COLÉGIO PEDRO II

Pró-reitora de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Carlos Roberto Alves Da Silva

EXPONENCIAL E LOGARITMO:
TEMAS A FAVOR DA INTERDISPLINARIDADE

Rio de Janeiro
2019

Carlos Roberto Aves Da Silva

EXPONENCIAL E LOGARITMO:
TEMAS A FAVOR DA INTERDISPLINARIDADE

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, vinculado à Pró-reitora de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura do Colégio Pedro II, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador (a): Prof. (a). Patrícia Erthal de Moraes Dr.

Rio de Janeiro
2019

COLÉGIO PEDRO II

PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO, PESQUISA, EXTENSÃO E CULTURA

BIBLIOTECA PROFESSORA SILVIA BECHER

CATALOGAÇÃO NA FONTE

S586 Silva, Carlos Roberto Alves da

Exponenciais e Logaritmos: temas a favor da interdisciplinaridade / Carlos Roberto Alves da Silva. – Rio de Janeiro, 2019.

94 f.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Colégio Pedro II. Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura.

Orientador: Patrícia Erthal de Moraes.

1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Logaritmos. 3. Funções exponenciais. 4. Interdisciplinaridade. I. Moraes, Patrícia Erthal de. II. Título.

Ficha catalográfica elaborada pela Bibliotecária Simone Alves – CRB7 5692.

EXPONENCIAL E LOGARITMO: TEMAS A FAVOR DA INTERDISCIPLINARIDADE

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, vinculado à Pró-reitora de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura do Colégio Pedro II, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovado em: _____/_____/_____.

Banca Examinadora:

____
Dr. Patrícia Erthal de Moraes (Orientador)
Colégio Pedro II

____
Dr. Daniel Felipe Neves Martins
Colégio Pedro II

____
Mestre. Tânia Maria Boffoni Simões De Faria
Colégio Pedro II

____
Dr. Wellerson Quintaneiro da Silva
Cefet-RJ

Rio de Janeiro
2019

Dedico este trabalho a Deus em primeiro lugar, depois a minha querida esposa Tamires Fraga, minha linda filha Sophia Fraga Alves e aos meus pais Sebastião José Da Silva e Nilza Alves Da Silva.

AGRADECIMENTO

Agradeço primeiramente a Deus que tem me dado forças para concluir este presente trabalho. Agradeço a minha esposa Tamires Fraga, minha filha Sophia Fraga Alves e meus pais, Nilza Alves e Sebastião José da Silva pela ajuda e compreensão ao longo dos dois anos de mestrado, a quem lhes dedico este trabalho.

Agradeço, por fim, à professora Patrícia pelo entusiasmo e conselhos desta dissertação. Agradeço aos meus amigos Ronald Simões e Fábio Benzaquem pelo apoio nas horas de estudo dando bons conselhos para conclusão desta dissertação e por último e não menos importante a colega Simone, bibliotecária do Colégio Pedro II, pela paciência e ajuda na formatação desta dissertação.

RESUMO

SILVA, Carlos Roberto Alves Da. **Exponenciais e Logaritmos**: temas a favor da interdisciplinaridade. 2019. 94 f. Dissertação (Mestrado) – Colégio Pedro, Pró – Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura, Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Rio de Janeiro, 2019.

Este trabalho propõe várias aplicações de Funções Exponenciais e Logarítmicas em diversas áreas do conhecimento, com o objetivo de promover a interdisciplinaridade entre esses conteúdos matemáticos com outros saberes, como: naturais, científicos, geográficos, entre outros. Para isso, como motivação, inicialmente apresentamos uma introdução histórica, mostrando como surgiram os Logaritmos e qual a sua importância em determinada época. Também fazemos um estudo sobre a Teoria que envolve as Funções Exponenciais e Logarítmicas. Por fim, são apresentadas atividades interdisciplinares que poderão ser utilizadas pelo professor com os alunos em sala de aula.

Palavras chaves: Logaritmos; história; interdisciplinaridade.

ABSTRACT

SILVA, Carlos Roberto Alves Da. **Exponential and Logarithms**: themes in favor of interdisciplinarity. 2019. 94 f. Dissertation (Master degree) - Pedro College, Pro-Rector's Office for Graduate Studies, Research, Extension and Culture, Professional Master's Program in Mathematics in National Network, Rio de Janeiro, 2019.

This work proposes several applications of Exponential and Logarithmic Functions in several areas of knowledge, with the objective of promoting the interdisciplinarity between these mathematical contents with other knowledge, such as: natural, scientific, geographic, among others. For this, as a motivation, we first present a historical introduction, showing how the Logarithms arose and what their importance in a given epoch. We also study the theory involving the Exponential and Logarithmic Functions. Finally, we present interdisciplinary activities that can be used by the teacher with the students in the classroom.

Keywords: Logarithms; story; interdisciplinarity.

SÚMARIO

1 INTRODUÇÃO: POR QUE ESTUDAR FUNÇÕES EXPONENCIAIS E LOGARÍTMICAS?

Não raro em sala de aula nos depararmos com perguntas dos alunos sobre a utilidade de determinados conteúdos. Perceber que o estudo de Funções Exponenciais e Logarítmicas tem *aplicações* em outras áreas de conhecimento pode, de certa forma, encorajá-los a aprender o assunto em questão, que passa a ter um novo significado para eles. Gostaríamos de enfatizar que a matemática é um saber abstrato, portanto as aplicações que serão realizadas nesta dissertação não possuem a intenção de reduzi-la à finalidade utilitarista e sim, fazer problematizações para as quais é necessário um estudo sobre alguns conteúdos de disciplinas de outras áreas, afim de modelar e explicar fenômenos.

Baseado nestas ideias propomos um trabalho voltado para questão interdisciplinar, onde serão apresentadas diversas atividades que proporcionam relacionar Funções Exponenciais e Logarítmicas com outros saberes. Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) sinalizam a importância da interdisciplinaridade.

> Na perspectiva escolar, a interdisciplinaridade não tem a pretensão de criar novas disciplinas ou saberes, mas de utilizar os conhecimentos de várias disciplinas para resolver um problema concreto ou compreender um determinado fenômeno sob diferentes pontos de vista. (BRASIL, 2000, p.21).

Embora saibamos da importância de se fazer a interação entre as Disciplinas em sala de aula, muitas vezes não a utilizamos por conta de diversos fatores como a dificuldade de comunicação com professores de outras áreas; tempo disponível para preparar aulas contextualizadas; tempo para a elaboração de atividades interessantes, o que requer pesquisa e estudo por parte do professor. Nesse sentido, cada atividade proposta, no penúltimo capítulo deste trabalho, vem acompanhada de uma introdução necessária à compreensão de cada assunto tratado.

Enquanto estudante do Ensino Médio eu e meus colegas de Classe sentíamos dificuldades no aprendizado de Exponenciais e Logaritmos. Muitas vezes esses conteúdos eram apresentados dissociados de qualquer aplicação prática e quando aconteciam, não eram compatíveis com fenômenos que ocorriam na natureza. Por diversas vezes, as dúvidas ou curiosidades surgiam, e percebíamos o papel isolado da Matemática na busca de compreender e dar respostas para determinados fenômenos. Havia-se a necessidade de se entender um pouco mais sobre assuntos de outras Disciplinas envolvidas na modelagem desses fenômenos. Portanto, pensamos em utilizar as Exponenciais e os Logaritmos não apenas para efetuar cálculos, mas como ferramentas de auxílio às demais Disciplinas para modelar fenômenos, mostrando que os números, na maioria dos casos, expressam apenas a ideia quantitativa, sendo necessário avaliar juntamente com outros saberes a explicação daquele determinado fenômeno na natureza. Sendo assim, gostaríamos de mostrar para os alunos a igual importância que todas as disciplinas possuem e que todas precisam estar em harmonia para que ocorra a interdisciplinaridade da maneira esperada.

A nossa contribuição para este trabalho é com relação a estrutura de apresentação do texto que pode servir como auxílio para o aprendizado do tema proposto. Salientamos, que um dos objetivos específicos é que esta tese possa ser utilizada pelos professores de matemática do Ensino Médio, e que de alguma forma estes profissionais da educação possam utilizá-la em suas respectivas salas de aula.

No **Capítulo 2** discutiremos sobre a História dos Logaritmos, em que apresentaremos os motivos pelos quais essa ferramenta foi criada. Para isso recorreremos a uma abordagem à trigonometria como ferramenta utilizada antes do surgimento dos Logaritmos. Veremos também que eles surgiram não para substituir, mas sim para auxiliar nos resultados que já se haviam obtidos da trigonometria. Falaremos sobre a definição de Logaritmos dada por John Napier, mostrando que este matemático não foi o único a trabalhar com esta ferramenta, porém ao que tudo indica, foi um dos primeiros a publicar e descrevê-la em meados no século XVII. Destinaremos este capítulo a professores de matemática, a alunos do Ensino Médio e de maneira geral a quem esteja interessado em saber o que impulsionou os matemáticos da época a criarem os Logaritmos.

No **Capítulo 3** apresentaremos as definições de Funções Exponenciais e Logarítmicas, onde o a Função Logarítmica será abordada sob três pontos de vista: como a inversa da Função Exponencial; como a única função que transforma produtos em somas e como área abaixo do gráfico de uma hipérbole. Deixaremos este capítulo como leitura para os professores de matemática do Ensino Médio que desejem se aprofundar no estudo teórico acerca do tema de nossa dissertação.

No **Capítulo 4** mostraremos que as funções exponenciais modelam diversos tipos de problema de variáveis continuas ou discretas. Comentaremos também sobre os *cuidados* que devem ser tomados em analisar o modelo discreto, pois definiremos esta expressão em domínio inteiro. Portanto, é necessário fazer a extensão para um domínio real. Sendo assim, utilizaremos três ferramentas para realizar tal extensão. Mostraremos também que independentemente do método utilizado, contínuo ou discreto, iremos obter os mesmos resultados ao desenvolver determinados problemas, a diferença é a base da potência a ser utilizada. Destinaremos este capítulo para professores do Ensino Médio e alunos de ensino superior que queiram estudar sobre a utilização da base da potência na modelagem de problemas que envolvem crescimentos ou decrescimentos proporcionais.

No **Capítulo 5** são apresentadas propostas de atividades a serem realizadas com os alunos afim de que se promova a interdisciplinaridade entre os conteúdos matemáticos e outros saberes naturais e científicos. As atividades tratarão sobre: Crescimento ou Decrescimento Populacional, Concentração em Misturas, Potencial Hidrogeniônico (pH), Método do Carbono 14, Escala Richter, Resfriamento de um Corpo, Intensidade Sonora, Pressão Atmosférica e Frequência das notas Musicais. Este capítulo resume parte do objetivo de nosso trabalho, que é de propor aplicações que o professor de matemática do Ensino Médio possa utilizar com os alunos em sala de aula. Podemos ressaltar que existem duas temáticas implícitas associadas ao desenvolvimento das atividades citadas anteriormente, uma refere-se a problematizações que envolvem Crescimentos ou Decrescimentos Proporcionais e outra a Mudança de Escalas.

As considerações finais são apresentadas no **Capítulo 6**.

Além desses capítulos, esse Trabalho possui dois apêndices que serão necessários para a melhor compreensão de alguns resultados apresentados ao longo desta dissertação.

De maneira geral este trabalho é destinado a professores e alunos do Ensino Médio e a qualquer pessoa interessada em estudar Funções Exponenciais e Logarítmicas.

2 UMA IDEIA DE LONGA DATA: A DE TRANSFORMAR PRODUTOS EM SOMA

Neste capítulo vamos apresentar algumas discussões históricas sobre logaritmos baseado nos trabalhos de Roque e Carvalho (2012) e Lima (2009), com a finalidade de refletir a respeito das motivações iniciais do uso e estudo de logaritmos na História da Matemática. Salientamos que nossas maiores contribuições neste capítulo se devem à organização e apresentação das ideias com alguns exemplos nossos, assim como na direção de uma discussão articulada entre os trabalhos citados anteriormente.

Faremos uma abordagem histórica sobre os logaritmos mostrando a importância do advento desta ferramenta para época e como eram utilizados inicialmente pelos matemáticos na resolução de problemas, cujo o objetivo era fazer cálculos para determinar a posição ou o movimento dos astros, tais cálculos são chamados astronômicos e envolvem produtos e divisões de números muito grandes, por isso era comum os matemáticos da época utilizarem *técnicas* algébricas e geométricas para transformar o produto de dois números em soma, simplificando as contas a serem realizadas. Então, utilizaremos esta abordagem como motivação para compreendermos como os logaritmos foram ferramentas essenciais para dissolução de vários problemas na astronomia.

Acreditamos que a compreensão histórica de logaritmos pode trazer a clareza em relação as demandas matemáticas de determinada época, justificando este conteúdo como uma ideia matemática relevante a ser estudada em determinado período. Entendemos que abordar historicamente os logaritmos pode contribuir para uma abordagem inicial de logaritmos em sala de aula, que nos faz apresentar, no Capítulo 5 algumas atividades que se assemelhem a como este conteúdo era utilizado para efeitos de facilitação de cálculos. (ROQUE; CARVALHO, 2012).

A seguir mostraremos como alguns matemáticos já utilizavam a trigonometria para transformar produtos em somas.

2.1 Transformações de produtos em soma utilizando a trigonometria

Nesta seção vamos mostrar como os matemáticos, utilizavam a trigonometria para resolução de problemas gerados a partir da astronomia antes da criação dos logaritmos. Para isso, faremos um estudo dialogado entre aspectos que nós consideramos importantes em consonância com os trabalhos de Roque e Carvalho (2012) e Lima (2009).

A trigonometria recebeu contribuições importantes de matemáticos de várias culturas: grega, hindu, mulçumana, entre outras. Ela surgiu devido às necessidades advindas da astronomia, a fim de prever as efemérides celestes (ROQUE; CARVALHO, 2012), medir distâncias a serem utilizadas na navegação e na geografia. Como um dos modelos astronômicos antigos se baseava na cúpula celeste (ou esfera celeste) (SAGAN, 1980), afim de se poder calcular a posição de astros no espaço sideral usava-se trigonometria esférica, que lida com triângulos esféricos. Para tanto eram necessários conhecimentos da trigonometria plana. Especificamente, muitos problemas se reduziam a medir o comprimento ou um ângulo de um dado triângulo. Era comum na época se utilizar *tábuas*, como auxílio para resolver contas, otimizando o tempo em solucionar problemas, e elas eram de suma importância; podemos comparar o seu método processual com o que as calculadoras e computadores fazem hoje em dia. Mas, por que ficar fazendo milhares de cálculos e os deixando arquivados nestas tábuas?

A resposta é simples. A resolução de um determinado problema pode recair na solução de outro cujo resultado já fora arquivado anteriormente (colocado na tábua). Uma vez feita uma operação não há necessidade de refazê-la. Portanto, quando existe uma tábua, se torna mais prático resolver um problema com os valores já encontrados e arquivados. Tem-se a ideia que as tábuas trigonométricas eram conhecidas desde o tempo de Ptolomeu, (ROQUE; CARVALHO, 2012).

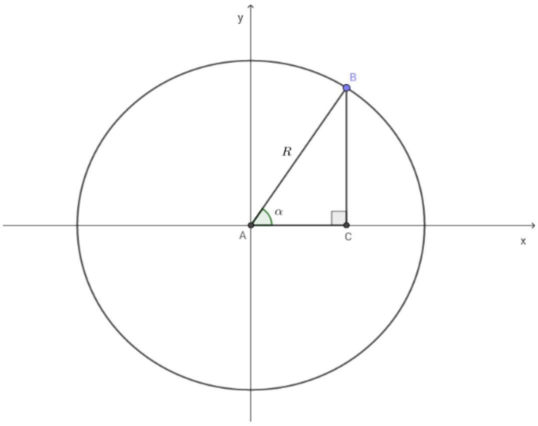
Na época existiam pessoas responsáveis por fazer diversos cálculos e anexá-los nas tábuas. Essa *profissão* era valorizada e podemos imaginar alguns motivos pelos quais era dado tanta importância para estes *profissionais*. Um deles está relacionado com o cuidado que se deveria tomar para fazer estes cálculos, as contas teriam que ter uma precisão acurada, um erro poderia causar vários inconvenientes, principalmente quando estes cálculos estavam relacionados à resolução de problemas astronômicos ou até mesmo para determinar a posição de um barco, ou o tempo de deslocamento para ir de um lugar para o outro.

Era comum se utilizar números de ordem de grandeza muito grandes para se evitar o uso de números decimais porém, cada matemático utilizava uma *base* que era mais conveniente a ser utilizado dentro de cada contexto. Por exemplo, a escolha do raio no ciclo trigonométrico era arbitrária, pois a finalidade de cada um dos matemáticos não era necessariamente a mesma. Por exemplo, Arquimedes e Ptolomeu, que efetuavam cálculos com frações, utilizavam as frações sexagesimais babilônicas, devido à facilidade que elas introduziam em seus cálculos, (ROQUE; CARVALHO, 2012), daí o raio adotado por estes matemáticos era o de comprimento 60. Já Napier, utiliza um ciclo trigonométrico de raio igual a 10^7, pois o sistema de numeração utilizado era o de base 10. Embora as escolhas dos raios sejam distintas, a relação fundamental entre o seno e o cosseno de um mesmo ângulo é sempre válida, independente da escolha do raio. Veremos a seguir o motivo de tal afirmação.

Proposição 2.1. O quadrado do seno de um ângulo somado ao quadrado do cosseno deste mesmo ângulo é igual a 1.

Demonstração. Considere o círculo abaixo de raio $R > 0$ e centro na origem do sistema cartesiano.

Figura 1 - Ciclo Trigonométrico



Fonte: Autor, 2018.

Como o triângulo ΔABC é retângulo em C, os seus lados possuem os seguintes valores.

$$BC = R \operatorname{sen} \alpha$$

$$AC = R \cos \alpha$$

$$AB = R$$

Pelo Teorema de Pitágoras temos que:

$$(AB)^2 = (BC)^2 + (AC)^2 \Leftrightarrow R^2 = R^2 \operatorname{sen}^2 \alpha + R^2 \cos^2 \alpha$$

Dividindo ambos membros da última igualdade por R^2 obtemos

$$\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1,$$

o que queríamos demonstrar. ■

Observem que nesta demonstração não especificamos qual é o tamanho do raio a ser utilizado. Outro fato que podemos destacar é com relação a construção da tábua trigonométrica. Sabendo que $\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$. Então, temos que:

$$\cos \alpha = \pm\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 \alpha}$$

Agora basta saber em qual quadrante se encontra o ângulo α para determinarmos o sinal. Portanto, se soubermos o valor do seno do ângulo na tábua, determinamos o valor do cosseno deste ângulo também. Daí, tendo as duas informações podemos obter as demais razões trigonométricas (tangente, cotangente, etc.) e completar esta tábua.

Agora abordaremos o processo de transformar produtos em somas, utilizando a trigonometria. Visto que este argumento foi essencial para o surgimento dos logaritmos, daremos ênfase na sua questão processual.

Proposição 2.2. Sejam x e y dois ângulos quaisquer. Então, é válida a seguinte relação:

$$\cos x \cdot \cos y = \frac{1}{2}\cos(x+y) + \frac{1}{2}\cos(x-y)$$

Demonstração. Podemos desenvolver cosseno da soma e da diferença da seguinte maneira,

$$\cos(x+y) = \cos x \cdot \cos y - \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen} y \ (1)$$

$$\cos(x-y) = \cos x \cdot \cos y + \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen} y \ (2)$$

Somando as equações (1) e (2) temos que:

$$\cos(x+y) + \cos(x-y) = 2\cos x \cdot \cos y \Leftrightarrow \cos x \cdot \cos y = \frac{1}{2}\cos(x+y) + \frac{1}{2}\cos(x-y)$$

Assim, concluímos a demonstração. ■

Para efetuar a multiplicação de dois números X e Y, vamos considera-los compreendidos 0 e 1. No caso geral, basta considerar a escrita em notação científica. Por meio da tábua trigonométrica (que existe desde o tempo de Ptlomeu) (LIMA, 2009), determina-se números x e y tais que $\cos x = X$ e $\cos y = Y$. Assim, $X.Y = \cos x . \cos y$. Calcula-se a soma $x + y$ e a diferença $x - y$ (que é mais fácil do que efetuar multiplicações ou divisões). Novamente a tábua fornece $\cos(x+y)$ e $\cos(x-y)$. Pela proposição 2.2 o número $X.Y$ procurado será simplesmente a metade da soma $\cos(x+y) + \cos(x-y)$.

A tabela a seguir representa parte de uma tábua trigonométrica com valores aproximados para o cosseno dos ângulos de 12° a 58° com quatro casas decimais.

Tabela 1- Fragmento de uma tábua trigonométrica

grau	cos	grau	cos	grau	cos	grau	Cos	grau	cos
12	0,9781	22	0,9272	32	0,8480	42	0,7431	51	0,6293
13	0,9744	23	0,9205	33	0,8387	43	0,7314	52	0,6157
14	0,9703	24	0,9135	34	0,8290	44	0,7193	53	0,6018
15	0,9659	25	0,9063	35	0,8192	45	0,7071	54	0,5878
16	0,9613	26	0,8988	36	0,8090	46	0,6947	55	0,5736
17	0,9563	27	0,8910	37	0,7986	47	0,6820	56	0,5592
18	0,9511	28	0,8829	38	0,7880	48	0,6691	57	0,5446
19	0,9455	29	0,8746	39	0,7771	49	0,6561	58	0,5299
20	0,9397	30	0,8660	40	0,7660	50	0,6428		
21	0,9336	31	0,8572	41	0,7547	51	0,6293		

Fonte: Autor, 2019

Exemplo 2.3. Calcular o produto 8173×9182 utilizando o processo descrito acima[1].

$$8173 \times 9182 = 0{,}8173 \times 10^{4} \times 0{,}9182 \times 10^4 = 0{,}8173 \times 0{,}9182 \times 10^8$$

Agora, basta resolver $0{,}8173 \times 0{,}9182$ utilizando o método e multiplicar por 10^8.

Sejam $X = 0{,}8173$ e $Y = 0{,}9182$. Vamos procurar na tábua representada pela tabela 1 quais são os valores de x e y tais que $\cos x = 0{,}8173$ e $\cos y = 0{,}9182$. Os números mais próximos são:

$x = 35°$ e $y = 23°$.

Portanto, $x + y = 35° + 23° = 58°$ e $x - y = 35° - 23° = 12°$. Utilizando novamente a tábua representada pela tabela 1 tem-se, $\cos(x + y) = \cos 58° = 0{,}5299$ e $\cos(x - y) = \cos 12° = 0{,}9781$. Daí, concluímos que transformou o produto numa soma.

$$X.Y = \cos x \cdot \cos y = \frac{1}{2}[\cos(x + y) + \cos(x - y)] = \frac{1}{2}(0{,}5299 + 0{,}9781) = \frac{1{,}508}{2} = 0{,}754$$

Logo,

$$8173 \times 9182 = 0{,}8173 \times 0{,}9182 \times 10^8 = 0{,}754 \times 10^8 = 75400000$$

Repare que $8173 \times 9182 = 75044486$. Portanto, 75400000 é uma aproximação do valor almejado. ■

Observe que utilizar a trigonometria para simplificação de cálculos, não é uma ferramenta que reduz significativamente a quantidade de contas a serem realizadas. Estas dificuldades em transformar produtos em soma impulsionaram os matemáticos da época

[1] Uma das limitações deste método trigonométrico é a dificuldade em aplicá-lo para produtos de mais de três fatores além da inutilidade para cálculo de potências e raízes.

a estudarem uma nova ferramenta que facilitaria de fato os cálculos astronômicos: os logaritmos.

2.2 Os Logaritmos de Napier

Napier (1550-1617), foi um matemático escocês que “inventou” os logaritmos. Em 1614 ele publicou o seu *Mirifici logarithmorum canonis descriptio* (Uma Descrição do Maravilhoso Cânon de Logaritmos) onde havia uma descrição de logaritmos, um conjunto de tabelas, e regras para o uso desta ferramenta nos cálculos. Napier acreditava que por meio dos seus logaritmos ele poderia salvar os astrônomos, pois esta ferramenta otimizaria o tempo necessário de se fazer as contas. Suas tabelas logarítmicas e trigonométricas foram usadas durante quase um século.

Figura 2- Foto de John Napier

Fonte: https://www.electronicsweekly.com/blogs/mannerisms/fable/fable-5-2018-06/

Napier utilizou outro método para facilitar as contas no seu *Rabdologiae* (1617). Ele elaborou uma maneira mais simples de efetuar multiplicação utilizando barras com números marcados nelas. Algumas barras eram feitas de marfim, se assemelhando a imagens de ossos, então deram a elas o nome de ossos de Napier (Napier's bones). Essencialmente este dispositivo era uma tabela de multiplicar com partes móveis. Napier também fez contribuições à trigonometria esférica, achou expressões exponenciais para funções trigonométricas, e foi influente na introdução da notação decimal para frações. (JOHN NAPIER, 2018).

Nesta seção apresentaremos a definição de logaritmo dada por Napier. Temos como objetivo apresentar o surgimento desta fermenta e como ela facilitou o trabalho dos matemáticos da época para resolverem os problemas gerados pela astronomia.

Acreditamos que essa discussão pode servir como auxílio para introduzirmos o estudo de logaritmos em sala de aula.

Napier se baseou em considerações cinemáticas para definir logaritmos. Para tanto considerou um segmento de reta $\overline{AB}$ de comprimento 10^7 e uma semi-reta $\overrightarrow{DE}$. Supôs que um móvel P se desloque em $\overline{AB}$ da esquerda para a direita de modo que sua velocidade em cada ponto seja dado pela medida do segmento $\overline{PB}$. Assim, sua velocidade inicial seria de 10^7. A figura abaixo representa o deslocamento do móvel P no segmento $\overline{AB}$.

Figura 3– Deslocamento do móvel P sob o segmento $\overline{AB}$

Fonte: Autor, 2019.

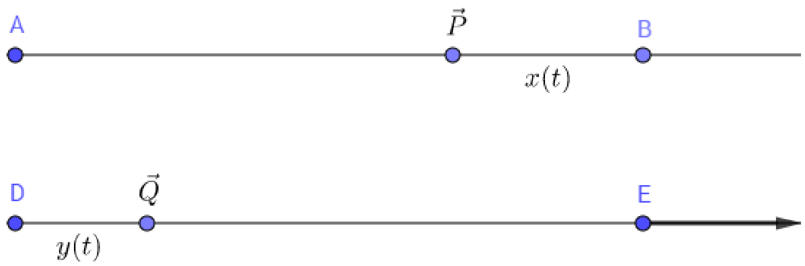
Dessa forma, a velocidade do móvel P vai diminuindo a medida que for se aproximando no ponto B. Em $\overrightarrow{DE}$, considerou outro móvel Q se deslocando com velocidade constante e igual a 10^7. A figura abaixo representa o deslocamento do móvel Q na semi-reta $\overrightarrow{DE}$.

Figura 4- Deslocamento do móvel Q sob a semi-reta $\overrightarrow{DE}$

Fonte: Autor, 2018.

Sendo assim, em todo ponto de $\overrightarrow{DE}$ a velocidade sempre será igual a 10^7. Portanto, as velocidades iniciais de P e Q são iguais. Agora, seja P_1 a posição do móvel P em $\overline{AB}$ e Q_1 a posição do móvel Q em $\overrightarrow{DE}$, considere que os deslocamentos realizados pelos dois móveis tenham sido realizado em mesmo intervalo de tempo. Assim, Napier definiu que o logaritmo do comprimento de $\overline{P_1B}, x(t)$ é igual ao comprimento de $\overline{DQ_1}, y(t)$. Como mostra a figura a seguir:

Figura 5- Deslocamento dos móveis P e Q num mesmo intervalo tempo



Fonte: Autor, 2019.

Para essa definição, Napier não utilizou o conceito de base como entendemos hoje. Utilizando artifícios do cálculo podemos verificar que a base implícita na sua definição é $1/e$. De fato, sejam $s(t)$ e $v(t)$ a posição e a velocidade de P no instante t. Por construção, temos que $s(t) = 10^7 - x(t)$, e $v(t) = x(t)$. Mas, $v(t) = \frac{d(s(t))}{dt}$. Logo, $-\frac{dx(t)}{dt} = x$. Portanto, $-\frac{dx(t)}{x} = dt$. Integrando, temos $-\ln x(t) = t + c$, onde $c \in \mathbb{R}$. Como $x(0) = 10^7$, então $c = -\ln 10^7$. Portanto, $-\ln x(t) = t - \ln 10^7$. Seja $y(t)$ a posição de Q no instante t, dessa forma, $y(t) = 10^7 t \Leftrightarrow t = \frac{y(t)}{10^7}$. Logo, $-\ln x(t) = \frac{y(t)}{10^7}$ $-\ln 10^7$. Organizando os termos desta equação temos que,

$$\frac{y(t)}{10^7} = \ln \frac{10^7}{x(t)} \Leftrightarrow \frac{y(t)}{10^7} = \log_{\frac{1}{e}} \frac{x(t)}{10^7}$$

Se as distâncias de $\overline{P_1B}$ e $\overline{DQ_1}$ fossem divididas por 10^7, a definição de Napier levaria a um sistema de logaritmos de base $1/e$. Observa-se que o logaritmo neperiano possui base $1/e$ e não e.

Observação 2.4. Vale a pena ressaltarmos que Napier não foi o único a estudar sobre os logaritmos e nem teve um rompante, como é de costume ouvirmos na história da matemática. Há relatos de que ele estudou cerca de 20 anos antes de apresentar a definição dos logaritmos, e ao que tudo indica também não explicou como construiu a tábua de logaritmos. Aparentemente, as pessoas só tiveram acesso a esta tábua após a sua morte em 1619. (FAGUNDES, 2018, p.7)

2.2.1 Tabela de Logaritmos de Napier

A ideia de Napier era transformar operações complicadas em outras mais simples, como por exemplo multiplicações em adições e divisões em subtrações. Para isto utilizou as propriedades dos expoentes de potências onde $a^x \cdot a^y = a^{(x+y)}$ e $a^x : a^y = a^{x-y}$.

Napier desejava escrever qualquer número positivo como uma potência de algum número fixo, posteriormente chamado de base, para isso decidiu-se pela *base* $0{,}999999 = 1 - 10^{-7}$, dessa forma ele foi encontrando os resultados das potências de $(1 - 10^{-7})^n = 0{,}999999^n$. Com $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ e assim construiu a seguinte tabela.

Tabela 2- Tabela dos logaritmos de Napier

Progressão Geométrica	Aproximação	Progressão Aritmética
$10^7(1 - 10^{-7})^0$	$10.000.000$	0
$10^7(1 - 10^{-7})^1$	$9.999.999$	1
$10^7(1 - 10^{-7})^2$	$9.999.998$	2
$10^7(1 - 10^{-7})^3$	$9.999.997$	3
...	...	...
$10^7(1 - 10^{-7})^{100}$	$9.999.900$	100

Fonte: Autor, 2018.

Para calcular o produto de dois números N e M utilizando a tabela, procura-se n_1 e n_2 tais que:

$$N = 10^7 \cdot q^{n_1}$$

$$M = 10^7 \cdot q^{n_2}$$

Onde, $q = 1 - 10^{-7}$. Faz-se, $n_1 + n_2 = n_3$. Daí, encontra-se $R = 10^7 \cdot q^{n_3}$ pela tabela 2.1. Dessa forma, $N \cdot M = 10^7 \cdot R$. Como exemplo, para calcular o produto $9999999 \cdot 9999998$ temos, $n_1 = 1, n_2 = 2$. Logo, $n_1 + n_2 = 3$. Verificando a tabela 2, concluímos que o produto $R = 9999997$. Assim,

$$9999999 \cdot 9999998 = 9999997 \cdot 10^7$$

Hoje, esta tarefa árdua de completar essa tabela seria feita utilizando um computador ou uma calculadora, mas Napier não possuía estas ferramentas, então o trabalho era feito à mão o que acabou consumindo cerca de 20 anos de trabalho. Tendo completado seus cálculos, Napier consagrou sua criação e decidiu chamar o expoente de cada potência de logaritmo. Etimologicamente, logaritmo vem da composição de duas palavras gregas: logos (ou razão) e arithmos (ou números). Exemplificando, se $10^7(1 - 10^{-7})^3 = 9999997$, temos que o logaritmo de Napier ou neperiano de 9999997 é o expoente 3 e analogamente, o logaritmo neperiano de 9999999 é 1, o logaritmo neperiano de 10 000 000 é 0 e assim por diante.

Da ideia de Napier podemos observar que se $N = 10^7(1 - 10^{-7})^L$, então L é o logaritmo neperiano de N. Sendo assim, temos que:

$$\frac{N}{10^7} = \left[(1 - 10^{-7})^{10^7} \right]^{\frac{L}{10^7}}$$

Como $(1 - 10^{-7})^{10^7}$ fica próximo de $\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e}$, dividindo-se o número e o log por 10^7, teríamos no trabalho de Napier um sistema de logaritmos de base $1/e$, porém, é importante ressaltarmos que Napier não conhecia o conceito de base de um sistema de logaritmos como atualmente, pois sua definição era diferente da que temos nos dias de hoje, a ideia de Napier era geométrica. Além disso, é importante destacarmos que não podemos dizer que Napier descobriu o número e, até porque ele nem sabia da existência de tal número. (LIMA, 2009).

Embora tenhamos dado ênfase ao estudo de logaritmos realizado por Napier, outros matemáticos com igual importância, como Henri Briggs, estudavam sobre esta ferramenta, a diferença entre estes dois matemáticos era a base utilizada. Briggs propôs poucos anos depois, uma tabela de logaritmos decimais dos números inteiros, inclusive aconselhou Napier a utilizar a potência de *base* 10, dessa forma $\log 1 = 0$.

Para a época, o advento do logaritmo foi algo revolucionário e muito importante para facilitar os cálculos astronômicos. Hoje em dia existem poderosos computadores que efetuam contas com números extremamente grandes dispensando o uso de qualquer tábua de logaritmos. No entanto com a evolução do conceito de Logaritmo percebeu-se que este possui uma grande variedade de aplicações, seja em Química, no cálculo do pH, como na escala logarítmica de sons, na modelagem de fenômenos físicos dentre diversos outros exemplos. Portanto, para estudarmos e aprofundarmos tais estudos, é necessário ter o domínio teórico do Tema. Por esta razão, no próximo Capítulo vamos apresentar algumas definições e demonstrações necessárias para o entendimento e resolução das atividades propostas no Capítulo 5.

3 ESTUDO TEÓRICO ACERCA DE FUNÇÕES EXPONENCIAIS E LOGARÍTMICAS

Neste capítulo discutiremos sobre as definições e propriedades fundamentais das funções exponencial e logarítmica. Não há como dissociarmos estas duas ferramentas. Uma vez que determinado fenômeno é modelado por uma função exponencial, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{+}$[2], denotada por $f(x) = a^x$, com $a > 0$ e diferente de 1, e $x \in \mathbb{R}$, podemos nos perguntar, por exemplo, qual seria o valor de x, do domínio de f para que obtenhamos uma imagem $f(x)$ no contra domínio. Portanto, definiremos a função logarítmica como a inversa da função exponencial. Esta definição é uma das mais utilizadas no aprendizado de logaritmos, principalmente no ensino médio.

Buscamos neste capítulo fazer um aprofundamento teórico sólido, pois este será utilizado como base para os capítulos posteriores, principalmente nas atividades que faremos no capítulo 5. Além da definição como inversa da função exponencial, caracterizaremos a função logarítmica, demonstrando que dentre as funções monótonas e injetivas as logarítmicas são as únicas capazes de transformar produtos em somas. Veremos também, a função logarítmica sob uma perspectiva geométrica, onde o número e, aparece naturalmente nos cálculos.

Para definirmos a função exponencial em domínio real, é necessário fazermos um estudo sobre o significado de potência a^x, para todo $x \in \mathbb{R}$. Por isso, antes de apresentarmos as funções exponenciais e logarítmicas, faremos um estudo detalhado sobre potências de expoente real.

3.1 Potências de expoente real

Nesta seção apresentaremos as definições de potências considerando separadamente os expoentes como números naturais, inteiros, racionais e irracionais.

3.1.1 Potência de expoente natural

Segundo Lima, (2013) definimos a potência cujo o expoente é um número natural da seguinte maneira:

---

[2] Define-se os números reais positivos da seguinte maneira: $\mathbb{R}^{+} = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$.

Seja a um número real positivo. Para todo $n \in \mathbb{N}$, a potência a^n, de base a e expoente n, é definida como o produto de n fatores iguais a a. Portanto, $a^1 = a$, e $a^n = a \cdot a \cdot a \dots \cdot a$ (n vezes).

Propriedade 3.1. Dados $m, n \in \mathbb{N}$, temos que $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$.

Demonstração. Sejam $a^m = a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a$ (m vezes) e $a^n = a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a$ (n vezes) Então,

$$a^m \cdot a^n = a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a(m+n) \text{ vezes}$$

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

Observamos acima que $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ é válida para todo $m, n \in \mathbb{N}$. ■

Propriedade 3.2. Dados m, n números naturais tais que $m < n$. Então para todo número real a maior do que 1 temos que, $a^m < a^n$ e para todo número real a entre zero e 1 temos que, $a^m > a^n$.

Demonstração. Suponha que $a > 1$ e k é um número natural tal que $n = m + k$. Portanto, pela propriedade 3.1 temos que, $a^n = a^{m+k} = a^m \cdot a^k > a^m$, pois , $a^k > 1$. Assim, concluímos que $a^m < a^n$.

O caso em que $0 < a < 1$ é análogo. Para este, teremos que se $m < n$ então, $a^m > a^n$. Com isso finalizamos a demonstração. ■

3.1.2 Potência de expoente inteiro

Procuraremos agora atribuir um significado à potência a^n, quando $n \in \mathbb{Z}$. Primeiramente, a igualdade $a^0 \cdot a^1 = a^{0+1}$, deve ser válida. Logo, $a^0 = 1$.

Dado n um número natural e a um número real positivo, expressamos a potência de base a elevado a menos n como o inverso da potencia de base a elevado a n, ou seja:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Assim, $a^n, n \in \mathbb{Z}$ está bem definida.

Propriedade 3.3. Dados $m, n \in \mathbb{Z}$, temos que $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$.

Demonstração. Para $m, n \in \mathbb{N}$. Já está demonstrado. Se $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{Z} - \mathbb{N}$ e $p \in \mathbb{N}$. Tal que $n = -p$. Então:

$$a^m \cdot a^n = a^m \cdot a^{-p} = a^m \cdot \frac{1}{a^p} = \underset{m \text{ vezes}}{a \cdot a \cdot \dots \cdot a} \cdot \frac{1}{\underset{p \text{ vezes}}{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}} \cdot (3)$$

Devemos analisar os dois casos a seguir:

Se $m > p$, então existe um $k \in \mathbb{N}$, tal que $m = p + k$. Daí, cancelando os termos em comum da equação (3) temos que:

$$a^m \cdot a^n = a^k = a^{m-p} = a^{m+(-p)} = a^{m+n}$$

Se $m < p$, então existe $x \in \mathbb{N}$, tal que $p = m + x$. Daí, cancelando os termos em comum da equação (3) temos que:

$$a^m \cdot a^n = \frac{1}{a^x} = \frac{1}{a^{p-m}} = a^{m-p} = a^{m+n}$$

Além disso, precisamos verificar o caso em que $m, n \in \mathbb{Z} - \mathbb{N}$ com $p, s \in \mathbb{N}$. Seja $m = -p$ e $n = -s$. Portanto,

$$a^m \cdot a^n = a^{-p} \cdot a^{-s} = \frac{1}{a^p} \cdot \frac{1}{a^s} = \frac{1}{a^{p+s}} = a^{-(p+s)} = a^{-p+(-s)} = a^{m+n}$$

Portanto, $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ é válida para todo $m, n \in \mathbb{Z}$. ■

Proposição 3.4. Dados m, n números inteiros tais que $m < n$. Então para todo número real a maior do que 1 temos que, $a^m < a^n$ e para todo número real a entre zero e 1 temos que, $a^m > a^n$.

Demonstração. Suponha $a > 1$ e $m, n \in \mathbb{Z} - \mathbb{N}$ e $p, s \in \mathbb{N}$ tais que, $m = -p$ e $n = -s$. Como $m < n$ então $-p < -s$, portanto, $p > s$. Portanto, $a^p > a^s$ pela propriedade:

$$\frac{1}{a^p} < \frac{1}{a^s} \Leftrightarrow a^m < a^n$$

Além disso, precisamos verificar o caso em que $m \in \mathbb{Z} - \mathbb{N}$ e $p, n \in \mathbb{N}$. Tal que $m = -p$. Então,

$$a^m = a^{-p} = \frac{1}{a^p} < 1 < a^n$$

O caso em que $0 < a < 1$ é análogo. Para este, teremos que se $m < n$ então, $a^m > a^n$. E isto finaliza a demonstração ■.

3.1.3 Potência de expoente racional

Prosseguindo, qual o sentido que podemos dar à potência a^r quando $r = m/n$ é um número racional (onde $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}$).

Seja $r \in \mathbb{Q}$, tal que $r = m/n, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$ e a um número real positivo. Definimos:

$$a^r = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

Logo, a^r é o número real positivo cuja n-ésima potência é igual a^m. Mostraremos que a potência a elevado r (a^r) está bem definida para $r \in \mathbb{Q}$.

Proposição 3.5 Sejam $r, s \in \mathbb{Q}$ tais que $r = s$, onde $r = p/q$, com $p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{N}$ e $s = m/n$, com $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}$. Então, $\sqrt[q]{a^p} = \sqrt[n]{a^m}$.

Demonstração. Sejam $x = \sqrt[q]{a^p}$ e $y = \sqrt[n]{a^m}$. Temos que $x^q = a^p$ e $y^n = a^m$. Assim, $x^{qm} = a^{pm}$ como $r = s$ temos $pn = qm$, então:

$$x^{pn} = a^{pm} = (a^m)^p = (y^n)^p = y^{np}$$

Portanto, $x^{pn} = y^{np}$, como x, y são positivos temos que $x = y$, ou seja, $\sqrt[q]{a^p} = \sqrt[n]{a^m}$. Assim, a^r está bem definido para $r \in \mathbb{Q}$. ■

Propriedade 3.6. Dados $r, s \in \mathbb{Q}$, temos que $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$.

Demonstração. Sejam $r = m/\, n$ com $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}$ e $s = p/q$ com $p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{N}$. Pela definição de potência de expoente racional temos que, $a^r = a^{\frac{m}{n}}$ e $a^s = a^{\frac{p}{q}}$.

Logo,

$$\begin{array}{ccccccc}
a^r \cdot a^s & = & a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{p}{q}} & = & \sqrt[n]{a^m} \cdot \sqrt[q]{a^p} & = & \sqrt[nq]{a^{mq}} \cdot \sqrt[nq]{a^{np}} \\
a^r \cdot a^s & = & \sqrt[nq]{a^{mq} \cdot a^{np}} & = & \sqrt[nq]{a^{mq+np}} & = & a^{\frac{mq+np}{nq}} \\
a^r \cdot a^s & = & a^{\frac{mq}{nq}+\frac{np}{nq}} & = & a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}} & &
\end{array}$$

Portanto, $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$, é válido para todo $r, s \in \mathbb{Q}$ ■.

Propriedade 3.7. Dados r, s números racionais tais que $r < s$. Então para todo número real a maior do que 1 temos que, $a^r < a^s$ e para todo número real a entre zero e 1 temos que, $a^r > a^s$.

Demonstração. Suponha $a > 1$, $r = m/\, n$, $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$ e $s = p/q$, $p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{N}$. Como $r < s$ temos, $m/n < p/q$, então $mq < np$. Pela propriedade 3.4 temos que

$$a^{mq} < a^{np} \Leftrightarrow a^{nrq} < a^{nqs} \Leftrightarrow \sqrt[nq]{a^{nrq}} < \sqrt[nq]{a^{nqs}} \Leftrightarrow a^r < a^s$$

O caso em que $0 < a < 1$ é análogo. Para este, teremos que se $r < s$ então, $a^r > a^s$. Isto finaliza a demonstração ■.

3.1.4 Potência de expoente irracional

Buscaremos nesta parte do trabalho compreender o que significa a^x quando x é um número irracional e $a > 0$ real, ou seja a potência de expoente irracional. Portanto, a definiremos da seguinte maneira:

Seja a um número real positivo, e x um número irracional dizemos que $a^x = \lim a^{x_n}$, onde $x = \lim x_n$, $x_n \in \mathbb{Q}$.

A demonstração que a^x com x irracional está bem definida e portanto não depende da sequência (x_n), encontra-se no Anexo A deste presente trabalho. Optamos por assim fazer pois tal demonstração é bastante extensa.

Propriedade 3.8. Dados $x, y \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, temos que $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$

Demonstração. Sejam (x_n) e (y_n) sequências em $\mathbb{Q}$ tais que $x = \lim x_n$ e $y = \lim y_n$. Portanto, $\lim (x_n + y_n) = x + y$. Assim,

$$a^{x+y} = \lim a^{x_n + y_n} = \lim a^{x_n} \cdot a^{y_n} = a^x \cdot a^y$$

E assim encerramos a demonstração ■.

Propriedade 3.9. Dados x, y números irracionais tais que $x < y$. Então, para todo número real a maior do que 1 temos que $a^x < a^y$ e para todo número real a entre zero e 1 temos que $a^x > a^y$.

Demonstração. Para demonstrarmos esta propriedade precisaremos do seguinte Lema, cuja demonstração encontra-se em Lima (2013).

Lema 3.10 Fixado o número real positivo $a \neq 1$ em todo intervalo de $\mathbb{R}^+$ existe alguma potência a^r com $r \in \mathbb{Q}$.

Seja (x_n), $x_n \in \mathbb{Q}$ uma sequência monótona decrescente, então $x_n \geq x, \lim x_n = x$, $x_n < (x+y)/2$ $n \in \mathbb{N}$. Agora, seja (y_n), $y_n \in \mathbb{Q}$ uma sequência monótona crescente, $y_n < y, y_n > (x+y)/2$, tal que $\lim y_n = y$. Supondo $a > 1$, temos $a^{x_1} < a^{y_1}$, então pelo lema 3.9 existe $t \in \mathbb{Q}$ tal que $a^{x_1} < a^t < a^{y_1}$. Conclui-se que,

$$a^{x_n} < a^{x_1} < a^t < a^{y_1}$$

Logo, $a^{x_n} < a^t < a^{y_n}, n \in \mathbb{N}$. Tomando o limite, tem-se $a^x \leq a^t \leq a^y$. Como, $x, y \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, e $t \in \mathbb{Q}$ segue $a^x < a^t < a^y$. Portanto, $a^x < a^y$. O caso em que $0 < a < 1$ é análogo. Para este, teremos que se $x < y$ então, $a^x > a^y$. E isto encerra a demonstração ■.

3.2 A Função exponencial

Definiremos a *função exponencial de base* a, $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, como $f(x) = a^x$, com $a > 0$ e diferente de 1, para todo $x \in \mathbb{R}$. Pelos resultados obtidos na seção 3.1, a função exponencial satisfaz às seguintes propriedades:

$i)$ $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$;

$ii)$ $f(1) = a^1 = a$;

$iii)$ $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$ quando $a > 1$ e

$x < y \Rightarrow f(y) < f(x)$ quando $0 < a < 1$

Proposição 3.11. A função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, denotada por $f(x) = a^x$ não pode assumir o valor 0, a menos que seja identicamente nula.

Demonstração. De fato, se existir algum $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $f(x_0) = 0$, então para todo $x \in \mathbb{R}$ teremos:

$$f(x) = f\big(x_0 + (x - x_0)\big) = f(x_0) \cdot f(x - x_0) = 0 \cdot f(x - x_0) = 0$$

Logo, f é identicamente nula. ■

Proposição 3.12. A função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, denotada por $f(x) = a^x$ é positiva para todo $x \in \mathbb{R}$.

Demonstração. Podemos escrever x como soma de duas parcelas iguais, $x = \frac{x}{2} + \frac{x}{2}$. Daí,

$$f(x) = f\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = f\left(\frac{x}{2}\right) \cdot f\left(\frac{x}{2}\right) = \left[f\left(\frac{x}{2}\right)\right]^2 > 0$$

Portanto, f é positiva para todo $x \in \mathbb{R}$. ■

Proposição 3.13. A função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, denotada por $f(x) = a^x$ é bijetiva.

Demonstração. Suponhamos $a > 1$. Precisamos demonstrar que f é injetiva e sobrejetiva. Primeiramente, demonstraremos a injetividade.

Seja $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ tal que $f(x_1) = f(x_2)$. Portanto, $a^{x_1} = a^{x_2}$. Como f é estritamente crescente ou decrescente, temos que $x_1 = x_2$. Portanto, f é injetiva.

Agora, vamos demonstrar a sobrejetividade; pelo Lema 3.9, existe (a^{r_n}), crescente onde $r_n \in \mathbb{Q}$ e $r_n < y$, tal que $\lim a^{r_n} = y$. Seja $s \in \mathbb{Q}$, tal que $y < a^s$. Sendo a^x crescente, temos $r_1 < r_2 < \cdots < r_n < s$. Assim, (r_n) é convergente. Seja $r = \lim r_n$, então $a^r = \lim a^{r_n} = y$. Logo, existe $r \in \mathbb{R}$, tal que $a^r = b$. Logo, f é sobrejetiva. O caso em que f é decrescente, ou seja, $0 < a < 1$, é feito de forma análoga. Por fim, concluímos que f é bijetiva. ■

Teorema 3.14. Caracterização da função exponencial.

Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ uma função monótona injetiva. As seguintes afirmações são equivalentes:

$(1) f(nx) = f(x)^n$, para todo $n \in \mathbb{Z}$ e todo $x \in \mathbb{R}$;

$(2) f(x) = a^x$, para todo $x \in \mathbb{R}$, onde $a = f(1)$;

$(3) f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$, para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$.

Demonstração. Devemos demonstrar que $1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 1$

$1 \Rightarrow 2$:

Repare que a hipótese (1) acarreta que, para todo número racional $r = m/n$, com $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}$, tem-se $f(rx)^n = f(nrx) = f(mx) = f(x)^m$, logo:

$$f(rx) = f(x)^{\frac{m}{n}} = f(x)^r$$

Na igualdade anterior fazendo, $f(1) = a$, e $x = 1$, teremos $f(r) = f(r \cdot 1) = f(1)^r = a^r$, para todo $r \in \mathbb{Q}$. Note que se $r = 0$, então $f(0) = a^0 = 1$. Para completar a demonstração que $1 \Rightarrow 2$ temos que mostrar que vale para os irracionais. Suponhamos que f seja crescente. Logo, $1 = f(0) < f(1) = a$. Suponhamos por absurdo que exista $x_0 \in \mathbb{R}$, tal que $f(x_0) \neq a^{x_0}$. Digamos por exemplo que $f(x_0) < a^{x_0}$, o caso em que $f(x_0) > a^{x_0}$ é análogo. Pelo Lema 3.9 existe um número racional r, tal que $f(x_0) < a^r < a^{x_0}$, ou seja $f(x_0) < f(r) < a^{x_0}$. Como f é crescente, temos $x_0 < r$. Por outro lado, como $a^r < a^{x_0}$ e $a > 1$, temos $r < x_0$. Absurdo! Portanto, $f(x) = a^x$, para todo $x \in \mathbb{R}$, onde $a = f(1)$.

$2 \Rightarrow 3$

Dado $x, y \in \mathbb{R}$, temos que $f(x+y) = a^{x+y} = a^x \cdot a^y = f(x) \cdot f(y)$. Logo, $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$.

$3 \Rightarrow 1$.

Para $n \in \mathbb{N}$, temos que $f(nx) = f(x + x + x + \cdots + x)$ n vezes. Logo:

$$f(nx) = f(x + x + \cdots + x) = f(x) \cdot f(x) \cdot f(x) \cdot \ldots \cdot f(x) = f(x)^n$$

Seja $n \in \mathbb{N}$ tal que $m = -n$. Então,

$$f(mx) = f(-nx) = f\big(n \cdot (-x)\big) = f(-x)^n.$$

Por 3, $f(0+1) = f(0) \cdot f(1)$. Logo, $f(0) = 1$.

Desse modo, $1 = f(0) = f(-x + x) = f(-x) \cdot f(x)$. Assim,

$$f(-x) = \frac{1}{f(x)}$$

Logo,

$$f(mx) = \frac{1}{f(x)^n} = f(x)^{-n} = f(x)^m$$

Portanto, $f(nx) = f(x)^n$, para todo $n \in \mathbb{Z}$ e todo $x \in \mathbb{R}$. Assim, concluímos a demonstração que $1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 1$. ■

Segundo Lima (2013), dizemos que uma função $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é do *tipo exponencial* quando se tem $g(x) = ba^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$, onde a e b são constantes reais positivas. Se $a > 1$, então g é crescente e se $0 < a < 1$, g é decrescente.

Observe que se a função $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é do tipo exponencial então, para quaisquer $x, h \in \mathbb{R}$ os quocientes $\frac{g(x+h)-g(x)}{g(x)}$ e $\frac{g(x+h)}{g(x)}$ só dependem de h, mas não de x. De fato, pois:

$$\frac{g(x+h)-g(x)}{g(x)}=\frac{ba^{x+h}-ba^{x}}{ba^{x}}=\frac{ba^{x}\,(a^{h}-1)}{ba^{x}}=a^{h}-1$$

e,

$$\frac{g(x+h)}{g(x)}=\frac{a^{x+h}}{a^{x}}=\frac{a^{x}a^{h}}{a^{x}}=a^{h}$$

Mostraremos agora que a recíproca é verdadeira.

Teorema 3.15. Primeira Caracterização Das Funções Tipo Exponencial.

Seja $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{+}$ uma função monótona injetiva (isto, é crescente ou decrescente) tal que, para $x, h \in \mathbb{R}$ quaisquer, o acréscimo relativo $[g(x+h)-g(x)]/g(x)$ dependa apenas de h, mas não de x. Então, se $b = g(0)$ e $a = g(1)/\, g(0)$, tem-se $g(x) = ba^{x}$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Demonstração. Seja $\varphi(h) = g(x+h)/g(x)$. Por hipótese a função, $\varphi(h)$ independe de x. Seja agora, $f(x) = g(x)/b$, onde $b = g(0)$, obtemos $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{+}$ uma função monótona injetiva, com $f(x+h)/f(x)$ independente de x e $f(0) = 1$. Fazendo $x = 0$, temos que:

$$\varphi(h) = g(0+h)/g(0) = g(h)/b = f(h)$$

Portanto, temos que $f(h) = f(x+h)/f(x) \Leftrightarrow f(x+h) = f(x) \cdot f(h)$. Então, f é uma função monótona e injetiva que transforma soma em produto. Segue-se do teorema da caracterização da função exponencial que $f(x) = a^{x}$, logo $g(x) = b \cdot f(x) = b \cdot a^{x}$. E assim concluímos a demonstração do teorema. ■

Teorema 3.16. Segunda Caracterização Das Funções Tipo Exponencial.

Para cada b e cada t reais, suponhamos um número $f(b,t) > 0$ com as seguintes propriedades:

1) *$f(b,t)$ é proporcional a b e monótona e injetiva em relação a t;*
2) $f(b, s+t) = f(f(b,s), t)$

Então se $a = f(1,1)$, tem-se $f(b,t) = b \cdot a^{t}$

Demonstração. Seja $\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{+}$, dada por $\varphi(t) = f(1,t)$, é monótona e injetiva. Tal que,

$$\varphi(s+t) = f(1, s+t) = f(f(1,s), t) = f(1,s) \cdot f(1,t) = \varphi(s) \cdot \varphi(t)$$

Ou seja, a função φ transforma soma em produtos em virtude de 1 e 2 pois $f(1,s) = f(1,s) \cdot 1$. Segundo Lima (2013) pelo Teorema da Caracterização das funções exponenciais tem-se $\varphi(t) = a^{t}$, onde $a = \varphi(1) = f(1{,}1)$. Portanto,

$$f(b,t) = f(b \cdot 1, t) = b \cdot f(1,t) = b \cdot \varphi(t) = b \cdot a^{t}$$

E assim, concluímos a demonstração. ■

Este último teorema será utilizado mais à frente no capítulo 5, e portanto veremos com mais clareza a sua utilidade.

3.3 Função Logarítmica

Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, a função exponencial dada por $f(x) = a^x$, onde $a \neq 1$ é um número real positivo. Sabemos que a função exponencial é bijetiva conforme demonstramos nas seção anterior deste capítulo, portanto a função exponencial admite uma inversa $g: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$. A esta função daremos o nome de *função logarítmica*. Denotada da seguinte forma: $g: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, tal que $g(x) = \log_a x$, onde $a \neq 1$ é um número real positivo. Chamamos a imagem de cada elemento $x \in \mathbb{R}^+$ de logaritmo de x na base a ($\log_a x$).

Observemos que $\log_a x = y$ se, e somente se, $g(x) = y$. Por outro lado, $g(x) = y$ se, e somente se, $f(y) = x$, ou seja, $a^y = x$. Com isso mostramos que,

$$\log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x$$

Utilizaremos esta equivalência para demonstrar algumas propriedades do logaritmo.

Propriedade 3.17 Sejam x e y números reais positivos e $a \neq 1$ um número real positivo. Então:

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$$

Em outras palavras, o logaritmo transforma produto em soma.

Demonstração. Sejam $\log_a x = k$ e $\log_a y = z$, com $k, z \in \mathbb{R}$. Logo, $x = a^k$ e $y = a^z$. Portanto temos que:

$xy = a^k a^z = a^{k+z}$. Assim, $\log_a(xy) = k + z$. Substituindo os valores de k e z temos que:

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$$

Com isso encerramos a demonstração. ■

Propriedade 3.18. Sejam x e y números reais positivos e $a \neq 1$ um número real positivo. Então:

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

Em palavras, o logaritmo transforma quocientes em diferenças.

Demonstração. Sejam $\log_a x = k$ e $\log_a y = z$, com $k, z \in \mathbb{R}$. Logo, $x = a^k$ e $y = a^z$. Portanto temos que:

$\frac{x}{y} = \frac{a^k}{a^z} = a^{k-z}$. Assim, $\log_a \frac{x}{y} = k - z$. Substituindo os valores de k e z temos que:

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

Assim finalizamos a demonstração. ■

Propriedade 3.19. Seja x um número real positivo, $a \neq 1$ um número real positivo e $m \in \mathbb{R}$. Então:

$$\log_a x^m = m \cdot \log_a x$$

Em palavras, o logaritmo transforma potências em soma de parcelas iguais.

Demonstração. Seja $\log_a x = k$, então $a^k = x$. Elevando ambos membros desta última igualdade a m tem-se $(a^k)^m = x^m \Leftrightarrow a^{km} = x^m$. (4) Utilizando o logaritmo de base a em ambos membros desta equação (4), vem que $\log_a a^{km} = \log_a x^m$. Portanto, $km = \log_a x^m$. (5) Substituindo o valor de k em (5), temos:

$$\log_a x^m = m \cdot \log_a x$$

E assim concluímos a demonstração. ■

Propriedade 3.20. Sejam a e b números reais positivos e $a, b \neq 1$ e m um número real qualquer. Então:

$$\log_a b = \frac{\log_m b}{\log_m a}$$

Em palavras, podemos escrever o logaritmo de um número em qualquer base.

Seja $y = \log_a b$, então $a^y = b$. (6)

Agora, suponha que exista um número x tal que:

$x = \log_m b$. Da mesma forma, $m^x = b$. (7)

De (6) e (7), temos que:

$$a^y = m^x \Leftrightarrow \log_m a^y = x \Leftrightarrow y \cdot \log_m a = x$$

Substituindo os valores de x e y na última equação acima concluímos que:

$$\log_a b \cdot \log_m a = \log_m b$$

Como $log_m a \neq 0$. Então dividindo ambos membros da equação vemos que:

$$\log_a b = \frac{\log_m b}{\log_m a}$$

Assim concluímos a demonstração. ■

Estas propriedades foram importantes para época, pois elas promoveram o advento dos logaritmos no que se refere a questão operacional em otimizar contas. Hoje em dia as calculadoras e computadores efetuam estas contas com maestria, e com um número grande de casas decimais, tornando obsoleto o uso das tábuas de logaritmo. Atualmente, os logaritmos se fazem necessários, quando falamos sobre aplicação desta ferramenta em diversos saberes tecnológicos, científicos e naturais. No capítulo 5 veremos algumas destas aplicações.

3.4 Caracterização da Função Logarítmica

Demonstraremos a seguir que, entre as funções monótonas injetivas $\mathbb{R}^+$ em $\mathbb{R}$, somente as funções logarítmicas têm a propriedade de transformar produtos em somas.

Teorema 3.21. Caracterização das Funções Logarítmicas.

Seja $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, uma função monótona injetiva (isto é, crescente ou decrescente) tal que $f(xy) = f(x) + f(y)$, para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}^+$. Então, existe $a > 0$ tal que $f(x) = log_a x$, para todo $x \in \mathbb{R}^+$.

Demonstração. Suponhamos f crescente. O outro caso é tratado da mesma maneira. Podemos dizer que $f(1) = f(1.1) = f(1) + f(1)$. Logo, $f(1) = 0$. Suponhamos que exista um número real a positivo tal que $f(a) = 1$. (Depois demonstraremos que isto sempre ocorre, logo não trata-se de uma suposição e sim de um fato verídico). Sendo f crescente, como $f(a) = 1 > 0 = f(1)$, temos $a > 1$. Para todo $m \in \mathbb{N}$ vale:

$f(a^m) = f(a.a.a \ldots a), m$ vezes. Daí, $f(a^m) = f(a) + f(a) + f(a) + \cdots f(a), m$ vezes. Portanto concluímos que, $f(a^m) = mf(a) = m.$ Pois, $f(a) = 1.$ (8)

Seja $m \in \mathbb{N}$. Podemos dizer que:

$$0 = f(1) = f(a^m.a^{-m}) = f(a^m) + f(a^{-m}) = m + f(a^{-m})$$

Logo, $f(a^{-m}) = -m.$ (9)

Seja $r = \frac{m}{n}$, $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}$. Assim,

$f(a^m) = f(a^{rn}) = f((a^r)^n) = f(a^r.a^r.a^r \ldots a^r), n$ vezes. Daí, tem-se que

$f(a^m) = f(a^r) + f(a^r) + f(a^r) + \cdots + f(a^r), n$ vezes. Portanto concluímos que

$m = f(a^m) = nf(a^r);\ f(a^r) = \frac{m}{n} = r.$ (10)

Se $x \in \mathbb{R}$ é irracional então tomemos r e s racionais tais que:

$$r < x < s \Rightarrow a^r < a^x < a^s \Rightarrow f(a^r) < f(a^x) < f(a^s) \Rightarrow r < f(a^x) < s$$

Assim, todo número racional r, menor do que x, é também menor do que $f(a^x)$ e todo número racional s maior do que x é também maior do que $f(a^x)$. Sejam (r_n) e (s_n) sequências de números racionais tais que $r_n < x, n \in \mathbb{N}$, $\lim r_n = x$, $s_n > x, n \in \mathbb{N}$ e $\lim s_n = x$. Desse modo, $r_n < x < s_n$ e como mostramos anteriormente, $r_n < f(a^x) < s_n$. Assim, tomando o limite quando n tende ao infinito em ambos lados temos,

$$x \leq f(a^x) \leq x$$

Logo, $f(a^x) = x. (11)$

Portanto, por $(8), (9), (10), (11)$, temos $f(a^x) = x$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Logo f é a função inversa de $h(x) = a^x$ daí, $f(y) = \log_a y$ para todo $y > 0$.

Consideraremos agora o caso geral, em que se tem uma função crescente $g: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, tal que:

$$g(xy) = g(x) + g(y),$$

Devemos mostrar que existe um número real a positivo sem a hipótese de $g(a) = 1$. Como $g(1) = 0$ e $1 < 2$. Então, $g(2) = b > 0$. Considere $h: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, definida por $h(x) = g(x)/b$, h é crescente, transforma somas em produtos e temos que $h(2) = g(2)/b = 1$. Logo, pela primeira parte da demonstração, tem-se $h(x) = \log_2 x$ para todo $x > 0$. Assim, $g(x) = b \cdot h(x) = b \cdot \log_2 x$. Tomemos, $a = 2^{1/b}$. Dessa forma,

$$g(a) = b \cdot \log_2 a = b \cdot \log_2 2^{1/b} = 1$$

Com isso concluímos a demonstração do teorema.■

3.5 Função Logarítmica Natural

Esta abordagem de logaritmo é umas das mais simples de conceituação, técnica e recorre a um auxílio geométrico no que se refere a área de figuras planas. O uso da geometria inicialmente foi assunto de muita valia na história da matemática, principalmente no que se refere aos conceitos, definições e demonstrações que os Gregos, como por exemplo Euclides, resolviam os problemas da época. Portanto, esta definição de logaritmo torna-se algo mais próximo de como a matemática era vista e aplicada, e por este entre outros motivos que a abordagem geométrica para definir logaritmos é vista de maneira “natural”. Em suma, esta questão da naturalidade está relacionada ao fato do número e (neperiano) aparecer nos cálculos de maneira espontânea.

Segundo Lima (2009) foi primeiramente o padre jesuíta belga Gregory Saint Vincent, em 1647, e depois Isaac Newton, em 1660 que observaram uma relação entre a área de uma faixa de hipérbole e os logaritmos. Embora, eles não tenham reconhecido que essa área estava relacionada de fato com logaritmos, nem tenham identificado o número e, suas observações pioneiras revelam que a concepção geométrica de função logarítmica é muito antiga, com mais de 3 séculos e meio de existência. Além de antiga, entendemos que ela é natural, intuitiva e instrutiva, pois podemos utilizá-la para introduzir o Cálculo Integral.

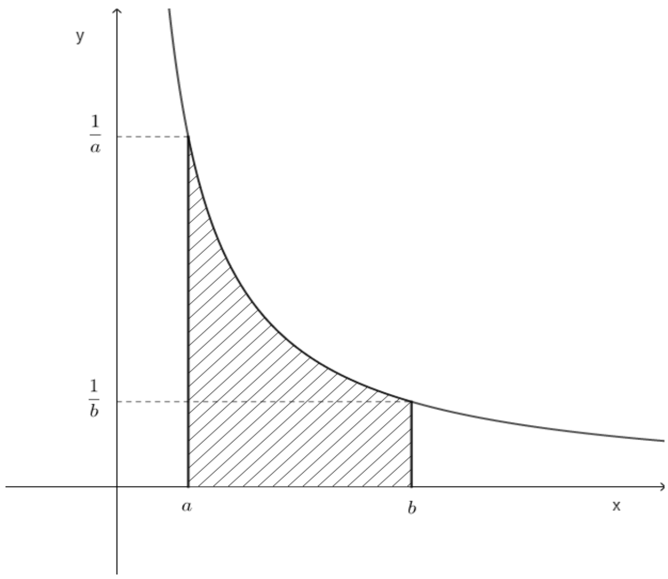
Introduziremos a definição de área de uma faixa de hipérbole, utilizando o sistema de coordenadas cartesianas. Por simplicidade diremos ponto (x, y) em vez de par ordenado cujas coordenadas são x e y.

Seja H o ramo positivo do gráfico da função $y = \frac{1}{x}$. Portanto H é um subconjunto do plano constituído pelos pontos da forma $(x, \frac{1}{x})$ com x real positivo. Ou seja,

$$H = \left\{(x, y); x > 0, y = \frac{1}{x}\right\}$$

Um ponto (x, y) pertence ao conjunto H se, e somente se, $x > 0$ e $xy = 1$. Uma *faixa de hipérbole* (figura 3.1) é obtida quando fixamos dois números reais positivos a, b e tomamos a região do plano limitada pelas retas verticais $x = a$, $x = b$, a hipérbole H e o eixo das abscissas. Indicaremos essa região pelo símbolo H_b^a .

Gráfico 1 - Faixa de hipérbole



Fonte: Autor, 2018.

Vamos definir a seguinte função $g(a, b)$ que indica a área orientada de H_b^a.

$$g(a, b) = \begin{cases} \text{área } H_b^a, & \text{se } a < b. \\ -\text{área } H_b^a, & \text{se } a > b. \\ 0, & \text{se } a = b. \end{cases} \qquad (12)$$

Proposição 3.22. Sejam a, b, c números reais positivos, então:

$$g(a, b) = g(a, c) + g(c, b)$$

Demonstração. Mostraremos para $a < b < c$. Os outros casos são análogos. Suponhamos primeiramente, $a < b < c$. Então, $g(a, b) =$ área H_b^a, $g(a, c) =$ área H_c^a e $g(c, b) = -$área H_c^b. Temos que área $H_b^a +$ área $H_c^b =$ área H_c^a. Então, $g(a, b) - g(c, b) = g(a, c)$. Logo, $g(a, b) = g(a, c) + g(c, b)$. E assim concluímos a demonstração. ■

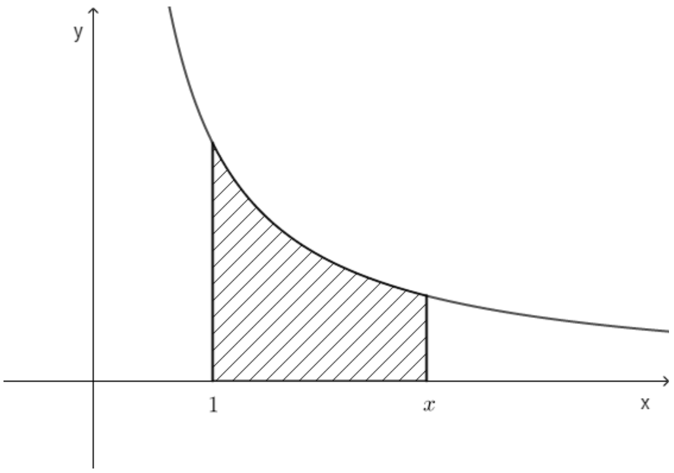
Para a definição de logaritmos como a área abaixo de uma curva, usaremos a mesma ideia da faixa de hipérbole, porém teremos $b = x$ como variável e fixaremos $a = 1$.

Seja x um número real positivo. Então,

$$f(x) = \begin{cases} \acute{a}rea\ H_1^x, & x > 1 \\ -\ \acute{a}rea\ H_1^x, & 0 < x < 1 \\ 0, & x = 1 \end{cases}$$

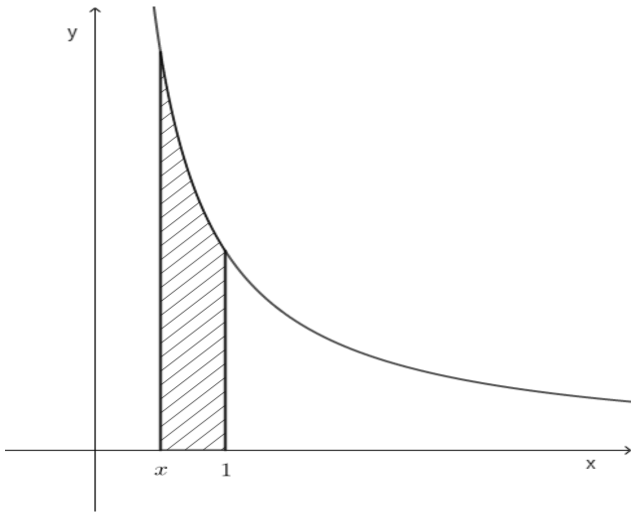
Observemos que $g(1, x) = f(x), x \in \mathbb{R}^+$.

Gráfico 2 – Faixa de hipérbole de 1 a x



Fonte: Autor, 2018.

Gráfico 3 - Faixa de hipérbole de x a 1



Fonte: Autor, 2018.

Teorema 3.23. A função $f : \mathbb{R}^{+} \to \mathbb{R}$, definida anteriormente é logarítmica.

Demonstração. Devemos mostrar que f satisfaz a duas seguintes condições:

(i) f é uma função crescente.

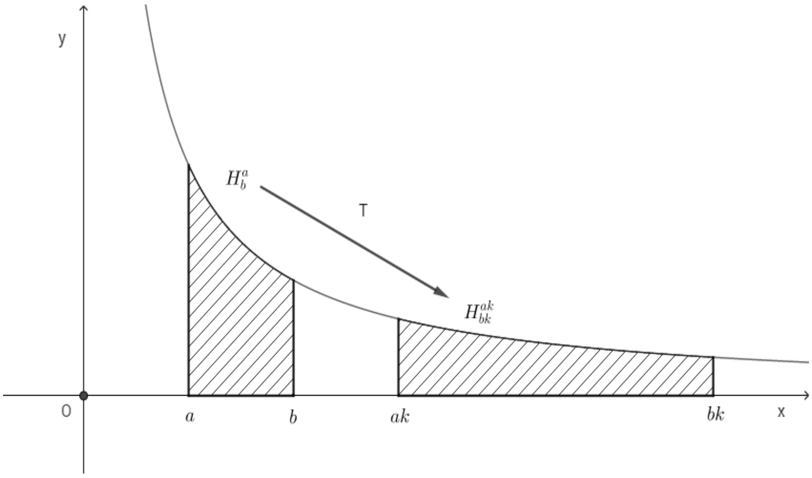
(ii) $f(xy) = f(x) + f(y)$, para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}^{+}$.

Iremos demonstrar primeiramente (ii).

Sejam $x, y \in \mathbb{R}^{+}$, tais que $x < y$, e g a função definida em (12). Assim pela proposição 3.22, $g(1, xy) = g(1, y) + g(y, xy)$. Para a demonstração do item (ii), precisamos mostrar que $g(y, xy) = g(1, x)$. Para isso precisamos analisar uma transformação geométrica que se revela útil para os nossos propósitos.

Segundo Lima (2009) para cada número $k > 0$, definimos a transformação $T = T_k: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, que associa a cada ponto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ o ponto $T(x, y) = (kx, y/k)$ um retângulo X de lados paralelos aos eixos, com base medindo b e altura medindo a, é transformado por T num retângulo $X' = T(X)$, ainda com lados paralelos aos eixos, porém com base kb e altura a/k. Portanto X e $X' = T(X)$ têm áreas iguais. Mais geralmente, T transforma toda figura F do plano numa figura $F' = T(F)$, cujas dimensões em relação a F a são alteradas pelo fator k na horizontal e $1/k$ na vertical. Logo F e F' têm a mesma área. Em particular a transformação $T = T_k: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ leva a faixa H_a^b na faixa H_{ak}^{bk}, cujas áreas são iguais, conforme representa a figura a seguir.

Gráfico 4- Transformação T que leva a faixa H_a^b na faixa H_{ak}^{bk}



Fonte: Autor, 2018.

Portanto, $g(y, xy) = g(1, x)$. Assim, $g(1, xy) = g(1, y) + g(1, x)$, como $g(1, x) = f(x)$, concluímos que $f(xy) = f(x) + f(y)$. Com isso finalizamos a demonstração do item (ii).

Provaremos (i). Seja $x, y \in \mathbb{R}^+$; tal que $x < y$. Logo existe um número real $a > 1$ tal que $y = ax$, então $f(y) = f(ax) = f(a) + f(x)$. Como $a > 1$ temos $f(a) > 0$. Daí, concluímos que $f(x) < f(y)$. Assim concluímos a demonstração do item (i). Portanto, dos itens (i) e (ii) finalizamos a demonstração do teorema. ■

Pelo teorema 3.21 f é uma função logarítmica. Assim, existe um número real positivo que chamaremos de e, tal que $f(e) = 1$ e $f(x) = log_e\, x$. Observemos que $f(e) = 1$ implica que a área $H_e^1 = 1$. Segundo Lima (2009), usando este fato pode-se mostrar que,

$$e = \lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Assim definida, a função tal que $f(x) = \log_e x$ é chamada *função logarítmica natural* cuja notação é $f(x) = \ln x$. Segundo Lima (2009), alguns autores definem o logaritmo cuja base é o número e como logaritmo neperiano. Vimos no capítulo 2 que a base implícita na definição de logaritmos proposta por Napier tinha valores diferentes deste, a saber $1/e$.

4 MODELAGEM MATEMÁTICA ENVOLVENDO CRESCIMENTO OU DECRESCIMENTO EXPONENCIAL

Vimos no capítulo anterior que as funções g do tipo exponenciais são caracterizadas pelo fato de seu acréscimo relativo $\frac{g(x+t)-g(x)}{g(x)}$ ser uma função que depende somente de t. Neste capítulo discutiremos duas maneiras distintas de modelarmos determinados problemas por funções do tipo exponencial $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $g(x) = b \cdot a^x$, onde b é uma constante real e a um número real diferente de zero. A primeira delas faz uso do Cálculo Diferencial e Integral, na resolução de equações diferenciais, nela o número e aparece de maneira natural, uma vez que definimos o Logaritmo com a área abaixo do ramo de uma hipérbole. Assim, a compreensão dessa primeira abordagem é destinada, de certa forma, a alunos de nível superior, portanto faremos uma segunda, que refere-se a um modelo discreto de descrevermos expressões do mesmo tipo, pois este método é o mais utilizado no ensino médio. A diferença entre cada uma delas é a base utilizada, porém isto não interfere no resultado a ser encontrado, que será mostrado ao longo do capítulo a dificuldade em utilizar o modelo discreto está relacionado ao domínio da função, que é inteiro. Porém, faremos abordagens utilizando *Progressão Geométrica*, *Regressão Linear* e a *Caracterização da Funções Tipo Exponenciais* para mostrar que podemos fazer uma extensão do modelo discreto para o contínuo. Ou seja, de domínio inteiro para real por funções contínuas.

4.1 Modelagem a partir de Problemas de Variável Contínua

Seja $x: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função tal que a taxa dy/dx é proporcional ao seu tamanho presente. Em linguagem de equação diferencial, dizemos que:

$$\frac{dy}{dx} = ky \ (13)$$

onde, k é uma constante real.

Resolvendo a equação diferencial (13) temos que:

$$\frac{dy}{dx} = ky \Leftrightarrow \frac{dy}{y} = kdx$$

Usaremos como condição inicial que $x(0) = x_0$. Daí, temos que:

$$\int_{y_0}^{y(x)} \frac{dy}{y} = \int_{y_0}^{y(x)} kdx \Leftrightarrow \ln y(x) - \ln y_0 = kx \Leftrightarrow \ln \frac{y(x)}{y_0} = kx,$$

Ou seja,

$$\frac{y(x)}{y_0} = e^{kx} \Leftrightarrow y(x) = y_0 \cdot e^{kx}$$

Nesse caso, y é do tipo exponencial, $y(x) = b.a^x$, onde $b = y(0)$ e $a = e^k$. Portanto a grandeza $y(x)$ está associada a um crescimento $(a > 1)$ ou decrescimento $(0 < a < 1)$ exponencial. Quando a incógnita em questão for x, basta utilizarmos a inversa da função exponencial de base e, ou seja a função logarítmica natural, como visto no Capítulo 3.

$$\ln y(x) = \ln(y_0 \cdot e^{kx}) \Leftrightarrow \ln y(x) = \ln y_0 + kx \Leftrightarrow x = \frac{\ln y(x) - \ln y_0}{k}$$

Daí, poderemos utilizar a seguinte expressão:

$$x = \frac{1}{k} \cdot \ln \frac{y(x)}{y_0}$$

4.2 Modelagem a partir de Problemas de Variável Inteira

Consideremos uma grandeza h tal que sua taxa de crescimento (ou decrescimento) relativo seja constante igual a i em determinado intervalo λ. Suponhamos $h(0) = h_0$. Pelo Teorema 3.15, h é uma função do tipo exponencial, ou seja $h(t) = b.a^t, b \in \mathbb{R}, a > 0, a \neq 1.$ Nosso objetivo é obter a lei de formação de h, ou seja, determinar os valores das constantes b e $a.$ Para isso, apresentaremos três maneiras distintas de fazê-lo.

4.2.1 Modelagem de h por meio de Progressão Geométrica

Essa abordagem é frequentemente utilizada no Ensino Médio por se tratar de um assunto que faz parte da grade curricular destes alunos. Portanto, utilizando a propriedade da grandeza h e supondo-a crescente, podemos construir a tabela a seguir.

Tabela 3- Grandeza $h(t)$ em função de t

t	Grandeza $h(t)$
0	$h(0) = h_0$
λ	$h(\lambda) = h(0) \cdot i + h_0 = h_0 \cdot (1 + i)$
2λ	$h(2\lambda) = h(\lambda) \cdot i + h(\lambda) = h_0 \cdot (1 + i)^2$
3λ	$h(3\lambda) = h(2\lambda) \cdot i + h(2\lambda) = h_0 \cdot (1 + i)^3$
...	...
...	...
$n\lambda$	$h(n\lambda) = h((n-1)\lambda) \cdot i + h\big((n-1)\lambda\big) = h_0 \cdot (1 + i)^n$

Fonte: Autor, 2018.

A última linha da tabela 3 pode ser deduzida por indução sobre n. De fato, para $n = 1$, $h(\lambda) = h_0 \cdot (1 + i)$, portanto válida. Suponha que $h(n\lambda) = h_0(1 + i)^n$. Mostraremos que $h((n+1)\lambda) = h_0 \cdot (1 + i)^{n+1}$. Temos que:
$h((n+1)\lambda) = h(n\lambda) \cdot i + h(n\lambda) = h(n\lambda) \cdot (i + 1)$. Usando a hipótese de indução, segue que $h((n+1)\lambda) = h_0 \cdot (1 + i)^n . (i + 1) = h_0 \cdot (1 + i)^{n+1}$. Assim, finalizamos a demonstração. ■

Observemos que por construção temos uma lei que define h no conjunto $A = \{0, \lambda, 2\lambda, \ldots, n\lambda, \ldots\}$. Nosso objetivo é estender a definição de h a todos os números reais. Portanto, definindo $h(t) = h_0 \cdot (1 + i)^{t/\lambda}$ para todo $t \in \mathbb{R}$, temos uma extensão natural de h a todo conjunto $\mathbb{R}$. Observemos que havíamos concluído que $h(t) = ba^t$. Assim, temos que nesse caso, $b = h_0$ e $a = (1 + i)^{\frac{1}{\lambda}}$.

4.2.2 Modelagem de h por meio de Regressão Linear

Utilizaremos a seguir o método de Regressão Linear, considerando o caso exponencial, para a obtenção da lei de formação de h, que é objetivo de nosso estudo. No apêndice B deste Trabalho fizemos um estudo sobre Regressão linear e verificamos que é necessário o conhecimento de algumas ferramentas estatísticas para a aplicação deste método na resolução de algumas atividades. Utilizaremos as notações como são apresentadas no Apêndice.

Observando a tabela 4.1 temos alguns dados como:

$h(\lambda) = h_0(1 + \lambda)$, $h(2\lambda) = h_0(1 + \lambda)^2$ e $h(3\lambda) = h_0(1 + \lambda)^3$

Portanto, temos que:

$$\bar{t} = \frac{\lambda + 2\lambda + 3\lambda}{3} = 2\lambda$$

$$\overline{\ln h(n\lambda)} = \frac{\ln h_0(1+i) + \ln h_0(1+i)^2 + \ln h_0(1+i)^3}{3} = \frac{1}{3}\ln h_0^3(1+i)^6$$

$$\overline{t^2} = \frac{\lambda^2 + (2\lambda)^2 + (3\lambda)^2}{3} = \frac{1}{3}14\lambda^2$$

$$\overline{t \cdot \ln h(n\lambda)} = \tfrac{1}{3}\lambda \ln h_0(1+i) + \tfrac{1}{3}2\lambda \ln h_0(1+i)^2 + \tfrac{1}{3}3\lambda \ln h_0(1+i)^3 = \tfrac{1}{3}\ln h_0^{6\lambda}(1+i)^{14\lambda}$$

Portanto,

$$a' = \frac{\overline{t \cdot \ln h(n\lambda)} - \bar{t} \cdot \overline{\ln h(n\lambda)}}{\overline{t^2} - \bar{t}^2} = \frac{\frac{1}{3}\ln h_0^{6\lambda}(1+i)^{14\lambda} - 2\lambda\frac{1}{3}\ln h_0^3(1+i)^6}{\frac{1}{3}14\lambda^2 - (2\lambda)^2 4\lambda} = \frac{1}{\lambda}\ln(1+i)$$

e,

$$b' = \overline{\ln P(t)} - a'\bar{t} = \frac{1}{3}\ln x_0^3(1+i)^6 - \frac{1}{\lambda}\ln(1+i)\,2\lambda = \ln x_0$$

Onde a' e b' são respectivamente, os coeficiente angular e linear da reta que melhor se aproxima dos pontos $\big(\lambda, h(\lambda)\big), (2\lambda, h(2\lambda))$ e $(3\lambda, h(3\lambda))$. Logo por regressão linear a função do tipo exponencial que modela a grandeza h é dada por $h(t) = B \cdot e^{At}$. onde A e B são obtidos por

$$A = \ln(1+i)^{\frac{1}{\lambda}}$$

e,

$$\ln B = \ln h_0 \Leftrightarrow B = h_0$$

Portanto,

$$h(t) = h_0 \cdot e^{\left[\ln(1+i)^{\frac{1}{\lambda}}\right]^t} = h_0 \cdot (1+i)^{t/\lambda}$$

Notemos que o método da regressão linear determina a mesma expressão algébrica da curva tipo exponencial que obtivemos quando utilizamos a construção de tabelas.

4.2.3 Modelagem de h usando o teorema da caracterização das funções tipo exponenciais (Teorema 3.14)

Pela propriedade de h, temos $\frac{h(t+\lambda)-h(t)}{h(t)} = i$ ou seja, $h(t+\lambda) = h(t) \cdot (1+i)$. (14) Por outro lado, pelo Teorema 3.14, $h(t) = b \cdot a^t$, onde

$b = h_0$ e $a = \frac{h(0)}{h(1)}$. Assim, $h(1) = b \cdot a$ e usando (14), $h(1) = \frac{h(1+\lambda)}{(1+i)} = \frac{b.a^{\lambda+1}}{(1+i)} = \frac{b.a.a^{\lambda}}{(1+i)}$.

Daí, $b.a = \frac{b.a.a^{\lambda}}{(1+i)}$. Portanto, $a^{\lambda} = (1+i)$, ou seja, $a = (1+i)^{\frac{1}{\lambda}}$.

Reparem que todos os três métodos nos levam à mesma função do tipo exponencial, a saber, $h(t) = h_0 \cdot (1+i)^{\frac{t}{\lambda}}$. Se quisermos determinar na expressão de $h(t)$ o valor da grandeza t basta aplicarmos, por exemplo, ln em ambos lados da igualdade h $h(t) = h_0 \cdot (1+i)^{\frac{t}{\lambda}}$.

Daí, temos que:

$$\ln h(t) = \ln h_0 (1+i)^{t/\lambda} = \ln h_0 + \ln\,(1+i)^{t/\lambda} \Leftrightarrow \frac{t}{\lambda} \ln\,(1+i) = \ln \frac{h(t)}{x_0}$$

Com isso concluímos que:

$$t = \frac{\lambda}{\ln\,(1+i)} \ln \frac{h(t)}{x_0}$$

Na seção a seguir veremos a relação entre o modelo discreto e o contínuo.

4.3 Relações entre o modelo discreto e o contínuo

Podemos obter a relação entre os parâmetros k e λ obtidos nos modelo contínuo e discreto, respectivamente, pela expressão $k = \ln(1+i)^{\frac{1}{\lambda}}$. Desse modo, para modelar um problema por uma função tipo exponencial adequada, basta escolher entre a obtida a partir do contínuo ou do discreto. Essa escolha não interfere no resultado. Ilustraremos tal fato apresentando a resolução de um problema pelo método contínuo e pelo discreto.

Problema 4.1: (ENEM-2013) – Adaptada. Em um experimento, uma cultura de bactérias tem sua população reduzida pela metade a cada hora, devido à ação de um agente bactericida. Quanto tempo levará para que a quantidade de bactérias seja igual a terça parte da quantidade inicial?

<u>Resolução 1</u>

Seja $h(t)$ a função tipo exponencial que modela o crescimento destas bactérias em relação ao tempo t em horas obtida na seção 4.1. Daí, $h(t) = h_0 . e^{kt}$. Como $h(1) = \frac{1}{2} h_0$. Temos $h_0 . e^{k} = \frac{1}{2} h_0$. Isso implica que $k = \ln \frac{1}{2}$.

Assim,

$$h_0 . \left(\frac{1}{2}\right)^t = \frac{1}{3} h_0$$

Resolvendo a equação anterior, segue que $t = \frac{ln\,3}{ln\,2} \cong 1{,}5$. Portanto, levará aproximadamente 1 hora e meia para que o número de bactérias se reduza a $\frac{1}{3}$ da quantidade inicial.

Resolução 2

Seja $h(t)$ a função tipo exponencial que modela o crescimento destas bactérias em relação ao tempo t em horas, obtida em 4.2. Daí, $h(t) = h_0 \cdot (1 + i)^{\frac{t}{\lambda}}$, onde por definição, $i = 0{,}5, \lambda = 1$. Logo, $h(t) = h_0 \cdot (0{,}5)^t$. Como na resolução anterior, obteremos $t \cong 1{,}5$. Portanto, levará aproximadamente 1 hora e meia para que o número de bactérias se reduza a $1/3$ da quantidade inicial.

No capítulo a seguir faremos diversas aplicações de logaritmo em outros saberes científicos e tecnológicos, onde modelaremos as atividades utilizando em cada uma delas o modelo que for mais conveniente (contínuo ou discreto).

5 APLICAÇÕES: ATIVIDADES QUE PROMOVEM A INTERDISCIPLINARIDADE EM SALA DE AULA

Assim como foi dito no capítulo 2, inicialmente o principal objetivo do uso de Logaritmos era facilitar os cálculos astronômicos, hoje, com o advento dos computadores, a sua grande utilidade está relacionada à suas aplicações.

Não se pode dissociar o estudo das funções Logarítmicas do das Funções Exponenciais, uma vez que se tratam de funções inversas uma da outra. Para o estudo de muitos fenômenos da natureza se faz necessário o conhecimento desses dois conteúdos matemáticos, seja para suas modelagens quanto para a determinação de valores de grandezas associadas ao problema.

Nesse capítulo são apresentadas diversas atividades relacionadas à aplicação das funções Exponenciais e do Logaritmo a situações que envolvem outras disciplinas tais como Biologia, Química, Física, Geografia. Para a elaboração e entendimento de tais atividades foram necessários estudos, pesquisas e diálogos com profissionais dessas diversas áreas de conhecimento. Nesse sentido, acreditamos que as atividades aqui propostas possam contribuir para se trabalhar a interdisciplinaridade em um ambiente escolar.

Em cada seção desse capítulo são tratados temas que se relacionam com outras áreas de conhecimento, além disso as aplicações realizadas são basicamente de duas naturezas: problemas envolvendo crescimento ou decrescimento proporcional e mudança de escala. Assim, temos os seguintes tópicos: Crescimento ou Decrescimento Populacional; Concentração em Misturas; Potencial Hidrogeniônico ou pH; Escala Richter; Datação por Carbono-14; Resfriamento de um Corpo; Pressão Atmosférica; Intensidade Sonora; Música. Para cada seção, é apresentada uma introdução à parte teórica relacionada ao assunto em questão, seguida de uma atividade, que consiste de um texto, onde se tem uma contextualização do tema abordado, e um problema associado à leitura e interpretação do texto.

Para a resolução dos problemas apresentados fizemos uso de uma calculadora científica. A ideia é que os cálculos referentes às operações demandadas fossem efetuados com maior tranquilidade e que não se traduzissem em uma dificuldade a mais, que muitas vezes desvia o foco do objetivo da questão em si. Acreditamos que o uso deste aparelho tem o potencial de auxiliar os alunos a adquirirem um aprendizado significativo.

> Ao contrário do que muitos pensam, as atividades com calculadora no ensino de cálculo, podem contribuir significativamente para o desenvolvimento da capacidade cognitiva dos alunos e suas estratégias em resolver problemas aritméticos. A crença de que essa ferramenta de cálculo inibe o raciocínio e abala o ensino dos algoritmos tem sido refutada, uma vez que estudos realizados por pesquisadores e especialistas em processos de aprendizagem da Matemática indicam que os alunos, quando libertos da parte enfadonha e "braçal" do cálculo, ativam outras habilidades, permanecendo atentos às relações entre os elementos envolvidos na resolução de problemas aritméticos.
>
> Além disso, a calculadora é um instrumento que faz parte da realidade de uma parcela significativa da população, sendo considerada uma forte aliada em situações cotidianas que envolvam números maiores ou operações mais complexas. Calcular as despesas do mês de uma família, a multa do pagamento em atraso de uma conta ou o resultado exato de uma determinada operação que apresente muitas casas decimais são situações que, normalmente, podem ser resolvidas com a calculadora. Assim, a escola também deve se responsabilizar por levar o aluno à familiarização e à exploração desse recurso tecnológico, tão presente na sociedade moderna. (FANIZZI, [2017], p.2).

Os Parâmetros Curriculares Nacionais, também, sinalizam para a importância do uso da calculadora.

> Estudos e experiências evidenciam que a calculadora é um instrumento que pode contribuir para a melhoria do ensino da Matemática. A justificativa para essa visão é o fato de que ela pode ser usada como um instrumento motivador na realização de tarefas exploratórias e de investigação. (BRASIL, 1997, p.30)

Sendo assim o nosso objetivo para esta parte do trabalho não é de fazer contas, mas de modelar problemas.

5.1 Crescimento ou Decrescimento Populacional

Utilizamos o modelo baseado na teoria de Thomas Malthus para determinarmos o tempo de crescimento ou decrescimento de uma população em geral, cuja taxa de crescimento ou decrescimento é proporcional ao seu tamanho. Em linguagens de equação diferencial dizemos que:

$$\frac{dP}{dt} = \mu P \quad (15)$$

Onde, μ é chamada taxa de crescimento específica dessa população e P representa o seu tamanho no tempo t.

Se μ for positivo significa dizer que há mais nascimentos do que mortes, logo a população cresce. Caso contrário, decresce. Porém, se $\mu = 0$, o tamanho da população é constante. Usaremos como condição inicial que $P(0) = P_0$.

A equação (15) foi estudada na seção 4.1 do Capítulo 4. Vimos que a função associada a ela é dada por

$$P(t) = P_0 \cdot e^{\mu t}, t \in \mathbb{R} \quad (16)$$

Atividade 5.1: Crescimento Bacteriano

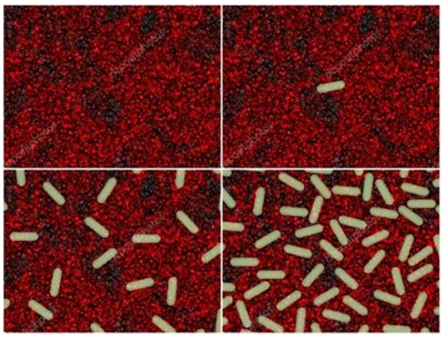
O texto a seguir apresenta informações sobre o conceito de crescimento bacteriano:

> O crescimento bacteriano [está associado] a divisão celular, levando a um aumento exponencial do número de células iniciais de uma população. As bactérias podem crescer individualmente por fissão binária (a célula alonga-se até se dividir em duas) ou no contexto de uma população (as células duplicam o seu tamanho e forma-se um *septum*, que consiste no crescimento da membrana celular e da parede celular até à separação das duas células). Quando uma célula se [separa] dando origem a duas novas células diz-se que ocorreu uma geração, designando-se por tempo de geração a duração de todo esse processo.
>
> Os tempos de geração variam de espécie para espécie, dependendo do meio de crescimento e das condições de cultura. Um crescimento exponencial é definido pela duplicação do número de células durante um intervalo de tempo constante. Neste tipo de crescimento, o número de células aumenta lentamente, passando pouco depois a um aumento muito rápido, resultando num elevado número de células.
>
> **Cinética do crescimento exponencial**
>
> Tendo em conta que existe uma relação entre o número inicial de células e o número de células após um período de tempo de crescimento exponencial (uma vez que uma célula dá origem a duas e essas duas vão dividir-se em 4 células e assim sucessivamente), há uma expressão matemática que resume essa relação:
>
> $$N_t = 2^n \cdot N_i, \qquad (17)$$
>
> em que N_i é o número de células no tempo inicial; N_t é o número de células no tempo final; n é o número de gerações.
>
> O tempo de geração (g) pode ser calculado através da seguinte fórmula: $g = t/n$, em que t representa o tempo de crescimento decorrido. Existem outras expressões relacionadas com o crescimento exponencial que também podem ser determinadas, desde que seja conhecido o tempo de crescimento decorrido e o número de gerações: μ define a taxa específica de crescimento, [dada pela equação (16)], e k [é] a taxa de crescimento (número de gerações por unidade de tempo).
>
> **Ciclo de crescimento bacteriano**
>
> O crescimento de uma cultura bacteriana pode ocorrer num sistema fechado ou num sistema aberto. No primeiro não ocorre renovação dos nutrientes e as substâncias tóxicas acumulam-se no meio, ao contrário do que acontece num sistema aberto. Um ciclo de crescimento num sistema fechado apresenta quatro fases diferentes:
>
> **1. Fase de latência**: geralmente, o crescimento bacteriano não se inicia logo após a cultura num novo meio, notando-se esta fase inicial sem grandes diferenças ao nível do crescimento. Esta fase pode ter várias explicações, como diferenças de condições entre a cultura inicial e a nova; células que sofreram danos anteriormente e necessitam de um tempo para recuperar; inoculação de uma cultura antiga; síntese dos componentes celulares necessários para a divisão celular.
>
> **2. Fase exponencial**: todas as células entram em divisão celular durante um período de tempo que é dependente da quantidade de nutrientes presentes no meio. Nesta fase, as células estão no seu melhor estado de desenvolvimento, sendo este o momento preterível para a realização de ensaios científicos. A taxa de crescimento é afetada pelas condições de cultura e também pelas características genéticas dos microrganismos.
>
> **3. Fase estacionária**: depois da fase de crescimento exponencial, pode ocorrer a depleção de um dos nutrientes essenciais ao crescimento celular ou a acumulação de um produto de metabolismo que impeça o crescimento. Desta

> forma, as bactérias cessam o seu crescimento, entrando numa fase estacionária, durante a qual a taxa de crescimento é nula.
> **4. Fase de declínio ou de morte celular**: caso a cultura bacteriana continue após a fase anterior, as células vão acabar por morrer, podendo inclusive ocorrer lise celular. A morte celular ocorre a uma velocidade muito menor do que o crescimento bacteriano. (SILVA, 2018, não paginado).

Problema 5.1. A partir do monitoramento do crescimento de uma cultura de bactérias, um bolsista de um laboratório de biologia coletou alguns dados. A tabela 4 apresenta os dados coletados por este bolsista durante as 2 horas primeiras horas.

Figura 6- Crescimento de uma cultura de bactérias



Fonte: https://pt.depositphotos.com/5380665/stock-photo-bacterial-growth.html

Tabela 4- Tamanho da população em função do tempo t

Tempo (t) em horas	Quantidade de bactérias $B(t)$
0	30
2	1920

Fonte: Autor, 2019.

A partir desses dados, usando as informações obtidas pelo texto 5.1, o bolsista construiu um modelo matemático para prever o número de bactérias em determinado instante t.

Responda:

a) Qual o número de gerações dessa cultura no instante $t = 2\text{h}$?

b) Qual o tempo de geração g dessa cultura?

c) Sendo $N(t)$ o número de micro-organismo na cultura no instante t, escreva a lei dada pelo modelo matemático obtida pelo bolsista para a determinação de $N(t)$.

d) Quantos micro-organismos haviam na cultura 4 horas após o início das observações?

e) Comparando as expressões (16) e (17), pode-se obter a taxa específica de crescimento da cultura, μ. Determine-a.

Resolução.

a) Utilizando a expressão $N_t = 2^n \cdot N_i$ de acordo com o texto 5.1 e as informações da tabela 4, determinaremos o número n de gerações. Para $n = 0$ temos,

$$30 = 2^0 \cdot N_i \Leftrightarrow N_i = 30$$

Daí,

$$1920 = 2^n \cdot 30 \Leftrightarrow 2^n = 64$$

Utilizando o $\log_2$ em ambos membros da última igualdade anterior,

$$\log_2 2^n = \log_2 64 \Leftrightarrow n = 6$$

Logo, ocorreram 6 gerações.

b) De acordo com texto 5.1 o tempo de geração é igual a razão entre o tempo de crescimento decorrido e o número de gerações. Portanto,

$$g = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

O tempo de geração é de 20 minutos.

c) O número inicial de células é igual a 30. Logo,

$$N_t = 30 \cdot 2^n$$

d) Do item, b) temos que $g = 1/3$; para um período de 4 horas temos que,

$$\frac{1}{3} = \frac{4}{n} \Leftrightarrow n = 12$$

Portanto,

$$N_t = 30 \cdot 2^{12} = 122880$$

Portanto haviam 122880 bactérias.

e) Como $N_t = P(t)$ e $N_i = P_0$. Então,

$$N_i \cdot 2^n = P_0 \cdot e^{\mu t} \Leftrightarrow 2^n = e^{\mu t}$$

Aplicando ln em ambos membros da última igualdade anterior,

$$\ln 2^n = \ln e^{\mu t} \Leftrightarrow \mu t = n \cdot \ln 2 \Leftrightarrow \mu = \frac{n \cdot \ln 2}{t}$$

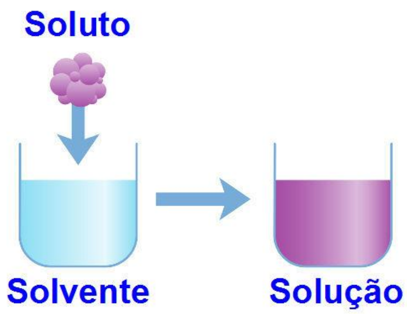
Como $g = t/n$, então $n/t = 1/g$. Portanto,

$$\mu = g \cdot \ln 2$$

5.2 Concentração em Misturas

Uma solução química é uma mistura homogênea formada por dois componentes, o soluto e o solvente. O *soluto* corresponde à substância que será dissolvida. Geralmente, apresenta-se em menor quantidade na solução. O *solvente* é a substância na qual o soluto será dissolvido para formação de um novo produto. Apresenta-se em maior quantidade na solução.

Figura 7- Soluto e solvente



Fonte: https://mundoeducacao.bol.uol.com.br/quimica/calculos-envolvendo-solubilidade.htm

Apresentaremos uma situação, abordada em Lima (2013), em que é possível obter a concentração de um soluto em uma mistura, utilizando para isso um modelo matemático.

Suponha um recipiente que contem inicialmente uma mistura (solvente A líquido e soluto B sólido) cuja concentração do soluto é dado por b. Nessa mistura, é despejado o solvente A à uma taxa q constante. Deseja-se não alterar o volume V da mistura no recipiente, para isso, esta escoa na mesma vazão de entrada do solvente.

Segundo Lima (2013) nessa mistura a concentração do soluto no instante $t, f(t)$, é dado pela função do tipo exponencial

$$f(t) = b \cdot e^{-kt} \qquad (18)$$

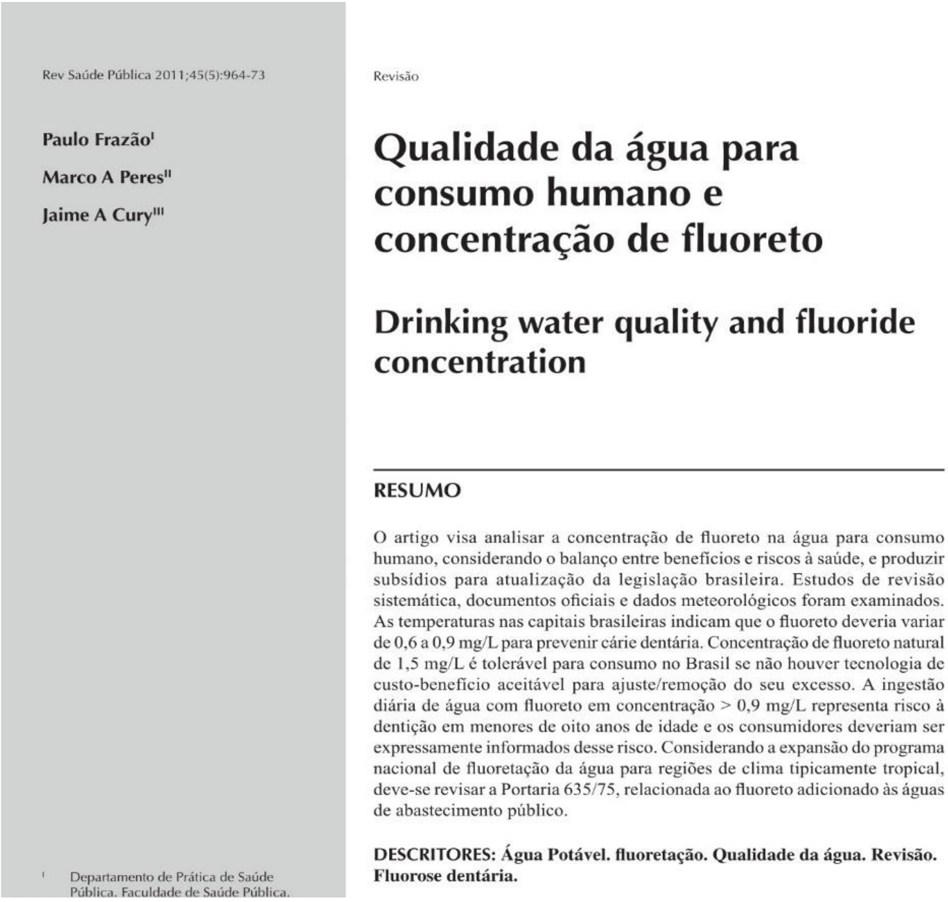
onde k é dita a taxa instantânea de escoamento. Esse fato decorre do Teorema 3.16, pois nessa situação a função $f(t)$ se aplica às hipóteses do referido Teorema. De acordo com Aguiar e Núñez (2017) a taxa k é dada por

$$k = \frac{q}{V} \qquad (19)$$

Atividade 5.2: Concentração de fluoreto

A figura a seguir representa um fragmento de um artigo referente as concentrações de fluoreto na água para prevenção de cárie dentária no Brasil.

Figura 8- Artigo relacionando a qualida0de da água com a concentração de fluoreto.



Rev Saúde Pública 2011;45(5):964-73

Paulo Frazão[I]

Marco A Peres[II]

Jaime A Cury[III]

Revisão

Qualidade da água para consumo humano e concentração de fluoreto

Drinking water quality and fluoride concentration

RESUMO

O artigo visa analisar a concentração de fluoreto na água para consumo humano, considerando o balanço entre benefícios e riscos à saúde, e produzir subsídios para atualização da legislação brasileira. Estudos de revisão sistemática, documentos oficiais e dados meteorológicos foram examinados. As temperaturas nas capitais brasileiras indicam que o fluoreto deveria variar de 0,6 a 0,9 mg/L para prevenir cárie dentária. Concentração de fluoreto natural de 1,5 mg/L é tolerável para consumo no Brasil se não houver tecnologia de custo-benefício aceitável para ajuste/remoção do seu excesso. A ingestão diária de água com fluoreto em concentração > 0,9 mg/L representa risco à dentição em menores de oito anos de idade e os consumidores deveriam ser expressamente informados desse risco. Considerando a expansão do programa nacional de fluoretação da água para regiões de clima tipicamente tropical, deve-se revisar a Portaria 635/75, relacionada ao fluoreto adicionado às águas de abastecimento público.

DESCRITORES: Água Potável. fluoretação. Qualidade da água. Revisão. Fluorose dentária.

[I] Departamento de Prática de Saúde Pública. Faculdade de Saúde Pública.

Fonte: http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=67240193018

Problema 5.2. Suponha que em um reservatório que abastece determinada cidade brasileira existam 100 milhões de litros de água fluorada e que a quantidade de fluoreto nesta água é de 200 kg de fluoreto. Para se adequar à legislação brasileira se torna necessário diminuir a concentração de fluoreto no reservatório, para isso é despejada água pura no reservatório a uma taxa de 3 milhões de litros por dia. Suponha que simultaneamente a solução de fluoreto homogênea escoe do reservatório à mesma taxa.

De acordo com o texto descrito na atividade 5.2, em quantos dias a concentração de fluoreto nesta água estará dentro dos padrões brasileiros para prevenção de cárie dentária?

<u>**Resolução.**</u> Observe que concentração inicial de fluoreto é de $\frac{200000000}{100000000} = 2\,mg/l$. À medida que se aumenta a quantidade de água e que a solução de fluoreto escoa do

reservatório esta concentração diminui. Usando a equação (19), temos que a taxa instantânea de escoamento de fluoreto é de 3 milhões de litros por dia em 100 milhões de litros de água fluorada. Portanto, essa taxa é de 0,03.

Sejam T o número de dias decorridos desde que a água pura começou a ser despejada no reservatório, $P(T)$ a concentração de fluoreto que resta no reservatório em T dias e P_0 a concentração inicial de fluoreto. Pela equação (18),

$$P(T) = P_0 \cdot e^{-0,03T}$$

Como $P_0 = 2\ mg/l$, tem-se

$$P(T) = 2 \cdot e^{-0,03T}$$

De acordo com o texto descrito na atividade 5.2 a concentração ideal de fluoreto na água para prevenção de cárie dentária varia entre 0,6 mg/l e 0,9 mg/l. Dessa forma, para determinarmos o tempo necessário para que a concentração de fluoreto esteja dentro dos padrões brasileiros basta resolvermos o seguinte sistema de inequações:

$$\begin{array}{ccccc} 0,6 & < & 2 \cdot e^{-0,03T} & < & 0,9 \\ 6 & < & 20 \cdot e^{-0,03T} & < & 9 \end{array}$$

Portanto,

$$\ln 6 < \ln\,(20 \cdot e^{-0,03T}) < \ln 9$$

Daí,

$$\ln 6 < \ln 20 - 0,03T < \ln 9$$

Fazendo os cálculos necessários, tem-se

$$\frac{\ln 20 - \ln 9}{0,03} < T < \frac{\ln 20 - \ln 6}{0,03}$$

Portanto, são necessários no mínimo 26 e no máximo 40 dias para que esta água esteja dentro dos padrões brasileiros para prevenção de cárie dentária.

5.3 Potencial Hidrogeniônico ou pH de uma solução

O potencial hidrogeniônico, pH, de uma solução consiste num índice que indica qual é o nível de acidez de determinado meio. Esse potencial refere-se à concentração molar de cátions hidrônio, H^+, presentes no meio e indica se esse meio, ou mistura, é ácido, básico ou neutro. Para essa classificação, se faz uma comparação entre as concentrações de cátions hidrônio e íons hidróxido, OH^-; presentes no meio. O meio é classificado como ácido quando a quantidade de hidrônios é maior que a de hidróxidos; neutro, quando a quantidade de hidrônios é igual a de hidróxidos; e por fim, básico se a quantidade de hidrônios é menor que a de hidróxidos.

Por se tratarem de concentrações com valores muito pequenos, se faz uso do logaritmo para a classificação. Deste modo, o pH é definido como o logaritmo decimal do inverso da concentração de H^+, ou seja, $p\mathrm{H} = \log\frac{1}{[\mathrm{H}^+]}$, onde $[\mathrm{H}^+]$ denota a concentração molar de H^+.

Da mesma forma, indica-se por $[\mathrm{OH}^-]$ a concentração de hidróxidos presentes no meio. Mostra-se que $[\mathrm{H}^+].[\mathrm{OH}^-] = 10^{-14}$ (DIAS, [2018]). Sendo $p\mathrm{OH} = \log\frac{1}{[\mathrm{OH}^-]}$ o potencial hidroxiliônico, temos que $pH + pOH = 14$. Portanto, tanto o pH quanto o pOH são índices que variam de 0 a 14. Assim, pode-se classificar um meio pelo seu respectivo valor do pH da seguinte maneira:

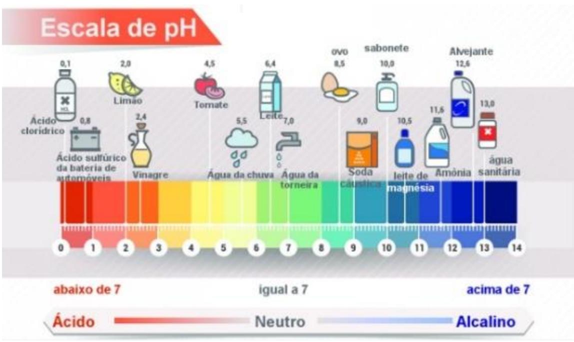
se o $\mathrm{pH} = 7$, o meio será neutro. Isso indica $[\mathrm{H}^+] = [\mathrm{OH}^-]$;

se o $\mathrm{pH} > 7$, o meio será básico ou alcalino, indicando $[\mathrm{H}^+] < [\mathrm{OH}^-]$;

se o $\mathrm{pH} < 7$, o meio será ácido e nesse caso $[\mathrm{H}^+] > [\mathrm{OH}^-]$.

A figura a seguir apresenta o pH aproximado de algumas soluções.

Figura 9 - Escala de pH com exemplo de soluções com o pH próximo ao indicado

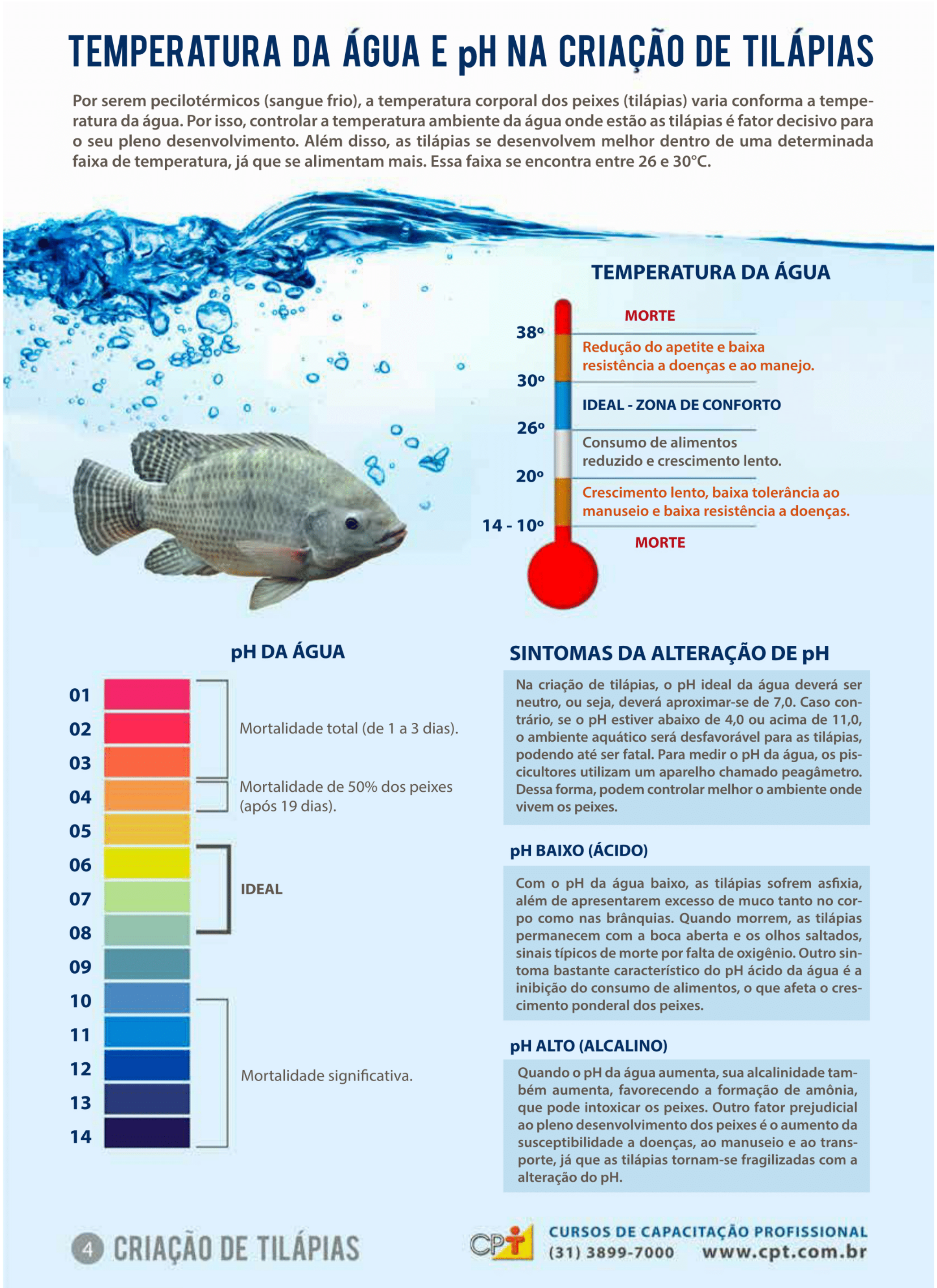


Fonte: https://quimicageneralylaboratorio.wordpress.com/2015/11/20/ph-en-los-alimentos/

Atividade 5.3. Criação de tilápias

O texto a seguir relaciona alguns fatores importantes na criação de tilápias como pH e temperatura da água.

Figura 10: Relação entre a mortandade de tilápias com fatores como pH e temperatura.



Fonte: http://cptstatic.s3.amazonaws.com/pdf/cpt/piscicultura/tilapias-cursos-cpt.pdf

Problema 5.3. Um piscicultor cria tilápias em um tanque com formato de um paralelepípedo cujas dimensões são 10m, 30m e 4m, referentes respectivamente ao comprimento, largura e altura. Em condições normais, o pH do ambiente aquático nesse tanque varia de 6,7 a 7,3.

a) Entre quais valores deve variar a concentração molar de íons de hidrogênio desse meio?
b) Suponha que 70% da capacidade deste tanque esteja cheio de água. Para enche-lo, abre-se a torneira que o alimenta de água, fechando-a quando estiver completamente cheio. Devido a algum problema ocorrido na condução da água da nascente ao tanque, o valor do pH da água despejada é aproximadamente igual a 3. Estando o tanque completamente cheio, determine o valor do pH resultante da mistura da água jorrada e da água que já existia no tanque. Considere que não exista *solução tampão*[3] nesse ambiente aquoso.
c) Considerando a situação descrita no item b, avalie as consequências para as tilápias desse criadouro e quais efeitos biológicos estão envolvidos.

Resolução.

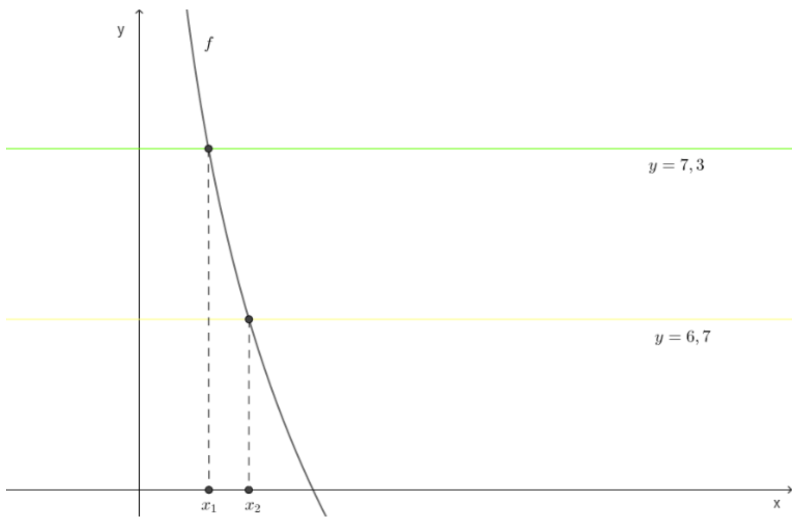
a) Sejam x_1 e x_2 as concentrações molares de íons de hidrogênio associadas aos valores de pH dados por 7,3 e 6,7, respectivamente. Dessa forma,

$$-\log x_1 = 7{,}3 \Leftrightarrow \log x_1 = -7{,}3 \Leftrightarrow x_1 = 10^{-7{,}3}$$
$$-\log x_2 = 6{,}7 \Leftrightarrow \log x_2 = -6{,}7 \Leftrightarrow x_2 = 10^{-6{,}7}$$

Portanto, $[H^+]$ varia de $10^{-7{,}3} mol/L$ a $10^{-6{,}7} mol/L$.

No gráfico a seguir, temos representados os valores de x_1 e x_2.

Gráfico 5- Representação de parte do gráfico da função $f(x) = -\log x$



Fonte: Autor, 2019.

b) Para o cálculo do pH da mistura, primeiramente iremos calcular a quantidade de

[3] São soluções utilizadas para manter o pH do meio constante geralmente composta por um ácido fraco (ácido conjugado) e seu sal (base conjugada). (SOLUÇÃO..., 2015).

mols de íons de hidrogênio da primeira solução, que chamaremos solução 1.

Seja V_1 o volume da solução 1. Logo,

$V_1 = 0{,}7 \cdot 10 \cdot 30 \cdot 4 = 840m^3 = 840000\,l.$ Como vimos no item a, as respectivas concentrações mínimas e máximas de íons de hidrogênio equivalem a $10^{-7,3}$ $\mathrm{mol/l}$ e $10^{-6,7}\mathrm{mol/l}$. Portanto, na solução 1 a quantidade mínima de mols de íons de hidrogênio é de $10^{-7,3} \cdot 840000 \cong 4{,}21 \cdot 10^{-2}$ mols e a máxima é de $10^{-6,7} \cdot 840000 \cong 16{,}80 \cdot 10^{-2}$ mols. Agora, seja V_2 o volume da solução 2. Logo, $V_2 = 0{,}3 \cdot 10 \cdot 30 \cdot 4 = 360m^3 = 360000l.$ Então, para a solução 2, temos $10^{-3,0} \cdot 360000 = 36000 \cdot 10^{-2}$ mols de ions de hidrogênio. Portanto, na solução resultante, a quantidade mínima e máxima de mols correspondem a respectivamente,

$$36000 \cdot 10^{-2} + 4{,}21 \cdot 10^{-2} = 36004{,}21 \cdot 10^{-2} \text{ mols}$$

e,

$$36000 \cdot 10^{-2} + 16{,}80 \cdot 10^{-2} = 36016{,}8 \cdot 10^{-2} \text{ mols}$$

O volume de água no tanque cheio é de 1200000 litros, daí, a concentração mínima e máxima de íons de hidrogênio são, respectivamente, iguais a

$$\frac{36004{,}21 \cdot 10^{-2}}{1200000}\,\mathrm{mols/l} \cong 30{,}00 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{mols/l}$$

e,

$$\frac{36016{,}8 \cdot 10^{-2}}{1200000}\,\mathrm{mols/l} \cong 30{,}01 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{mols/l}$$

Portanto, calculando o pH de cada concentração obtida acima, temos

$-\log\,(30{,}00 \cdot 10^{-5}) = 3{,}5229$ e $-\log\,(30{,}01 \cdot 10^{-5}) = 3{,}5228$

Logo, o pH resultante será aproximadamente igual a 3,52.

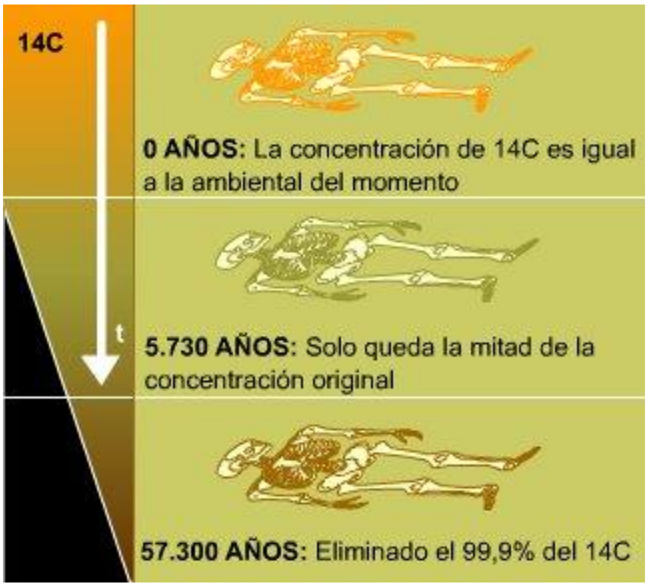
c) De acordo com texto descrito na atividade 5.3, percebemos que níveis de pH abaixo de 4 são letais para as tilápias. Assim, entre 1 e 3 dias, todas as tilápias do criadouro morrerão, devido a acidez do meio. Nessas circunstâncias, estes peixes sofrem asfixias além de apresentarem excesso de muco tanto no corpo como nas brânquias. Outra consequência do pH baixo é a inibição do consumo de alimentos que afeta o crescimento ponderal destes peixes.

5.4 Método do Carbono 14

No ano de 1947, o químico *Willard Libby* fez uma descoberta revolucionária na área da Arqueologia, a partir de seus estudos seria possível decifrar a idade de fósseis antigos.

Suas pesquisas revelaram que a quantidade de carbono 14, C^{14}, dos tecidos orgânicos mortos diminui a um ritmo constante com o passar do tempo. Normalmente, os seres vivos absorvem e eliminam C^{14} de modo que em cada espécie este processo se dá de maneira constante. Os vegetais criam C^{14} no processo de fotossíntese e os animais o absorvem no processo de digestão, direta ou indiretamente, destes vegetais. Quando um ser vivo morre, a absorção cessa, mas o C^{14} continua se desintegrando. Sabe-se que sua meia vida é 5730 anos, ou seja, a cada 5730 anos a quantidade desse elemento se reduz em 50%, figura 11. Como essa quantidade começa a decair a partir da morte do organismo, ela determina exatamente há quanto tempo esse organismo morreu.

Figura 11- Tempo de meia vida do carbono 14



Fonte: https://patrimoniointeligente.com/el-carbono14-en-arqueologia/

Desse modo, usando os resultados da seção 4.2.1 ($i = 0{,}5$ e $\lambda = 5730$), temos que a quantidade de carbono 14 em um organismo que morreu à t anos é dado pela função exponencial

$$h(t) = h_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5730}} \quad (20)$$

onde h_0 é a quantidade de C^{14} em organismos vivos.

Observe que o quociente $\frac{h(t)}{h_0}$ expressa a porcentagem de carbono 14 na amostra.

Atividade 5.4. Datação por carbono 14

O texto a seguir faz referência ao método de datação do carbono 14.

> Todo ser vivo tem em sua constituição partículas de carbono. Dentre as partículas do carbono existe uma partícula específica que nos possibilita datar com relativa exatidão em que época tais seres viveram.
> A técnica do carbono-14 foi descoberta na década de 1940 por Willard Libby. Ele percebeu que a quantidade de carbono-14 dos tecidos orgânicos mortos diminui a um ritmo constante com o passar do tempo.
> Assim, a medição dos valores de carbono-14 em um objeto fóssil nos dá pistas dos anos decorridos desde sua morte. Isso equivale a dizer que o carbono-14 morre junto com o ser vivo e é a partir desta datação que ele vai diminuindo de quantidade com o passar dos anos. Isso possibilita entendermos em que época esses seres viveram. Hoje este é o método mais eficiente para estimar a idade de espécimes arqueológicas de origem biológica. Esta técnica é aplicável à madeira, carbono, sedimentos orgânicos, ossos, conchas marinhas, ou seja, todo material que conteve carbono em alguma de suas formas. Como o exame se baseia na determinação de idade através da quantidade de carbono-14 e esta diminui com o passar do tempo, ele só pode ser usado para datar amostras que tenham idades estimadas em até 50 a 70 mil anos. Depois disso a quantidade de carbono 14 é insuficiente para análises. Assim, para datarmos, por exemplo, seres vivos que estiveram na terra a milhões de anos atrás, como os dinossauros ou mesmo rochas, outros procedimentos de datação são utilizados, geralmente os de isótopos de radiação como argônio ou potássio, pois o carbono que poderia existir, no caso de um dinossauro já não existe mais.
> Nas Ruínas Engenho São Jorge dos Erasmos, este procedimento foi utilizado quando o projeto arqueológico desenvolvido no local encontrou quase dois mil fragmentos considerados relevantes para a arqueologia. Muitos destes fragmentos eram ossos de animais e mesmo ossos de humanos. Estes ossos passaram pelo procedimento de datação via carbono-14, o que nos deu uma datação muito aproximada do seu tempo de vida. Foi assim que os arqueólogos descobriram que se tratava de ossadas oriundas do século XVI, período que coincide com a construção e as primeiras atividades desenvolvidas no Engenho. (DATAÇÃO..., [2018], não paginado).

Problema 5.4. Suponha que no ano de 2000, por uma das escavações nas ruinas do Engenho dos Erasmos, figura 12, foi encontrada uma ossada humana cujo percentual de carbono 14 era de 95%. Tal descoberta permitiu avaliar que se tratava de um índio escravizado que trabalhou no local.

Figura 12- Parte de ruínas localizadas em Engenho dos Erasmos

Fonte: http://www.usp.br/imprensa/?p=27531

a) Usando a datação do carbono 14, determine, aproximadamente, há quanto tempo esse índio morreu e o possível ano da morte desse índio.
b) Retire do texto informações que vem ao encontro do resultado obtido em a).

<u>Resolução</u>.

a) A partir dos dados do enunciado temos que a quantidade de carbono 14 encontrada era de 95%, portanto $h = 95\% \cdot h_0$. Utilizando a equação (20), temos:

$$0{,}95 \cdot h_0 = h_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5730}} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5730}} = 0{,}95$$

Utilizando log_2 em ambos membros da última igualdade anterior temos que,

$$\log_2 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5730}} = \log_2 0{,}95 \Leftrightarrow \frac{-t}{5730} = -0{,}074 \Leftrightarrow t \cong 424{,}02$$

Portanto, este índio foi morto há cerca de 424 anos. Como a datação foi realizada no de 2000, então ele provavelmente faleceu no ano de 1576.

b) Pelo item a descobrimos que o ano da possível morte do índio foi em 1576 ou seja, século XVI que segundo o texto descrito na atividade 5.4, coincide com a construção e as primeiras atividades desenvolvidas no Engenho.

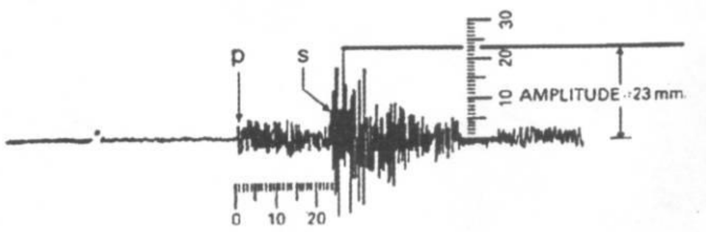
5.5 Escala Richter

Terremoto ou abalo sísmico é um movimento brusco e repentino do terreno, resultante da ruptura de uma rocha (falha). Essa ruptura causa a liberação de uma grande quantidade de energia, a qual gera ondas elásticas que se propagam pela Terra em todas as direções. Normalmente não é o deslocamento na fratura que causa maior estrago, mas sim as vibrações (ondas elásticas) que se propagam a partir da fratura. Na maior parte das vezes a fratura nem atinge a superfície, mas as vibrações podem ser fortes o suficiente para causar danos consideráveis.

Para quantificar a magnitude de terremotos foram elaboradas três escalas: a de Richter, a de Magnitude do Momento (escala Mw) e a de Mercalli. As duas primeiras são quantitativas e a última, qualitativa. Na prática, entretanto, os resultados obtidos pelas quantitativas são muito aproximados para terremotos de intensidades médias. Aqui, abordaremos a Escala Richter. (TERREMOTOS, 2019, não paginado).

A Escala Richter é uma escala logarítmica elaborada por Charles Richter e Beno Gutenberg. Para a sua construção é levado em conta a amplitude da onda marcada por um sismógrafo (aparelho que utiliza um pêndulo para medir distúrbios sismológicos causados pelos movimentos naturais da crosta terrestre). Apesar de não haver limite para a escala Richter, a própria Terra a impõe um limite físico, não havendo eventos superiores a 10 graus na escala. Além de medir a magnitude, também é possível comparar as intensidades dos terremotos entre si. Assim, tremores muito fracos possuem um grau menor e aqueles mais intensos possuem uma graduação maior. Vale ressaltar que o poder de destruição de um terremoto não está relacionado apenas à sua magnitude, ou seja, nem sempre um sismo de maior magnitude será mais destrutivo que um de menor magnitude. Vários fatores influenciam nesse fenômeno: profundidade do hipocentro (ponto interior onde ocorre a fratura principal), a distância entre o ponto e o epicentro (local onde é registrada a maior magnitude dos abalos), as condições geológicas, a estrutura de engenharia dos edifícios atingidos, e estrutura socioeconômica de cada lugar.

Figura 13- Imagem obtida através de um sismógrafo de uma estação localizada no sul da Califórnia.



Fonte: http://ecalculo.if.usp.br/funcoes/grandezas/exemplos/exemplo5.htm

Para o cálculo da magnitude M de um terremoto na escala Richter tem-se a seguinte fórmula

$$M = \log A - \log A_0 \quad (21)$$

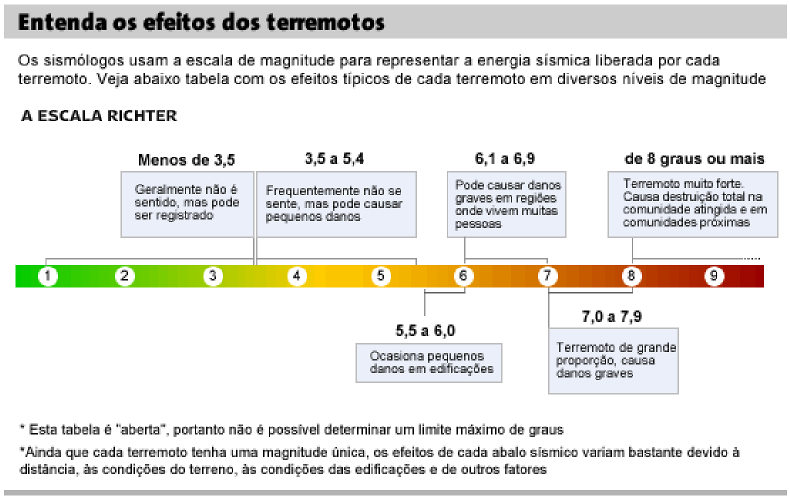
Onde, A e A_0 são respectivamente, as amplitudes máximas de deslocamento horizontal observadas a uma determinada distância epicentral, para terremoto com magnitude local e zero. Richter apresentou a magnitude zero como aquela que induz uma amplitude de distância igual a um micrômetro (1 µm) para um epicentro igual a 100 km de uma estação Wood Anderson. Para outros tipos de estações sismográficas é preciso aplicar uma correção no valor do deslocamento epicentral associado à definição da constante A_0. (COLLANTES, 2015).

A energia E liberada por um terremoto pode ser determinada a partir da sua magnitude, como mostra a relação

$$M = \frac{2}{3}\log\frac{E}{E_0} \quad (22)$$

onde E é a energia liberada em kW/h e $E_0 = 7 \times 10^{-3}$ kW/h.

Figura 14- Efeitos do terremoto.



Fonte: http://matematicaenigmatica.blogspot.com/2011/03/matematica-e-terremoto.html

Atividade 5.5. Relação entre abalos sísmicos ocorridos entre Chile e Haiti em 2010

O texto a seguir faz a relação entre os sismos ocorridos no Chile e o Haiti, explicando o porquê de serem diferentes.

> WASHINGTON - As condições e a localização dos terremotos que atingiram Chile e Haiti explicam porque um abalo muito superior, como o chileno, causou um número mínimo de vítimas em relação ao fenômeno que devastou o Haiti, em janeiro passado.
> Até o momento, o terremoto do Chile, de 8,8 graus [na escala Richter], deixou 708 mortos, enquanto o tremor no Haiti, de [7,0] graus [na mesma escala][4], matou mais de 220 mil pessoas.
> No Chile, o abalo da madrugada de sábado passado teve seu epicentro a 115 km da cidade de Concepción e a 325 km de Santiago, mas no Haiti o epicentro foi a 25 km de Porto Príncipe, a capital do país.
> No Haiti, a pouca profundidade do tremor, a cerca de 10 km da superfície, multiplicou a violência das vibrações e amplificou os danos no solo. Já no Chile, o epicentro foi cerca de 35 km sob o oceano, o que reduziu o impacto, mas produziu um tsunami. "Mas a diferença não se deve apenas ao epicentro do tremor, já que o Chile está muito melhor preparado que o Haiti para enfrentar qualquer abalo desta intensidade", disse à AFP Roger Bilham, professor de geologia da Universidade do Colorado.
> O Chile se encontra em uma das zonas de maior atividade sísmica do mundo, na convergência de duas grandes placas tectônicas, o que provoca abalos de 8 graus a cada dez anos, aproximadamente, mas o Haiti não sofria um terremoto tão catastrófico na região de Porto Príncipe há 240 anos.
> Precisamente no Chile ocorreu em 22 de maio de 1960 o maior terremoto já registrado, o abalo de Valdivia, de 9,5 graus, que matou 2 mil pessoas. Segundo a empresa americana EQECAT, especializada na avaliação de riscos, as normas chilenas de construção "minimizaram o potencial de destruição" do terremoto.
> A organização Architecture for Humanity estimou que os efeitos do terremoto no Chile "foram muito menores que no Haiti (...) sem dúvida devido ao estado de preparação do país, incluindo as normas de construção...". "Se um prédio cai durante um terremoto é porque foi fortemente sacudido ou porque foi mal

[4] O valor de referência de 7,7 foi modificado para 7,0 graus na escala Richter, afim de melhor compreensão do problema 5.5.

> construído", resumiu o professor Roger Bilham. "No Haiti, os prédios eram muito frágeis. Quem os construiu, há 20 ou 30 anos, fez túmulos para seus ocupantes".
> Em Porto Príncipe, onde vivem dois milhões de habitantes, apenas dois prédios foram construídos para enfrentar terremotos, e ambos resistiram ao abalo de 12 de janeiro. (CHILE..., 2010, não paginado).

Problema 5.5. No dia 27 de fevereiro foi registrado no Chile um terremoto que ocasionou severos desastres ao país. No mesmo ano, em 12 de janeiro no Haiti foi registrado na mesma escala um terremoto que praticamente dizimou o país, onde seu epicentro deu – se próximo a capital de Porto Príncipe. Usando as informações do texto, faça o que se pede.

a) Compare as amplitudes máximas e o valor da energia liberada dos terremotos ocorridos em cada um destes países.

b) De acordo com o texto descrito na atividade 5.9 explique o porquê de no Haiti os desastres terem sido mais intensos do que no Chile.

Resolução.

a) Utilizando a equação (21), tendo $M_1 = 8.8$, e $M_2 = 7.0$. Seja A_1 a amplitude máxima gerada pela magnitude M_1 e A_2 a amplitude máxima gerada pela magnitude M_2. Então,

$$M_1 - M_2 = 1.8 \Leftrightarrow \log A_1 - \log A_2 = \log \frac{A_1}{A_2} = 1.8$$

Daí,

$A_1 = 10^{1.8} A_2 \cong 63 A_2$. Ou seja, a amplitude máxima ocorrida no Chile foi cerca de sessenta e três vezes maior do que a no Haiti.

Utilizaremos a equação (22) para calcular a energia liberada pelo terremoto. Seja E_1a energia liberada por M_1 e E_2 é a energia liberada por M_2. Assim,

$$M_1 - M_2 = 1.8 \Leftrightarrow \frac{2}{3}\log\left(\frac{E_1}{E_0}\right) - \frac{2}{3}\log\left(\frac{E_2}{E_0}\right) = 1.8$$

Daí,

$$\frac{2}{3}\log\frac{E_1}{E_2} \Leftrightarrow 2.7 = \log\frac{E_1}{E_2} \Leftrightarrow E_1 = 10^{2.7}E_2 \cong 501 E_2$$

Ou seja, a energia liberada no Chile foi cerca de quinhentos e uma vez maior do que no Haiti.

b) Após a leitura do texto descrito na atividade 5.5 e análise de resultados encontrados no item a observa-se que os desastres no Haiti foram mais intensos do que no Chile, devido à diversos fatores, dentre eles pode-se destacar a profundidade de onde ocorreu o tremor, fragilidade nas construções dos edifícios, infraestrutura inadequada, dentre outros aspectos.

5.6 Resfriamento de um corpo

Nesta seção trataremos da lei que rege o resfriamento ou aquecimento de um corpo quando colocado em um ambiente com uma temperatura diferente da sua. O que se observa é com o tempo, o objeto atinge o equilíbrio térmico com o ambiente. Tal lei é conhecida como a Lei de Resfriamento de Newton. De acordo com ela, a taxa de resfriamento é proporcional à diferença de temperatura. Matematicamente falando, segundo a lei de Newton, tem se $D(t) = D_0 \cdot e^{-\alpha t}$ (23) onde D_0 é a diferença de temperatura entre o corpo e o ambiente no instante $t = 0$, $D(t)$ essa diferença num instante t qualquer e α uma constante que depende de vários fatores, como por exemplo características do material que constitui o objeto, a sua superfície de contato, o meio em que ele é colocado.

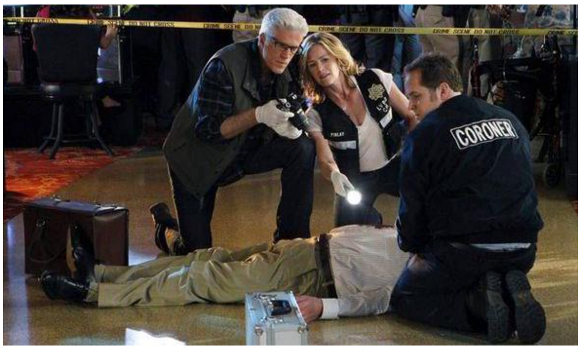
Atividade 5.6. Uma aplicação na criminalística.

O texto abaixo apresenta uma aplicação da lei de resfriamento de Newton que permite determinar a hora do óbito de uma pessoa.

> Existem hoje várias técnicas para indicar a hora do óbito. A forma mais simples e usada no mundo é a medição da temperatura do cadáver por meio de um termômetro. Quando um indivíduo morre, sua temperatura que era em torno de 36,5ºC começa a cair e tende a se igualar a temperatura do ambiente. No entanto, o método não deve ser aplicado se o cadáver perdeu muito sangue ou se morreu devido à ingestão de algum tipo de veneno especial ou se passar muito tempo após o óbito, quando ficará difícil de determinar esta variação de temperatura e levando em conta também que fatores, afetam a perda de temperatura e explicam a margem de erro dessa técnica (fatores que serão desconsiderados neste artigo). Tal aplicação se torna possível devido a mecanismos bioquímicos que são mantidos em nosso corpo a uma temperatura constante de aproximadamente 36,5ºC. Quando ocorre o óbito, estes mecanismos deixam de funcionar e, então, a temperatura do corpo começa a diminuir da mesma forma que uma xícara de café esfria depois de servido. Assim, é possível determinar a hora aproximada de óbito de uma pessoa através de um modelo matemático de Equação Diferencial Ordinária aplicada na Lei de Variação de Temperatura de Newton. (SILVA, 2019, p.51).

Problema 5.6. Uma pessoa foi assassinada em determinado local de uma cidade. Segundo o relato de alguns policiais o corpo desta vítima foi descoberto às 21 horas. O médico legista chegou às 21:30 e imediatamente verificou a temperatura do cadáver, que era de $34{,}8^{\circ}$. Uma hora mais tarde tornou a verificar e encontrou $34{,}12^{\circ}$. A figura a seguir mostra os policias e o médico legista no local do crime.

Figura 15- Policias e médico legista no local do crime.



Fonte: https://ocp.news/entretenimento/investigacao-criminal-jaragua-do-sul-igp-tecnicas-forenses-series-csi

Sabendo que a temperatura ambiente, nesse dia era de 20^{o}. Use a lei do resfriamento de Newton para estimar a hora que se deu a morte. Admita que a temperatura normal de uma pessoa viva é $36{,}5^{o}$.

Resolução. Seja t o tempo transcorrido em horas a partir do momento da morte. Usando a expressão (Temos que $D(0) = D_0 = 36{,}5° - 20° = 16{,}5°$. Usando a expressão (23), temos que:

$$D(t) = 16{,}5° \cdot e^{-\alpha t}$$

Considerando t_1 o tempo transcorrido desde a morte da vítima até às 23:30 horas, logo $D(t_1) = 34{,}8^{o} - 20^{o} = 14{,}8^{o}$. Daí, temos que:

$$D(t_1) = 16{,}5° \cdot e^{-\alpha t_1} \Leftrightarrow 14{,}8^{o} = 16{,}5° \cdot e^{-\alpha t_1}$$

Aplicando o ln em ambos membros da equação anterior:

$$\ln 14{,}8^{o} = \ln\,(16{,}5° \cdot e^{-\alpha t_1}) \Leftrightarrow -\alpha t_1 = \ln 14{,}8^{o} - \ln 16{,}5° \cong -0{,}1087$$

Decorrido uma hora temos que, $D(t_1 + 1) = 34{,}1^{o} - 20^{o} = 14{,}1^{o}$. Dessa forma:

$$D(t_1 + 1) = 16{,}5° \cdot e^{-\alpha(t_1+1)} \Leftrightarrow 14{,}1^{o} = 16{,}5° \cdot e^{-\alpha(t_1+1)}$$

Aplicando ln em ambos membros desta última igualdade,

$$\ln 14{,}1^{o} = \ln\left(16{,}5° \cdot e^{-\alpha(t_1+1)}\right) \Leftrightarrow -\alpha(t_1 + 1) = \ln 14{,}1^{o} - \ln 16{,}5°$$

Substituindo o valor de $-\alpha t_1$ por $-0{,}1087$. Temos que:

$$-0{,}1087 - \alpha \cong -0{,}1572 \Leftrightarrow \alpha \cong 0{,}0485$$

Como, $-\alpha t_1 \cong -0{,}1087$. Então,

$$-0{,}0485 t_1 = -0{,}1087 \Leftrightarrow t_1 = 0{,}1087/0{,}0485 \cong 2{,}24$$

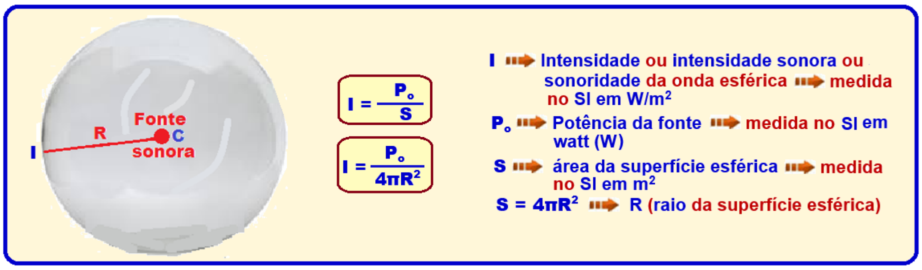
E $2{,}24$ h $\cong 2$h e 14 min. Portanto, a morte ocorreu a aproximadamente 2 horas e 14 minutos antes das $21{:}30$ horas, ou seja por volta de $19{:}16$ horas do mesmo dia.

5.7 Intensidade Sonora

"Intensidade do som é o fluxo de energia por unidade de área. Refere-se ao produto da pressão pela velocidade das partículas em um meio fluido, o que é equivalente à potência recebida por unidade de área" (IAZZETTA, 2007, não paginado). A partir dela, pode-se caracterizar se um som é forte ou fraco.

As suas unidades de medida mais usadas são W/m² ou J/s.m².

Figura 16- Intensidade Sonora.



Fonte: http://fisicaevestibular.com.br/novo/ondulatoria/acustica/qualidades-fisiologicas-do-som/

O menor valor da intensidade sonora ainda audível é chamado mínima intensidade sonora, ou limiar de audibilidade, é dado por $I_0 = 10^{-12}\, W/m^2$. Já o maior valor da intensidade sonora suportável pelo ouvido, chamado máxima intensidade sonora ou limiar de dor, é dado por $I_{max} = 1\, W/m^2$.

Portanto, sendo I a intensidade sonora de uma fonte, tem-se que é conveniente que $10^{-12} \leq I \leq 1$. Por se tratar de valores pequenos, cuja extensão de variação é grande, é indicado o uso de uma escala logarítmica para a comparação de I com I_0. Desse modo, associado à intensidade sonora I, define-se o chamado Nível de Intensidade Sonora, que notaremos por N, pela expressão

$$N = 10 \cdot log\left(\frac{I}{I_0}\right) \quad (24)$$

A unidade de medida para N é o decibel (dB), em homenagem ao cientista britânico Alexander Graham Bell que realizou diversos estudos com o som, linguagem gestual e surdez.

Observe que como a máxima intensidade sonora ocorre quando $I = 1\, W/m^2$, usando a equação (24), tem-se para esse valor $N = 10 \cdot \log\left(\frac{1}{10^{-12}}\right) = 120$, ou seja, o nível de intensidade sonora associado ao limiar de dor é 120 dB. No entanto, estudos indicam que qualquer som acima de 85 dB pode ocasionar perda de audição, porém isto dependerá da potência do som e do tempo de exposição ao som. A portaria Brasileira do Ministério do Trabalho nº 3214/78 considera o número máximo de 85 dB para 8 horas de tempo de serviço em lugares industriais onde há ruído de máquinas e processos ruidosos.

A figura 17, a seguir, apresenta o nível de intensidade do som para algumas fontes sonoras.

Figura 17- Nível de intensidade sonora de alguns objetos, fenômenos da natureza e lugares.

SOM	Nível sonoro	SOM	Nível sonoro
Silêncio absoluto	0 dB	Aspirador de pó	80 dB
interior de uma igreja	10 dB	Interior de fábrica têxtil	90 dB
Conversação em voz baixa	20 dB	Buzina de caminhão	100 dB
Respiração ofegante	30 dB	Britadeira	110 dB
Bairro residencial à noite	40 dB	Conjunto de rock	120 dB
Automóvel bem regulado	50 dB	Trovão	130 dB
Conversação em voz normal	60 dB	Decolagem de avião	140 dB
Interior de um restaurante	70 dB	Aterrisagem de avião a jato	150 dB

Fonte: http://osfundamentosdafisica.blogspot.com/2010/06/intensidade-sonora.html

Atividade 5.7 Nível de Intensidade Sonora de alguns animais

O texto a seguir, retirado da Revista Galileu, apresenta alguns fatos curiosos a respeito do som emitido por alguns animais.

Figura 18- Texto sobre a intensidade sonora produzida por alguns animais

Quais são os animais mais barulhentos?

O som mais ensurdecedor que você já ouviu foi num show de heavy metal? Ou numa pista de aeroporto durante uma decolagem? Ou nas avenidas movimentadas de uma grande cidade? Pois esses barulhos são pouco mais que sussurros se comparados a alguns sons que os animais são capazes de produzir.

Para ter uma ideia: a média do volume de um show de rock é de 100 decibéis, um avião a jato pode alcançar (se você estiver bem perto das turbinas) os 160 decibéis, e a poluição sonora das metrópoles chega a 80 decibéis. Já a baleia azul, em um só grito, vai aos 188 decibéis. E ela não é a única, como você vê nestas páginas.

E qual é a razão para tanto escândalo no reino animal? São várias e vão desde a tentativa de uma baleia macho atrair uma fêmea, até um simples cumprimento entre elefantes. Além disso, o que pode dar novos contornos- e potencializar - o volume do som desses bichos é o meio pelo qual eles transmitem sua mensagem, que pode ser a água, o ar e até a terra. Eleger o mais barulhento do mundo é fácil: a baleia vence em todos os aspectos. Mas há outros bichos que, se não levam a medalha de ouro no grito em altura, fazem bonito no barulho à distância.

Baleia azul (*Balaenoptera musculus*)
Intensidade: 188 decibéis
Distância que atinge: 800 km
Motivo: o som, além de servir para a comunicação das baleias, é normalmente produzido pelos machos para atrair fêmeas
Hábitat: todos os oceanos

Bugio (*Alouatta*)
Intensidade: 130 decibéis
Distância que atinge: 4 km
Motivo: o ruído mais alto produzido por um animal terrestre é usado pelo bugio para comunicar ao resto do grupo a sua localização e, também, para alertar sobre ameaças ou invasões do território por outros bandos
Hábitat: América Central e América do Sul

Rã-touro (*Rana catesbeiana*)
Intensidade: 70 a 90 decibéis
Distância que atinge: 800 m
Motivo: como forma de proteger e também mostrar quem manda é que as rãs machos "mugem" tão alto. O nome touro, aliás, vem da similaridade com o barulho emitido pelo bovino
Hábitat: América do Norte

Foca-elefante-do-norte (*Mirounga angustirostris*)
Intensidade: 100 decibéis
Distância que atinge: 7 km
Motivo: assim como as baleias, as focas-elefantes macho emitem um barulhento chamado para as fêmeas na época do acasalamento. A diferença é que o som é mais parecido com o do elefante - por isso o nome. O ruído também mostra domínio aos rivais
Hábitat: América do Norte, principalmente na costa da Califórnia

Elefantes africanos e asiáticos (*Loxodonta e Elephas*)
Intensidade: 90 a 103 decibéis
Distância que atinge: mais de 10 km
Motivo: é sabido que os elefantes se comunicam por longas distâncias por meio de infrassons, as vibrações terrestres que ocorrem quando o paquiderme bate os pés no solo - a mensagem transmitida pode ser um alerta de perigo ou um simples cumprimento. Contudo, a maior parte dos sons produzidos por esses gigantes é audível para os seres humanos
Hábitat: África e Ásia

Hiena (*Crocuta crocuta*)
Intensidade: 70 decibéis
Distância que atinge: 13 km
Motivo: as hienas "riem" (seus sons agudos são denominados como risadas pelos zoólogos) alto e ruidosamente quando são ameaçadas, perseguidas ou atacadas
Hábitat: Ásia e África

Leão (*Panthera leo*)
Intensidade: 114 decibéis
Distância que atinge: 8 km
Motivo: os leões machos rugem para afastar seus rivais e marcar território. Já as leoas usam o barulho para proteger a cria e chamar a atenção dos machos
Habitat: África

CAMPEÕES DO BERRO À DISTÂNCIA Até onde chega o som do animal	
Rã-touro	800 m
Bugio	4 km
Foca-elefante	7 km
Leão	8 km
Elefante	mais de 10 km
Hiena	13 km
Baleia azul	800 km

MODALIDADE: GRITO EM ALTURA
(em decibéis)

Fonte: http://revistagalileu.globo.com/Revista/Galileu/0,EDG85750-7946-210,00 QUAIS+SAO+OS+ANIMAIS+MAIS+BARULHENTOS.html.

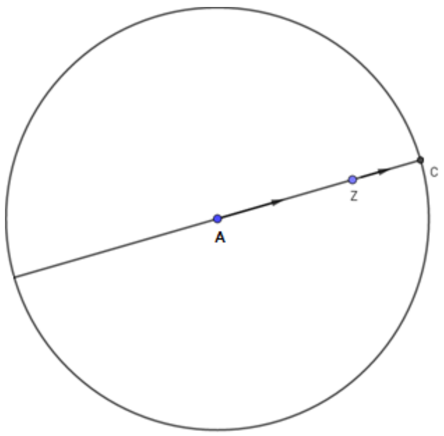
Atividade 5.7. Um zoólogo foi a selva para estudar uma espécie de animal. Em determinado momento, ele ouve um barulho e rapidamente utiliza um sonômetro experimental (aparelho que mede a intensidade sonora) e verifica que a intensidade sonora da “fonte” é, aproximadamente, $0{,}25\ W/m^2$.

a) Utilizando o texto descrito na figura 18, descubra qual seria o animal que possivelmente provocou o som na selva.

b) De acordo com o texto descrito na figura 18 e a resposta do item a), qual seria a distância máxima que este zoólogo deve estar do animal?

c) Suponha que o zoólogo está a 7 km de distância do animal que produziu o som. Apavorado, imediatamente, ele começa a correr em velocidade constante. Para sua "felicidade" existe uma caverna situada a $2km$ à sua frente (figura 19), onde ficará a salvo do animal. Após $1min$ o animal percebe o alvo em movimento e corre com velocidade constante de $60\ km/h$ em direção à sua presa. Determine qual é a velocidade mínima que o zoólogo precisa ter, para que chegue a salvo na caverna.

Figura 19 – representação das posições do animal (A), zoólogo (Z) e da caverna (C)



Fonte: Autor, 2019.

<u>Resolução.</u>

a) Utilizando a expressão (24) e substituindo I por $0{,}25\ W/m^2$. Temos,

$$N = 10 \cdot \log\left(\frac{0{,}25}{10^{-12}}\right) = 10 \cdot (\log 0{,}25 + 12) \cong 114$$

Portanto o nível de intensidade sonora é de aproximadamente 114 dB. Consultando o texto descrito na figura 18 verifica-se que o som foi produzido por um leão.

b) De acordo com o texto descrito na figura 18 o zoólogo deveria estar situado à uma distância máxima de 8 km da fonte sonora.

c) Pelo enunciado, o segmento $\overline{AC}$ possui $9km$ e $\overline{ZC},\ 2km$. Como o animal tem velocidade de $60\ km/h$, ele levará 9 min para alcançar a caverna. Como ele percebe o movimento do zoólogo somente 1 min após o mesmo iniciar a fuga, o zoólogo tem, no máximo $10min = \frac{1}{6}\,h$ para chegar a salvo. Como a distância do zoólogo à caverna é de $2km$, então ele precisa de uma velocidade de pelo menos $12\ km/h$ para chegar a salvo.

5.8 Pressão atmosférica

Pressão atmosférica é a força por unidade de área exercida sobre todos os corpos da superfície terrestre pela coluna de ar atmosférico. Sua manifestação está diretamente relacionada à força da gravidade e à influência que essa realiza sobre as moléculas gasosas que compõem a atmosfera (PENA, [2011]). À medida que nos afastamos da superfície terrestre o ar vai se tornando mais rarefeito isso faz com que haja diminuição da pressão atmosférica. Observe o gráfico 6.

Um dos primeiros a verificar a pressão exercida pela atmosfera na superfície terrestre foi Torriceli, através de um experimento onde ele utilizou um tubo com aproximadamente um metro de comprimento cheio de mercúrio, dessa experiência originou-se a unidade milímetro de mercúrio, *mmHg*. Atualmente, as unidades mais usadas para medi-la são o pascal, *pa*, e o atmosfera, *atm*. A relação entre essas unidades de medida pode ser dada pelo valor da pressão atmosférica ao nível do mar que é

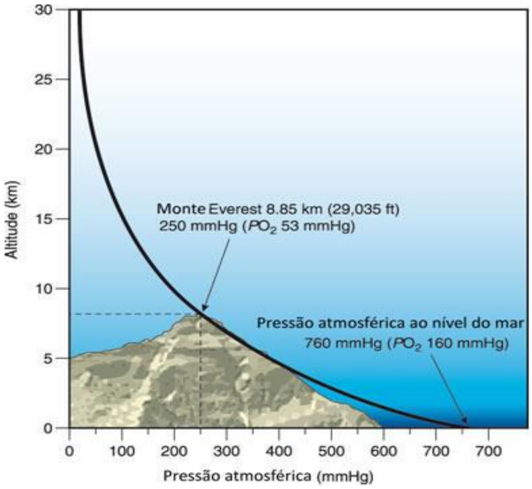
$$p = 1\ atm = 1{,}013.\ 10^{15}\ pa = 760\ mmHg.$$

Considerando a hipótese de atmosfera isotérmica[5], tem-se a Lei de Halley, que relaciona a pressão atmosférica, p, com a altitude, h, descrita pela fórmula, $p(h) = p_0 \cdot e^{-\frac{h}{\alpha}}$ (25), onde p_0 é a pressão ao nível do mar, e α é uma constante, cujo valor aproximado é de 8,5 km. (VARIAÇÃO..., [2018]) A partir dessa lei pode-se verificar que a pressão atmosférica decai exponencialmente com a altitude.

---

[5] Os primeiros 4,4 km a partir do nível do mar é bastante aceitável considerar a atmosfera como sendo isotérmica, ou seja temperatura constante.

Gráfico 6- Pressão atmosférica x Altitude



Fonte: https://alunosonline.uol.com.br/quimica/a-pressao-atmosferica.html

Atividade 5.8. Efeitos da pressão atmosférica nos seres humanos

O texto abaixo relaciona os efeitos no corpo humano causados pela variação da pressão atmosférica de acordo com a altitude

> Como qualquer outro ser vivo, o homem evoluiu para viver em determinadas condições de clima e pressão atmosférica – mas não consegue se conformar só com seu habitat. Impulsionado pela vontade de superar limites, ele testa sua capacidade de sobrevivência em ambientes inóspitos como nenhum outro animal faria. Aventurar-se no alto de uma montanha ou no fundo do mar exige que o organismo humano se acostume às diferenças no comportamento do gás essencial à vida, o oxigênio.
>
> Quanto maior a altitude, menor a quantidade de oxigênio, pois o ar fica menos denso, com mais espaços vazios entre as moléculas. A pressão atmosférica diminui, causando dor de cabeça, náuseas e prostração. Já em grandes profundidades, o perigo é a pressão sobre o peito do mergulhador, um obstáculo ao trabalho dos músculos na respiração. Até a volta pode ser perigosa, tanto das alturas quanto das profundezas. É que a coordenação motora, a lucidez e a capacidade de raciocínio rápido ficam comprometidas.
>
> *Limites à prova*
>
> No mar ou na montanha, saiba o esforço que seu corpo faz para controlar a respiração.
>
> **8 000 metros – Zona fatal**
>
> No topo do Monte Everest, o pico mais alto do mundo, o aventureiro consegue respirar apenas 30% do oxigênio necessário. Os poucos alpinistas que conseguiram chegar lá sem tubos de oxigênio aguentaram uma hora e meia, no máximo. Mais do que isso, é morte certa.
>
> **5 000 metros – Alerta vermelho**
>
> A capacidade de adaptação do organismo diminui muito. Aumenta o risco de edemas por acúmulo de líquidos no pulmão ou no cérebro.
>
> **3 600 metros – Sufoco andino**
>
> La Paz, na Bolívia, é a capital mais alta do mundo. Seus 700 000 habitantes estão acostumados ao ar rarefeito da Cordilheira dos Andes. Lá, é comum mascar folhas de coca (foto) para atenuar os efeitos da altitude.
>
> **2 800 metros – O corpo sofre**
>
> O organismo começa a responder à redução do oxigênio. No início, você passa a respirar mais depressa e mais profundamente. A frequência cardíaca também aumenta, para distribuir o oxigênio a todas as células com mais eficiência. A

> partir do terceiro dia nesta altitude, o corpo se adapta e começa a produzir mais hemoglobina, a molécula sanguínea que transporta o oxigênio.
> **Nível do mar**
> Aqui, você tem uma coluna de ar sobre a cabeça, que corresponde a 1 atmosfera, a unidade de medida da pressão atmosférica.
> **-10 metros – Mergulhar de cabeça**
> A cada 10 metros que você desce, a pressão aumenta em 1 atmosfera. O tímpano, a membrana do ouvido, pode ser empurrado para dentro, provocando dor. Para que ele não se rompa, é preciso fazer a chamada "manobra de Valsava": tape o nariz e a boca e faça força para expirar até que as pressões se igualem.
> **-40 metros – O canto das sereias**
> Nesta profundidade, a pressão é de 5 atmosferas. Os mergulhadores precisam usar um cilindro de ar comprimido. O nitrogênio, aqui, é um vilão. Ele interfere nos estímulos nervosos causando a "embriaguez das profundidades". Se o retorno à superfície for muito rápido, acontece a embolia, que é a formação de bolhas no sangue. Resultado: deformação ou, até mesmo, rompimento do pulmão.
> **-300 metros – Trabalho submarino**
> Para trabalhar nas plataformas de exploração de petróleo submarino, os mergulhadores precisam adaptar-se lentamente em câmaras especiais, onde respiram uma mistura de hélio, oxigênio e nitrogênio.
>
> *Emergência a bordo*
>
> Seria impossível viajar de avião, acima dos 10 000 metros, se as cabines não fossem supridas de ar pressurizado. Nessa altitude, a quantidade de oxigênio no ar é insuficiente. Se, por algum motivo, ocorre uma queda de pressão, uma máscara garante o suprimento necessário de oxigênio (foto). Do contrário, os passageiros perderiam a consciência em poucos minutos.
>
> *Quem sabe é super*
>
> O recorde oficial de profundidade para a perigosa e desaconselhável atividade do mergulho sem equipamento é de 130 metros, obtido pelo cubano Francisco "Pipún" Ferras, ao largo do Cabo San Lucas, México, no dia 10 de março de 1996. (LISBÔA, 1998, não paginado).

Problema 5.8 A Copa Libertadores da América de 2019 é a 60ª edição da competição de futebol realizada anualmente pela Confederação Sul-Americana de Futebol (CONMEBOL). Segundo o calendário do campeonato, o Clube Regatas do Flamengo jogará contra o Clube San José da Bolívia no dia 05 de março de 2019 no Estádio Jesús Bermúdez localizado na cidade de Oruro, Bolívia, localizada a 3735 m acima do nível do mar.

Figura 20: Primeiro jogo do atacante Gabriel Barbosa (Gabigol) com a camisa do Flamengo contra o time San José na Bolívia

Fonte: https://esporte.uol.com.br/futebol/ultimas-noticias/2019/03/05/san-jose-bol-x-flamengo.htm

a) Qual é o valor da pressão atmosférica na cidade de Oruro em mmHg?

b) Sabe-se que quanto maior a altitude, menor é a pressão atmosférica. Usando o resultado obtido em a), determine qual é aproximadamente a razão percentual da pressão em Oruro em relação à do nível do mar.

c) Quais serão os efeitos fisiológicos que os jogadores do Flamengo poderão apresentar? O que pode ser feito para amenizar esses sintomas?

Resolução.

a) Podemos determinar a pressão atmosférica à 3735m substituindo, $p_0 = 760$ mm hg e $\alpha = 8{,}5$ km $= 8500$ m na equação (25). Logo,

$$p(3735) = 760 \cdot e^{-\frac{3735}{8500}} \cong 486{,}4.$$

Portanto a pressão atmosférica para uma altitude de 3735 m é de aproximadamente 486,4 mmHg.

b) $\frac{486{,}4}{760} = 0{,}64 = 64\%.$

Observe que a pressão atmosférica em Oruro é cerca de 36% menor do que a pressão ao nível do mar.

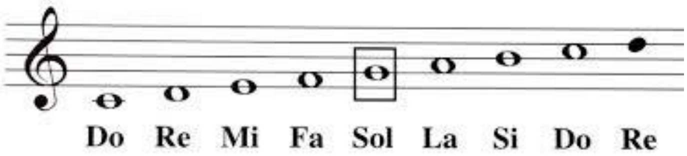
c) De acordo com o texto da atividade 5.8 a partir de 2800 metros de altitude o corpo desses atletas começarão a responder pela falta de oxigênio, a frequência cardíaca aumentará para distribuir oxigênio pelas células com mais eficiência. Os efeitos como dores de cabeça e náuseas são comuns. Recomenda-se mascar a folha da Coca, bem como ter um tempo de adaptação até que as células comecem a produzir mais hemoglobina.

5.9 Frequência das Notas Musicais

"Música é a arte de combinar sons coerentes e lógicos, com ordem, equilíbrio e proporção dentro do tempo." (SIGNIFICADO..., 2013)

Existem sete notas musicais, chamadas de naturais: DÓ, RÉ, MI, FA, SOL, LÁ, SI, que podem ser escritas nas *pautas musicais* ou *pentagramas* (conjunto de cinco linhas paralelas e na horizontal, separadas por quatro espaços entre elas), como mostra a figura a sguir:

Figura 21- Notas Musicais



Fonte: http://www.auva.cat/au-va-et-busca/

Além das sete notas naturais, existem as chamadas notas acidentadas, que são: DÓ#, RÉ#, FA#, SOL#, LA#. Leia-se sustenido para o símbolo # justaposto à nota natural. Cada uma das notas acidentadas se situa, quase sempre, entre duas notas naturais formando a seguinte sequência de 12 notas musicais: DÓ, DÓ#, RÉ, RÉ#, MI, FA, FA#, SOL, SOL#, LA, LA#, SI, chamada de escala musical temperada.

Entre cada duas notas da escala temperada existe um intervalo musical denominado semitom. Assim, de DÓ a DÓ# existe um semitom. Além disso, dizemos que dois semitons formam um tom. Por exemplo, de DÓ a RÉ existe um tom. Ao intervalo de 6 tons, tem-se uma oitava.

A música tem ligações importantes com a Matemática; uma delas está relacionado à escala musical temperada. A tabela abaixo relaciona cada uma das notas dessa escala com uma potência de base 2, que é a razão entre a frequência da nota considerada e a frequência da nota DÓ.

Tabela 5- Relação entre a frequência da nota considerada com a frequência da nota DÓ

Notas Musicais	Razão entre a frequência da nota considerada com a frequência da nota DÓ
DÓ	2^0
DÓ#	$2^{\frac{1}{12}}$
RÉ	$2^{\frac{2}{12}}$
RÉ#	$2^{\frac{3}{12}}$
MI	$2^{\frac{4}{12}}$
FÁ	$2^{\frac{5}{12}}$
FÁ#	$2^{\frac{6}{12}}$
SOL	$2^{\frac{7}{12}}$
SOL#	$2^{\frac{8}{12}}$
LÁ	$2^{\frac{9}{12}}$
LÁ#	$2^{\frac{10}{12}}$
SI	$2^{\frac{11}{12}}$

Fonte: Autor, 2018.

Pela tabela 5, observa-se que a razão entre as frequências de duas notas musicais consecutivas na escala temperada é constante e igual a $2^{\frac{1}{12}}$. Logo, as frequências das notas DÓ, DÓ#, RÉ, RÉ#, MI, FA, FA#, SOL, SOL#, LA, LA#, SI, nesta ordem, seguem uma progressão geométrica de razão $2^{\frac{1}{12}}$.

Para essa PG consideramos que a escala temperada vai se repetindo de 12 em 12. Assim, na tabela 5, a próxima nota DÓ, relativa ao 13º termo da PG, possui frequência igual ao dobro da primeira. Observe que nesse caso se completou uma oitava. A nota musical, no caso a DÓ, continua a mesma, porém com características sonoras distintas. Alguns autores colocam um número justaposto à nota para enfatizar que a nota se encontra na oitava associada ao número, por exemplo, LA2 significa a nota LA situada na segunda oitava.

Seja f_n a frequência, em Hertz, da enésima nota musical nessa escala, $n \in \mathbb{N}$. Se $1 \leq n \leq 12$ dizemos que a nota se situa no ciclo da 1ª oitava, se $13 \leq n \leq 24$, ela se situa no ciclo da 2ª oitava, e assim sucessivamente. Usando o termo geral da PG, segue que

$$f_n = f_1 \cdot 2^{\frac{n-1}{12}} \qquad (26)$$

Atividade 5.9. Frequência das notas musicais.

O texto a seguir relaciona conceitos matemáticos e musicais, através da sequência formada pelas frequências das notas musicais.

> Quando no estudo da matemática nos deparamos com algum tópico que podemos visualizar uma aplicação prática, e para nossa felicidade, há muitos deles, se já apreciamos o seu estudo, isto reforça ainda mais nosso interesse, pois afinal aquilo que é produto exclusivo da inteligência do homem, a matemática, encontra um modelo prático que represente o que era produto da inteligência, da imaginação. Assim, quando estudamos a **matemática da música**, em seus vários aspectos, como por exemplo, na análise das sequências das notas sonoras da ***escala musical igualmente temperada***, nos damos conta que os valores das frequências das sequências de notas de uma oitava, formam uma **PROGRESSÃO GEOMÉTRICA,** cuja razão é igual a:
>
> $$2^{\frac{1}{12}} = 1{,}0594631$$
>
> Eu teria gostado muitíssimo em minha época de estudante que meus professores chamassem atenção para este fato, para essa progressão especial, que fala de algo que não há ser humano que não goste: A Música. Assim, além de descobrir algo novo, teria aumentado ainda mais o meu interesse pelo seu estudo. Mas, as vezes acho que poucos deles sabiam disso, porque claro está que na medida que mostramos as múltiplas utilidades dos estudos de matemática, aumenta o interesse do aluno e deixaríamos de ouvir de muitos estudantes: Não gosto de matemática! – quando na verdade estão expressando que não gostam é daquilo que não compreendem e compreender certas coisas – depende muito da didática daqueles que nos ensinam! Mas, deixemos um pouco de lado dessa filosofia pedagógica, e voltemos para a nossa progressão geométrica.
>
> Assim, podemos imaginar essa progressão geométrica com o primeiro termo igual a unidade, e os termos subsequentes obtidos através das multiplicações sucessivas por **1,0594631:**
>
> 1 - 2 - 3 - 4 - 5 - 6 - 7 - 8 - 9 - 10 - 11 - 12 - 13
>
> 1 - 1,0594631 - 1,1224621 - 1,1892071 - 1,2599211 - 1,3348399 - 1,4142136 - 1,4983071 - 1,5874011 - 1,6817919 - 1,7817975 - 1,8877487 - 2,0
>
> Vemos aqui uma sequência de 13 [termos] dessa progressão geométrica que representa a sequência das notas da escala musical igualmente temperada pois 12 são seus intervalos musicais compondo uma oitava. O número 2, sobre o número 1,0594631 corresponde ao primeiro intervalo. O décimo terceiro termo já pertence à próxima oitava, ou seja se você começa por exemplo pela nota **do – (1)**, quando tiver subido uma oitava, a frequência dessa nota será o dobro – (**2**). Assim, se a nota escolhida for a nota **LA2**, que sabemos tem uma frequência de **220** Hz, quando tivermos percorrido a oitava toda, a frequência será de **440** Hz.
>
> Exemplificando, para a nota **LA2**: É só multiplicarmos todos estes números da sequência da PG por 220: **220*1 – 220*1.0594631 – 220*1,1224621** e teremos a sequência:
>
> **220** – 233,08 – 246,94 – 261,62 – 277,18264 – 293,66478 – 311,124 – 329,62756 – 349.22824 – 369,9944 – 391,99541 – 415,30471 – **440,** notas estas que são:
>
> la2 – la# – si – do – do# – re – re# – mi – fa – fa# – Sol – sol# – **La3**

> Assim, você percebe que pode escolher qualquer um destes números e ir multiplicando sequencialmente pela razão 1,0594631 para obter todas as notas das oitavas seguintes, ou seja todos os termos dessa progressão geométrica, muito especial, porque com ela construímos a ***Escala Musical Igualmente Temperada***. (NETTO, [2018], não paginado).

Problema 5.9. O Cifra Clube é um aplicativo que disponibiliza as cifras da maioria das músicas que são tocadas em rádios, televisões e internet. Porém, com tantas informações é natural que ao tocar literalmente o que está descrito nestas cifras apareçam algumas notas que estão fora de ritmo dentro da música.

Suponha que uma banda esteja tocando determinada canção e que o baixista deste grupo, ainda sem experiência musical, acompanhando as notas no Cifra Clube, toque determinada nota fora do ritmo da canção. Esta nota produziu no ambiente uma frequência equivalente a 987,76Hz. O tecladista imediatamente percebeu que o barulho produzido era muito distante do som correto e que a nota certa era SOL2 (nota SOL na segunda oitava)

a) A partir da leitura do texto apresentado na atividade 5.5 e usando a frequência da nota LÁ2, determine a frequência da nota DÓ1, representada por f_1 na equação (26).

b) Determine que nota o baixista tocou e em qual oitava está localizada.

c) Determine a frequência da nota identificada pelo tecladista e qual é a razão entre esta nota com a que o baixista tocou?

<u>Resolução</u>.

a) Para utilizar a equação (26), ou seja, $f_n = f_1 \cdot 2^{\frac{n-1}{12}}$, precisamos determinar a posição n da nota LA2 na sequência das frequências das notas musicais. Para isso, basta verificar que LA é a décima nota na escala temperada e se situa na 2ª oitava, então $n = 1.12 + 10 = 22$. Com isso, usando a informação do texto que a frequência de LA2 é 220 Hz, temos $220 = f_1 \cdot 2^{\frac{21}{12}}$, ou seja, $f_1 \cong 65{,}50$.
   Portanto, a frequência da nota DÓ1 é de aproximadamente 65,50 Hz.

b) Basta substituir na equação (26), f_n por 987,76 Hz e f_1 por 65,50 Hz. Daí,

$$987{,}76 = 65{,}50 \cdot 2^{\frac{n-1}{12}}$$

   Aplicando $\log_2$ em ambos membros da última igualdade temos que,

$$\begin{aligned} \log_2 987{,}76 &= \log_2 65{,}50 \cdot 2^{\frac{n-1}{12}} \\ 9{,}95 &= \log_2 65{,}50 + \frac{n-1}{12} \\ 9{,}95 &= 6{,}03 + \frac{n-1}{12} \end{aligned}$$

Portanto, $n = 48$. Dividindo 48 por 12, obtemos quociente igual a 4 e resto igual a 0, assim a frequência produzida pelo som do baixo refere-se à a nota SI4, ou seja, a nota SI na quarta oitava.

c) Para determinarmos a frequência da nota SOL2 basta substituirmos, na equação (26), n por 20. Daí,

$$f_{20} = 65{,}50 \cdot 2^{\frac{19}{12}} \cong 196{,}30$$

Portanto a frequência produzida pela nota SOL2 é de aproximadamente 196,30Hz. Para determinarmos a razão entre as frequências das notas SI4 e SOL2 basta analisarmos a distância entre estas notas que é 28. Logo,

$$2^{\frac{28}{12}} \cong 5{,}04$$

Portanto, a razão entre a frequência da nota SI4 e SOL2 é aproximadamente 5,04.

6 CONCLUSÃO

Como introduzir o ensino de Exponenciais e Logaritmos no Ensino Básico? O presente texto procura responder a esta questão ao sugerir uma abordagem que engloba o aspecto histórico e diversas aplicações. Desta forma, a ênfase dada foi para as aplicações de tais conceitos em problemas contextualizados. Sendo assim, a apresentação da parte teórica presente neste Trabalho, além de aprofundar os conceitos e propriedades das Funções Exponenciais e Logarítmicas, dá suporte ao desenvolvimento das atividades que propomos no capítulo 5, onde trabalhamos com duas temáticas: crescimento ou decrescimento proporcional e mudança de escalas. Vale ressaltar que os capítulos 3 e 4 foram feitos para os professores que desejarem se aprofundar na parte teórica desta dissertação. Acreditamos que a estrutura apresentada nesse Trabalho possa ser um facilitador na aprendizagem de tais conteúdos, pois o tratamento histórico dos Logaritmos ajuda a entender como esta ferramenta foi concebida, definida e utilizada na época pelos matemáticos para facilitar os cálculos astronômicos.

Pensamos que a Matemática, enquanto uma ciência de natureza abstrata, possui conteúdos que são objetos de estudo da própria Matemática, o que a impulsiona como Ciência. Outros conteúdos estão intimamente relacionados a outras áreas de estudo e são ferramentas importantes para se resolver problemas e explicar fenômenos, para os quais outras áreas do conhecimento por si só não conseguem abarcar. Isto corrobora com o objetivo deste trabalho, que é o aspecto interdisciplinar. Sabemos que muitas pessoas dizem ter dificuldades, ou pouca afinidade com a Matemática, então a interação com outros saberes pode aproximá-las do conteúdo matemático em questão. É importante observar que o nosso objetivo não é de reduzir a matemática a uma questão utilitarista e sim trabalhar em harmonia com as demais disciplinas para explicar e modelar fenômenos.

Outra observação que gostaríamos de enfatizar é que a interdisciplinaridade não é algo trivial de ser feito. É necessário um diálogo constante entre a Matemática e as Disciplinas relacionadas. Para o professor que deseja trabalhar desta forma com os seus alunos em sala de aula é necessário estudo, pesquisa, além do preparo de suas aulas, afim de que possa estar aberto a refletir e auxiliar os estudantes a obterem um melhor aprendizado.

Muito se tem falado sobre o aprendizado por meio de Projetos Escolares que envolvam diversas áreas do saber. Esperamos que as atividades apresentadas no Capítulo 5, as quais relacionam Exponenciais e Logaritmos a outras Disciplinas possam servir de estímulo, bem como ser uma alavanca inicial para a concretização dessa prática.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BRASIL. Ministério da Educação. **Parâmetros curriculares nacionais**: matemática. Brasília: MC/SEF, 1997.

BRASIL. Ministério da Educação. **Parâmetros curriculares nacionais (Ensino Médio) – Linguagens, códigos e suas tecnologias**. Brasília: MEC/SEF, 2000.

CHILE E HAITI ENFRENTARAM CONDIÇÕES DIFERENTES EM TERREMOTOS. 2010. Correio Brasiliense. Disponível em: https://www.correiobraziliense.com.br/app/noticia/mundo/2010/02/28/interna_mundo,176541/chile-e-haiti-enfrentaram-condicoes-diferentes-em-terremotos.shtml. Acesso em: 12 de out de 2018.

COLLANTES, Frank Christopher Perez. **Comportamento Dinâmico de uma barragem de rejeitos com considerações de ameaça sísmica**. 2015. 146 f. Dissertação (Mestrado) – Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Programa de Pós Graduação Engenharia Civil, Rio de Janeiro, 2015.

DATAÇÃO POR CARBONO – 14. [2018]. Ruínas Engenho São Jorge dos Erasmos. Disponível em: http://www.engenho.prceu.usp.br/datacao-por-carbono-14/. Acesso em: 15 de fev de 2019.

DEPARTAMENTO DE EDUCAÇÃO. [2018]. Instituto de Educação. Disponível em: <http://www.educ.fc.ul.pt>. Acesso em 28 jul 2018.

DIAS, Diogo Lopes. **Cálculos envolvendo o pH de soluções**. [2018]. Brasil Escola. Disponível em: <https://brasilescola.uol.com.br/quimica/calculos-envolvendo-ph-solucoes.htm>. Acesso em 20 de abril de 2019.

FAGUNDES, Letícia Verdinelli Navarro. **A espiral logarítmica como motivação para o aprendizado do logaritmo**. 2018. [50 f]. Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do ABC, Centro de Matemática, Computação e Cognição, Santo André, 2018.

FANIZZI, Sueli. **A calculadora como ferramenta de ampliação dos recursos de cálculo**. São Paulo: Sbem Paulista, [2017]. Disponível em: <www.sbempaulista.org.br/epem/anais/Comunicacoes>. Acesso em: 10 de fev de 2019.

IAZZETTA, Fernando. **Intensidade Sonora**. Tutoriais de Áudio e acústica. 2007. Disponível em: http://www2.eca.usp.br/prof/iazzetta/tutor/acustica/intensidade/intensidade.htm. Acesso em: 15 de dez de 2018.

JOHN NAPIER. 1998. Só Matemática. Disponível em: https://www.somatematica.com.br/biograf/napier.php. Acesso em: 15 de maio de 2018.

LIMA, Elon Lages. **Logaritmos**. 4.ed. Rio de Janeiro: SBM, 2009. Coleção do Professor de Matemática.

LIMA, Elon Lages. **Números e Funções Reais**. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

LISBÔA, Lívia. **Pressão**: Altos e baixos. 1998. Disponível em: https://super.abril.com.br/saude/pressao-altos-e-baixos/. Acesso em: 10 de jul de 2018.

NETTO, Luiz . **Uma Progressão Geométrica Muito Especial**. [2018]. Música Sacra e Adoração. Disponível em: https://musicaeadoracao.com.br/25387/uma-progressao-geometrica-muito-especial/. Acesso em: 12 de dez de 2017.

PENA, Rodolfo F. Alves. **Pressão Atmosférica**. [2011]. Disponível em: https://mundoeducacao.bol.uol.com.br/geografia/pressao-atmosferica.htm. Acesso em: 20 de nov de 2018.

ROQUE, Tatiana. **História da Matemática**: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

ROQUE, CARVALHO. **Tópicos da história da Matemática**. 1.ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012. Coleção PROFMAT.

SAGAN, Carl. **Cosmos**. Estados Unidos: Random House,1980.

SILVA, Jair Sandro Ferreira Da. Sobre o problema da variação de temperatura de um corpo. **Conection Line**. n.5, p. 44-55, 2010. Disponível em: <w.periodicos.univag.com.br/index.php/CONNECTIONLINE/article/.../123/372>. Acesso em: 12 de set de 2018.

SILVA, Margarida. **Conceito de Crescimento bacteriano**. 2018. Knoow. Disponível em: http://knoow.net/ciencterravida/biologia/crescimento-bacteriano/. Acesso em: 20 de set de 2018.

SOLUÇÃO TAMPÃO. 2015. Fop. Disponível em: https://www.fop.unicamp.br/index.php/pt-br/tampoes-bioquimica-calculos.html. Acesso em: 20 de abr de 2019.

SOUZA, Joamir Roberto de. **Novo Olhar**: Matemática: 1. 2.ed. São Paulo: FTD, 2013.

STEWART, James. **Cálculo**: volume 1. São Paulo: Cengage Learning, 2010.

APÊNDICE A - POTÊNCIA DE EXPOENTE IRRACIONAL

Seja $a \in \mathbb{R}, a > 1$. Queremos um significado para o símbolo a^x quando x é um número irracional. Para tanto precisamos dos resultados apresentados nos Lemas 1,2 e 3, a seguir:

Lema 1. Seja $a \in \mathbb{R}, a > 1$. Dado $\varepsilon > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$, tal que $a^{1/n} - 1 < \varepsilon$.

Demonstração. Temos que $(1+\varepsilon)^n \geq 1 + n\varepsilon$. Seja $n \in \mathbb{N}$, tal que $1 + n\varepsilon > a$. Assim, $(1+\varepsilon)^n > a$. Ou seja, $1 + \varepsilon > a^{1/n}$. Portanto, $a^{1/n} - 1 < \varepsilon$. E isto finaliza a demonstração do Lema 1. ■

Lema 2. Sejam $a > 1$ e $x \in \mathbb{R}$. Dado $\varepsilon > 0$, existem r e s racionais, $r < x < s$ tais que $a^s - a^r < \varepsilon$.

Demonstração. Seja $t \in \mathbb{Q}$, com $t > x$ e $\varepsilon > 0$. Se $r < x$ então $a^r < a^t$, pois $a > 1$ e $s > x, s \in \mathbb{Q}$. Portanto,

$a^s - a^r = a^r(a^{s-r} - 1)$. Tome $n \in \mathbb{N}$ tal que $a^{1/n} - 1 < a^{-t}\varepsilon \Leftrightarrow a^t\left(a^{1/n} - 1\right) < \varepsilon$.

Sejam $s_0, r_0 \in \mathbb{Q}, r_0 < x < s_0$ tais que $s_0 - r_0 < 1/n$. Daí temos que:

$$a^{s_0} - a^{r_0} = a^{r_0}(a^{s_0 - r_0} - 1) < a^t(a^{1/n} - 1) < \varepsilon.$$

Logo, dado $x \in \mathbb{R}$, existem $s_0, r_0 \in \mathbb{Q}$ com $r_0 < x < s_0$ tal que $a^{s_0} - a^{r_0} < \varepsilon$. E isto encerra a demonstração do Lema 2. ■

Lema 3. Seja $a \in \mathbb{R}$, com $a > 1$. Para cada $x \in \mathbb{R}$, existe um único real δ tal que $a^r < \delta < a^s, r, s \in \mathbb{Q}$, com $r < x < s$.

Demonstração. Seja $B(x) = \{a^r |\, r \in \mathbb{Q}, r < x\}$. Temos que $B(x) \neq 0$ e é limitado superiormente por a^{s_0}, $s_0 > x$, $s_0 \in \mathbb{Q}$. Portanto, $B(x)$, possui um supremos. Seja $\delta = supB(x)$, então $a^r \leq \delta$, $r \in \mathbb{Q}$ e como δ é a menor das cotas superiores, $\delta < a^s$, $s > x$ e $s \in \mathbb{Q}$. Mostraremos que na verdade, $a^r < \delta$, $r \in \mathbb{Q}$ com $r < x$. Se $a^{r_0} = \delta$, $r_0 \in \mathbb{Q}$ e $r_0 < x$, então existe $r_0 < r' < x$, $r' \in \mathbb{Q}$. Além disso, $a^{r_0} < a^{r'}$, com $r' < x$. Absurdo, pois $a^{r'} \in B(x)$ e $\delta = r_0$ é o supremo de $B(x)$.

Assim, $a^r < \delta < a^s$, $r < x < s$ com $r, s \in \mathbb{Q}$. Mostraremos que δ é o único com essas propriedades.

Suponhamos que $\delta' \in \mathbb{R}$ tal que $a^r < \delta' < a^s$ com $r, s \in \mathbb{Q}$ tal que $r < x < s$. Portanto, temos que $-(a^s - a^r) < \delta' - \delta < a^s - a^r \Leftrightarrow |\delta' - \delta| < a^s - a^r$, com $r < x < s$. Mas, existem $s_0, r_0 \in \mathbb{Q}$ com $r_0 < x < s_0$ tais que $a^{s_0} - a^{r_0} = \frac{|\delta' - \delta|}{2}$. Portanto teremos que:

$$|\delta' - \delta| < \frac{|\delta' - \delta|}{2}.$$

Absurdo. Assim concluímos a demonstração do Lema 3. ■

Com base neste último Lema, definimos para $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, $a^x = \delta$. Note que se $x \in \mathbb{Q}$ e a um número real maior do que 1. Então, $a^r < a^x < a^s$ com $r < x < s$. Por unicidade temos que $a^x = \delta$. Assim, dado $x \in \mathbb{R}$, temos que a^x é o único número real tal que $a^r < a^x < a^s$ com $r < x < s$.

Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ uma função definida por $f(x) = a^x$. Conforme o que foi visto anteriormente f está bem definida.

Iremos a seguir demonstrar que f é uma função contínua em todo seu domínio.

Proposição 4. A função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ definida por $f(x) = a^x$ é contínua.

Demonstração. Sejam $\varepsilon > 0$ e $p_0 \in \mathbb{R}$. Existem $s_0, r_0 \in \mathbb{Q}$ com $r_0 < p_0 < s_0$, tais que $a^{s_0} - a^{r_0} < \varepsilon$. Seja $p \in]r_0, s_0[$. Portanto, $a^{r_0} < a^p < a^{s_0}$ e $a^{r_0} < a^{p_0} < a^{s_0}$. Daí, temos que:

$$a^{s_0} - a^{r_0} < a^p - a^{p_0} < a^{s_0} - a^{r_0} \Leftrightarrow |a^p - a^{p_0}| < a^{s_0} - a^{r_0} < \varepsilon$$

Sendo assim,

$$|f(p) - f(p_0)| < \varepsilon$$

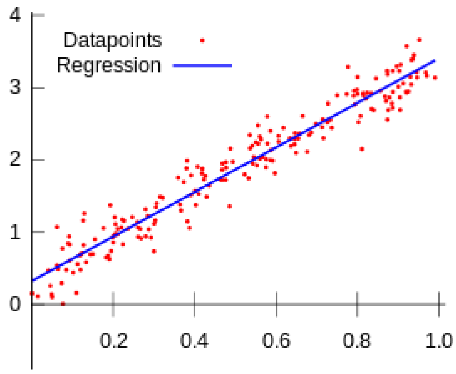
Portanto, f é contínua em p_0. Logo f é contínua em $\mathbb{R}$.

Segue da continuidade que se $r_n \to x$, $r_n \in \mathbb{Q}, x \in \mathbb{R}$, então $lim\, a^{r_n} = a^x$, onde $\lim r_n = x$.

APÊNDICE B - REGRESSÃO LINEAR

A regressão linear é a função afim que melhor se aproxima dos pontos de dispersão de determinado gráfico. Para exemplificarmos observe a ilustração a seguir:

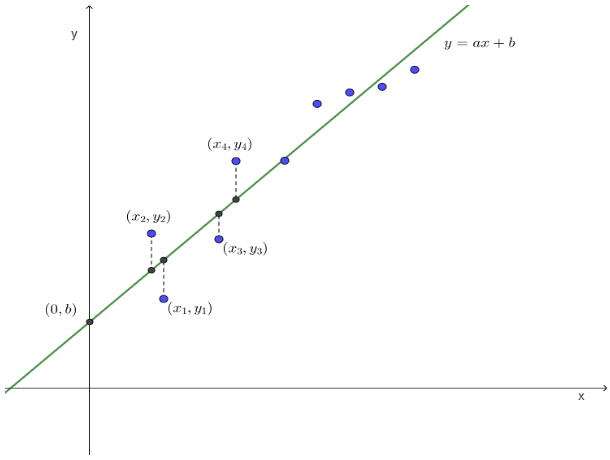
Gráfico 1- Exemplo de regressão linear



Fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/Regress%C3%A3o_linear

Esta é a reta que melhor se aproxima aos pontos deste gráfico. Nosso objetivo é descobrir uma expressão algébrica para este tipo de reta.

Gráfico 2– Outro exemplo de regressão linear



Fonte: Autor, 2018.

Chamaremos de erro a distância de cada um dos pontos (x_n, y_n) do plano cartesiano com n natural a reta de equação $y = ax + b$. Portanto, teremos:

$$E_1 = |y_1 - (ax_1 + b)|; E_2 = |y_2 - (ax_2 + b)|; \dots ; E_n = |y_n - (ax_n + b)|$$

Onde $E_1, E_2, \dots, E_n$. São os erros de 1 a n.

Utilizaremos a seguir o método dos mínimos quadrados para minimizar o erro dos pontos do plano cartesiano à reta (STEWART, 2010).

$$\sum_{k=1}^{n} E_k^2 = E_1^2 + E_2^2 + \cdots + E_n^2$$

Portanto,

$$\sum_{k=1}^{n} E_k^2 = (y_1 - (ax_1 + b))^2 + (y_2 - (ax_2 + b))^2 + \cdots + (y_n - (ax_n + b))^2 \quad (1)$$

Para facilitar os cálculos iremos desenvolver a expressão $(y_n - (ax_n + b))^2$ e as demais expressões para $n = 1,2,3$ ... seguiram o mesmo modelo.

$$(y_n - (ax_n + b))^2 = y_n^2 - 2y_n ax_n - 2y_n b + a^2x_n^2 + 2ax_n b + b^2 \quad (2)$$

Logo, no desenvolvimento da equação (1) aparecerão os somatórios de cada uma das parcelas da equação (2). Daí, teremos a seguinte expressão:

$$\sum_{k=1}^{n} E_k^2 = \sum_{k=1}^{n} y_k^2 - 2a\sum_{k=1}^{n} y_k x_k - 2b\sum_{k=1}^{n} y_k + a^2\sum_{k=1}^{n} x_n^2 + 2ab\sum_{k=1}^{n} x_n + b^2\sum_{k=1}^{n} 1 \quad (3)$$

Sabendo que:

$$\frac{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + \cdots + y_n^2}{n} = \overline{y_n}^2 \Leftrightarrow y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + \cdots + y_n^2 = n\overline{y_n^2}$$

Onde $\overline{y_n^2}$é a média aritmética dos quadrados dos y_n termos com n natural.

$$\frac{y_1x_1 + y_2x_2 + y_3x_3 + \cdots + y_nx_n}{n} = \overline{y_nx_n} \Leftrightarrow y_1x_1 + y_2x_2 + y_3x_3 + \cdots + y_nx_n = n\overline{y_nx_n}$$

Onde $\overline{y_nx_n}$ é a média aritmética dos y_nx_n termos com n natural.

$$\frac{y_1 + y_2 + y_3 + \cdots + y_n}{n} = \overline{y_n} \Leftrightarrow y_1 + y_2 + y_3 + \cdots + y_n = n\overline{y_n}$$

Onde $\overline{y_n}$ é a média aritmética dos y_n termos com n natural.

$$\frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \cdots + x_n^2}{n} = \overline{x_n^2} \Leftrightarrow x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \cdots + x_n^2 = n\overline{x_n^2}$$

Onde $\overline{x_n^2}$ é a média aritmética dos x_n^2 termos com n natural.

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n}{n} = \overline{x_n} \Leftrightarrow x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n = n\overline{x_n}$$

Onde $\overline{x_n}$ é a média aritmética dos x_n termos com n natural.

Substituindo os valores encontrados anteriormente na equação (3) temos que:

$$\sum_{k=1}^{n} E_k^2 = n\overline{y_n^2} - 2an\overline{y_nx_n} - 2bn\overline{y_n} + a^2n\overline{x_n^2} + 2abn\overline{x_n} + nb^2$$

Como queremos descobrir a equação da reta $y = ax + b$ que melhor se aproxima do conjunto de pontos (x_n, y_n), iremos descrever o somatório acima como uma função de duas variáveis a e b e aplicar o método dos mínimos quadrados da seguinte forma:

$$f(a, b) = \sum_{k=1}^{n} E_k^2$$

Como $f(a, b)$ é uma função diferenciável, então podemos calcular as derivadas parciais em relação ao coeficiente angular a e o coeficiente linear b.

Portanto,

$$\frac{\partial f}{\partial a} = -2n\overline{y_n x_n} + 2an\overline{x_n^2} + 2bn\overline{x_n}$$

e,

$$\frac{\partial f}{\partial b} = -2n\overline{y_n} + 2an\overline{x_n} + 2bn$$

Segundo Stewart (2010), a interpretação geométrica das derivadas parciais são as respectivas inclinações das retas tangentes a função $f(a, b)$ ou seja, representam a taxa de variação. Portanto, se igualarmos as derivadas parciais a zero. Encontraremos os valores que minimizam os erros dos coeficientes, angular e linear.

$$\frac{\partial f}{\partial a} = 0 \Leftrightarrow -2n\overline{y_n x_n} + 2an\overline{x_n}^2 + 2bn\overline{x_n} = 0 \Leftrightarrow \overline{y_n x_n} - a\overline{x_n^2} - b\overline{x_n} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial b} = 0 = -2n\overline{y_n} + 2an\overline{x_n} + 2bn = 0 \Leftrightarrow \overline{y_n} - a\overline{x_n} - b = 0$$

Reparem que as duas equações acima satisfazem a equação da reta $y = ax + b$. Pois:

$$\overline{y_n x_n} - a\overline{x_n}^2 - b\overline{x_n} = 0 \Leftrightarrow \frac{\overline{y_n x_n}}{\overline{x_n}} = \frac{a\overline{x_n^2}}{\overline{x_n}} + \frac{b\overline{x_n}}{\overline{x_n}} \Leftrightarrow \frac{\overline{y_n x_n}}{\overline{x_n}} = \frac{a\overline{x_n^2}}{\overline{x_n}} + b \ (4)$$

$$\overline{y_n} - a\overline{x_n} - b = 0 \Leftrightarrow \overline{y_n} = a\overline{x_n} + b \ (5)$$

Ou seja, a reta passa pelos pontos $\left(\frac{\overline{x_n^2}}{\overline{x_n}}, \frac{\overline{y_n x_n}}{\overline{x_n}}\right)$ e $(\overline{x_n}, \overline{y_n})$. Portanto, estes pontos estão inseridos na linha *ótima*. Fazendo a diferença entre as equações (4) e (5). Temos que:

$$\frac{\overline{y_n x_n}}{\overline{x_n}} - \overline{y_n} = \frac{a\overline{x_n^2}}{\overline{x_n}} - a\overline{x_n} \Leftrightarrow a\left(\frac{\overline{x_n^2}}{\overline{x_n}} - \overline{x_n}\right) \Leftrightarrow a = \frac{\frac{\overline{y_n x_n}}{\overline{x_n}} - \overline{y_n}}{\frac{\overline{x_n^2}}{\overline{x_n}} - \overline{x_n}} = \frac{\overline{y_n x_n} - \overline{x_n}\,\overline{y_n}}{\overline{x_n^2} - \overline{x_n}^2}$$

Substituindo o valor de a encontrado anteriormente na expressão $\overline{y_n} = a\overline{x_n} + b$. Temos que:

$$\overline{y_n} = \frac{\overline{y_n x_n} - \overline{x_n}\,\overline{y_n}}{\overline{x_n^2} - \overline{x_n}}\overline{x_n} + b \Leftrightarrow b = \overline{y_n} - \frac{\overline{y_n x_n} - \overline{x_n}\,\overline{y_n}}{\overline{x_n^2} - \overline{x_n}^2}\overline{x_n}$$

Portanto, a reta de regressão linear será dada pela seguinte expressão:

$$y = \left(\frac{\overline{y_n x_n} - \overline{x_n}\,\overline{y_n}}{\overline{x_n^2} - \overline{x_n}^2} \right) x + \left(\overline{y_n} - \frac{\overline{y_n x_n} - \overline{x_n}\,\overline{y_n}}{\overline{x_n^2} - \overline{x_n}^2} \overline{x_n} \right)$$

Exemplo1. Qual é a reta que melhor aproxima os pontos do plano cartesiano (1,2); (2,1); (4,3).

$\bar{x} = \frac{1+2+4}{3} \cong 2{,}33$, $\bar{y} = \frac{2+1+3}{3} = 2$, $\overline{xy} = \frac{1\cdot2+2\cdot1+4\cdot3}{3} \cong 5{,}33$ e $\overline{x^2} = \frac{1^2+2^2+4^2}{3} = 7$

Portanto,

$$a = \frac{5{,}33 - 2{,}33 \cdot 2}{7 - (2{,}33)^2} \cong 0{,}42$$

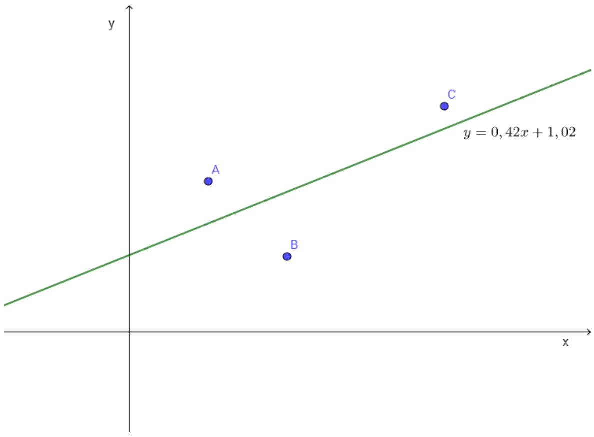
e,

$$b = 2 - 0{,}42 \cdot 2.33 \cong 1{,}02$$

Portanto a reta que melhor aproxima estes pontos é dada pela seguinte expressão:

$$y = 0{,}42x + 1{,}02$$

Gráfico 3– Reta de regressão linear formada pelos pontos A, B e C



Fonte: Autor, 2018.

Será que é possível utilizarmos o método dos mínimos quadrados para determinar uma função tipo exponencial que melhor se aproxime dos pontos do plano cartesiano?

Certamente, basta fazermos uma mudança de variável.

Seja a reta de equação $y = b' + xa'$. Dado uma função exponencial $Y = B \cdot e^{Ax}$. Então temos que:

$$\ln Y = \ln\,(B \cdot e^{Ax}) = \ln B + Ax.$$

Fazendo:

$$\ln B = b' \Leftrightarrow e^{b'} = B$$

e,

$$a' = A$$

Temos que:

$$Y = B \cdot e^{Ax} \Leftrightarrow Y = e^{b'} \cdot e^{a'x}$$

Portanto, é possível encontrar a função exponencial que melhor se aproxime dos pontos do plano cartesiano utilizando o método dos mínimos quadrados fazendo uma mudança de variáveis como visto anteriormente. Observe o exemplo a seguir:

Exemplo 2. Suponha que determinado crescimento de uma população $P(t)$, seja dada em função do tempo t. Na tabela abaixo mostram os valores registrados da população em dado instante t.

Tabela 1- Crescimento de determinada população em um tempo t

Tempo (t)	População $P(t)$	$\ln P(t)$	t^2	$t \cdot \ln P(t)$
1	2,10	0,7	1	0,74194
2	3,02	1,1	4	2,21051
3	4,75	1,6	9	4,67443
4	7,18	2,0	16	7,8852
5	11,21	2,4	25	12,084

Fonte: Autor, 2018

Seja $\bar{t}, \overline{P(t)}, \overline{\ln P(t)}, \overline{t^2}, \overline{t \cdot \ln P(t)}$ as respectivas médias dos valores de $t, P(t), ln\, P(t), t^2,\ t \cdot ln\, P(t)$.

Sendo assim temos que:

$$\bar{t} = \frac{1+2+3+4+5}{5} = 3$$

$$\overline{\ln P(t)} = \frac{0,7+1,1+1,6+2,0+2,4}{5} = 1,56$$

$$\overline{t^2} = \frac{1^2+2^2+3^2+4^2+5^2}{5} = 11$$

$$\overline{t \cdot \ln P(t)} = 0,7 \cdot 1 + 1,1 \cdot 2 + 1,6 \cdot 3 + 2,0 \cdot 4 + 2,4 \cdot 5 = \frac{27,7}{5} = 5,54$$

Daí, o coeficiente angular da reta será dado por:

$$a' = \frac{\overline{t \cdot \ln P(t)} - \bar{t} \cdot \overline{\ln P(t)}}{\overline{t^2} - \bar{t}^2} = \frac{5,54 - 3 \cdot 1,56}{11 - 3^2} = 0,43$$

Como visto anteriormente, o ponto $(\bar{t}, \overline{P(t)})$ pertence ao gráfico da reta de regressão linear. Então, com a mudança de variável, o ponto $(\bar{t}, \overline{ln\ P(t)})$ irá pertencer ao gráfico da reta $y = b + a'x$. Portanto, temos que:

$$b = \overline{\ln P(t)} - a'\bar{t} \Leftrightarrow b = 1{,}56 - 0{,}43 \cdot 3 = 0{,}27$$

Logo, a reta de regressão para o caso exponencial será dada pela seguinte equação:

$$y = 0{,}27 + 0{,}43x \quad (6)$$

Agora, para obter a função $Y = B \cdot e^{Ax}$, basta fazer:

$$\ln B = 0{,}27 \Leftrightarrow B = e^{0{,}27} = 1{,}31.$$

E,

$$a' = A = 0{,}43.$$

Portanto, tem-se que:

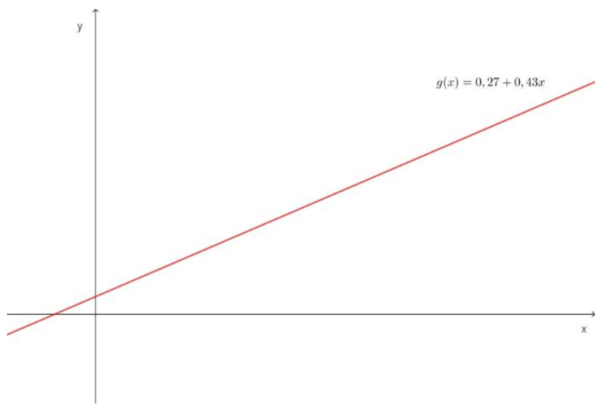
$$Y = 1{,}31 \cdot e^{0{,}43x} \quad (7)$$

Esta é a curva exponencial que melhor se aproxima dos pontos fornecidos na tabela 5.

Observação 3. A vantagem de utilizar este método para o caso exponencial é que podemos trabalhar com valores das imagens mais próximas quando ajustamos a curva exponencial para uma reta. E os pontos ficam melhores para serem observados, isto ocorre pois, para cada acréscimo aritmético no domínio de uma função linear resulta em um acréscimo aritmético na imagem, diferente das funções tipo exponencial, onde para cada acréscimo aritmético no domínio desta função resulta em um acréscimo geométrico nos valores da imagem.

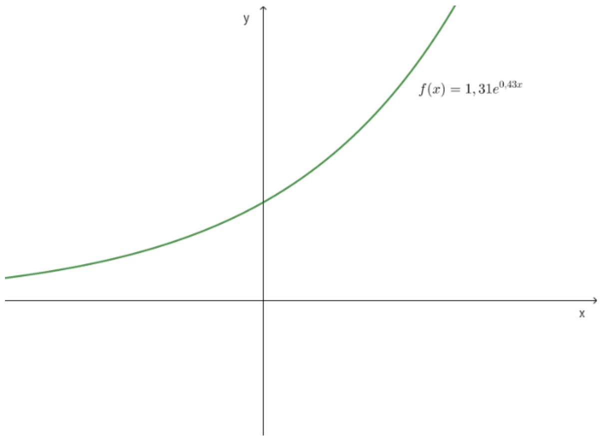
Observe os dois gráficos a seguir, que representam respectivamente as duas funções (6) e (7) no plano cartesiano.

Gráfico 4– Reta de regressão linear para o caso exponencial



Fonte: Autor, 2018.

Gráfico 5- Função tipo exponencial que melhor se aproxima dos pontos da tabela 5



Fonte: Autor, 2018.

É evidente que aplicamos a regressão linear para o caso exponencial, na modelagem de problemas quando se tem a certeza de que a curva que melhor se ajuste aos pontos do plano cartesiano é do tipo exponencial. É fato, que dado um conjunto de pontos quaisquer no plano cartesiano, podemos determinar a expressão algébrica da curva tipo exponencial que melhor se ajuste a esses pontos, mesmo não sendo a curva apropriada para tal modelagem.

Exemplo 4. Encontre a expressão algébrica da curva tipo exponencial que melhor se aproxime dos pontos $(0,1), (1,2)$ e $(2,3)$.

Observe que para cada acréscimo aritmético na coordenada x temos também um acréscimo aritmético em y, ou seja, estamos nos referindo a uma função afim. Portanto, teremos uma equação do tipo $y = ax + b$. Quando $x = 0, y = 1$. Daí, $b = 1$. Quando $x = 1, y = 2$. Daí, $a + 1 = 2 \Leftrightarrow a = 1$. Portanto, $y = x + 1$. Esta é a curva que melhor se aproxima destes pontos. Porém, podemos encontrar a curva exponencial que melhor se ajusta aos dados. Observe:

$$\bar{x} = \frac{0 + 1 + 2}{3} = 1$$

$$\overline{\ln y} = \frac{0 + 0,7 + 1,1}{3} = 0,6$$

$$\overline{x^2} = \frac{0^2 + 1^2 + 2^2}{3} = \frac{5}{3}$$

$$\overline{x \cdot y} = \frac{0 \cdot 0 + 1 \cdot 0,7 + 2 \cdot 1,1}{3} = 1$$

$$a' = \frac{\overline{x \cdot \mathrm{y}} - \bar{x} \cdot \overline{\ln y}}{\overline{x^2} - \bar{x}^2} = \frac{1 - 1 \cdot 0,6}{\frac{5}{3} - 1^2} = 0,6$$

e,

$$b = \overline{\ln y} - a'\bar{x} = 0{,}6 - 0{,}6 = 0$$

Onde a' e b' são respectivamente, os coeficiente angular e linear da reta que melhor se aproxima dos pontos $\big(0, x(0)\big), (1, x(1))$ e $\big(2, x(2)\big)$.

Logo, a função do tipo exponencial denotada por $Y = B \cdot e^{At}$. Terá os seus valores A e B iguais a:

$$A = 0{,}6$$

E,

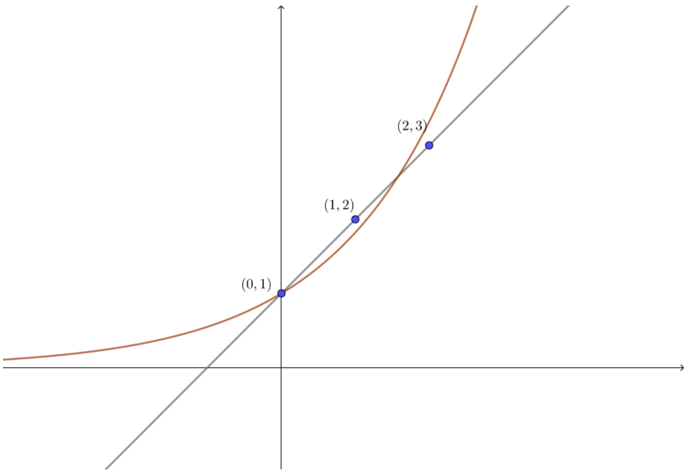
$$\ln B = 0 \Leftrightarrow B = 1$$

Portanto,

$$Y = e^{0{,}6x}$$

A figura a seguir ilustra parte do gráfico das funções $y = x + 1$ e $y = e^{0{,}6x}$.

Gráfico 6- Parte do esboço das funções $y = x + 1$ e $y = e^{0{,}6x}$



Fonte: Autor, 2018.