scientific accomplishments and described as merely a ‘textbook writer’ and ‘didact’, if yet a very successful and clever one. (...) There are justified doubts that Euclid did not write the extant text himself, that his teaching was not oral discourse, following the traditions of the time, and that the text was developed based on his students’ notes. (...) Moreover,

Os poucos relatos sobre a geometria grega do período euclidiano datam de tempos bem distantes a Euclides, cerca de seis séculos depois, na maioria oriundos de Proclo Lício (412 - 485), ou Proclo Diádoco, filósofo neoplatônico nascido em Constantinopla e de Pappus (falecimento em 350), importante geômetra grego autor da obra *Synagoge* (320) ou *Coleção Matemática* e nascido em Alexandria.

Proclo afirma, por exemplo, a superioridade dos teoremas em relação aos problemas. Esses diferem daqueles porque lidam com construções, ao passo que os teoremas procuram demonstrar propriedades inerentes aos seres geométricos. Segundo Proclo, os teoremas enunciam a parte ideal desses seres que pertencem ao mundo das Ideias, e os problemas constituem apenas um modo pedagógico de se chegar aos teoremas. (ROQUE, 2012, p.152)

As anotações de Proclo constam em comentários ao Livro I de *Elementos*, um texto com aspectos históricos, epistemológicos e metodológicos, tanto de Euclides quanto de geômetras que o precederam. Ele afirmou, entre outros, que Euclides estudou na academia de Platão e conhecia a obra de Aristóteles, assim como:

Euclides coordenou muitos trabalhos de Eudoxo, aperfeiçoou os de Teeteto e demonstrou de forma irrefutável o que os seus predecessores apresentaram de forma difusa. Viveu no reinado de Ptolemeu I. Portanto, Euclides é posterior aos discípulos de Platão e anterior a Arquimedes e Eratóstenes, era partidário da filosofia de Platão, razão pela qual apresentou a construção dos sólidos platônicos como resultado do *Ensino dos elementos*. (CARRERA, 2012, p.27)

2.4 UM POUCO DE EUCLIDES E DE SEU MÉTODO AXIOMÁTICO

Um episódio famoso atribuído a Euclides é a resposta dada a um de seus alunos ao lhe indagar quais as vantagens que teria estudando geometria. Euclides, por sua vez, chamou um escravo e disse-lhe "*dá-lhe três óbolos⁵, dessa forma obterá benefício daquilo que aprende*". (CARRERA, 2012)

Euclides foi o primeiro a apresentar a Matemática de uma forma dedutiva, na qual a veracidade de cada afirmação é confirmada por uma sequência lógica de deduções mais simples até sua comprovação final, o *método axiomático*.

O método axiomático, instrumento do qual a análise do postulado das paralelas desempenhou um papel importante, é hoje indispensável na Matemática. Ele mostrou que existe uma certa liberdade na criação de entes matemáticos. Essa liberdade, entretanto, não é ilimitada; caso contrário, a Matemática se esfacelaria em milhares de pedaços disjuntos e incompreensíveis. O ponto é que o método axiomático é apenas um método útil, e não um guia à criação matemática. (MANFREDO, 1987, p.34)

his debatable definitions may have just been badly written notes of an extensive propaedeutic explanation. If, however, he wrote 'Elements' himself, we must clearly criticise his dry style, the stolid listing of definition, theorem and proof, as well as the lack of motivation and examples. (SCHREIBER, 2015, p.56)

⁵ Unidade monetária na Grécia Antiga.

Também são obras atribuídas a Euclides (com ressalvas e perda de grande parte do material original), segundo Carrera (2012), Schreiber e Scriba (2015):

- *Óptica*, um estudo sobre perspectiva; é considerada uma das obras mais importante do assunto anterior a Newton.
- *Catóptrica*, apresenta uma demonstração geométrica rigorosa sobre a reflexão da luz.
- *Dados*, com 94 proposições abordando propriedades de figuras geométricas. É a obra com o texto mais próximo ao de *Elementos*.
- *Divisão das Figuras*, descrevendo a decomposição de figuras por uma ou mais retas.
- *Lugares Geométricos no Espaço*, conteúdo geométrico além de *Elementos*.
- *Porismas*, descrição de objetos geométricos não bem definidos, isto é, sem a listagem de todas as características de cada elemento.
- *Seções Cônicas*, abordagem pedagógica de tudo o que se sabia sobre cônicas até o momento de sua escrita.
- *Fenômenos*, descreve a astronomia elementar e a geometria da esfera.

3 O POSTULADO DAS PARALELAS

O estudo do primeiro livro dos *Elementos* confronta-nos com questões fundamentais sobre a geometria proposta por Euclides. Algumas são de caráter técnico e outras, talvez as mais fascinantes, dizem respeito ao modo como o geômetra aborda o problema espinhoso do infinito ou a relação entre as figuras abstratas da geometria e da realidade natural. Esta última questão, que parte do célebre postulado das paralelas, conduzir-nos-á, numa viagem de quase dois mil anos, à geometria não euclidiana que revolucionou a ciência no século XIX. (CARRERA, 2012, p.63).

3.1 OS POSTULADOS DE EUCLIDES

Para concluir os pressupostos do método axiomático presentes na obra de Euclides, vejamos com maior cuidado os *postulados*, afirmações não demonstráveis e aceitáveis como verdades absolutas. Na sua essência, os postulados são (ou deveriam ser) afirmações simples e de fácil compreensão, como podemos notar nos quatro primeiros postulados de *Elementos*, conforme apresenta Bicudo (2009):

Postulado 3.1. *Fique postulado traçar um segmento de reta a partir de todo ponto até todo ponto.*

Postulado 3.2. *Também prolongar um segmento de reta limitado, continuamente, sobre um segmento de reta.*

Postulado 3.3. *E, com todo centro e distância, descrever um círculo.*

Postulado 3.4. *E serem iguais entre si todos os ângulos retos.*

Lembremos ainda, da linguagem moderna da Matemática no emprego do termo *segmento de reta* em substituição à *linha reta* (de Euclides) e do não reconhecimento por parte do mesmo em relação a infinidade da reta:

A noção de uma linha reta infinita é estranha para Euclides. Existem apenas segmentos de linha reta, que podem ser construídos como uma conexão de suas extremidades. (ROQUE, 2012)

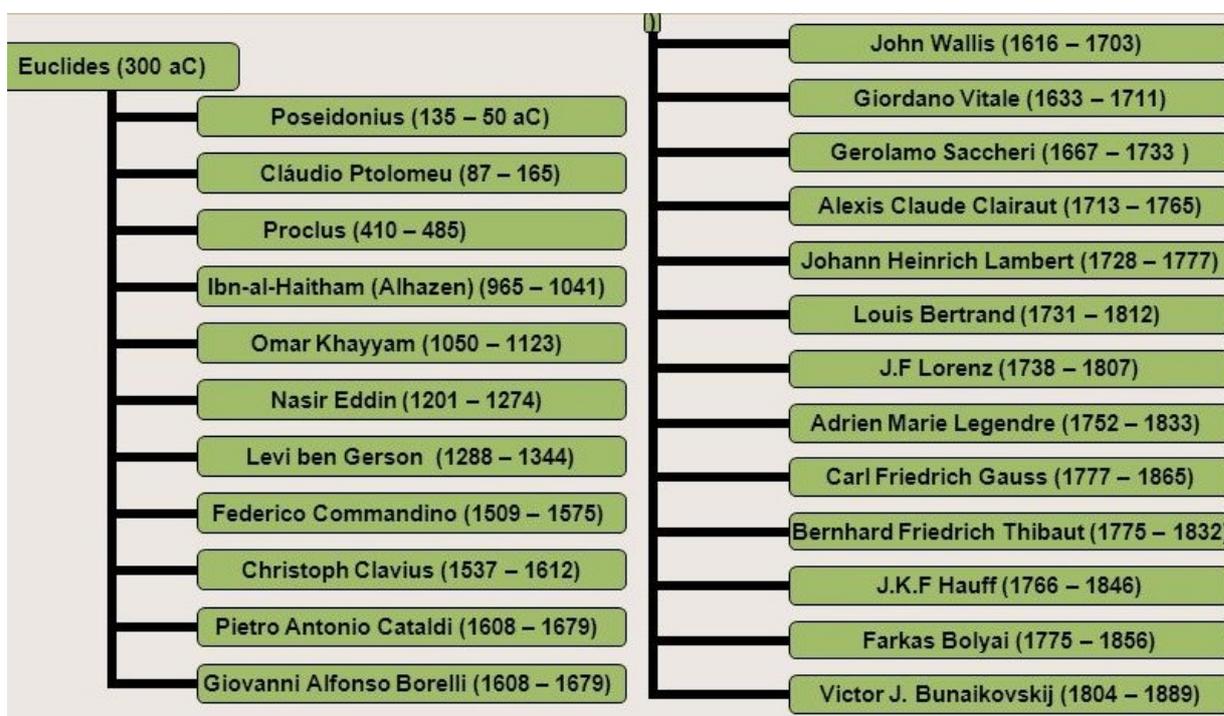
O conceito de reta estendendo-se infinitamente em ambas as direções não foi adotado por Euclides, que parecia ter uma preocupação maior com métodos que permitissem construir na prática (com régua e compasso) os objetos geométricos de seu interesse. (SCHREIBER, 2015)

Complementando a sua lista inicial de postulados, Euclides apresentou o 5º enunciado, com uma formulação muito mais elaborada do que as anteriores, não sendo de fácil e imediata compreensão:

Postulado 3.5. *E, caso uma reta, caindo sobre duas retas, faça os ângulos interiores e do mesmo lado menores do que dois retos, sendo prolongadas as duas retas, ilimitadamente, encontrar-se-ão no lado no qual estão os menores do que dois retos.*

Recebendo críticas desde a Antiguidade, esse postulado foi considerado derivado dos seus quatro anteriores, o que possibilitaria uma prova. Matemáticos como Posidônio, Ptolomeu e Proclo participaram das primeiras tentativas equivocadas de sua demonstração, assim como Commandino, Wallis, Saccheri, Lambert, Beltrami, Legendre, Gauss e Bolyai, entre outros, conforme Figura 6.

Figura 6 – Cronologia das tentativas de prova do quinto postulado



Fonte: Adaptado de (ALVES, 2018)

Para prosseguirmos, vale destacar a definição de Euclides dada à *retas paralelas*:

Definição: Duas retas paralelas são as que, estando num mesmo plano, prolongadas indefinidamente, não se interceptam em nenhum ponto.

As tentativas equivocadas de prova do 5º postulado, na sua maioria, partiram do princípio de que retas paralelas mantêm a distância entre si constante, o que seria provado mais tarde ser verdade apenas na geometria plana.

Figura 7 – Quinto postulado de Euclides



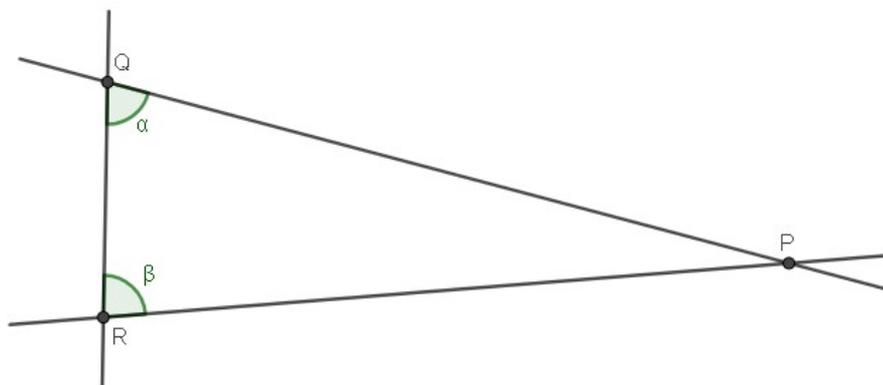
Fonte: (WIKIPEDIA, 2018a)

3.2 NOVAS VERSÕES PARA O 5º POSTULADO

À medida que era estudado e discutido, novas versões para seu enunciado surgiam, atendendo aos mesmos propósitos da versão original. Vejamos algumas delas:

- Para cada linha reta e um ponto não pertencente à mesma, existe exatamente uma linha que passa pelo ponto e não cruza a reta dada.
- O ângulo de soma de um triângulo é igual a 180° , Euclides.
- O conjunto de pontos equidistantes de uma linha reta é uma linha reta, Al-Haytham cerca de 1000 d.C.
- Existem triângulos semelhantes de diferentes tamanhos, Wallis em 1663.
- Se duas retas paralelas são cortadas por uma transversal, então os ângulos alternos internos são congruentes.
- Existe um par de triângulos semelhantes e não congruentes.
- Existe um par de retas equidistantes.
- Dados quaisquer três pontos não colineares, existe um círculo passando por esses três pontos.
- Se três dos ângulos de um quadrilátero são retos, então o último também o é.
- Por qualquer ponto dentro de um ângulo menor do que dois terços de um ângulo reto, pode-se traçar uma reta que corta os dois lados do ângulo.

Figura 8 – Se $\alpha + \beta < 180$, então existirá P , interseção das retas dadas por \overline{PR} e \overline{QR}



Fonte: Adaptado de (STEWART, 2013)

Uma das versões mais conhecidas para o 5º postulado, também chamado de *postulado das paralelas* e presente em livros didáticos atuais, é conhecida por *postulado de Playfair*, em homenagem ao matemático e geólogo escocês Jonh Playfair (1748-1819), popularizada no século XVIII, mas já proposta anteriormente por Proclo, no século V:

- Por um ponto fora de uma reta, existe exatamente uma paralela à reta dada.

Figura 9 – John Playfair (1748-1819)



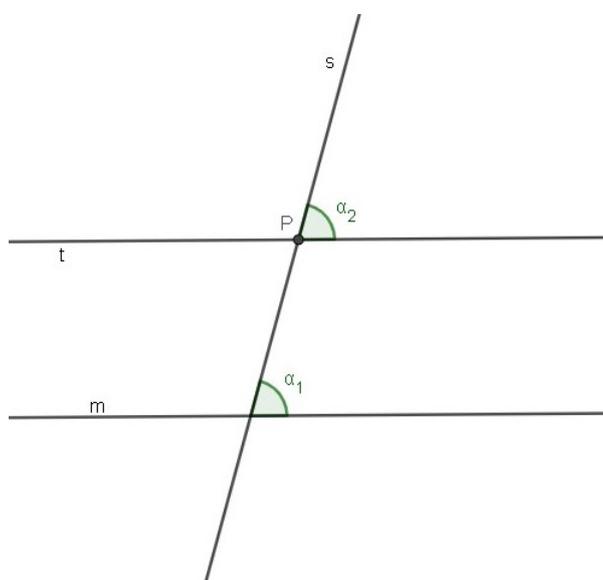
Fonte: (REAL, 2016)

Verifiquemos a correspondência entre as versões de Euclides e de Playfair:

Proposição 3.6. *A versão do postulado das paralelas de Euclides e de Playfair são equivalentes. (PINA, 2000)*

Demonstração. Iniciemos mostrando que o postulado de Playfair é uma proposição da geometria euclidiana, isto é, que dada uma reta m e um ponto P fora dela, existe uma única reta t que passa por P e é paralela a m . Para tanto, tracemos por P uma reta qualquer s formando um ângulo α_1 com m .

Figura 10 – Equivalência entre os enunciados de Euclides e Playfair



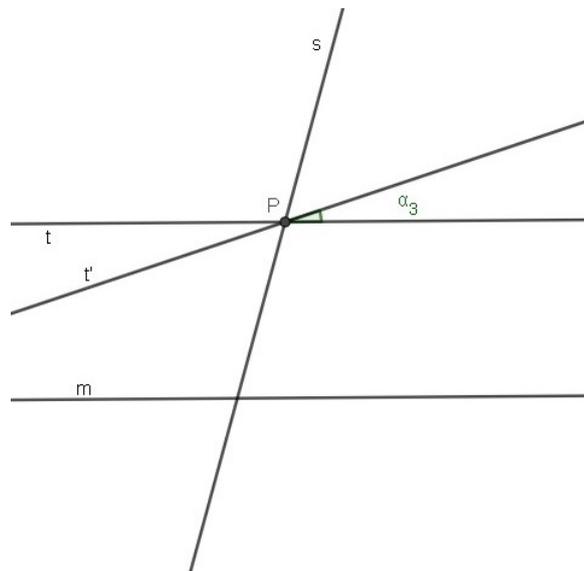
Fonte: Autoria própria

Como também, tracemos uma reta t passando por P tal que o ângulo entre t e s seja congruente a α_1 , o qual identificamos na Figura 10 por α_2 . Podemos afirmar que as retas t e m são paralelas, pois os seus ângulos correspondentes possuem a mesma medida, conforme a proposição 27 de Euclides, a qual garante "se uma reta, cortando outras duas retas, fizer com elas os ângulos alternos iguais, as mesmas duas retas serão paralelas". (BICUDO, 2009)

Agora, continuando a prova por contradição, demonstraremos a unicidade da reta t . Para tanto, consideremos que exista outra reta t' passando por P e também paralela à m , conforme Figura 11.

Seja a reta transversal s , a qual intersecta m , t e t' , além de passar por P . Como t e t' são paralelas à reta m , pelo postulado das paralelas, temos que as retas t e t' formam um ângulo de mesma medida com s e, portanto, t e t' são coincidentes pela proposição 14 de Euclides, o que verifica a unicidade, pois *se em alguma linha reta, e num ponto desta, houver duas linhas retas que não estão do mesmo lado e cuja soma dos ângulos adjacentes é igual a dois ângulos retos, então, as duas linhas retas estão contidas numa única linha reta.* (BICUDO, 2009)

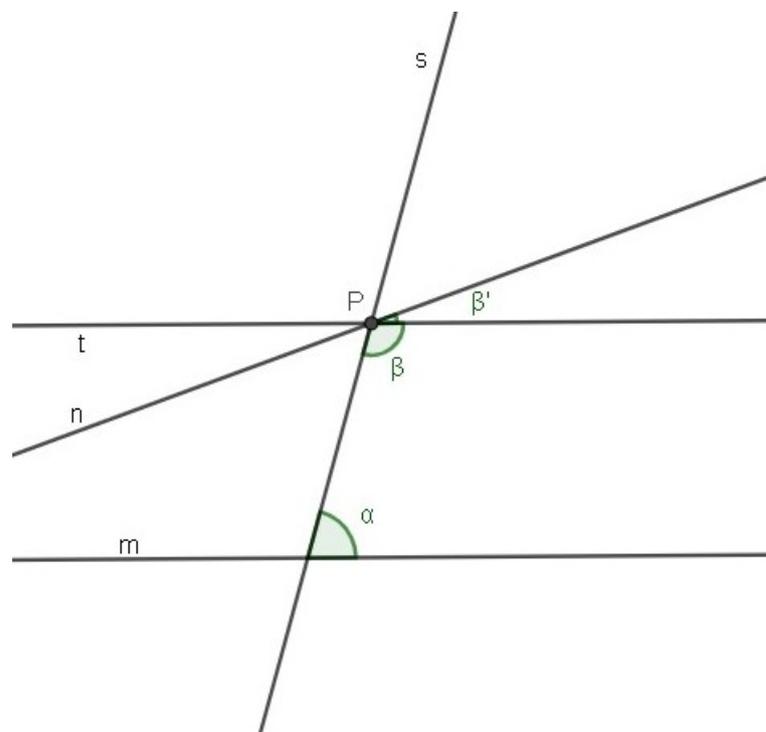
Figura 11 – Unicidade da reta paralela



Fonte: Autoria própria

A seguir, consideremos os quatro primeiros postulados de Euclides e a versão de Playfair para provar o 5º postulado. Observe a Figura 12. Vamos supor que a medida de $\alpha + \beta$ é menor do que a medida de um ângulo raso. Provaremos que a interseção entre m e t é diferente do vazio, isto é, que ambas se encontram em um determinado ponto.

Figura 12 – Postulado das paralelas e a versão de Playfair



Fonte: Autoria própria

Sejam as retas m e n paralelas, por contradição. Traçemos pelo ponto P uma reta t formando um ângulo β' com a reta t , sendo $\alpha + \beta$ igual à mesma medida que um ângulo raso. Segue, pela Proposição I.28, que m e t são paralelas. Mas assim, temos duas retas distintas passando pelo ponto P e paralelas à reta m , contrariando o postulado de Playfair. Logo, as retas m e n se encontram. Portanto, os enunciados de Euclides e Playfair são equivalentes. \square

Segundo Carrera (2012), há indícios de que Euclides sabia da lacuna existente ao enunciar seu 5º postulado e tenha deixado para aplicá-lo bem posteriormente, somente ao enunciar sua 29ª proposição (Livro I), evitando conflitos e questionamentos na época.

Nesse sentido, temos a posição de Mlodinow (2008), o qual afirma:

É invenção do próprio Euclides, não é parte do grande material de estudo e conhecimento que ele estava resumindo. Mas, aparentemente, ele não gostava desse postulado, pois parece que evitava usá-lo sempre que possível. Os matemáticos que o sucederam também não apreciavam seu enunciado, sentindo que o mesmo não era suficientemente simples para um postulado e que deveria ser demonstrado como um teorema. (MLODINOW, 2008, p.46)

As inúmeras versões decorrentes do enunciado original comprovam a sua não trivialidade. Notemos na Tabela 1, que até a proposição 48, do Livro I de Euclides, as proposições de 1 a 28 e a proposição 31, não dependem do postulado das paralelas para sua demonstração.

Foram necessários mais de 2000 anos para que os estudos da geometria diferencial mostrassem que o postulado das paralelas não derivava dos quatro primeiros postulados e que nenhuma contradição surgia ao contrariá-lo, isto é, afirmando que há mais de uma reta paralela a uma reta dada, passando por um ponto fora dela ou, que não há paralela a uma reta dada passando por um ponto fora dela.

3.3 TENTATIVAS EQUIVOCADAS DE PROVA DO 5º POSTULADO

A primeira tentativa equivocada de demonstração do postulado das paralelas que se tem conhecimento foi desenvolvida por Posidônio (135 a.C. - 50 a.C.), um político, astrônomo, geógrafo, historiador e filósofo grego. Sua demonstração partiu de uma definição diferente da apresentada inicialmente por Euclides sobre retas paralelas.

Definição (por Posidônio): Duas retas coplanares são **paralelas** se forem equidistantes.

Posidônio teve a impressão de ter conseguido demonstrar o postulado das paralelas a partir dessa definição, contudo, assumiu implicitamente que o lugar geométrico dos pontos equidistantes a uma reta é outra reta, o que não poderia ser provado sem o uso do próprio postulado.

Segundo Dudley (1992), a definição proposta por Euclides sobre retas paralelas abrange um menor número de suposições em relação à de Posidônio, sem fazer menção ao termo

Tabela 1 – Relação de dependência entre proposições e postulados do Livro I, de Euclides

Proposição	Definição	Postulados	Noções Comuns	Proposição
1	15, 20	1, 3		
2	15, 20	1, 2, 3		
3	15	3		
4		1, 2		
5		1		
6		1		
7				
8		1		
9	20			1, 3, 8
10	20			1, 4, 9
11	10, 20	1		1, 2, 3, 8
12	10,15	1, 3		8, 10
13	10		1, 2	11
14		2, 4	1, 2, 3, 8	13
15		4	1, 2, 3	13
16		1, 2	8	2, 3, 4, 10, 15
17		2	4	13, 16
18		1	8	3, 5, 16
19				5, 18
20		1, 2	8	2, 5, 19
21		2	4	16, 20
22	15	1, 3	1	2, 3, 20
23		1		8, 22
24		1	1,8	2, 4, 5, 19, 23
25				4, 24
26		1	1, 8	3, 4, 16
27	23	2		16
28		4	1, 2, 3	13, 15, 27
29	23	2, 5	1, 2, 4	13, 15
30			1	27, 29
31		1, 2		23, 27
32		2	1, 2	13, 29, 31
33		1		4, 27, 29
34		1	2	4, 26, 29
35			1, 2, 3	4, 29, 34
36		1	1	33, 34, 35
37		2	6	31, 34, 35
38		2	6	31, 34, 36
39		1	1, 8	31, 37
40		1	1, 8	31, 38
41		1	1, 2	34, 37
42		1	1, 2	10, 23, 31, 38, 41
43		1	2, 3	34
44		1, 2, 5	1, 8	15, 29, 30, 31, 42, 43
45		1	1, 2	14, 29, 30, 33, 34, 42, 44
46	22	4	1, 3	2, 3, 11, 29, 31, 34
47		1, 4	1, 2, 5	4, 14, 30, 31, 41, 46
48		1	1, 2	2, 3, 8, 11, 47

Fonte: Adaptado de (BONGIOVANNI, 2010, p.43)

distância e à sua respectiva medida. Ao afirmar que duas retas mantinham sempre a mesma distância, Posidônio já garantia implicitamente que ambas seriam paralelas, pois nunca poderiam se encontrar e assim, o quinto postulado poderia ser falsamente provado.

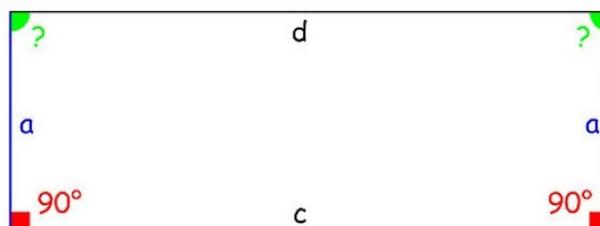
Ptolomeu, no século II, assumiu uma forma alternativa do 5º postulado e tentou deduzí-lo exatamente pelo princípio de distância. Duzentos anos depois, nos comentários sobre o Livro I de Euclides, Proclo também apresentou uma tentativa de demonstração. Segundo Schreiber e Scriba (2015), Proclo pretendia provar o postulado das paralelas depois de ter rejeitado uma prova feita por Ptolomeu. Seu erro apareceu justamente ao não considerar a existência de mais de uma reta paralela a uma reta dada, passando por um ponto fora dela. Além disso, até o momento dos estudos de Proclo, não se havia provado a existência dessa reta.

Vale ressaltar que Proclo, assim como outros matemáticos, usou a mesma definição de Posidônio para retas paralelas, mas logo notou que não era o bastante para concluir que o lugar geométrico dos pontos equidistantes a uma reta dada é outra reta, usando apenas os quatro primeiros postulados.

Thabit ibn Qurrah, erudito de Bagdá, no século IX, repetindo o erro de Proclo, afirmou que o caminho traçado por um ponto distante a um comprimento fixo de uma reta é exatamente outra reta. Porém, caiu no mesmo erro anterior, ao afirmar que esse caminho seria uma reta, havendo a necessidade de usar o quinto postulado para confirmá-lo. Mais tarde, seria provado que no plano, o conjunto de pontos equidistantes à uma reta é formado por duas retas. Já no espaço, um cilindro. Os estudos de Thabit prosseguiram na análise do espaço.

Por conseguinte, o matemático, astrônomo e poeta persa Omar Caiam (1048 - 1131), usou um quadrilátero com dois ângulos retos e dois ângulos com medidas desconhecidas para a sua tentativa de prova, o qual viria a ser chamado, anos depois, de *quadrilátero de Saccheri*, em homenagem ao padre matemático italiano Giovanni Gerolamo Saccheri (1667-1733).

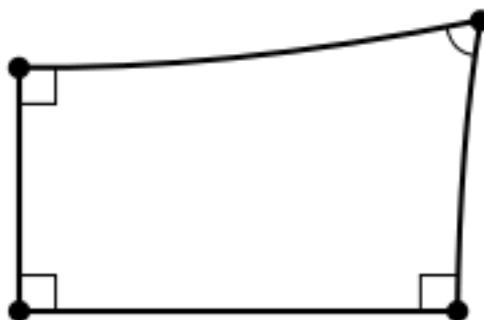
Figura 13 – Quadrilátero de Saccheri



Fonte: Adaptado de (BENEDETTI, 2018)

O matemático e físico árabe Ibn Al-Haitham, que conhecia as obras de seus antecessores, usou um quadrilátero com três ângulos internos retos, futuramente denominado *quadrilátero de Lambert*, em homenagem ao matemático suíço Johann Heinrich Lambert (1728 - 1777) e provou que o quarto ângulo interno do quadrilátero não poderia ser um ângulo agudo nem um ângulo obtuso.

Figura 14 – Quadrilátero de Lambert



Fonte: (WIKIPEDIA, 2018g)

As tentativas de prova do 5º postulado feitas pelos matemáticos islâmicos, de forma geral, segundo Schreiber e Scriba (2015), mantinham os mesmos princípios errôneos de demonstrações, ignorando as noções básicas das futuras geometrias não euclidianas. Os matemáticos europeus não encontraram registros de todas as tentativas de prova e o tema ficou adormecido por muitos anos, tanto na Europa como entre muçulmanos, retornando apenas em 1574, com o matemático jesuíta alemão Christoph Clavius (1538-1612), o qual apresentou uma nova versão da consagrada obra *Elementos*.

A questão da comprovação do 5º postulado euclidiano e/ou sua substituição por um enunciado mais evidente, o qual já havia sido discutido por vários autores na Antiguidade, foi basicamente revivida na Europa pela nova edição de Euclides, escrita por Christoph Clavius em 1574. Clavius não apenas falou sobre os esforços de antigos matemáticos no que diz respeito a esse assunto, como também trabalhou com o problema e provou o 5º postulado sob o pressuposto de que uma linha, com distância constante à outra linha, também era uma linha reta¹. (SCHREIBER, 2015, p.373, tradução nossa)

Em 1663, John Wallis (1616 - 1703), matemático britânico, ministrou uma palestra citando os estudos do árabe Nasir Eddin al-Tusi (1201 - 1274), um dos sucessores de Thabit. Wallis tentou reformular a geometria euclidiana para concluir a ideia de Proclo e provar o 5º postulado. Ele procurou demonstrar que qualquer reta diferente da paralela obtida nos enunciados de Euclides e Proclo intersectava a reta original, a qual chamamos atualmente de *reta transversal*, sem usar é claro, o próprio postulado. Para isso, tentou substituir o enunciado original por:

¹ The question of the provability of the 5º Euclidean postulate and/or its substitutability by an “evident” assumption, which had already been discussed by several authors in Antiquity, was basically revived in Europe by Christoph Clavius’s edition of Euclid from 1574. Clavius did not just talk about the efforts concerning this matter of ancient mathematicians, but also dealt with the problem himself and proved the 5º postulate under the assumption that a line, which had a constant distance to another line, is also a straight line. (SCHREIBER, 2015, p.373)

Postulado: Dado qualquer lado de qualquer triângulo, esse triângulo pode ser aumentado ou diminuído, de modo que o lado escolhido tenha qualquer tamanho que se queira, mas mantendo os ângulos do triângulo inalterados. (MLODINOW, 2008)

Porém, Wallis não conseguiu avançar em seus argumentos, pois pressupunha que a distância entre as retas era sempre a mesma, o que novamente, recaía no postulado das paralelas.

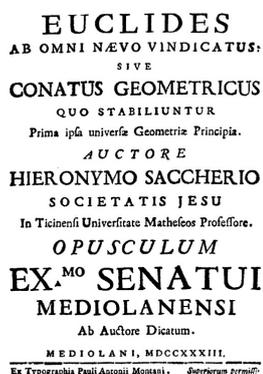
A demonstração de Wallis jamais ganhou aceitação entre os matemáticos porque o que ele realmente fez foi substituir um postulado por outro. Mas ao inverter o raciocínio de Wallis chega-se a uma afirmação assombrosa: se existe um espaço no qual o postulado das paralelas não vale, então não existem triângulos semelhantes. (MLODINOW, 2008, p.111)

Notemos que a realidade sem triângulos semelhantes seria muito diferente, a começar, por exemplo, no não cumprimento das escalas em mapas. Nossa percepção é muito pequena diante da extensão do globo terrestre e acabamos por não perceber a diferença entre viver em um mundo supostamente euclidiano e um não euclidiano. Assim, os anos seguintes foram marcados por descobertas relacionadas a novos tipos de espaços, os quais não eram reconhecidos ou revelados entre a comunidade acadêmica.

3.3.1 AS CONTRIBUIÇÕES DE SACCHERI

Uma das tentativas de demonstração mais desenvolvida do postulado das paralelas foi apresentada por Saccheri, professor de filosofia, teologia e matemática. Fixou-se em Pádua desde 1697 até sua morte. Foi aluno de Tommaso Ceva (1648 - 1737), poeta, matemático e padre jesuíta italiano. Saccheri dedicou grande parte de sua vida acadêmica à tentativa de prova do 5º postulado de Euclides. Sua demonstração foi publicada em 1733 no livro *Euclides ab omni naevo vindicatus, Euclides livre de todas as máculas*, pouco antes de seu falecimento e ficou esquecida por mais de 100 anos.

Figura 15 – Euclides livre de todas as máculas



Fonte: (WIKIPEDIA, 2019b)

Saccheri, conhecendo os estudos de seus predecessores, tentou desenvolver a sua própria demonstração. Como ponto de partida, considerou não haver contradição ao se enunciar o 5º postulado.

- P_1 : Por um ponto P passa uma única paralela a uma reta dada.

Ele supôs a real existência da possibilidade de demonstrá-lo a partir dos primeiros postulados e proposições de Euclides, mas que ninguém até então o havia feito. Para isso, Saccheri dividiu a negação do postulado das paralelas em dois casos e buscou obter contradições ao assumir cada um deles, segundo Stillwell (2010):

- P_0 : Não há linha passando por P que não cruze r .
- P_2 : Há pelo menos duas linhas que passam por P e não cruzam r .

Para iniciar suas argumentações, Saccheri definiu o seguinte quadrilátero:

Definição 3.7. *Quadrilátero de Saccheri.* *Seja um quadrilátero $ABCD$ isósceles em \overline{BC} e \overline{AD} , com dois ângulos retos consecutivos, \widehat{ABC} e \widehat{BAD} . Os ângulos \widehat{ADC} e \widehat{BCD} são chamados de **ângulos de topo** do quadrilátero $ABCD$.*

Figura 16 – Quadrilátero de Saccheri



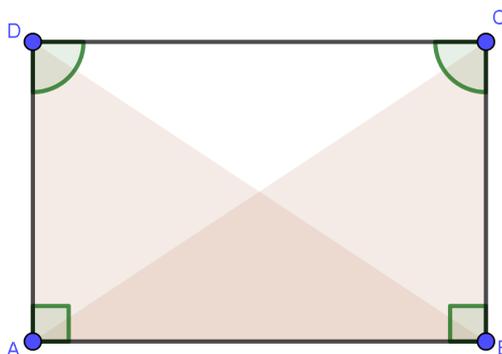
Fonte: Adaptado de (GARBI, 2006)

Sua ideia foi analisar o que ocorria com os ângulos de topo do referido quadrilátero, tentando demonstrar que os mesmos, além de congruentes entre si, eram retos. Usou como premissas os quatro primeiros postulados e as vinte e oito primeiras proposições de Euclides, que não dependiam do postulado das paralelas.

Proposição 3.8. *Os ângulos \widehat{ADC} e \widehat{BCD} são congruentes.*

Demonstração. Notemos que os triângulos ABC e BAD são congruentes (LAL) e, portanto, os triângulos ACD e BCD também o são (LLL). Com isso, $\angle BCD = \angle ADC$, Figuras 17 e 18.

Figura 17 – Congruência dos triângulos ABC e BAD



Fonte: Autoria própria

Figura 18 – Congruência dos triângulos ACD e BCD



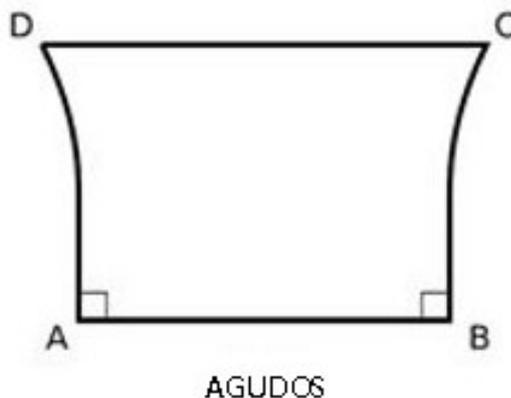
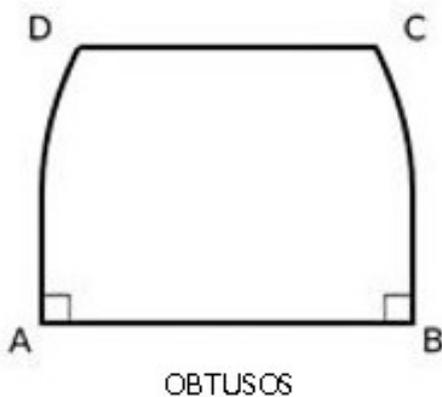
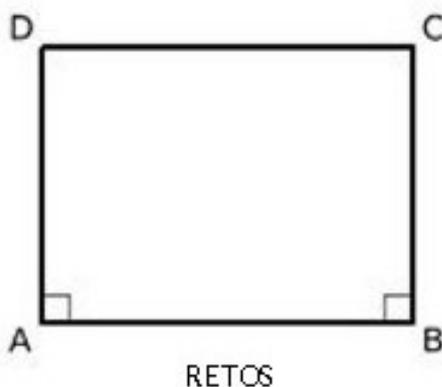
Fonte: Autoria própria

□

A seguir, Saccheri analisou a possível medida desses ângulos. As opções seriam: *dois ângulos agudos*, *dois ângulos retos* ou *dois ângulos obtusos* (Figura 19). Ele mostrou que o caso dos ângulos serem retos é equivalente ao axioma das paralelas (P_1). Caso conseguisse encontrar alguma contradição ao serem agudos ou obtusos, concluiria que ambos eram retos, provando o postulado das paralelas pela contra-positiva.

Ao supor que os ângulos \widehat{BCD} e \widehat{CDA} eram obtusos, Saccheri encontrou contradições com as primeiras vinte e oito proposições de Euclides. Porém, no caso de serem agudos, não conseguiu explicitar claramente uma contradição. No trabalho de Vieira (2018), podemos observar em detalhes toda a construção de Saccheri.

Figura 19 – Retos, obtusos ou agudos?



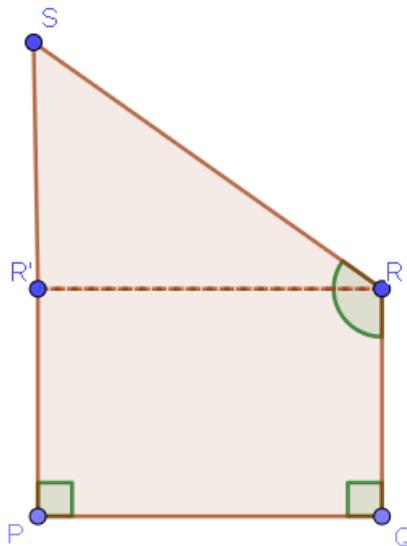
Fonte: (WIKIPEDIA, 2018h)

Para prosseguirmos, vejamos o resultado do seguinte lema, de acordo com Garbi (2006):

Lema 3.9. *Se um quadrilátero $PQRS$ tem os ângulos consecutivos \hat{P} e \hat{Q} com medidas iguais a de um ângulo reto, então se $PS = QR$, os ângulos de vértices em R e S possuirão a mesma medida; se \overline{PS} possuir medida diferente de \overline{QR} , entre os ângulos de vértices em R e S , será maior o lado que for adjacente ao menor dos segmentos \overline{PS} e \overline{QR} ; se forem diferentes, o maior dos segmentos \overline{PS} e \overline{QR} será adjacente ao menor dos ângulos de vértices em R e S .*

Demonstração. Se \overline{PS} e \overline{QR} forem congruentes, a prova de que os ângulos com vértices em R e S são congruentes é imediata, devido à congruência dos triângulos PSR e QSR . Vamos supor então, \overline{PS} e \overline{QR} distintos, com $PS > QR$ e marquemos sobre \overline{PS} o ponto R' , de tal forma que $PR' = QR$. Assim, delimitamos o triângulo $SR'R$, com o ângulo $\widehat{PR'R}$ externo e maior do que o ângulo com vértice em S . Sendo $\angle PR'R = \angle QRR'$ e $\angle QRR' < \angle QRS$, no quadrilátero mencionado, o maior dos ângulos de vértices em R e S é adjacente ao menor dos segmentos \overline{PS} e \overline{QR} . A recíproca é provada por redução ao absurdo. (Figura 20)

Figura 20 – Lema de Saccheri



Fonte: Adaptado de (GARBI, 2006, p.328)

□

Proposição 3.10. *Se os ângulos de topo forem obtusos, então a medida dos lados será menor do que a medida da mediana. Se os ângulos de topo foram agudos, então a medida dos lados será maior do que a medida da mediana.*

Demonstração. Depois de traçar o segmento $\overline{MM'}$, com M e M' pontos médios de \overline{AB} e \overline{CD} , respectivamente, a reta formada por $\overline{MM'}$ divide o quadrilátero $ABCD$ em dois quadriláteros congruentes e é, portanto, perpendicular aos lados \overline{AB} e \overline{CD} .

No caso do ângulo obtuso, o ângulo em C é maior do que o ângulo em B e, pelo Lema 3.9, $BM > CM'$, isto é, $AB > CD$. De forma análoga, se o ângulo for agudo, $AB < CD$.

Assim, podemos concluir que as retas perpendiculares a \overline{AB} , \overline{AD} e \overline{BC} , mantendo-se as hipóteses, não são equidistantes entre si e, como o teorema do ângulo externo garante, independente do quinto postulado, ambas não possuem interseção alguma. Notemos que equidistância e paralelismo são conceitos distintos. No caso do ângulo ser agudo, as perpendiculares por \overline{AD} e \overline{BC} afastam-se ilimitadamente. □

Ao considerar os ângulos do topo do quadrilátero de Saccheri obtusos, a sua base teria um comprimento maior do que o lado correspondente ao topo, o que contradiz a proposição anterior, na qual a base de um quadrilátero de Saccheri não possuiu medida maior do que o lado correspondente ao topo. Saccheri afirma em seus trabalhos que "*a hipótese do ângulo obtuso é absolutamente falsa, pois destrói a si mesma*". (VIEIRA, 2018, apud)

Vale salientarmos que o caso dos ângulos de topo serem obtusos ocorre na *geometria esférica*, mas outros postulados falham, como por exemplo, os axiomas de incidência (assumidos implicitamente) e ocorrendo a contradição.

Na hipótese dos ângulos de topo serem agudos, não houve prova satisfatória desenvolvida por Saccheri. Segundo Schreiber e Scriba (2015), o matemático francês Adrien-Marie Legendre (1752 - 1833), que contribuiu significativamente no desenvolvimento dos campos da estatística, teoria dos números, álgebra abstrata e análise matemática, e também Saccheri, acabaram por elaborar um teorema que excluía a possibilidade da medida para os ângulos de topo do quadrilátero de Saccheri ser maior do que 90° , ambos chegando ao mesmo resultado, porém por caminhos distintos.

Teorema 3.11. (*Saccheri-Legendre*) *A soma dos ângulos internos de qualquer $\triangle ABC$ não excede a soma de dois ângulos retos.*²

Convicto de que a única geometria que existia era a de Euclides, Saccheri insistiu em seus argumentos e acabou por elaborar as primeiras noções e teoremas das futuras geometrias não euclidianas. Vejamos alguns de seus resultados:

- Na hipótese do ângulo agudo, as perpendiculares \overline{AD} e \overline{BC} afastam-se ilimitadamente.
- Se a hipótese do ângulo reto for mantida em seus quadriláteros, será válida para qualquer quadrilátero.
- Se as hipóteses do ângulo agudo ou obtuso forem válidas em um de seus quadriláteros, elas serão válidas em todos os demais quadriláteros.
- A soma dos ângulos internos de um triângulo: é igual a dois retos (na hipótese do ângulo reto), maior do que dois retos (na hipótese do ângulo obtuso) e menor do que dois retos (na hipótese do ângulo agudo).
- O que ocorrer com um só triângulo quanto à soma de seus ângulos internos, também ocorrerá com todos os outros triângulos.
- Na hipótese do ângulo agudo, dada uma reta qualquer, pode-se traçar duas outras, uma perpendicular e outra formando com a mesma um ângulo agudo, sem que ambas se cruzem.

² A demonstração desse resultado envolve diversas proposições e pode ser encontrada em (VIEIRA, 2018).

- Se as duas retas não têm ponto em comum, ou elas têm uma perpendicular comum ou, se não têm, elas se aproximam assintoticamente.
- No feixe de retas que passam por um ponto A fora de uma reta r , existem duas retas, p e p' , uma em cada sentido de r , assintóticas à ela. As retas p e p' dividem o feixe de retas em dois conjuntos de retas: um formado pelas que cortam r e outro pelas que têm uma perpendicular comum à r .

Depois de tantas tentativas sem conseguir encontrar alguma contradição e provar o postulado das paralelas definitivamente, Saccheri acabou por expressar sua imensa insatisfação:

Saccheri parece ter perdido a paciência e, preferindo não acreditar no que via, decidiu refutar à força a hipótese do ângulo agudo. Após consumir mais 16 páginas de seu livro, chegou à conclusão que as mencionadas retas p e p' tinham perpendiculares comuns com r em pontos situados no infinito, o que "*é repugnante à natureza da linha reta*", com o que afirmou ser absolutamente falsa a referida hipótese. Mas, mesmo depois desta afirmação categórica, ele parecia não estar totalmente convencido e voltou a atacar a hipótese pelo sabidamente errôneo conceito de equidistância. Assim, seu livro terminou de forma melancólica porque ele entrara bastante em um novo mundo, passara por ele e retornara não acreditando em sua existência. (GARBI, 2006, p.335)

Proposição 3.12. *Verificando a hipótese dos ângulos serem retos, agudos ou obtusos, a soma dos ângulos internos de um triângulo será igual, menor ou maior do que dois ângulos retos, respectivamente.*

Demonstração. Considere o triângulo ABC , os pontos médios dos segmentos \overline{AB} e \overline{AC} , D e E , e a reta passando por D e E . Tracemos os segmentos \overline{FB} e \overline{CG} perpendiculares a \overline{DE} , como também, uma perpendicular à \overline{DE} por um ponto $H \in \overline{DE}$, que passa por A . Existem assim, as possibilidades de \overline{DE} ser exterior, interior, ou estar sobre um lado do triângulo ABC . Em qualquer caso, obteremos o mesmo resultado. Portanto, faremos apenas para o caso em que \overline{DE} é interior ao triângulo ABC . Por construção, temos que o triângulo BFD é congruente ao triângulo AHD , o que implica na igualdade $FB = AH$ e, os triângulos congruentes CGE e AHE , implicam em $GC = AH$, o que resulta em $FB = GC$, considerando o quadrilátero $GFBC$ de Saccheri, com lado superior \overline{BC} . Das relações estabelecidas, temos a congruência entre os triângulos DBF e DAH , assim como entre ECG e EAH . Portanto,

$$\angle DBF + \angle ABC = \angle DAH + \angle ABC = \angle FBC \quad (3.1)$$

$$\angle ECG + \angle ACB = \angle EAH + \angle ACB = \angle GCB \quad (3.2)$$

Como $\angle DBF + \angle ECG = \angle CAB$, somando as equações 3.1 e 3.2, temos:

$$\angle CAB + \angle BCA + \angle ABC = \angle FBC + \angle GCB \quad (3.3)$$

□

O matemático francês Adrien-Marie Legendre (1752 - 1833) tentou provar o postulado das paralelas em seu livro *Élèves de géométrie, Estudos de Geometria*, publicado pela primeira vez em 1794 e reproduzido até a 12ª edição, em 1823. Algumas relações descritas por Legendre são importantes até os dias atuais, tais como:

- Valendo os quatro primeiros postulados de Euclides e o postulado de Arquimedes (cuja necessidade é sabida apenas nos dias atuais), a soma das medidas dos ângulos internos de qualquer triângulo é sempre menor ou igual a 180° .
- Se a soma das medidas dos ângulos em qualquer triângulo for igual a 180° , também acontecerá em todos os demais triângulos.

Contudo, Bonola (1912) afirma que Legendre não acrescentou nada de novo ao material e aos resultados de seus predecessores. Seu maior mérito foi a forma elegante e simples de apresentar seus escritos e, por essa razão, ganharam um amplo público de leitores, o que ajudou a aumentar significativamente o número de discípulos das novas ideias que começavam a se propagar na época.

Conforme Schreiber e Scriba (2015), a biografia de textos sobre as tentativas de prova do 5º postulado abrange mais de 100 registros entre 1557 e 1800, distribuídas desigualmente ao longo do período.

3.3.2 AS CONTRIBUIÇÕES DE LAMBERT

Podemos verificar uma significativa semelhança entre o trabalho de Saccheri e Johann Heinrich Lambert (1728 - 1777), matemático suíço radicado na Prússia. Seus estudos, além de contemplarem uma tentativa de prova mais cautelosa para o caso dos ângulos de topo do quadrilátero de Saccheri serem agudos, incluiu a primeira demonstração de que π é um número irracional, o cálculo da trajetória de cometas, entre outros.

Figura 21 – Johann Heinrich Lambert (1728 - 1777)



Fonte: (WIKIPEDIA, 2019c)

Segundo Schreiber e Scriba (2015), a tese de doutorado de Georg Simon Kluégel, de 1763, inspirada por A. G. Kastner, sobre a história do postulado das paralelas, foi a referência principal para Lambert, que tentou ir além da prova de Saccheri. Em 1766, escreveu o livro *Die Theorie der Parallellinien, A Teoria das Linhas Paralelas*, publicado apenas após sua morte.

Como ponto de partida, tentando encontrar contradições ao negar o 5º postulado, Lambert também usou quadriláteros em suas investigações. Porém, esses quadriláteros possuíam três ângulos retos, correspondendo à metade de um quadrilátero de Saccheri. Três hipóteses eram feitas quanto à natureza do quarto ângulo:

- ser um ângulo reto;
- ser um ângulo obtuso;
- ser um ângulo agudo.

Figura 22 – Quadrilátero de Lambert



Fonte: Adaptado de (GARBI, 2006)

A medida do quarto ângulo de um quadrilátero de Lambert foi de grande interesse na história da geometria, pois se pudesse ser provado que sua medida era exatamente 90° , o postulado das paralelas poderia ser demonstrado como teorema. Hoje, sabemos que a medida desse quarto ângulo depende do tipo de geometria na qual o quadrilátero está inserido. Na geometria euclidiana, por exemplo, é mesmo um ângulo reto. Na geometria hiperbólica, é um ângulo agudo e, na geometria elíptica, um ângulo obtuso.

Lambert demonstrou que a hipótese do quarto ângulo ser obtuso não era compatível com o restante dos axiomas da geometria euclidiana, porém se aplicava à geometria da esfera. Além disso, indicou que a suposição de ser um ângulo reto é equivalente ao postulado das paralelas. Também tentou de várias maneiras contradizer sua *hipótese do ângulo agudo*, mas permaneceu insatisfeito com todos os seus resultados.

Ele ainda, segundo Manfredo (1987), provou que dada uma reta, o fato de existirem duas outras retas que não a intersectam implica em um triângulo com ângulos α , β , γ de área proporcional a $\pi - (\alpha + \beta + \gamma)$, medida essa mais conhecida por *defeito angular*.

Ele foi tão longe com a conclusão da hipótese do ângulo agudo que reconheceu a proporcionalidade entre a área de um triângulo e a diferença entre a soma dos ângulos e 180° , comparando isto ao fato da área de um triângulo em uma esfera ser igual à diferença da soma dos ângulos em relação aos 180° multiplicada pelo quadrado do seu respectivo raio. Então ele escreveu: "Eu quase poderia chegar à conclusão de que a terceira hipótese ocorre em superfícies esféricas imaginárias (isto é, se tomarmos o raio r da esfera como puramente imaginário, então r^2 é negativo e a diferença simétrica da soma dos ângulos se torna uma falha). Pelo menos, tem sempre que existir alguma razão para que esta (a hipótese do ângulo agudo) não possa ser rejeitada em áreas planas tão facilmente quanto a segunda (hipótese do ângulo obtuso)."³ (SCHREIBER, 2015, p.375, apud, tradução nossa)

De fato, Lambert chegou muito perto da descoberta das geometrias não euclidianas, porém faltou-lhe coragem para tal, como podemos verificar em Schreiber e Scriba (2015):

Devido às suas observações sobre a aplicabilidade da hipótese do ângulo agudo em uma superfície esférica de um raio imaginário, Lambert de fato aproximou-se da geometria não euclidiana mais do que Bolyai e Lobachevsky, que são atualmente reconhecidos como os fundadores da geometria não euclidiana. No entanto, ao contrário de Lambert, eles não ofereceram nada além de conclusões reeditadas e amplamente divulgadas baseadas na negação do postulado das paralelas e a profunda certeza de que essa teoria não produzia quaisquer contradições lógicas, mas apenas divergia da experiência cotidiana, ou melhor, dos preconceitos adquiridos. Já Lambert, teria desenvolvido um modelo para esta teoria se estivesse confiante o suficiente com o assunto. Parece, no entanto, que ele não estava, uma vez que sequer concluiu seus esforços para encontrar uma contradição ao postulado e deixou tudo impublicável enquanto era vivo⁴. (SCHREIBER, 2015, p.376, tradução nossa)

³ He went so far with the conclusion of the hypothesis of the acute angle that he recognised that the area of a triangle must then be proportional to the difference between the sum of angles and 180 degrees and compared this to the fact that the area of a triangle on a sphere is equal to the difference of the sum of angles against 180 degrees multiplied by the radius square. Then he wrote: "I might almost draw the conclusion that the third hypothesis occurs in imaginary spherical surfaces (i.e., if we take radius r of the sphere to be purely imaginary so that r^2 is negative and the symmetrical difference of the sum of angles turns into a defect). At least, there always has to be some reason why it [the hypotheses of the acute angle] cannot be overruled in plane areas as easily as it was with the second (hypothesis of the obtuse angle)." (SCHREIBER, 2015, p.375)

⁴ Due to his remarks on the applicability of the hypothesis of the acute angle on a spherical surface of imaginary radius, Lambert had indeed approached non-Euclidean geometry more than Bolyai and Lobachevsky, who are now accepted as the founders of non-Euclidean geometry. However, in contrast to Lambert, they did not offer anything else other than largely extended edited conclusions based on the negation of the parallel postulate and their inner certainty that this theory did not yield any logical contradictions, but only collided with everyday experience or rather with the acquired prejudices. In contrast, Lambert would have had a model for this theory if he had just felt confident enough with his subject matter. It seems, though, he was not, since by no means did he conclude his efforts to find a contradiction at the cited location and left everything unpublished while alive. (SCHREIBER, 2015, p.376)

4 ORIGENS DAS GEOMETRIAS NÃO EUCLIDIANAS

A existência de novas geometrias mostrou a necessidade de se raciocinar com rigor e manter a intuição sob controle. (MANFREDO, 1987)

As ideias defendidas por Saccheri voltaram à tona apenas no século XIX, levando em consideração uma nova questão:

Pode existir uma geometria plana, na qual, por um ponto fora de uma reta, exista mais de uma reta paralela à reta dada?

Em busca de respostas, muitos matemáticos procuraram evidências nesse sentido, ficando difícil enunciar todos os caminhos trilhados rumo às descobertas e ao desenvolvimento das novas geometrias, conhecidas atualmente por *geometrias não euclidianas*. Como afirma Carrera (2012), já na época de Euclides era reconhecida a existência de duas geometrias *reais*, capazes de representarem a verdadeira geometria da natureza: a geometria do céu (a *esférica*), descrevendo fenômenos astronômicos já estudados até então pelos gregos e, anteriormente, por egípcios e babilônicos; e a geometria do pátio de casa (a *plana*), àquela praticada por Arquimedes quando um soldado romano o assassinou com a espada.

Difícilmente qualquer outro avanço intra-matemático já provocou tanta atenção pública quanto a geometria não euclidiana¹. (SCHREIBER, 2015, p.432, tradução nossa)

O estudo do surgimento das geometrias não euclidianas é de impressionante riqueza, visto a grandiosidade de ideias e propostas desenvolvidas ao longo de mais de 2000 anos na tentativa incessante, por matemáticos e geômetras, de provar o quinto postulado de Euclides. Há uma enormidade de literatura disponível sobre essa importante parte da história da geometria, a qual tentaremos abordar destacando os acontecimentos mais relevantes no período. Somente com a *geometria diferencial* foi possível mostrar que não surgia contradição alguma ao se afirmar que *há mais de uma paralela a uma determinada linha dada passando por um ponto fora dela*, negando-se assim, o postulado das paralelas e que, para tanto, era preciso propor um modelo matemático adequado.

Desenhe uma linha reta num pedaço de papel e um ponto em algum lugar que não seja a linha. Parece possível que você não possa desenhar uma paralela passando pelo ponto? Parece possível desenhar mais de uma? O postulado das paralelas descreve o nosso mundo? Uma geometria na qual ele é violado poderia ser matematicamente consistente? Essas duas últimas perguntas acabaram por levar a uma revolução no pensamento intelectual - a primeira, em nossa visão do Universo; e a segunda, em nossa compreensão da natureza e do significado

¹ Hardly any other intra-mathematical advancement has ever provoked as much public attention as non-Euclidean geometry. (SCHREIBER, 2015, p.432)

da Matemática. Mas, por 2 mil anos, dificilmente houve alguma outra ideia em qualquer campo do conhecimento humano que fosse aceita mais universalmente do que o "fato" expresso pelo postulado de Euclides, de que existe uma e somente uma paralela. (MLODINOW, 2008, p.47)

Até o século XIX, a geometria euclidiana era considerada verdade absoluta, tanto como sistema axiomático, quanto como fiel descrição do espaço físico. Atualmente, é o tipo mais simples de geometria e atende perfeitamente aos propósitos do cotidiano, porém há um vasto universo que só pode ser compreendido com o auxílio das geometrias não euclidianas, cuja natureza geométrica não havia sido reconhecida até então.

4.1 GAUSS E SEUS MANUSCRITOS

O matemático e físico alemão Johann Carl Friedrich Gauss (1777-1855) foi, talvez, o mais proeminente dos matemáticos e um dos cientistas mais influentes da história, sendo figura de destaque na cultura alemã até os dias atuais. Embora sem referências precisas, são conhecidas algumas de suas falas, demonstrando seu encantamento pela Matemática, tais como: *"sempre me pareceu estranho todos aqueles que estudam seriamente esta Ciência (a Matemática) acabarem tomados por uma espécie de paixão pela mesma. Em verdade, o que proporciona o máximo prazer não é o conhecimento e, sim, a aprendizagem, não é a posse, mas a aquisição; não é a presença, mas o ato de atingir a meta"* ou *"a Matemática é a rainha das Ciências e a teoria dos números é a rainha da Matemática"*.

Figura 23 – Cédula alemã de 10 marcos (1989) em homenagem a Gauss



Fonte: (WIKIPEDIA, 2019a)

Gauss foi o primeiro a suspeitar da existência de novas geometrias, mas nunca publicou seus estudos com receio da não aceitação pelos cientistas da época, e também, de possivelmente ser mal interpretado. Apenas para alguns amigos de confiança ele revelou algo do seu trabalho e das suas descobertas. Quando tomou conhecimento dos estudos do matemático amador alemão Ferdinand Karl Schweikart (1780 - 1857) e de seu sobrinho Franz Adolph Taurinus (1794 - 1874), em 1824, ele solicitou ao último que mantivesse silêncio sobre o tema, como podemos verificar no trecho de uma de suas cartas enviadas a Taurinus:

Figura 24 – Selo alemão em homenagem a Gauss



Fonte: (WIKIPEDIA, 2019d)

Eu não temo um homem que se revelou a mim como uma mente matemática pensante, que ele poderia interpretar erroneamente o que é dado aqui (uma breve descrição dos resultados e conjecturas de Gauss): todavia, para todos os efeitos, você deve considerar isso como uma informação privada, a qual não deve, em hipótese alguma, usar de maneira pública ou que leve à publicação². (SCHREIBER, 2015, p.427, apud, tradução nossa)

Superando as barreiras iniciais, Gauss prosseguiu com o desenvolvimento dos teoremas fundamentais de uma suposta nova geometria, denominada primeiramente por ele de *anti-euclidiana* e, posteriormente, de *não euclidiana*, afirma Bonola (1912). Ele acabou por se convencer de que a geometria não euclidiana não envolvia, por si só, qualquer contradição. Ainda de acordo com Bonola (1912), Gauss³ foi o primeiro a ter uma visão clara da existência de uma geometria independente do 5º postulado, a qual ficou, por cerca de 51 anos, escondida na mente do geômetra e só foi revelada após as publicações dos matemáticos russo Nikolai Ivanovich Lobachevsky (1792 - 1856) e do húngaro Farkas Bolyai (1775 - 1856).

Aos 12 anos, Gauss começou a criticar a obra de Euclides, em especial, como já havia sido feito por tantos outros matemáticos, o postulado das paralelas. Porém, sua crítica era diferente de seus antecessores. Enquanto esses procuravam uma forma de demonstrá-lo ou de reescrevê-lo, Gauss levantou a seguinte questão: *é possível que o espaço seja de fato curvo?* Aos 15 anos, tornou-se, até onde se tem notícia, o primeiro matemático a aceitar a ideia de que poderia existir uma geometria consistente diferente da euclidiana, na qual o tão citado postulado das paralelas não valeria.

² I do not fear of a man who has revealed himself to me as a thinking mathematical mind that he could misinterpret that given herein [a short description of Gauss's results and views]: however, in any case, you must view this as a private message, which you must not, in any case, use in a public manner or in a manner that leads to publication. (SCHREIBER, 2015, p.427)

³ Podemos fixar o ano de 1792 como o início das reflexões de Gauss sobre as novas geometrias, segundo Bonola (1912).

A hipótese de que a soma dos ângulos internos de um triângulo é menor do que 180° conduz a uma geometria separada, totalmente diferente de nossa geometria (euclidiana) e que desenvolvi de maneira inteiramente satisfatória para mim, de tal modo que posso nela resolver qualquer problema, exceto a determinação de uma constante que não pode ser fixada *a priori*. (MANFREDO, 1987, p.31)

Segundo Mlodinow (2008), ao ingressar na Universidade de Gottingen, aos 18 anos, Gauss encontrou o professor Abraham Kaestner, que colecionava escritos sobre o 5º postulado e foi seu incentivador. Consta a afirmação de Kaestner sobre seu aluno ter sido "*o principal matemático entre os poetas e o principal poeta entre os matemáticos*".

Algumas cartas também mostram o envolvimento de Gauss com o matemático húngaro Farkas Bolyai (1775 - 1856) em torno do postulado das paralelas desde o ano de 1792. Segundo Mlodinow (2008), a mãe de Gauss chegou a conversar com o amigo de seu filho, destacando que *Carl havia trazido para sua humilde casa um colega de faculdade que, apesar de não ser rico, era um nobre húngaro (...)*. Bolyai, por sua vez, falou sobre o amigo, enfatizando que *Carl estava destinado a ser o maior de todos os matemáticos da Europa*.

Vejamos um trecho de carta escrita por Gauss a Farkas Bolyai, datada de 17/12/1799:

Quanto a mim, já fiz algum progresso nos meus trabalhos. No entanto, o caminho que escolhi não leva ao objetivo que buscamos e que você me garante ter alcançado. Parece sim, obrigar-me a duvidar da verdade da própria geometria. É verdade que alcancei muito e seria considerado pela maioria das pessoas como uma demonstração: mas que, aos meus olhos, não prova nada. Por exemplo, se alguém pudesse deduzir que um triângulo retilíneo é possível, cuja área deveria ser maior do que qualquer área, então eu estaria pronto para provar toda a geometria com rigor absoluto.

A maioria das pessoas certamente aceitaria como um axioma, mas eu não! Seria, de fato, possível que a área permanecesse sempre abaixo de um certo limite, independente do quão distantes os vértices do triângulo fossem tomados. (BONOLA, 1912, p.65, apud, tradução nossa)

4.2 DE PAI PARA FILHO BOLYAI

De acordo com Bonola (1912), as análises do matemático Farkas Bolyai sobre o postulado das paralelas iniciaram enquanto ele ainda era estudante em Göttingen, entre os anos de 1796 e 1799, e são, provavelmente, decorrentes da amizade com seu jovem professor de astronomia, K. F. Seyffer (1762 - 1822).

O ponto de partida para Bolyai foi deduzir o postulado das paralelas com base na condição de que um círculo pode ser delimitado por três pontos não colineares. Em 1804, ele enviou ao seu ex-colega de turma, Gauss, um tratado intitulado *Theoria Parallelarum*, que abordava uma tentativa de prova da existência de linhas equidistantes a determinadas linhas previamente dadas. Gauss, por sua vez, mostrou que a prova era falsa. No entanto, Bolyai não desistiu das suas investigações. Ele afirmou que os resultados derivados da negação do 5º postulado não

Figura 25 – Farkas Bolyai (1775-1856)



Fonte: (WIKIPEDIA, 2018c)

poderiam contradizer os princípios da geometria. Suas descobertas foram compiladas no livro *Tentamen juventutem studiosam in elementa matheseos (Um estudo introdutório aos elementos matemáticos)*, publicado entre 1832 e 1833, na Hungria, escrito em latim e apresentando uma notável possibilidade de reescrita para o enunciado do postulado das paralelas:

Quatro pontos não coplanares estão sempre sobre uma esfera. O que equivale a afirmar que um círculo pode sempre ser delimitado por três pontos não colineares⁴. (BONOLA, 1912, p.61, tradução nossa)

Ilustraremos essa equivalência com o resultado:

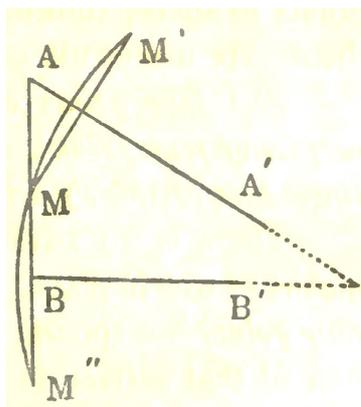
Teorema 4.1. *Se um círculo pode ser definido por três pontos não colineares, então há, no máximo, uma paralela a uma reta dada passando por um ponto determinado.*

Demonstração. Para tanto, consideremos as retas AA' e BB' , sendo uma delas perpendicular a AB e a outra oblíqua. Determinemos um ponto M sobre AB entre A e B , e os respectivos pontos simétricos a M em relação às retas BB' e AA' , M' e M'' , não na mesma linha reta com M . Então, os pontos M , M' e M'' estão sobre a mesma circunferência. Além disso, as retas determinadas por AA' e BB' devem possuir uma interseção, já que ambas passam pelo centro desse círculo. Mas, como temos uma reta perpendicular à outra reta e uma reta que a intersecta em um ponto formando um ângulo agudo, segue que a única reta que pode ser paralela à BB' por A é a perpendicular a AB por A .

□

⁴ O postulado das paralelas pode ser deduzido a partir deste resultado.

Figura 26 – Pontos não coplanares estão sempre sobre uma mesma esfera



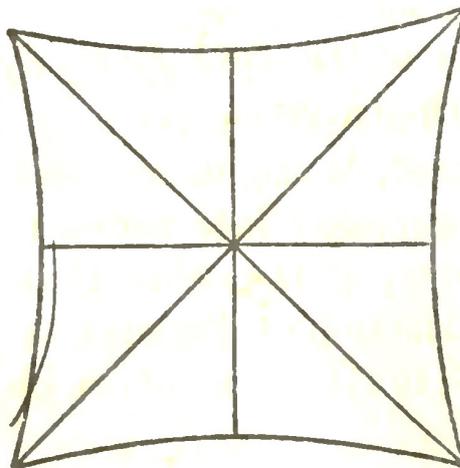
Fonte: (BONOLA, 1912, p.61)

Ainda segundo Bonola (1912), as investigações do alemão jurista e matemático Ferdinand Karl Schweikart (1780 - 1857) datam do mesmo período das de Gauss, mas são independentes. Em 1807, ele publicou a obra *Die Theorie der Parallellinien, nebst dem Vorschlage ihrer Verbanung aus der Geometrie*. Esse trabalho não continha um estudo das paralelas independente do quinto postulado, mas sim, fundamentado na ideia do paralelogramo. Posteriormente, Schweikart desenvolveu uma geometria independente do postulado de Euclides, a geometria *astral*. Em dezembro de 1818, ele pediu para que fosse comunicado a Gauss o seguinte memorando, solicitando-lhe um parecer:

Existem dois tipos de geometria, a geometria no sentido estrito, a euclidiana; e uma geometria astral. Triângulos, na última, têm a propriedade da soma dos seus três ângulos internos não ser igual a medida da soma de dois ângulos retos. Assumindo isso, podemos provar com rigor que a soma das medidas dos três ângulos internos de um triângulo é menor do que a soma das medidas de dois ângulos retos, que a soma se torna cada vez menor, quanto maior for a área do triângulo e que a altura de um triângulo retângulo isósceles cresce continuamente à medida que seus lados aumentam, mas nunca se torna maior do que um certo comprimento, o que eu chamo de constante. Quadrados têm, portanto, a seguinte forma (Figura 27). Se essa constante fosse o raio da Terra, ela seria infinitamente grande em comparação aos espaços que ocorrem diariamente em vida. A geometria euclidiana mantém apenas o pressuposto de que a constante é infinita. Somente nesse caso é verdade que a soma dos três ângulos de um triângulo é igual a dois ângulos retos. E isso pode ser facilmente provado quando admitimos que a constante é infinita. (BONOLA, 1912, pg. 76, apud, tradução nossa)

Em março de 1819, Gauss elogiou Schweikart e declarou seu acordo com tudo o que lhe foi apresentado. Ele acrescentou ainda que havia entendido o conceito da geometria astral e que poderia resolver completamente todos os seus problemas se a constante lhe fosse dada. Schweikart deduziu o limite superior para a área de um triângulo, porém, assim como Gauss, não publicou suas descobertas.

Figura 27 – Quadrado na geometria esférica



Fonte: (BONOLA, 1912, p.76)

Bonola (1912) afirma também que além de continuar seus esforços sobre o postulado das paralelas, Schweikart (1820) convenceu seu sobrinho alemão Franz Adolph Taurinus (1794-1874) para que se dedicasse ao tema, focando sua atenção na constante da fórmula que relacionava o comprimento da circunferência de um círculo com a constante de Gauss. Ambas foram conectadas por uma relação da geometria astral, sem relutância por Gauss. Taurinus permaneceu acreditando na confirmação do postulado das paralelas e na esperança de prová-lo, com visões muito diferentes de seu tio. Publicou o livro *Geometriae Prima Elementa* em 1826, onde aprimorou suas pesquisas e concluiu um apêndice muito importante sobre geometria analítica e geometria esférica, deduzindo teoremas com transformações das fórmulas e substituindo o raio de medida real por um raio de medida imaginária.

Taurinus, em comum com Lambert, reconheceu que a geometria esférica corresponde exatamente a um sistema válido, no caso da hipótese do ângulo obtuso. O importante serviço prestado por Schweikart e Taurinus para a descoberta das geometrias não-euclidianas foi reconhecido e divulgado pelos matemáticos alemães Friedrich Engel (1861-1941) e Paul Stäckel (1862-1919).

János Bolyai (1802 - 1860), um jovem oficial do exército húngaro e filho de Farkas Bolyai, juntamente com Lobachevsky, dividem a honra da descoberta da geometria não euclidiana. Desde muito novo, J. Bolyai demonstrou notável aptidão para a Matemática, incentivado por seu pai, principalmente no que diz respeito ao postulado das paralelas. Durante seu curso (1817 - 1822), no Royal College for Engineers, teve como amigo Carl Szasz (1798 - 1853), o qual certamente o influenciou nas primeiras ideias relacionadas à ciência absoluta do espaço, conforme descreve Bonola (1912).

Seus esforços foram detalhados em um apêndice publicado no livro de seu pai, *Tentamen*. Mesmo desencorajado por F. Bolyai, que tentou por muitos anos provar equivocadamente o

Figura 28 – János Bolyai (1802 - 1860)



Fonte: (WIKIPEDIA, 2018f)

quinto postulado de Euclides com base na bibliografia de Saccheri e Lambert. A partir de 1820, ao reconhecer seus próprios erros, J. Bolyai se deu conta da necessidade de respeitar o modelo imposto pela natureza do espaço e seguiu o método clássico dos gregos, mantendo o método dedutivo, mas sem considerar o 5º postulado como verdadeiro ou falso, desenvolvendo uma geometria completamente independente dele e aplicável a espaços curvos, que seria chamada mais tarde de *geometria absoluta*.

Figura 29 – Tentamen, Farkas Bolyai



Fonte: (WIKIPEDIA, 2018l)

Também mostrou as consequências da geometria ao se negar o 5º postulado na dependência de uma constante e tratou o caso euclidiano como um caso limite de um feixe infinito de possibilidades. Introduziu as ideias de *linha equidistante* a uma linha e a mais importante de todas, o *paraciclo* ou *horociclo*, curva obtida no limite de uma família de círculos. Reconheceu ainda, que a demonstração do 5º postulado poderia ser feita caso fosse mostrado que o paraciclo é necessariamente uma linha reta.

De acordo com Bonola (1912), quando seu amigo Szasz deixou Viena, J. Bolyai continuou seus estudos sozinho. Por volta de 1823, já havia percebido a natureza de seu real problema e tinha em suas mãos a fórmula que relacionava o ângulo de paralelismo⁵ com a sua respectiva linha, que mais tarde, viria a ser reconhecida como a equação chave de toda a trigonometria não euclidiana.

⁵ É o terceiro ângulo, em um triângulo retângulo com dois lados formados por retas assintóticas (o ângulo entre essas duas retas é nulo).

Certo da grandiosidade de sua descoberta e do longo caminho ainda a trilhar, J. Bolyai escreveu a seu pai, em 3/11/1823:

Agora, resolvi publicar um trabalho sobre a teoria das paralelas, assim que eu colocar o material em ordem e minhas circunstâncias permitirem. Eu ainda não o completei, mas o caminho que tenho seguido garante quase certo que esse objetivo será atingido, se é que isso é possível: ele ainda não foi alcançado, mas eu fiz descobertas tão maravilhosas que fui quase subjugado por elas, e seria motivo de lamento contínuo as mesmas estivessem sido perdidas. Quando você vê-las, também as reconhecerá. Enquanto isso, posso dizer apenas: *eu criei um novo Universo a partir do nada*. Tudo o que eu enviei a você até agora é apenas um castelo de cartas comparado à torre. Estou tão plenamente convencido de que isso me trará honra, como se eu já tivesse completado a descoberta⁶. (BONOLA, 1912, p.98, apud, tradução nossa)

O material produzido por J. Bolyai foi enviado a Gauss pela primeira vez em junho de 1831, mas não chegou a seu destino. Um segundo foi enviado em janeiro de 1832. Sete semanas depois, Gauss respondeu ao amigo F. Bolyai, sobre o trabalho de seu filho, J. Bolyai:

Se eu começasse dizendo que sou incapaz de elogiar este trabalho (de János), você certamente ficaria surpreso por um momento. Mas não posso dizer o contrário. Louvá-lo seria elogiar a mim mesmo. De fato, todo o conteúdo do trabalho, o caminho tomado por seu filho, os resultados para os quais ele é conduzido, coincidem quase inteiramente com minhas investigações, que ocuparam parte da minha mente nos últimos trinta ou trinta e cinco anos. Então, fiquei bastante estupefato. No que diz respeito ao meu próprio trabalho, do qual até agora coloquei pouco no papel, minha intenção não era publicá-lo durante minha vida. Na verdade, a maioria das pessoas não tem ideias claras sobre as questões de que estamos falando e eu encontrei muito poucas pessoas que poderiam considerar com especial interesse o que lhes comuniquei sobre isso. Para poder ter tal interesse, é necessário, antes de mais nada, dedicar cuidadosa atenção à natureza real do que é desejado e, sobre esse assunto, quase todos são incertos. Por outro lado, tive a ideia de escrever tudo isso mais tarde, para que pelo menos não percesse comigo. Portanto, é uma agradável surpresa eu ter sido poupado desse problema, e estou muito feliz por ser o filho do meu velho amigo que toma a precedência de maneira tão notável⁷. (BONOLA, 1912, p.100, apud, tradução nossa)

⁶ I have now resolved to publish a work on the theory of parallels, as soon as I shall have put the material in order, and my circumstances allow it. I have not yet completed this work, but the road which I have followed has made it almost certain that the goal will be attained, if that is at all possible: the goal is not yet reached, but I have made such wonderful discoveries that I have been almost overwhelmed by them, and it would be the cause of continual regret if they were lost. When you will see them, you too will recognize it. In the meantime I can say only this : *I have created a new universe from nothing*. All that I have sent (you till now is but a house of cards compared to the tower. I am as fully persuaded that it will bring me honour, as if I had already completed the discovery. (BONOLA, 1912, p.98)

⁷ If I commenced by saying that I am unable to praise this work (by JOHANN), you would certainly be surprised for a moment. But I cannot say otherwise. To praise it, would be to praise myself. Indeed the whole contents of the work, the path taken by your son, the results to which he is led, coincide almost entirely with my meditations, which have occupied my mind partly for the last thirty or thirty-five years. So I remained quite stupefied. So far as my own work is concerned, of which up till now I have put little on paper, my intention was not to let it be published during my lifetime. Indeed the majority of people have not clear ideas upon the questions of which we are speaking, and I have found very few people who could regard with any special interest what I communicated to them on this subject. To be able to take such an interest it is first of all necessary to have devoted careful thought to the real nature of what is wanted and upon this matter almost all are most uncertain. On the other hand it was my idea to write down all this later so that at least it should not perish with me. It is therefore a

Segundo Schreiber e Scriba (2015), F. Bolyai enviou o trabalho a Gauss contando que o mesmo aprovaria e defenderia a descoberta de seu filho publicamente, entretanto, *louvor e aprovação se seguiram, porém de uma maneira que deve ter ferido profundamente e decepcionado o já psiquicamente fraco J. Bolyai.*

Por conseguinte, F. Bolyai comunicou seu filho sobre a resposta de Gauss considerando-a satisfatória. Contudo, o efeito causado em J. Bolyai foi exatamente o oposto. Inclusive, ele suspeitou de que seu pai havia comunicado suas descobertas a Gauss antes da publicação do apêndice em *Tentamen* e que o mesmo cogitava reivindicar a descoberta da geometria não euclidiana para si. Mesmo percebendo que suas suspeitas não se verificaram, J. Bolyai permaneceu com uma aversão ao príncipe dos geômetras, segundo Bonola (1912), que ainda destaca os principais resultados decorrentes do trabalho de J. Bolyai:

- definição de linhas paralelas e verificação de suas propriedades, independentemente do 5º postulado;
- descrição do círculo e da esfera de raio infinito (a geometria da esfera de raio infinito é idêntica à geometria do plano);
- independência da trigonometria esférica em relação ao postulado das paralelas, incluindo a demonstração de suas fórmulas;
- trigonometria plana na geometria não euclidiana;
- aplicações no cálculo de áreas e volumes;
- resolução de problemas clássicos, como a quadratura do círculo, na hipótese do 5º postulado ser falso.

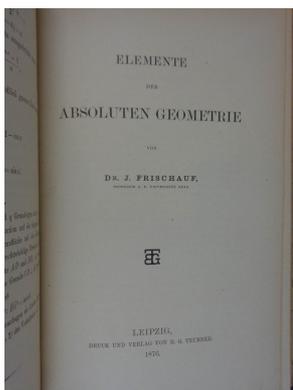
Depois de 1831, seus esforços seguiram na obtenção da solução dos seguintes problemas:

- descrever a conexão entre a trigonometria esférica e a trigonometria não euclidiana;
- provar rigorosamente o axioma das paralelas (não o fez) e
- calcular o volume de um tetraedro em geometrias não-euclidianas.

As ideias de J. Bolyai foram revividas no livro *Absolute Geometrie*, do matemático austríaco Johannes von Frischauf (1837 - 1924), praticamente uma tradução livre do apêndice de J. Bolyai, com o acréscimo das opiniões de F. Bolyai, segundo Bonola (1912). Uma edição nova e revisada foi lançada em 1876, abordando o trabalho de Lobachevsky e de outros autores que já haviam aprofundado suas investigações sobre o tema. Esse material permaneceu por muitos anos como o único livro em que as novas doutrinas do espaço foram registradas.

pleasant surprise for me that I am spared this trouble, and I am very glad that it is just the son of my old friend, who takes the precedence of me in such a remarkable manner. (BONOLA, 1912, p.100)

Figura 30 – Geometria absoluta, de Johannes von Frischauf



Fonte: (WIKIPEDIA, 2018d)

Selos húngaros foram emitidos pelos Correios *Húngaro Office* em homenagem a pai e filho Bolyai, assim como três ruas de Budapeste levam seus nomes. Entretanto, acredita-se não ser autêntica a foto de J. Bolyai (Figura 33).

Figura 31 – Selo húngaro de 1932, número 479, em homenagem a Farkas Bolyai



Fonte: (WIKIPEDIA, 2018i)

Figura 32 – Selo húngaro de 1975, número 2347, em homenagem a Farkas Bolyai



Fonte: (WIKIPEDIA, 2018j)

Figura 33 – Selo húngaro em comemoração ao centenário da morte de János Bolyai



Fonte: (WIKIPEDIA, 2018k)

De acordo com Schreiber e Scriba (2015), aos poucos surgia uma nova argumentação para o equívoco na interpretação do 5º postulado, baseada nas propriedades locais dos primeiros axiomas de Euclides, os quais não poderiam justificar o axioma das paralelas, que enunciava uma propriedade global do plano. Para J. Bolyai, era cada vez mais significativo encontrar alguma contradição baseada na negação do quinto postulado. Ele acabou por descobrir que as geometrias não euclidianas dependiam de uma constante (hoje mais conhecida por *curvatura*) e de proporções que se aproximam arbitrariamente das proporções euclidianas, com tal constante suficientemente pequena.

Observação 4.2. Ressaltemos que os axiomas e postulados de Euclides abordavam, de forma geral, propriedades locais dos elementos geométricos, enquanto o quinto postulado apresentava uma propriedade global do plano, gerando assim, toda a dificuldade de sua equivocada prova a partir dos demais.

As contribuições dos Bolyai permaneceram no esquecimento por mais de 35 anos, até a divulgação do trabalho desenvolvido pelo matemático alemão Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826 - 1866), acendendo novamente o interesse da comunidade científica sobre as questões relativas às hipóteses fundamentais da geometria e com profundas consequências para a descrição matemática do espaço.

4.3 LOBACHEVSKY E A PANGOMETRIA

Em 1932, de maneira independente e quase simultânea, Lobachevsky e J. Bolyai apresentaram uma nova abordagem sobre geometria (futuramente denominada de *hiperbólica*), que enfim, fora reconhecida oficialmente pela primeira vez. Ambos dedicaram quase toda sua vida a estudar esse assunto e chegaram à mesma conclusão: se o postulado das paralelas fosse substituído pela segunda parte de sua negação, o modelo resultante não apresentaria contradições.

Lobachevsky estudou Matemática na Universidade de Kasan sob os cuidados do alemão J. M. C. Bartels (1769 - 1836), amigo e compatriota de Gauss. Concluiu sua graduação em 1813 e permaneceu ali, primeiramente como professor substituto e depois, como titular. Lecionou sobre Matemática em todos os seus ramos e também sobre Física e Astronomia.

Figura 34 – Nikolai Ivanovich Lobachevsky (1792-1856)



Fonte: (PINTEREST, 2018)

Entre os anos de 1823 e 1825, Lobachevsky se dedicou a estudar uma geometria diferente daquela apresentada por Euclides, originando uma de suas mais conhecidas palestras, no setor de Matemática e Física da Universidade de Kasan, em 1826. Ele explicou os princípios de uma geometria mais geral, na qual duas paralelas a uma linha dada podem ser traçadas a partir de um mesmo ponto e onde a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é menor do que a soma das medidas de dois ângulos retos. No período de 1829 e 1830, publicou uma obra sobre os princípios da geometria, abordando pontos específicos dessa palestra. Outras publicações foram feitas até 1840. Ele nunca desistiu de defender a teoria das paralelas, que acreditou ser verdadeira por toda sua vida. Somente após 1823, pensou na possibilidade da geometria imaginária. Isso pode, ainda segundo Bonola (1912), ter inferido no seu manuscrito para o livro sobre geometria elementar, onde destacava não possuir qualquer prova do 5º postulado, mas que a mesma era possível de ser detalhada.

Novos princípios da geometria foram surgindo e finalmente, em 1855, um ano antes de sua morte, quando já estava cego, Lobachevsky ditou e publicou uma exposição completa de seu sistema de geometria, a *Pangeometrie*, em russo e francês. Sua obra foi publicada em 1856, na França e, em 1867, na Itália.

De acordo com Bonola (1912), a *pangeometria* é uma ciência lógico-dedutiva fundamentada nas 28 proposições de Euclides sobre a negação do 5º postulado, com resultados decorrentes logicamente um do outro e livres de contradições internas. Como também, sua base é a mais geral possível das geometrias, não dependendo da suposição, por exemplo, de que a soma dos ângulos internos de um triângulo plano seja igual a soma de dois ângulos retos. Vale ressaltar ainda, que a geometria de Taurinus é idêntica à geometria imaginária de Lobachevsky.

Nesta época, a Matemática era estudada juntamente com a Filosofia e os futuros educadores matemáticos tinham uma significativa formação em ambas. Eram notórias as contribuições e os posicionamentos de filósofos, tais como as do prussiano Immanuel Kant (1724-1804), em sua obra *Crítica da razão pura*, de 1781. Segundo Schreiber e Scriba (2015), Kant afirmava que *a geometria euclidiana era tão necessária quanto a noção de números naturais, a priori, dada antes de tudo*, justificando a relutância de tantos matemáticos em reconhecer as inovadoras visões de mundos que surgiam ao se questionar a veracidade absoluta da geometria euclidiana. Em carta a Taurinus, Gauss afirmou:

Todos os meus esforços para encontrar uma contradição, uma incoerência nessa geometria não euclideana têm sido em vão e a única coisa que permanece em minha mente é que deveria haver uma certa magnitude linear especial (embora desconhecida para nós) no espaço, se isso fosse verdade⁸. (SCHREIBER, 2015, p.429, apud, tradução nossa)

A principal diferença entre Lobachevsky e Bolyai estava na ideia da constante e do desvio em relação ao plano, o qual não pode ser percebido em um espaço de pouca curvatura. Enquanto Lobachevsky procurou descrever um sistema de geometria com base na negação do 5º postulado de Euclides, J. Bolyai deteve-se na dependência ou não dos teoremas da geometria em relação ao postulado das paralelas, referindo-se à *ciência absoluta do espaço*.

⁸ All my efforts at finding a contradiction, an inconsequence in this non-Euclidean geometry have been fruitless and the only thing that resists our mind is that there would have to be a certain special linear magnitude (although unknown to us) in space, if it was true. (SCHREIBER, 2015, p.429)

5 A INTEGRAÇÃO ENTRE GEOMETRIA E CÁLCULO

Nos primeiros quarenta anos de sua história, o campo da geometria não euclidiana existia em uma espécie de limbo, divorciado do resto da matemática e sem qualquer fundamentação consistente. Entretanto, a teoria das superfícies curvas de Gauss (1827) e a teoria das variedades n-dimensionais de Riemann (1868), forneceram uma maneira de integrar a geometria não euclidiana em ramos mais respeitáveis da matemática¹. (MILNOR, 1982, p.10, tradução nossa)

Concomitantemente com as novas ideias da geometria não euclidiana que surgiam ao longo dos tempos, emergiam também importantes considerações a respeito do cálculo diferencial e integral de Isaac Newton (1643 - 1727) e Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 - 1716). O vínculo entre essas duas grandes áreas do conhecimento possibilitou o surgimento da *geometria diferencial*.

Em meados do século XVII, conforme Manfredo (2012), o desenvolvimento do cálculo contribuiu significativamente para os avanços da geometria, e teve muitas aplicações na física e na cartografia.

Durante o século XVIII, foram apresentados os fundamentos da teoria de curvas e superfícies no espaço tridimensional. Em 1731, o matemático francês Alexis Clairaut (1713-1765) estudou as propriedades descritas pelas derivadas primeiras em relação a tais curvas. Por volta de 1775, o também matemático francês Gaspard Monge (1746 - 1818), analisou os conceitos de curvatura e de torção.

Relacionando curvas e superfícies, surgia naturalmente um novo problema, o das *geodésicas*. Mais do que a necessidade de demonstrar a existência de um caminho geodésico, era preciso conseguir descrever a caracterização geométrica da curva que teria essa propriedade, o que foi inicialmente realizado, entre outros, pelos irmãos matemáticos suíços Jacob Bernoulli (1654-1705) e Johannes Bernoulli (1667-1748).

A linguagem que conhecemos atualmente sobre o estudo de curvas e superfícies remonta ao século XIX, iniciada por Gauss, em sua obra *Disquisitiones generales circa superficies curvas*, de 1828². Dentre os principais teoremas enunciados, temos o seu famoso *Egregium*, abordando importantes propriedades das superfícies.

Até então, a geometria diferencial era vista de uma maneira extrínseca, considerando superfícies inseridas em um espaço euclidiano de dimensão maior, por exemplo, um plano em um espaço tridimensional. Com as considerações de Riemann, principalmente após sua

¹ For the first forty years or so of its history, the field of non-euclidean geometry existed in a kind of limbo, divorced from the rest of mathematics, and without any firm foundation. However, Gauss' theory of curved surfaces (1827), and Riemann's theory of higher dimensional curved manifolds (1868) provided a way of integrating non-euclidean geometry into more respectable branches of mathematics. (MILNOR, 1982, p.10)

² Époqa em que estava para ser provada a independência do postulado das paralelas em relação aos demais.

publicação de 1854, sobre *As hipóteses pelas quais se baseiam os fundamentos da geometria*, a maneira intrínseca de se tratar a geometria foi desenvolvida, na qual não se pode sair do objeto geométrico propriamente dito. Por conseguinte, Riemann estendeu toda a teoria de Gauss para espaços de dimensões superiores, introduzindo o conceito de *métrica*, na qual pontos do espaço são associados a uma forma quadrática, o que conhecemos hoje em dia por *geometria riemanniana*. A partir dessas métricas, por exemplo, Riemann definiu *geodésicas* como as curvas que minimizam localmente distâncias entre pontos.

Hoje, podemos afirmar que a computação gráfica possibilita uma maior acessibilidade das aplicações das equações diferenciais parciais em questões geométricas ao público em geral, tanto na área científica quanto em diversas outras, fornecendo resultados ao desenvolvimento de novas tecnologias e produtos inovadores.

Para compreendermos as contribuições de Eugenio Beltrami às geometrias não euclidianas e contextualizarmos os modelos desenvolvidos por ele no campo geral da Matemática, precisaremos fazer uma breve introdução sobre alguns conceitos da geometria diferencial.

5.1 CURVAS DIFERENCIÁVEIS

Podemos afirmar que o estudo sistemático das superfícies curvas em um espaço começou com o livro do matemático e físico suíço Leonhard Paul Euler (1707 - 1783), sobre cálculo diferencial, publicado em dois volumes no ano de 1755, continuando na forma de investigações individuais entre 1760 e 1767. As definições e exemplos que serão apresentados foram tomados por base no livro *Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies*, de Carmo (2012).

Definição 5.1. *Uma curva diferenciável parametrizada é uma função diferenciável $\lambda : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, com um intervalo aberto $I = (a, b)$ da reta real \mathbb{R} em \mathbb{R}^3 .*

Observação 5.2. O termo *diferenciável* significa que existe a correspondência

$$\lambda(t) = (x(t), y(t), z(t)),$$

com $\lambda(t) \in \mathbb{R}^3$, sendo $t \in I$ e as funções $x(t)$, $y(t)$ e $z(t)$ diferenciáveis. A variável t é chamada de *parâmetro* da curva e o intervalo I pode ser (a, b) , com $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$; $(-\infty, a)$, (a, ∞) ou $(-\infty, \infty)$.

Observação 5.3. A primeira derivada de $x(t)$ será denotada por $x'(t)$ em um ponto t e o mesmo será aplicado para as funções y e z , sendo $\lambda'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t)) \in \mathbb{R}^3$ chamado de *vetor tangente* ou *vetor velocidade* da curva $\lambda(t)$ em t . A imagem $\lambda(I) \subset \mathbb{R}^3$ é denominada *traço* da curva λ .

Observação 5.4. Notemos que cada parametrização traduz uma velocidade com que a curva é percorrida, isto é, embora a curva seja a mesma, existem infinitas e distintas parametrizações.

Exemplo 5.5. A curva diferenciável λ , representada na Figura 35 e dada por

$$\lambda(t) = (3 \cos t, 3 \sin t, 2t), t \in \mathbb{R},$$

é uma parametrização de uma hélice no cilindro $x^2 + y^2 = 9$, pois

$$(x(t))^2 + (y(t))^2 = (3 \cos t)^2 + (3 \sin t)^2 = 9 \cos^2 t + 9 \sin^2 t = 9.$$

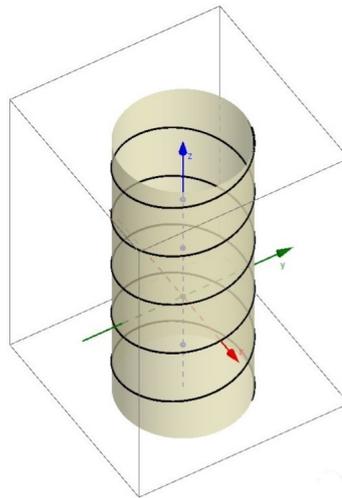
Observação 5.6. Notemos que as funções λ_1 e λ_2 , dadas por

$$\lambda_1(t) = (3 \cos 6t, 3 \sin 6t, 12t), t \in \mathbb{R},$$

$$\lambda_2(t) = (3 \cos (\ln t), 3 \sin (\ln t), 2 \ln t), t \in (0, \infty),$$

também são parametrizações de λ , mas com velocidades distintas.

Figura 35 – Traço de $\lambda(t) = (3 \cos t, 3 \sin t, 2t), t \in \mathbb{R}$

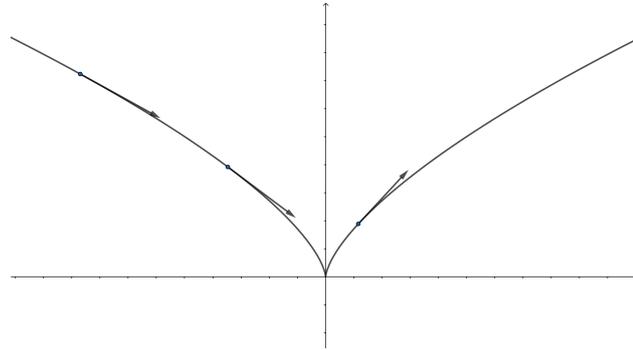


Fonte: (CARMO, 2012, p.3)

Exemplo 5.7. A função $\lambda : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $\lambda(t) = (t^3, t^2)$, $t \in \mathbb{R}$ é uma curva diferenciável parametrizada com $\lambda'(t) = (3t^2, 2t)$. Desse modo, temos $\lambda'(2) = (12, 4)$ e $\lambda(-2) = (-8, 4)$ e um esboço do traço de λ pode ser feito, conforme Figura 36. Vejamos que a parametrização apresenta, em $t = 0$, a primeira derivada nula, ou seja, $\lambda'(0) = (0, 0)$. E, apesar de t^3 e t^2 serem diferenciáveis, a curva apresenta uma "quina" em $(0, 0)$.

É importante frisarmos que as curvas consideradas aqui, no escopo do presente trabalho, conterão apenas *pontos não singulares*, isto é, pontos com a primeira derivada não nula, garantindo a existência de uma reta tangente à curva em todos os seus pontos.

Definição 5.8. Uma curva diferenciável parametrizada $\lambda : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ é dita **regular** se $\lambda'(t) \neq 0$, $\forall t \in I$.

Figura 36 – Traço de $\lambda(t) = (t^3, t^2)$ 

Fonte: (CARMO, 2012, p.3)

Na exploração das propriedades inerentes às curvas, algumas questões são fundamentais:

- Qual a medida do comprimento da curva?
- Qual a medida do ângulo formado entre duas curvas?
- Quão rápido a curva muda de direção?

Vejamos mais explicitamente cada uma delas.

1. O comprimento de arco de uma curva $\lambda : I \rightarrow \mathbb{R}^3$, no intervalo $[\tilde{a}, \tilde{b}] \subset I = (a, b)$, por definição, é

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\lambda[\tilde{a}, \tilde{b}]) &= \int_{\tilde{a}}^{\tilde{b}} \|\lambda'(t)\| dt \\ &= \int_{\tilde{a}}^{\tilde{b}} \sqrt{\langle \lambda'(t), \lambda'(t) \rangle} dt \\ &= \int_{\tilde{a}}^{\tilde{b}} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt \end{aligned}$$

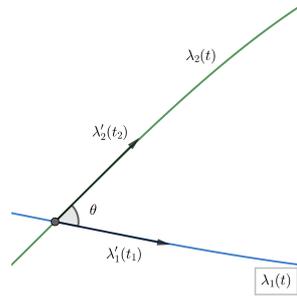
2. Para duas curvas parametrizadas $\lambda_1(t)$ e $\lambda_2(t)$, com interseção no ponto $\lambda_1(t_1) = \lambda_2(t_2)$, o ângulo θ (Figura 37) entre as curvas é o ângulo formado entre os vetores tangentes às curvas naquele mesmo ponto e pode ser calculado por

$$\theta = \arccos \left(\frac{\langle \lambda'_1(t_1), \lambda'_2(t_2) \rangle}{\|\lambda'_1(t_1)\| \|\lambda'_2(t_2)\|} \right),$$

visto que $\langle \lambda'_1(t_1), \lambda'_2(t_2) \rangle = \|\lambda'_1(t_1)\| \|\lambda'_2(t_2)\| \cos \theta$.

3. A rapidez com que uma curva muda de direção é determinada pela segunda derivada em cada um de seus pontos. Contudo, a segunda derivada depende da parametrização considerada, diferentemente dos itens anteriores.

Figura 37 – Ângulo formado entre duas curvas



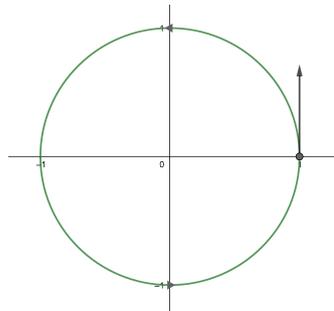
Fonte: Autoria própria

Considerando que cada curva admite infinitas parametrizações, nos restringiremos a uma parametrização em especial: àquela pelo comprimento de arco, na qual $\|\lambda'(t)\| = 1$, apenas possível para curvas regulares, garantindo que a velocidade mantenha-se constante e seja unitária.

Exemplo 5.9. Uma parametrização pelo comprimento de arco para a circunferência de raio 1, centrada na origem do sistema de coordenadas, é dada por

$$\lambda(t) = (\cos t, \sin t),$$

pois $\lambda'(t) = (-\sin t, \cos t)$ e $\|\lambda'(t)\| = \sqrt{(-\sin t)^2 + \cos^2 t} = 1$.

Figura 38 – $\lambda(t) = (\cos t, \sin t)$ 

Fonte: Autoria Própria

Exemplo 5.10. Para $\lambda(t) = (3 \cos t, 3 \sin t)$, teremos $\|\lambda'(t)\| = 3$. Fazemos então, $t = \frac{t'}{3}$ e ficaremos com $\|\lambda'(\frac{t'}{3})\| = 1$, obtendo uma parametrização pelo comprimento de arco para a circunferência de raio 3.

$$\lambda(t) = \lambda(t'/3) = \left(3 \cos \left(\frac{t'}{3} \right), 3 \sin \left(\frac{t'}{3} \right) \right),$$

pois $\lambda'(t'/3) = \left(-3 \sin \left(\frac{t'}{3} \right) \frac{1}{3}, 3 \cos \left(\frac{t'}{3} \right) \frac{1}{3} \right) = \left(-\sin \left(\frac{t'}{3} \right), \cos \left(\frac{t'}{3} \right) \right)$ e

$$\|\lambda'(t'/3)\| = \sqrt{\sin^2 \left(\frac{t'}{3} \right) + \cos^2 \left(\frac{t'}{3} \right)} = 1.$$

Algumas parametrizações requerem um pouco mais de cuidado para serem adaptadas de tal modo a garantirem àquela pelo comprimento de arco. Vejamos um exemplo:

Exemplo 5.11. Seja a parametrização de uma hélice dada por

$$\lambda(t) = (3 \cos t, 3 \sin t, 2t),$$

com $\lambda'(t) = (-3 \sin t, 3 \cos t, 2)$ e $\|\lambda'(t)\|^2 = 9 \sin^2 t + 9 \cos^2 t + 4 = 13$. Uma parametrização fora do parâmetro estabelecido. Como proceder para determinar a parametrização esperada, com norma igual a 1? Primeiramente, investiguemos se conhecemos alguma primitiva de $\|\lambda'(t)\|$.

$$s(t) = \int_0^t \|\lambda'(t)\| dt = \int_0^t \sqrt{13} dt = \sqrt{13}t \Rightarrow t = \frac{s}{\sqrt{13}}.$$

Assim,

$$\gamma(s) = \gamma(t(s)) = \left(3 \cos \left(\frac{s}{\sqrt{13}} \right), 3 \sin \left(\frac{s}{\sqrt{13}} \right), 2 \frac{s}{\sqrt{13}} \right)$$

e

$$\gamma'(s) = \frac{1}{\sqrt{13}} \left(-3 \sin \left(\frac{s}{\sqrt{13}} \right), 3 \cos \left(\frac{s}{\sqrt{13}} \right), 2 \right);$$

com norma igual a 1. A validade deste procedimento está em $\gamma'(s) = \frac{d}{ds}(\gamma(t(s))) = \gamma'(t)t'(s) = \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}$, pois $s'(t) = \|\gamma'(t)\|$ e $t = s^{-1}$, garantido pelo teorema da função inversa.

Definição 5.12. Seja $\lambda : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva parametrizada pelo comprimento de arco s . O número $\|\lambda''(s)\| = k(s)$ denomina-se **curvatura** de λ em $\lambda(s)$.

Exemplo 5.13. Consideremos $\lambda(t) = (\cos t, \sin t, t)$. Sua primeira derivada será dada por $\lambda'(t) = (-\sin t, \cos t, 1)$ e $\|\lambda'(t)\| = \sqrt{2}$. Como mencionado no exemplo anterior, calculemos sua primitiva: $s(t) = \int_0^t \sqrt{2} dt = \sqrt{2}t \Rightarrow t = \frac{s}{\sqrt{2}}$. Com isso, a parametrização pelo comprimento de arco é $\delta(s) = \left(\cos \left(\frac{s}{\sqrt{2}} \right), \sin \left(\frac{s}{\sqrt{2}} \right), \frac{s}{\sqrt{2}} \right)$. A curvatura de δ em s é o número $k(s) = \|\delta''(s)\|$, ou seja, $\delta''(s) = \left(-\frac{\cos s}{2}, -\frac{\sin s}{2}, 0 \right)$ e $\|\delta''(s)\| = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$.

Definição 5.14. Seja a função $\lambda : (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}^2$ determinada por

$$\lambda(t) = \left(\sin t, \cos t + \log tg \frac{t}{2} \right),$$

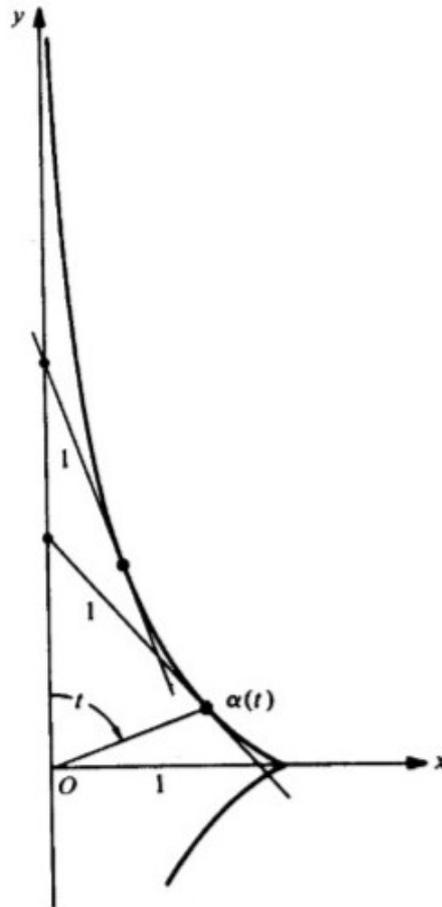
com t sendo o ângulo que o vetor $\lambda'(t)$ forma com o eixo Oy . O traço de λ é chamado de **tractriz**.

Observação 5.15. A tractriz é a curva obtida mecanicamente ao se arrastar um objeto preso a uma corda com a extremidade livre, movendo-o sobre uma reta. Porém, foge do escopo desse trabalho demonstrar tal fato.

Exemplo 5.16. Vejamos a parametrização do ramo superior da tractriz, não realizada pelo comprimento de arco. Seja $\lambda : \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}^2$, com

$$\lambda(t) = \left(\sin t, \cos t + \log tg \frac{t}{2} \right).$$

Figura 39 – Obtenção de uma tractriz



Fonte: (CARMO, 2012, p.9)

Sua primeira derivada é:

$$\begin{aligned}\lambda'(t) &= \left(\cos t, -\operatorname{sen} t + \frac{1}{2 \cos^2(\frac{t}{2}) \frac{\operatorname{sen}(\frac{t}{2})}{\cos(\frac{t}{2})}} \right) \\ &= \left(\cos t, -\operatorname{sen} t + \frac{1}{2 \cos(\frac{t}{2}) \operatorname{sen}(\frac{t}{2})} \right) \\ &= \left(\cos t, \frac{-\operatorname{sen}^2 t + 1}{\operatorname{sen} t} \right) = \left(\cos t, \frac{\cos^2 t}{\operatorname{sen} t} \right).\end{aligned}$$

E, conseqüentemente, temos a norma:

$$\begin{aligned}\|\lambda'(t)\| &= \sqrt{\cos^2 t + \left(\frac{\cos^2 t}{\operatorname{sen} t}\right)^2} = \sqrt{\cos^2 t + \frac{\cos^4 t}{\operatorname{sen}^2 t}} \\ &= \sqrt{\frac{\cos^2 t}{\operatorname{sen}^2 t} (\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t)} = \left| \frac{\cos t}{\operatorname{sen} t} \right| \neq 1.\end{aligned}$$

Parametrizar uma curva pelo comprimento de arco evita confundirmos propriedades da curva com propriedades da parametrização. Mas, nem sempre, é uma tarefa fácil. Nesses casos, apliquemos o exposto na próxima observação.

Observação 5.17. A curvatura para uma parametrização qualquer é dada por³:

$$k(s) = \left| \frac{x'y'' - x''y'}{((x')^2 + (y')^2)^{\frac{3}{2}}} \right|.$$

Exemplo 5.18. Calculemos a curvatura k do ramo superior s da tractriz.

Sendo $x(s) = \text{sen } s$, $x'(s) = \text{cos } s$, $x''(s) = -\text{sen } s$, assim como $y(s) = \text{cos } s + \log \text{tg} \frac{s}{2}$, $y'(s) = \frac{\text{cos}^2 s}{\text{sen } s}$ e $y''(s) = -\text{cos } s - \frac{\text{cos } s}{\text{sen}^2 s}$. Assim, a curvatura será:

$$k(s) = \left| \frac{-\text{cos}^2 s - \frac{\text{cos}^2 s}{\text{sen}^2 s} + \text{cos}^2 s}{\left(\text{cos}^2 s + \frac{\text{cos}^4 s}{\text{sen}^2 s}\right)^{\frac{3}{4}}} \right| = \left| \frac{-\frac{\text{cos}^2 s}{\text{sen}^2 s}}{\frac{\text{cos}^3 s}{\text{sen}^3 s}} \right| = |\text{tg } s|.$$

No intervalo considerado, $k(s) = \text{tg } s$.

Exemplo 5.19. A circunferência de raio R , $\lambda(t) = (R \text{cos } t, R \text{sen } t)$, possui curvatura igual a $\frac{1}{R}$, pois $x(t) = R \text{cos } t$, $x'(t) = -R \text{sen } t$, $x''(t) = -R \text{cos } t$, $y(t) = R \text{sen } t$, $y'(t) = R \text{cos } t$ e $y''(t) = -R \text{sen } t$. Portanto,

$$\begin{aligned} k(t) &= \left| \frac{-R \text{sen } t(-R \text{sen } t) + R \text{cos } t R \text{cos } t}{(R^2 \text{sen}^2 t + R^2 \text{cos}^2 t)^{\frac{3}{2}}} \right| \\ &= \left| \frac{R^2 \text{sen}^2 t + R^2 \text{cos}^2 t}{R^2 (\text{sen}^2 t + \text{cos}^2 t)^{\frac{3}{2}}} \right| = \left| \frac{R^2 (\text{sen}^2 t + \text{cos}^2 t)}{(R^2)^{\frac{3}{2}}} \right| \\ &= \left| \frac{R^2}{R^3} \right| = \frac{1}{R}. \end{aligned}$$

Logo, a curvatura de um círculo é inversamente proporcional à medida de seu raio.

5.2 SUPERFÍCIES E CURVATURAS

O cálculo diferencial é desenvolvido para funções definidas em intervalos da reta e conjuntos abertos de \mathbb{R}^n . Para utilizarmos efetivamente suas ferramentas em superfícies, precisaremos que as mesmas possam ser mapeadas por conjuntos abertos do plano. Assim, restringiremos nosso estudo às superfícies que admitam mapas adequados no plano; para isso é necessário que o mapa (a aplicação que mapeia o plano na superfície) possua derivadas em todas as direções (1.), admita inversa (2.) e não degenere regiões do plano em curvas da superfície (3.).

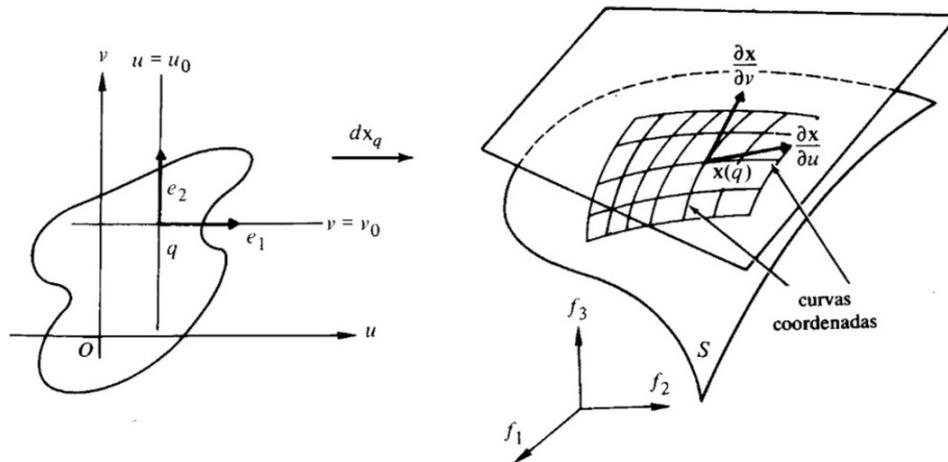
Definição 5.20. Um subconjunto $S \subset \mathbb{R}^3$ é uma **superfície regular** se, para cada $p \in S$, existe uma vizinhança V de p em \mathbb{R}^3 e uma aplicação $\vec{X} : U \rightarrow V \cap S$ de um aberto U de \mathbb{R}^2 sobre $V \cap S \subset \mathbb{R}^3$ tal que,

³ Não faz parte dos objetivos desse trabalho demonstrar tal fórmula. Sua prova pode ser encontrada no exercício 12, da seção 1.5 de Carmo (2012).

1. \vec{X} é diferenciável, isto é, $\vec{X}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$, sendo $(u, v) \in U$ e as funções $x(u, v)$, $y(u, v)$ e $z(u, v)$ possuem derivadas parciais contínuas de todas as ordens em U .
2. \vec{X} admite uma inversa $\vec{X}^{-1} : V \cap S \rightarrow U$ contínua.
3. Para todo $q \in U$, a diferencial $d\vec{X}_q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é injetiva e na base canônica é dada por:

$$d\vec{X}_q = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix}.$$

Figura 40 – Superfície regular



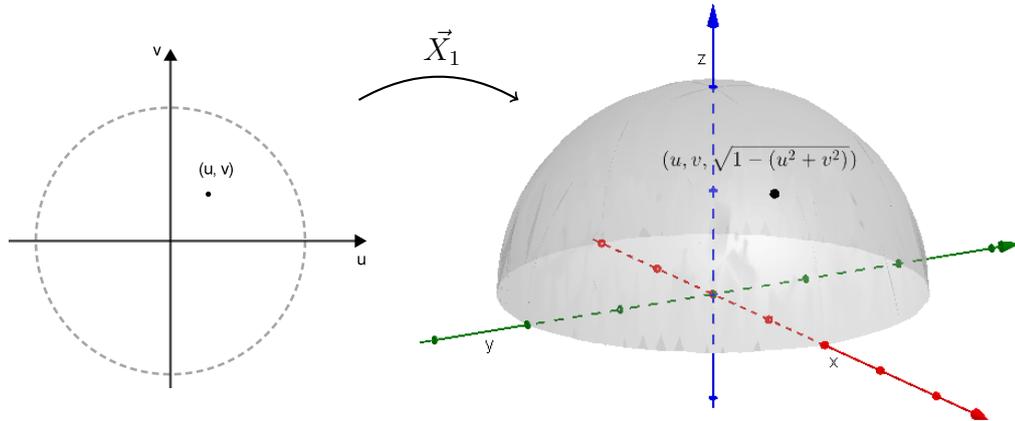
Fonte: (CARMO, 2012, p.63)

Observação 5.21. A aplicação \vec{X} é dita uma **parametrização** ou um **sistema de coordenadas locais** em (uma vizinhança de) p . A vizinhança $V \cap S$ de p em S é chamada de **vizinhança coordenada**.

Exemplo 5.22. Verifiquemos que a esfera de raio 1 dada por $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ é uma superfície regular. Para tanto, observemos que $\vec{X}_1(u, v) = (u, v, \sqrt{1 - (u^2 + v^2)})$ é uma bijeção de U em $S \cap V_1$, com $X_1^{-1}(x, y, z) = (x, y)$ para qualquer $(x, y, z) \in S \cap V_1$ e, portanto, contínua (Figura 41). Como também,

$$d\vec{X}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{-u}{\sqrt{1-(u^2+v^2)}} & \frac{-v}{\sqrt{1-(u^2+v^2)}} \end{pmatrix}$$

Figura 41 – \vec{X}_1 é uma bijeção de U em $S \cap V_1$



Fonte: Autoria própria

é injetiva, visto que suas colunas $\frac{\partial \vec{x}_1}{\partial u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{-u}{\sqrt{1-(u^2+v^2)}} \end{pmatrix}$ e $\frac{\partial \vec{x}_1}{\partial v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{-v}{\sqrt{1-(u^2+v^2)}} \end{pmatrix}$ são linearmente independentes, o que pode ser verificado calculando-se o produto vetorial

$$\frac{\partial \vec{x}_1}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{x}_1}{\partial v} = \begin{pmatrix} \frac{u}{\sqrt{1-(u^2+v^2)}} \\ \frac{v}{\sqrt{1-(u^2+v^2)}} \\ 1 \end{pmatrix} \neq 0.$$

De modo análogo, definimos as seguintes parametrizações a fim de cobrir inteiramente S^2 e provarmos sua regularidade (Figura 42):

$$\vec{X}_2(u, v) = (u, v, -\sqrt{1 - (u^2 + v^2)});$$

$$\vec{X}_3(u, v) = (u, \sqrt{1 - (u^2 + v^2)}, v);$$

$$\vec{X}_4(u, v) = (u, -\sqrt{1 - (u^2 + v^2)}, v);$$

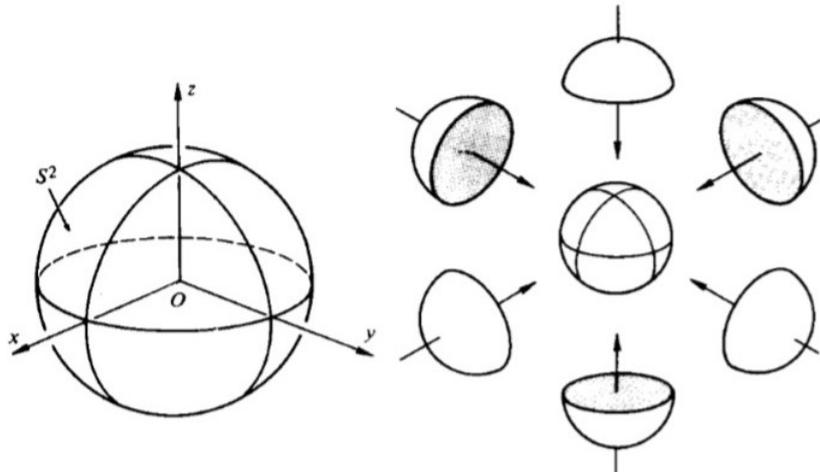
$$\vec{X}_5(u, v) = (\sqrt{1 - (u^2 + v^2)}, u, v);$$

$$\vec{X}_6(u, v) = (-\sqrt{1 - (u^2 + v^2)}, u, v).$$

Exemplo 5.23. Podemos parametrizar a esfera pelo mapa $\vec{X}(\theta, \varphi) = (\text{sen } \varphi \cos \theta, \text{sen } \varphi \text{sen } \theta, \cos \varphi)$, que é uma bijeção do conjunto aberto $U = \{(\theta, \varphi) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < \theta < 2\pi, 0 < \varphi < \pi\}$ no conjunto aberto $V \cap S^2$, da esfera S^2 , com $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y \neq 0 \vee x < 0\}$.

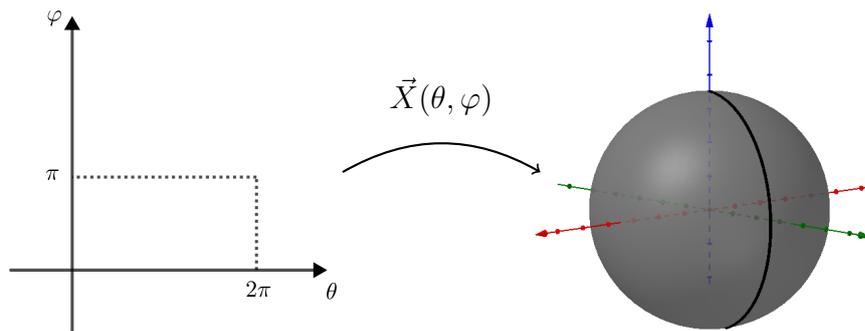
Notemos que $0 < \varphi < \pi$ e sendo $\text{sen } \varphi \neq 0$, a diferencial dessa aplicação é injetiva.

$$d\vec{X} = \begin{pmatrix} -\text{sen } \varphi \text{sen } \theta & \cos \varphi \cos \theta \\ \text{sen } \varphi \cos \theta & \cos \varphi \text{sen } \theta \\ 0 & \text{sen } \varphi \end{pmatrix}.$$

Figura 42 – S^2 é uma superfície regular

Fonte: (CARMO, 2012, p.65)

Figura 43 – Um dos mapas baseados nas coordenadas esféricas



Fonte: Autoria própria

Analogamente, podemos definir outro mapa de forma a cobrir toda a superfície esférica, deixando a outra metade do equador de fora.

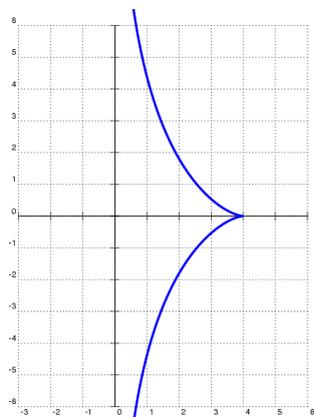
Uma superfície muito importante na história das geometrias não euclidianas é a *tractoide*, mais conhecida atualmente por *pseudo-esfera*.

Exemplo 5.24. A *tractoide* é uma superfície obtida pela revolução da tractriz em torno de sua reta assíntota. Considerando apenas seu ramo superior, temos:

$$r(\theta, t) = \left(R \operatorname{sen} t \cos \theta, R \operatorname{sen} t \operatorname{sen} \theta, R \left(\cos t + \ln \operatorname{tg} \frac{t}{2} \right) \right)$$

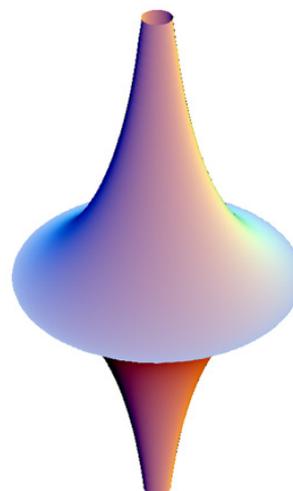
A parametrização obtida pela projeção do ramo superior da tractroide em um disco de raio R é dada por $r(u, v) = \left(u, v, R \sqrt{\frac{R^2 - u^2 - v^2}{R^2}} + R \left(\ln \frac{\sqrt{u^2 + v^2}}{R + \sqrt{R^2 - u^2 - v^2}} \right) \right)$.

Figura 44 – Tractriz e a tractroide



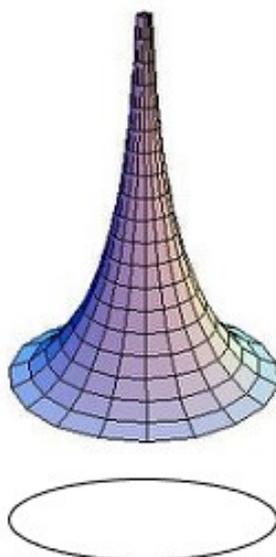
Fonte: (COMMONS, 2019d)

Figura 45 – Pseudo-esfera



Fonte: (COMMONS, 2019c)

Figura 46 – Projeção no disco do ramo superior da pseudo-esfera



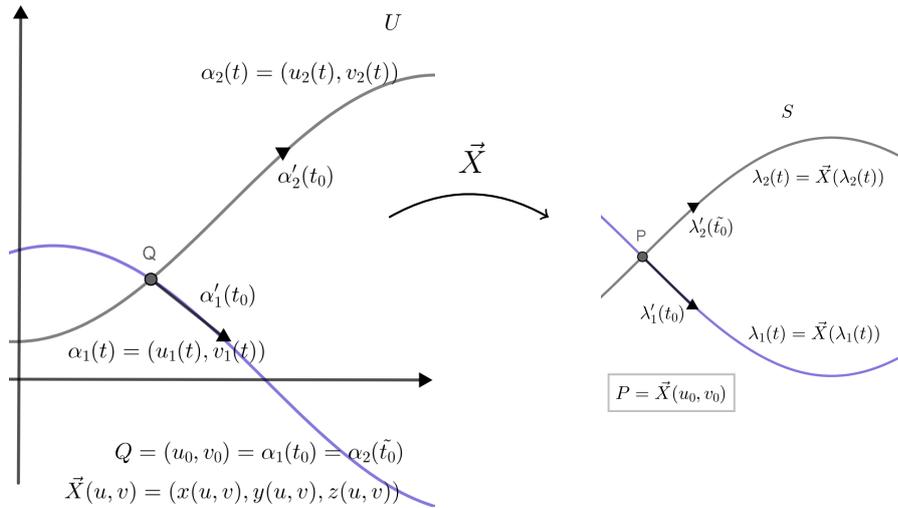
Fonte: (WIKIPEDIA, 2011)

5.3 CÁLCULO USANDO MAPAS

Sejam $\vec{X} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$, $\vec{X}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$, uma parametrização da superfície S ; α_1 e α_2 duas curvas de U com interseção em Q ; além de λ_1 e λ_2 , suas respectivas imagens em S , dadas por \vec{X} :

$$\lambda_1(t) = \vec{X}(\alpha_1(t)), \lambda_2(t) = \vec{X}(\alpha_2(t)),$$

$$P = \vec{X}(u_0, v_0) \text{ e } Q = (u_0, v_0) = \alpha_1(t_0) = \alpha_2(\tilde{t}_0).$$

Figura 47 – $\vec{X} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ 

Fonte: Autoria própria

Assim,

$$\begin{aligned} \lambda'_1(t_0) &= \frac{d}{dt}(\vec{X}(\alpha_1))(t_0) \\ &= \frac{d}{dt}(x(u_1(t), v_1(t)), y(u_1(t), v_1(t)), z(u_1(t), v_1(t)))(t_0) \\ &= \left(\frac{\partial x}{\partial u}(Q)u'_1(t_0) + \frac{\partial x}{\partial v}(Q)v'_1(t_0), \frac{\partial y}{\partial u}(Q)u'_1(t_0) + \frac{\partial y}{\partial v}(Q)v'_1(t_0), \right. \\ &\quad \left. \frac{\partial z}{\partial u}(Q)u'_1(t_0) + \frac{\partial z}{\partial v}(Q)v'_1(t_0) \right) \\ \lambda'_1(t_0) &= u'_1(t_0)\vec{X}_u(Q) + v'_1(t_0)\vec{X}_v(Q) \\ \lambda'_2(\tilde{t}_0) &= u'_2(\tilde{t}_0)\vec{X}_u(Q) + v'_2(\tilde{t}_0)\vec{X}_v(Q). \end{aligned}$$

De modo que,

$$\begin{aligned} \langle \lambda'_1(t_0), \lambda'_2(\tilde{t}_0) \rangle &= \langle u'_1(t_0)\vec{X}_u(Q) + v'_1(t_0)\vec{X}_v(Q) \\ &= u'_1(t_0)u'_2(\tilde{t}_0)\langle \vec{X}_u(Q), \vec{X}_u(Q) \rangle + u'_1(t_0)v'_2(\tilde{t}_0)\langle \vec{X}_u(Q), \vec{X}_v(Q) \rangle \\ &\quad + v'_1(t_0)u'_2(\tilde{t}_0)\langle \vec{X}_v(Q), \vec{X}_u(Q) \rangle + v'_1(t_0)v'_2(\tilde{t}_0)\langle \vec{X}_v(Q), \vec{X}_v(Q) \rangle \\ &= (u'_1(t_0), v'_1(t_0)) \begin{pmatrix} \langle \vec{X}_u(Q), \vec{X}_u(Q) \rangle & \langle \vec{X}_u(Q), \vec{X}_v(Q) \rangle \\ \langle \vec{X}_v(Q), \vec{X}_u(Q) \rangle & \langle \vec{X}_v(Q), \vec{X}_v(Q) \rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u'_2(\tilde{t}_0) \\ v'_2(\tilde{t}_0) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Observação 5.25. O produto interno de dois vetores tangentes à curvas λ_1 e λ_2 em um ponto comum de ambas superfícies pode ser calculado com a aplicação da forma quadrática

$$\begin{pmatrix} \langle \vec{X}_u(Q), \vec{X}_u(Q) \rangle & \langle \vec{X}_u(Q), \vec{X}_v(Q) \rangle \\ \langle \vec{X}_v(Q), \vec{X}_u(Q) \rangle & \langle \vec{X}_v(Q), \vec{X}_v(Q) \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix},$$

nos vetores tangentes às curvas planas α_1 e α_2 .

A forma quadrática descrita anteriormente não depende da curva, mas apenas do mapa que parametriza a superfície. Além do mais,

$$\begin{aligned} \|\lambda_1'(t)\|^2 &= \langle \lambda_1'(t), \lambda_1'(t) \rangle \\ &= (u_1'(t), v_1'(t)) \begin{pmatrix} \langle \vec{X}_u(\alpha_1(t), \vec{X}_u(\alpha_1(t))) \rangle & \langle \vec{X}_u(\alpha_1(t), \vec{X}_v(\alpha_1(t))) \rangle \\ \langle \vec{X}_u(\alpha_1(t), \vec{X}_u(\alpha_1(t))) \rangle & \langle \vec{X}_v(\alpha_1(t), \vec{X}_v(\alpha_1(t))) \rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1'(t) \\ v_1'(t) \end{pmatrix} \\ &= \langle \vec{X}_u(\alpha_1(t), \vec{X}_u(\alpha_1(t))) \rangle + 2u_1'(t)v_1'(t)\langle \vec{X}_u(\alpha_1(t), \vec{X}_v(\alpha_1(t))) \rangle \\ &\quad + (v_1'(t))^2 \langle \vec{X}_v(\alpha_1(t), \vec{X}_v(\alpha_1(t))) \rangle. \end{aligned}$$

Definição 5.26. A forma quadrática definida através da matriz

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle \vec{X}_u, \vec{X}_u \rangle & \langle \vec{X}_u, \vec{X}_v \rangle \\ \langle \vec{X}_u, \vec{X}_v \rangle & \langle \vec{X}_v, \vec{X}_v \rangle \end{pmatrix},$$

por $I(\alpha_1') = (\alpha_1')^T \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \alpha_1' = (u_1', v_1') \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1' \\ v_1' \end{pmatrix}$ é chamada **primeira forma fundamental** da parametrização.

Observação 5.27. A matriz assim estabelecida pode ser usada para definir um produto interno que varia de ponto a ponto, chamado de *tensor métrico*:

$$\begin{aligned} g(\alpha_1', \alpha_2') &= (u_1', v_1') \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_2' \\ v_2' \end{pmatrix} \\ &= u_1' u_2' E + (u_1' v_2' + v_1' u_2') F + v_1' v_2' G. \end{aligned}$$

Observação 5.28. O elemento de comprimento de arco ds (ou a *métrica*) é dado por:

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2,$$

com $\|\lambda_1(t)\|^2 = E(u_1'(t))^2 + 2Fu_1'(t)v_1'(t) + G(v_1'(t))^2$.

Exemplo 5.29. Consideremos $\vec{X}_u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{-u}{\sqrt{1-(u^2+v^2)}} \end{pmatrix}$ e $\vec{X}_v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{-v}{\sqrt{1-(u^2+v^2)}} \end{pmatrix}$, sendo $\vec{X}(u, v) = (u, v, \sqrt{1-(u^2+v^2)})$, conforme Figura 48. Portanto,

$$E = \langle \vec{x}_u, \vec{x}_u \rangle = 1 + \frac{u^2}{1-u^2-v^2} = \frac{1-v^2}{1-u^2-v^2},$$

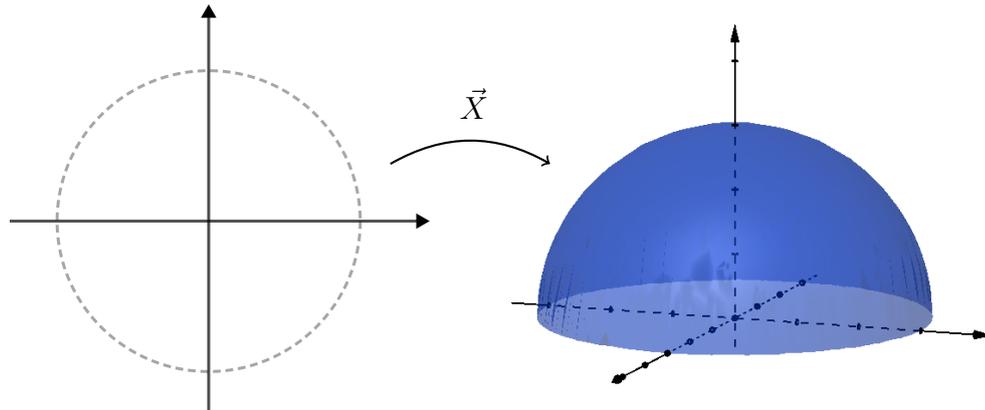
$$F = \langle \vec{x}_u, \vec{x}_v \rangle = \frac{uv}{1-u^2-v^2},$$

$$G = \langle \vec{x}_v, \vec{x}_v \rangle = 1 + \frac{v^2}{1-u^2-v^2} = \frac{1-u^2}{1-u^2-v^2} \text{ e}$$

$$ds^2 = \frac{1-v^2}{1-u^2-v^2} du^2 + \frac{2uv}{1-u^2-v^2} dudv + \frac{1-u^2}{1-u^2-v^2} dv^2.$$

Observação 5.30. É possível calcular o comprimento de $\lambda(t) = \vec{X}(\alpha(t)) = \vec{X}(u(t), v(t))$ na superfície sem, necessariamente, considerá-la:

$$\mathcal{L} = \int_a^b \sqrt{(u', v') \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix}} dt.$$

Figura 48 – $\vec{X} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ 

Fonte: Autoria própria

Para uma superfície orientável (isto é, garantida a existência global do campo vetorial normal), consideremos o **vetor normal** compatível em cada ponto continuamente com a parametrização dada por $\vec{N}(P) = \frac{\vec{X}_u \times \vec{X}_v}{\|\vec{X}_u \times \vec{X}_v\|}$.

Definição 5.31. A forma quadrática definida pela matriz

$$\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle \vec{N}, \vec{X}_{uu} \rangle & \langle \vec{N}, \vec{X}_{uv} \rangle \\ \langle \vec{N}, \vec{X}_{uv} \rangle & \langle \vec{N}, \vec{X}_{vv} \rangle \end{pmatrix},$$

com $II(\lambda') = (\lambda')^T \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \lambda' = (u'_1, v'_1) \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u'_1 \\ v'_1 \end{pmatrix}$, é chamada **segunda forma fundamental** de uma superfície (orientável) e depende da sua parametrização.

Definição 5.32. O determinante da segunda forma fundamental é chamado de **curvatura** (ou **curvatura Gaussiana**) da superfície.

Observação 5.33. A curvatura revela muitas informações importantes a respeito de uma superfície. É possível mostrar que seu valor fica determinado por

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}, \quad (5.1)$$

contudo, foge do escopo desse trabalho demonstrá-la.

Exemplo 5.34. Vamos calcular a curvatura da tractoide, coberta pela parametrização:

$$r(t, \theta) = \left(R \sen t \cos \theta, R \sen t \sen \theta, R \left(\cos t + \ln \operatorname{tg} \frac{t}{2} \right) \right).$$

A fim de determinar os valores de e , f e g , calculemos N .

$$r_t(t, \theta) = \left(R \cos t \cos \theta, R \cos t \sen \theta, -R \sen t + \frac{R}{\sen t} \right)$$

$$r_\theta(t, \theta) = \left(-R \sen t \sen \theta, R \sen t \cos \theta, 0 \right)$$

$$E = \langle \vec{r}_t, \vec{r}_t \rangle = R^2 \cos^2 t + R^2 \sin^2 t - 2R^2 + \frac{R^2}{\sin^2 t} = \frac{R^2}{\sin^2 t} - R^2 = R^2 \frac{\cos^2 t}{\sin^2 t}$$

$$F = \langle \vec{r}_t, \vec{r}_\theta \rangle = 0$$

$$G = \langle \vec{r}_\theta, \vec{r}_\theta \rangle = R^2 \sin^2 t$$

$$r_{tt}(t, \theta) = (-R \sin t \cos \theta, -R \sin t \sin \theta, -R \cos t - \frac{R \cos t}{\sin^2 t})$$

$$r_{t\theta}(t, \theta) = (-R \cos t \sin \theta, R \cos t \cos \theta, 0)$$

$$r_{\theta\theta}(t, \theta) = (-R \sin t \cos \theta, -R \sin t \sin \theta, 0)$$

$$\begin{aligned} r_t \times r_\theta &= (R^2 \sin^2 t \cos \theta - R^2 \cos \theta, R^2 \sin^2 t \sin \theta - R^2 \sin \theta, -R^2 \sin t \cos t) \\ &= (R^2 \cos^2 t \cos \theta, R^2 \cos^2 t \sin \theta, -R^2 \sin t \cos t) \end{aligned}$$

Sendo o intervalo $0 < t < \pi/2$,

$$\begin{aligned} \|\vec{N}\|^2 &= R^4 \cos^4 t \cos^2 \theta + R^4 \cos^4 t \sin^2 \theta + R^4 \sin^2 t \cos^2 t \\ &= R^4 \cos^4 t + R^4 \sin^2 t \cos^2 t \\ &= R^4 \cos^2 t. \end{aligned}$$

$$\vec{N} = (\cos t \cos \theta, \cos t \sin \theta, -\sin t)$$

Com os valores acima, obtemos:

$$\begin{aligned} e = \langle \vec{N}, r_{tt} \rangle &= -R \sin t \cos t \cos^2 \theta + R \sin t \cos t \sin^2 \theta - R \cos t \sin t - R \frac{\cos t}{\sin t} \\ &\quad - R \frac{\cos t}{\sin t} \end{aligned}$$

$$f = \langle \vec{N}, r_{t\theta} \rangle = 0$$

$$g = \langle \vec{N}, r_{\theta\theta} \rangle = -R \sin t \cos t \cos^2 \theta - R \sin t \cos t \sin^2 \theta = -R \sin t \cos t$$

Assim,

$$eg - f^2 = -R^2 \cos^2 t$$

$$EG - F^2 = R^4 - R^4 \sin^2 t = R^4 \cos^2 t.$$

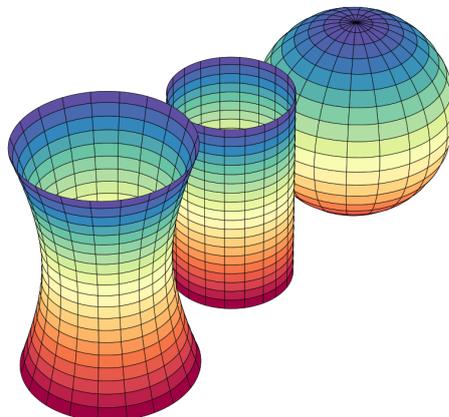
Finalmente, comprovamos que a curvatura da pseudo-esfera é constante e negativa:

$$k = -\frac{R^2 \cos^2 t}{R^4 \cos^2 t} = -\frac{1}{R^2}.$$

5.4 GEODÉSICAS

Definição 5.35. Para uma superfície regular $S \subset \mathbb{R}^3$, temos um vetor normal N_p em cada ponto $p \in S$ e podemos definir **geodésica** como uma curva parametrizada $\lambda : I \rightarrow S \subset \mathbb{R}^3$ na qual a derivada do vetor tangente é paralelo ao vetor normal da superfície, isto é, $\lambda''(t) \parallel N_{\lambda(t)}$.

Figura 49 – Curvatura gaussiana: negativa, nula e positiva



Fonte: (COMMONS, 2019a)

Há muito o termo *geodésica* é empregado para representar o caminho entre dois pontos em uma superfície. A definição de geodésica está vinculada a determinação, pelos pontos críticos, do funcional de comprimento do arco no espaço das curvas, definido por

$$\mathcal{L}(\lambda) = \int_a^b \|\lambda'(t)\| dt.$$

Tais pontos críticos minimizam localmente seus comprimentos. A geodésica de menor comprimento é chamada *geodésica minimizante*. Na geometria plana, essa menor distância é determinada por uma reta (segmento de reta) que une os dois pontos em questão. Nas demais geometrias, entretanto, nem sempre é assim. Por exemplo, na geometria esférica, o percurso mais curto entre dois pontos é descrito por um arco de círculo máximo, visto que as geodésicas nessa superfície são determinadas por seus grandes círculos.

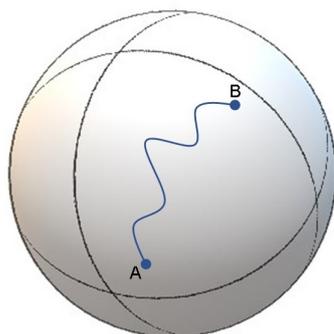
Podemos encontrar as geodésicas de uma superfície indiretamente pela aplicação do seguinte resultado, que adaptamos de Manfredi (1987) e apresentaremos sem demonstração.

Teorema 5.36 ((Adaptado) Existência de Vizinhanças Convexas). *Para cada ponto $p \in S$ existe uma vizinhança coordenada de p em S , tal que quaisquer dois pontos dessa vizinhança podem ser ligados por uma única geodésica minimizante.*

Exemplo 5.37. Sejam A e B dois pontos não-antípodos ⁴ sobre a esfera S . Esses pontos e o centro da esfera determinam um plano e , assim, um único *círculo máximo*. A e B dividem esse círculo máximo em dois arcos. O menor deles é exatamente o caminho mais curto na superfície ligando A e B . As geodésicas da esfera podem ser determinadas utilizando o Teorema 5.36 e as suas simetrias. Sejam A e B dois pontos próximos na esfera $\lambda : [a, b] \rightarrow S$ e o traço em azul, conforme Figura 50.

⁴ Pontos antípodos são aqueles nos quais o segmento de reta que os une coincide com o diâmetro da esfera.

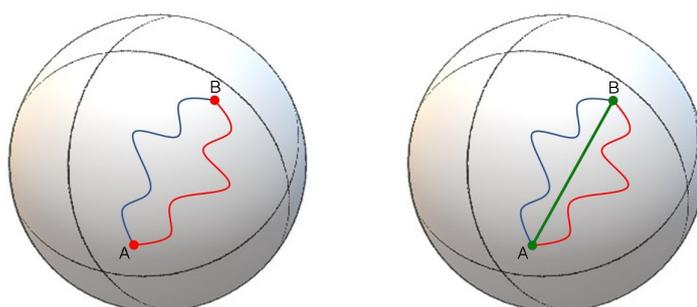
Figura 50 – Por que a curva entre os pontos A e B não representa uma geodésica?



Fonte: Autoria própria

A reflexão por um plano que passa pelo centro da esfera é uma simetria da própria esfera em si mesma. Se $\lambda(t)$ fosse uma geodésica minimizante, então a curva obtida pela reflexão de λ pelo plano que passa por A , B e pelo centro da esfera O , também seria uma geodésica (a curva vermelha na Figura 51). Assim, teríamos duas geodésicas minimizantes ligando os pontos A e B , o que é um absurdo, pois contradiz o Teorema 5.36.

Figura 51 – Qual é a geodésica entre A e B ?



Fonte: Autoria própria

A geodésica que liga A e B deve ser invariante na reflexão pelo plano definido por A , B e O . Contudo, os únicos pontos fixos da reflexão são os pontos contidos no plano. Portanto, a geodésica deve estar contida na interseção da esfera com o plano. Tal interseção define exatamente uma curva, um círculo máximo. A geodésica minimizante é o arco de círculo máximo de menor comprimento.

Na esfera, os círculos máximos assumem o mesmo papel das retas na geometria euclidiana e os arcos menores de círculo máximo assumem papel análogo ao dos segmentos de reta. A distância entre dois pontos é determinada calculando-se o comprimento do menor arco de círculo máximo definido entre eles. Notemos que o círculo máximo contém, numa superfície aproximadamente esférica como a da Terra, a rota de menor distância possível, conhecida por *ortodrômica* ou *rota de grande círculo* e é àquela percorrida, de forma aproximada, pelas aeronaves e navios em viagens de longo percurso.

Em 1818, ainda segundo Schreiber e Scriba (2015), Gauss foi motivado pela resolução do problema introduzido por seu amigo alemão e astrônomo Heinrich Christian Schumacher (1780 - 1850), com o objetivo de medir exatamente a diferença de latitude entre as localidades alemãs de Altona e Göttingen. O seu trabalho foi publicado em duas partes, nos anos de 1844 e 1847.

Esse experimento foi seguido pela medição de todo o reino de Hannover, no qual Gauss foi encarregado de avaliar os resultados (Biermann 1990, p. 19). Empreendimentos semelhantes foram finalizados ou parcialmente trabalhados em outros países europeus por volta dessa época. Essas atribuições causaram uma virada mais intensa em direção à diferente geometria das superfícies curvas. Como indicado por alguns trechos de carta, Gauss planejava um extenso trabalho em geodésia superior até 1822⁵. (SCHREIBER, 2015, p.417, tradução nossa)

Como já mencionamos no início do capítulo, as propriedades das superfícies curvas tinham sido aprimoradas com os estudos de Gauss, sobre geodésicas e a geometria interna das superfícies, fundamentais para a Física Moderna, alterando o entendimento referente às noções de espaço, tempo, medida, causalidade, simultaneidade, trajetória e localidade conhecidas até então.

5.5 TEOREMA EGREGIUM

Um dos resultados mais surpreendente obtido por Gauss, publicado em 1827 e denominado por ele mesmo de *theorema egregium*, que pode ser traduzido como *teorema extraordinário*, afirma que a curvatura gaussiana de uma superfície é intrínseca à mesma, o que significa dizer que não depende de como ela está inserida no espaço euclidiano.

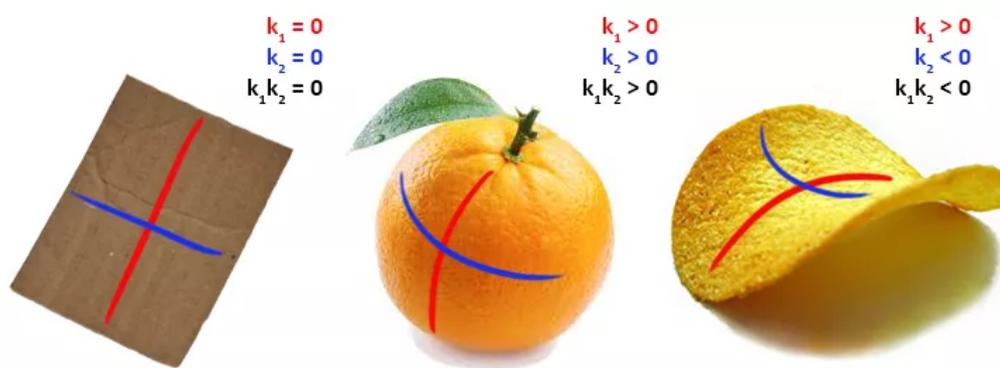
(...) essa noção de curvatura é invariante não apenas ao mover a superfície no espaço, mas também, quando arbitrariamente se dobra (não distorce) a superfície, já que pode ser definida com uma medição em seu interior e calculada por fórmulas que só apresentam os coeficientes E, F, G (conhecidas atualmente por primeira forma fundamental) do elemento de arco diferencial $Edp^2 + 2Fdpdq + Gdq^2$ como funções dos parâmetros de superfície p e q . Gauss então, mostrou que sua curvatura local é idêntica ao produto obtido por ambas curvaturas principais estudadas desde Euler⁶. (SCHREIBER, 2015, p.418)

⁵ This undertaking was followed by the measuring of the entire kingdom of Hannover, whereby Gauss was in charge of evaluating the results (Biermann 1990, p. 19). Similar undertakings were finalised or partially worked on in other European countries around this time. These assignments caused a more intensive turn towards the differential geometry of curved surfaces. As indicated by certain letter excerpts, Gauss had been planning an extensive work on higher geodesy not later than 1822. (SCHREIBER, 2015, p.417)

⁶ (...) states that this notion of curvature is invariant not just when shifting the surface in space, but also when arbitrarily bending (not distorting) the surface, since it can be defined by measuring within the surface, and that it can be calculated by formulae that only feature the coefficients E, F, G (nowadays referred to as first fundamental quantities g_{ij}) of the differential arc element $Edp^2 + 2Fdpdq + Gdq^2$ as functions of the surface parameters p, q . Gauss then shows that his local curvature is identical to the signed product of both principal curvatures studied since Euler. (SCHREIBER, 2015, p.418)

Em outras palavras, a curvatura gaussiana não varia, a menos que se estique ou corte a superfície. Seu valor em um determinado ponto é calculado pelo produto das curvaturas principais, as quais indicam o quanto a superfície se curva, nas direções em que essa curva é máxima e mínima. Ela não depende da posição em que é calculada e sim, da estrutura métrica da superfície. Vejamos alguns exemplos, conforme Figura 52. Em um pedaço de papelão, as curvaturas principais k_1 e k_2 são iguais a zero, então a curvatura gaussiana é nula. A superfície de uma laranja tem k_1 e k_2 positivas, sendo sua curvatura gaussiana também positiva. Entretanto, na superfície de uma batata, a curvatura principal k_1 é positiva, mas a curvatura principal k_2 é negativa e, portanto, a sua curvatura gaussiana é negativa.

Figura 52 – Curvaturas principais: k_1 (eixo vermelho) e k_2 (eixo azul).



Fonte: (DEVIANTE, 2017)

6 A REVOLUÇÃO DAS MÉTRICAS DE BELTRAMI

Mais importante e duradouro, o universo da geometria não euclidiana não era mais o mundo contraintuitivo descrito por Lobachevsky e Bolyai: qualquer pessoa instruída sobre a teoria gaussiana das superfícies poderia calcular todas as consequências dos princípios não euclidianos diretamente a partir dos modelos de Beltrami; este legado é bastante evidente até os dias atuais¹. (ARCOZZI, 2012, p.2, tradução nossa)

Na Itália do século XIX, segundo Bonola (1912), o material científico considerado relevante e produzido em torno das ideias inovadoras sobre geometria era divulgado por Giuseppe Battaglini (1826 - 1894). No final de 1860, ele foi nomeado professor de Geometria Superior na Universidade de Nápoles. Em 1863, fundou a *Campania Mathematical Journal*. Após sua morte, a revista foi renomeada para *Journal of Battaglini Matematica*, continuando a desempenhar papel significativo na divulgação das novas geometrias.

Figura 53 – Giuseppe Battaglini (1826 - 1894)



Fonte: (WIKIPEDIA, 2018e)

Entre 1868 e 1869, em dois artigos influentes, Beltrami forneceu modelos da geometria não euclidiana de Lobachevsky e Bolyai. Um destes modelos é mais conhecido por modelo de Klein, outro como modelo do disco de Poincaré, o terceiro como o modelo do semiplano de Poincaré. Um quarto, que Beltrami desenvolveu, como o modelo de disco, diretamente da *Habilitationschrift* de Riemann, teve um impacto muito menor. Em certo sentido, o primeiro artigo, *Saggio di Interpretazione della Geometria non-euclidea*, foi escrito sob a influência de Gauss, e o segundo, *Teoria fondamentale degli spazi di curvatura costante*, sob a influência de Riemann². (ARCOZZI, 2012, p.6, tradução nossa)

¹ More important, and lasting, the universe of non-Euclidean geometry was not anymore the counter-intuitive world painted by Lobachevsky and Bolyai: any person instructed in Gaussian theory of surfaces could work out all consequences of the non-Euclidean principles directly from Beltrami's models; this legacy is quite evident up to the present day. (ARCOZZI, 2012, p.2)

² Between 1868 and 1869, in two influential articles, Beltrami provided models of the non-Euclidean geometry of Lobachevsky and Bolyai. One of these models is better known as the Klein model, another one as the Poincaré disc model, the third as the Poincaré half plane model. A fourth one, which Beltrami worked out, like the disc model, directly from Riemann's *Habilitationschrift*, has had a much minor impact. In a sense, the first article, *Saggio di Interpretazione della Geometria non-euclidea*, was written under the influence of Gauss, and the second, *Teoria fondamentale degli spazi di curvatura costante*, under the influence of Riemann. (ARCOZZI, 2012, p.6)

6.1 UM POUCO SOBRE EUGENIO BELTRAMI

Foi exatamente em dois volumes do *Giornale di Matematiche* que surgiu a interpretação precisa e inovadora do matemático italiano Eugenio Beltrami (1835 - 1900). Nascido em Cremona e filho de Eugenio Beltrami, um valente iluminador e gravador de pedras duras, e de Elisa Barozzi, descendente de uma antiga família veneziana e mulher da mais alta sensibilidade e cultura musical, Beltrami possuía um alto nível de inteligência, originalidade e buscava sempre pela elegância da expressão científica e perfeição do pensamento, segundo Manara (1981).

Frequentou a Universidade de Pavia durante três anos, concluindo parte do curso de Engenharia Ferroviária em 1856. Teve como professores Antonio Maria Bordoni e Francesco Brioschi. Foi expulso da faculdade por manter envolvimento com o movimento de *Ressurgimento*, uma manifestação popular que buscava unificar a Itália entre os anos de 1815 e 1870, composta por pequenos Estados submetidos à potências estrangeiras.

Figura 54 – Eugenio Beltrami (1835 - 1900)



Fonte: (WIKIPEDIA, 2018b)

Sua vida passou a ser marcada por eventos familiares dolorosos e Beltrami foi obrigado a trabalhar no reino de Lombardo-Vêneto, o que lhe permitiu frequentar o Observatório de Brera, em Milão. Devido ao cuidado incessante e à influência de Brioschi, que chegou a ser presidente da Academia Nacional do Lincei e senador do Reino, Beltrami conseguiu manter as atividades acadêmicas paralelamente à vida profissional. Em 1859, deixou seu emprego nas ferrovias para passar a integrar o conselho formado por seu Mestre, retomando seus estudos de forma excepcional.

Suas primeiras análises tinham como tópicos principais álgebra e geometria analítica, desenvolvidos por volta de 1861, na Universidade de Bolonha. Depois, passou a Pisa e retornou a Bolonha no ano de 1866, compondo o Departamento de Mecânica Racional. Em 1873, mudou-se para Roma e depois, em 1876, para Pavia, fazendo parte dos campos de física-matemática e mecânica superior. Permaneceu em Pavia por quinze anos, até retornar a Roma em 1891, onde faleceu em fevereiro de 1900.

É importante destacar que a física-matemática da época de Beltrami formava um campo de pesquisa muito avançado, abrangendo teorias matemáticas que levariam à descobertas da Física e suas novas vertentes, incluindo a teoria do calor, fenômenos da eletricidade e da elasticidade, entre outros, ampliando seu escopo tradicional, como salientamos no capítulo anterior.

Não temos a pretensão de detalhar toda a contribuição de Beltrami na ciência, longe disso, mas procuraremos descrever sua produção em relação aos estudos das novas geometrias, com importantes aplicações nos espaços de curvatura constante e negativa.

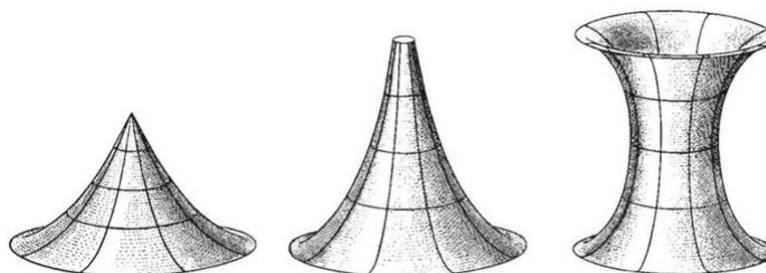
6.2 A BRILHANTE CONTRIBUIÇÃO DE BELTRAMI

Conforme Bonola (1912), Beltrami contribuiu com uma nova e inesperada interpretação sobre os princípios fundamentais da geometria introduzida por Gauss e Lobachevsky, com a seguinte versão para o postulado das paralelas:

Postulado: Há pelo menos duas linhas passando por P que não cruzam L .

Para assegurar que tal hipótese não era absurda, Beltrami definiu um modelo (espaço) concreto em que tal propriedade se verificava, sendo o primeiro a conseguir propô-lo no ano de 1868, na forma de parametrizações de superfícies de curvatura constante e negativa.

Figura 55 – Superfícies de curvatura constante e negativa

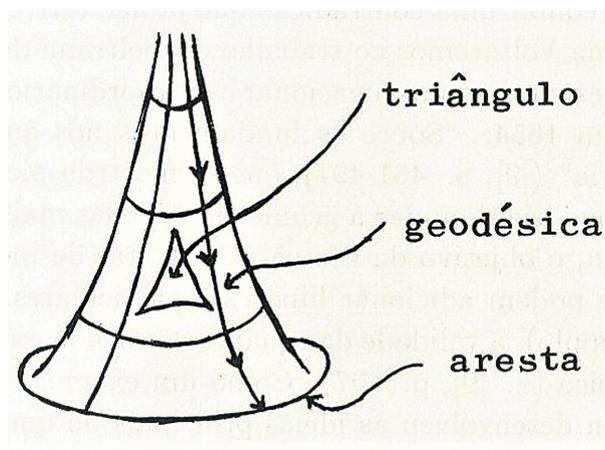


Fonte: Schreiber e Scriba (p.420, 2015)

Contudo, as geodésicas dessas superfícies não poderiam ser prolongadas infinitamente, pois possuíam arestas (Figura 56). Após 33 anos, o matemático alemão David Hilbert (1862-1943) resolveria o problema de Beltrami, provando que as arestas nas regiões fronteiriças dessas superfícies sempre existiriam³. Posteriormente, Riemann salientou que a exigência das linhas retas apresentarem comprimento infinito era falha e que havia sim, a necessidade de não ocorrer obstruções em seu trajeto, propriedade chamada de ilimitada, que se reflete atualmente nos conceitos de metricamente completa e sem fronteira, segundo Scriba e Schreiber (2015).

³ O teorema de Hilbert (na geometria diferencial) afirma que não existe uma superfície regular completa e de curvatura constante e negativa *imersa* em \mathbb{R}^3 .

Figura 56 – Superfície de curvatura constante e negativa



Fonte: (MANFREDO, 1987)

Gauss, Lobachevsky e Bolyai provaram vários resultados da geometria sem usar o postulado das paralelas, mostrando sua total independência. Atualmente, temos as geometrias *plana* (de Euclides), a *elíptica* (da esfera) e a *hiperbólica* (de Lobachevsky e Beltrami).

Enquanto a geometria elíptica apresentava sua superfície atendendo basicamente à de uma esfera, onde o segundo e o quinto postulados de Euclides falhavam, com retas finitas e ilimitadas e a soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer maior do que 180° , surgiam os modelos de Beltrami, oriundos do caso obtuso de Saccheri e correspondentes à *geometria hiperbólica*, na qual a curvatura é constante e negativa, a soma das medidas dos ângulos internos de qualquer triângulo é inferior a soma de dois ângulos retos e existem infinitas retas paralelas a uma reta dada, passando por um ponto dado fora dela.

6.3 BELTRAMI E SEUS ARTIGOS *SAGGIO* E *TEORIA*

Beltrami escreveu dois artigos imprescindíveis para o desenvolvimento da geometria não euclidiana: *Saggio di interpretazione della geometria non-euclidea*⁴ - *Ensaio sobre a interpretação da geometria não euclidiana* (Beltrami, 1868) e *Teoria fondamentale degli spazii di curvatura costante*⁵ - *Teoria fundamental dos espaços de curvatura constante* (Beltrami, 1869), publicados primeiramente em italiano, nos anos de 1868 e 1869, sendo traduzidos para o francês por Jules Hoüel. Segundo Arcozzi (2012), referindo-se explicitamente a Gauss e Lobachevsky, deixando Bolyai de lado, Beltrami apresentou a prova de que as geometrias não euclidianas identificavam-se com a geometria interna de uma superfície de curvatura gaussiana constante e negativa, a qual chamou de pseudo-esfera⁶, segundo Milnor (1982).

⁴ Escrito sob a influência de Gauss.

⁵ Escrito sob a influência de Riemann.

⁶ Destacamos novamente que o uso inicial de Beltrami para o termo *pseudo-esfera* difere do moderno, relacionado à superfície obtida pela rotação de uma tractriz.

O ponto de virada veio em 1868, com a publicação de dois trabalhos de E. Beltrami. No primeiro, Beltrami mostrou que a geometria não euclidiana bidimensional é nada mais nada menos do que o estudo de superfícies de curvatura negativa e constante. Introduziu o termo pseudo-esfera de raio R para uma superfície de curvatura $-\frac{1}{R^2}$. (Na prática, ele usou o termo "pseudo-esfera" apenas para superfícies completas, simplesmente conexas.) Nesse primeiro artigo, ele ficou perplexo com o caso tridimensional. No entanto, depois de encontrar o discurso inaugural de Riemann, ministrado em 1854, mas publicado apenas após sua morte, em 1868, Beltrami publicou um segundo artigo, sobre geometria pseudo-esférica n -dimensional⁷. (MILNOR, 1982, p.11, tradução nossa)

Vale ressaltarmos, segundo Schreiber e Scriba (2015), que o estudo das superfícies de curvatura constante e negativa já era comum na época de Beltrami:

Muitas investigações na segunda metade do século XIX foram dedicadas à superfícies de curvatura constante e negativa, parcialmente devido à correlação entre curvatura constante e movimento livre criado por Riemann e parcialmente devido ao interesse na geometria não euclidiana, que aumentou após a morte de Gauss⁸. (SCHREIBER, 2015, p.422)

Os modelos propostos por Beltrami da geometria não euclidiana de Lobachevsky e Bolyai são conhecidos atualmente por *modelo de Klein*, *modelo de Poincaré*⁹ e *modelo do semiplano de Poincaré*.

Em 1865, Beltrami procurou encontrar e apresentar todas as superfícies que admitiam uma parametrização, $\vec{X} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$, de modo a obter geodésicas somente como (a imagem de) linhas retas em U . Ele descobriu que tais superfícies possuíam uma métrica de parametrização característica. Conforme Arcozzi (2012), seu ponto de partida foi um comentário do matemático italiano Joseph Louis Lagrange (1736 - 1813), sobre projetar uma esfera S em um plano π a partir do seu centro C (Figura 57), estando o plano π a uma distância fixa a de C , mapeando as geodésicas da esfera em linhas retas no plano e obtendo a métrica definida pela Equação (6.1):

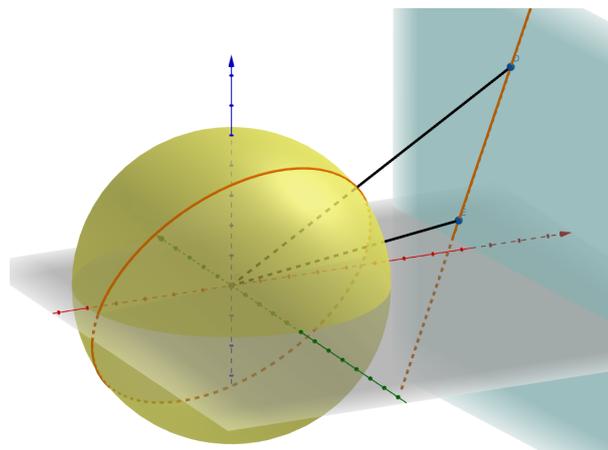
$$ds^2 = R^2 \frac{(a^2 + v^2)du^2 - 2uvdudv + (a^2 + u^2)dv^2}{(a^2 + u^2 + v^2)^2} \quad (\text{raio de medida real}). \quad (6.1)$$

⁷ The turning point came in 1868, with the publication of two papers by E. Beltrami. In the first, Beltrami showed that two-dimensional non-euclidean geometry is nothing more nor less than the study of suitable surfaces of constant negative curvature. Introduced the term pseudosphere of radius R for a surface of curvature $-1/R^2$. (In practice, he used the term "pseudosphere" only for complete, simply connected surfaces.) In this first paper, he was baffled by the 3-dimensional case. However, after encountering Riemann's inaugural address, which had been delivered in 1854 but published only after his death, in 1868, Beltrami published a second paper, on n -dimensional pseudospherical geometry. (MILNOR, 1982, p.11)

⁸ Many investigations in the second half of the 19th century were devoted to surfaces of constant negative curvature, partially due to the correlation between constant curvature and free motion created by Riemann and partially because of the interest in non-Euclidean geometry, which had increased after Gauss's death. (SCHREIBER, 2015, p.422, apud, tradução nossa)

⁹ Já mencionado anteriormente por Riemann, em sua obra *Habilitationschrift*, que encorajou Beltrami a continuar seus esforços e publicar seu segundo artigo.

Figura 57 – Projeção da esfera no plano



Fonte: Autoria própria

A partir desse resultado, já conhecido na época, Beltrami introduziu em *Saggio* a métrica:

$$ds^2 = R^2 \frac{(a^2 - v^2)du^2 + 2uvdudv + (a^2 - u^2)dv^2}{(a^2 - u^2 - v^2)^2}. \quad (6.2)$$

Ele chegou a salientar que a Equação (6.2) poderia ser obtida da Equação 6.1, alterando os valores de a e R por suas versões imaginárias ia e iR , o que concorda com o princípio eurístico de que a geometria hiperbólica é a geometria esférica em uma esfera de raio imaginário, afirma Arcozzi (2012). Estudando as propriedades do disco $a^2 \geq u^2 + v^2$ dotado com a métrica da Equação 6.2, Beltrami acabou por apresentar um modelo satisfazendo os postulados fundamentais da geometria euclidiana, como por exemplo, *dados dois pontos A e B quaisquer, existe uma única reta passando por ambos*. Além do mais, demonstrou teoremas fundamentais da geometria não euclidiana de Bolyai e Lobachevsky.

Após analisar as simetrias da métrica descrita pela Equação (6.2) no plano¹⁰, ele concluiu que suas geodésicas são dadas por cordas de um círculo no plano. Com isso, obteve o **modelo de Beltrami-Klein**, mais conhecido atualmente por *modelo do disco de Klein para a geometria hiperbólica*, ocupando-se com questões da própria geometria hiperbólica referentes aos ângulos e paralelismos, entre outros.

Segundo Struve (2010), o matemático britânico Arthur Cayley (1821 - 1895) descobriu, em 1859, que a geometria euclidiana poderia ser considerada como um caso particular da geometria projetiva. Em 1869, por sua vez, o matemático alemão Felix Christian Klein (1849 - 1925) mostrou que as geometrias hiperbólica e elíptica também poderiam ser vistas como casos particulares da geometria projetiva e criou, assim, uma geometria "universal" que as compreendia. Neste processo, Klein tornou explícitas as ligações entre a geometria projetiva e o modelo apresentado por Beltrami, em *Saggio*.

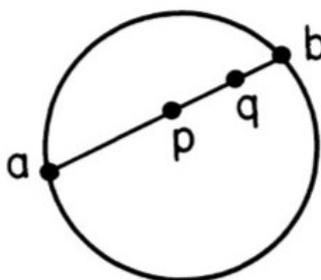
¹⁰ Uma superfície parametrizada por coordenadas (u, v) e que possua uma métrica da forma apresentada pela Equação (6.2) é chamada de *pseudo-esfera*, tanto por Beltrami como no escopo do presente trabalho.

Figura 58 – Felix Christian Klein (1849 - 1925)



Fonte: (COMMONS, 2019b)

Figura 59 – Distância no modelo de disco projetivo



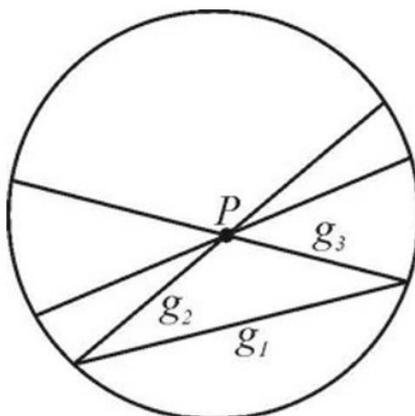
Fonte: (MILNOR, 1982, p.12)

Beltrami tinha a intenção geral (também em outras publicações) de representar superfícies curvas no plano de tal maneira que as geodésicas fossem assim transformadas em linhas retas. Ele também fez isso com a pseudo-esfera. Se olharmos para sua representação, basicamente vemos o modelo do disco de Klein. Tendo ouvido falar do discurso de Riemann, Beltrami estendeu seu modelo para um espacial dentro de uma esfera, no mesmo ano (1868, publicado em 1869). Continua sendo realização de Klein ter conectado seu modelo com as determinações das medidas de Cayley e, assim, o ter incluído em um contexto geral¹¹. (SCHREIBER, 2015, p.432, tradução nossa)

Portanto, segundo Arcozzi (2012), além de Beltrami concluir que *a geometria hiperbólica era a geometria esférica em uma esfera de raio imaginário*, visto que as equações de suas geodésicas eram as mesmas, independentemente do raio ser representado por um número real ou um número imaginário e, as geodésicas em relação à u e v mantinham-se como linhas retas, isto é, cordas do círculo limitante (Figura 60), ele também conseguiu mostrar que uma superfície admitindo tal métrica, precisava necessariamente possuir curvatura constante e negativa.

¹¹ Beltrami had the general intention (also in other publications) of representing curved surfaces in the plane in such a way that the geodesics thereby are transformed into straight lines. He also did this with the pseudo-sphere. If we look at his representation, we basically see Klein's plane model. Having heard of Riemann's habilitation speech, Beltrami extended his model to a spatial one inside a sphere in the same year (1868, published in 1869). It remains Klein's accomplishment to have connected this model with Cayley's measure determination and, thus, to have included it in a general context. (SCHREIBER, 2015, p.432)

Figura 60 – Modelo Beltrami-Klein para o plano



Fonte: (SCHREIBER, 2015, p.433)

Ainda em *Saggio*, antes de ter acesso ao trabalho de Riemann, Beltrami descreveu três superfícies no espaço euclidiano que atendiam à questão: *existe alguma superfície concreta no espaço euclidiano que seja parametrizada de modo a produzir a métrica de 6.2?* Dentre as superfícies encontradas, a mais famosa (e a mais tangível) foi a *tractroide*¹², superfície obtida pela revolução de uma tractriz, já estudada no capítulo anterior.

Beltrami continuou seus trabalhos deduzindo importantes teoremas da geometria não euclidiana e procurando garantir que seu modelo era de fato consistente. Todo seu cuidado e hesitação levaram-no a *fazer uma matemática realmente elegante e a desvendar algumas características muito interessantes de seu modelo*, afirma Arcozzi (2012).

Em seu artigo *Teoria*, de acordo com Milnor (1982), Beltrami teve como ponto de partida as descobertas de Riemann para espaços de dimensão n , com coordenadas x_1, \dots, x_{n-1} e $y \geq 0$. Apresentou assim, duas novas métricas para superfícies de curvatura constante e negativa. A primeira delas foi obtida a partir da projeção do hemisfério estereograficamente em um disco, sendo expressa por

$$ds = \frac{\sqrt{d\epsilon_1^2 + \dots + d\epsilon_n^2}}{1 - \frac{(\epsilon_1^2 + \dots + \epsilon_n^2)}{4R^2}}. \quad (6.3)$$

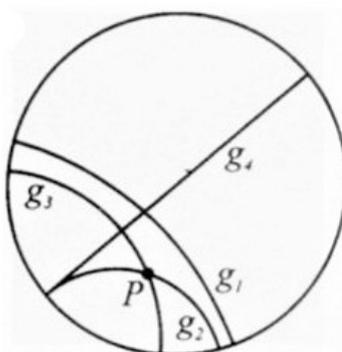
Ela representa o **modelo (conformal)¹³ Riemann-Beltrami-Poincaré do disco**, mais conhecido por *disco de Poincaré* (Figura 61). Para $n = 2$, temos:

$$ds = \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{1 - \frac{(x^2 + y^2)}{4R^2}}.$$

¹² Exemplo mais conhecido de superfície com curvatura constante e negativa dentre as pseudo-esferas consideradas por Beltrami.

¹³ Modelo de projeção que preserva os ângulos.

Figura 61 – Modelo (conformal) de Riemann-Beltrami-Poincaré para o plano



Fonte: (SCHREIBER, 2015, p.434)

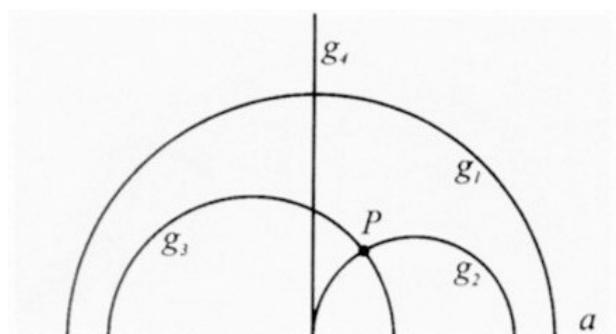
Ao fazer uma inversão em um ponto limite deste disco, Beltrami obteve sua segunda métrica, já conhecida anteriormente pelo matemático francês Joseph Liouville (1809 - 1882), no caso bidimensional¹⁴:

$$ds = R \frac{(dx_1^2 + \dots + dx_{n-1}^2 + dy^2)^{\frac{1}{2}}}{y}. \quad (6.4)$$

Gerando assim, o **modelo (conformal) de Liouville-Beltrami do semiplano**, mais conhecido atualmente por *semiplano de Poincaré* (Figura 62). Para $n = 2$ e $y > 0$, temos:

$$ds = R \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{y}.$$

Figura 62 – Modelo (conformal) de Liouville-Beltrami para o semiplano



Fonte: (SCHREIBER, 2015, p.434)

Notemos que as geodésicas definidas nos três modelos são representadas por segmentos de reta, arcos de circunferências e semirretas, conforme Figuras 60, 61 e 62. Os modelos conformais foram contextualizados pioneiramente pelo matemático, físico e filósofo francês Henri Poincaré (1854 - 1912) para estudar propriedades de funções, justificando sua presença na nomenclatura dos dois últimos modelos. Segundo Arcozzi (2012), discute-se se Poincaré tinha conhecimento ou não dos trabalhos de Beltrami.

¹⁴ Liouville apresentou o modelo antes de Beltrami, mas apenas como um exemplo de superfície com curvatura constante e negativa, sem conexões com as descobertas de Gauss, Bolyai e Lobachevsky. (ARCOZZI, 2012, p.2)

Figura 63 – Henri Poincaré (1854 - 1912)



Fonte: (WIKIPEDIA, 2012)

Saggio e Teoria tornaram a geometria não euclidiana legítima aos olhos do público matemático em geral, uma vez que agora ela havia sido interpretada no mundo real, como afirmam Schreiber e Scriba (2015). Em especial, Arcozzi (2012) destaca que Beltrami descreveu a dependência do seu estudo na mudança de entendimento em relação ao conceito de superfície, além de tratar os problemas das fronteiras no infinito de um plano não euclidiano. Ele tornou essa fronteira acessível em seus modelos, com o uso das geometrias não euclidianas de funções definidas na linha real ou no círculo, afirmando que a trigonometria das geodésicas da pseudo-esfera era idêntica à trigonometria do plano hiperbólico. Seus modelos podem ser vistos como projeções diretas do modelo do hiperboloide, que apresentaremos mais adiante.

Segundo Manfredo (1987), existia apenas uma razão para Beltrami não dar-se totalmente por satisfeito: o fato desconcertante, geometricamente falando, de suas superfícies não serem completas. Caso este, que só viria a ser resolvido um ano após sua morte, por Hilbert.

Hoje, dizemos que os modelos de Beltrami estabelecem que a geometria hiperbólica é tão consistente quanto a geometria euclidiana, uma vez que os modelos de Beltrami são definidos inteiramente em termos euclidianos¹⁵. (THORGEIRSSON, 2014, p.8, tradução nossa)

6.4 CONSIDERAÇÕES A RESPEITO DE EUCLIDES E BELTRAMI

Como já destacamos, o cálculo diferencial foi fundamental para a verificação de que o pensamento *local* na geometria e algumas verdades admitidas nos séculos XVIII e XIX fossem questionadas, com sua falsidade admitida. Como afirma Thorgeirsson (2014), não podemos deixar de citar Euclides e a avaliação do trabalho de Beltrami. *Elementos* não representava um trabalho rigoroso pelos padrões matemáticos estabelecidos ao longo do século XIX.

¹⁵ Today we say that Beltrami's models establish that hyperbolic geometry is just as consistent as Euclidean geometry since Beltrami's models are defined entirely in Euclidean terms. (THORGEIRSSON, 2014, p.8)

Em 1899, Hilbert publicou sua obra *Grundlagen der Geometrie*, na qual re-axiomatizou a geometria euclidiana e ambas, tanto a geometria euclidiana como a não euclidiana, passaram a ter alto rigor matemático. Vale ressaltarmos ainda, a falta de reconhecimento e prestígio em relação ao trabalho de Beltrami, que muitas vezes é esquecido ou entra como coadjuvante nas apresentações dos assim chamados modelos "de Klein" e "de Poincaré", os quais só foram possíveis após suas inigualáveis contribuições.

Deixe-me terminar com estas observações introdutórias lembrando ao leitor que, infelizmente, na cultura popular sobre matemática, o nome de Beltrami raramente está ligado a seus modelos. O modelo no *Saggio* é geralmente chamado de modelo de Klein e os dois modelos do *Teoria* são frequentemente creditados a Poincaré. Há razões para isso. Klein tornou mais explícitas as conexões entre o modelo no *Saggio* e a geometria projetiva, que Beltrami acabara de mencionar em seu artigo. Poincaré, como já mencionei, foi o primeiro a usar os outros dois modelos para entender fenômenos aparentemente distantes do tópico não euclidiano. Fontes mais precisas referem-se ao modelo projetivo como o modelo de disco Beltrami-Klein (projetivo); os outros dois talvez devessem ser chamados de modelo de disco de Riemann-Beltrami-Poincaré (conformal) e modelo do semiplano de Liouville-Beltrami (conformal)¹⁶. (ARCOZZI, 2012, p.3, tradução nossa)

¹⁶ Let me end these introductory remarks by reminding the reader that, unfortunately, in the mathematical pop-culture the name of Beltrami is seldom attached to his models. The model of the *Saggio* is generally called the Klein model and the two models of the *Teoria* are often credited to Poincaré. There are reasons for this. Klein made more explicit the connections between the model in the *Saggio* and projective geometry, which Beltrami had just mentioned in his article. Poincaré, as I said above, was the first to use the other two models in order to understand phenomena apparently far from the non-Euclidean topic. More informed sources refer to the projective model as the Beltrami-Klein (projective) disc model; the other two should perhaps be called Riemann-Beltrami-Poincaré (conformal) disc model and Liouville-Beltrami (conformal) half-plane model. (ARCOZZI, 2012, p.3)

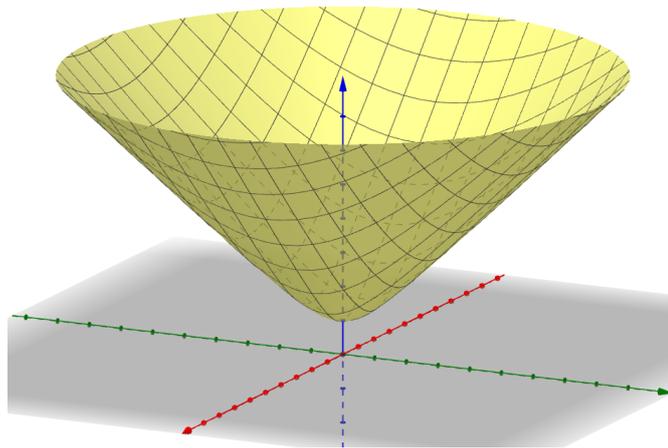
7 O MODELO DO HIPERBOLOIDE

De acordo com Reynolds (1993), a classificação *geometria hiperbólica* foi introduzida por Klein em 1871; porém, sem explicitar o hiperboloide como modelo¹. O matemático alemão Karl Weierstrass (1815 - 1897) e Poincaré fizeram menção às coordenadas do tipo $-x^2 + y^2 + z^2 = -1$, mas uma referência explícita ao hiperboloide veio somente com o também matemático alemão Wilhelm Killing (1847 - 1923), em 1885.

O hiperboloide representado na Figura 64 possui equação:

$$H^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid -x^2 + y^2 + z^2 = -1\}.$$

Figura 64 – Folha superior do hiperboloide H^2



Fonte: Autoria própria

Notemos que o produto interno usual em \mathbb{R}^3 deve ser modificado para gerar um modelo compatível com a geometria hiperbólica. Passemos então, a considerar o seguinte *produto interno*:

$$\langle (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \rangle_H = -x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2. \quad (7.1)$$

A Equação (7.1) não define um produto interno no sentido usual, mas um produto interno Lorentziano e torna o hiperboloide uma superfície natural para a geometria hiperbólica, assim como a esfera é a superfície mais natural para a geometria elíptica. O uso deste produto interno deu-se naturalmente após a introdução da relatividade especial, compreendendo as três dimensões espaciais com "sinal" positivo e a quarta dimensão, o tempo, com "sinal" negativo. Assim, o hiperboloide (de dimensão n) faz o papel similar das esferas no espaço euclidiano.

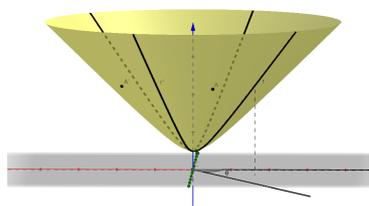
Chamamos *espaço de Minkowski* de dimensão 3 a \mathbb{R}^3 munido com o produto interno da Equação (7.1). O *espaço euclidiano* é o nome dado para \mathbb{R}^3 munido do produto interno usual.

¹ Mas sim, em referência aos "absolutos" da geometria de Cayley-Klein, tema que não abordaremos aqui.

7.1 SIMETRIAS E GEODÉSICAS DO HIPERBOLOIDE

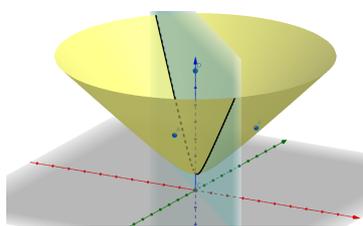
Assim como a esfera apresenta um grupo considerável de simetrias no espaço euclidiano, o hiperboloide também possui muitas simetrias naturais. A saber, temos três tipos de simetrias. As *reflexões*, ilustradas na Figura 66, que preservam o eixo vertical x e induzem bijeções do hiperboloide nele mesmo. Assim o fazem também as *rotações*, ilustradas na Figura 65, de um ângulo θ em torno do eixo x . E as chamadas *transformações de Lorentz*, conforme Figura 67, que fazem o hiperboloide "deslizar" sobre si mesmo, como uma espécie de rotação em torno do eixo horizontal y , mas induzindo bijeções do hiperboloide no próprio hiperboloide.

Figura 65 – Rotação



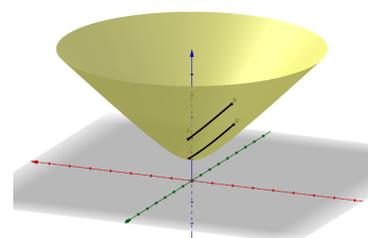
Fonte: Autoria própria

Figura 66 – Reflexão



Fonte: Autoria própria

Figura 67 – Transf. de Lorentz



Fonte: Autoria própria

Pode-se mostrar que as simetrias do hiperboloide são geradas por composições desses três tipos de simetrias: rotações R_θ por um ângulo θ , reflexões por um plano e as transformações de Lorentz, que podem ser representadas pelas matrizes:

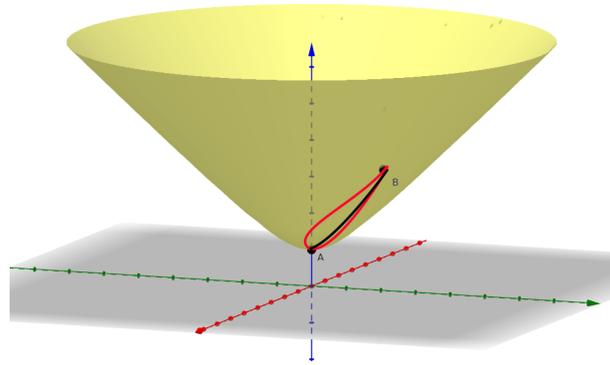
$$[R_\theta] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}, \quad [J_1] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad [L_s] = \begin{bmatrix} \cosh s & \sinh s & 0 \\ \sinh s & \cosh s & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Sabemos ainda, que para pontos suficientemente próximos, existe uma única geodésica que os contém, segundo o Teorema 5.36. Vejamos como são as geodésicas que conectam um ponto B qualquer do hiperboloide com seu polo norte $A = (1, 0, 0)$, na vizinhança de A .

Se uma geodésica liga A e B , então sua reflexão pelo plano que contém o eixo x e o ponto $B \neq A$, a leva em outra geodésica. Entretanto, como são determinadas de maneira única, as geodésicas do hiperboloide que passam pelo polo norte são as interseções do próprio hiperboloide com planos que contém o eixo x .

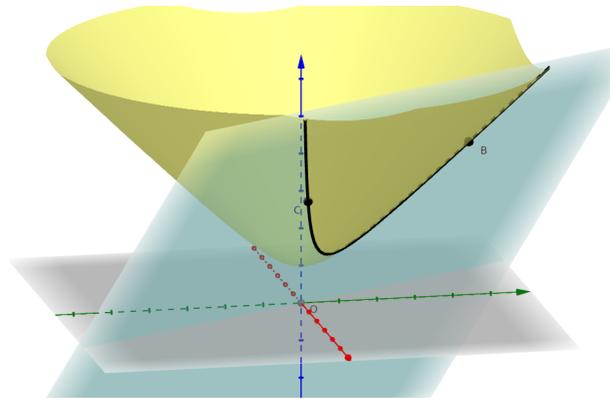
Para descobrir as geodésicas entre dois pontos quaisquer (suficientemente próximos) B e C do hiperboloide, podemos movimentar um deles, digamos o ponto C , até o polo norte A , por simetrias (rotações e transformações de Lorentz). Sendo as simetrias também transformações lineares, elas levam planos em planos e a origem 0 do espaço em si mesma. Então, a geodésica que passa por B e C é a curva na interseção do hiperboloide com o plano definido por B , C e 0 .

Figura 68 – Reflexões no hiperboloide levam geodésicas em geodésicas



Fonte: Autoria própria

Figura 69 – Geodésicas do hiperboloide (pontos suficientemente próximos)



Fonte: Autoria própria

7.2 MODELO DO DISCO DE BELTRAMI-KLEIN

O modelo de Beltrami-Klein pode ser obtido do hiperboloide ao projetarmos H^2 no plano $x = a$, com $a > 0$, usando a origem de \mathbb{R}^3 como centro de projeção.

Proposição 7.1. *Com centro na origem, a projeção de H^2 induz à Métrica (6.2), com $R = 1$ em uma região do plano.*

Demonstração. Se um ponto $P = (a, u, v)$ é a imagem do ponto $P' \in H^2$, então a reta $l(t)$ que passa por P e P' tem equação $l(t) = t \times (a, u, v)$. Porém, P' está na interseção de $l(t)$ com H^2 , de modo a satisfazer

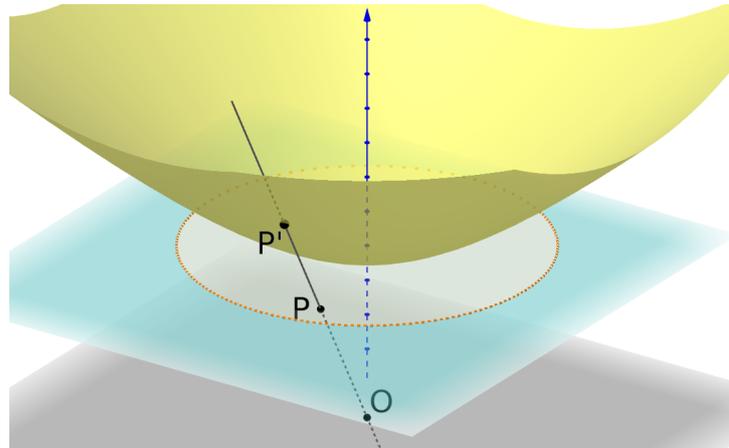
$$-t^2 a^2 + t^2 u^2 + t^2 v^2 = -1, \quad t > 0.$$

Assim², $t = \frac{1}{\sqrt{a^2 - u^2 - v^2}}$. Identifiquemos o plano $x = a$, que é um subconjunto de \mathbb{R}^3 , com \mathbb{R}^2 ; e portanto, temos o mapa:

$$\mathbf{r}(u, v) = \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 - u^2 - v^2}}, \frac{u}{\sqrt{a^2 - u^2 - v^2}}, \frac{v}{\sqrt{a^2 - u^2 - v^2}} \right).$$

² $a^2 > u^2 + v^2$.

Figura 70 – Projeção do hiperboloide com centro na origem



Fonte: Autoria própria

Desta forma,

$$\mathbf{r}_u(u, v) = \left(\frac{ua}{(a^2 - u^2 - v^2)^{3/2}}, \frac{a^2 - v^2}{(a^2 - u^2 - v^2)^{3/2}}, \frac{uv}{(a^2 - u^2 - v^2)^{3/2}} \right),$$

$$\mathbf{r}_v(u, v) = \left(\frac{va}{(a^2 - u^2 - v^2)^{3/2}}, \frac{uv}{(a^2 - u^2 - v^2)^{3/2}}, \frac{a^2 - u^2}{(a^2 - u^2 - v^2)^{3/2}} \right),$$

e a métrica é dada por:

$$E = \langle \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_u \rangle_H = \frac{a^2 - v^2}{(a^2 - u^2 - v^2)^2};$$

$$F = \langle \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v \rangle_H = \frac{uv}{(a^2 - u^2 - v^2)^2};$$

$$G = \langle \mathbf{r}_v, \mathbf{r}_v \rangle_H = \frac{a^2 - u^2}{(a^2 - u^2 - v^2)^2}.$$

□

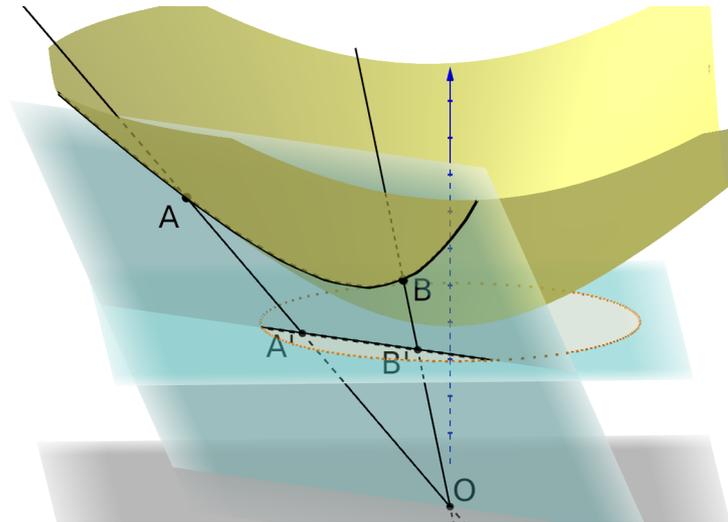
Observação 7.2. A projeção com centro O no plano $x = a > 0$ leva qualquer plano que passa pela origem na sua interseção com este mesmo plano. Contudo, as geodésicas do hiperboloide H^2 são obtidas pela interseção do plano $z = a$ com planos que passam pela origem e o intersectam. Sendo assim, as imagens das geodésicas por essa projeção são segmentos de reta.

7.3 MODELO DO DISCO (CONFORMAL) DE RIEMANN-BELTRAMI-POINCARÉ

A Métrica³ 6.3, que define o modelo do disco de Riemann-Beltrami-Poincaré, pode ser obtida do hiperboloide ao projetarmos H^2 no plano $x = 0$, usando como centro de projeção o "polo sul", $S = (-1, 0, 0)$ de H^2 .

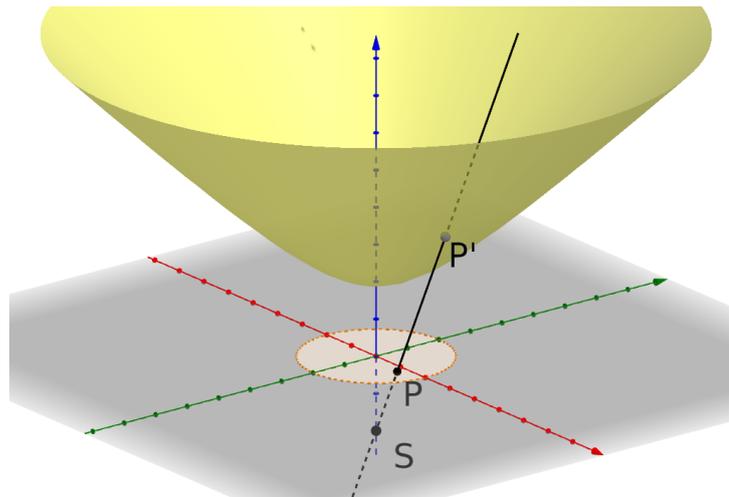
³ Com $R = 1$ e $a = 0$.

Figura 71 – As geodésicas do modelo Beltrami-Klein



Fonte: Autoria própria

Figura 72 – Projeção do hiperboloide com centro em $S = (-1, 0, 0)$



Fonte: Autoria própria

É possível verificar que essa projeção leva as geodésicas do hiperboloide em arcos de circunferência perpendiculares à fronteira do disco ou a cordas passando pelo centro do disco de raio unitário no plano $x = 0$.

Proposição 7.3. *A projeção com centro em $S = (-1, 0, 0)$ induz à Métrica (6.3), com $R = 1$, em uma região do plano.*

Demonstração. Se um ponto $P = (0, u, v)$ é a imagem do ponto $P' \in H^2$, então a reta $r(t)$ que passa por P e P' tem equação $r(t) = (t - 1, tu, tv)$. Porém, $P' = (x, y, z)$ está na interseção de $r(t)$ com H^2 , de modo a satisfazer

$$-(t - 1)^2 + t^2u^2 + t^2v^2 = -1, \quad t > 0.$$

Logo⁴, $t = \frac{2}{1-u^2-v^2}$. E, portanto, temos o mapa:

$$\mathbf{r}(u, v) = \left(\frac{1 + u^2 + v^2}{1 - u^2 - v^2}, \frac{2u}{1 - u^2 - v^2}, \frac{2v}{1 - u^2 - v^2} \right).$$

Com as derivadas em relação à u e v ,

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_u(u, v) &= \left(\frac{4u}{(1 - u^2 - v^2)^2}, \frac{2(u^2 - v^2 + 1)}{(1 - u^2 - v^2)^2}, \frac{4uv}{(1 - u^2 - v^2)^2} \right), \\ \mathbf{r}_v(u, v) &= \left(\frac{4v}{(1 - u^2 - v^2)^2}, \frac{4uv}{(1 - u^2 - v^2)^2}, \frac{2(-u^2 + v^2 + 1)}{(1 - u^2 - v^2)^2} \right), \end{aligned}$$

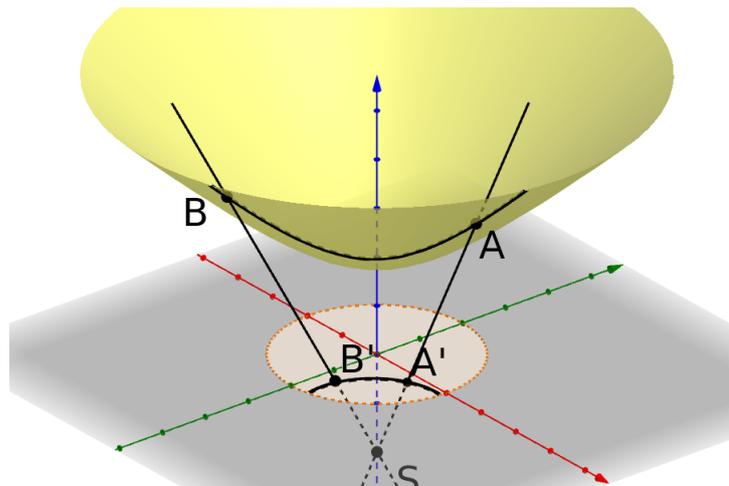
e a métrica determinada por:

$$\begin{aligned} E = \langle \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_u \rangle_H &= \frac{4}{(1 - u^2 - v^2)^2}; \\ F = \langle \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v \rangle_H &= 4; \\ G = \langle \mathbf{r}_v, \mathbf{r}_v \rangle_H &= \frac{4}{(1 - u^2 - v^2)^2}. \end{aligned}$$

□

As expressões de E , F e G correspondem ao modelo proposto por Beltrami em *Teoria*, conforme a Métrica 6.3, a menos de uma dilatação em u e v e da escolha do hiperboloide, o que não altera as propriedades geométricas da projeção, levando retas em retas e segmentos de reta em segmentos de reta.

Figura 73 – As geodésicas do modelo do disco de Riemann-Beltrami-Poincaré



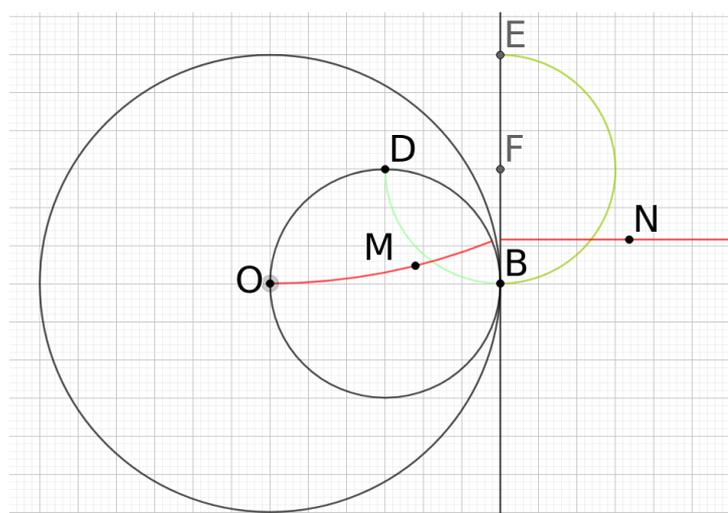
Fonte: Autoria própria

⁴ A expressão $1 - u^2 - v^2$ indica que a imagem do hiperboloide será um disco de raio unitário.

7.4 MODELO DO SEMIPLANO (CONFORMAL) DE LIOUVILLE-BELTRAMI

Observemos que o modelo do semiplano de Liouville-Beltrami pode ser obtido do modelo do disco anterior, por uma inversão. Suponha que a circunferência definida por O , D e B seja a fronteira do modelo do disco de Riemann-Beltrami-Poincaré. Agora, invertamos esse disco por uma outra circunferência, de tal modo que o diâmetro \overline{OB} seja um de seus raios. Então, o interior do disco é levado no semiplano à direita da reta \overleftrightarrow{BF} .

Figura 74 – Inversão do modelo do disco



Fonte: Autoria própria

As suas geodésicas podem ser encontradas a partir das geodésicas do disco de Riemann-Beltrami-Poincaré, pois inversões levam círculos e segmentos de reta em círculos e segmentos de reta, respectivamente, além de preservar os ângulos. Dessa forma, as geodésicas do semiplano são determinadas por arcos de circunferência perpendiculares à reta que define o semiplano \overleftrightarrow{BF} e também por semirretas perpendiculares à \overleftrightarrow{BF} .

8 CONCLUSÃO

O desenvolvimento do conhecimento geométrico vem sendo aprimorado ao longo dos séculos. Com Euclides e seu método axiomático, o rigor no pensamento científico se fez presente, minimizando ao máximo equívocos cometidos pela intuição. A precisão nas afirmações e deduções lógicas, considerando casos específicos e até mesmo desconhecidos, locais e globais, passou a fazer parte do cotidiano de qualquer matemático. Porém, as novas ideias e ponderações não devem ser ofuscadas, pois mesmo diante de suas grandiosas descobertas, Gauss viu-se preso à falta de coragem para expor suas ideias e divulgá-las, com medo da não aceitação por parte dos pensadores da época.

O diálogo de conhecimentos da Geometria e do Cálculo foi imprescindível para que a geometria não euclidiana se concretizasse, saindo do formalismo axiomático e tornando-se concreta. O estudo das superfícies de curvatura constante e negativa, abrangendo propriedades e parametrizações de curvas em diferentes superfícies, promovido pela geometria diferencial, foi o ponta pé inicial para os estudos de Beltrami, com os quais foi possível encontrar modelos consistentes da geometria não euclidiana, que já vinha sendo desenvolvida por János Bolyai e Lobachevsky.

A longa trajetória de conflitos, descasos, teimosias, persistência, dedicação, entusiasmo e criatividade (ou a sua falta), só fizeram com que os modelos de Beltrami nos mostrassem sua tamanha riqueza e beleza. Podemos afirmar que a possibilidade de parametrizarmos o mundo, refletindo o que nossos olhos conseguem ou não ver, diferentemente de planos e esferas, passou a fazer parte dos estudos de matemáticos ao longo de todo o século XIX. As parametrizações de Beltrami, juntamente com as considerações de Gauss e Riemann, foram e são fundamentais para o desenvolvimento das ciências e tecnologia até os dias atuais, especialmente da física-matemática.

Nossos esforços foram na tentativa de reconhecer o trabalho de Beltrami nesta enriquecedora história, pois na grande maioria dos materiais produzidos e divulgados em língua portuguesa, sobre geometria não euclidiana, sentimos a falta de menções ao seu nome, como também, dos princípios da geometria diferencial que possibilitaram seu desenvolvimento. Percebemos que há uma nítida preferência na divulgação do trabalho científico voltado diretamente a aplicações, o que pode ter resultado no reconhecimento equivocado da criação dos três modelos por Klein e Poincaré, deixando o nome de seu verdadeiro criador de lado.

Considerando a exploração das geometrias não euclidianas ser comum nos ensinamentos fundamental e médio via exemplos de geometrias diferentes da euclidiana; sem motivo de ser, procuramos descrever a educadores do nível básico de Matemática tais reflexões, contribuindo assim, para a desfeita de algumas injustiças históricas difundidas na cultura popular matemática ao longo dos tempos, bem como na divulgação do saber matemático.

REFERÊNCIAS

- ALVES, S. **Cronologia das tentativas de prova do postulado das paralelas**. Disponível em: <http://slideplayer.com.br/slide/3710326>. Acesso em: 26 set. 2018, 2018.
- ARCOZZI, N. Beltrami's models of non-euclidean geometry. 2012.
- BENEDETTI, A. C. **Quadrilátero de Saccheri**. Disponível em: <https://www.flickr.com/photos/aldoaldoz/4082750156>. Acesso em: 26 set. 2018, 2018.
- BICUDO, I. **Elementos/Euclides**. São Paulo: SP: Unesp, 2009.
- BONGIOVANNI, V. De euclides às geometrias não euclidianas. **Revista Iberoamericana de Educação Matemática**, n. 22, p. 14, 2010.
- BONOLA, R. **Non-Euclidean Geometry**. Chicago: IL: Open Court Publishing Company, 1912.
- CARMO, M. P. a. d. **Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies**. Rio de Janeiro: RJ: SBM, 2012.
- CARRERA, J. P. i. **Euclides: A geometria**. Lisboa: LB, 2012.
- COMMONS, W. **Curvatura gaussiana**. Disponível em: https://ca.wikipedia.org/wiki/Curvatura_gaussiana. Acesso em: 23 mar. 2019, 2019.
- COMMONS, W. **Felix Christian Klein**. Disponível em: https://pt.wikipedia.org/wiki/Felix_Klein. Acesso em: 23 mar. 2019, 2019.
- COMMONS, W. **Pseudo-esfera**. Disponível em: <https://docplayer.com.br/48695863-A-gloriosa-historia-da-geometria.html>. Acesso em: 23 mar. 2019, 2019.
- COMMONS, W. **Tractriz e a tractroide**. Disponível em: <https://en.wikipedia.org/wiki/Tractrix>. Acesso em: 23 mar. 2019, 2019.
- DEVIANTE. **Curvatura gaussiana**. Disponível em: <https://www.deviant.com.br/?s=gaussx=0y=0>. Acesso em: 28 abr. 2019, 2017.
- GARBI, G. G. **A Rainha das Ciências: um passeio histórico pelo maravilhoso mundo da matemática**. São Paulo: SP: Livraria da Física, 2006.
- IMAGES, G. **Euclides de Alexandria**. Disponível em: <https://www.gettyimages.pt/detail/foto/euclid-fotografia-de-stock/128546394>. Acesso em: 23 mar. 2019, 2019.
- MANFREDO. Geometrias não euclidianas. **Matemática Universitária**, n. 6, p. 23, 1987.
- MILNOR, J. Geometria hiperbólica: os primeiros 150 anos. **Boletim da Sociedade Americana de Matemática**, n. 1, p. 16, 1982.
- MLODINOW, L. **A janela de Euclides**. São Paulo: SP: Geração Editorial, 2008.
- MONTESORI, M. **Psico geometria: o estudo da geometria baseado na psicologia infantil**. Barcelona: CT: Casa Editorial Araluce, 1934.

PINA, R. d. S. O v postulado de euclides. **Olimpíada de Matemática do Estado de Goiás**, n. 1, p. 7, 2000.

PINTEREST. **Nikolai Ivanovich Lobachevsky**. Disponível em: <https://br.pinterest.com/pin/441282463465724767/?lp=true>. Acesso em: 25 out. 2018, 2018.

REAL, A. **John Playfair**. Disponível em: <http://astronomiareal.blogspot.com/2016/02/john-playfair-e-james-hutton-os-pais-da.html>. Acesso em: 23 mar. 2019, 2016.

ROQUE, T. **História da matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas**. Rio de Janeiro: RJ: Zahar, 2012.

SCHREIBER, P. **5000 Years of Geometry: Mathematics in History and Culture**. Berlim: BE: Birkhäuser, 2015.

STEWART, I. **Dezessete equações que mudaram o mundo**. Rio de Janeiro: RJ: Zahar, 2013.

THORGEIRSSON, S. Geometria hiperbólica: história, modelos e axiomas. **Universidade de Uppsala**, n. 1, p. 34, 2014.

VIEIRA, J. V. **Os quadriláteros de Saccheri e o surgimento da geometria hiperbólica**. Dissertação (Dissertação de Mestrado) — Universidade Federal do Espírito Santo, 2018.

WIKIPEDIA. **Parte superior da pseudo-esfera**. Disponível em: https://www.researchgate.net/figure/Figura-5-Pseudo-esfera_fig7_49601933. Acesso em: 23 mar. 2019, 2011.

WIKIPEDIA. **Henri Poincaré**. Disponível em: <http://www.portalcafebrasil.com.br/cafepedia/henri-poincare>. Acesso em: 23 mar. 2019, 2012.

WIKIPEDIA. **5º Postulado**. Disponível em: <http://www.fotomat.es/quinto-postulado-de-euclides>. Acesso em: 18 out. 2018, 2018.

WIKIPEDIA. **Eugenio Beltrami**. Disponível em: <http://aprender-mat.info/ingles/historyDetail.htm?id=Beltrami>. Acesso em: 25 out. 2018, 2018.

WIKIPEDIA. **Farkas Bolyai**. Disponível em: https://pt.wikipedia.org/wiki/Farkas_Bolyai. Acesso em: 24 out. 2018, 2018.

WIKIPEDIA. **Geometria Absoluta**. Disponível em: <https://www.kettererkunst.com/details-e.php?obnr=411303306&anummer=421>. Acesso em: 24 out. 2018, 2018.

WIKIPEDIA. **Giuseppe Battaglini**. Disponível em: https://en.wikipedia.org/wiki/Giuseppe_Battaglini. Acesso em: 25 out. 2018, 2018.

WIKIPEDIA. **János Bolyai**. Disponível em: https://pt.wikipedia.org/wiki/J%C3%A1nos_Bolyai. Acesso em: 24 out. 2018, 2018.

WIKIPEDIA. **Quadrilátero de Lambert**. Disponível em: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Quadrilatero>. Acesso em: 26 set. 2018, 2018.

WIKIPEDIA. **Retos, obtudos ou agudos?** Disponível em: www.picluck.net/tag/Euclide. Acesso em: 20 set. 2018, 2018.

WIKIPEDIA. **Selo húngaro de 1932**. Disponível em: http://aprender-mat.info/portugal/historyDetail.htm?id=Bolyai_Farkas. Acesso em: 25 out. 2018, 2018.

WIKIPEDIA. **Selo húngaro de 1975**. Disponível em: http://aprender-mat.info/portugal/historyDetail.htm?id=Bolyai_Farkas. Acesso em: 25 out. 2018, 2018.

WIKIPEDIA. **Selo húngaro em comemoração ao centenário da morte de J. Bolyai**. Disponível em: <https://www.alamy.es/imagenes/janos-bolyai.html>. Acesso em: 25 out. 2018, 2018.

WIKIPEDIA. **Tentamen**. Disponível em: <https://www.iberlibro.com/Appendix-Scientiam-Spatii-Absolute-Veram-exhibens/30196720826/bd>. Acesso em: 24 out. 2018, 2018.

WIKIPEDIA. **Cédula alemã de 10 marcos (1989)**. Disponível em: https://pt.wikipedia.org/wiki/Marco_alem%C3%A3o. Acesso em: 23 mar. 2019, 2019.

WIKIPEDIA. **Euclides livre de todas as máculas**. Disponível em: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Saccheri>. Acesso em: 23 mar. 2019, 2019.

WIKIPEDIA. **Johann Heinrich Lambert**. Disponível em: <https://desciclopedia.org/wiki/Lambert>. Acesso em: 23 mar. 2019, 2019.

WIKIPEDIA. **Selo alemão em homenagem a Gauss**. Disponível em: <https://pt.dreamstime.com/um-selo-alemao>. Acesso em: 23 mar. 2019, 2019.