Universidade Federal de Mato Grosso
Instituto de Ciências Exatas e da Terra
Departamento de Matemática

Resolução de Problemas como uma Estratégia Didática para o Ensino da Matemática

Paula Eugenia dos Santos
Mestrado Profissional em Matemática: PROFMAT/SBM

Orientador: **Prof. Dr. Vinícius Machado Pereira dos Santos**

Trabalho financiado pela Capes

Cuiabá - MT

Março de 2019

Resolução de Problemas como uma Estratégia Didática para o Ensino da Matemática

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação, devidamente corrigida e defendida por Paula Eugenia dos Santos e aprovada pela comissão julgadora.

Cuiabá, 8 de maio de 2019.

Prof. Dr. Vinícius Machado Pereira dos Santos
Orientador

Banca examinadora:

Prof. Dr. Vinícius Machado Pereira dos Santos
Prof. Dr. Djeison Benetti
Prof. Dr. William Vieira Gonçalves

Dissertação apresentada ao curso de Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT, da Universidade Federal de Mato Grosso, como requisito parcial para obtenção do título de **Mestre em Matemática**.

Dados Internacionais de Catalogação na Fonte.

S237r Santos, Paula Eugenia dos.
Resolução de Problemas como uma Estratégia Didática para o Ensino da Matemática / Paula Eugenia dos Santos. -- 2019
xiii, 48 f. : il. color. ; 30 cm.

Orientador: Vinícius Machado Pereira dos Santos.
Dissertação (mestrado profissional) – Universidade Federal de Mato Grosso, Instituto de Ciências Exatas e da Terra, Programa de Pós-Graduação Profissional em Matemática, Cuiabá, 2019.
Inclui bibliografia.

1. Resolução de Problemas. 2. Ensino da Matemática. 3. História da Matemática. 4. Estratégia Didática. I. Título.

Ficha catalográfica elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO
PRÓ-REITORIA DE ENSINO DE PÓS-GRADUAÇÃO
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática em Rede Nacional – PROFMAT
Av. Fernando Corrêa da Costa, 2367 – Boa Esperança – 78.060900 – Cuiabá/MT
Tel: (65) 3615-8576 – E-mail: prorfmat@ufmt.br

FOLHA DE APROVAÇÃO

Título: "Resolução de problemas como uma estratégia didática para o ensino da Matemática"

Autor: Paula Eugênia dos Santos

defendida e aprovada em 05/04/2019.

Composição da Banca Examinadora:

Presidente Banca/Orientador Doutor Vinicius Machado Pereira dos Santos
Instituição: Universidade Federal de Mato Grosso

Djeison Benetti
Examinador Interno Doutor Djeison Benetti
Instituição: Universidade Federal de Mato Grosso

Examinador Externo Doutor William Vieira Gonçalves
Instituição: Universidade do Estado de Mato Grosso

Aldi Nestor de Souza
Examinador Suplente Doutor Aldi Nestor de Souza
Instituição: Universidade Federal de Mato Grosso

Cuiabá, 05/04/2019.

À meu marido Jeferson, pais e filhos: Lorrayne, Jared e Julia pela compreensão, incentivo e amor.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus.

A meu marido Jeferson, por ser meu companheiro e incentivar-me em todos os momentos.

Aos meus filhos Lorrayne, Jared e Julia por incentivar-me nos meus piores dias.

Aos meus pais, Maria das Graças e Jose Eugenio por me ensinar o valor da educação.

A minhas irmã, Karen Cristina pela prontidão em servir.

Aos colegas do PROFMAT, Adriana, Claudio, Claudeir, Jaqueline Mariano, Jaqueline Soares, Juliano, Luiz, Ondrias, Osvaldo, Priscila, Valcir, Vinícius, Zeila e Silvana por me ajudarem nessa caminhada.

Aos professores do PROFMAT-UFMT, Aldi Nestor, Ruikson Silas, André Krindges, Reinaldo de Marchi, Moises Cecconello, Hector Callisaya, Vinícius Santos e Djeison Benetti pela dedicação, tempo e conhecimento.

Ao meu Orientador professor Vinícius Machado Pereira dos Santos, pela orientação, apoio, paciência e ensinamentos.

Ao coordenador do PROFMAT-UFMT, Professor Geraldo Lúcio Diniz, pelo comprometimento que tem pelo curso.

Aos professores Willian Vieira Gonçalves e Djeison Benetti, membros da banca examina-

dora, por todos as contribuições que agregaram maior siginificado à minha dissertação.

*T*udo tem o seu tempo determinado, e há tempo para todo o propósito debaixo do céu.

Há tempo de nascer, e tempo de morrer; tempo de plantar, e tempo de arrancar o que se plantou;

Tempo de matar, e tempo de curar; tempo de derrubar, e tempo de edificar;

Tempo de chorar, e tempo de rir; tempo de prantear, e tempo de dançar;

Tempo de espalhar pedras, e tempo de ajuntar pedras; tempo de abraçar, e tempo de afastar-se de abraçar;

Tempo de buscar, e tempo de perder; tempo de guardar, e tempo de lançar fora;

Tempo de rasgar, e tempo de coser; tempo de estar calado, e tempo de falar;

Tempo de amar, e tempo de odiar; tempo de guerra, e tempo de paz.

Que proveito tem o trabalhador naquilo em que trabalha?

Tenho visto o trabalho que Deus deu aos filhos dos homens, para com ele os exercitar.

Eclesiastes 3:1-10

Resumo

Nesta dissertação apresentamos conceitos, tipos e objetivos da Resolução de Problemas, sua utilização como uma estratégia didática para o ensino da Matemática, de forma a provocar o interesse dos alunos contribuindo com a construção do conhecimento. Abordamos as práticas matemáticas desde os primordios e a sistematização de ideias. Apresentamos, também, pesquisas da vida e obras de alguns personagens históricos e buscamos vestígios de Resolução de Problemas em alguns momentos da História da Matemática, resgatando métodos e importantes contribuições feitas por: Euclides, Pappus, Descartes, Euler e Polya, que nos auxiliarão com novos métodos utilizados em sala de aula. Esta breve discussão sobre a Resolução de Problemas tem como objetivo, auxiliar e enriquecer os métodos utilizados por professores em nossas práticas.

Palavras chave: Resolução de Problemas, Ensino de Matemática, História da Matemática, Estratégia Didática.

Abstract

In this masters thesis we present concepts, types and objectives of Problem Solving, its use as a didactic strategy for the teaching of Mathematics, in order to provoke the interest of students contributing to the construction of knowledge. We approach mathematical practices from the beginning and the systematization of ideas. We also present researches on the life and works of some historical figures and look for traces of Problem Solving in some moments of the History of Mathematics, rescuing methods and important contributions made by Euclides, Pappus, Descartes, Euler and Polya, who will help us with new methods used in the classroom. This brief discussion on Problem Solving aims to help and enrich the methods used by teachers in our practices.

Keywords: Problem Solving, Teaching Mathematics, History of Mathematics, Didactic Strategy.

Sumário

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Introdução

O processo de ensino Aprendizagem tem sido centrado na transmissão de conhecimento, principalmente o que emana do professor. Buscando superar as limitações inerentes a essa forma de ensino, onde o aluno pouco participa, propomos como objetivo deste trabalho avançar em relação a Resolução de Problema como estratégia didática para o ensino da Matemática.

Segundo Ministério da Educação (2018), a Resolução de Problemas pode desenvolver nos alunos a mobilização do conhecimento e a capacidade de gerenciar as informações, possibilitando oportunidades de ampliar seu conhecimento matemático, bem como sua visão sobre problemas, desenvolvendo sua autoconfiança e tornando-o crítico.

A motivação da pesquisa sobre Resolução de Problemas perpassando por alguns momentos da História da Matemática, surge com minha prática em sala de aula por mais de uma década, quando tive a oportunidade de observar alunos do ensino fundamental da Escola Estadual Profª Vanil Stabilito na cidade de Várzea Grande-MT. De acordo com PPP E.E. Professora Vanil Stabilito (2017), o objetivo de trabalho da unidade é oferecer qualidade nas diferentes áreas do conhecimento, preparando o aluno para o exercício pleno da cidadania. Decidi utilizar a Resolução de Problemas como uma estratégia para atingir o objetivo e auxiliar os alunos à tornarem-se autônomos em suas decisões.

Em minha primeira experiência na utilização de Resolução de Problemas como estratégia didática no ano de 2011 observei que as aulas das turmas do 7º ano do ensino fundamental tornaram-se mais desafiadoras, dinâmicas e motivadoras.

Esta experiência dois anos depois me oportunizou observar que os mesmos alunos em fases diferentes, frequentando o 9º ano do ensino fundamental e que já haviam trabalhado com Resolução de Problemas anteriormente são: curiosos, criativos, gostam de desafios e conseguem desenvolver estratégias para serem autônomos.

Assim, este trabalho justifica-se pela possibilidade de promover maior conhecimento por meio de pesquisas das obras e vida de alguns personagens matemáticos, encontrando vestígios de Resolução de Problemas e métodos que possam contribuir com o Ensino da Matemática, propiciando auxilio ao professor no desenvolvimento da compreensão e de algumas competências e habilidades necessárias para formação do indivíduo de forma crítica.

No primeiro capítulo apresentamos conceitos e tipos de problemas para um melhor entendimento, abordamos alguns objetivos da Resolução de Problemas para a educação básica, algumas características que devem ser observadas para a escolha de bons problemas e tópicos da BNCC[1] relacionados a Resolução de Problemas como proposta organizacional para melhoria do ensino.

De acordo com Dante (2007), a situação que exige um pensamento para solucionar é considerada problema e se utilizarmos saberes matématicos, então serão problemas matemáticos.

No segundo capítulo, abordamos as práticas matemáticas desde os primordios, seu estabelecimento, o surgimento de alguns ramos da matemática conforme ampliam-se as necessidades, a sistematização de ideias e a noção da matemática primitiva. Segundo Ministério da Educação (2018), a criança participa de situações que requer soluções desde o seu nascimento, logo começam também a precisar de interpretação, compreensão e assim vão se apropriando pouco-a-pouco de conhecimento, mediante a sua interação com o meio em que vive.

No terceiro capítulo, abordamos algumas contribuições de vestígios de Resolução de Problemas nas obras e vida dos seguintes personagens históricos: Euclides, Pappus, Descartes, Euler e Polya, apresentamos a busca deles por soluções, possibilitando a análise dos métodos e a contribuição de diferentes estratégias.

A escolha por procurar vestígios de problemas nas obras de Euclides foi devido ao seu livro "Os elementos"que segundo Eves (2011) foi o livro, com exceção da Bíblia, com maior tradução e grande influência no pensamento científico. Já a escolha por pesquisar as obras de Pappus foi devido ele ser considerado o último grande sucessor de Euclides na Escola de Alexandria. A escolha por Descartes foi por ele ter como objetivo a elaboração de um método geral matemático-dedutivo(Balieiro Filho, 2017). Já a escolha por Euler

[1]Base Nacional Comum Curricular

foi por sua grande contribuição à diversos ramos da matemática. Estudar as obras de Polya é devido a ser uma referência mais contemporânea a sistematização de método de Resolução de Problemas.

A matemática grega foi marcada por práticas de Resolução de Problemas como destaca Roque (2012), e o livro Os elementos de Euclides não era caracterizado pelos padrões da epóca que eram práticos. Assim, Euclides surge com o saber teórico desenvolvendo: axiomas, definições e postulados e criando padrões que auxiliam na Resolução de Problemas.

Segundo Balieiro Filho (2017), Pappus é considerado o último grande matemático da Escola de Alexandria, encerrando o legado de Euclides. Destacamos suas resoluções comentadas, utilizando o método de análise e síntese, auxiliando de forma efetiva e esclarecendo os problemas.

Descartes dedica-se a problemas de sua época, o que contribuiu para elaboração do método matemático-dedutivo que aperfeiçoa a ciência. Para Roque (2012), Descartes era influenciado pela crença que o desenvolvimento técnico poderia melhorar a vida do homem, o que lhe ajuda a conduzir princípios diferentes à sua época.

As contribuições de Euler na Resolução de Problemas são insuperáveis, Boyer (1974) destaca que são vários os ramos da Matemática influenciados. Sua produtividade é surpreendente, conhecido pela quantidade de notações que criou e por escrever, aplicar e solucionar problemas que também tinham aspectos relacionados as ciências sociais.

George Polya foi o último personagem estudado, foram observados seus quatros passos para Resolução de Problemas e o pequeno dicionário de heurística com suas contribuições como estratégia didática. Polya enfatiza, que há algo na Resolução de Problemas que nos proporcionam experimentar sentimentos que poderão marcar a mente de uma pessoa.

A Resolução de Problemas com seus desafios tem despertado ao longo do tempo à produção de conhecimento, estabelecendo tendêcias e melhorando a compreensão.

> Nesse sentido, aproximamo-nos do percurso dos matemáticos na produção de novos conhecimentos matemáticos. A História da Matemática nos mostra que os avanços conceituais estão atrelados ao desafio de resolver algum problema, seja ele de cunho prático, real ou intrínseco à própria matemática (Dalcin e Santos, 2013, p.66).

Segundo Dalcin e Santos (2013), a busca por soluções de problemas auxilia no desenvolvimento de percursos conceituais e gera situações que direcionam novos caminhos.

A História da Matemática nos auxilia a observar que a busca por soluções de problemas gera produção de conhecimento e a produção de conhecimento gera novas articulações de situações, ampliando o aprendizado.

Capítulo 1

Resolução de Problemas

Entendo por problemas ou problemas matemáticos, situações que podem ser caracterizadas por uma ou mais realizações de sequências de procedimentos mentais com intenção de alcançar as soluções, percorrendo caminhos que não são previamente conhecidos, muitos exigem esforço e dedicação. Resolução de Problemas requer: entendimento sobre assunto, estabelecer estratégias e utilizar mecanismo que são essenciais na busca por soluções.

Segundo Dante (2007), problema é qualquer situação que exija o pensar do indivíduo para solucioná-la. Problema Matemático é qualquer situação que exija a maneira de pensar e conhecimentos matemáticos para solucioná-lo.

Estimular o aluno pensar, desenvolver o raciocínio lógico, ensinar a enfrentar novas situações e tornar as aulas mais interessantese motivadoras são alguns dos objetivos da Resolução de Problemas (Dante, 2008). Assim, um mundo em constante mudanças exige um aluno disposto a resolver novos problemas.

> As rápidas mudanças sociais e o aprimoramento cada vez maior e mais rápido da tecnologia impedem que se faça uma previsão exata de quais habilidades, conceitos e algoritmos matemáticos seriam úteis hoje para preparar um aluno para sua vida futura. Ensinar apenas conceitos e algoritmos que atualmente são relevantes parece não ser o caminho, pois eles poderão tornar-se obsoletos daqui a quinze ou vinte anos, quando a criança de hoje estará no auge de sua vida produtiva. Assim, um caminho bastante razoável é preparar o aluno para lidar com situações novas, quaisquer que sejam elas. E, por isso, é fundamental desenvolver nele iniciativa, espírito explorador, criatividade e independência através da resolução de problemas (Dante, 2007, p.12).

O mundo está em constante transformação e nos revela novos conceitos e novas habilidades. Com mudanças constantes tudo parece obsoleto com o passar dos dias, mas a História da Matemática tem nos ensinado através de seus episódios, que mesmo com uma vida moderna, podemos ensinar nossos alunos a desenvolverem habilidades milenares que podem deixa-lós sempre modernos. O desenvolvimento da independência através de Resoluções de Problemas, poderá auxiliar na formação de um ser crítico, explorador, criativo e autônomo em suas iniciativas.

> Um problema é toda a situação na qual o indivíduo confrontado não tem garantia de obter solução com o uso de um algoritmo, sendo que todo o conhecimento relevante desta pessoa deve ser combinado de maneira nova para resolver esta questão (Diniz, 1988, p.15).

Segundo Diniz (1988), uma situação na qual o indivíduo é de certa forma confrontado sem garantias de nenhuma solução é chamada de problema. A resolução desse problema deve ser sugestiva e exige indivíduos com atitudes ativas, esforçados e que buscam respostas para seus próprios enfrentamentos. Assim, a Resolução de Problemas é baseada em uma determinada situação e todo conhecimento adquirido anteriormente será utilizado em forma de investigação, exigindo do indivíduo esforços que culminarão com uma possível resposta.

Conceituar e exemplificar os tipos de problemas é um procedimento didático que poderá contribuir na aprendizagem do aluno. São vários os tipos de problemas matemáticos, nos baseando em (Dante, 2007) podemos classificá-los da seguinte forma:

Tabela 1.1: Os Tipos de Problemas

Tipos de problemas	**Exemplos**
Exercícios de reconhecimento: são aqueles cujo objetivo identifique ou reconheça um determinado conceito, definição, propriedade, etc.	Uma dezena é equivalente a quantas unidades?
Exercícios de algoritmos: são aqueles cujo o objetivo é treino de habilidade e relembrar conhecimentos antes adquiridos, que no nível elementar são resolvidos passo a passo com algoritmos de adição, subtração, multiplicação e divisão do conjunto dos naturais.	Efetue a adição dos números 27+ 35.
Problemas de quebra cabeça: são aqueles que desafiam a maioria dos alunos, normalmente utiliza a chamada matemática recreativa e a solução desse problema geralmente depende da sorte ou de truques.	Se 3 gatos matam 3 ratos em 3 minutos, quanto tempo levarão 100 gatos para matar 100 ratos?

Problemas Padrão: são aqueles cujo o objetivo e fixar e recordar algoritmo com as quatro operações fundamentais da matemática reconhecendo sua utilização em problemas do cotidiano. Não exige estratégias na sua aplicação pois, e´ uma aplicação direta.	Exemplo Problemas Padrão Simples: Uma galinha tem dois pés. Quantos pés têm 13 galinhas? Exemplo Problemas Padrão Compostos: Lorrayne tem 8 anos mais que Jared. Os dois Juntos têm 30anos, sabemos que somando suas idades é o quíntuplo da idade de Julia que tem 6 anos. Qual a idade de cada um deles?
Problemas-processo ou heurísticos: são aqueles cujo o objetivo é aguçar a curiosidade do aluno de forma que permita sua criatividade, iniciando seu no desenvolvimento de estratégias e procedimentos que os auxiliaram a resolver problemas e despertar seu espírito explorador. Na maioria das vezes seus enunciados não são traduzidos de forma direta, exigindo entendimento e estratégia de plano de resolução tornando-se interessantes.	João chega em um jantar de natal e encontra 7 pessoas na sala de estar, se todos que estão na sala incluindo João trocar um aperto de mão com cada convidado que esta na sala. Quantos apertos de mão teremos ao total?
Problemas de aplicação: são aqueles que procura matematizar uma situação real, que exigem matemática na sua resolução, são chamados também de situação problema, também são conhecidos por despertar o interesse e utilizar conhecimentos adquiridos anteriormente.	Para uma determinada aula em um Aquário Municipal, uma escola alugou 4 ônibus. Em cada ônibus foram colocados 32 alunos. Além dos alunos, 8 professores acompanharam os alunos. Determine, quantas pessoas ao todo participaram dessa aula?

Fonte: adaptado de Dante, 2007.

Para Darsie e Palma (2013), são vários os tipos de problemas, cada um com sua particularidade e devem ser aplicados depois de reflexão sobre quais devem ser os objetivos e habilidades alcançadas, dando ênfase a todo processo de resolução e não somente ao resultado final. A forma com que o professor conduzirá o processo está intrinsecamente ligada à sua concepção do que é um problema e qual o significado o problema terá para o aluno.

> A resolução de problemas (RP) vem se constituindo nas últimas décadas como uma das principais metodologias de ensino da matemática, citada em diferentes documentos oficiais, a exemplo dos PCN[a] E DO PCNEM [b] , e fortemente presente no discurso dos professores de matemática.(Dalcin e Santos, 2013, p.63)
>
> [a]Parâmentros Curriculares Nacionais
> [b]Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio

O destaque da Resolução de Problemas entre os educadores, é vinculada as constantes mudanças ocorridas no estilo de vida da população e na necessidade de pessoas com capacidades para resolver seus próprios enfrentamentos.

Os problemas precisam ser bem escolhidos e segundo Dante (2000), bons problemas para serem escolhidos, devem ter algumas características observadas na tabela abaixo:

Tabela 1.2: Tabela de Boas Característica para escolha de um problema

Problemas	**Características**
1. Ser desafiador:	Os alunos normalmente são incentivados a resolverem problemas que não os desafiam, sabemos, no entanto, que precisam ser motivados para sentirem o desejo de procurar a solução.
2. Ser real:	Um problema do cotidiano pode ser o incentivo que eles precisam para serem motivados, resolverem seus próprios enfrentamentos pode estimular.
3. Ser interessante:	Deve ser escolhido um problema de acordo com a idade e nível de escolaridade de cada aluno, devem também ser pensado a vivência do aluno.
4. Ter um nível adequado de dificuldade:	O problema precisa ser desafiador, mas seu nível de dificuldade não pode causar no aluno frustações, que muitas vezes podem ser irreversíveis

Fonte: adaptado de Dante, 2000.

Dante (2000) mostra boas característica que podem ser utilizadas na escolha de um bom problema, logo para que uma escolha seja bem feita deve-se ter um planejamento adequado.

O problema apresentado ao aluno deve ser desafiador, real e interessante, devendo ser resolvido por um ou mais algoritmo com tempo suficiente para uma boa compreensão. A dificuldade em entender, torna a exploração do problema cada vez mais trabalhosa. Nesse momento o professor não deve dar respostas diretas, precisa aguçar no aluno o interesse por palavras desconhecidas e depois dos novos significados reformular o problema.

> Se a criança rega a planta com uma mangueira, produz uma parábola que deve ser levada em conta para atingir o jato de água, enfrenta a reação da mangueira ao jato, usa o dedo para transformar o esguicho continuo em gotas, produz arco-íris, experimenta que a distancia onde cai a água varia com a inclinação da mangueira. São inúmeras informações provocando acomodações junto ao conhecimento já construído. (Rosa Neto, 2005, p. 43)

Segundo Rosa Neto (2005), a aprendizagem do aluno inicia antes de sua frequência à escola pois, toda situação antes vivida é uma forma de aprendizagem. Assim, quando a criança rega uma planta em casa está vivenciando a prática e quando chega a escola precisa aprender os conceitos de suas práticas, logo precisamos utilizar práticas vividas para que o conceito se torne interessante pois esse conceito de certa forma o auxiliará a resolver seus problemas, ou seja, seus enfrentamentos.

Segundo Ministério da Educação (2018), a Matemática é uma área do conhecimento, que dispõe de várias articulações com o intuito de garantir o relacionamento do aluno com o mundo real, associando conceitos e propriedades nas atividades propostas, com o objetivo de oportunizar o desenvolvimento da capacidade de identificar a utilização da matemática para resolver problemas e obter soluções segundo seu próprio contexto. O desenvolvimento dessas habilidades está intrinsecamente relacionado com os métodos de aprendizagem, estrátegias de ensino e as situações da vida cotidiana.

> Os processos matemáticos de resolução de problemas, de investigação, de desenvolvimento de projetos e da modelagem podem ser citados como formas privilegiadas da atividade matemática, motivo pelo qual são, ao mesmo tempo, objeto e estratégia para a aprendizagem ao longo de todo o Ensino Fundamental. Esses processos de aprendizagem são potencialmente ricos para o desenvolvimento de competências fundamentais para o letramento matemático (raciocínio, representação, comunicação e argumentação) e para o desenvolvimento do pensamento computacional (Ministério da Educação, 2018, p.266).

Vários são os objetivos e estratégias de forma a garantir o desenvolvimento das competências e proporcionar ao aluno uma aprendizagem de qualidade. Com essa intenção, o Ministério da Educação (2018) propõe cinco unidades temáticas, que orientam na formulação das habilidades no ensino fundamental, são elas: Números, Álgebra, Geometria, Grandezas e medidas e Probabilidade e estatística. Todas as unidades temáticas propõe como estratégia a abordagem de Resoluções de Problemas, principalmente os problemas relacionados a vida cotidiana dos alunos.

A Resolução de Problemas é indicada, como ponto de partida para atividades matemáticas, possibilitando discussões em sala de aula, com uma abordagem diferenciada, com enfaze no pensar, penguntar e somente depois agir:

> ... quando os professores ensinam matemática através da resolução de problemas, eles estão dando a seus alunos um meio poderoso e muito importante de desenvolver sua própria compreensão. À medida que a compreensão dos alunos se torna mais profunda e mais rica, sua habilidade em usar matemática para resolver problemas aumenta consideravelmente (Onuchic, 1999, p.208).

A possibilidade do aluno construir sua própria compreensão de conceitos matemáticos, aplicar em diferentes situações e principalmente entender essa aplicação em seus próprios desafios, é uma experiência individual e única, pois é sua história vivida, ou seja, é a aplicação da matemática prática. Nessa perspectiva, discutiremos a Matemática Prática no próximo capítulo.

Capítulo 2

Matemática Prática

Neste Capítulo abordaremos partes do desenvolvimento prático da matemática ao longo da história, seu estabelecimento, surgimento de alguns ramos da matemática conforme as necessidades. Discutiremos alguns fatores que contribuiram para a ampliação e sistematização de ideias e da noção da matemática primitiva.

Segundo Eves (2011), foi na aritmética e na mensuração prática que ocorreu a ênfase inicial da matemática. Devido a mudanças no clima, transformando várias regiões em que o homem vivia, ocorreu uma migração ocupando novos espaços e impulsionando o desenvolvimento da agricultura em larga escala.

De acordo com Roque (2012), pode-se conjecturar a existência de uma matemática prática e recreativa nas culturas babilônica e egípcia que espalhou-se por todo Oriente durante a Antiguidade e que estava estabelecida nas comunidades comerciais.

> Assim, pode-se dizer que a matemática primitiva originou-se em certas áreas do Oriente Antigo primordialmente como uma ciência prática para assistir a atividades ligadas à agricultura e à engenharia. Essas atividades requeriam o cálculo de um calendário utilizável, o desenvolvimento de um sistema de pesos e medidas para ser empregado na colheita, armazenamento e distribuição de alimentos, a criação de métodos de agrimensura para a construção de canais e reservatórios e para dividir a terra e a instituição de práticas financeiras e comerciais para o lançamento e a arrecadação de taxas e para propósitos mercantis (Eves, 2011, p.57).

Para Eves (2011), o aumento na utilização das práticas matemáticas foi devido às necessidades que deveriam ser supridas, pois para um melhor desenvolvimento, requeriam calendários no auxílio à plantação, no armazenamento e na distribuição. E para a continuidade da melhoria nas plantações precisavam de métodos cada vez mais aprimorados, que consistia no desenvolvimento da geometria, que estava em constante evolução.

Desde os primórdios, como aponta Eves (1992) em sua Apresentação, a Matemática se relaciona intimamente com a história da civilização, tornando-se uma das principais alavancas do progresso humano.

Os problemas práticos que nascem no cotidiano levam a produção do conhecimento, já o conhecimento organizado e transformado torna-se ciência.

> ... a geometria deve ter se iniciado provavelmente em tempos muito remotos na antiguidade, a partir de origens muito modestas, depois cresceu gradualmente até alcançar a dimensão enorme que tem hoje (Eves, 1992, p.1).

De acordo com Eves (1992), a geometria deve ter originado-se de simples observações da capacidade humana de reconhecer configurações físicas, comparar as formas e tamanhos. O conceito de noção de distância provavelmente foi um dos primeiros a ser desenvolvido, juntamente com a necessidade de delimitar a terra.

> Assim o tradicional relato localiza na agrimensura prática do antigo Egito os primórdios da geometria como ciência; de fato, a palavra "geometria" significa"medida da terra". Embora não possamos ter certeza de sua origem, parece seguro assumir que a geometria científica brotou de necessidades práticas, surgidas vários milênios antes de nossa era, em certas áreas do Oriente antigo, como uma ciência para assistir atividades ligadas à agricultura e à engenharia (Eves, 1992, p.3).

Segundo Eves (2011), depois do desenvolvimento da agricultura surgem quantidades excedentes de produção, iniciando a primeira prática de comércio e o homem começa a lidar com o comércio que consiste em problemas diferentes, ou seja, na busca por respostas para um melhor desenvolvimento da sociedade.

Outro passo importante para o desenvolvimento da Matemática foi o surgimento da escrita que datam de aproximadamente de quatro mil anos antes da era comum.

> As primeiras formas de escrita foram motivadas pela necessidade de se registrar quantidades e não foi somente o controle de rebanhos a maior motivação para a criação dos números, e sim o registro de quantidades de insumos relacionados à sobrevivência, mas - sobretudo - à organização da sociedade (Roque, 2012, p.2).

A invenção dos egípcios de um material muito parecido com o papel, o chamado o papiro que mais tarde, por volta de 650 antes da nossa era, foi introduzido na Grécia, auxiliando no desenvolvimento da matemática, pois com as facilidades de anotações ampliaram as memórias dando maior poder ao homem, guardando partes de sua produção intelectual.

Segundo Boyer (1974), o desenvolvimento do Egito ocorreu de forma rápida, devido a dedicação em resolver problemas de sua própria sociedade, utilizavam operações de adição, demonstravam também interesses por astronomia e medicina.

> Todos os 110 problemas incluídos nos papiros Moscou e Rhind são numéricos, e boa parte deles é muito simples. embora a maioria tenha origem prática, há alguns de natureza teórica (Eves, 2011, p.72).

Para Eves (2011) os papiros já encontrados, entre eles os de Moscou e de Rhind, mostram que muitos problemas eram numéricos e práticos, mostrando o desenvolvimento do processo egípcio de multiplicação e alguns vestígios do uso de ábacos.

Vários dos 110 problemas também mostram sua origem prática, quando surgem questões sobre alguns assuntos tais como: pão, cerveja, balaceamento de rações dos animais domésticos e de como armazenar seus grãos. A maioria de suas resoluções eram simples, o método de resolução posteriormente ficou conhecido na Europa como regra de falsa posição.

Partes do desenvolvimento da matemática na Babilônia é devido a mensuração e, segundo Eves (2011) a principal marca da geometria babilônica é o seu caráter algébrico, pois seus problemas geralmente eram expressos em terminologias geométricas.

> A geometria babilônica se relaciona intimamente com a mensuração prática. De numerosos exemplos concretos infere-se que os babilônios do período 2000 a.c. a 1600 a.c. deviam estar familiarizados com as regras gerais da área do retângulo, da área do triângulo retângulo e do triângulo isósceles (e talvez da área de um triângulo genérico), da área de um trapézio retângulo, do volume de um paralelepípedo reto-retângulo e, mais introdução à história da matemática geralmente, do volume de um prisma reto de base trapezoidal (Eves, 2011, p.60).

A mensuração prática é a precursora da geometria babilônica, são vários exemplos mostrando o conhecimento babilônicos sobre geometria, entre eles a utilização de regras no desenvolvimento de algumas áreas tais como: triângulos, retângulos, trapézio retângulo e alguns tipos de volumes.

2.1 Contagem Primitiva

Falar sobre o início do desenvolvimento matemático na história, não é tarefa fácil, pois o homem primitivo sistematiza ideias de uma noção matemática quando utiliza grandezas, formas e números, mesmo com um limitado senso numérico.

O início da matemática está além de épocas pré-humanas ou além da epóca pré-orgânica pois, a matemática segundo Platão sempre existiu.

> Ou se pode dizer que a matemática teve início em épocas pré-humanas com a manifestação de senso numérico e reconhecimento de modelos, embora muito limitadamente, por parte de alguns animais, pássaros e insetos? Ou mesmo antes disso, nas relações numéricas e espaciais das plantas?(Eves, 2011, p.25).

Segundo Eves (2011), usualmente consideramos matemática aquela que resulta de alguns esforços do homem em sistematizar conceitos de grandezas, formas e números, e será com essa visão que observaremos o surgimento do conceito de número e do processo de contar.

> O conceito de número e o processo de contar desenvolveram-se tão antes dos primeiros registros históricos (há evidências arqueológicas de que o homem, já há uns 50 000 anos, era capaz de contar) que a maneira como ocorreram é largamente conjectural. Não é difícil, porém, imaginar como isso provavelmente se deu. É razoável admitir que a espécie humana, mesmo nas épocas mais primitivas, tinha algum senso numérico, pelo menos ao ponto de reconhecer mais e menos quando se acrescentavam ou retiravam alguns objetos de uma coleção pequena, pois há estudos que mostram que alguns animais são dotados desse senso com a evolução gradual da sociedade, tornaram-se inevitáveis contagens simples (Eves, 2011, p.25).

De acordo com Eves (2011), o conceito numérico, surge junto com os primeiros registros históricos realizados pelo homem, pois mesmo em épocas primitivas indicam um determinado senso numérico que o auxiliava na vivência e principalmente a sobreviver; sabe-se que esse conceito de pequenas coleções é natural em algumas espécies.

A evolução do homem através da história mostra que foi inevitável a sociedade uma evolução também na contagem. O processo da contagem foi se tornando necessário e logo se sistematizou, esquematizou ideias e mais tarde métodos de atribuir símbolos.

O processo de sistematização, esquematização e atribuição de símbolos, teve uma evolução gradativa, coletiva e necessária para um melhor desenvolvimento da sociedade, Boyer (1974) afirma que:

> Essa percepção de uma propriedade abstrata que certos grupos têm em comum e que nós chamamos números representa um grande passo no caminho para a matemática moderna. É impossível que isso tenha sido a descoberta de um indivíduo ou de uma dada tribo; é mais provável que a percepção tenha sido gradual, e pode terse desenvolvido tão cedo no desenvolvimento cultural do homem quanto o uso do fogo, talvez há 300.000 anos (Boyer, 1974, p.1).

Para Boyer (1974), os números se iniciaram com a percepção de uma propriedade abstrata de certos grupos, e esse foi o caminho percorrido pela matemática moderna, com desenvolvimento lento em diferentes lugares, tempos e povos, talvez acontece a tanto tempo quanto o uso do fogo pelo homem. Foram várias as evidências encontradas sobre esse início, mostrando que o desenvolvimento da matemática está diretamente relacionado à solução de enfrentamentos do cotidiano do homem.

Com o passar dos milhares de anos foi necessário algumas distinções entre os números. A sistematização do processo de contar, ocorreu quando foi preciso contagens extensas, estabelecendo um desenvolvimento de bases, que são grupos de números dispostos com sua ordem de grandeza determindada.

Existem evidências de vários tipos de base como 1, 2, 3, 4, 5, 6,10, 12, 20 e 60 são alguns tipos que foram utilizadas por nativos de várias partes do mundo, tais como: pigmeus africanos utilizavam base 1 e 2, América do Sul utilizava base 4, tribos da Terra do Fogo utilizava base 3, Sibéria utilizavam 1,2,3 e 5, Germânia utilizava base 5, os índios da América do Norte utilizava a base 20, Dinamarca utilizara a base 20 e Babilônia utilizava base 60.

> Com efeito, a expressão de números por meio de várias posições dos dedos e das mãos talvez preceda os símbolos numéricos ou os nomes dos números. Assim, os símbolos escritos primitivos para 1, 2, 3 e 4 eram invariavelmente o número conveniente de riscos verticais ou horizontais, representando o número correspondente de dedos levantados ou estendidos, remontando a palavra dígito (isto, é dedo), para indicar os algarismos de 1 a 9, à mesma origem (Eves, 2011, p.29).

De acordo com Eves (2011), os símbolos numéricos podem ter procedência nas posições das mãos, sendo os símbolos escritos representados pela sua correspondência nos dedos das mãos e há indícios de que os números digitais, ou seja, números representados pelos dedos, dos algarismos de 1 a 9 tem essa mesma origem.

Estes números foram ampliando-se de acordo com as necessidades, estendendo sua abrangência, seu funcionamento no comércio e tornando-se internacional no período da Idade Média.

Segundo Boyer (1974), os registros de números inteiros é o mais antigo conceito de números na matemática, tanto que sua origem se perde no tempo. Falar da origem da aritmética e da geometria na matemática também não é tarefa fácil, pois existem vestígios de seu início ser anterior a arte de escrever.

> A matemática primitiva necessitava de um embasamento prático para se desenvolver, e esse embasamento veio a surgir com a evolução para formas mais avançadas de sociedade. Foi ao longo de alguns dos grandes rios da África e da Ásia que se deu o aparecimento de novas formas de sociedade: o Nilo na África, o Tigre e o eufrates na Ásia Ocidental, o Indo e depois o Ganges no sul da Ásia central e o Howang Ho e depois o Yangtze na Ásia Oriental. com a drenagem de pântanos, o controle de inundações e a irrigação era possível transformar as terras ao longo desses rios em regiões agricultáveis ricas (Eves, 2011, p.57).

De acordo com Eves (2011), a matemática primitiva precisa de apoios práticos, para seu desenvolvimento, e é em busca de resoluções para essas necessidades práticas que a matemática consegue sua evolução na sociedade. Em busca por respostas de situações problemas, ou melhor, na busca pela resolução de seus próprios problemas que a sociedade transforma a matemática e evolui.

Para Roque (2012), o início da matemática no Egito foi associada a Resolução de Problemas relacionados as suas próprias necessidades e ensinar o conhecimento adquirido em forma de problemas e soluções aos mais jovens, afim de prepara-los para o futuro.

> O contexto prático, ligado à administração de bens, foi uma das motivações para a invenção da matemática, mas os sistemas de numeração, bem como as técnicas para realizar operações,se transformaram de acordo com questões diversas. Mesmo nas culturas antigas havia motivações técnicas para o desenvolvimento da matemática e cuidados com a exposição, a fim de que exprimisse certa regularidade e generalidade dos procedimentos usados (Roque, 2012, p.70).

Segundo Roque (2012), a matemática antiga foi motivada por contextos práticos, principalmente aqueles ligados à administração dos bens, mas vale lembrar que o sistema de númeração, cultura e as técnicas de operações auxiliaram nesse desenvolvimento.

Uma das maiores motivações e evolução no desenvolvimento de um povo é sua cultura e seu contexto histórico, assim buscaremos no próximo capítulo, observar além dos problemas que foram resolvidos por sociedades distintas, apresentaremos personagens/indivíduos e como eles solucionaram problemas que lhes foram propostos.

Capítulo 3

Personagens Históricos e a resolução de problemas

Neste capítulo faremos um breve levantamento da influência de personagens matemáticos em seus respectivos períodos históricos e algumas contribuições feitas a partir da Resolução de Problemas no desenvolvimento da ciência. A Matemática é uma das ciências mais antigas, pois como apontamos no capítulo anterior, ela esta presente desde os tempos remotos.

No entanto, a área de conhecimento chamada de Educação Matemática é considerada recente, pois surge somente no século XIX. Entretanto, a busca pelo desenvolvimento do aluno vem antes desse período e a Resolução de Problemas surge como proposta didática.

É importante ressaltar que na jornada da humanidade há momentos de dificuldades que fazem parte do processo de evolução e a resolução de problemas vem como uma ferramenta no auxilio desse processo, como destaca Balieiro Filho (2017) :

> Como atesta a história, o homem desde eras remotas é levado a resolver seus problemas, e o progresso da humanidade pode ser atribuído a essa capacidade de resolver problemas de situações diárias. Muitas vezes, em tais situações, a solução não é imediata (Balieiro Filho, 2017, p.18).

Vestígios da Resolução de Problemas são encontrados em obras destes personagens históricos, considerando: preocupações, período histórico e limitações.

> Reconhecer que a Matemática é uma ciência humana, fruto das necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos, e é uma ciência viva, que contribui para solucionar problemas científicos e tecnológicos e para alicerçar descobertas e construções, inclusive com impactos no mundo do trabalho (Ministério da Educação, 2018).

De acordo com Ministério da Educação (2018), no primeiro tópico das competências específicas da Matemática para o ensino fundamental, o aluno precisa reconhecer que a Matemática também é uma ciência humana e que em diferentes momentos históricos tem como objetivo solucionar problemas relacionados aos seus próprios enfrentamentos.

Na tentativa de compreender um pouco melhor, alguns personagens históricos e sua relação com a Resolução de Problemas, seus desafios, procupações, trabalhos, planejamentos, desenvolvimento de pesquisas e busca por soluções em diferentes momentos, serão apresentado alguns fatos históricos, que poderão contribuir com a compreensão sobre Resolução de Problemas na Matemática.

3.1 Euclides

Abordaremos aqui a história de Euclides de Alenxandria e uma de suas mais importantes obras, conhecida como: Os elementos. Euclides é um personagem histórico que pouco se sabe sobre sua personalidade e vida, sua obra inicia a axiomatização formal da Matemática, corrigindo e resumindo todo conhecimento de seus antecessores.

> Enquanto apresenta a geometria e a aritmética, Euclides ensina-nos aspectos essenciais da matemática em um sentido muito mais geral. Exibe o fundamento axiomático de uma teoria matemática e o seu desenvolvimento consciente rumo à solução de um problema específico. Vemos como a abstração trabalha e impõe a apresentação estritamente dedutiva de uma teoria (Bicudo, 2009, p.16).

Para Bicudo (2009), Euclides apresenta os fundamentos axiomáticos e seu desenvolvimento de forma a orientar, na solução de um problemas. Mostra o que são definições e como a compreensão conceitual auxilia na classificação, cria algoritmo para solução de alguns problemas da aritmética mostrando, que a compreensão pode levar a métodos bem elaborados que contribui com melhor desenvolvimento. Esclarece que a sistematização e a axiomatização que foi empreendida por Euclides ajuda em métodos de Resolução de Problemas.

> Um dos capítulos mais importantes da história cultural, embora pouco conhecido, é a transformação do primitivo conhecimento matemático empírico de egípcios e babilônios na ciência matemática grega, dedutiva, sistemática, baseada em definições e axiomas (Bicudo, 2009, p.83).

Os egípcios tinham um pouco de conhecimento, mesmo que seja um conhecimento empírico, pois era o que lhes permitia resolver problemas de recuperar os limites de suas propriedades após as conhecidas enchentes do rio Nilo. Todos os anos após o término de determinado período de enchentes, quando suas delimitações eram destruídas, precisavam refazê-las. O conhecimento dos egípcios era prático, os mesmos não elaboravam teorias a respeito desse conhecimento e quando surgiam perguntas eram respondidas baseadas nas respostas dos deuses.

> Tanto no Egito quanto na Mesopotâmia, era a classe sacerdotal a detentora do conhecimento. Ora, os sacerdotes punham-se de intermediários entre a deidade e o povo. Os desígnios da divindade não carecem de explicações; seus desejos devem ser satisfeitos com os rituais que, aplicando-lhe a ira, lhe atrai o beneplácito. É função dos sacerdotes interpretar a vontade dos deuses, guiando o povo nos passos do rito apaziguador. Procedem do mesmo modo, enunciando as passadas, sem lhes dar justicação, nos seus documentos matemáticos! Quando tal conhecimento chega à Grécia, por volta do século VI a.C., não encontra ali uma classe sacerdotal (Bicudo, 2009, p.84).

De acordo com Bicudo (2009), o conhecimento dos egípcios que antes era somente empírico, passa a ser teórico na Grécia, pois na Grécia eles assimilam os métodos egípcios e não possuem uma classe sacerdotal, logo perguntas precisavam de respostas e a busca por respostas contribuiu com métodos de desenvolvimento de resoluções, demonstrações e propriedades. Euclides, resume, corrige e amplia o conhecimento empírico dos egípcios.

Os elementos de Euclides é uma composição de 13 livros, onde estão distribuídas 465 proposições e contém além de geometria, álgebra elementar e teoria dos números. As quantidades de definições, postulados, noções comum e proposições dos 13 livros pode ser observada na tradução de Bicudo (2009) do livro Os elementos, conforme tabela abaixo:

Tabela 3.1: Composição de Os elementos

Composição dos 13 livros				
Livro	Definições	Postulados	Noções Comum	Proposição
I	23	5	9	48
II	2	-	-	14
III	11	-	-	37
IV	7	-	-	16
V	18	-	-	25
VI	5	-	-	33
VII	23	-	-	39
VIII	-	-	-	27
XI	-	-	-	36
X	10	-	-	115
XI	28	-	-	39
XII	-	-	-	18
XIII	-	-	-	18

Fonte: adaptado de Bicudo, 2009.

Segundo Roque (2012), o conhecimento dos geômetras da época, era bastante desenvolvido mas, foi necessário ordená-lo. Ao estudar Os elementos Roque (2012) organiza seus 13 livros conforme tabela:

Tabela 3.2: Organização da Composição dos livros de: Os elementos

Livros	**Organização**
I	Primeiros princípios e geometria plana de figuras retilíneas: construção e propriedades de triângulos, paralelismo, equivalência de áreas e teorema de Pitágoras
II	Contém a chamada álgebra geométrica, trata de igualdades de áreas de retângulos e quadrados.
III e IV	Propriedades de círculos e adição de figuras, como inscrever e circunscrever polígonos em círculos.
V	Teoria das proporções de Eudoxo, razões entre grandezas de mesma natureza.
VI	Aplicações do livro V à geometria, semelhança de figuras planas, aplicação de áreas.
VII e IX	Estudo dos números inteiros, proporções numéricas, números primos, maior divisor comum e progressões geométricas.
X	Propriedades e classificação das linhas incomensuráveis.

XI e XIII	Geometria sólida em três dimensões, cálculo de volumes e apresentação dos cinco poliedros regulares.

Fonte: adaptado de Roque, 2012.

Para Polya (1995), a primeira fase da Resolução de Problemas é compreender o problema. Um dos passos dessa fase é entender bem o enunciado, e conhecer as definições auxiliam na sua compreensão.

A segunda fase é estabelecer um plano. Alguns passos para se estabelecer um plano são: usar modelos semelhantes, buscar padrões e usar propriedades conhecidas anteriormente. Todos os passos sugeridos na segunda fase podem ser observados no livro de Euclides. Sendo assim, mesmo Euclides não utilizando a matemática prática na construção de seu livro, auxilia no desenvolvimento de Resolução de Problemas.

> ... a matemática grega era marcada pela prática de resolução de problemas, e o caráter teórico dos Elementos de Euclides pode não caracterizar um padrão da época. Nos relatos tradicionais, contudo, enfatiza-se que a cultura grega era marcada por uma divisão entre saber teórico e saber prático (Roque, 2012, p.213).

Para Roque (2012), a matemática na Grecia era marcada por práticas de Resolução de Problemas, conhecida como saber prático, e o livro Os elementos de Euclides aparece como saber teórico, criando padrões que serão utilizados para a Resolução de Problemas.

São criados padrões por Euclides, e segundo as ideias de Polya, que desenvolveremos melhor em um próximo capítulo, buscar padrões são passos da segunda fase da Resolução de Problemas, assim Euclides auxilia neste desenvolvimento.

A Matemática teórica apresentada por Euclides, surge para enriquecer os trabalhos de outros personagens como destaca Roque (2012).

> Segundo Heron, era importante enriquecer a matemática prática, associando-a a resultados mais elaborados da tradição geométrica grega. Por isso seus escritos também levavam em conta as obras de Euclides e Arquimedes (Roque, 2012, p.225).

Para Roque (2012), Heron utilizava-se da matemática que era conhecida como matemática prática, associando os escritos das obras de Euclides mesclando a teoria e a prática, mostrando uma evolução na formação dos técnicos, auxiliando na elevação da matemática aplicada.

Outro texto de Euclides no qual apresenta problemas e suas soluções, chegou a nós através do livro Divisão de Figuras.

> . . . chegou a nós através de uma tradução árabe, é o livro Divisão de Figuras, encontramos nessa obra problemas de construção em que se pede a divisão de uma figura por meio de uma reta, impondo-se que as áreas das partes estejam numa razão dada. um exemplo é o problema de dividir um triângulo dado em duas áreas iguais por meio de uma reta que passe por um ponto interior ao triângulo (Eves, 2011, p.180).

Segundo Eves (2011), esta obra de Euclides é sobre resolver problemas de construção, ele auxilia a organizar um padrão de divisão de uma figura em uma determinada razão. Depois da morte de Euclides a Escola de Alexandria entra em declínio, mesmo assim surgem nomes como Pappus, o geômetra, um dos últimos grande personagem em destaque. A seguir iremos conferir suas contribuições para a resolução de problemas.

3.2 Pappus de Alexandria e suas contribuições à resolução de problemas

Euclides teve vários sucessores, destacaremos Pappus que foi considerado um dos últimos grandes matemáticos da Escola de Alexandria. Pappus vários séculos depois de Euclides ainda conseguia influenciar aquela ciência que estava em declínio na cultura grega.

> Dentre os sucessores imediatos de Euclides de Alexandria (330-275 a.C.) estão Arquimedes (287-212 a.C.), Apolônio de Perga (250-170 a.C.), Hiparco (190-120 a.C.), Gémino de Rodes (10 a.C. 60 d.C.), Herão de Alexandria (10-75 d.C.), Nicômaco de Gerasa (50-110 d.C.) e Menelau (70-130 d.C.), Cláudio Ptolomeu (100-168 d.C.), que tentaram dar continuidade às tradições geométricas gregas estabelecidas pelos matemáticos da primeira fase da Escola de Alexandria (300 a 30 a.C.). Mesmo com o desenvolvimento de novos ramos da Matemática, tais como trigonometria, astronomia e álgebra, os matemáticos da segunda fase da Escola de Alexandria (30 a.C. a 641 d.C.) não conseguiram excluir essa ciência do declínio da cultura grega. Convém salientar um último matemático importante vinculado à Escola de Alexandria por volta do século III d.C.: Pappus de Alexandria (Balieiro Filho, 2017, p.56).

Pappus se destaca, principalmente por sua obra conhecida como "A Coleção Matemática", composta por oito livros que são resumos de trabalhos de alguns geômetras. Acrescentou proposições e comentários com grande significado, correções e críticas, auxiliando no esclarecimento de trabalhos.

Segundo Balieiro Filho (2017), ele é conhecido por melhorar o entendimento de todas as obras escolhidas para correção ou críticas.

> A coleção matemática foca-se a análise no Livro VII, por seu valor do ponto de vista histórico e, em particular, por abordar e conceituar os aspectos referentes à análise e síntese, que fornecem subsídios à atividade heurística. O livro, dedicado ao seu filho Hermodoro, é composto por uma série de obras de autores gregos anteriores, com o objetivo de disponibilizar procedimentos que pudessem ser úteis na resolução dos problemas geométricos àqueles alunos que já haviam adquirido o domínio da geometria, mediante o estudo de seus elementos(Balieiro Filho, 2017, p.58).

Para Balieiro Filho (2017), o principal livro de Pappus é uma série de obras de autores gregos, que foram corrigidas e ganharam comentários com o intuito de fornecer elementos para facilitar a Resolução de Problemas, ele disponibiliza procedimentos que visam ajudar. Com grande valor histórico o livro VII conceitua e aborda, fornecendo subsídios para atividades heurística, ou seja, atividades que compreendem processos que tem por objetivo Resolver Problemas.

> Fica explícito que os antigos geômetras utilizavam um procedimento heurístico para solucionar seus problemas matemáticos, isto é, um modelo matemático que utiliza a análise para encontrar a solução de um problema ou a demonstração de um teorema e, em seguida, a síntese para expor o que se encontrou para solucionar o problema ou a demonstração de um teorema; esses aspectos, analítico e sintético, permaneceram na Matemática de Euclides de Alexandria e nos trabalhos desenvolvidos por outros geômetras gregos contemporâneos e posteriores (Balieiro Filho, 2017, p.59).

Os geômetras gregos antigos utilizavam as obras de análise geométrica, como métodos para descobrir demonstrações, teoremas ou soluções de problemas e Pappus deu o nome à essas obras de Coleção Analítica. Pappus expõe proposições e lemas que esclarecem passagens de demonstrações, encontra novos métodos de demonstrações e consegue aplicar seus trabalhos à novos problemas, elaborando soluções de diferentes maneiras, mas esclarecedoras.

Para Bicudo (2009), o Tesouro da Análise ou também chamado pelo antigos como lugar resolvido/analisado era uma matéria especial para auxiliar todos aqueles que desejam aprender o que ele chama de potência inventiva dos problemas, sendo uma homenagem ao seu filho Hermodoro, demonstrando toda a importância do conteúdo.

Para Roque (2012), o livro de A Coleção Matemática nos ajuda a conhecer um pouco da história da matemática grega, que foi perdida através do tempo, esclarece ou classifica alguns tipos de problemas matemáticos.

> Os Antigos consideravam três classes de problemas ge-o-mé-tri-cos, chamados planos, sólidos e lineares. Aqueles que podem ser resolvidos por meio de retas e circunferências de círculos são chamados de problemas planos, uma vez que as retas e curvas que os resolvem tem origem no plano. Mas problemas cujas soluções obtidas por meio de um ou mais seções cônicas são denominados problemas sólidos, uma vez que superfícies de figuras sólidas (superfícies cônicas) precisam ser utilizadas. Resta uma terceira classe, que é chamada linear porque outras linhas, envolvendo origens diversas, além daquelas que acabei de descrever, são requeridas para sua construção. Tais linhas são as espirais, a quadratriz, a conchóide, a cissóide, todas com muitas propriedades surpreendentes (Roque, 2012, p.103-104).

Segundo Bicudo (2009), Pappus na Era Cristã tenta reativar o conhecimento matemático auxiliando e comentando muitos problemas, cita no prefácio do seu sétimo livro um tratado que é considerado um talento, visto que é de grande utilidade para os problemas que eram considerados mais complicados, também são 38 os lemas que provam que são formados conjunto de propriedades do círculo e linhas retas. Muitos de seus trabalhos não tinham só como objetivo, descrever novas propriedades, ou uma nova construção geométrica, ou ainda de descrever um problema, o objetivo era encontrar uma coisa que já coexistia, mas ainda não era observada de maneira apropriada, ou melhor, com sua magnitude e detalhes.

De acordo com Eves (2011), o livro III da Coleção Matemática de Pappus, trata da teoria das médias. Essa teoria oferece uma construção geométrica simples, mas interessante, onde representa geometricamente num semicírculo as média aritmética, média geométrica e média harmônica.

Segundo Bicudo (2009), Pappus chamava Euclides de sistematizador, por colocar forma em tudo o que tem a seu dispor se tornando um grande sistematizador e relembra que as obras Cônicas permanecem assim até Apolônio.

De acordo Balieiro Filho (2017), a chamada Coleção analítica utilizada por Pappus se constituia por métodos para solucionar ou demonstrar problemas ou teoremas, ou seja, era o desenvolvimento de atividades heurísticas. Para esquematizar esse processo utilizado por Pappus precisamos observar no que consiste a análise e síntese.

> A análise consiste em resolver um problema admitindo o resultado que se quer demostrar como verdadeiro, buscando, em seguida, um antecedente do qual seja possível deduzir o resultado que se quer demonstrar e que foi admitido como verdadeiro. Repetindo esse processo de regressão sucessivamente se busca chegar a algum resultado que já se conhece ou se admite como válido (Balieiro Filho, 2017, p.61).

Para Polya (1995), na análise é preciso começar e admitir que já existe uma solução correta e depois extrair as consequências disso e continuar a extrair consequências das consequências até chegar na síntese, pois na análise deve ser admitido que já foi encontrado anteriormente o que se procura.

Existem dois tipos de análise que são: análise de problemas de demonstração que procura estabelecer a verdade de um teorema e análise de problemas de determinação que procura encontrar uma incógnita (Polya, 1995, p.104). Segue abaixo um exemplo de problemas de demonstração.

> Quando se trata de um "problema de demonstração", temos de demonstrar ou refutar um teorema claramente enunciado A. Não sabemos ainda se A é verdadeiro ou falso, mas deduzimos de A um outro teorema B, de B um outro C e assim sucessivamente, até chegarmos a um último teorema L, acerca do qual temos um conhecimento definitivo. Se L for verdadeiro, A também será, desde que todas as nossas deduções sejam conversíveis. Tomando-se por base L, deduzimos o teorema K, que precedeu L na análise e, procedendo da mesma maneira, retrocedemos: de C demonstramos B, de B demonstramos A e assim chegamos ao nosso objetivo. Se, porém L for falso, teremos demonstrado que A é falso (Polya, 1995, p.104).

Outro método de obtenção de solução utilizado por Pappus, que foi verificado por bom desenvolvimento matemático e alcançou importantes resultados foi o da síntese.

> A síntese consiste em realizar esta solução, isto é, em determinar as quantidades e as figuras procuradas de maneira a satisfazer às condições requeridas e transformadas; em seguida, é necessário mostrar que as condições primitivamente postas são, também, satisfeitas. Pela falta de um procedimento mais simples, esta demonstração opera-se, regra geral, por uma transformação das condições segundo uma ordem inversa daquela que se observaria na análise, para concluir que as condições novas podem auxiliar a verificar se as condições primitivas também ficarão completas (Balieiro Filho, 2017, p.61).

Segundo Polya (1995), na síntese o processo é inverso ao da análise, partindo do que já se sabe ou admiti como verdadeiro. Disso deduz que o que procedeu na análise, e continua a fazer deduções até percorrer o caminho no outro sentido e chegar aonde se pretende. Segue abaixo um exemplo de síntese.

> Um homem primitivo deseja atravessar um riacho, mas não pode faze-lô da maneira habitual porque o nível da água subiu desde a véspera. Por isso, a travessia tornou-se o objetivo de um problema:"a travessia do riacho" é o x deste problema primário. O homem pode lembrar-se de já ter atravessado algum outro riacho por um árvore caída. Ele procura ao redor uma árvore caída que lhe sirva, a qual se torna a sua nova incógnita, o seu y. O homem não encontra nenhuma nessas condições, mas há muitas árvores em pé à margem do riacho; ele deseja que uma delas caia. Ser-lhe-ia possível fazer uma árvore cair atravessada sobre o riacho? Surgem uma grande ideia e uma nova incógnita: por que meios poderia o homem derrubar a árvore por sobre o riacho? (Polya, 1995, p.106)

Para Polya (1995), se aceitarmos as terminologias de Pappus, as sequências de ideias contidas no exemplo deve ser chamadas de análise e a tradução dessas ideias em ações e a passagem do homem sobre a árvore é chamada de síntese.

São muitas as contribuições de Pappus à geometria, sua obra A Coleção Matemática estabelece soluções que contribuiram com problemas e teoremas utilizando métodos, comparações e comentários.

> A Coleção matemática de Pappus é verdadeiramente uma mina rica em pepitas geométricas. Comparações, quando possíveis, têm mostrado que os comentários históricos contidos no trabalho são dignos de confiança. Devemos muito de nosso conhecimento da geometria grega a esse tratado, com suas citações ou referências a trabalhos de mais do que 30 matemáticos da Antiguidade. Poderíamos chamá-lo de réquiem ou canto do cisne da geometria grega (Eves, 2011, p.212).

Para Eves (2011), a Coleção Matemática de Pappus é uma obra preciosa, que o diferencia de outros autores, o mesmo faz comentários que contribuem de forma única com a matemática grega e que o conhecimento repassado em seus trabalho faz referência a mais de 30 matemáticos, celebrando o nome de tantos que vieram antes dele, fazendo com que seu trabalho seja uma joia rara da geometria grega.

Pappus um dos principais geômetra grego, corrige e comenta obras de vários autores, adota procedimentos heurísticos, ou seja, procura compreender os processos de solucionar problemas e disponibilizava procedimentos que vieram à dar subsídios e facilitar a resolução de problemas.

3.3 René Descartes

René Descartes, nasceu em 31 de março de 1596 na França, na cidade de La Have, revela-se ainda muito jovem por sua insaciável curiosidade e desejo pelo aprendizado, filho de família rica e culta. Seu Pai era Conselheiro do Parlamento de Rennes o que lhe oportunizou estudar durante oito anos em uma escola jesuíta de La Fleche, conhecida em toda Europa por seu ensino em Humanidades. Descartes provoca a admiração dos professores, viveu em uma época de intensa confusão envolvendo matemáticos que colocavam em dúvida resultados e autenticidade das descobertas da época, o que o impulsiona a ser o grande matemático, contraiu um infecção pulmonar e morre em Estocolmo no dia 11 de Fevereiro de 1650.

A Universidade de Poitiers recebe Descartes que cursa primeiro medicina e depois licenciatura em Direito, mas ele ainda mostra imenso interesse por vários ramos do saber tais como: medicina, astronomia, matemática e física, que será mais tarde revelado através das descobertas de seus estudos.

> Descartes procurou uma base para a verdade. Segundo seu raciocínio, o indivíduo deve partir de premissas que não possam ser contestadas. Parecia-lhe que a Matemática fornecia tais premissas. Via, nela, o modelo do raciocínio exato, o método de raciocinar com base em verdades evidentes. Parecia-lhe este o método pelo qual se pode obter o verdadeiro conhecimento. Procurou, então, primeiramente, as verdades evidentes por si mesmas. A única que descobriu foi: penso, logo existo. Tomando-a como base, formulou um corpo de ideias que acreditava não pudessem ser contestadas. Tais ideias, para ele, eram claras, distintas e, portanto, verdadeiras e fora de discussão (Balieiro Filho, 2017, p.67).

De acordo com Balieiro Filho (2017), Descartes estava à procura de base para uma verdade que não poderia ser contestada e para ele a Matemática lhe fornecia esses princípios, pois ela lhe dá subsídios necessários baseados em verdades. Descartes procurava primeiro verdades contidas nele mesmo, descobrindo uma das frases mais ditas: Penso, logo existo! Depois desse momento formulou ideias que precisavam ser claras e distintas, pois para ele se fossem claras e distintas seria o primeiro passo para um modelo exato, ou seja, verdades que não se deveria discutir.

São vários os frutos de seu trabalho no saber enciclopédico. Ele aperfeiçoa-se na filosofia e na ciência, com objetivo de elaborar um método geral matemático-dedutivo, resolvendo alguns problemas de sua época.

Os ensaios do Método foram constituídos de: os Meteoros, a Dióptrica e a Geometria cujos princípios são expostos em 1637 e os os quatro princípios fundamentais de o Método são enumerados abaixo.

> 1) Adotar uma dúvida metódica, evitando quer os preconceitos quer as conclusões precipitadas, só aceitando como verdadeiro o que se apresente ao espírito clara e distintamente, com evidência racional (Regra da Evidência);
> 2) Decompor os problemas no maior número possível de parcelas ou etapas simples, reduzindo a complexidade à simplicidade dos seus elementos (Regra da Análise);
> 3) Ordenar aquelas parcelas ou pensamentos começando pelos mais simples e fáceis de conhecer, estabelecendo progressivamente a veracidade das etapas ou degraus mais baixos de modo a ascender à demonstração ou conhecimento global do problema ou coisa proposta (Regra da Ordem ou Dedução)
> 4) Fazer enumerações completas e revisões gerais por forma a nada omitir que possa clarificar-se ou provar-se com a evidência alcançada. Esta é a fase do emprego em situações diferentes das que originaram o problema, das aplicações práticas e da iluminação de obscuridades a requerer novas investigações (Regra da Enumeração ou Indução) (Descartes, 2001, p.III-IV).

Segundo os princípios fundamentais de o Método deve-se evitar preceitos ou conclusões precipitadas, aceitando o que é claro e racional, decompor o problemas no máximo de partes possíveis, ordenar pensamentos começando pelo mais simples estabelecendo etapas e por fim enumerar e revisar.

A obra que expõe o Método revolucionou a ciência moderna num todo não somente a matemática. O principal passo dessa descoberta constituiu na solução que Descartes encontra para o problema de Pappus, aquele mesmo problema que já havia sido abordado por Euclides. Descartes mostra seu método em como se chega às equações que servem para resolver os problemas e destaca:

> Assim, quando se pretende resolver algum problema, deve considerar-se de antemão como já feito, e atribuir nomes a todas as linhas que parecem necessárias para construí-lo, tanto às que são desconhecidas como às outras. Então, sem considerar nenhuma diferença entre estas linhas conhecidas e desconhecidas, deve examinar-se a dificuldade na forma como aquelas linhas dependem mutuamente umas das outras, segundo a ordem que se pressente de todas a mais natural, até que se tenha encontrado a maneira de expressar a mesma quantidade de dois modos distintos, o que se denomina uma equação, pois o valor de uma dessas expressões deve ser igual ao da outra. E devem encontrar-se tantas dessas e-

> quações encontrar-se tantas dessas equações quantas as linhas desconhecidas (Descartes, 2001, p.7).

Para Descartes, quando há pretensões de resolver um problema, devemos considerar como foi feito anteriormente, atribuir nomes ao que é necessário para construí-ló, examinar as dificuldades até podermos expressar mais de um modo possível.

Segundo Roque (2012), uma das maiores novidades das obras geométricas de Descartes, foi introduzir um sistema de coordenadas para representar equações indeterminadas, motivada pelo seguinte problema de Pappus :

> Encontrar o lugar geométrico de um ponto tal que, se segmentos de reta são desenhados desde esse ponto até três ou quatro retas dadas em ângulos determinados, o produto de dois desses segmentos deve ser proporcional ao produto dos outros dois (se há quatro retas) ou ao quadrado do terceiro (se há três retas) (Roque, 2012, p.326).

Na demonstração de Pappus a solução deveria ser uma cônica, mas Descartes, que foi inspirado por Pappus, começa a considerar o problema para mais de quatro retas, o que mais tarde dará origem a chamada curva de maior grau. Para Encontrar soluções Descartes propunha primeiro supor que o problema estava resolvido.

> Ele ainda destaca que a utilização de seu método em geometria não tira o rigor das demonstrações, já que a natureza das demonstrações em Matemática consiste em descobrir e organizar as relações rigorosamente lógicas existentes entre a hipótese e a tese, porém esse encadeamento lógico é o resultado de um procedimento da atividade heurística (Balieiro Filho, 2017, p.86).

Segundo Balieiro Filho (2017), o método não é para diminuir o rigor das demonstrações, visto que a natureza de uma demonstração Matemática equivale em descobrir e organizar relações lógicas com todo seu rigor entre a hipótese e a tese, mas a ligação lógica é o resultado do procedimento da atividade Heurística, ou seja, do resultado do procedimento com regras para se resolver problemas.

> Para Descartes, as demonstrações matemáticas não tinham somente o papel de convencer e estabelecer uma certeza; deviam sobretudo esclarecer a natureza do problema e propor métodos de invenção direta que permitissem resolvê-lo. Por isso ele rejeitava a demonstração por absurdo. Nesse contexto, os objetos geométricos passavam a ser vistos com novos olhos, uma vez que podiam ser úteis na resolução de problemas práticos (Roque, 2012, p.318-319).

Assim, fica claro que esclarecer a natureza de um problema e propor métodos de invenção que lhes fossem o suficiente para resolver-lós era o papel das demonstrações matemáticas para Descartes. Essa problematização ajuda em um novo olhar os objetos geométricos, pois agora são utilizados na resolução de problemas chamados práticos.

Para Roque (2012), Descartes era fortemente influenciado pela crença do século XVII de que o desenvolvimento técnico podia melhorar a vida do homem. Ele conduziu princípios diferentes dos que eram utilizados anteriormente, procurava pelo bem comum à todos os homens. Descartes tinha visão diferente da Filosofia especulativa, ensinada nas escolas naquele momento e dessa forma encontra outras práticas.

Segundo Roque (2012), o momento em que Descarte vive auxilia no enfrentamento de seus novos desafios. Descartes em 1626 frequenta em Paris um grupo de pensadores ligados ao padre Mersenne que pesquisavam problemas ópticos, contribuindo com o seu trabalho conhecido como: Dióptrica, que foi um dos ensaios para escrever o Método.

> Sabia-se que o uso de métodos algébricos na análise envolvia a relação entre problemas, equações e construções, mas a natureza dessas relações não era bem compreendida. Um dos objetivos da Geometria de Descartes era ordenar o domínio da resolução de problemas geométricos por meio da arte analítica, postulando um novo padrão de rigor e uma nova noção de exatidão para os procedimentos de construção (Roque, 2012, p.261).

De acordo com Roque (2012), a natureza das relações existente entre problemas, equações e construções não eram bem compreendidas e o objetivo de Descartes na geometria era conseguir ordenar o domínio da resolução de problemas, através da arte analítica com um novo postulado de padrões e novos procedimentos de construção.

> Descartes novamente deixa patente que para o homem conhecer no que consiste o objeto e que relações há entre tal objeto, ele deve reconhecer e empregar as múltiplas faculdades (inteligência, memória, imaginação e os sentidos) que estão a sua disposição para compreender esse conjunto de elementos que compõe o objeto investigado (Balieiro Filho, 2017, p.86).

Descartes relaciona inteligência, memória, imaginação e sentidos, mostrando que a inteligência compreende algumas funções tais como: ideias, raciocínio que tem por proposito organizar as impressões recebidas pelos nossos sentidos externos e internos, e são essas funções que compreende o que chamamos de pensamentos. São essas ideias que fizeram René Descartes resolver problemas e se tornar um dos personagens mais influentes do século XVII.

3.4 Euler

Leonhard Euler nasceu em 15 de abril de 1707 na Basileia, Suíça. Desde de cedo Euler era incentivado a estudar, seu pai Paul Euler era ministro religioso em uma Igreja Calvinista, tinha grandes expectativas de uma vida sacerdotal para o filho. Euler inicialmente foi educado pelo pai e mãe Margaret Brucker, o pai tinha sido aluno de Jacques Bernoulli, logo tinha conhecimentos matemáticos que o auxiliaram na educação do filho.

Em 1720 ingressou na Universidade da Basileia inicialmente para cursos religiosos, mas logo desperta para outras disciplinas entre elas sua preferida, a Matemática. Seus estudos na universidade contribuiram com a ciência.

Segundo Boyer (1974), o rapaz logo que começa a estudar com Jean Bernoulli junta-se aos seus filhos Daniel e Nicolas, com quem descobriu sua grande vocação, porém recebeu ampla instrução em outras ciências tais como : teologia, medicina, física, astronomia e línguas orientais, conhecimento que lhe auxiliou durante toda a vida tornando um dos personagens mais conhecidos do século XVIII.

Em 1727 por influência dos irmãos Bernoulli, mudou-se para São Petersburgo na Rússia, foi convidado à trabalhar na Academia de Ciência, mas logo que chega encontra dificuldades com a morte da rainha, pois o apoio à ciência era diretamente ligado a ela, mesmo assim, consegue destaque. E quando um dos irmãos Bernoulli morre e o outro volta à Basileia, Euler torna-se o principal matemático da Academia aos vinte e seis anos.

Casou-se em 1734 e teve 13 filhos, mas a pesquisa continua sendo de grande valor, escreve artigos durante as brincadeiras com os filhos e com o avanço da idade perde a visão de um olho.

Euler recebe convite em 1741 de Frederico o Grande para fazer parte da Academia de Berlim, onde permaneceu por vinte cinco anos. Neste tempo continuou produzindo artigos para Academia da Rússia, sua via acadêmica tem um ritmo sempre acelerado.

> Euler foi um escritor prolífico, sem dúvida insuperável quanto a isso na história da matemática; não há ramo da matemática em que seu nome não figure. É interessante que sua produtividade surpreendente não foi absolutamente prejudicada quando, pouco depois de seu retorno a São Petersburgo, teve a infelicidade de ficar completamente cego (Eves, 2011, p.472).

De acordo Boyer (1974), ele publicou mais de 500 livros e artigos durante toda sua vida e depois de séculos seus livros e artigos ainda influenciam muitos autores. Euler volta à Rússia em 1766 e por estar perdendo a visão começa a se preparar para a cegueira, ditando para seu filho e escrevendo em uma lousa. Mesmo com uma tentativa de cirurgia de catarata em pouco tempo perde a visão.

Para Eves (2011), Euler foi um escritor insuperável na história, pois ele conseguiu contribuir com todos os ramos da matemática e mesmo com seus problemas de saúde não se deixou influenciar. Ficar cego seria um obstáculo para a maioria das pessoas, mas no caso de Euler não o impediu de continuar seus trabalhos com a mesma disposição de sempre, sua memória era extraordinária com uma concentração sem igual, fez com que ele continuasse o trabalho com a ajuda de um secretário.

Euler nunca mais voltou a Suíça sua terra natal, são algumas as especulação do motivo, D'Ambrósio (2009) destaca:

> Jamais retornou à Suíça. Especula-se que não tenha retornado em protesto ao fato de seu país não ter dado cidadania à sua esposa, nascida na Holanda. Mas a Suíça liderou as comemorações dos 300 anos do nascimento de Euler (D'Ambrósio, 2009).

Depois de muito trabalho, uma vida familiar bem sucedida e dezessete anos de quase absoluta cegueira , com seu admirável potencial de concentração e memorização, Leonhard Euler morre em 18 de setembro de 1783 na Rússia.

3.4.1 Contribuições de Leonhard Euler à resolução de problemas

Foram várias as obras escritas por Euler entre elas a Introdução Completa à Álgebra publicada em 1770, livro que exceto por O Elementos de Euclides foi o livro matemático mais impresso no mundo. Grandes problemas são resolvidos por Euler, e o livro Introdução Completa à Álgebra é um manual didático em forma de problemas resolvidos, como D'Ambrósio (2009) observa:

> Introdução Completa à Álgebra, em 2 volumes, é um verdadeiro manual didático, na forma de problemas resolvidos e comentados. Euler introduz problemas de dificuldade crescente para ilustrar e chegar a fórmulas e teoremas e a exposições conceituais, recorrendo, muitas vezes, a livros clássicos, como o Die Coss, de Christoph Rudolff, que foi mencionado no início deste trabalho, e o Liber Abbaci, de Leonardo Fibonacci, que servem de fontes para inúmeros problemas. Um dos mais interessantes é o problema da

> herança desconhecida. Resumidamente, o problema é o seguinte: um pai tem N filhos; deixa para seu 1º filho 1 u.m. (unidade monetária) mais 1/N do que sobra; para o 2º filho, 2 u.m. mais 1/N do que sobra; e assim por diante. Mostrar que, no final, todos os filhos ganham o mesmo e nada sobra (D'Ambrósio, 2009).

Uma das maiores contribuições, ou uma das mais lidas, considerada como um manual didático, surge em forma de problemas que além de serem resolvidos são comentados, introduzindo fórmulas, teoremas, expõem conceitos e problemas que despertam a curiosidade, um desses exemplos de problemas é o da herança desconhecida.

Não conseguiriamos contar todas as contribuições feitas por Euler, somente podemos citar algumas notações que são utilizadas na ciência moderna por sua inflência, seus claros trabalhos, rico em detalhes e principalmente abrangentes, nada que se consiga mensurar, mas sim inspirar. Ao citar alguns notações, Eves (2011) destaca:

> As contribuições de Euler à matemática são demasiado numerosas para serem expostas aqui completamente, de modo que apontaremos apenas algumas no plano elementar. Para começar, registremos que se deve a Euler a implantação das seguintes notações:
> f(x) para funções,
>
> e para a base dos logaritmos naturais,
>
> a, b, c para os lados de um triângulo ABC,
>
> s para o semiperímetro do triângulo ABC,
>
> r para o raio do triângulo ABC,
>
> R para o circunraio do triângulo ABC,
>
> $\sum$ para somatórios,
>
> i para a unidade imaginária, $\sqrt{-1}$.
> (Eves, 2011, p.472-472).

A linguagem e notações matemáticas inicialmente apresentada por ele perdura até os dias atuais, séculos depois de suas contribuições, é considerado o construtor de notações mais bem-sucedido de nossos tempos. A letra π já era conhecida em alguns manuscritos antes do seu nascimento, mas a adoção definitiva da letra grega π para razão da circunferência para o diâmetro do círculo, ficou conhecida graças a seu amplo uso em obras escritas por Euler. Outro símbolo que 1777 ficou bastante conhecido por sua influência foi do i para$\sqrt{-1}$. (Boyer, 1974, p.326)

> Um dos aspectos característicos da época era a tendência a aplicar a todos os aspectos da sociedade métodos quantitativos que tinham tanto sucesso nas ciências físicas. Não é então surpreendente ver tanto Euler quanto D'Alembert escrevendo sobre problemas de expectativa de vida, o valor de uma anuidade, loterias, e outros aspectos da ciência social (Boyer, 1974, p.334).

Para Boyer, os aspectos e tendências da época contribuíam para escolha dos métodos, Euler escrevia e aplicava problemas com aspectos relacionados a ciência social, ou seja, aspectos relacionados ao cotidiano das pessoas, a chamada matemática prática. São vários os problemas de probabilidades que foram resolvidos com os métodos e notações publicadas por ele entre eles destaca:

> Suponha que n bilhetes são numerados consecutivamente de 1 a n e que três bilhetes são tirados ao acaso. Então a probabilidade que três números consecutivos sejam tirados é $\frac{2.3}{n(n-1)}$ (Boyer, 1974, p.334).

Segundo Boyer (1974), não foi necessário conceitos ou métodos novos para solucionar o problema, mas a grande contribuição de Euler para a probabilidade foi a notação, e escrever que era preciso a representação da expressão: $\frac{p(p-1)\dots(p-q+1)}{1.2\dots q}$ por $\begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}$ atualmente é uma notação bastante utilizadas em sala de aula $\begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix} = \frac{n!}{p!(n-p!)}$. Logo nota-se o motivo de ser conhecido como: o maior construtor de notação.

O conteúdo de probabilidade é trabalhado no ensino médio das escolas brasileiras e muitas notações construída por Euler ainda são aplicadas para resolver problemas atualmente.

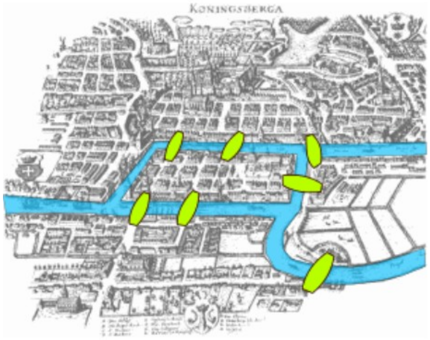
> No ensino médio, o termo combinatória está usualmente restrito ao estudo de problemas de contagem, mas esse é apenas um de seus aspectos. Outros tipos de problemas poderiam ser trabalhados na escola são aqueles relativos a conjuntos finitos e com enunciados de simples entendimento relativo, mas não necessariamente fáceis de resolver. Um exemplo clássico é o problema das pontes de Könisberg, tratado por Euler: dado um conjunto de sete ilhas interligadas por pontes, a pergunta que se coloca é: Partindo se de uma das ilhas, é possível passar pelas demais ilhas e voltar ao ponto de partida, nisso cruzando-se cada uma das pontes uma única

vez? Problemas dessa natureza podem ser utilizados para desenvolver uma série de habilidades importantes: modelar o problema, via estrutura de grafo no exemplo, um diagrama em que cada ilha é representada por um ponto e cada ponte é um segmento conectando dois pontos; explorar o problema, identificando situações em que há ou não solução; convergir para a descoberta da condição geral de existência de uma tal solução (ainda no exemplo, o caso em que cada ilha tem um número par de pontes). Muitos outros exemplos de problemas combinatórios podem ser tratados de modo semelhante, tais como determinar a rota mais curta em uma rede de transportes ou determinar um eficiente trajeto para coleta de lixo em uma cidade (Ministério da Educação, 2006, p.94).

De acordo Ministério da Educação (2006), conteúdos de contagem são trabalhados nas escolas, juntamente com problemas relacionados a conjuntos finitos. Exemplifica um dos mais conhecidos problemas resolvidos por Euler, o problema das pontes de Konigsberg. Mostra que através de problemas podem ser desenvolvida várias habilidades necessárias para o aluno do ensino médio.

O conhecido Problema das sete pontes de Konigsberg, na cidade de Konigsberg na Prússia, foi resolvido em 1736 e é considerado como um dos primeiros teoremas da teoria dos grafos. O problema consiste na localização da cidade de Konigsberg que é banhada pelo Rio Pregel, e inclui duas ilhas que estavam ligadas entre si por sete pontes. Os moradores da cidade gostavam de passear e precisavam passar pelas pontes e buscavam formas de atravessar por todas as pontes somente uma vez, ou em outra palavras, se era possível passar pelo caminho que atravessava cada ponte exatamente uma vez e voltar ao ponto de partida. Segue abaixo uma figura do mapa da cidade, com as sete pontes de Konigsberg:

Figura 3.1: Pontes Konigsberg



(a) Pontes de Konigsberg Fonte:https://www.mat.uc.pt/ alma/escolas/pontes/

Para Assis (2016), Euler supõe a existência do passeio e chega a conclusão que, se o mesmo começa na ilha não terminará nela, de forma análoga se começar fora da ilha deverá terminar na ilha, como destaca abaixo:

> Suponha que exista tal passeio. Considere qualquer uma das quatro partes da cidade como, por exemplo a ilha, e suponha que nosso passeio não começa aqui. Então, em algum ponto no tempo, entramos na ilha atravessando uma ponte; mais tarde deixamos a ilha por meio de outra ponte. Então entramos na ilha novamente através de uma terceira ponte, e aí a deixamos por uma quarta, e então entramos através de uma quinta ponte e não podemos mais sair, pois usamos todas as pontes da ilha (Assis, 2016, p.21-22).

A busca por Resolução de Problemas não é estratégia recente no ensino, o problema das sete pontes mostra que problemas práticos são encontradas no cotidiano.

> O reconhecimento de que a resolução de problemas ocupa um lugar central no desenvolvimento da Matemática não é uma ideia nova. A verdade é que à resolução de problemas nunca foi atribuída a importância merecida. Não devemos esquecer que foi ao procurar (e a encontrar) a solução para o quebra cabeça provinciano das pontes de Konigsberg que Euler lançou, sem o saber, os fundamentos da Teoria do Grafos (Duarte, 2000, p.97).

A Resolução de Problemas na Matemática não é algo novo e a substituição de cada área por um ponto, pontes por linhas que se uniam aos pontos correspondentes, Euler consegue descobrir que o problema não tem solução e a generalização desse problema inicia a Teoria dos Grafos.

Problemas geométricos também foram resolvidos devido a auxilio dos métodos, teoremas e definições de Euler. Os sólidos geométricos são estudados centenas de anos antes do seu nascimento, um dos estudiosos foi Euclides de Alexandria que em seu livro Os elementos, dedica as propriedades dos cinco sólidos regulares, que ajudou Euler em alguns de seus trabalhos.

Outra fórmula muito utilizada por estudante de todas as escolas para resolver inúmeros problemas, e que foi desenvolvida em 1758, é a fórmula de Euler ou ainda, relação de Euler. A mesma relaciona números de vértices(V), arestas(A), e faces(F) de um poliedro convexo.

$$\text{Relação de Euler: } V - A + F = 2$$

Poliedros é a reunião de regiões poligonais planas, chamada de faces, e cada lado dessas regiões poligonais é também lado de uma outra região poligonal e a interseção de duas faces quaisquer ou é um lado, ou um vértice, ou é vazia. São ditos Poliedros Convexos, quando o segmento que liga dois dos seus pontos está contido nele. O valor 2 da equação é característica dos poliedro convexos.(Dante, 2008, p.361)

> Todo poliedro convexo satisfaz a relação de Euler, mas nem todo poliedro que satisfaz a relação de Euler é convexo (Dante, 2008, p.362).

Segundo Dante (2008), Poliedros convexos são regulares quando toda as faces são polígonos regulares congruentes e em cada vértices do poliedro concorre o mesmo número de arestas. Existem apenas cinco poliedros regulares convexos, os quais foram citados na tabela.

Tabela 3.3: Elementos da Relação de Euler

Elementos da Relação de Euler				
Poliedro	V	A	F	$V - A + F = 2$
Tetraedro	4	6	4	2
Cubo	8	12	6	2
Octaedro	6	12	8	2
Dodecaedro	20	30	12	2
Icosaedro	12	30	20	2

Fonte: adaptado de Dante, 2008.

Muda-se muitas coisas na educação, assim como no Ensino da Matemática, mas existem conceitos que devem ser apresentados aos alunos independente do tempo, pois são experiências que por séculos continuam a proporcionar a aprendizagem. As nomeclaturas são importane, bem como suas notações, no entanto, a riqueza da experimentação desses conceitos clássicos será decisiva na educação de qualidade. Euler proporciona com suas obras essa experimentação, mostrando importantes ferramentas na construção de modelos matemáticos que contribui para resolução de diversos problemas.

3.5 A arte de resolver problemas de Polya

Geoge Polya, nascido em 13 de dezembro de 1887 em Budapeste na Hungria, de origem judaica. Polya no ensino secundário, mesmo considerando a prática utilizada, de valorização da aprendizagem por meio de memorização monótona e sem utilidade, foi considerado excelente aluno. No ensino superior inicia seus estudos no curso de Direito provavelmente por influência dos pais, considerando o curso monótono, muda-se para o curso de Línguas e Literatura, também se interessa por Física, Latim, Filosofia e por fim Matemática.

Segundo Balieiro Filho (2017), Polya conhece David Hilbert (1862 -1943) em 1913 depois de se mudar para Gottingen. Torna-se doutor, assume um cargo na Universidade em Zurique em 1914 e nesse mesmo ano não atende a convocação para lutar na primeira guerra mundial o que lhe deixa longe da Hungria até o termino da segunda guerra mundial. Nesse período trabalhou em Oxford e Cambridge publicando trabalhos de grande valor para o Ensino da Matemática.

Decidiu mudar-se para o Estados Unidos em 1940 e trabalhar na Universidade de Stanford temendo a invasão da Suíça pelos alemães, permaneceu na Universidade de Stanford até 1953 quando se aposentou.

As pesquisas de Polya sobre a metodologia da resolução de problemas, tornam-se um livro cujo título é: A Arte de Resolver Problemas. No livro, ele ressalta que procedimentos rotineiros e mecânicos favorece o desinteresse dos alunos, esclarece que a divisão do problemas em fases pode auxiliar na aprendizagem e conceitua alguns termos matemáticos.

> Uma grande descoberta resolve um grande problema, mas há sempre uma pitada de descoberta na resolução de qualquer problema. O problema pode ser modesto, mas se ele desafiar a curiosidade e puser em jogo as faculdades inventivas, quem o resolver por seus próprios meios experimentará a tensão e gozará o trinfo da descoberta. Experiências tais, numa idade susceptível, poderão gerar o gosto pelo trabalho mental e deixar, por toda a vida, a sua marca na mente e no caráter (Polya, 1995, p. V).

Segundo Polya, existe algo à mais na descoberta da resolução de problemas, independente do problema, a pessoa que experimentar sentirá o triunfo da descoberta, o que poderá ser marcado em sua mente e caráter.

Polya no livro A Arte de Resolver Problemas, introduz com seu pequeno dicionário a palavra Heurística, podemos dizer que, ele popularizou a heurística. Em um prólogo do seu livro em 1944 escreve: “Este tipo de estudo, chamado Heurística por alguns autores, não está em moda nos dias que correm, mas tem um longo passado e, talvez, algum futuro.”

> Heurística, Heurética ou ars inveniendi era o nome de um certo ramo de estudo, não bem delimitado, pertencente à Lógica, Filosofia ou à Psicologia, muitas vezes delineado mas raramente apresentado com detalhes, hoje praticamente esquecido. O objetivo da Heurística é o estudo dos métodos e das regras da descoberta e da invenção. Alguns indícios desse estudo podem ser encontrados em trabalho dos comentaristas de Euclides. A este respeito, Pappus tem uma passagem particularmente interessante. As mais famosas tentativas de sistematização da Heurística devem-se a Descartes e a Leibniz, ambos grandes matemáticos e filósofos. Bernard Bolzano apresentou notável descrição pormenorizada da Heurística (Polya, 1995, p.86).

A heurística pertence a várias ciências e um de seus objetivos é estudar e descobrir regras de métodos que facilitam a resolução de problemas. Vários indícios desses procedimentos podem ser encontrados na vida de personagens históricos.

Apresentar ao aluno problemas, desafiando a curiosidade poderá despertar o gosto por raciocínio independente. A Heurística com suas multiplas conexões, estudo de métodos e regras, têm contribuido para apresentação e resolução de problemas no ensino da Matemática.

Diferentes abordagem à resolução de problema pode auxiliar na compreensão mais efetiva para o ensino da Matemática. Polya incentiva utilizar diferentes estratégias propiciando ao aluno discutir, provocando novas ideias.

> Ao procurarmos a solução, podemos variar continuamente o nosso ponto de vista, a nossa maneira de encarar o problema. Temos de mudar de posição de quando em quando. É provável que a nossa concepção do problema seja muito incompleta no princípio; a nossa perspectiva é outra depois de feito algum progresso; ela é ainda mais diferente quando estamos quase a chegar à solução (Polya, 1995, p.3).

Segundo Polya (1995), deve-se variar no ponto de vista da procura por soluções de problemas, pois nosso progresso está em constante mudança e uma nova perspectiva é necessária para um melhor desenvolvimento.

Polya desenvolve quatro passos, que pode contribuir com o desenvolvimento do aluno, propiciando um maior entendimento ou assimilação de métodos que desenvolvam a capacidade de resolver problemas.

3.5.1 As quatro fases da resolução de problemas

Toda experiência adquirida pelo estudante é importante e quanto mais melhor será o resultado. O trabalho deve ser auxiliado mesmo que de forma discreta, logo cabe ao professor compreender o estudante, para indicar possíveis passos.

O professor deve ajudar com naturalidade mostrando maneiras diferente de focalizar a atenção, um importante dever do professor é o auxilio ao aluno, porém exige tempo, prática, dedicação e princípios firmes (Polya, 1995). As indagações devem ter como objetivos, auxiliar e desenvolver a capacidade de resolver problemas provocando operações mentais.

> Para agrupar convenientemente as indagações e sugestões da nossa lista, distinguiremos quatro fases de trabalho. Primeiro, temos de compreender o problema temos de perceber claramente o que é necessário. Segundo, temos de ver como os diversos itens estão inter-relacionados, como a incógnita está ligada aos dados, para termos a ideia da resolução, para estabelecermos um plano. Terceiro, executamos o nosso plano. Quatro, fazemos um retrospecto da resolução completa, revendo-a e discutindo-a (Polya, 1995, p.3).

Segundo Polya (1995), podemos resolver problemas com os quatro seguintes passos:

1. Compreender o problema,
2. Estabelecer um plano,
3. Executar o plano,
4. Retrospecto do plano.

A compreensão do problema é essencial, mas o desejo de resolve-lo deve acompanhar o estudante, vários métodos devem ser utilizados no processo, mas se o estudante não compreender, pode haver vários fatores.

Uma descrição dos quatro passos para resolução de problemas segundo (Polya, 1995) segue no quadro abaixo:

Tabela 3.4: Tabela de Passos de Polya para resolução de problemas

Passos	**Análises**
Compreender o Problema	1-Para que exista uma boa Compreensão do Problema são necessários: Entendimento do enunciado do problema, ou seja, o estudante deve entender tudo o que foi escrito ou dito e conseguir reescrever com suas próprias palavras, Conseguir identificar os dados do problema; As informações são suficientes; Encontrar objetivos, ou melhor, saber onde chegar; Conceder atenção aos problemas estimulando a memória e as recordações de problemas similares.
Estabeler um Plano	2-Para que exista uma boa Compreensão do Problema são necessários: Usar um modelo de problemas semelhantes; Resolver problemas conhecidos que sejam equivalentes; Buscar padrões; Desenhar figuras; Usar propriedades conhecidas anteriormente.
Executar o Plano	3-A Execução de um Plano é trabalhosa e exige conhecimento prévio, bons hábitos, concentrar no objetivo e paciência. Segue alguns requisitos que ajudara nessa tarefa: Examinar os detalhes antes estabelecidos para que fique o melhor possível; Utilizar diferentes estratégias, realizando detalhadamente as operações algébricas e geométricas; Conceder o tempo suficiente; Recomeçar sempre que preciso; Verificar se todo processo está correto.
Retrospecto do Plano	4- O Retrospecto sempre deve ser feito de forma a consolidar e aperfeiçoar na resolução de problemas. O estudante precisa ser ensinado que todo problema poderá contribuir com seu aperfeiçoamento que toda resolução poderá ser melhorada. Segue alguns requisitos: Verificar se o problema está realmente correto considerando refazer todas as operações já executadas; Analisar com outros possíveis caminho as soluções; Oportunizar ao estudante relações com outros problemas; Melhorar as soluções dos problemas sempre que possível.

Fonte: adaptado de POLYA, 1995.

Depois de analisar cada um dos requisitos de todas as fases, observa-se que todas elas tem sua importância, não siginifica que um aluno não possa ter uma ideia brilhante e pular uma delas, mas nem sempre surgem ideias brilhantes então, quando tudo o que resta é somente a pergunta podem ser analisados todos os passos e possivelmente será descoberta uma resposta, que trará uma sensação de bem estar que pode desenvolver no aluno o desejo por reslver cada dia mais problemas.

3.5.2 O Pequeno Dicionário de Heurística

Polya escreve o dicionário como uma forma de auxílio para um bom desenvolvimento da heurística, ajudando nos significados das palavras e facilitando os quatro passos da resolução de Polya. O primeiro passo de resolução de problemas de Polya, indica que uma boa compreensão é de fundamental importância e na maioria dos problemas, o aluno precisa primeiro compreender e reescrever com outras palavras para que esse bom desenvolvimento ocorra de forma eficiêncte. Ao citar objetivos do Pequeno Dicionários, Balieiro Filho (2017) destaca:

> Para explicar e discutir o processo heurístico e os elementos que dele fazem parte, Polya elabora um Pequeno dicionário de heurística com 67 artigos, dando o significado e os fundamentos de cada um deles (Balieiro Filho, 2017, p.108).

Para Balieiro Filho (2017), o Dicionário foi criado para explicar, auxiliar, dar significado e fundamentos à palavras, contribuindo em diferentes níveis mas, sendo essencial na descoberta de soluções de alguns problemas.

> ... o Dicionário, além de conter instruções para a procura de informações relativas a pontos específicos da lista. É preciso frisar que há um plano básico e uma certa unidade no Dicionário, porque os seus artigos aparentam uma grande variedade. Há alguns artigos mais longos dedicados à discussão sistemática, embora condensada, de alguns temas mais gerais. Certos artigos contêm comentários mais específicos e outros tratam de remissões, dados históricos, citações, aforismas ou, até mesmo anedotas (Polya, 1995, p. XV).

Segundo Polya (1995), o leitor deve recorrer ao Dicionário para obter informações e esclarecimento sobre diversos temas, e será auxiliado com uma maior compreensão do problema. A primeira palavra descrita em seu dicionário foi Analogia e ele descreve essa palavra com alguns significados dependendo do contexto matemático na qual ela está inserida.

> Analogia é uma espécie de semelhança. Objetos semelhantes coincidem uns com os outros em algum aspecto; objetos análogos coincidem em certas relações das suas respectivas partes (Polya, 1995, p. 29).

Para Polya (1995), a explicação da palavra Analogia em conjunto com alguns exemplos podem esclarecer problemas propostos, então melhorando o significado e exemplificando a palavra a resolução de problemas pode ser aperfeiçoada. O Dicionário surge como um auxilio para os passos da resolução de Polya, com diferentes explicações, amplia a oportunidade de esclarecer a palvra e o contexto no qual a palavra está inserida. Exemplo é a outra explicação dada à palavra Analogia a seguir:

> A analogia permeia todo o nosso pensamento, a nossa fala cotidiana e as nossas conclusões triviais, assim como os modos de expressão artística e as mais elevadas conclusões científicas. Ela é empregada nos mais diferentes níveis. É comum o uso de analogias vagas, incompletas ou obscuras, porém a analogia pode alçar-se ao nível do rigor matemático. Todos os tipos de analogia podem desempenhar uma função na descoberta da solução e, por isso, não devemos desprezar nenhum deles (Polya, 1995, p. 29).

Este é o segundo tópico da palavra Analogia descrito no dicionário, que descreve a palavra de modo amplo, distinto e em diferentes níveis, sendo que todos eles desempenham suas devidas funções na resolução de problemas. Outra palavra que mostraremos do dicionário, é a palavra Heurística, descrita e exemplificada de várias formas. Mostraremos a seguir a Heurística Moderna descrita por Polya.

> Heurística moderna procura compreender o processo solucionador de problemas, particularmente as operações mentais, típicas desse processo, que tenham utilidade. Dispõe de várias fontes de informação, nenhuma das quais deve ser desprezada. Um estudo consciencioso da heurística deve levar em conta tanto as suas bases lógicas quanto as psicológicas. Não deve esquecer aquilo que os autores antigos como Pappus, Descartes, Leibniz e Bolzano escreveram sobre o assunto, mas muito menos pode desprezar a experiência imparcial. A experiência na resolução de problemas e a experiência na observação dessa atividade por parte de outros deve constituir a base em que se assenta a Heurística. Neste estudo, não devemos descurar de nenhum tipo de problema, e assim procurar aspectos comuns na maneira de tratar de problemas de toda sorte: devemos considerar os aspectos gerais, independente do assunto específico do problema. O estudo da heurística tem objetivos práticos: melhor conhecimento das típicas operações mentais que se aplicam à resolução de problemas pode exercer uma certa influência benéfica sobre o ensino, particularmente sobre o ensino da Matemática (Polya, 1995, p. 87).

Para Polya, não devemos desprezar a escrita de autores como Pappus, Descarte, Leibniz e Bolzano sobre o assunto heurística, mas devemos observar a experiência na resolução de problemas constituindo a base da Heurística. Deve-se encontrar aspectos que são comuns para todo tipo de problemas.

> Vestígios de heurística também são encontrados no trabalho O Método, de Arquimedes. Antes da descrição de seu método mecânico de demonstração, na carta enviada a Eratóstenes, Arquimedes escreve que considera seu método diferente de uma demonstração, sendo ele uma investigação da demonstração. Também nota-se que uma das condições apontadas para a aplicação de seu método é o conhecimento prévio do que se quer demonstrar (Balieiro Filho, 2017, p. 112).

Segundo Balieiro Filho (2017), vestígios da heurística foram encontrados em vários períodos, eram diferenciados por não serem demonstrações e sim o início de uma investigação, apresentando diversos aspectos diferentes do que era apresentado naquele momento histórico.

Através do estudo de contextos e aspectos históricos, a Resolução de Problemas poderá propiciar a construção do conhecimento e contribuir como uma metodologia de ensino-aprendizagem da Matemática, que exigirá de ambos, professor e aluno, uma atitude ativa e responsável.

Considerações finais

Esperamos com esse trabalho contribuir com a construção de uma estratégia para o ensino da Matemática, ou para uma maior compreensão acerca da Resolução de Problemas, motivando docentes na busca por novas estratégias e reflexão no processo de ensino aprendizagem.

Consideramos que obter vestígios de Resolução de Problemas da vida de personagens históricos de destaque, poderá influenciar de forma relevante e positiva a busca por conhecimento de ambos, professores e alunos, contribuindo com a eficácia na educação, pois muitos alunos apresentam desafios de aprendizagem devido à falta de habilidades para Resolver Problemas.

Advogamos que a compreensão dos métodos apresentados, poderá contribuir para o ensino de qualidade. Este estudo me permitiu vislumbrar a importância de novas estrátegias para o ensino da Matemática, no desenvolvimento em sala de aula. Pretendo continuar a ensinar a Resolução de Problemas com os métodos que foram apresentados através do estudo das obras dos personagens históricos. Para práticas futuras pretendo pesquisar outros personagens e seus métodos, afim de ampliar as minhas estratégias de ensino aprendizagem.

Neste contexto, queremos esclarecer que este trabalho é a continuidade de um estudo que pretende explorar e fomentar a Resolução de Problema como estratégia para o ensino da Mátematica. Estas sugestões devem ser inseridas e analisadas conforme realidade e característica de cada sala de aula, de forma a colaborar com o amadurecimento de metodologias do ensino da matemática, provocar e instigar discussões, com a expectativa de melhorias na qualidade do ensino.

Referências Bibliográficas

Assis, J. S. M. (2016). Grafos eulerianos no ensino médio. Dissertação de Mestrado, IMPA-PROFMAT, Rio de Janeiro/RJ.

Balieiro Filho, I. (2017). *Aquimedes,Pappus,Descartes e Polya-Quatro episódio na história da heurística*. Ed. Unesp, S. Paulo.

Bicudo, I. (2009). *Tradução de Os elementos de Euclides*. Ed. Unesp, S.Paulo.

Boyer, C. B. (1974). *História da Matemática*. Ed.Univesidade de S Paulo, S.Paulo.

Dalcin, A. e Santos, V. (2013). *Situações problemas envolvendo a história da matemática: possibilidades de pensar a resolução de problemas. In:Darsie, Marta e Palma, Rute. Resolução de problemas algumas reflexões em Educação Matemática*, chapter IV, páginas 63–75p. EdUFMT, Cuiabá MT.

D'Ambrósio, U. (2009). Euler, um matemático multifacetado. *Revista Brasileira de História da Matemática*, 9:13–31.

Dante, L. R. (2000). *Didática da resolução de problemas de Matemática*. Ed. Ática, S.Paulo, 12rd edição.

Dante, L. R. (2007). *Didática da resolução de problemas de Matemática*. Ed. Ática, S.Paulo.

Dante, L. R. (2008). *Matemática volume único ensino médio*. Ed. Ática, S.Paulo, 1rd edição.

Darsie, M. M. e Palma, R. (2013). *Resolução de problemas algumas reflexões em Educação Matemática*. EdUFMT, Cuiabá.

Descartes, R. (2001). *A Geometria. Tradução: Emídio C.Q. Lopes.* IAG Artes Gráfica, Lisboa.

Diniz, M. (1988). Resolução de Problemas em Matemática Elementar. *Boletim GEPEM*, 13:22.

Duarte, J. (2000). A resolução de problemas no ensino da Matemática. *Educação Comunicação*, 4:97–100.

Eves, H. (1992). *Tópicos de História da Matemática para uso em sala de aula.* Atual, S.Paulo.

Eves, H. (2011). *Introdução á História da Matemática.* Ed. Unicamp, Campinas/SP.

Ministério da Educação (2006). Orientações Curriculares para o Ensino Médio. http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/book_volume_02_internet.pdf. Acesso 03 de março de 2019.

Ministério da Educação (2018). Base Nacional Comum Curricular. URL: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/abase. Acesso 19 de janeiro de 2019.

Onuchic, L. L. R. (1999). *Ensino aprendizaem de Matemática através da Resolução de Problemas. In: Bicudo, Maria Aparecida .(org). Pesquisa em Educação Matemática: concepção e perspectivas.* UNESP, S. Paulo.

Polya, G. (1995). *A arte de resolver problemas.* Ed. Interciência, Rio de Janeiro.

PPP E.E. Professora Vanil Stabilito, S. E. M. G. (2017). Plano Político Pedagógico de Escola Estadual Prof Vanil Stabilito. Mato Grosso.

Roque, T. (2012). *História da matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas.* Zahar, Rio de Janeiro.

Roque, T. (2012). *Tóopicos de História da Matemática.* SBM, Rio de Janeiro.

Rosa Neto, E. (2005). *Didática da Matemática.* Ed. Ática, S.Paulo.