



Universidade Estadual da Paraíba
Pró-Reitoria de Pós-Graduação e Pesquisa
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional PROFMAT



Cônicas: Tópicos Especiais para o Ensino Médio

Camilo de Lelis Nunes de Souza

Trabalho de Conclusão de Curso

Orientador: Prof. Dr. Francisco Sibério Bezerra Albuquerque

Campina Grande - PB
Março/2019



Universidade Estadual da Paraíba
Pró-Reitoria de Pós-Graduação e Pesquisa
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional PROFMAT



Cônicas: Tópicos Especiais para o Ensino Médio

por

Camilo de Lelis Nunes de Souza

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UEPB, na modalidade Mestrado Profissional, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre.

É expressamente proibido a comercialização deste documento, tanto na forma impressa como eletrônica. Sua reprodução total ou parcial é permitida exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, desde que na reprodução figure a identificação do autor, título, instituição e ano do trabalho.

S729c Souza, Camilo de Lelis Nunes de.
Cônicas [manuscrito] : Tópicos especiais para o Ensino Medio / Camilo de Lelis Nunes de Souza. - 2019.
64 p. : il. colorido.
Digitado.
Dissertação (Mestrado em Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Estadual da Paraíba, Pró-Reitoria de Pós-Graduação e Pesquisa, 2019.
"Orientação : Prof. Dr. Francisco Sibério Bezerra Albuquerque, Departamento de Matemática - CCT."
1. Cônicas. 2. Teorema de La Hire. 3. Teorema de Poncelet. I. Título

21. ed. CDD 516

Cônicas: Tópicos Especiais para o Ensino Médio

por

Camilo de Lelis Nunes de Souza

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UEPB, modalidade Mestrado Profissional, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre.

Aprovado por:

Elias Dias Coelho Neto

Prof. Dr. Elias Dias Coelho Neto - UEPB
Examinador Interno

Marcelo Carvalho Ferreira

Prof. Dr. Marcelo Carvalho Ferreira - UFCG
Examinador Externo

Francisco Sibério B. Albuquerque

Prof. Dr. Francisco Sibério Bezerra Albuquerque - UEPB
Orientador

Universidade Estadual da Paraíba
Centro de Ciências e Tecnologia
Departamento de Matemática
Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Março/2019

Dedicatória

Aos meus familiares que me apoiaram bastante ao longo de toda esta jornada.

Agradecimentos

Gostaria de agradecer primeiramente à Deus, pois foi graças à sua misericórdia, aliada à minha fé e aos meus esforços que consegui concluir este mestrado.

Agradecer aos meus familiares, minha mãe Maria Gorete Nunes de Souza, meu pai José de Souza Nunes e meu irmão Danilo Nunes de Souza pelo apoio que me foi concedido em momentos difíceis.

Ao meu orientador Prof. Dr. Francisco Sibério Bezerra Albuquerque pelo incentivo a ingressar em uma Pós-Graduação e pela excelente orientação e dedicação.

Aos professores da banca examinadora Dr. Francisco Sibério Bezerra Albuquerque, Dr. Elias Dias Coelho Neto, Dr. Marcelo Carvalho Ferreira e também aos demais professores do PROFMAT da UEPB de Campina Grande pelo excelente trabalho e pelo aprendizado que eles me proporcionaram.

Agradeço aos meus colegas do PROFMAT pelos bons momentos que passamos e pela ajuda já que dedicamos muitas horas de estudo semanalmente e compartilhamos informações importantes no decorrer do curso.

Agradeço à direção da Escola Estadual de Ensino Fundamental e Médio Rio Branco pelo apoio e pela liberação de algumas aulas para que eu pudesse me dedicar ao PROFMAT.

Por fim, agradeço à Sociedade Brasileira da Matemática - SBM pelo oferecimento deste Curso em Rede Nacional.

Resumo

As seções cônicas e muitas de suas características estão entre os tópicos mais importantes da Geometria Analítica. Entretanto, esses conteúdos têm sido pouco explorados pelos professores de Matemática. Quando esses tópicos são apresentados em sala de aula, geralmente são trabalhados com questões que envolvem somente a substituição de letras por números, comprometendo a aprendizagem dos alunos. É de suma importância enfatizar uma abordagem histórica das cônicas, o significado das mesmas e suas principais propriedades, pois esses objetos foram importantes para o desenvolvimento de inúmeras tecnologias. Suas propriedades refletoras, por exemplo, foram indispensáveis para o desenvolvimento de antenas parabólicas, telescópios espelhados, radiotelescópios, entre outras aplicações. As curvas elípticas foram utilizadas na Astronomia para descrever movimentos planetários e de outros corpos celestes ao redor do Sol. Ensinar alguns métodos de construção dessas figuras também ajuda bastante no desenvolvimento de um ensino mais produtivo, pois o aluno torna-se mais participativo durante as aulas. Além disso, devem ser apresentados resultados pouco conhecidos das cônicas e algumas aplicações, incentivando assim o estudante a resolver problemas mais desafiadores. É essencial uma mudança na maneira como esse conteúdo é ensinado. Métodos de ensino criativos contribuem para um melhor rendimento das aulas, pois ajudam bastante na interação entre alunos e professores, gerando uma melhor aprendizagem.

Palavras Chaves: Cônicas. Construção. Teoremas de La Hire e de Poncelet.

Abstract

The conic sections and many of their characteristics are among the most important topics of Analytical Geometry. However, these contents have been neglected by Mathematics teachers. When these topics are presented in the classroom, they are usually dealing with questions that involve only substituting letters with numbers, affecting student learning. It is extremely important to emphasize a historical approach to the conics, their meaning and their main properties, as these geometric figures were important for the development of many technologies. The Reflective Property of these figures, for example, was indispensable for the development of parabolic antennas, mirrored telescopes, radio telescopes, among other applications. Elliptical curves have been used in Astronomy to describe planets and other celestial bodies around the Sun. Teaching some methods of constructing these figures also helps greatly in the development of a more productive teaching as the student becomes more participatory during class. In addition, rare theorems of the conics and some applications should be presented, thus encouraging the student to solve more challenging problems. A change in the way this content is taught is essential. Creative teaching methods contribute to a better performance of classes, as they greatly help the interaction between students and teachers, generating better results in relation to meaningful learning.

Keywords: Conical. Construction. The Theorems of La Hire and Poncelet.

Sumário

1	Introdução	2
2	Conceitos e propriedades iniciais	4
2.1	Curvas parametrizadas e retas tangentes	4
2.2	Elipse	5
2.3	Hipérbole	7
2.4	Parábola	9
2.5	Cone de duas folhas e seções cônicas	10
2.6	Excentricidade	12
3	Construções elementares das cônicas	14
3.1	Breve histórico acerca das seções cônicas	14
3.2	Construções da elipse	15
3.2.1	Construção via definição	15
3.2.2	Construção analítica	16
3.2.3	Construção via laboratório de Matemática	17
3.3	Construções da hipérbole	21
3.3.1	Construção via laboratório de Matemática	21
3.3.2	Construção via geometria plana	23
3.4	Construções da parábola	24
3.4.1	Construção via régua e compasso	24
3.4.2	Construção via geometria plana	26
3.4.3	Construção via laboratório de Matemática	27
4	Propriedades refletoras das cônicas	30
5	Teoremas de La Hire e de Poncelet para cônicas	38
6	Conclusões	54
	Referências Bibliográficas	56

Capítulo 1

Introdução

A Geometria Analítica é a grande área da Matemática em que se encontra esse trabalho. O surgimento da Geometria Analítica foi necessário porque apesar de os gregos terem realizado grandes contribuições à Geometria, faltava uma certa relação da mesma com a Álgebra, que só foi desenvolvida no século XVI e XVII pelos matemáticos René Descartes (1596 - 1650) e Pierre de Fermat (1601 - 1665) (ver referência [7]). As seções cônicas, que formam uma subárea da Geometria Analítica, foram desenvolvidas principalmente pelo matemático Apolônio de Perga em sua obra "As cônicas", que apesar de ter sido criticada por pesquisadores de sua época, foi de fundamental importância para o desenvolvimento de aplicações em várias áreas do conhecimento. Indicamos a referência [9] para quem deseja realizar mais estudos sobre a história da Geometria Analítica.

No início do século XVII, Kepler publicou obras que descrevem os movimentos planetários em torno do Sol como curvas elípticas. Em 1632, Galileu Galilei publicou trabalhos científicos que relacionam os movimentos de projéteis com as características da parábola. Mais detalhes sobre essas pesquisas podem ser estudadas em [9].

Em 1662, Robert Boyle fez importantes pesquisas relacionando funções hiperbólicas com o estudo dos gases. É também a partir do estudo das cônicas e suas principais características que podemos explicar a estrutura das antenas parabólicas e dos espelhos refletoras. Mais aplicações das propriedades das seções cônicas podem ser vistas nos artigos publicados [5, 9].

O presente trabalho tem como objetivo geral contribuir para o ensino e aprendizagem da Geometria no Ensino Médio com proposta de aplicação de problemas extracurriculares de grande relevância para o desenvolvimento da Ciência e da Matemática modernas.

No Capítulo 2, apresentamos os conceitos e propriedades iniciais. No Capítulo 3, abordaremos alguns fatos históricos sobre as seções cônicas, e um pouco da importância das mesmas; em seguida, trabalharemos com os processos de construção de elipses, hipérbolas e parábolas acompanhados de reflexões pedagógicas sobre essas atividades em sala de aula. O Capítulo 4 é um material de estudos para futuros professores e também para os que já ensinam. Nele destacamos a Propriedade Refletora das Cônicas, além de apresentar inúmeros

meios de utilizar essa importante propriedade. No Capítulo 5, tratamos dos Teoremas de La Hire e Poncelet, com alguns exercícios de aplicação. No fim desse Capítulo, relatamos a importância da abordagem desses teoremas durante a atividade docente do professor de Matemática. Por fim, no Capítulo 6, trazemos as considerações finais.

O estudo das seções cônicas é um dos temas da Geometria Analítica mais importantes de serem apresentados em sala de aula, pois essas figuras geométricas e suas características foram essenciais para a criação de muitas tecnologias utilizadas atualmente, como podemos ver nas referências [4, 13]. A motivação principal do presente trabalho é apresentar reflexões e propostas sobre métodos de ensino alternativos das cônicas de tal forma que desperte o interesse e a curiosidade dos alunos sobre esses tópicos, além de fornecer um material que poderá ser consultado tanto pelos estudantes de Matemática e áreas afins, quanto pelos que já exercem a atividade docente.

Capítulo 2

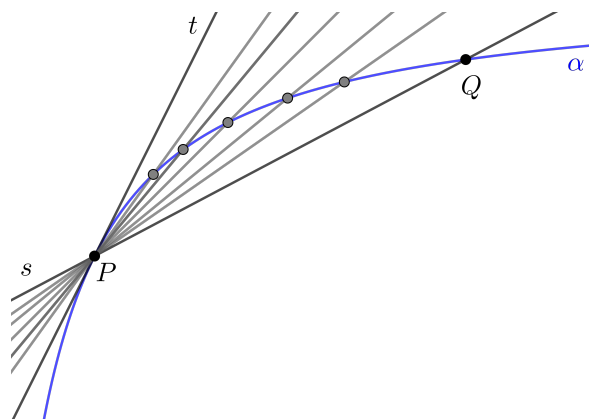
Conceitos e propriedades iniciais

Antes de apresentar os processos de construção, as propriedades refletoras e os resultados poucos conhecidos das cônicas, vamos inicialmente expor algumas definições importantes.

2.1 Curvas parametrizadas e retas tangentes

Definição 2.1 *Curva parametrizada no plano cartesiano é uma função do tipo $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ em que $\alpha(t) = (x(t), y(t))$, em que $t \in I$.*

Definição 2.2 *Para construirmos uma reta tangente a uma curva, devemos destacar inicialmente uma reta secante à mesma. Na figura abaixo, temos uma curva α e uma reta s secante à essa curva nos pontos P e Q .*



Observe que temos um conjunto de retas que são obtidas quando fazemos Q se aproximar cada vez mais de P , sendo P um ponto fixo. Cada vez que $P \rightarrow Q$, a reta que passa por esses dois pontos fica cada vez mais parecida com a reta t que foi destacada. Para que t seja tangente, essa "aproximação" da reta t deve ocorrer também quando as retas secantes s faz o deslocamento desse ponto Q de modo que o mesmo tenha coordenadas em x menor do que as coordenadas de x de P .

Podemos fazer estudos mais aprofundados das funções, das curvas parametrizadas e de problemas envolvendo retas tangentes a curvas nas referências [1, 14, 20].

2.2 Elipse

Definição 2.3 Sejam F_1 e F_2 dois pontos fixos (focos) no plano. **Elipse** é o lugar geométrico no plano formado a partir do conjunto de pontos $P(x,y)$ tais que

$$PF_1 + PF_2 = 2a,$$

em que a é uma constante positiva.

É indispensável também a definição de eixo focal, semi-eixo maior, centro e elipsóide de revolução.

Definição 2.4 A reta que passa pelos dois focos da elipse é o eixo focal. O centro da elipse é o ponto médio do segmento de reta F_1F_2 . O segmento de reta que liga o centro a qualquer um dos dois pontos obtidos a partir da interseção da elipse com o eixo focal é definido como semi-eixo maior, que nesse caso tem comprimento a . Elipsóide de revolução é a figura espacial obtida a partir da rotação de uma elipse em torno de seu eixo focal.

Consideremos a elipse de focos $F_1(-c,0)$ e $F_2(c,0)$, onde $c > 0$ conforme a figura abaixo

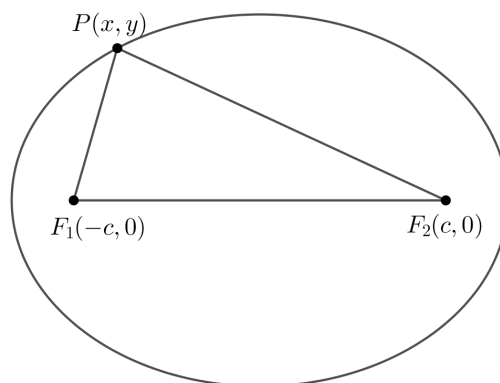


Figura 2.1: Elipse centrada na origem e com eixo focal passando pela reta x do plano cartesiano

Veremos a seguir que a forma canônica da equação dessa elipse é representada pela igualdade abaixo:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (2.1)$$

Demonstração. De fato, seja $P(x,y)$ um ponto qualquer dessa elipse. Por definição temos que:

$$PF_1 + PF_2 = 2a. \quad (2.2)$$

Apliquemos a fórmula da distância entre dois pontos no lado esquerdo em (2.2).

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a. \quad (2.3)$$

Note, na equação (2.3), que podemos isolar a segunda parcela da soma e elevar ao quadrado ambos os membros. Assim,

$$(x-c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + (x+c)^2 + y^2. \quad (2.4)$$

Desenvolvendo os quadrados em (2.4) e simplificando, teremos

$$xc + a^2 = a\sqrt{x^2 + 2xc + c^2 + y^2}. \quad (2.5)$$

Podemos elevar ao quadrado ambos os lados de (2.5) e simplificarmos

$$a^2(a^2 - c^2) = x^2(a^2 - c^2) + a^2y^2. \quad (2.6)$$

Antes de prosseguirmos, vamos fazer umas observações sobre a expressão $a^2 - c^2$ que obtivemos em (2.6). Analisando os pontos que foram destacados na figura da elipse, podemos notar um triângulo de vértices P , F_1 e F_2 . Pela propriedade da Desigualdade Triangular, temos que $PF_1 + PF_2 > F_1F_2 = 2c$. Como $PF_1 + PF_2 = 2a$, podemos substituir essa soma na inequação acima. Dessa forma, $2a > 2c \Rightarrow a > c$. Como a e c são constantes positivas, teremos que $a^2 > c^2$. Portanto, a expressão $a^2 - c^2$ será positiva. Logo, podemos afirmar que existe algum b real tal que $a^2 - c^2 = b^2$. Substituindo $a^2 - c^2$ por b^2 na igualdade (2.6) obtemos

$$x^2b^2 + a^2y^2 = a^2b^2. \quad (2.7)$$

Finalizamos a demonstração dividindo cada expressão de (2.7) por a^2b^2 . Dessa forma, demonstramos que a equação dessa elipse será representada pela igualdade abaixo

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

■

A equação acima representa, no plano cartesiano, uma elipse centrada na origem e de eixo focal coincidente com o eixo Ox . A verificação para o caso em que o centro é na origem e com eixo focal Oy é análoga a que fizemos. Observe que ao substituirmos x por 0 nessa

equação, obtemos $y^2 = b^2$, cuja solução é $y = \pm b$. Dessa forma, concluímos que a interseção do eixo y com essa elipse é o par de pontos $(0, -b)$ e $(0, b)$.

A reta que passa por $(0, -b)$ e $(0, b)$ é perpendicular ao eixo focal, pois como esses pontos têm coordenada em x igual a 0, essa reta coincide com o eixo Oy . O segmento de reta que liga a origem a qualquer um desses dois pontos é definido como o **semi-eixo menor**, que nesse caso, tem comprimento b .

Características como continuidade da curva elíptica, entre outras propriedades mais avançadas da elipse podem ser vistas em livros de Cálculo, como por exemplo [20].

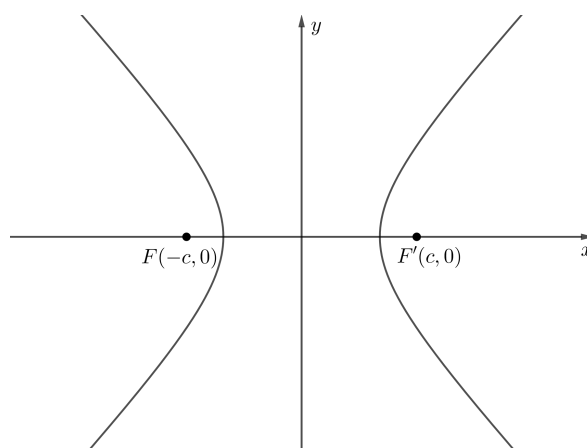
2.3 Hipérbole

Definição 2.5 *Sejam F e F' dois pontos fixos no plano cartesiano (focos). **Hipérbole** é o lugar geométrico definido como o conjunto de todos os pontos $P(x, y)$ tais que o módulo da diferença $PF - PF'$ é constante.*

É importante também destacarmos as definições de eixo focal, centro, vértices e hiperbolóide de revolução.

Definição 2.6 *A reta que passa pelos dois focos é o eixo focal. O ponto médio do segmento FF' é o centro da hipérbole. Os dois pontos dessa cônica que estão mais próximos do centro são os vértices. Hiperbolóide de revolução é uma figura espacial obtida a partir da rotação de uma hipérbole em torno do eixo focal.*

Consideremos uma hipérbole com focos $F(-c, 0)$ e $F'(c, 0)$ de modo que o módulo da diferença $PF - PF'$ seja igual a $2a$.



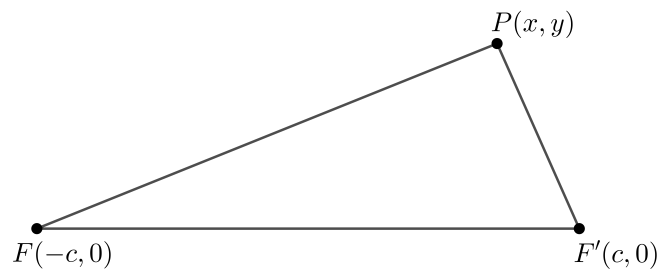
A equação canônica da mesma será representada pela igualdade abaixo

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Demonstração. De fato, ao aplicarmos a fórmula da distância entre dois pontos na equação modular $|PF - PF'| = 2a$ e simplificarmos, por procedimentos análogos aos que foram utilizados na demonstração da equação da elipse, chegamos na igualdade abaixo:

$$a^2(a^2 - c^2) = x^2(a^2 - c^2) + a^2y^2. \quad (2.8)$$

Antes de continuarmos a desenvolver essa igualdade, devemos provar que a expressão $a^2 - c^2$ obtida na mesma é negativa. Para isso, é necessário destacar um triângulo $PF'F$; onde $F(-c, 0)$ e $F'(c, 0)$ são os focos e $P(x, y)$ é um ponto do ramo direito da hipérbole.



De acordo com a desigualdade triangular, $PF < PF' + FF'$. Devemos isolar o FF' nessa inequação: $PF - PF' < FF'$. Da definição, do fato de P ser do ramo direito da hipérbole e de $a > 0$, teremos que $PF - PF' = 2a$. Note que como $F = (-c, 0)$ e $F' = (c, 0)$, então: $FF' = 2c$. Substituindo, na inequação obtida, $PF - PF'$ e FF' por $2a$ e $2c$, respectivamente, concluímos que $2a < 2c$. Portanto, $a < c$. Já que a e c são constantes positivas, então $a < c \Rightarrow a^2 < c^2 \Rightarrow a^2 - c^2 < 0$. Logo, existe um número real b tal que $a^2 - c^2 = -b^2$. Podemos substituir $a^2 - c^2$ por $-b^2$ em (2.8).

$$a^2(-b^2) = x^2(-b^2) + a^2y^2.$$

Dividindo os termos da igualdade acima por $-a^2b^2$ e simplificando, concluímos a demonstração da fórmula.

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (2.9)$$

■

Observação 2.1 A demonstração de que $a^2 - c^2$ é negativo utilizando um ponto do ramo esquerdo da hipérbole, é análoga a que fizemos para um ponto do ramo direito.

Quando a hipérbole for centrada na origem mas de focos $F(0, -c)$ e $F'(0, c)$, a representação da mesma será dada pela igualdade abaixo:

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1.$$

Os procedimentos utilizados para demonstrá-la são análogos aos que foram realizados para provar a igualdade (2.9).

Vamos definir o que é uma parábola e deduzir sua equação quando seu vértice está na origem, diretriz $x = -\frac{p}{2}$ e foco no ponto $F(\frac{p}{2}, 0)$.

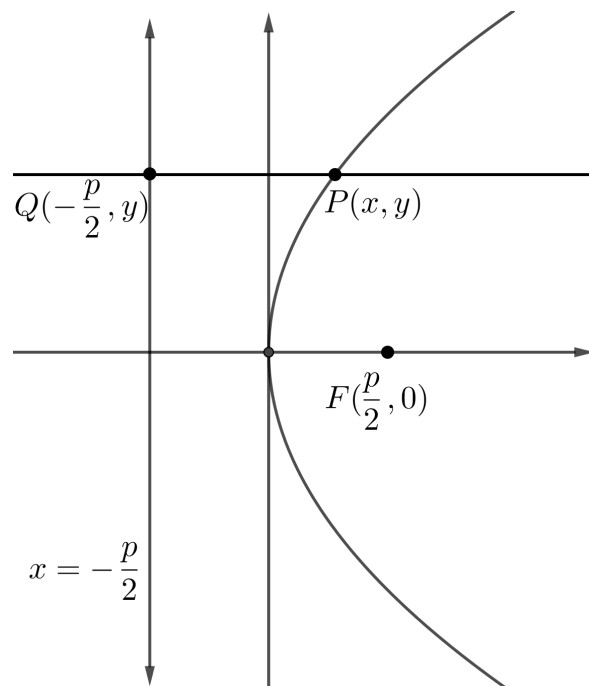
2.4 Parábola

Definição 2.7 *Sejam F um ponto fixo (foco) e d uma reta fixa (diretriz). **Parábola** é o lugar geométrico formado pelo conjunto de todos os pontos $P(x, y)$ tais que a distância de P até F e a distância de P até d sejam iguais.*

É importante definirmos também o que é eixo focal, vértice e parabolóide de revolução.

Definição 2.8 *A reta que passa pelo foco e é perpendicular à diretriz é definida como o eixo focal ou de simetria da parábola. O vértice é o ponto da parábola que está mais próximo da reta diretriz. Ao girarmos uma parábola em torno de seu eixo focal, geramos uma figura conhecida como parabolóide de revolução.*

A figura abaixo representa uma parábola com vértice está na origem do plano cartesiano, foco de coordenadas $(\frac{p}{2}, 0)$ e reta diretriz $x = -\frac{p}{2}$, sendo p um número real positivo.



A equação dessa parábola será representada pela igualdade abaixo:

$$y^2 = 2px. \quad (2.10)$$

Demonstração. Da definição e do fato de $P(x, y)$ pertencer à parábola, temos que

$$PF = PQ.$$

Apliquemos a fórmula da distância entre dois pontos na igualdade acima.

$$\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = \sqrt{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2}.$$

Elevando ambos os membros da equação acima ao quadrado e simplificando a igualdade obtida, chegamos na equação abaixo:

$$y^2 = 2px.$$

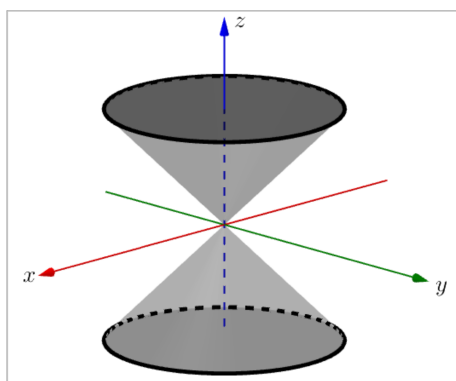
■

Observação 2.2 *As demonstrações das fórmulas das cônicas, verificações para outros casos, assim como os conteúdos de Geometria Analítica que foram abordados neste trabalho, podem ser estudados de modo mais aprofundado nas referências [1, 10, 15, 19, 21].*

2.5 Cone de duas folhas e seções cônicas

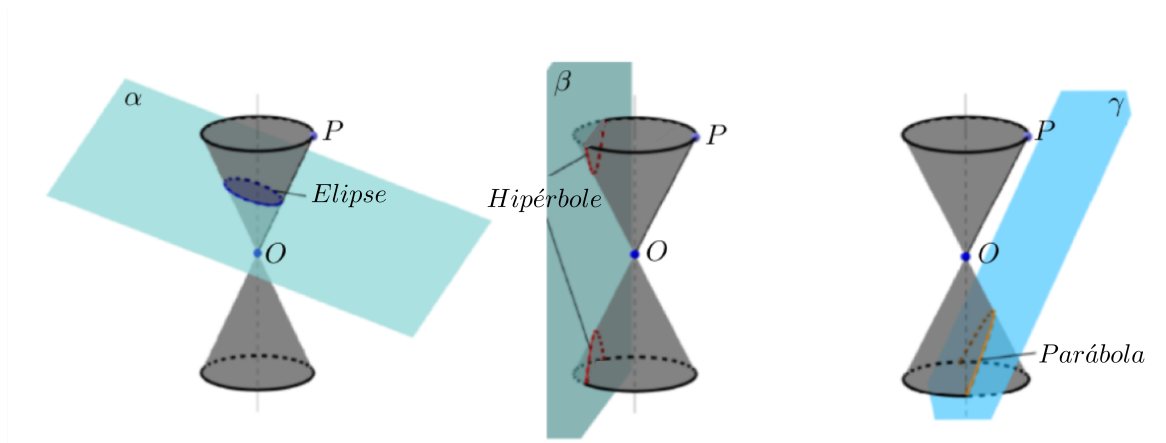
Definição 2.9 *Cone elíptico reto de duas folhas ou Cone de segunda ordem é uma superfície resultante do deslocamento de uma elipse (geratriz) de modo que o seu centro, durante o deslocamento, forme uma reta perpendicular à elipse, a medida dos eixos das elipses variem de tal forma que para cada uma delas, o quociente entre a medida da distância do centro da elipse até o vértice do cone e o eixo maior seja sempre uma constante. Note também que a elipse, durante o deslocamento, se degenera no ponto de encontro das duas folhas.*

Exemplo 1 *A equação $z^2 = x^2 + y^2$ é a representação da superfície abaixo:*



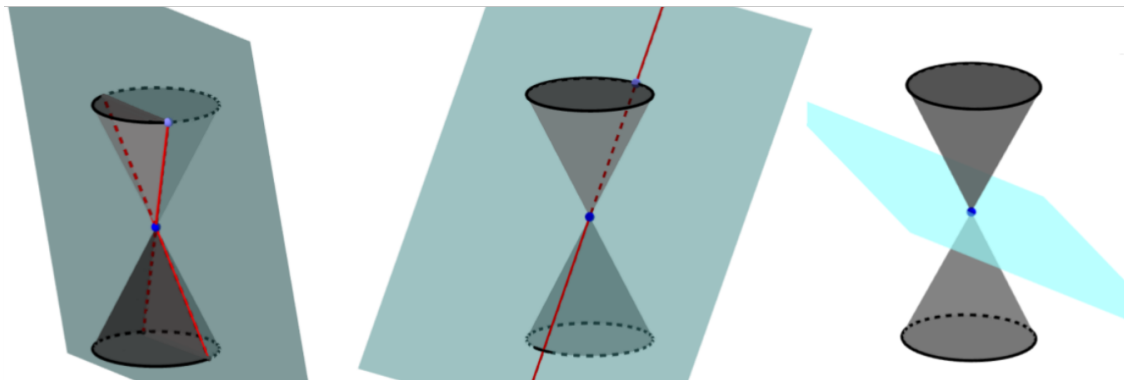
Note que, nesse caso, as elipses geradoras do cone são círculos. Essas superfícies são conhecidas como **Cones de revolução**. São esses tipos de cones elípticos que são utilizados para gerar parábolas, elipses e hipérbolas.

Definição 2.10 *Seções cônicas são curvas resultantes da interseção de planos com cones de revolução. Podemos citar como exemplos, a elipse, a hipérbole e a parábola.*



Observe que a cônica obtida na interseção depende da posição do plano em relação ao eixo principal do cone. Quando o plano que secciona o cone é inclinado em relação ao eixo de simetria do mesmo (nesse caso, o plano faz interseção com o eixo de simetria e o ângulo entre eles não deve ser reto), obtemos uma elipse. Se o plano for paralelo ao eixo, a interseção formará uma hipérbole. No caso em que o plano for paralelo à geratriz, a figura obtida será uma parábola.

Existem ainda os casos degenerados das cônicas. Exemplos: quando o plano contém o eixo de simetria ou quando o mesmo passa por duas geratrizes do cone, teremos um par de retas concorrentes resultantes da interseção; quando o plano é tangente ao cone, teremos uma reta; existe ainda o caso em que o plano intersecta somente o eixo de simetria mas no ponto de encontro das duas folhas do cone duplo, teremos um único ponto.



Podemos associar cada cônica a um número conhecido como excentricidade. É essa grandeza que define o formato de elipses, parábolas e hipérbolas, sendo utilizada muitas vezes para fazer comparações entre as órbitas de planetas, cometas e outros astros em torno do Sol por exemplo.

2.6 Excentricidade

Definição 2.11 A excentricidade da elipse de equação $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) = 1$ ($a > b$) é definida pela fórmula abaixo:

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}. \quad (2.11)$$

Note que como na elipse $a^2 = b^2 + c^2$, então $c^2 \leq a^2$. Como a e c são constantes positivas, segue que $0 \leq c \leq a$, portanto $0 \leq c/a \leq 1$. Logo, $0 \leq e \leq 1$. Ao analisarmos a equação (2.11), podemos constatar que quanto mais próximo de zero o valor da excentricidade, mais próximo de zero é o valor de $a^2 - b^2$, ou seja, ao aproximarmos e de 0, a elipse fica cada vez mais parecida com um círculo. E quanto mais próximo de 1 mais achatada a elipse se torna e mais parecida com um segmento de reta a mesma se fica. Por isso o segmento de reta pode ser considerado como um caso degenerado da elipse.

Exemplo 2 A órbita do cometa Halley é uma elipse de 36,18 unidades astronômicas de comprimento por 9,12 unidades astronômicas de largura (Uma unidade astronômica é a medida que corresponde ao comprimento do semieixo maior da elipse que descreve a órbita da Terra). Qual é a excentricidade da elipse que define a órbita desse cometa.

Resolução: Como o comprimento e a largura da órbita do cometa medem 36,18 e 9,12 unidades astronômicas, respectivamente, então os valores de a e b são obtidos dividindo

esses números dessas duas medidas por 2. E como $a > b$, então $a = 18,09$ e $b = 4,56$. Substituindo esses valores de a e b na fórmula da excentricidade e simplificando, concluímos que nesse caso, $e \simeq 0,97$. O que é uma órbita elíptica bastante achatada se compararmos com a dos planetas do sistema solar. Podemos ver em [21] que a órbita da Terra, por exemplo, é uma elipse de excentricidade igual a 0,02.

Definição 2.12 A excentricidade da hipérbole de equação $(x^2/a^2) - (y^2/b^2) = 1$ é definida pela fórmula abaixo:

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}. \quad (2.12)$$

Exemplo 3 Determine a excentricidade da hipérbole de equação $(x^2/9) - (y^2/16) = 1$.

Resolução: Observe que $a^2 = 9$ e $b^2 = 16$. Como a e b são positivos, então $a = 3$ e $b = 4$. Já vimos anteriormente que para a hipérbole, $c = \sqrt{a^2 + b^2}$. Substituindo os valores de a e b para esse exemplo, temos que $c = 5$. Logo, a excentricidade dessa hipérbole será igual a $5/3$.

Podemos encontrar mais exercícios propostos e exemplos que envolvem essas definições nas referências [8, 20].

Capítulo 3

Construções elementares das cônicas

Neste capítulo estudaremos alguns fatos sobre construções das cônicas, relacionando a Geometria Analítica com alguns tópicos de Geometria Euclidiana Plana que podem ser facilmente compreendidos por alunos do Ensino Médio (ver referências [3, 12]). Enfatizaremos também alguns fatos históricos, aplicações e a importância dessas construções serem trabalhadas em sala de aula para um melhor entendimento do conteúdo por parte dos alunos.

3.1 Breve histórico acerca das seções cônicas

As seções cônicas e suas principais propriedades estão entre os temas de estudos que mais provocaram o interesse e curiosidade dos matemáticos. Diversos pesquisadores, desde os da Grécia Antiga até os de épocas mais recentes, realizaram inúmeras descobertas em relação a essas figuras geométricas. Apolônio de Perga, por exemplo, foi um dos matemáticos que mais contribuiu para o desenvolvimento da Geometria, o que inclui descobertas relacionadas às seções cônicas que resultam em elipses que foram publicadas em sua monografia. Matemáticos dessa mesma época também estudavam propriedades análogas de outros tipos de seções cônicas.

O entendimento das propriedades únicas das cônicas foi aprimorado graças as ideias e definições do matemático Belga Germinal Pierre Dandelin (1794-1847), que em conjunto com Adolphe Quetelet (também belga), publicou trabalhos sobre esferas tangentes a cones duplos e aos planos que seccionam esses cones. Existem atualmente muitas aplicações das propriedades das cônicas. Grandes nomes da Astronomia; como o Kepler, Newton, entre outros, utilizavam propriedades dessas figuras geométricas, especialmente as da elipse, para descrever os movimentos planetários. Outra aplicação bastante conhecida, ainda na Astronomia, é o uso da propriedade refletora das parábolas, elipses e hipérbolas na construção de telescópios espelhados.

Na Eletrônica, temos inúmeras aplicações também. A propriedade refletora da parábola, conjuntamente com conhecimentos de propagação de ondas eletromagnéticas, foram

decisivas para a construção da primeira antena parabólica, por Heinrich Hertz no ano de 1888.

Uma aplicação muito interessante da propriedade refletora da elipse é na Arquitetura Acústica. Esta característica da elipse explica o porquê de duas pessoas conseguirem se comunicar muito bem em algumas salas em formato de elipsóide de revolução conhecidas como Galerias de Sussurros, desde que cada uma delas permaneça sobre um dos focos da elipse geradora.

Podemos encontrar mais conteúdos que abordam a história da Geometria Analítica, das cônicas e de matemáticos que contribuíram para o desenvolvimento da mesma em [10, 16, 19].

3.2 Construções da elipse

3.2.1 Construção via definição

Podemos construir uma elipse manualmente utilizando-se de materiais que encontramos em casa. Utilizando-se uma folha de isopor, uma folha de cartolina, pregos, um barbante inextensível e uma caneta. Para isso, devemos colar a cartolina na folha de isopor, em seguida, destacar dois pontos F e F' na cartolina e utilizar os pregos para fixar as extremidades do barbante inextensível. E depois traçamos uma linha de modo que o barbante fique sempre esticado e o lápis dê uma volta completa durante a construção da figura. Dessa forma, a distância da ponta do lápis até o ponto F mais a distância da ponta até o ponto F' será sempre igual ao comprimento do barbante, que é $2a$. Esse fato nos garante que a figura construída nesse processo é uma elipse.

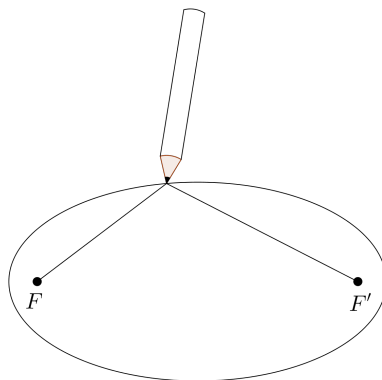


Figura 3.1: Processo de construção da elipse por meio da definição

3.2.2 Construção analítica

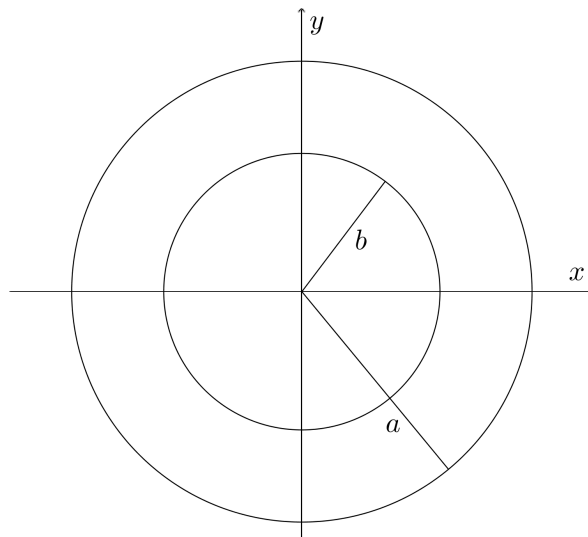
Já estudamos anteriormente sobre a elipse de centro na origem, com semi-eixo maior e semi-eixo menor de comprimentos respectivamente a e b . Sua equação pode ser escrita como:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

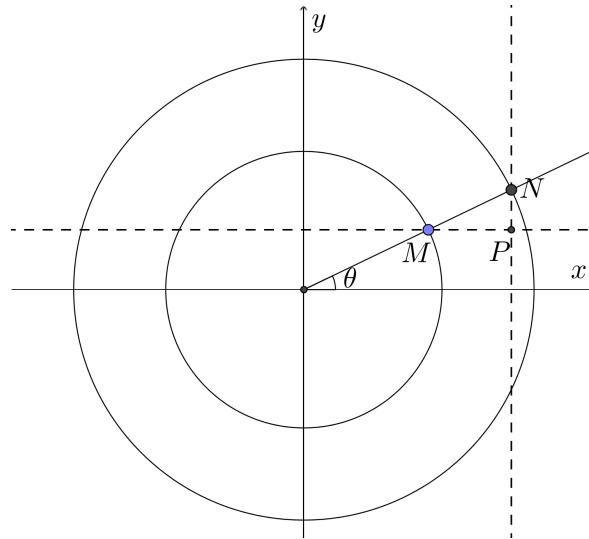
Como a equação acima representa uma soma de quadrados de números reais que resultam em 1, então cada uma das parcelas do primeiro membro dessa equação são menores ou iguais a 1 e não negativas, ou seja,

$$0 \leq \frac{x^2}{a^2} \leq 1 \quad \text{e} \quad 0 \leq \frac{y^2}{b^2} \leq 1.$$

Das igualdades acima e dessas duas últimas inequações, temos que existe t tal que $x = a \cos t$ e $y = b \sin t$. Essas duas últimas igualdades representam as equações paramétricas da elipse. Elas serão muito importantes para o processo de construção desta cônica. Tracemos agora um plano cartesiano com duas circunferências centradas na origem, de modo que uma tenha raio a e a outra tenha raio b , sendo $a > b$.



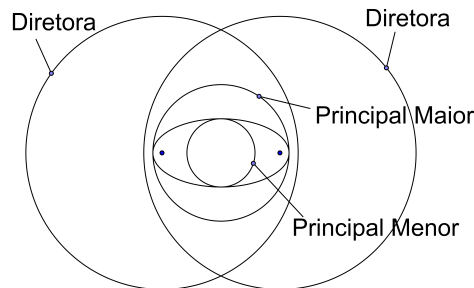
Agora vamos traçar uma semi-reta com ponto inicial na origem, de modo que M e N sejam as interseções que a semi-reta faz com a circunferência menor e com a maior, respectivamente, e que forme um ângulo θ com a parte positiva do eixo x . Tracemos também duas retas: uma paralela ao eixo x , que passa por M , e outra paralela ao eixo y que passa por N , sendo o ponto P a interseção dessas duas retas.



Observe que como $\cos\theta = \frac{x_N}{a}$, $\sin\theta = \frac{y_M}{b}$ e o ponto P tem coordenadas (x_N, y_M) , então $P = (a\cos\theta, b\sin\theta)$. Portanto, os pontos P assim obtidos pertencem a uma elipse.

Vamos destacar agora duas definições importantes para nós, pois elas serão importantes para o entendimento de Teoremas e outros processos de construção da elipse. As circunferências utilizadas nesse processo de construção são definidas como circunferências principais. Como $a > b$, então a circunferência de raio a é a **circunferência principal maior**, enquanto a de raio b é a **circunferência principal menor**.

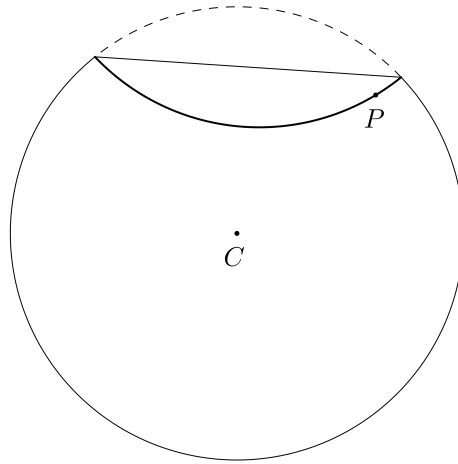
Consideremos uma elipse de semi-eixo maior a . Definimos **circunferência diretora da elipse** aquela de centro em um dos focos e raio $2a$.



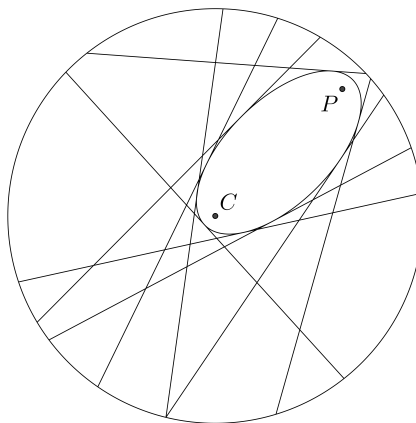
Podemos nos aprofundar nos estudos das funções e da trigonometria em [11, 14].

3.2.3 Construção via laboratório de Matemática

Recorte, de uma folha de papel ou cartolina, um círculo de centro C ; marque, sobre esse recorte um ponto P ; dobre esse recorte de modo que um ponto de fronteira do círculo passe por P .

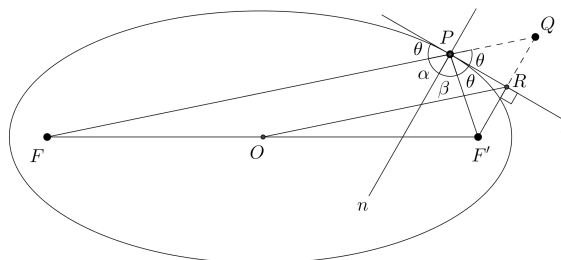


Realize esse mesmo procedimento (das dobras) de várias maneiras diferentes, não esquecendo de traçar o segmento obtido em cada dobra. Os segmentos de reta obtidos irão preenchendo parte dos pontos interiores do círculo. A região que não é preenchida tem pontos de fronteira que formam uma elipse.

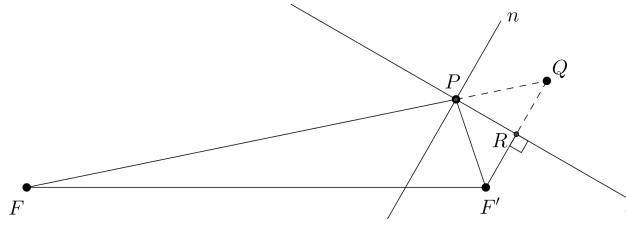


Antes de explicarmos esse processo de construção da elipse, vamos demonstrar o Teorema das Tangentes para Elipses.

Teorema 3.1 (das tangentes para elipses) *Considere uma elipse ε de focos F e F' e $P \in \varepsilon$. Então, a bissetriz externa do triângulo $F'PF$ e que passa por P será tangente à elipse.*



Demonstração. Destaquemos, da figura acima, os pontos F , F' , P e a reta t . Sejam Q o reflexo do ponto F' em relação à reta t , e R , a interseção do segmento $F'Q$ com a reta t .



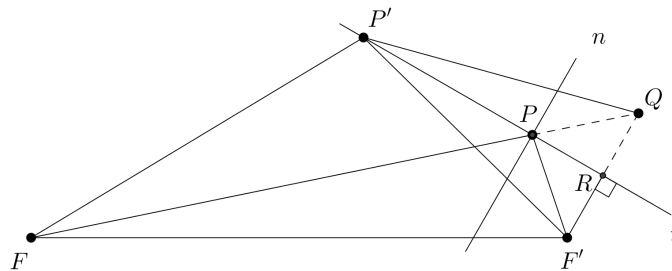
Do processo de construção dos pontos Q e R , temos que $F'R = QR$ e $F'\widehat{R}P = Q\widehat{R}P = 90^\circ$. Por hipótese, t é bissetriz externa de $F'PF$ em P , portanto essa reta t divide $F'\widehat{P}Q$ em dois ângulos de mesma medida. Logo, $F'\widehat{P}R = Q\widehat{P}R$. De acordo com essas observações, podemos afirmar que os triângulos $F'RP$ e QRP são congruentes pelo caso LAA_o (Lado Ângulo Ângulo oposto). Dessa congruência e da colinearidade dos pontos F , P e Q , teremos

$$\begin{cases} PF' = PQ \\ FQ = FP + PQ. \end{cases} \quad (3.1)$$

Substituindo PQ por PF' na segunda equação de (3.1) e lembrando que P é um ponto da elipse, temos que

$$FQ = FP + PF' = 2a. \quad (3.2)$$

Para provar que t é tangente a elipse, devemos demonstrar a unicidade do ponto P que pertence à reta e à elipse. Vamos então destacar um ponto P' de t e os triângulos $P'RF'$ e $P'RQ$ conforme a figura abaixo:

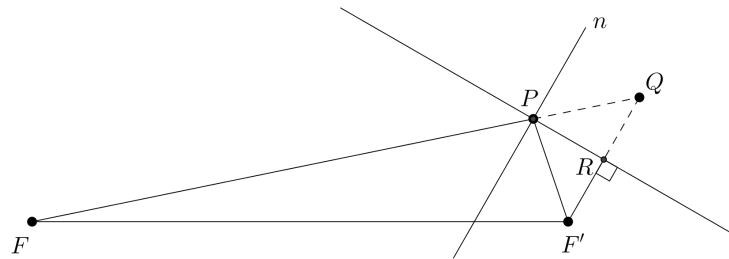


Como t é mediatriz de $F'Q$, então $F'R = QR$; os ângulos $F'\widehat{R}P'$ e $Q\widehat{R}P'$ são retos e $P'R$ é lado comum aos triângulos $P'RF'$ e $P'RQ$. Logo, $P'RF'$ e $P'RQ$ são triângulos congruentes pelo caso LAL . Assim, $P'F' = P'Q$. Pela desigualdade triangular no triângulo $FP'Q$, $FP' + P'Q > FQ$. Como $FQ = FP + PQ$, então $FP' + P'Q > FP + PQ$. Nesta última inequação obtida, podemos substituir $P'Q$ e PQ por $P'F'$ e PF' , respectivamente. Assim, $FP' + P'F' > FP + PF'$. Observe que $FP + PF' = 2a$. Substituindo na desigualdade, teremos: $FP' +$

$P'F' > 2a$. Portanto, o ponto P' não pertence à elipse. Conclui-se que a reta t é tangente à elipse no ponto P . ■

Corolário 3.2 *O simétrico de um foco com relação a uma tangente está na circunferência diretora relativa ao outro foco.*

Demonstração.



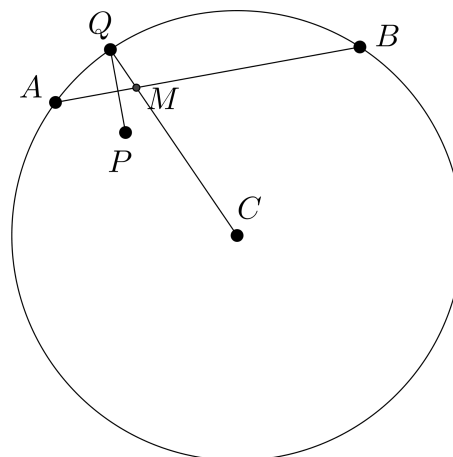
Destacamos alguns resultados e uma das figuras construídas na demonstração do teorema anterior. Do sistema (3.1) e da equação (3.2), temos que

$$FQ = FP + PQ = FP + PF',$$

donde

$$FQ = 2a. \tag{3.3}$$

Portanto, o ponto Q , que é reflexo de um foco F' , pertence a circunferência diretora centrada no outro foco F . O resultado deste exemplo anterior explica por que o 3º processo de construção pode ser utilizado para construir uma elipse. ■

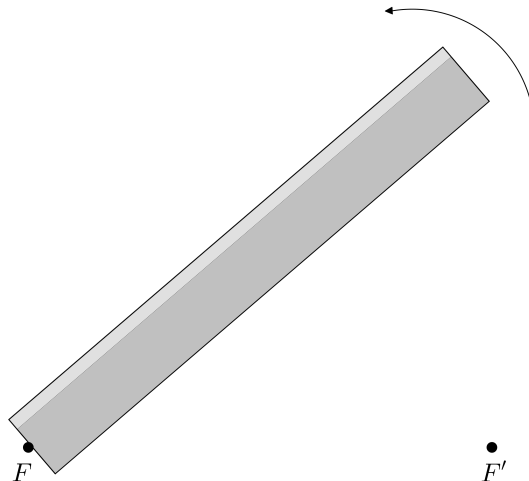


Na figura acima temos um segmento AB , com extremidades nos pontos de fronteira da circunferência. Note que como consequência da dobra, o ponto P terá como simétrico um ponto de fronteira Q da circunferência. Se considerarmos essa imagem como uma circunferência diretora de uma elipse em relação a um foco C , pelo resultado do exercício anterior, podemos considerar que a reta AB é tangente a uma elipse de focos C e P . Essa propriedade que foi demonstrada explica esse processo de construção de elipse. Cada dobra obtida no processo destacado forma um segmento que está contido em uma reta tangente à elipse.

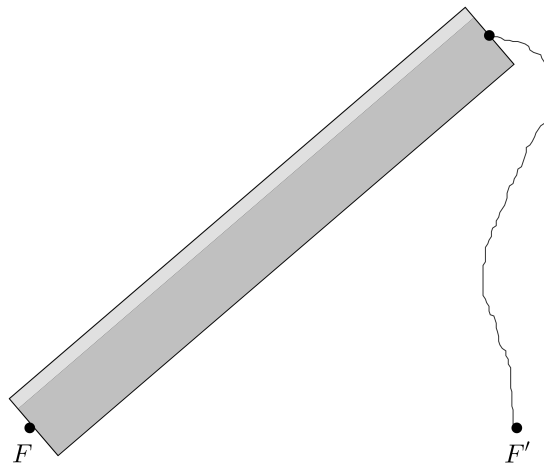
3.3 Construções da hipérbole

3.3.1 Construção via laboratório de Matemática

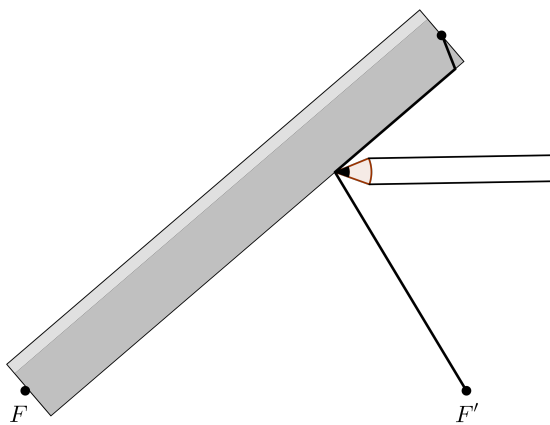
Fixamos uma das extremidades de uma régua em um dos focos da hipérbole.



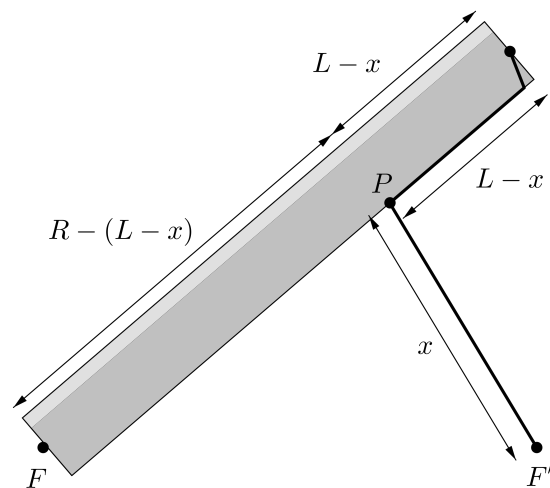
Em seguida, devemos fixar as duas extremidades de um barbante inextensível: uma no foco F' e a outra, na extremidade da régua que ficou livre.



Utilize a ponta de um lápis para esticar o barbante junto à régua conforme figura abaixo.



Sejam R e L os comprimentos da régua e do barbante, respectivamente.



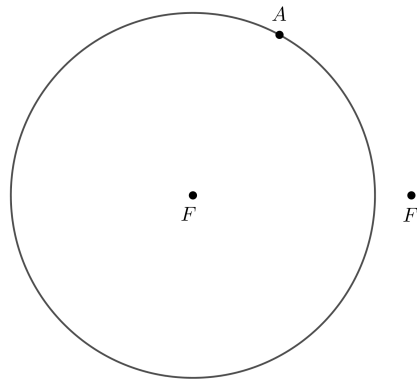
Portanto,

$$PF - PF' = R - (L - x) - x = R - L + x - x = R - L = \text{constante}.$$

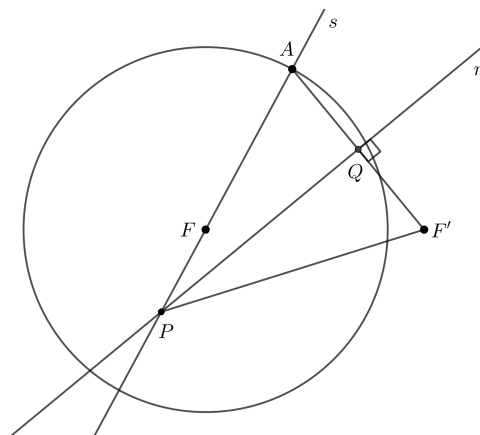
Dessa forma, ao girarmos a régua de modo que uma das extremidades fique fixa no foco F com o barbante sempre esticado pela ponta do lápis, obtemos um dos ramos da hipérbole. O outro ramo é construído ao realizarmos esses mesmos procedimentos, mas fixando a extremidade da régua e uma das extremidades do barbante nos pontos F' e F , respectivamente.

3.3.2 Construção via geometria plana

Na figura abaixo destacamos os pontos F e F' , que são os focos de uma hipérbole, uma circunferência C de raio $2a$ e um ponto A nessa circunferência.



Em seguida, devemos construir uma reta s que passe por A e F , uma reta r mediatriz do segmento AF' , um ponto P que é a interseção entre r e s e também um ponto Q que é a interseção de AF' com r .



Observe que os triângulos PQA e PQF' são congruentes (caso LAL); pois $AQ = QF'$, $\widehat{AQP} = \widehat{F'QP}$ e o segmento de reta PQ é comum a esses dois triângulos. Assim, $PF' =$

PA . Note que $PA = PF + FA = PF + 2a$. Substituindo PA por PF' na igualdade acima, concluímos que

$$PF' = PF + 2a \Rightarrow PF' - PF = 2a = \text{constante.}$$

Ao deslocarmos o ponto A pela circunferência, o movimento realizado pelo ponto P forma uma hipérbole.

Observação 3.1 Dependendo da posição do ponto A na figura acima, podemos ter casos em que $PF > PF'$. Nesses casos, demonstra-se de forma análoga que $PF - PF' = 2a$.

É importante definirmos circunferências especiais relacionadas à hipérbole, pois elas serão muito importantes para o entendimento de algumas propriedades desta cônica que serão estudadas posteriormente.

Observação 3.2 Consideremos uma hipérbole centrada na origem, de focos F e F' , e de vértices que distam $2a$ um do outro. A circunferência centrada em um dos focos e raio $2a$ é definida como **circunferência diretora da hipérbole**. A circunferência com centro no ponto médio do segmento FF' e raio a é definida como **circunferência principal da hipérbole**.

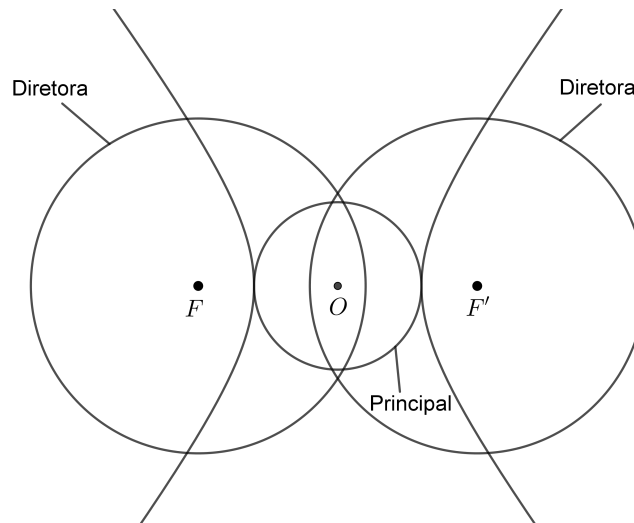
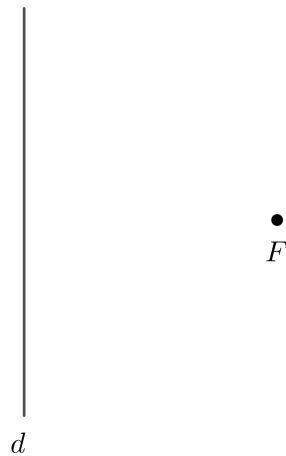


Figura 3.2: Circunferência principal e circunferências diretoras da hipérbole

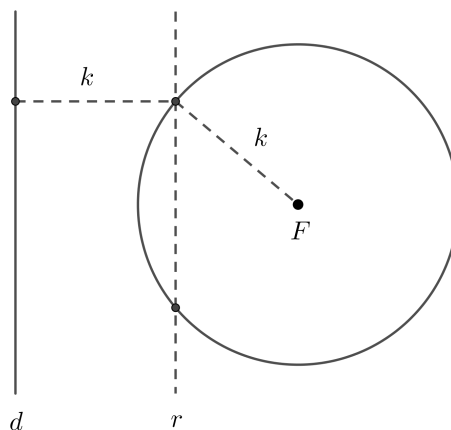
3.4 Construções da parábola

3.4.1 Construção via régua e compasso

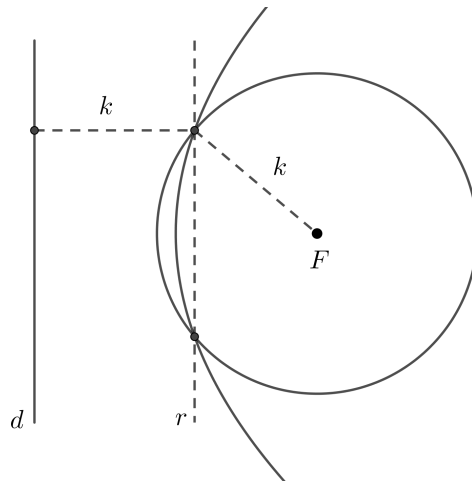
Traça-se um ponto fixo F e uma reta fixa d .



Em seguida, construímos uma circunferência centrada em F de raio k e uma reta paralela a d a uma distância k da mesma de modo que essa nova reta faça interseção com a circunferência em dois pontos.

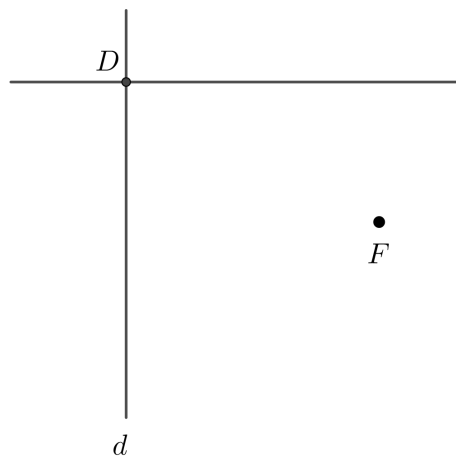


Realizando-se esse mesmo procedimento repetidas vezes, com circunferências de diferentes raios, obtemos uma parábola, pois os pontos de interseção gerados estarão sempre a mesma distância k da reta d e do ponto F . Conclui-se que a figura construída a partir dos pontos obtidos é uma parábola de foco F e reta diretriz d .

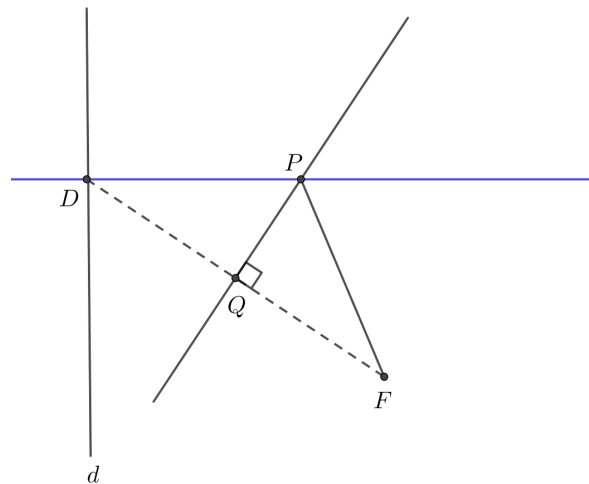


3.4.2 Construção via geometria plana

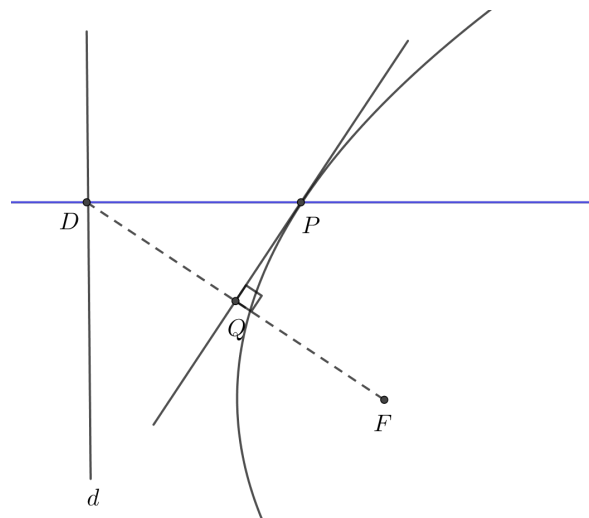
Como na Construção via régua e compasso, devemos destacar um ponto F , uma reta d (fixos) e também uma perpendicular a d no ponto D .



Agora traçamos a mediatriz do segmento DF de modo que o ponto médio desse segmento e a interseção da mediatriz com a perpendicular sejam os pontos Q e P , respectivamente. Destaquemos também o segmento de reta PF .



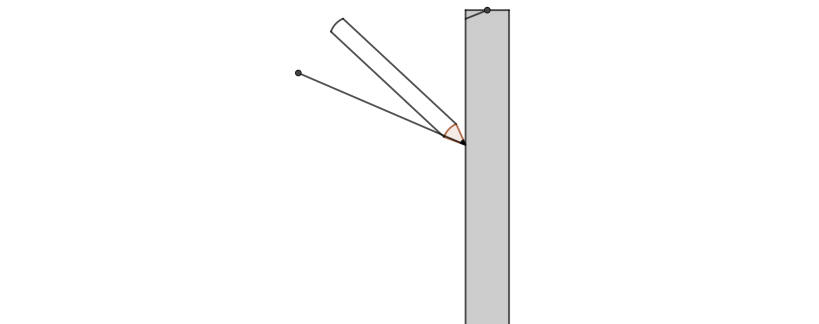
Observe que, analisando os triângulos PQD e PQF , que $DQ = DF$, PQ é lado de ambos os triângulos e os dois são triângulos retângulos em P . Portanto, pelo caso LAL , provamos que PQD e PQF são congruentes. Assim, $PD = PF$. Note que a última igualdade acima nos leva a concluir que cada ponto P obtido nesse processo de construção pertence a parábola, pois PD e PF representam as distâncias do ponto P ao ponto fixo F (foco) e a reta fixa d (diretriz), respectivamente.



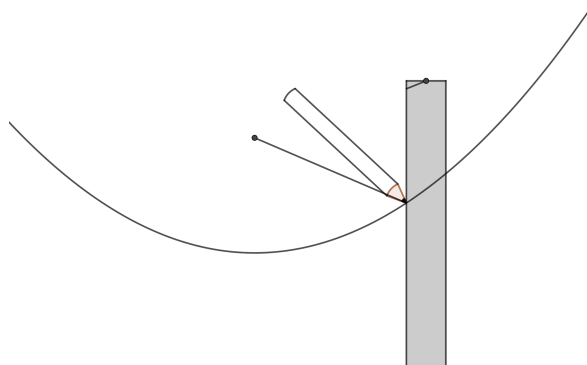
3.4.3 Construção via laboratório de Matemática

Um processo de construção bastante simples de entender e que pode ser trabalhado em Laboratórios de Matemática é o Método de Kepler para construção de parábolas. Devemos fixar um ponto fixo acima de uma mesa. Esse ponto fixo será o foco da parábola, enquanto que a borda da mesa será a diretriz; em seguida, colocamos uma régua sobre a mesa de modo que a régua fique em uma posição perpendicular à mesa; devemos também prender uma extremidade de um barbante inextensível na régua e a outra extremidade da linha deve

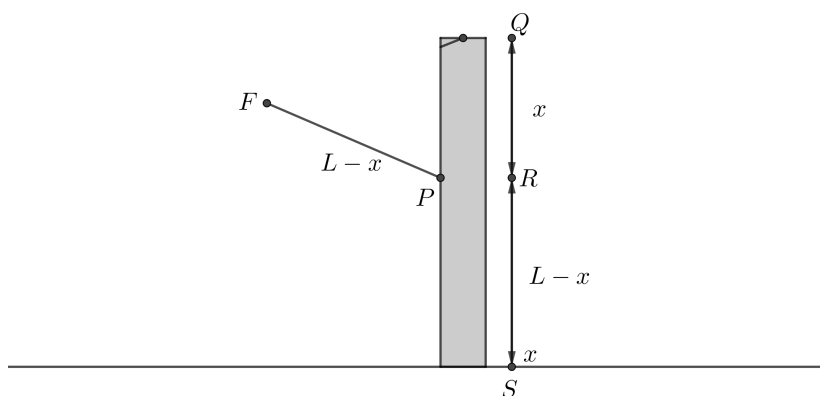
ficar no ponto fixo. É importante que o barbante tenha o mesmo comprimento da régua e que ele fique esticado por um lápis de acordo com a figura abaixo.



Ao deslocarmos a régua de modo que ela se mantenha perpendicular à mesa e o barbante fique sempre esticado, construímos o lugar geométrico conhecido como parábola.



Para justificar essa construção, vamos considerar L o comprimento do barbante e da régua, e x como a medida da distância entre o ponto P , destacado na figura abaixo, e o topo da régua.



Observe que a distância do ponto fixo até o P é de $L - x$, já que o barbante está totalmente esticado nesse ponto, o restante dele se estende do ponto P até o topo da régua e o comprimento do barbante é L . Mas também temos que a distância do ponto P até a base da régua também é $L - x$, como consequência do significado de x que consideramos inicialmente e do fato da régua também ter comprimento L . Relembrando que o ponto fixo é o foco, e a borda da mesa é a diretriz da parábola, justificamos assim esse método de construção, já que a distância entre F e o ponto P é igual à distância entre P e a base da régua.

Os dois primeiros métodos de construção da parábola que foram apresentados, assim como o segundo método que foi apresentado nas construções das outras cônicas, são os mais adequados para serem trabalhados em um laboratório de Informática, pois é possível fazer simulações desses tipos de construção em alguns softwares matemáticos, como o Geogebra por exemplo. Além de proporcionar aulas mais interessantes e criativas, esses programas de computador facilitam muito o trabalho do professor, visto que contribuem para o desenvolvimento de aulas com representações geométricas mais realistas. Mais implicações didáticas do uso desses softwares em sala de aula podem ser vistas na referência [1].

Esses métodos de construção das cônicas que foram apresentados são indispensáveis para o professor que deseja sair da rotina de aulas expositivas em que os únicos materiais utilizados são o quadro e o pincel. Nessas aulas tradicionais, os alunos geralmente têm a tendência de serem pouco participativos, além de se entediarem facilmente. Quando o professor apresenta o conteúdo de uma forma diferente, utilizando métodos que podem ser trabalhados em laboratórios de Matemática e de Informática, as aulas tornam-se muito mais atrativas para o corpo discente. Dessa forma trabalhamos com atividades práticas, contribuindo assim para uma melhor participação do aluno no processo de ensino aprendizagem. Consequentemente, o professor estará contribuindo para uma maior aprendizagem significativa dos mesmos, além de mostrar a relação da Matemática com outras disciplinas e áreas do conhecimento. Podemos ver outros projetos com propostas e atividades de ensino de Matemática nas referências [5, 6, 17, 18].

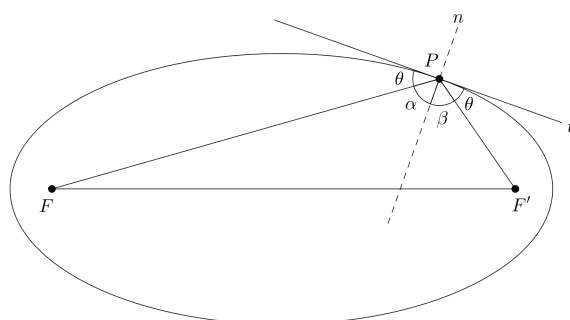
Capítulo 4

Propriedades refletoras das cônicas

A propriedade refletora das cônicas e os teoremas das tangentes são interessantes conteúdos para o desenvolvimento de aulas mais produtivas. O professor de Matemática deve sempre enfatizar as inúmeras aplicações das cônicas e suas propriedades. A propriedade refletora das parábolas, elipses e hipérbolas, contribui bastante para que os alunos entendam que esses conteúdos da Geometria Analítica possuem diversas aplicações práticas e em várias áreas do conhecimento. Esse aprendizado é importante especialmente para aqueles alunos que desejam trabalhar em alguma profissão da área das Ciências Exatas, como a Eletrônica, a Engenharia ou a Astronomia. Além disso, o estudo dessas propriedades permite ao aluno revisar alguns tópicos da Geometria Plana.

Vamos começar pela Propriedade Refletora das Elipses, pois o Teorema das tangentes para esse caso já foi apresentado no terceiro processo de construção de elipses.

Teorema 4.1 *Seja P um ponto de uma elipse de focos F e F' . A Propriedade Refletora da elipse diz que a reta normal a uma elipse em P é bissetriz interna do ângulo $F\widehat{P}F'$.*

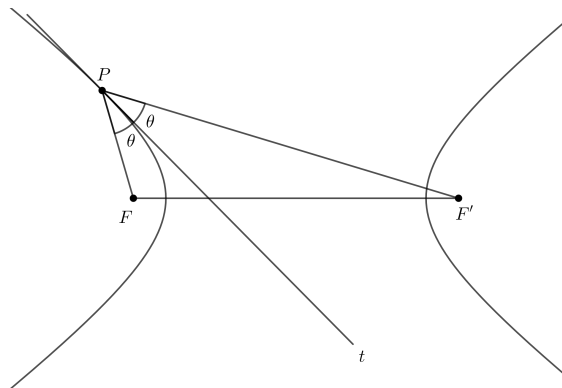


Demonstração. Observe que a reta n é perpendicular à reta t e como consequência dessa perpendicularidade que $\theta + \alpha = 90^\circ$ e também $\theta + \beta = 90^\circ$. Portanto, $\alpha = \beta$. Logo a reta n é bissetriz interna do ângulo $F\widehat{P}F'$.

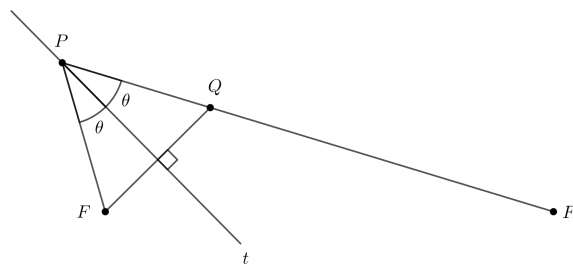
■

Uma aplicação bastante conhecida dessa propriedade é na Arquitetura para explicar a propagação do som em algumas salas conhecidas como Galerias de Sussurros que têm formato de elipsóide. Se duas pessoas ficarem em pé dentro desta sala de modo que cada uma delas fique em um dos focos da elipse geradora do elipsóide, elas podem se comunicar perfeitamente, mesmo que uma fique de costas para a outra. Isso ocorre porque as ondas sonoras ao se propagarem a partir de um dos focos e encontrarem um obstáculo (parede da sala), que nesse caso funciona como um ponto da elipse, o som será refletido diretamente para o outro foco.

Teorema 4.2 (das tangentes para hipérboles) *Seja P um ponto pertencente a uma hipérbole de focos F e F' e também o triângulo FPF' . O Teorema das tangentes para hipérboles afirma que a bissetriz interna do triângulo FPF' em P é uma reta tangente à hipérbole.*



Demonstração. Vamos destacar o ponto Q de modo que ele seja simétrico de F em relação à reta t . Como essa tangente t é bissetriz interna do triângulo FPF' em P , podemos afirmar que $\widehat{FPt} = \widehat{F'Pt} = \theta$.



Observe também que a reta t funciona como um eixo de simetria, dividindo o triângulo FPQ em dois triângulos congruentes. Assim, $PF = PQ$. Note também que $PF' = PQ + F'Q$. Portanto,

$$F'Q = PF' - PQ. \quad (4.1)$$

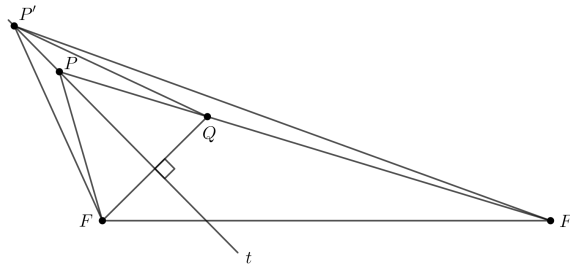
Mas como consequência da congruência de triângulos que encontramos no início da demonstração, $PQ = PF$. Substituindo PQ por PF em (4.1), teremos que: $F'Q = PF' - PF$. E como

P é um ponto da hipérbole, então:

$$F'Q = PF' - PF = 2a. \quad (4.2)$$

Logo, enquanto o ponto Q de um dos focos em relação à reta t , esse mesmo ponto pertence a circunferência diretora em relação ao outro foco da hipérbole.

Vamos agora provar que essa reta é tangente à hipérbole. Para isso, devemos mostrar a unicidade do ponto P . Consideremos um ponto P' pertencente à reta t . Destaquemos também o triângulo $P'FQ$ conforme figura abaixo:



Observe que a reta t também funciona como eixo de simetria em relação ao triângulo $P'FQ$, dividindo o mesmo em dois triângulos congruentes. Consequentemente, temos que:

$$P'F = P'Q. \quad (4.3)$$

Apliquemos agora a desigualdade triangular no triângulo $P'QF'$.

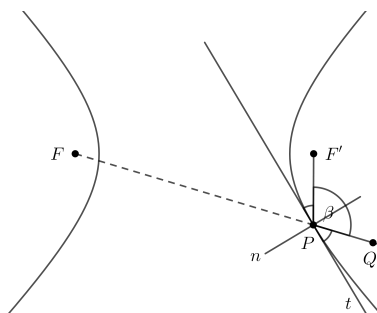
$$P'F' + F'Q > P'Q.$$

Analisando os resultados obtidos nas igualdades (4.2) e (4.3), chegamos a conclusão que $F'Q$ e $P'Q$ podem ser substituídos por $2a$ e $P'F$, respectivamente. Assim,

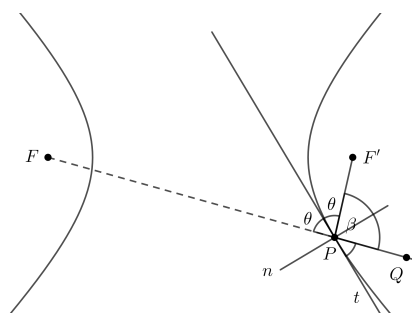
$$P'F' + 2a > P'F \Rightarrow P'F - P'F' < 2a.$$

Dessa forma, chegamos a conclusão de que o ponto P' não pertence à hipérbole, pois pela desigualdade acima, temos que $P'F - P'F' \neq 2a$. Portanto, a reta t é tangente à hipérbole no ponto P . ■

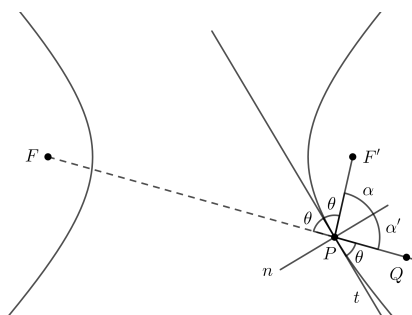
Teorema 4.3 Consideremos uma hipérbole de focos F e F' , uma reta tangente à mesma no ponto P , e uma outra reta n normal à hipérbole (ou seja, as retas r e n são perpendiculares em P). A **Propriedade Refletora da hipérbole** diz que a reta n é bissetriz do ângulo β .



Demonstração. Pelo resultado anterior, temos que a reta tangente t será bissetriz interna, em relação ao ponto P , do triângulo FPF' .



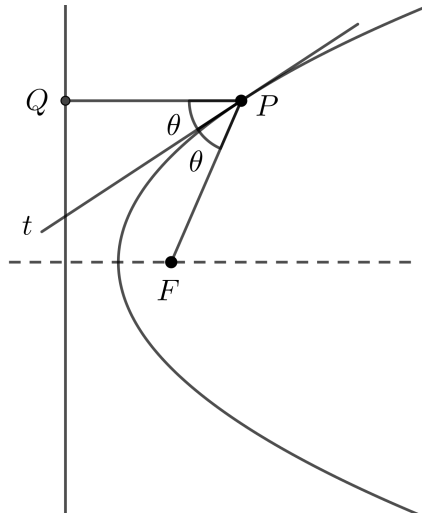
Observe que o ângulo formado entre a reta t e semi-reta \overrightarrow{PQ} tem valor θ , pois o mesmo é oposto pelo vértice ao ângulo destacado entre o segmento FP e a reta t . Destaquemos também dois outros ângulos α e α' de modo que $\beta = \alpha + \alpha'$.



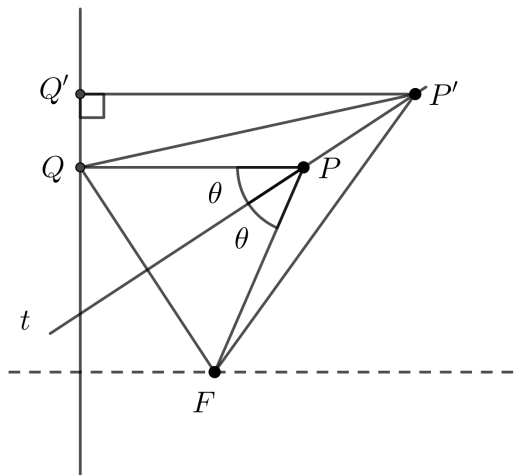
Logo, como as retas n e t são perpendiculares no ponto P , então $\theta + \alpha = \theta + \alpha' = 90^\circ$. Assim, $\alpha = \alpha'$. Portanto, a reta n forma uma bissetriz em relação ao ângulo $\beta = \widehat{F'PQ}$.



Teorema 4.4 (das tangentes para parábolas) Consideremos uma parábola de foco F e reta diretriz d . Sejam P um ponto da parábola, Q a projeção ortogonal de P na diretriz, e a reta t a bissetriz interna do triângulo QFP em P . O Teorema das tangentes para parábolas afirma que essa bissetriz será reta tangente à parábola.



Demonstração. Vamos construir três triângulos: PQF , $P'QF$ e $P'QQ'$ de modo que os pontos P , Q e F tenham as mesmas características dos destacados na figura anterior. Considere também que $P \neq P'$ e o triângulo $P'QQ'$ seja retângulo em Q' .



Aplicando o Teorema de Pitágoras ao triângulo $P'QQ'$, temos que $(P'Q')^2 + (QQ')^2 = (P'Q)^2$. Logo,

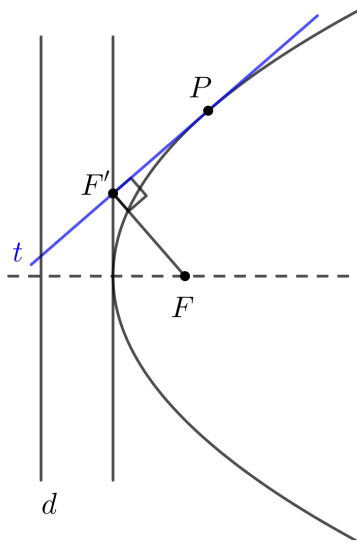
$$P'Q' \neq P'Q. \quad (4.4)$$

Note que como a reta t divide o triângulo $P'QF$ em dois triângulos congruentes, chegamos na seguinte igualdade: $P'Q = P'F$. Substituindo $P'Q$ em (4.4), chegamos a conclusão que

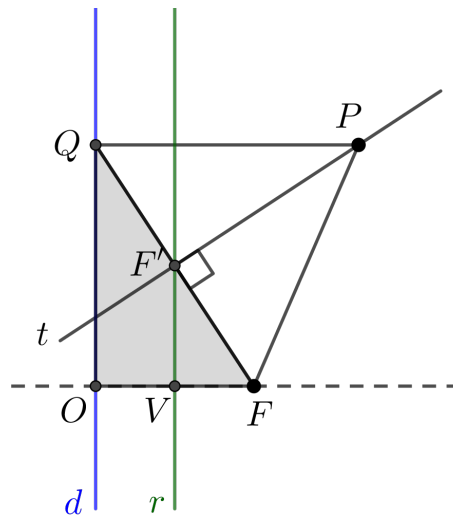
$$P'Q' \neq P'F,$$

ou seja, o outro ponto P' pertence à reta t mas não pertence à parábola. Portanto, fica demonstrado o teorema. ■

Exemplo 4 Mostre que a projeção F' do foco F de uma parábola na tangente pertence à reta que é tangente ao vértice da parábola.



Resolução: Considere o ponto Q a projeção ortogonal de P na diretriz, uma reta r paralela a diretriz passando por F' e também uma reta t bissetriz interna de PQF em P .



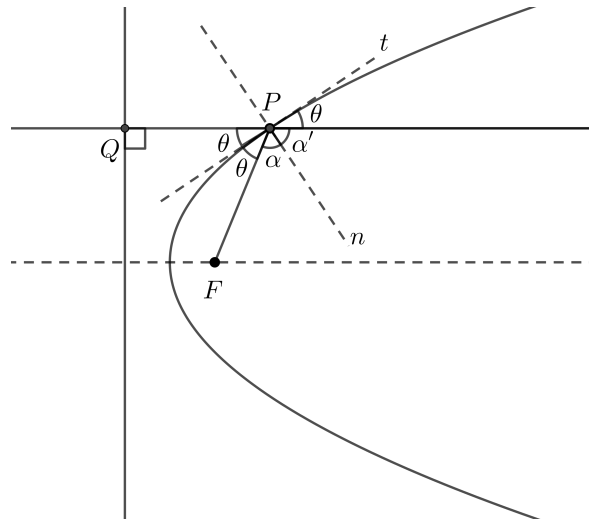
Da definição de parábola, temos que $PQ = PF$, ou seja, PQF é triângulo isósceles de base QF . Note também que os ângulos QPF' e FPF' são congruentes, pois t é bissetriz interna do triângulo PFQ . Como PF' é lado comum aos dois triângulos QPF' e FPF' , concluímos, pelo caso LAL que eles são congruentes. Dessa congruência, temos que os ângulos $PF'F$ e $PF'Q$ são congruentes e retos. Ainda da congruência, concluímos que $FF' = QF'$. Esses dois últimos fatos nos garantem a colinearidade dos pontos $QF'F$ e que F' é ponto médio do segmento de reta QF . Note que como a reta r "corta" o triângulo QOF , gerando um triângulo $F'VF$ e $d // r$, chegamos na semelhança dos triângulos QOF e $F'VF$.

Da semelhança desses dois triângulos e do fato de que F' é ponto médio do segmento QF , teremos que $\frac{VF}{OF} = \frac{F'F}{QF} = \frac{1}{2}$. Portanto,

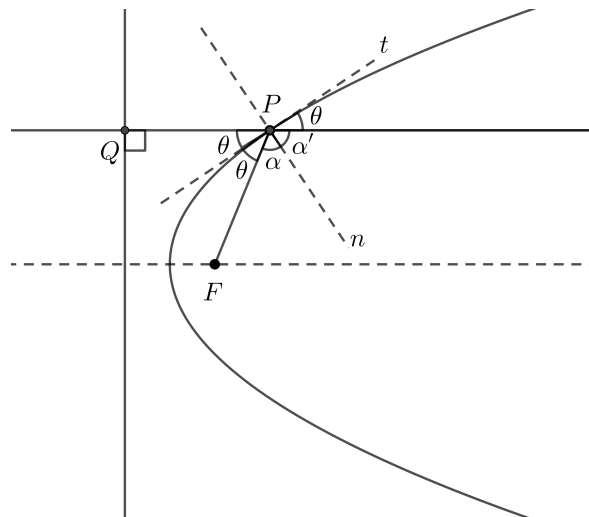
$$VF = \frac{OF}{2}.$$

Dessa forma, concluímos que V é o vértice da parábola, pois é ponto médio do segmento de reta OF .

Teorema 4.5 Considere um ponto P pertencente à parábola de foco F , uma reta t bissetriz do ângulo $Q\hat{P}F$ e uma outra reta n perpendicular a t em P . A **Propriedade Refletora da parábola** afirma que o ângulo que o raio vetor FP forma com a reta n é igual ao ângulo que n forma com a semi-reta que começa em P e está contida na concavidade da parábola, de modo que essa semi-reta seja paralela ao eixo de simetria e n seja uma reta normal à parábola.



Demonstração. Note que temos uma reta PQ de modo que Q seja a projeção ortogonal de P na diretriz da parábola.



Como a reta t é bissetriz do ângulo $Q\widehat{P}F$, então podemos afirmar que t divide esse ângulo em dois ângulos adjacentes iguais a θ , representados pela figura acima. Note ainda que as retas PQ e t formam ângulos opostos pelo vértice de medida θ e que desses ângulos, o que está acima da reta PQ é adjacente com o ângulo formado pelas retas n e PQ . E já que as retas t e n são perpendiculares, teremos

$$\theta + \alpha = \theta + \alpha' = 90^\circ.$$

Portanto,

$$\alpha = \alpha'.$$



Observação 4.1 *É essa propriedade que explica o funcionamento das antenas parabólicas e de radio-telescópios. As ondas de rádio, ao se propagarem em direção a um parabolóide de revolução, seguem uma trajetória paralela ao eixo focal da parábola geradora, fazendo com que elas sejam refletidas em um único ponto que é o foco da cônica. Essa concentração de ondas de rádio no foco facilita muito o tratamento do sinal que é feito no amplificador de sinal da parabólica.*

Outra importante aplicação é na fabricação de refletores para lanternas e faróis de carros. Ao colocarmos uma lâmpada em um holofote que tem formato de parabolóide de revolução, de modo que a mesma fique no foco, as ondas de luz ao propagarem em direção ao refletor são refletidas de modo que elas se propagarão em uma direção paralela ao eixo focal da parábola, formando assim um fecho de luz.

Na Astronomia, as propriedades refletoras da parábola, hipérbole e elipse são utilizadas conjuntamente nos telescópios espelhados, também conhecidos como telescópios refletores. Esses telescópios são muito mais eficientes para obtenção de imagens do que os telescópios refratores (que utilizam lentes), pois as lentes geram algumas imagens deformadas e em muitos casos funcionam como prismas ópticos, prejudicando e muito a resolução de fotografias do espaço. Esses inconvenientes não ocorrem com os espelhos gerados a partir de revoluções de cônicas, o que explica o porquê desses espelhos curvos produzirem imagens mais nítidas e serem utilizados nas tecnologias de telescópios espaciais.

Outras aplicações das propriedades refletoras das cônicas podem ser estudadas nas referências [2, 13, 14, 21].

Capítulo 5

Teoremas de La Hire e de Poncelet para cônicas

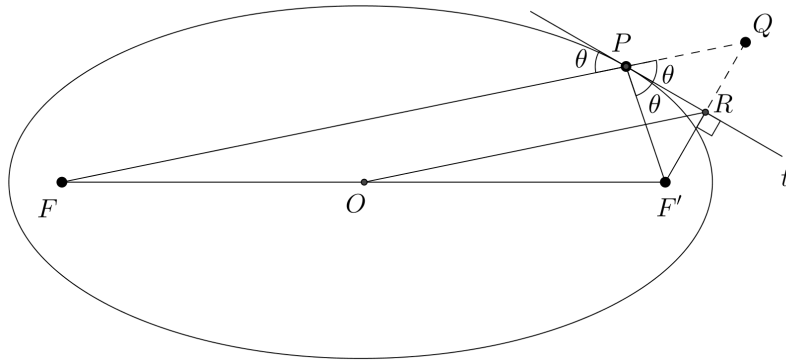
Os teoremas de La Hire¹ e de Poncelet² e suas aplicações são uma boa alternativa para o professor evitar aulas repetitivas, de exercícios demasiadamente simples que só exigem a memorização de uma fórmula e a substituição de letras por números. Esses tipos de exercícios não são interessantes do ponto de vista dos alunos, não exercitam a capacidade de raciocínio e argumentação dos mesmos e nem ajudam na compreensão de conceitos e propriedades importantes da Matemática. Apresentar esses teoremas, além de ajudar o aluno a revisar conceitos de Geometria Plana, ajuda também a entender que o estudo e aprendizado da Matemática vai além da aprendizagem mecânica proporcionada por exercícios simples de valor numérico.

Teorema 5.1 (de La Hire para elipses) *Seja ε uma elipse. A projeção de um foco de uma elipse sobre uma tangente está na circunferência principal maior da elipse.*

Demonstração. Consideremos o ponto O como o centro da elipse de focos F e F' , a reta t uma tangente da mesma, sendo o ponto R a projeção de F' na tangente t , Q o simétrico de F' em relação a t , os pontos P e R as interseções da reta t com FQ e $F'Q$, respectivamente.

¹Philippe de La Hire (1640-1718) foi um matemático que realizou importantes contribuições na Geometria, especialmente em relação às cônicas. Influenciado pelas ideias de Desargues e Descartes, publicou trabalhos que analisavam essas figuras na Geometria Analítica, já que essas curvas foram estudadas por esse matemático no plano.

²Jean Victor Poncelet (1788-1867) foi engenheiro, matemático e professor de Matemática. Foi autor de um importante trabalho: A Geometria Projetiva, complementando o que Desargues e Pascal tinham publicado no século XVII. Publicou também trabalhos de grande relevância sobre polígonos inscritos e circunscritos a uma cônica



Do processo de construção de Q , temos que $F'R = RQ$, se O é o centro da elipse de focos F e F' , então $F'O = FO$. Portanto o segmento de reta OR é base média do triângulo $FF'Q$. Logo, $OR \parallel FQ$. Observe que os triângulos FQF' e ORF' são semelhantes, pois $\widehat{ROF} = \widehat{QF'F}$ e $\widehat{ORF'} = \widehat{FQF'}$ (caso Ângulo Ângulo ou AA). Portanto,

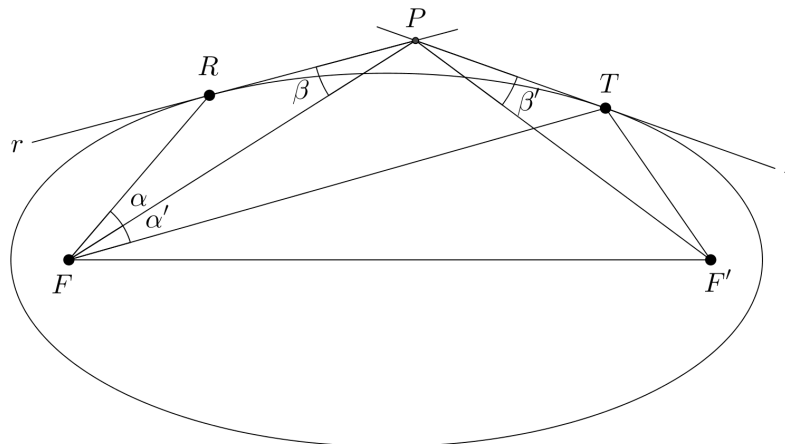
$$\frac{OR}{FQ} = \frac{OF'}{FF'} = \frac{1}{2} \Rightarrow OR = \frac{FQ}{2}.$$

Como Q é simétrico do foco F' em relação à tangente t , então Q será ponto da circunferência diretora da elipse centrada no foco F . Assim $FQ = 2a$. Substituindo FQ na equação acima, temos que

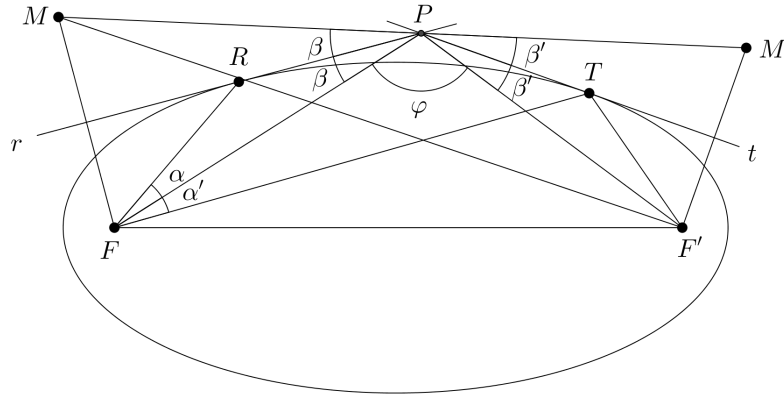
$$OR = \frac{2a}{2} = a.$$

Portanto, concluímos que o ponto R , que é a projeção do foco F' na tangente t , pertence a circunferência principal maior da elipse. ■

Teorema 5.2 (de Poncelet para elipses) *Consideremos um ponto P externo a uma elipse e duas retas r e t que são tangentes a essa elipse e que passam por P (vide figura abaixo). Então, $\alpha = \alpha'$ e $\beta = \beta'$.*



Demonstração. Sejam M e M' os simétricos dos focos F e F' em relação as retas tangentes r e t , respectivamente; considere ainda P o ponto de interseção entre essas retas tangentes.



Conseqüentemente as retas r e t serão bissetrizes internas dos ângulos \widehat{MPF} e $\widehat{F'PM'}$, respectivamente. Como no triângulo MPF a reta r é bissetriz do ângulo interno de vértice P do mesmo e também é mediatriz do segmento de reta MF , que é oposto ao ângulo \widehat{MPF} , então temos que o triângulo MPF é isósceles de base MF , portanto $PF = PM$. Por argumentos análogos, provamos também que o triângulo $F'PM'$ é isósceles de base $M'F'$, e portanto $PM' = PF'$. Do resultado que obtivemos para chegar na igualdade (3.3), temos também que $MF' = M'F = 2a$. Como $PF = PM$, $PF' = PM'$ e $MF' = M'F$, então os triângulos PMF' e $PM'F$ são congruentes, pelo caso (Lado Lado Lado ou LLL). Seja ϕ o ângulo entre os segmentos de reta PF e PF' . Note que os ângulos $\widehat{MPF'}$ e $\widehat{F'PM'}$ terão mesma medida como consequência da congruência entre os triângulos PMF' e $PM'F$. Assim, $\widehat{MPF} = 2\beta + \phi$ e $\widehat{F'PM'} = 2\beta' + \phi$. Portanto, $\beta = \beta'$.

Consideremos $\theta = \widehat{F'MP}$. Da congruência entre PMF' e $PM'F$, temos que

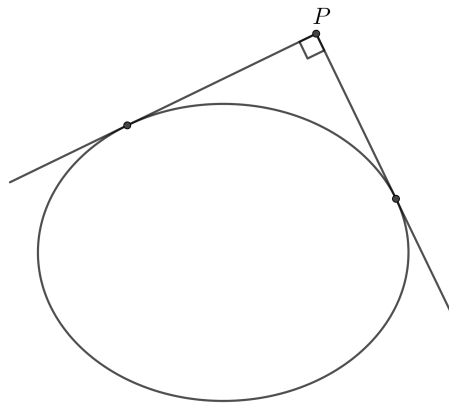
$$\widehat{F'MP} = \theta = \widehat{PFM'} = \alpha'. \quad (5.1)$$

Observe que o triângulo MPF é simétrico, sendo r o eixo de simetria. Conseqüentemente,

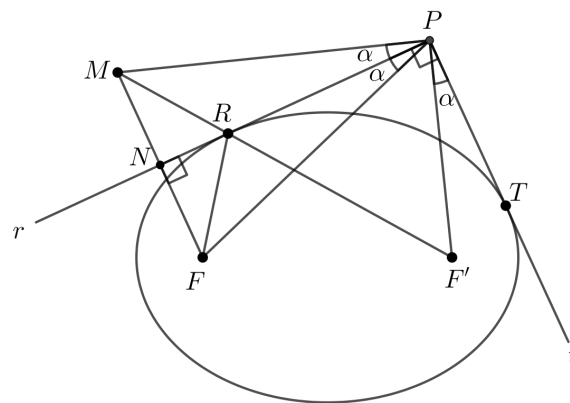
$$\widehat{PMR} = \theta = \widehat{RFP} = \alpha. \quad (5.2)$$

Portanto, de (5.1) e (5.2), concluímos que $\alpha = \alpha'$. ■

Exemplo 5 Identifique a equação e determine o lugar geométrico da interseção de duas retas tangentes a uma elipse dada, de modo que essas tangentes sejam sempre perpendiculares entre si.



Resolução: Vamos acrescentar na figura acima os focos F e F' da elipse; o ponto M , que é simétrico de F em relação a uma tangente r ; e também os pontos de interseção que a elipse faz com as tangentes r e t , que são os pontos R e T , respectivamente.



Vamos, inicialmente, provar as duas igualdades abaixo:

$$\widehat{RPM} = \widehat{RPF} = \widehat{F'PT} = \alpha \quad \text{e} \quad PF^2 + PF'^2 = 4a^2.$$

Como consequência do processo de construção de M , teremos que os triângulos PNM e PNF serão congruentes (caso LAL). Da congruência entre esses dois triângulos, podemos dizer que a reta r é bissetriz do ângulo \widehat{MPF} . Portanto, $\widehat{MPR} = \widehat{FPR} = \alpha$. Do Teorema de Poncelet, temos também que os ângulos \widehat{FPR} e $\widehat{F'PT}$ têm medida igual a α .

Analisando a figura acima, temos que $\widehat{F'PT} = \widehat{RPT} - 2\alpha = 90^\circ - 2\alpha$. Observe também que $\widehat{MPF'} = \widehat{F'PT} + \widehat{MPF}$. Como $\widehat{F'PT} = 90^\circ - 2\alpha$ e $\widehat{MPF} = 2\alpha$, concluímos que $\widehat{MPF'} = (90^\circ - 2\alpha) + 2\alpha = 90^\circ$. Logo, o triângulo MPF' é retângulo em P . Apliquemos o Teorema de Pitágoras nesse triângulo, obtemos

$$PM^2 + PF'^2 = MF'^2.$$

Já vimos em resultados anteriores, que como M é simétrico em relação ao foco F , então $MF' = 2a$. Desse resultado e da congruência entre os triângulos PNM e PNF , temos $PM = PF$. Desses dois últimos resultados, chegamos na equação abaixo:

$$PF^2 + PF'^2 = (2a)^2 = 4a^2. \quad (5.3)$$

Apliquemos a fórmula da distância entre dois pontos em (5.3), considerando que a elipse tem centro na origem e eixo focal passando pela reta x :

$$(x+c)^2 + y^2 + (x-c)^2 + y^2 = 4a^2.$$

Desenvolvendo os quadrados e simplificando, obtemos a igualdade abaixo:

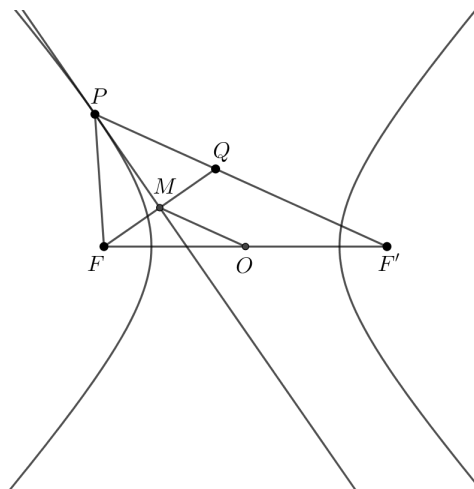
$$x^2 + c^2 + y^2 = a^2 + a^2. \quad (5.4)$$

Lembremos que se uma elipse tem semi-eixo maior a e semi-eixo menor b , focos $(-c, 0)$ e $(c, 0)$, então $a^2 = b^2 + c^2$. Podemos substituir o segundo a^2 que aparece em (5.4) e simplificar. Chegaremos na igualdade abaixo:

$$x^2 + y^2 = a^2 + b^2.$$

Portanto, a igualdade acima é a representação do lugar geométrico formado pela circunferência de centro coincidente com o da elipse e raio igual a $\sqrt{a^2 + b^2}$.

Teorema 5.3 (de La Hire para hipérboles) *Consideremos uma hipérbole de focos F e F' , centrada em O , de semi-eixo maior a e uma reta t tangente à hipérbole no ponto P . A projeção ortogonal de um dos focos na tangente t (chamemos essa projeção de M), pertence à circunferência principal dessa hipérbole, ou seja, a distância do centro O até o ponto M deve ser igual a a .*



Demonstração. Como O é o centro da hipérbole, então o mesmo será ponto médio do segmento de reta FF' . Vimos anteriormente que nesse caso, $PF = PQ$, ou seja, PQF é triângulo

isósceles de base QF , o que implica dizer que a reta t além de ser bissetriz interna em relação ao ponto P , também será mediatriz em relação ao segmento QF . Consequentemente, o ponto M , que é a interseção entre a reta t e o segmento QF , será o ponto médio desse segmento.

Observe que da construção dos pontos M e O , temos que OM é base média do triângulo FQF' . Consequentemente, os triângulos FMO e FQF' serão semelhantes. Dessa semelhança, temos

$$OM = \frac{1}{2}QF'.$$

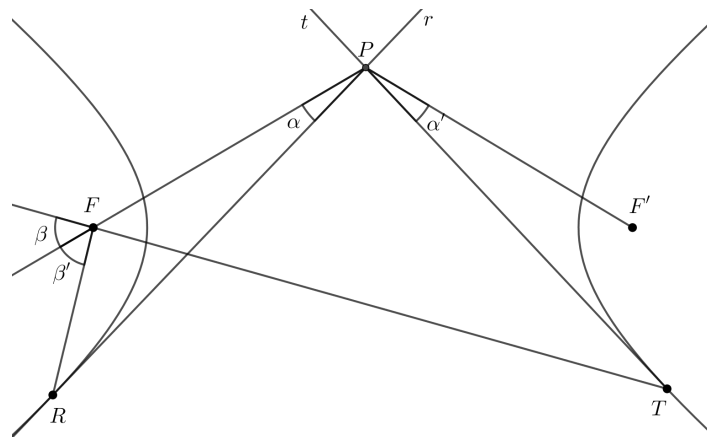
Mas vimos, ao chegarmos na equação (4.2) que $QF' = 2a$. Substituindo na igualdade acima obtemos

$$OM = \frac{1}{2}2a = a.$$

Dessa forma concluímos que o ponto M , que é a projeção de F na reta t , pertence à circunferência principal da hipérbole.



Teorema 5.4 (de Poncelet para hipérboles) *Consideremos uma hipérbole de focos F e F' , onde r e t são tangentes à hipérbole nos pontos R e T , respectivamente, de modo que essas tangentes façam interseção no ponto P . Destacamos na figura abaixo, o ângulo que é formado entre duas semi-retas, ambas com ponto inicial em P mas com uma delas passando por um dos focos e a outra semi-reta passando pelo ponto de tangência, de modo um dos pares de semi-retas forma um ângulo α enquanto o outro par forma um ângulo α' . Observe que os ângulos α e α' foram construídos a partir dos ramos esquerdo e direito da hipérbole, respectivamente.*



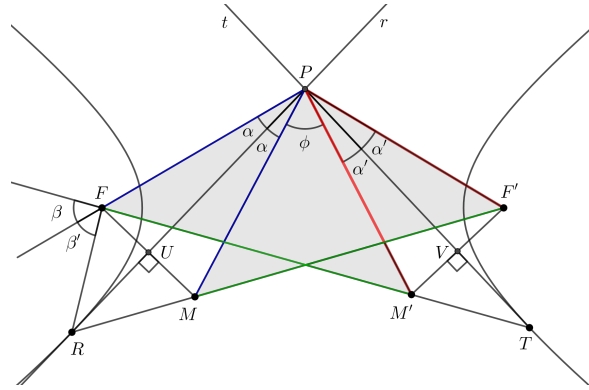
Então,

$$\alpha = \alpha'.$$

Ademais, se destacarmos duas semi-retas; uma que começa pelo ponto de tangência T de um dos ramos da hipérbole e passa pelo foco do outro ramo (ponto F) e outra semi-reta

que começa nesse mesmo foco F mas que passa pelo outro ponto de tangência R , então a semi-reta que começa na interseção P e que passa por esse foco F é uma bissetriz com o ângulo formado a partir das duas semi-retas construídas anteriormente e conseqüentemente, teremos que $\beta = \beta'$.

Demonstração. Antes de começarmos, vamos destacar, na figura acima, alguns triângulos e depois provar uns casos de congruência:



Na figura acima, os pontos M e M' são os simétricos dos focos F e F' em relação às retas r e t , respectivamente. Observe que os triângulos PUF e PUM são congruentes (caso LAL). Conseqüentemente os ângulos \widehat{UPF} e \widehat{UPM} terão mesma medida α . Note também que essa mesma congruência ocorre com os triângulos VPM' e VPF' , o que implica que os ângulos $\widehat{VPM'}$ e $\widehat{VPF'}$ terão mesma medida α' . Ainda desses casos de congruência, teremos que $PF = PM$ e $PF' = PM'$. Da equação (4.2), temos:

$$F'M = FM' = 2a.$$

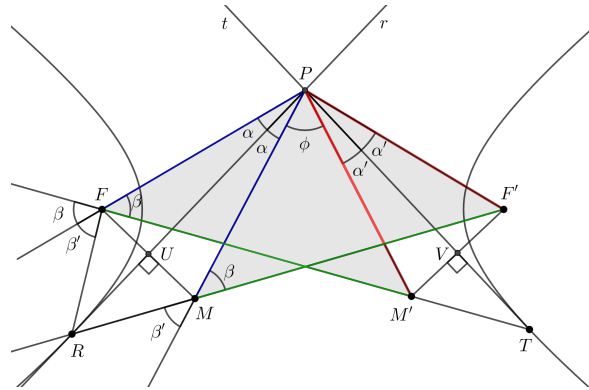
Dessas três últimas igualdades obtidas, concluímos, pelo caso LLL que os triângulos $PM'F$ e PMF' são congruentes. Destaquemos o ângulo $\phi = \widehat{MPM'}$. Da congruência entre $PM'F$ e PMF' , temos que

$$\widehat{FPM'} = 2\alpha + \phi = \widehat{F'PM} = 2\alpha' + \phi. \quad (5.5)$$

Da equação (5.5), obtemos:

$$\alpha = \alpha'.$$

Vamos demonstrar agora que $\beta = \beta'$. Para isso, vamos acrescentar na anterior, duas semi-retas: que começa por P e que passa por M e outra que começa por M e que passa por R .



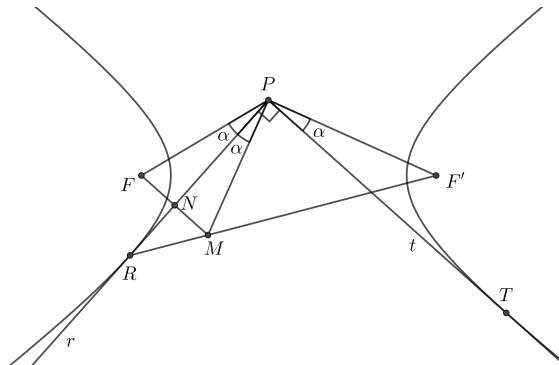
Note que $\widehat{PFM'} = \beta$, pois esse ângulo é oposto pelo vértice com o ângulo de medida β construído anteriormente. Da congruência entre os triângulos $PM'F$ e PMF' , temos que $\widehat{PFM'} = \widehat{PMF'} = \beta$. Da simetria entre os triângulos FRP e MRP , temos que o ângulo formado pelas semi-retas \overrightarrow{PM} e \overrightarrow{MR} tem medida igual a do ângulo de medida β' construído anteriormente. Note que esse ângulo formado por esse par de semi-retas é oposto pelo vértice com o ângulo $\widehat{PMF'}$. Mas como $\widehat{PMF'} = \beta$, então

$$\beta = \beta'.$$

e, portanto, o teorema está demonstrado. ■

Exemplo 6 Identifique a equação e determine o lugar geométrico do conjunto de pontos formado pelas interseções entre pares de retas tangentes a uma hipérbole de modo que essas retas sejam sempre perpendiculares entre si.

Resolução: Consideremos, em uma hipérbole centrada na origem e de focos $F(-c,0)$ e $F'(c,0)$, que M é o simétrico de F em relação a uma tangente r . Vamos destacar também os pontos R e T que são as interseções da hipérbole com as retas tangentes r e t , respectivamente.



Vamos, de início, provar as duas igualdades abaixo:

$$\widehat{RPM} = \widehat{RPF} = \widehat{F'Pt} = \alpha \quad \text{e} \quad PF^2 + PF'^2 = 4a^2.$$

Do processo de construção do ponto M , os triângulos PNF e PNM serão congruentes (caso LAL), portanto r será bissetriz do ângulo $F\widehat{P}M$. Logo $R\widehat{P}M = R\widehat{P}F = \alpha$. Do Teorema de Poncelet e do fato de $R\widehat{P}M = \alpha$, teremos $R\widehat{P}M = F'\widehat{P}T = \alpha$. Logo $R\widehat{P}M = R\widehat{P}F = F'\widehat{P}T = \alpha$. Observe que da figura acima, obtemos: $M\widehat{P}T = R\widehat{P}T - R\widehat{P}M = 90^\circ - \alpha$. Como $M\widehat{P}F' = M\widehat{P}T + F'\widehat{P}T$, então $M\widehat{P}F' = (90^\circ - \alpha) + \alpha = 90^\circ$. Portanto, o triângulo MPF' será retângulo em P . Aplicando o Teorema de Pitágoras, teremos

$$MP^2 + PF'^2 = MF'^2. \quad (5.6)$$

Da construção de M , temos que $MF' = 2a$. Observe também que da congruência entre os triângulos PNF e PNM (caso LAL), teremos $MP = PF$. Substituindo em (5.6), obtemos na igualdade abaixo:

$$PF^2 + PF'^2 = 4a^2. \quad (5.7)$$

Vamos agora aplicar a fórmula da distância entre dois pontos em (5.7).

$$(x+c)^2 + y^2 + (x-c)^2 + y^2 = 4a^2.$$

Desenvolvendo os quadrados e simplificando, chegamos na igualdade abaixo:

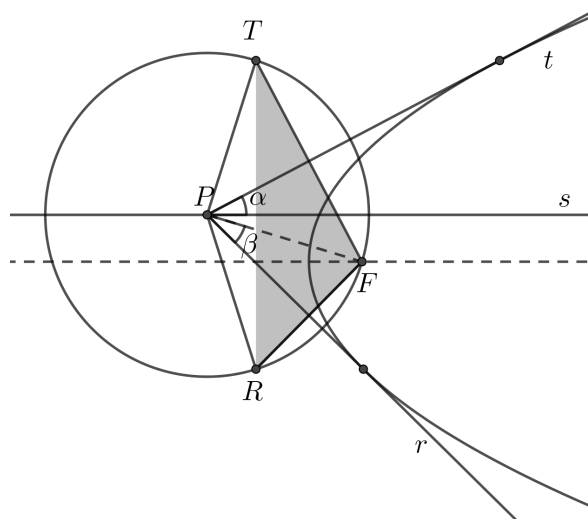
$$x^2 + c^2 + y^2 = a^2 + a^2.$$

Como na hipérbole que destacamos, $c^2 = a^2 + b^2$, então

$$x^2 + y^2 = a^2 - b^2.$$

Portanto, a equação acima é a representação do lugar geométrico pedido no enunciado, que é uma circunferência de centro coincidente com o da hipérbole e raio igual a $\sqrt{a^2 - b^2}$.

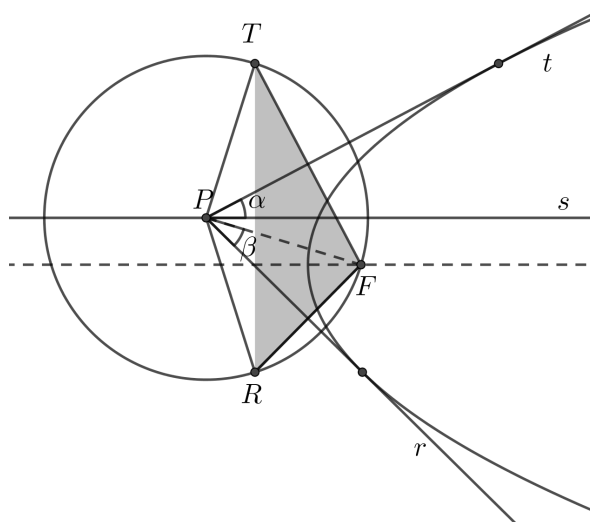
Teorema 5.5 (de Poncelet para parábolas) *Sejam r e t duas retas tangentes a uma parábola de foco F tais que essas retas se cruzam no ponto P , s uma reta paralela ao eixo de simetria dessa parábola e que também passa por P , e uma semi-reta \overrightarrow{PF} conforme figura abaixo*



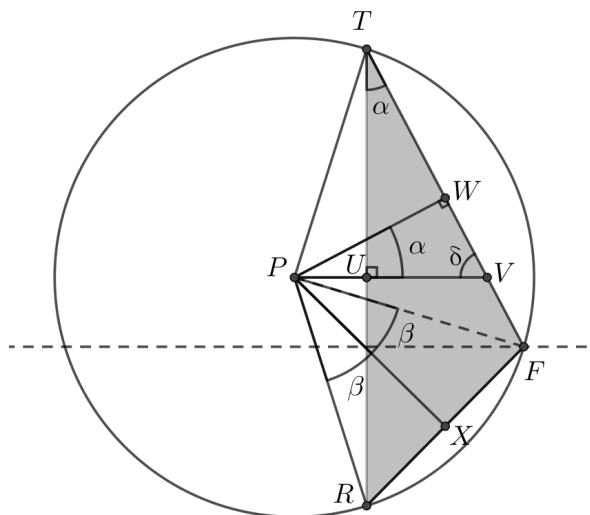
O ângulo que a semi-reta \overrightarrow{PF} forma com uma das tangentes é igual ao ângulo que a reta paralela ao eixo de simetria que destacamos forma com a outra reta tangente, ou seja, que

$$\alpha = \beta.$$

Demonstração. Consideremos T e R os simétricos de F em relação às retas t e r , respectivamente. Observe que o segmento TR está contido na diretriz da parábola e como essa diretriz é perpendicular à reta s , então $s \perp TR$. Como consequência do processo de construção desses pontos T e R , as retas t e r serão mediatrizes do triângulo FTR . Logo, P será o circuncentro desse triângulo, assim podemos traçar uma circunferência que passa por F , T e R . Observe a representação desses últimos resultados obtidos na figura abaixo:



Vamos destacar alguns pontos e ângulos importantes para finalizar a demonstração desse teorema.



Observe na figura acima que os triângulos TUV e PWV são semelhantes pelo caso AA (Ângulo Ângulo), pois ambos são triângulos retângulos e o ângulo δ é comum aos dois. Dessa semelhança, provamos que o ângulo $U\hat{T}V$ também mede α . Note também que os triângulos PXR e PXF são congruentes e portanto o ângulo $X\hat{P}R$ também mede β . Observe que o ângulo $F\hat{T}R$ tem a metade da medida do ângulo $F\hat{P}R = 2\beta$. Dessa forma,

$$F\hat{T}R = \alpha = \frac{1}{2}2\beta.$$

Portanto,

$$\alpha = \beta.$$



Exemplo 7 *Determine o lugar geométrico dos pontos de onde se pode traçar tangentes perpendiculares a uma parábola P .*

Resolução: Antes de abordarmos esse exemplo usando o Teorema de Poncelet visto acima, vamos apresentar uma solução puramente analítica. Vamos resolver esse problema para a parábola representada pela equação $x^2 = 2py$. Uma das retas tangentes à essa parábola será representada pela equação $y = mx - \frac{(m^2)p}{2}$, pois como a reta $y = mx + h$ é tangente, o sistema formado por essas duas equações terá solução única, o que implica que

$$x^2 = 2p(mx + h).$$

Logo,

$$\Delta = 4p^2m^2 + 8ph = 0 \Rightarrow h = -\frac{m^2p}{2} \Rightarrow y = mx - \frac{(m^2)p}{2}.$$

A outra reta tangente e perpendicular a essa primeira terá equação na forma $y = m_1x + h_1$, o que implica que $m_1 = 1/m$. Dessa forma, ao substituirmos m_1 por $1/m$ na equação da reta obtida anteriormente, teremos

$$y = -\frac{1}{m}x - \frac{p}{2m^2}.$$

Para encontrarmos o lugar geométrico pedido no enunciado, devemos resolver o sistema de equações abaixo

$$\begin{cases} y = mx - \frac{m^2p}{2} \\ y = -\frac{1}{m}x - \frac{p}{2m^2}. \end{cases}$$

Multiplicando ambos os membros da primeira equação por 2 e os membros da segunda equação por $2m^2$, teremos

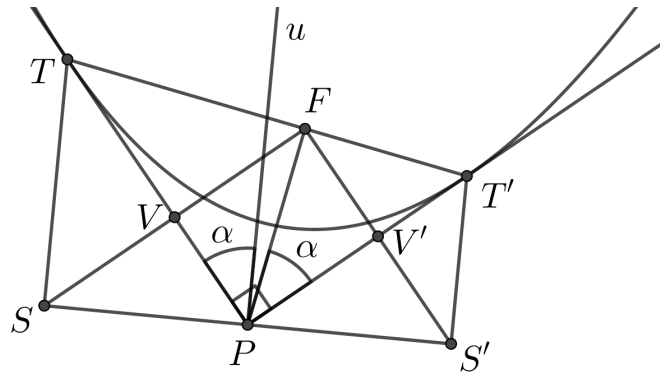
$$\begin{cases} 2y - 2mx = -m^2p \\ 2m^2y + 2mx = -p. \end{cases}$$

Aplicando o método da adição no sistema acima, eliminamos o parâmetro m . Dessa forma, teremos

$$2y(1 + m^2) = -p(1 + m^2) \Rightarrow y = -\frac{p}{2}.$$

Concluimos então, que o lugar geométrico obtido a partir dos pontos de interseção das tangentes perpendiculares da parábola é a própria reta diretriz da mesma.

Vamos agora resolver esse mesmo problema utilizando o Teorema de Poncelet. Destaquemos os pontos S e S' de modo que eles sejam os simétricos do foco F em relação às tangentes que passam por T e T' , respectivamente. Consideremos também uma reta u que passa pela interseção das tangentes e paralela ao eixo focal da parábola. Podemos também, pelo Teorema de Poncelet, destacar dois ângulos de medida α conforme figura abaixo



Como S é simétrico do foco em relação a uma das tangentes os ângulos \widehat{PVS} e \widehat{PVF} são retos, tendo portanto a mesma medida. Observe, ainda da construção do ponto S que $SV = VF$ e o segmento PV é comum aos dois triângulos PVS e PVF . Consequentemente, PVS e PVF serão congruentes (caso LAL). Dessa forma, os ângulos \widehat{SPT} e \widehat{TPF} terão medidas iguais. De forma análoga, prova-se a congruência entre os triângulos $PV'S'$ e $PV'F$ e consequentemente a igualdade entre as medidas dos ângulos $\widehat{S'PT'}$ e $\widehat{T'PF}$. Note ainda que $\widehat{TPF} + \alpha = 90^\circ$ e $\widehat{T'PF} = \alpha$. Como consequência dessas duas últimas igualdades e das que obtivemos partir das congruências de triângulos, teremos que

$$\widehat{SPT} = \widehat{TPF} = 90^\circ - \alpha \widehat{T'PF} = \alpha.$$

Dessa forma, podemos provar que o ângulo $\widehat{SPS'}$ mede 180° , já que

$$\widehat{SPS'} = \widehat{SPT} + \widehat{TPF} + \widehat{T'PF} + \widehat{S'PT'} = (90^\circ - \alpha) + (90^\circ - \alpha) + \alpha + \alpha.$$

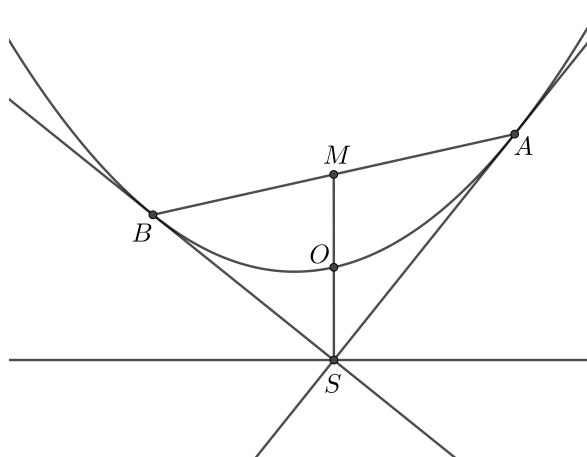
Simplificando a igualdade acima, teremos

$$\widehat{SPS'} = 180^\circ - 2\alpha + 2\alpha = 180^\circ.$$

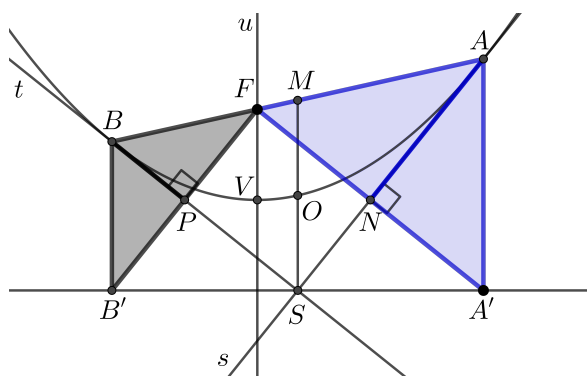
Portanto, os pontos S , P e S' são colineares. Observemos que (também pelo caso LAL) os triângulos TVS e TVF são congruentes e como consequência dessa congruência, teremos que $TS = TF$. Como T é um ponto pertencente á parábola e F é o foco, concluimos a partir da própria definição desta cônica que S é um ponto da reta diretriz. De forma análoga, prova-se que o ponto S' também está na reta diretriz da parábola. Como consequência desses

últimos resultados que obtivemos em relação aos pontos S e S' e também da colinearidade entre esses dois pontos e o ponto P , provamos, por meio do Teorema de Poncelet, que o lugar geométrico pedido no enunciado é a diretriz da parábola.

Lema 5.6 *Considere um triângulo formado por 2 tangentes a uma parábola perpendiculares e por uma corda conectando os dois pontos de tangência A e B . Sejam S o ponto de encontro das duas tangentes (i.e., S é o terceiro vértice do triângulo); M o ponto médio da base AB . O 1º Lema da **Quadratura de Arquimedes**, a mediana MS do triângulo ABS é paralelo ao eixo focal da parábola.*



Demonstração. Vamos refazer a figura acima, destacando o foco F ; os pontos B' e A' , que são os simétricos de F em relação as tangentes t e s .



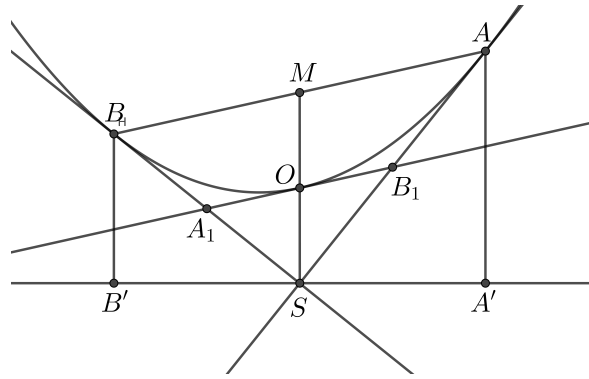
Note que $P = t \cap B'F$, $N = s \cap A'F$ e como consequência do processo de construção dos simétricos, obtemos dois pares de triângulos congruentes. De fato, $B'P = PF$, $B'\hat{P}B = F\hat{P}B = 90^\circ$ e BP é lado comum aos triângulos $B'PB$ e FPB . Portanto, pelo caso *LAL* (Lado Ângulo Lado), $B'PB$ e FPB são triângulos congruentes. De maneira análoga, podemos provar a congruência dos triângulos FNA e $A'NA$, também pelo caso *LAL* (Lado Ângulo Lado). Note que $A'N = FN$, $A'\hat{N}A = F\hat{N}A = 90^\circ$ e que AN é lado comum a esse outro par de triângulos. Como consequência dessas duas congruências que verificamos, teremos: $BB' = BF$ e $AA' = AF$. Note que por essas últimas igualdades, podemos afirmar que

B' e A' são pontos pertencentes à diretriz da parábola. Considere u o eixo focal da parábola. Como A' e B' são as respectivas projeções ortogonais de A e B na reta diretriz, podemos afirmar que: $BB' // AA' // u$. Portanto, o quadrilátero $ABB'A'$ forma um trapézio de bases AA' e BB' . Ainda das duas congruências demonstradas, podemos constatar que as retas t e s são mediatrizes dos segmentos $B'F$ e $A'F$, respectivamente. Desse último resultado e do fato de $t \cap s = S$, podemos concluir que S faz parte do circuncentro do triângulo $A'B'F$, ou seja, poderíamos traçar uma mediatriz passando também pelo segmento $A'B'$ de $A'B'F$, e ela passaria por S , sendo perpendicular ao segmento $A'B'$ e conseqüentemente perpendicular à reta diretriz. Nesse caso, em que S está na diretriz, teremos que S será ponto médio do segmento $A'B'$. Desse resultado demonstrado, do fato de $ABB'A'$ ser um trapézio de bases BB' e AA' , e de M ser ponto médio do lado AB desse trapézio, podemos concluir que MS é base média desse trapézio, portanto $MS // BB' // AA'$ e como já foi provado que BB' e AA' são paralelos ao eixo focal u , podemos concluir que MS também será paralelo ao eixo focal.

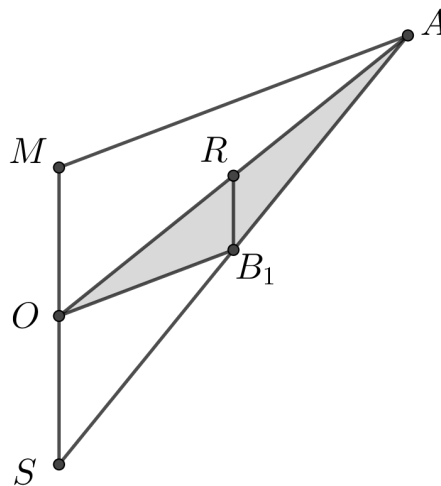
Vamos analisar o caso em que o ponto S não está na diretriz da parábola. Considerando novamente A' e B' os simétricos do foco em relação às tangentes, obtemos praticamente os mesmos resultados: $ABB'A'$ é um trapézio de bases AA' e BB' , além do segmento $A'B'$ continuar fazendo parte da diretriz da parábola. O ponto S continua tendo também o mesmo significado que na parte anterior, ou seja, sendo circuncentro do triângulo $A'B'F$. Mas nesse caso, temos que fazer a projeção ortogonal de S na diretriz. Chamemos essa projeção de S' . Como S é circuncentro e SS' é ortogonal a $A'B'$, conclui-se que S' está no ponto médio do segmento $A'B'$. Logo, SS' será paralelo às bases do trapézio. Observe também que MS' será base média do trapézio, pois S' e M são pontos médios dos segmentos $A'B'$ e AB , respectivamente. Logo, MS' também é paralelo às bases do trapézio. Desses dois últimos paralelismos demonstrados e do fato de S' ser ponto comum aos segmentos SS' e MS' , podemos concluir que M , S e S' são colineares. Logo, MS nesse caso, também será paralelo ao eixo focal, pois o eixo também é paralelo às bases do trapézio.

■

Lema 5.7 *Nas mesmas condições do problema anterior, consideremos: O é o ponto de encontro do segmento SM com a parábola; A_1 e B_1 os pontos em que a tangente à parábola em O cruza os lados do triângulo ABS . O 2º Lema da Quadratura de Arquimedes afirma que B_1 e A_1 são os pontos médios dos lados AS e BS do triângulo ABS , respectivamente, e O é o ponto médio de MS .*



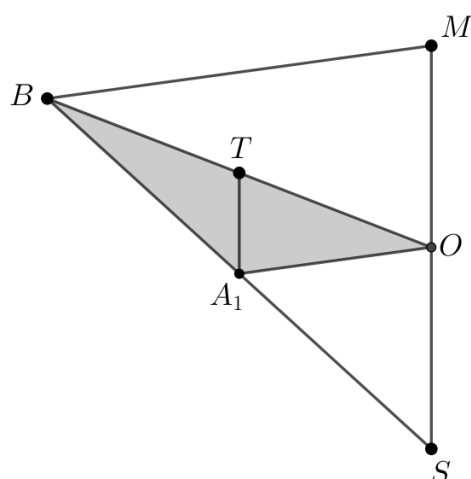
Demonstração. Vamos destacar da figura acima o triângulo AMS e analisar o triângulo AB_1O .



Observe que AB_1O tem dois segmentos, B_1O e AB_1 que são tangentes à parábola, sendo o ponto B_1 a interseção entre eles. Podemos então aplicar o 1º Lema da Quadratura de Arquimedes nesse triângulo. Consequentemente, a mediana B_1R é paralela ao segmento MS . Desse paralelismo entre os segmentos B_1R e MS , podemos afirmar que os triângulos ARB_1 e AOS são semelhantes, onde B_1R é base média de AOS . Portanto,

$$\frac{AR}{AO} = \frac{1}{2} = \frac{AB_1}{AS} \Rightarrow AS = 2AB_1.$$

Está demonstrado, então, que B_1 é ponto médio do segmento de reta AS . Chegaremos a resultados análogos ao destacarmos o triângulo BSM e analisarmos BA_1O , pois A_1B e A_1O são tangentes à parábola e tem A_1 como ponto de interseção.



Aplicando novamente o 1º Lema da Quadratura de Arquimedes, temos que o segmento A_1T será paralelo a MS , já que A_1T é a mediana desse triângulo que passa por OB . Desse modo,

$$\frac{TB}{OB} = \frac{1}{2} = \frac{BA_1}{BS} \Rightarrow BS = 2BA_1.$$

Logo, A_1 é ponto médio de BS .

Desses dois últimos resultados, podemos notar que A_1B_1 será base média do triângulo ASB . Aplicamos o Teorema de Tales em ASB .

$$\frac{A_1S}{BS} = \frac{1}{2} = \frac{OS}{MS} \Rightarrow MS = 2OS.$$

Portanto, finalizamos a demonstração provando que O é ponto médio do segmento MS .

■

No Exemplo 7, podemos observar que enquanto no primeiro método de resolução, nos limitamos somente a substituições em fórmulas prontas; no segundo, que aplicamos o Teorema de Poncelet, foram utilizadas técnicas de argumentação matemática muito mais sofisticadas. Chegamos à mesma conclusão ao compararmos os procedimentos utilizados para resolver os lemas da quadratura com o 1º modo que utilizamos para resolver o Exemplo 7. É essencial que o professor de Matemática, durante as atividades docentes, trabalhe com resoluções desse tipo, pois dessa forma os alunos terão uma visão mais realista de como a Matemática é construída.

Observação 5.1 *É importante observarmos que não existem nas parábolas as definições de centro e semieixo maior, portanto não existe um Teorema de La Hire para essas cônicas, pois por causa da inexistência dessas definições, elas também não tem circunferência principal.*

Capítulo 6

Conclusões

Neste trabalho apresentamos métodos alternativos para o ensino extracurricular das cônicas. Mostramos como é possível construir uma cônica com materiais que as pessoas têm em casa. Apresentamos os teoremas das tangentes, as propriedades refletoras, alguns métodos de construção e também resultados pouco conhecidos em relação às seções cônicas.

Durante as reflexões feitas no decorrer do presente trabalho, podemos constatar o quanto a falta de uma abordagem prática dos conteúdos pode comprometer a atividade docente (ver referência [17]).

É de suma importância que o professor trabalhe de forma que suas aulas não se tornem repetitivas. É essencial também uma boa interação entre alunos e professores, daí a necessidade de que o professor tenha um bom repertório de técnicas de ensino.

Os tão criticados exercícios de aprendizagem mecânica também são importantes, mas quando o aluno demonstra que já entendeu o significado das fórmulas e dos teoremas principais. É necessário que o professor comece a trabalhar com problemas mais elaborados e aborde também as aplicações, desafios e atividades práticas de construção geométrica, pois para uma aprendizagem efetiva da Matemática, o estudante deve resolver problemas que envolvam raciocínio lógico, elaboração de estratégias, interpretação de textos e figuras geométricas, e que exijam o aprendizado de novas técnicas de cálculo e de argumentação matemática.

Apesar dos conteúdos abstratos também terem sua devida relevância, a prioridade na atividade docente deve ser na abordagem de temas com aplicações práticas, pois geralmente é esse tipo de conteúdo que o alunado tem mais facilidade para compreender o quanto o mesmo é importante.

É essencial que o aluno saiba como as fórmulas e teoremas surgiram, evitando assim uma aprendizagem puramente mecânica e de memorização no decorrer das aulas. Por isso, foram apresentadas as demonstrações de várias equações e teoremas. Além disso, a exposição de técnicas de demonstração é necessária especialmente para aqueles alunos que desejam cursar Matemática, por exemplo, pois os mesmos ingressarão nos cursos de graduação mais preparados.

A grande contribuição do presente trabalho foi fazer uma abordagem de propriedades e resultados pouco conhecidos das seções cônicas por meio de tópicos da Geometria Euclidiana, demonstrando-os de uma forma mais clara e compreensível sob o ponto de vista discente.

Referências Bibliográficas

- [1] ALVES, F. R. V.; *Construção de curvas parametrizadas: uma discussão sobre o uso dos softwares Geogebra e CAS Maple*, Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo. ISSN 2237-9657, v.3, n.1, 2014b, 22p.
- [2] ÁVILA, G.; *A Hipérbole e os Telescópios*, Revista do Professor de Matemática, Nº 34.
- [3] BARBOSA, J. L. M.; *Geometria Euclidiana Plana*, 4^a ed. Rio de Janeiro - RJ: SBM, (1995), 163p.
- [4] DIAS, E. R.; *Cônicas: Atividades Aplicáveis no Ensino Médio com auxílio da Geometria Dinâmica e dobraduras*, Campo Grande - MS: UFMS, (2014), 104p.
- [5] ESQUINCALHA, A. C., Robaina, D. T. e Rodrigues, M.G.; *Ensino das Cônicas mediado por sua História e pelo uso da Geometria Dinâmica*, X Encontro Nacional de Educação Matemática, Salvador - BA: UAB, 9p.
- [6] FIEGENBAUM, J.; *Elementos da Geometria Analítica: Uso do Aplicativo GRAFEQ na reprodução de obras de arte*, Santa Maria - RS: UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA, (2015) 141p.
- [7] FREITAS, R. L.; *Geometria Analítica*, 1^a ed., Curitiba – PR: LTDA, 102p.
- [8] GOMEZ, J. J. D.; *Geometria Analítica*, 2^a ed. Rio de Janeiro - RJ: SBM, (2017), 363p.
- [9] GOMIDE, F. N.; *Estudo das Cônicas com Geometria Dinâmica*, Vitória da Conquista - BA: UESB, (2015), 51p.
- [10] GUIMARAES, C. S.; *Álgebra Vetorial e Geometria Analítica*, 1^a ed. Fortaleza - CE: Vestseller, (2013), 320p.
- [11] IEZZI, G.; *Fundamentos da Matemática Elementar 3*, 2^a ed. São Paulo - SP: Atual, (1978), 221p.
- [12] IEZZI, G.; *Fundamentos de Matemática Elementar 7*, 7^a ed. São Paulo - SP: Atual, (1995), 230p.

- [13] JUNIOR, M. C.; *Seções Cônicas: Propostas de atividades com ênfase nas propriedades refletoras e aplicações*, Brasília - GO: UnB, (2015), 65p.
- [14] LIMA, E. L.; *Números e Funções Reais*, 1^a ed. Rio de Janeiro - RJ: SBM, (2013), 289p.
- [15] NETO, A. C. M.; *Geometria*, 1^a ed. Rio de Janeiro - RJ: SBM, (2013), 427p.
- [16] NETO, F. Q.; *Tradução Comentada da Obra "Novos Elementos das Seções Cônicas" e sua relevância para o ensino da Matemática*, 1^a ed. Natal - RN: IFRN, (2013), 225p.
- [17] PEREIRA, C. S., COSTA e D. S.; *Uma Análise Metodológica do Ensino das Cônicas no Ensino Básico*, X Encontro Nacional de Educação Matemática, Salvador - BA: SBEM, (2010) 8p.
- [18] PEREIRA, L. R., BONFIM, V., *Instrumentos articulados que desenhavam cônicas*, Revista do Professor de Matemática N° 80, 2006.
- [19] POMPEO, J. N.; *Fundamentos de Matemática Elementar 9*, 7^a ed. São Paulo - SP: Atual, (1997), 451p.
- [20] THOMAS, G. B.; *Cálculo 1*, 11^a ed. São Paulo - SP: Addison Wesley, (2009), 772p.
- [21] THOMAS, G. B.; *Cálculo 2*, 11^a ed. São Paulo - SP: Addison Wesley, (2009), 636p.