

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
MESTRADO EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT

**Sequências didáticas inéditas e introdução à esperança
matemática aplicadas em cursos pré-vestibulares**

Felipe Grilli Freitas

São Carlos – SP
Fevereiro de 2019

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
MESTRADO EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT

Sequências didáticas inéditas e introdução à esperança matemática aplicadas em cursos pré-vestibulares

Felipe Grilli Freitas

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado em Matemática em Rede Nacional, da Universidade Federal de São Carlos, como parte dos requisitos para a obtenção do Título de Mestre.

Orientador: Prof. Dr. João Carlos Vieira Sampaio.

São Carlos – SP
Fevereiro de 2019

Ficha catalográfica

GRILLI FREITAS, FELIPE

Sequências didáticas inéditas e introdução à esperança matemática aplicadas em cursos pré-vestibulares / FELIPE GRILLI FREITAS. -- 2019.
71 f. : 30 cm.

Dissertação (mestrado)-Universidade Federal de São Carlos, campus São Carlos, São Carlos

Orientador: João Carlos Vieira Sampaio

Banca examinadora: Ivo Machado da Costa, Eliris Cristina Rizziolli

Bibliografia

1. Sequências didáticas. 2. Introdução à esperança matemática. 3. Introdução ao conceito de valor esperado. I. Orientador. II. Universidade Federal de São Carlos. III. Título.

Ficha catalográfica elaborada pelo Programa de Geração Automática da Secretaria Geral de Informática (SIn).

DADOS FORNECIDOS PELO(A) AUTOR(A)

Bibliotecário(a) Responsável: Ronildo Santos Prado – CRB/8 7325

Folha de aprovação



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Folha de Aprovação

Assinaturas dos membros da comissão examinadora que avaliou e aprovou a Defesa de Dissertação de Mestrado do candidato Felipe Grilli Freitas, realizada em 26/02/2019:

Prof. Dr. João Carlos Vieira Sampaio
UFSCar

Profa. Dra. Eliris Cristina Rizzioli
UNESP

Prof. Dr. Ivo Machado da Costa
UFSCar

Dedicatória

Dedico este trabalho aos meus pais e a todas as pessoas que, através da educação e do amor, dedicam-se a tornar o mundo um lugar mais justo.

É fazendo que se aprende a fazer aquilo que se deve aprender a fazer.

Aristóteles.

Há três métodos para ganhar sabedoria: primeiro, por reflexão, que é o mais nobre; segundo, por imitação, que é o mais fácil; e terceiro, por experiência, que é o mais amargo.

Confúcio

A experiência é o nome que damos aos nossos erros.

Oscar Wilde.

Agradecimentos

Primeiramente ao Prof. João Carlos Vieira Sampaio, por me mostrar que meu trabalho de mestrado residia em meu próprio trabalho diário;

Ao Alexandre Grilli Freitas, meu irmão, por ser um exemplo de dedicação aos trabalhos em matemática;

Ao Edson, meu Pai, quem conheço mais a cada dia, e que sem ele este trabalho não existiria;

À Marina, minha companheira, pela coragem e pelas palavras nos momentos difíceis;

À Rosane, minha mãe, pelo amor que eu não saberia descrever, mas a cada dia aprendo a retribuir;

A todos os professores do PROFMAT.

E finalmente às pessoas que apareceram em minha vida em 2018 para iluminar meus momentos mais complicados.

Resumo

Na rotina dos cursos pré-vestibulares costuma-se trabalhar, em um ano, os diversos conteúdos que são estudados no ensino médio, conferindo muitas vezes maior profundidade ou ênfase relativas para alguns assuntos. Depara-se com alunos já bem qualificados, outros menos. Alguns, estudiosos há alguns anos e conhecedores da maioria das questões de exames anteriores, precisam assentar e aprofundar para, além de acertar questões, concluí-las em pequenos intervalos de tempo; outros possuem um contato muito mais superficial e inicial com os conteúdos incidentes nos grandes vestibulares. Neste sentido, este trabalho apresenta sequências de ensino constituídas de questões escritas pelo autor, trabalhadas a partir da metodologia da engenharia didática, aplicadas para a revisão de diversos conteúdos fundamentais para os vestibulares do ENEM, FUVEST, UNESP, UNICAMP e UNIFESP, em todas as suas fases, visando aprimorar os diversos níveis de conhecimento dos alunos. Além disso, faz-se uma introdução, através de problemas, ao conceito de esperança matemática. Sendo assim, este trabalho propõe-se a apresentar atividades com questões inéditas, formas atrativas de se desenvolver as aulas e possibilidades para apresentação de um conceito matemático novo para os alunos.

Palavras-chave: Ensino de Matemática, Prática docente, Esperança Matemática.

Abstract

In the routine of the pre-university courses one tends to work, in a year, the diverse contents which are studied in high school, often giving greater depth or emphasis on some subjects. There are already well-qualified students, others less. Some students, dedicated to studies for some years, and knowledgeable of most of the questions of previous exams, need to settle and deepen for, besides fixing questions, completing them in short intervals of time; others have a contact much more superficial and initial with the contents incident on the great university entrance exams. In this sense, this work presents sequences of teaching composed of questions written by the author, worked on the methodology of didactic engineering, applied for the revision of several fundamental contents for the university entrance exams ENEM, FUVEST, UNESP, UNICAMP and UNIFESP, in all your phases, aiming to improve the different levels of student's knowledge . In addition, there is an introduction, through problems, to the concept of statistical hope. Therefore, this work proposes to present activities with unpublished questions, in forms attractive to develop the classes and possibilities to present a new mathematical concept for students.

Keywords: Teaching of Mathematicas, Teaching Practice, Expected Value.

Lista de Figuras

1.1	Introdução	1
4.1	Questão 2	11
4.2	Questão 4	12
4.3	Gráfico que responde à questão 6	19
4.4	Atividade 2 - Questão 1	20
4.5	Atividade 3 – Figura relativa ao item b da questão 1	24
4.6	Atividade 3 – Figura relativa ao item c da questão 1	24
4.7	Atividade 3 - Figura relativa ao item c da questão 2	25
4.8	Atividade 3 - Figura relativa ao item c da questão 2	28
4.9	Planilha – Jogo do bicho	31
A.1	Atividade 3 - Folha de questões.	41
A.2	Atividade 3 - Folha de questões.	42
A.3	Atividade 3 – Obtenção, por um aluno, de seno e cosseno maiores que 1 – Observação i, página 33.	43
A.4	Atividade 3 – Observação ii, página 33.	43
A.5	Atividade 3 - Observação iii.	44
A.6	Atividade 3 - Observação iv.	45
A.7	Atividade 3 – Observação v.	46
A.8	Atividade 3 - Observação vi.	47
A.9	Atividade 3 – Gráfico bem construído.	48
A.10	Atividade 3 – Solução incompleta.	49

A.11 Atividade 3 – Observação i sobre a questão 2, página 33.	50
-----------------------------------------------------------------------	----

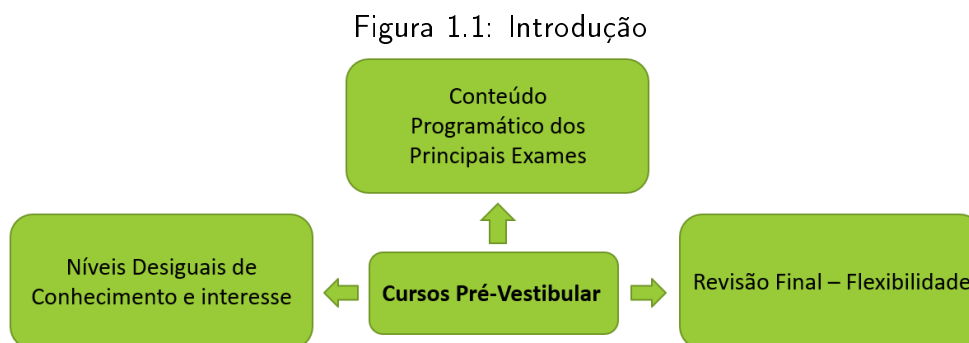
Sumário

1	Introdução	1
2	Esperança matemática	3
2.1	Exemplos	3
2.1.1	Exemplo 1	3
2.1.2	Exemplo 2	4
2.1.3	Exemplo 3	4
3	Engenharia didática	7
3.1	Análises prévias	7
3.2	Concepção e análise <i>a priori</i> de experiências didático-pedagógicas a serem desenvolvidas na sala de aula de matemática	8
3.3	Implementação da experiência	8
3.4	Análise <i>a posteriori</i> e validação da experiência	8
4	As atividades	9
4.1	Análises prévias	9
4.2	Concepção e análise <i>a priori</i> – apresentação das atividades	10
4.2.1	Atividade 1	10
4.2.2	Atividade 2	19
4.2.3	Atividade 3	23
4.3	Implementação da experiência, análise <i>a posteriori</i> e validação	28
4.3.1	Atividade 1	28
4.3.2	Atividade 2	30

4.3.3	Atividade 3	32
5	Considerações finais	37
	Referências Bibliográficas	37
A	Registros em imagens da atividade 3	41

1 Introdução

Nos cursos pré-vestibulares, ao decorrer do ano, estudam-se os conteúdos programáticos dos principais exames, geralmente num sistema de módulos, onde por exemplo, numa aula módulo fala-se de produto notável e fatoração. Ao fim desses módulos, costuma-se entrar no período de revisão, quando há maior liberdade para transitar pelos assuntos da matemática básica. Neste contexto que se aplicou a ideia de aulas que relacionassem temas matemáticos através de problemas costurados e abordagens diferentes das tradicionais, buscando integrar os diversos níveis de conhecimento dos estudantes.



Fonte: O próprio autor.

Fez-se uso de sequências didáticas com diversos problemas inéditos, relacionando e ampliando os conceitos a partir de atividades mais participativas e menos convencionais para os alunos e professor, que foram sendo dadas gradualmente adaptando-se com cuidado à rotina tradicional da escola.

As aulas passaram por diversos conteúdos matemáticos recorrentes nas provas dos exames ENEM, FUVEST, UNESP, UNICAMP e UNIFESP, tendo sido possível encaixar problemas envolvendo o conceito de esperança matemática.

Dentro dessas sequências, foram aplicados problemas escritos durante o curso do programa PROFMAT, e outros problemas de inspirações mais antigas, que geralmente surgiam

a partir de problemas intrigantes de vestibulares anteriores, além dos mais importantes para o professor: os que nasceram da integração destes passados e futuros da mente enquanto matemático e pessoa.

No capítulo 1 há uma breve explanação do conceito esperança matemática.

No capítulo 2 há uma breve apresentação da engenharia didática.

No capítulo 3 se dá todo o desenvolvimento e aplicação do trabalho de acordo com as fases da engenharia didática.

Depois, têm-se as considerações finais do autor.

Espera-se que esta leitura incite a criatividade de professores, para que se possa conduzir com leveza as frequentes dúvidas e desafios que surgem no decorrer do exercício dessa profissão e de uma maneira conjunta ensinar, aprendendo ainda além do que se ensina, estando assim em constante evolução.

2 Esperança matemática

A esperança matemática trata de diversas aplicações para os conceitos de probabilidades estudados no ensino básico e presentes no cotidiano, por exemplo, nos jogos de azar. A partir de [?] este conceito pode ser definido da seguinte forma:

Seja X uma variável aleatória que pode assumir os valores $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$, com probabilidades respectivas iguais a $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$, então o valor esperado $E(X)$ da variável X , é:

$$E(X) = p_1 \cdot x_1 + p_2 \cdot x_2 + p_3 \cdot x_3 + \dots + p_n \cdot x_n$$

Deve-se observar que $p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_n = 1$, assim percebe-se que o valor esperado nada mais é do que a média ponderada dos valores que a variável X pode assumir.

De fato:

$$\frac{p_1 \cdot x_1 + p_2 \cdot x_2 + p_3 \cdot x_3 + \dots + p_n \cdot x_n}{p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_n} = p_1 \cdot x_1 + p_2 \cdot x_2 + p_3 \cdot x_3 + \dots + p_n \cdot x_n = E(X)$$

Em seguida, serão exibidos alguns exemplos práticos extraídos do livro Modelos probabilísticos aplicados à engenharia de produção de Reinaldo Morabito

2.1 Exemplos

2.1.1 Exemplo 1

Lança-se um dado equilibrado várias vezes. Seja F a variável aleatória que representa a face de cima obtida em cada lançamento. Qual é o valor esperado para F ?

Observemos que F pode assumir os valores 1, 2, 3, 4, 5, 6, assim, denotando por $E(F)$ o valor esperado pedido, temos:

$$E(F) = 1/6 \cdot 1 + 1/6 \cdot 2 + 1/6 \cdot 3 + 1/6 \cdot 4 + 1/6 \cdot 5 + 1/6 \cdot 6 = 3,5$$

É claro que a face 3,5 não existe, contudo, o valor representa um resultado médio esperado para F.

2.1.2 Exemplo 2

Um grande lote de peças é produzido. Cada peça tem probabilidade 0,9 de ser perfeita e 0,1 de ser defeituosa. Lucra-se 5 reais por peça se ela for perfeita, e se tem um prejuízo de 1 real se a peça for defeituosa. Qual é o lucro médio por peça desse lote?

Seja L a variável aleatória que representa o lucro por peça, L pode assumir os valores 5, -1 assim:

$$E(L) = 0,9 \cdot 5 + 0,1 \cdot (-1) = 4,4$$

Isto é, 4,4 reais é o melhor "palpite" para o lucro médio por peça quando muitas peças são produzidas.

2.1.3 Exemplo 3

Um equipamento tem probabilidade $p = 1/5$ de falhar em um dia. Lucra-se 2 reais se ele não falhar nenhum dia durante uma semana de 5 dias, 1 real se ele falhar 1 ou 2 dias e -1 real se ele falhar 3 ou mais dias.

- Quantos dias espera-se que o equipamento falhe por semana?
- Qual o lucro esperado por semana?

Temos as seguintes probabilidades:

$$\text{Probabilidade de falhar 0 dias: } (4/5)^5 = 0,32768$$

$$\text{Probabilidade de falhar 1 dia: } (4/5)^4 \cdot (1/5) \cdot 5 = 0,4096$$

$$\text{Probabilidade de falhar 2 dias: } (4/5)^3 \cdot (1/5)^2 \cdot 10 = 0,2048$$

Probabilidade de falhar 3 dias: $(4/5)^2 \cdot (1/5)^3 \cdot 10 = 0,0512$

Probabilidade de falhar 4 dias: $(4/5) \cdot (1/5)^4 \cdot 5 = 0,0064$

Probabilidade de falhar 5 dias: $(1/5)^5 = 0,00032$

Assim, o valor esperado E, pedido no item a, é dado por:

$$E = 0,32768 \cdot 0 + 0,4096 \cdot (1) + 0,2048 \cdot (2) + 0,0512 \cdot (3) + 0,0064 \cdot (4) + 0,00032 \cdot (5) = 1$$

E o valor esperado do lucro, pedido no item b, é:

$$E(L) = 0,32768 \cdot 2 + 0,4096 \cdot (1) + 0,2048 \cdot (1) + 0,0512 \cdot (-1) + 0,0064 \cdot (-1) + 0,00032 \cdot (-1) = 1,21184 \text{ reais.}$$

Vale observar que na aplicação deste conceito em sala de aula, em vez de usar nos exercícios o termo esperança matemática ou valor esperado, utilizou-se valor médio, justamente por ser uma expressão que remete a algo usual no vocabulário matemático dos estudantes de ensino médio.

3 Engenharia didática

Nesse trabalho fez-se uso da engenharia didática enquanto método. A engenharia didática consiste na preparação de uma estratégia de ensino de um determinado conteúdo para um público específico, por meio de um método rigoroso que planeja a atividade levando-se em conta a experiência do professor para fazer previsões acerca das possíveis apreensões do estudante, as dificuldades que podem aparecer, e a tentativa de sanar essas questões por meio de uma aplicação que aprimore o tradicional, traga novos elementos e seja possível de se encaixar na escola em que será aplicada.

Esta metodologia traz o professor à posição de pesquisador, quando alia a preparação da sua aula a um método e à produção do conhecimento. De acordo com [?] a engenharia didática

tem inspiração no trabalho do engenheiro, cuja produção exige sólido conhecimento científico, básico e essencial, mas também exige enfrentamento de problemas práticos para os quais não existe teoria prévia – momentos em que é preciso construir soluções.

De maneira simplificada, este método pode ser dividido em fases, que são quatro segundo [?], e estão delineadas nas próximas quatro seções deste capítulo.

3.1 Análises prévias

A análise prévia consta de uma reflexão sobre o modelo atual de ensino. Nela, leva-se em conta os conceitos ensinados e também o contexto em que o profissional docente exerce suas funções. A partir daí propõe-se reorganizações e aprimoramentos do trabalho efetuado tradicionalmente.

3.2 Concepção e análise *a priori* de experiências didático-pedagógicas a serem desenvolvidas na sala de aula de matemática

Nesta fase, concebem-se as ideias geradas nas análises prévias e as coloca na forma de atividades a serem aplicadas na sala de aula. Estas atividades são construídas pelo professor levando-se em conta a sua experiência com o ensino, levantando-se hipóteses sobre dúvidas, aprimoramentos e possíveis efeitos que poderão ser gerados.

3.3 Implementação da experiência

Esta fase se dá na sala de aula. É quando se coloca em prática o que foi construído até então e já se iniciam as observações de acordo com as hipóteses que foram levantadas. O ambiente é de cocriação: apesar de todas as previsões feitas, costumam-se surgir novas situações, para as quais buscam-se soluções no próprio momento.

3.4 Análise *a posteriori* e validação da experiência

Após a aplicação das atividades, deve-se confrontar as hipóteses levantadas com o que ocorreu na sala de aula. É um processo detalhado: recorda-se tudo o que foi planejado e se compara com o que ocorreu na aplicação das atividades. Podem-se sugerir mudanças, adaptações e reconstruções para a validação da experiência.

No decorrer do capítulo 4, as atividades serão desenvolvidas de acordo com as fases descritas acima, passando-se assim a noção prática de como desenvolver um trabalho valendo-se de tal método.

4 As atividades

As atividades trataram de diversos temas de matemática que compõem o conteúdo programático básico do ensino médio e possuem incidência nos vestibulares como ENEM, FUVEST, UNESP, UNICAMP e UNIFESP. A liberdade nos temas se deu pois a aplicação ocorreu no período de revisão.

Uma das intenções centrais do professor autor era trazer para seus alunos o conceito de esperança matemática (ou valor esperado) através de problemas que tivessem relação com problemas de combinatória e probabilidades ao nível de matemática do ensino médio. Entretanto, tal assunto não poderia ser explorado isoladamente em atividades de sala de aula, pois as aulas de revisão, feitas em um curso de preparação para exames vestibulares, requeriam um passeio por vários temas da matemática do ensino médio. Assim, foi feita uma costura de problemas, preparados pelo professor autor, e dentre esses foram apresentados problemas introduzindo o conceito de esperança matemática, os quais chamaram substancial atenção dos alunos presentes.

4.1 Análises prévias

Os temas aplicados nas atividades devem ser estudados em seus conceitos e contextos: os conceitos são a matemática envolvida, já o contexto é o sistema de ensino em que as atividades serão aplicadas.

Atualmente, as aulas, no contexto de implementação deste trabalho, são tradicionalmente expositivas. A participação dos alunos é nula e os conteúdos matemáticos são passados com poucas relações entre si, fato que pode ser mudado num curso de revisão, quando se deve passar por todos os conceitos estudados durante o ano.

Sendo assim, nas sequências didáticas a serem aplicadas, diversos conteúdos se relacionam e questões geram outras questões. Em diversos pontos, abre-se a possibilidade de maior participação dos alunos.

4.2 Concepção e análise *a priori* – apresentação das atividades

Esta seção consiste na descrição do planejamento da atividade que seria implementada, razão pela qual boa parte da conjugação verbal se dá no futuro do presente do indicativo.

As questões passarão por diversos conteúdos, de modo que muitas vezes um conduza ao outro. Serão levados em conta hipóteses e suposições sobre as possibilidades de raciocínio dos alunos, o motivo desses comportamentos e a busca do aprimoramento e aprofundamento do que se trabalhar. As hipóteses aqui formuladas serão conflitadas e validadas na análise *a posteriori*.

4.2.1 Atividade 1

A **atividade 1** tem como parte dela as seis questões apresentadas abaixo, escritas pelo próprio autor deste trabalho. As cinco primeiras são de múltipla escolha. As seis questões também serão discutidas nesta seção e soluções serão propostas.

Enunciados das questões

Questão 1) Um professor deve escolher 3 dias dentre os 5 da semana para lecionar suas aulas em 2019, de modo que a escolha da segunda-feira exclua a escolha da sexta e vice-versa. Nessas condições, quantas são as possíveis maneiras de se fazer essa escolha?

- a) 10 b) 9 c) 8 d) 7 e) 6

Questão 2) “A cônica Hipérbole, usada por Apolônio para resolver o problema da tris-

secção de um ângulo, aparece também no dia-a-dia, sem percebermos a sua presença, como podemos ver nas figuras, onde um cone de luz intersecta uma parede paralela ao seu eixo, ou na tecnologia dos modernos sistemas de GPS (Global Positioning System).” (Adaptado de [?]).

Figura 4.1: Questão 2

Figura 1



Figura 2



Fonte: O próprio autor.

Considere que uma hipérbole centrada na origem $(0, 0)$ de um plano cartesiano ortogonal, com focos $F_1 = (0, c)$ e $F_2 = (0, -c)$, vértices $A_1 = (0, a)$ e $A_2 = (0, -a)$, vértices imaginários $B_1 = (b, 0)$ e $B_2 = (-b, 0)$ com $c^2 = b^2 + a^2$, a , b e c números reais positivos, tais que $c > a$ e $c > b$, é o conjunto dos pontos $P = (x, y)$ do plano tais que $|D_{P,F_1} - D_{P,F_2}| = 2a$ o que implica em $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$.

Levando em conta as informações acima, a região hiperbólica do plano da parede determinada pela luz da figura 4.1 pode ser dada por:

a) $y \leq x^2$

b) $y \leq -x^2$

c) $\frac{y^2}{a^2} \geq 1 + \frac{x^2}{b^2}$

d) $\frac{y^2}{a^2} \leq 1 + \frac{x^2}{b^2}$

$$e) \frac{y^2}{a^2} \leq 1 - \frac{x^2}{b^2}$$

Questão 3) Duas grandezas X e Y são inversamente proporcionais quando estão atreladas de modo que o produto dos valores que elas assumem é sempre o mesmo, uma constante.

Suponha duas grandezas x e y reais não nulas tais que $x \cdot y = 1$ para todos os valores assumidos por x e y . Essa relação forma no plano uma curva chamada

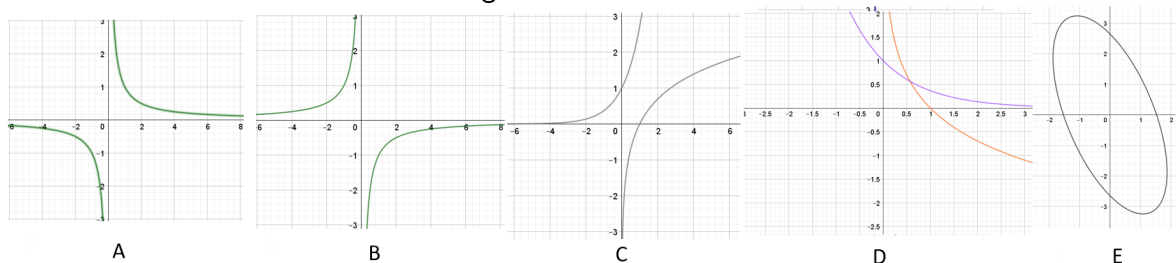
- a) Elipse
- b) Hipérbole
- c) Reta
- d) Parábola
- e) Círculo

Questão 4) Duas grandezas X e Y são inversamente proporcionais quando estão atreladas de modo que o produto dos valores que elas assumem é sempre o mesmo, uma constante.

Suponha duas grandezas x e y reais não nulas tais que $x \cdot y = 1$ para todos os valores assumidos por x e y . Essa relação formará no plano uma hipérbole rotacionada.

A curva que pode representar a inversa da função dada pela expressão $x \cdot y = 1$ é

Figura 4.2: Questão 4



Fonte: O próprio autor.

Questão 5) Considere a tabela que representa as possíveis somas que podem ocorrer no lançamento de dois dados convencionais associadas aos respectivos números de casos favoráveis. Por exemplo, (2,3) e (4,1) são 2 dos 4 casos favoráveis à soma 5.

Soma (S)	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Número (N)	1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1

Se chamarmos N o número de casos favoráveis à ocorrência de uma determinada soma S, então N está corretamente expresso em termos de S, por meio de uma função, na alternativa

- a) $N(S) = \begin{cases} 1, & S \in \{2, 3, 11, 12\} \\ 2, & S \in \{4, 5, 9, 10\} \\ 3, & S \in \{6, 7, 8\} \end{cases}$
- b) $N(S) = \begin{cases} S + 1, & S \in \{2, 3, 4, 5, 6, 7\} \\ -S + 13, & S \in \{8, 9, 10, 11, 12\} \end{cases}$
- c) $N(S) = \begin{cases} S - 1, & S \in \{2, 3, 4, 5, 6, 7\} \\ -S + 13, & S \in \{7, 8, 9, 10, 11, 12\} \end{cases}$
- d) $N(S) = \begin{cases} S - 1, & S \in \{2, 3, 4, 5, 6, 7\} \\ S - 3, & S \in \{8, 9, 10, 11, 12\} \end{cases}$

Questão 6) É possível elaborar uma função de domínio real que passe por todos os pontos de $N(S)$ e que seja definida por uma única expressão. Determine essa expressão.

Pretende-se passar por essas questões em cerca de 70 minutos.

Discussão das questões

Nesta semana se dará o início das consideradas principais provas nos pré-vestibulares que o professor trabalha. A atividade se inicia com um problema simples de contagem, que visa a utilização de combinações simples.

Questão 1)

Este tema foi escolhido pois provoca a atenção dos alunos pelo fácil acesso e compreensão da situação problema, o que não se deve confundir com um assunto considerado fácil. Pelo contrário, muitas vezes a enxurrada de fórmulas que pode fazer parte da apresentação deste tema no ensino médio e cursinho, faz com que os alunos se confundam na solução de problemas extremamente simples, que algumas vezes poderiam ter solução na contagem mais natural que existe, a dos dedos. Em outros casos, a confusão vem pelo não entendimento dos possíveis agrupamentos que podem ser feitos.

Antes da aplicação deste problema, serão revisados os conceitos de princípio fundamental da contagem, permutações, combinações, arranjos e combinações, depois, o problema será exibido e resolvido. A maneira de se revisar e a profundidade que será dada é particular a cada professor e contexto.

A escrita do enunciado tem inspiração no clássico problema de formação de comissões envolvendo grupo de pessoas em que alguns não se dão bem.

Como complemento para o tema de contagem, caso pareça necessário na aula, poderão ser exploradas as seguintes questões:

Dois possíveis complementos para a questão 1)

Complemento 1) Num churrasco há 18 mulheres e 43 homens. Lá, cada mulher cumprimenta todas as outras uma única vez com um abraço e cada mulher cumprimenta todos os homens também com um abraço. Entre os homens, cada um cumprimenta todos os outros com um aperto de mão, com exceção de 4 amigos que chegaram juntos ao churrasco e não se cumprimentam lá. O número total de abraços e o número total de apertos de mão no churrasco são, respectivamente:

$$a) C_{18,2} + \frac{18 \cdot 43}{2!} \text{ e } C_{43,2} - C_{4,2}$$

$$b) A_{18,2} + \frac{18 \cdot 43}{2!} \text{ e } A_{43,2} - A_{4,2}$$

c) $C_{18,2} + 18 \cdot 43$ e $C_{43,2} - C_{4,2}$

d) $C_{18,2} + 18 \cdot 43$ e $C_{39,2}$

e) $C_{18,2} + \frac{18 \cdot 43}{2!}$ e $C_{39,2}$

Complemento 2) Um jogo de futebol terminou com o seguinte placar: Time A (7) × (5) Time B. De quantas formas distintas o placar poderia ter se desenvolvido até que atingisse o valor final de 7 a 5? (Um dos casos, por exemplo, é aquele em que o time B fez o 5 primeiros gols e o time A fez os últimos 7).

a) 2^{12} b) $12!$ c) 792 d) 604.800 e) 12

Os gabaritos para as questões complementares são **C** e **C**.

Questões 2, 3 e 4) Agora, possivelmente com os alunos atentos, aproveitando-se a energia do início da aula pretende-se fazer uma revisão das cônicas através da aplicação de uma situação problema com hipérbole.

Este não é um assunto da mais alta incidência nas provas que estes estudantes têm como alvo, no entanto, tem aparecido ocasionalmente, como é o caso de questões recentes nas provas do ENEM(2017) e UNESP(2018).

O enunciado da questão 2 já inicia por si só a revisão, que será ampliada pelo professor passando pelas formas da equação da hipérbole com eixo real na horizontal e na vertical, com centro no ponto $P = (x_0, y_0)$ e comparando-as com as equações das outras cônicas. Este conteúdo usualmente gera muitas dificuldades nos alunos que muitas vezes nem sequer tiveram contato com o mesmo no ensino médio.

A questão 3, tem como intuito lembrar da relação que as grandezas inversamente proporcionais têm com a função de expressão $x \cdot y = 1$, que é uma hipérbole no plano cartesiano. De certa forma, a hipérbole ser dada por essa equação pode não soar tão claro para os alunos que compararem com as equações vistas no exercício passado, dá-se então uma oportunidade

para abrir a mente à possibilidade das cônicas estarem rotacionadas no plano cartesiano, o que algebricamente gera um termo misto da forma Bxy , com B não nulo, na equação das hipérbolas, elipses e parábolas. Isto não costuma ser estudado no ensino médio.

A questão 4 trata da hipérbole da questão 3, dando forma ao seu gráfico e ainda visando revisar com os alunos como obter a expressão da função inversa de uma função dada.

Este trio de questões deve ser exaustivo para os alunos, uma vez que trata de cônicas, desigualdades no plano e funções, por isso será efetuado de maneira lenta e dando abertura às dúvidas que surgirem.

Questões 5 e 6) Aproveitando o tema funções, pretende-se realizar duas questões que relacionam funções e probabilidades, conduzindo-se os assuntos na direção do tema valor esperado.

A questão 5 trata da corriqueira situação do lançamento de dois dados. O enunciado e a tabela basicamente respondem o problema. Desse modo, vai na linha de alguns problemas de vestibular que costumam apresentar em seu próprio texto novos conceitos e ideias suficientes para que os candidatos interpretem e respondam a questão.

Esse modelo de exercício reflete também uma percepção do professor, ao enxergar que no contexto de preparo para o vestibular, pode ser mais chamativo para os alunos apresentar alguns conceitos por meio de exercícios propostos, em vez de um tratamento puramente teórico.

Na sequência, a questão 6 — que surgiu como uma pergunta do autor a si mesmo — busca olhar de maneira mais ampla para o resultado obtido há pouco. Espera-se que os alunos tenham dificuldade para responder esta questão, pois envolve a associação de uma curva no plano a determinada função modular. O estudo do módulo de um número real costuma gerar dúvidas, pois os estudantes já se deparam com dificuldades na definição de módulo. É muito comum os alunos pensarem, por exemplo, que x é um número positivo e seu oposto $-x$ é negativo, não entendendo com clareza que x é um número real, podendo ser positivo, negativo

ou nulo. O recurso visual do gráfico muitas vezes elucida estas questões, ainda que exija do aluno o conceito de domínio e imagem de uma função.

Outra dificuldade na questão 6, pode ocorrer nos movimentos gráficos. A translação horizontal pode gerar confusões, pois ao somarmos um número k positivo no argumento da função, o seu gráfico se movimento para a esquerda. Neste caso, vale a pena enfatizar que isto ocorre pois a nova função $f(x + k)$ obtida, retornará as mesmas imagens de f ao receber entradas x que sejam k unidades menor, movimentando-se assim k unidades para a esquerda. No caso em que k é negativo a análise é feita de maneira análoga.

A atividade apresentada acima deve revisar temas de grande relevância matemática, como contagem, probabilidades e funções, além das cônicas, tema menos frequente nos vestibulares. Os conteúdos se relacionam durante as questões, utilizando-se, por exemplo, função modular para resolver um problema originalmente de probabilidades.

Soluções

Questão 1) Para resolvê-la basta calcularmos o total de maneiras de efetuarmos a escolha sem as restrições da segunda-feira e da sexta-feira e depois excluirmos, do total de casos, aqueles que possuem ambas.

$$\binom{5}{3} - \binom{3}{1} = 7, \text{ que conduz à alternativa D.}$$

Questão 2) A solução planejada é identificar que a hipérbole da figura 4.1 corresponde à equação presente no próprio enunciado, e então decidir quanto ao sinal da inequação que preenche corretamente a região focal da hipérbole. Para tanto, identifica-se um ponto qualquer (x, y) do ramo superior da hipérbole: este ponto satisfaz a igualdade $\frac{y^2}{a^2} = 1 + \frac{x^2}{b^2}$, assim, se mantivermos a abscissa e deslocarmos o ponto na vertical para a região focal (para cima) desse ramo da hipérbole, observamos que o valor de y aumenta. Repetindo-se o procedimento no ramo inferior da hipérbole, ao mantermos a abscissa escolhida e deslocarmos o ponto à região focal (para baixo) desse ramo, observamos que o valor absoluto de y aumenta.

Dada a análise acima, conclui-se que nos dois casos y^2 aumenta, portanto a inequação que representa a região da hipérbole e suas partes focais é a presente na alternativa **C**:
$$\frac{y^2}{a^2} \geq 1 + \frac{x^2}{b^2}.$$

Questão 3) Relações do tipo $x \cdot y = k$, com k sendo um número real positivo expressam hipérbolas no plano cartesiano, portanto a alternativa correta é a **B**.

Questão 4) Nesta questão, deve-se concluir que a função tratada é idêntica à sua inversa, sendo a alternativa correta a **A**. Usualmente, encontra-se a expressão da inversa "trocando-se x por y " e se isolando o y .

Questão 5) Espera-se que o problema possa ser feito testando-se alternativas ou notando-se que a variação dos valores é linear. Ao entrarmos as somas 7 e 12, por exemplo, deve-se obter correspondentes 6 e 1. Assim, marca-se corretamente a letra **C**.

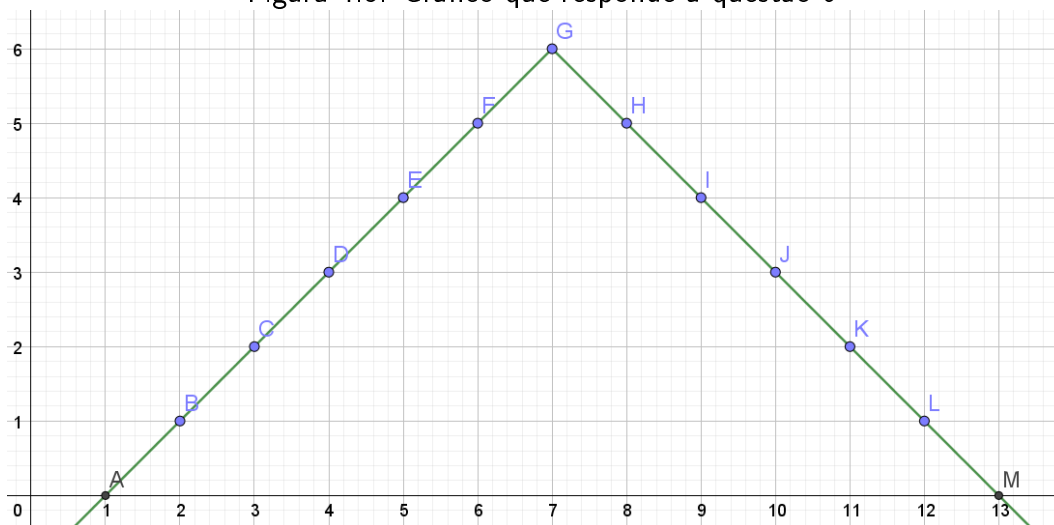
Questão 6) Observa-se que os pontos da função $N(S)$ estão contidos em duas semirretas, uma crescente e outra decrescente e a união destas duas semirretas no plano cartesiano conduz às funções modulares.

De fato:

Partindo da função $f(x) = |x|$ constrói-se, passo a passo, a função $g(x) = -f(x-7) + 6$. A função $g(x) = -|x-7| + 6$ responde à pergunta da questão.

A figura 4.3 exhibe o gráfico de g , passando pelos pontos B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, imagens da função $N(S)$ no plano cartesiano.

Figura 4.3: Gráfico que responde à questão 6



Fonte: O próprio autor via GeoGebra.

4.2.2 Atividade 2

Aproveitando-se o aparecimento das probabilidades no fim da atividade 1, dois exercícios serão propostos envolvendo o tema esperança matemática. O conceito não será apresentado previamente aos exercícios, pois deseja-se observar a postura dos estudantes em relação ao tema.

Enunciados das questões

Questão 1)

Texto e imagem utilizados na Questão 1 estão descritos na figura 4.4.

Questão 2)

Num evento beneficente, uma escola propõe um jogo de dados que consiste, pro apostador, em acertar a soma dos valores das faces obtidas no lançamento simultâneo de dois dados. Para brincar, o jogador investe 25 centavos e caso ganhe recebe 50 centavos. O jogador deve apostar em duas somas, sendo uma par e outra ímpar, não podendo essas somas serem números consecutivos. Os dois dados são lançados e calcula-se a soma das faces. O jogador

vence caso ocorra uma das somas escolhidas por ele.

Num dia em que o jogo foi realizado diversas vezes, probabilisticamente, a tendência é que

- a) esse jogo não compense para a escola dependendo da escolha dos participantes.
- b) em hipótese alguma esse jogo compense para a escola.
- c) esse jogo compense para a escola independente da escolha dos participantes.
- d) esse jogo compense para escola dependendo da escolha dos participantes.

Figura 4.4: Atividade 2 - Questão 1

Compensa apostar nesse polêmico jogo?

“São vinte e cinco animais, e cada um tem um número que o representa conforme a ordem alfabética. Exemplos: o veado, representado pelo 24, é o penúltimo da lista. O avestruz, variante do latim *vistruz*, é o número 1. O galo, que venceu a Copa Libertadores de 2013, adivinha, é 13.

Cada bicho representa quatro dezenas conforme sua posição na TABELA. O avestruz possui os números 01, 02, 03 e 04. A águia, que vem logo depois, e não me pergunte o motivo, possui os números 05, 06, 07 e 08. É possível jogar uma vez por dia.”

Extraído e adaptado da internet.

01 AVESTRUZ	05 ÁGUA	09 BURRO	13 BORBOLETA	17 CACHORRO
02 03 04	06 07 08	10 11 12	14 15 16	18 19 20
21 CABRA	25 CARNEIRO	29 CAMELO	33 COBRA	37 COELHO
22 23 24	26 27 28	30 31 32	34 35 36	38 39 40
41 CAVALO	45 ELEFANTE	49 GALO	53 GATO	57 JACARÉ
42 43 44	46 47 48	50 51 52	54 55 56	58 59 60
61 LEÃO	65 MACACO	69 PORCO	73 PAVÃO	77 PERU
62 63 64	70 71 72	74 75 76	78 79 80	
81 TOURO	85 TIGRE	89 URSO	93 VEADO	97 VACA
82 83 84	86 87 88	90 91 92	94 95 96	98 99 00

Para apostar, pela manhã, deve-se escolher um bicho. O investimento é de R\$1,00. À tarde, deve-se conferir se a dezena sorteada corresponde a uma das quatro associadas ao bicho escolhido. Se sim, o jogador recebe R\$18,00. Por exemplo, se for o 15, recebe quem apostou na borboleta.

Com o intuito de analisar se probabilisticamente vale a pena investir capital neste jogo, calcula-se o lucro médio diário de uma pessoa que joga no bicho 100 dias. Qual o valor obtido?

- a) - 0,28 b) - 1 c) 0,28 d) 2,8 e) 0

Fonte: O próprio autor.

Discussão das questões

Questão 1)

O texto foi retirado da internet¹ e tem como objetivo apresentar o funcionamento do jogo

¹EIRAS, Yuri. O jogo do bicho funciona assim. Disponível em: <<https://medium.com/@YuriEiras/o-jogo-do-bicho-funciona-assim-bf996abefb9>>. Acesso em: 21 set. 2018.

de forma descontraída. Em seguida, o enunciado é apresentado com caráter formal.

Espera-se que os alunos consigam chegar à resposta correta sem nenhuma apresentação prévia do tema esperança matemática, uma vez que os conceitos de lucro e média são conhecidos.

Pretende-se apresentar a solução somente após os alunos tentarem resolver o problema e o discutirem. Tal estratégia não é comum nos cursos pré-vestibulares.

Como possibilidade de complemento à apresentação do tema, será levada à aula uma planilha² que simula de maneira aleatória 10 jogadores que apostam por 10, 100, 1000 e 10000 vezes no jogo exibindo lucro médio obtido por eles.

Finalmente, almeja-se formalizar de maneira breve o conceito de esperança matemática.

Questão 2)

Novamente será fornecido tempo para os alunos discutirem e resolverem. Esta questão coloca novamente o aluno numa função ativa, de tomada de decisão em uma situação prática. O enunciado será apresentado primeiramente sem as alternativas para que os alunos de fato façam suas apostas.

As questões 1 e 2 dessa atividade utilizam-se de conceitos básicos de probabilidades e lucro e devem permitir a introdução ao conceito de esperança matemática.

Pelo fato de ser um conceito totalmente novo a se trabalhar pelo professor e pelas peculiaridades do contexto em que esta atividade será aplicada, será levado à aula um problema tradicional como complemento, para que não haja risco da aula terminar antes do horário ou em caso da tentativa de introdução ao assunto não ocorrer bem.

Possível complemento para a atividade 2) Considere as curvas $x^2 + y^2 = 1$ e $x^2 + y^2 - 2x + 2y - 1 = 0$ que se interceptam nos pontos A e B. Sejam r a reta que passa pelos pontos A e B e s a reta de equação $y = -kx + m$, com $k, m \in \mathbb{R}$. Em relação à

²disponível em <https://sites.google.com/site/papmem2015/sorteio.xlsx>

classificação do sistema de equações que envolve as retas r e s , está correta a alternativa³

- a) *spd* se $k = -1$
- b) *spi* se $k = -1$ e $m = 0$
- c) *spi* se $k = -1$ e $m \neq 0$
- d) *spd* se, e somente se, $k \neq -1$ e $m = 0$
- e) *si* se $k = -1$ e $m = 0$

Soluções

Questão 1)

Chamando-se de L o lucro médio pedido e levando-se em conta as probabilidades de vencer lucrando 17 reais e a de não vencer tendo um prejuízo de 1 real, teremos:

$$L = \frac{\frac{1}{25} \cdot 100 \cdot 17 + \frac{24}{25} \cdot 100 \cdot (-1)}{100} = -0,28$$

como o valor esperado da variável lucro.

Questão 2)

Uma possibilidade é calcular o lucro médio de um jogador que faça a melhor aposta possível. As apostas permitidas e que possuem maior probabilidade de sucesso para o jogador são nas somas 7 e 4 ou 5 e 8. Espera-se que os alunos concluam isso (principalmente se tiverem sido atentos à questão 5 da atividade 1).

Ainda que o jogador faça a melhor aposta possível, o seu lucro médio L será negativo. De fato:

$$L = \frac{9}{36} \cdot 0,25 + \frac{27}{36} \cdot (-0,25) < 0$$

³*spd* é abreviação habitualmente usada para *sistema possível e determinado*, *spi* para *sistema possível indeterminado*, *si* para *sistema impossível*.

O resultado mostra que a tendência é que os jogadores, ainda que façam as melhores apostas, tenham prejuízo, ou seja, que a brincadeira compense para a escola em qualquer hipótese. Alternativa **C**.

Questão complementar) A questão 3 trabalha com sistemas, determinantes e geometria analítica. Se o ponto $A = (x_a, y_a)$ está em ambas as circunferências, então ele é solução do sistema que envolve suas equações:

$$\begin{cases} x_a^2 + y_a^2 = 1 \\ x_a^2 + y_a^2 - 2x_a + 2y_a - 1 = 0 \end{cases}$$

Subtraindo-se, temos: $2x_a - 2y_a = 0 \Leftrightarrow y_a = x_a$ e de maneira idêntica podemos obter $y_b = x_b$.

Conclui-se que a reta r tem equação $y = x$. Agora basta discutir o sistema que contém r e s :

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ k & 1 \end{vmatrix} = 1 + k$$

Dessa forma,

o sistema é *spd* se, e somente se, $k \neq -1$.

por outro lado, se $k = -1$: $\begin{cases} x - y = 0 \\ -x + y = m \end{cases}$, que equivale a $\begin{cases} x - y = 0 \\ x - y = -m \end{cases}$

ou seja, o sistema é *spi* no caso em que $m = 0$, caso contrário teremos *si*.

Portanto, a alternativa correta é **B**.

4.2.3 Atividade 3

Na **atividade 3**, será entregue aos alunos uma folha com duas questões dissertativas. Será proposto que eles resolvam como se fosse a prova da segunda fase que eles farão em breve, e retornem ao professor, que poderá dar um retorno no dia seguinte. Este procedimento é atípico em cursos pré-vestibular.

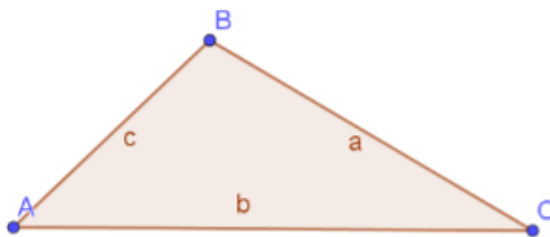
Na semana de aplicação dessa atividade, ocorrerá a prova da primeira fase da FUVEST e terá acabado de se passar as primeiras fases de UNICAMP e UNESP. Os problemas são discursivos, porém tratam temas de alta incidência no vestibular da FUVEST. As questões são as seguintes:

Enunciados das questões

Questão 1)

- a) calcule $\sin(\frac{5\pi}{12})$ e $\cos(\frac{\pi}{12})$ utilizando as aproximações $\sqrt{6} = 2,45$ e $\sqrt{2} = 1,41$
- a) Considere $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = a \cdot \sin(x) + c \cdot \cos(x)$ com $a = 0,965$, $b = 1$ e c sendo lados do triângulo ABC, retângulo em B, apresentado na figura 4.5. Determine o valor máximo de $f(x)$. Justifique o resultado.

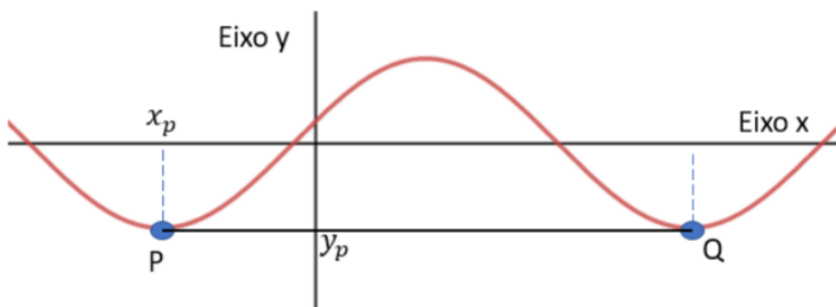
Figura 4.5: Atividade 3 – Figura relativa ao item b da questão 1



Fonte: O próprio autor.

- a) considere o gráfico da função f do item b

Figura 4.6: Atividade 3 – Figura relativa ao item c da questão 1



Fonte: O próprio autor.

Determine a distância entre os pontos P e Q, mínimos da função, e as coordenadas de P.

Questão 2) (Enunciado adaptado do vestibular da UNESP)

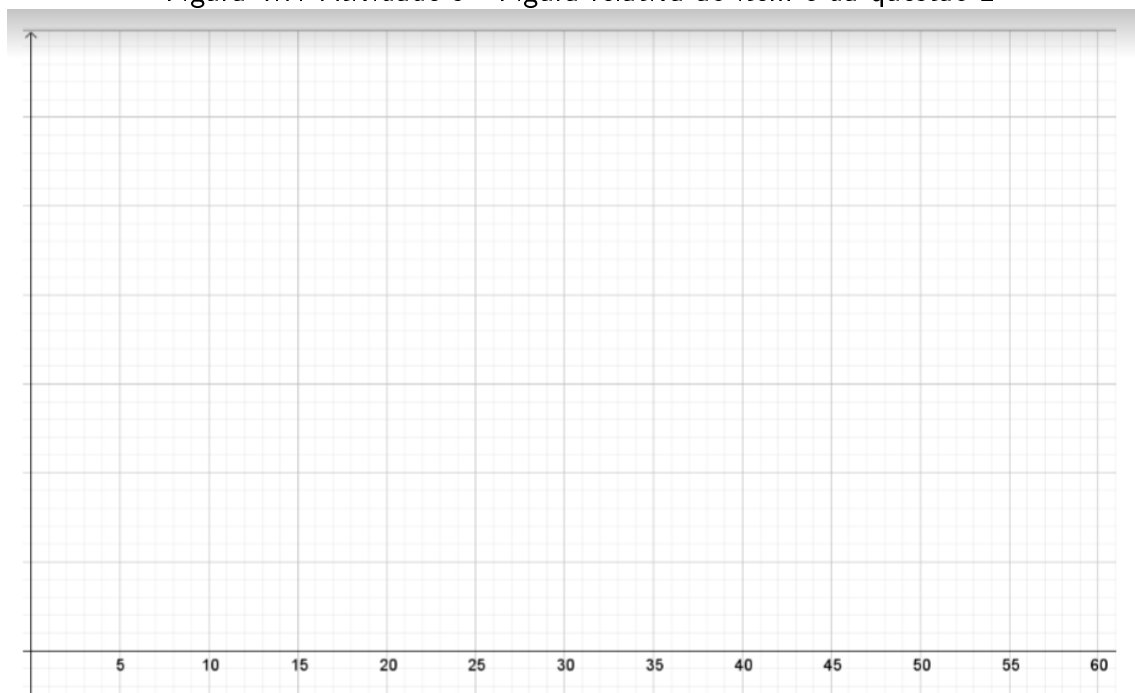
Considere que no ano de 1990 o consumo mundial de água foi de 500km^3 , e que vem aumentando 25 por cento a cada 10 anos.

a) Determine uma função $f(x)$ que expresse esse consumo em termos do tempo em anos, com $x = 0$ representando o ano de 1990.

b) De acordo com $f(x)$, a partir do dia de hoje, quanto tempo demorará para quadruplicar o consumo mundial de água? Se necessário use $\log 2 = 0,3$ e $\log 5 = 0,7$

c) Esboce, na escala $x:y = 1:100$, o gráfico de $f(x)$ no plano cartesiano abaixo

Figura 4.7: Atividade 3 - Figura relativa ao item c da questão 2



Fonte: O próprio autor.

Discussão das questões

Pretende-se que esses problemas sejam discutidos entre os alunos, resolvidos e entregues ao fim de 70 minutos.

Questão 1)

Exigem-se conceitos de trigonometria.

O item **a** visa revisar as fórmulas de adição e subtração de arcos e também a relação entre os valores das funções trigonométricas aplicadas em ângulos complementares. Esses conceitos geralmente são de conhecimento dos alunos, no entanto, diversas vezes não são notados como as ferramentas que resolvem um determinado problema.

O item **b** trabalha com um caso especial de valor máximo de funções trigonométricas e foi inspirado em problemas trabalhados em aulas do PROFMAT.

A maioria dos problemas de máximos e mínimos de função trigonométrica utilizam a ideia de substituir a função *seno* ou *coseno* pelos valores 1, -1 ou 0. Neste caso, é fácil perceber que tal raciocínio não é válido.

Já o item **c** trabalha com gráficos de funções trigonométricas e equações trigonométricas.

Questão 2)

Exigem-se conceitos de funções exponenciais e logaritmos, assunto geralmente visto como delicado pelos alunos. Além disso há alguns ingredientes especiais, como a modelagem de uma função e a construção de um gráfico em escala diferente da 1:1.

Soluções

Questão 1)

a) Escrevendo-se $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ como $\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}\right)$ e desenvolvendo-se o seno da soma de arcos, o resultado obtido será $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{4}}{2}$.

Usando-se as aproximações fornecidas, conclui-se que $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) = 0,965$.

Como $\frac{5\pi}{12} + \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{2}$, segue que $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = 0,965$.

É bem possível que os alunos calculem os dois valores pedidos separadamente, sem notar o fato de que eles são de arcos complementares.

b) a função $f(x)$ pode ser escrita como

$$0,965 \cdot \text{sen}(x) + c \cdot \text{cos}(x) = \text{sen}(\widehat{A}) \text{sen}(x) + \text{cos}(\widehat{A}) \text{cos}(x)$$

e finalmente $f(x) = \text{cos}(x - \widehat{A})$ que tem valor máximo igual a 1.

É improvável que um aluno inexperiente que se depara com a função $f(x) = a \cdot \text{sen}(x) + c \cdot \text{cos}(x)$ tenha facilidade para encontrar seu valor máximo, no entanto, espera-se que a construção do problema desde o item a viabilize a solução.

Em c), a distância entre P e Q é o período de f que é 2π .

Seguindo, sendo $f(x) = \text{cos}(x - \widehat{A})$, observa-se que $\widehat{A} = \arcsen(0,965)$, ou seja, $\widehat{A} = \frac{5\pi}{12}$.

Daí resolvemos a equação

$f(x) = \text{cos}(x - \frac{5\pi}{12}) = -1 \Rightarrow x - \frac{5\pi}{12} = \pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = \frac{17\pi}{12} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$, tomando-se $k = -1$ obtém-se $x_p = -\frac{7\pi}{12}$, portanto $P = (-\frac{7\pi}{12}; -1)$.

Questão 2)

A função que responde o item a é $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 500 \cdot (1,25)^{x/10}$.

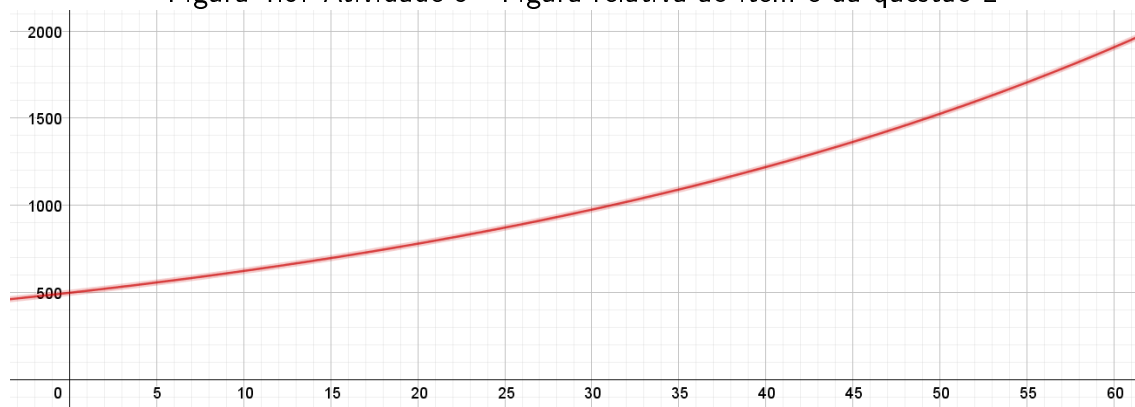
É possível que a equação seja escrita pelos estudantes como $f(x) = 500 \cdot (1,25)^x$, neste caso x corresponde ao número de períodos de 10 anos.

Em b deve-se buscar x que satisfaça a igualdade $4 \cdot 500 = 500 \cdot (1,25)^{x/10}$, segue que $4 = (1,25)^{\frac{x}{10}} \Rightarrow \log(4) = \frac{x}{10} \cdot \log(\frac{5}{4}) \Rightarrow x = 60$ é o tempo em anos para que se quadruplique um determinado consumo.

Em c, o gráfico é aquele mostrado na figura 4.8.

Feitos os itens a e b, basta conhecer a curva característica de uma função exponencial crescente e fazê-la passar pelos pontos $(0, 500)$ e $(60, 2000)$. Tal curva costuma ser conhecida dos alunos, pois a função 2^x costuma aparecer bastante nas aulas durante o ano.

Figura 4.8: Atividade 3 - Figura relativa ao item c da questão 2



Fonte: O próprio autor via GeoGebra.

4.3 Implementação da experiência, análise *a posteriori* e validação

Neste etapa, as atividades planejadas já foram aplicadas em salas de aula, e então, será feita uma análise que conflite as hipóteses formuladas na seção anterior. Aqui, podem-se comentar possibilidades de alterações da atividade e sua validação.

4.3.1 Atividade 1

Questão 1

A revisão foi feita e o problema apresentado. Destaca-se uma solução diferente que vários alunos compartilharam:

Contam-se os casos que possuem a segunda-feira mas não a sexta, os que possuem a sexta mas não a segunda e o único caso que não possui ambas, daí vem

$$C_{3,2} + C_{3,2} + 1 = 7$$

Assim, o problema fica enriquecido, pois apresentou duas soluções. Vale comentar tam-

bém que, em uma das salas, durante a revisão, um grupo de alunos pediu um exercício que trabalhasse com arranjos e combinações, para entender melhor a diferença.

Nesta sala, foi resolvido também o problema complementar do churrasco presente na página 14. Foi mostrado que a combinação poderia ser trocada por arranjo, por exemplo, caso os abraços entre mulheres ocorressem na entrada e na saída do churrasco.

Questão 2

Nesta, os alunos permaneceram em silêncio e copiaram a revisão. É perceptível que muitos têm dificuldade para resolver o problema e simplesmente esperam a explicação do professor. Na resolução, analisar a desigualdade usando-se hipérbole é inédito para todos eles, mas a grande maioria manifesta ter compreendido a longa e cadenciada explicação.

Questão 3

Constatou-se que os alunos costumam conhecer o gráfico de grandezas inversamente proporcionais através das aulas de física, ao se relacionar as grandezas resistência elétrica e corrente elétrica, e também pela química, pela relação pressão e volume, chegando-se facilmente à resposta, ainda que alguns por eliminação.

Questão 4

Em uma das salas, um grupo de alunos ficou confuso ao buscar a expressão da função inversa, pois resultava na mesma função. Nesta sala foi trabalhado um outro exemplo, pensado na hora: encontrar a inversa da função $y = \frac{1}{\ln(x)}$.

Questão 5

Muitos transmitiram positiva surpresa por perceber esse padrão da relação apresentada no enunciado entre as somas e o número de casos possíveis.

Questão 6

Esta questão os deixou intrigados e eles passaram a discutir a solução do problema em grupos. Um aluno indaga “Como transformar duas sentenças em uma?”, outro “A curva será uma parábola?”. Esta última pergunta mostra que apesar de ter respondido a questão anterior, o aluno não associou a escolha das expressões com a curva que ela representa no plano (se for analisada com domínio real). Apenas em uma das salas, uma aluna experiente respondeu bem depressa que a função poderia ser modular, pedi então à turma que chegassem na expressão. Por ter muitos alunos e estar no fim de uma aula, expus a solução definitiva na lousa. Nas outras turmas, os alunos apenas pensaram em função modular após ter sido feito na lousa o desenho das duas semirretas que contém os pontos da relação. Os alunos demonstraram habilidade para, partindo da função módulo de x , transportar o gráfico até os pontos desejados; provavelmente porque isso foi trabalhado em todos os tipos de função durante o ano.

Validação

A dinâmica da atividade 1, com os exercícios sendo interligados pelos temas foi muito válida, fazendo com que os alunos permanecessem atentos e participativos, conferindo maior fluidez à aula. Se não houvesse obrigação em cumprir diversos conteúdos para esta única aula, seria possível estender esta atividade para pelo menos mais uma aula, o que provavelmente geraria ainda mais "costuras" entre os assuntos da matemática. Ainda assim, a revisão de temas foi cumprida de acordo com o planejado.

4.3.2 Atividade 2

Questão 1

O jogo do bicho despertou atenção até dos alunos menos envolvidos. Alguns compartilharam sobre familiares mais antigos que jogavam.

Em duas das salas, diversos alunos conseguiram chegar rapidamente no valor de $-0,28$. Interessei-me e pedi para ver algumas soluções, a conta que mais apareceu foi a seguinte:

$4 \cdot 17 - 96 = -28$ daí já concluíam alternativa A. Um aluno também comentou que $-0,28$ seria a única possível, sem fazer cálculos, pois sabia que o jogo do bicho não gera lucro a longo prazo e -1 “não faria sentido”. Talvez uma boa alternativa para uma próxima aplicação seja -28 .

Na solução desenvolvida na lousa, procedendo-se assim:

$$L = \frac{\frac{1}{25} \cdot 100 \cdot 17 + \frac{24}{25} \cdot 100 \cdot (-1)}{100} = \frac{1}{25} \cdot 17 - \frac{24}{25} \cdot 1 = -0,28$$

foi solicitado que observassem que a solução é na verdade a soma dos produtos das probabilidades com o valor do lucro associado a elas. Também foi chamada a atenção para o cancelamento do número 100, mostrando que na verdade o número de vezes que a pessoa joga não precisa ser levado em consideração no cálculo. Neste ponto é importante enfatizar que o lucro médio é um valor esperado e que essa tendência torna-se mais confiável à medida que o número de jogos aumenta. Neste sentido, a exibição da planilha foi de grande utilidade, pois nela é comum ver jogadores que após apenas 10 jogos, ou mesmo 100, possuíam lucro médio positivo, no entanto, à medida que o número de jogos aumenta, o lucro médio tende ao resultado calculado. Essa exibição da planilha causou uma reação positiva dos alunos e elucidou a discussão.

Figura 4.9: Planilha – Jogo do bicho

K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U
10	0,8	-1	-1	-1	-1	-1	0,8	-1	-1	-1
100	-0,64	-0,46	0,08	-0,28	0,26	-0,28	-0,1	-0,46	-0,64	-1
1000	-0,1	-0,35714	-0,48571	-0,26531	-0,0449	-0,11837	-0,32041	-0,24694	-0,33878	-0,357142857
100000	-0,2404	-0,3394	-0,3034	-0,2818	-0,2116	-0,2458	-0,2872	-0,28	-0,3142	-0,3106
10000000	-0,28666	-0,26794	-0,28954	-0,28738	-0,26776	-0,29458	-0,27316	-0,29296	-0,28864	-0,27478

Fonte: O próprio autor.

Questão 2

Foi sugerido que eles “fizessem suas apostas”, deixando o problema mais interativo. As apostas 5 e 8, 4 e 7 apareceram, mas curiosamente apareceram também 2 e 11, 5 e 10 e até 6 e 7. Esta última seria uma ótima aposta, mas não é válida de acordo com o enunciado do problema. Já 2 e 11 é a pior aposta. Pedi a todos que calculassem os lucros médios associados a suas respectivas apostas. Todos que calcularam notaram que o lucro médio é negativo. Concluiu-se assim a alternativa correta.

Um aluno chamou a atenção para o fato de que a alternativa A está correta se, e somente se, a D também estiver. Para uma próxima aplicação pode-se alterar uma das duas alternativas.

Validação

Estas duas atividades mostraram que é muito produtivo abrir espaço para a maior participação dos alunos, ainda que num espaço de pré-vestibular, além disso, aprende-se muito formulando questões e aplicando-as nas salas, pois diferente das questões clássicas de vestibular, fica em aberto a possibilidade da questão ter algum ponto que deva ser aprimorado, como ocorreu. Conclui-se também, que este tratamento inicial do tema esperança matemática é totalmente possível e gera muito interesse nos alunos, pelo cunho prático do assunto, enaltecendo o fato de que problemas desse tipo aplicam os conceitos de probabilidade. Na avaliação do professor, esta atividade ficaria ainda mais produtiva caso as soluções dos alunos fossem coletadas por escrito, pois abriria mais possibilidades de discussão.

4.3.3 Atividade 3

Nas duas salas em que esta atividade foi aplicada, a dinâmica despertou empolgação dos alunos, que logo começaram a fazer. Em uma das salas, após a leitura das questões, um aluno indagou se poderia discutir a questão com os colegas. Disse a ele que sim, pois observar essa manifestação e interesse dos alunos que permanecem tão passivos durante o ano certamente

já justifica a atividade. Durante todo o tempo que levaram para tentar responder as questões, não foram tiradas dúvidas. Foi combinado que a atividade seria entregue para ser analisada e no dia seguinte resolvida na lousa com abertura para perguntas.

No mesmo dia, durante a tarde, foram analisadas todas as folhas entregues. Um total de 50, sendo 10 em branco. Naquelas que continham soluções, foram marcados alguns pontos relevantes que surgiram para se trabalhar no próximo dia.

Questão 1

observação i) obtenção de valores maiores do que 1 para o seno e o cosseno pedidos;

observação ii) seno e cosseno obtidos em dois cálculos diferentes;

observação iii) escrita da função na forma $\text{sen}(x + \hat{C})$;

observação iv) conclusão de que o valor máximo de f ocorre quando $\text{sen}(x) = \cos(x) = 1$;

observação v) conclusão direta de que o valor máximo de f corresponde à hipotenusa do triângulo;

observação vi) não conseguir concluir o item c por não perceber que $\hat{A} = \frac{5\pi}{12}$

Questão 2

observação i) construção do gráfico com a concavidade para baixo;

observação ii) escrita da função $f(x)$ com o número 1,25 elevado a x ;

observação iii) incompreensão da escala do gráfico;

Registros relativos a esta atividade encontra-se no anexo deste trabalho.

Questão 1 - Solucionando com os alunos

No dia seguinte as questões foram resolvidas na lousa com o amparo das observações acima.

Em 1, chamou-se a atenção para o fato de que os ângulos são complementares, portanto possuem as cofunções trigonométricas com o mesmo valor e também que as funções seno e cosseno são limitadas no intervalo fechado de -1 a 1 . Além disso, foi mostrado no ciclo que não existe x tal que $\sin(x)$ e $\cos(x)$ sejam simultaneamente iguais a 1 .

O item b foi resolvido escrevendo-se a função como $\sin(x+\hat{C})$ e também como $\cos(x-\hat{A})$.

Quanto à conclusão direta de que o valor máximo de f corresponde à hipotenusa, foi comentado que é uma maneira rápida de realizar o problema, no entanto, numa prova aberta é melhor apresentar a justificativa através dos cálculos.

Comentou-se que, se no item a o enunciado pedisse a resposta em número decimal, mais alunos teriam percebido o $0,965$ e teriam concluído que $\hat{A} = \frac{5\pi}{12}$ e conseguido fazer o item c. Ao perceber este fato, um aluno sugeriu que a coordenada x_p fosse descoberta levando em conta o movimento do gráfico de cosseno em $\frac{5\pi}{12}$ unidades à direita, assim, $x_p = -\pi + \frac{5\pi}{12} = \frac{7\pi}{12}$

Questão 2 - Solucionando com os alunos

Os gráficos de funções exponenciais e logaritmos foram revistos, a escala 1:100 foi explicada e foi mostrada a diferença entre a função elevada a x e a $x/10$. Foram exibidas soluções corretas utilizando-se as duas ideias, no entanto, observou-se que o gráfico da função difere nos dois casos.

Validação

A dinâmica desta atividade, realizada em 2 dias, dando-se tempo para os alunos responderem às questões, analisando-se suas dúvidas e construindo a aula seguinte a partir de

pontos relevantes, foi extremamente construtiva, pois além de captar diversas possibilidades de dúvidas dos alunos que normalmente não se captam, funciona como um guia para montar uma aula bem direcionada, o que costuma ser difícil para o professor numa sala com mais de 40 alunos. Atingiu-se, portanto, o objetivo de revisar os conteúdos com ampla participação dos alunos.

5 Considerações finais

Percebeu-se que a aplicação das atividades, valendo-se da escrita de questões aplicadas pelo método da engenharia didática, enriquece o processo de ensino-aprendizagem nas salas de aula de ensino de matemática e que é possível e produtivo abordar o conceito de esperança matemática no ensino básico.

O uso da engenharia didática pode ser incorporado pelo docente e adaptado à sua rotina corrida, pois coloca a confecção e aplicação de suas aulas num método científico, gerando confiança e melhores soluções para os problemas que aparecem. Além disso, o mesmo trabalho pode ser usado em outros anos, praticando-se as mudanças apontadas na última fase do método da engenharia didática.

A escrita de questões muda a posição assumida pelo professor, que deixa de somente olhar para problemas conhecidos. Através deste processo é possível criar novas conexões entre os assuntos trabalhados e aumentar o rigor de seus ensinamentos matemáticos.

O conceito de valor esperado pode ser trabalhado nas salas de ensino médio e pré-vestibulares. Trata-se de uma maneira atraente de se dar aplicações para assuntos relevantes como lucros e probabilidades, podendo na verdade ir muito mais adiante do que foi neste trabalho, que sofreu com as limitações da rotina e do tempo no contexto em que foi aplicado.

A partir disso, espera-se que este método possa ser mais utilizado pelos professores, nas mais diversas rotinas, e que o conceito de valor esperado seja parte do repertório dos professores de matemática no nível básico.

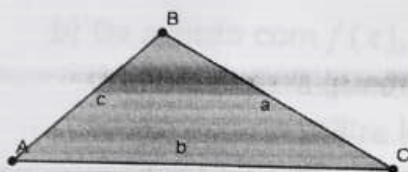
Referências Bibliográficas

Anexo A Registros em imagens da atividade 3

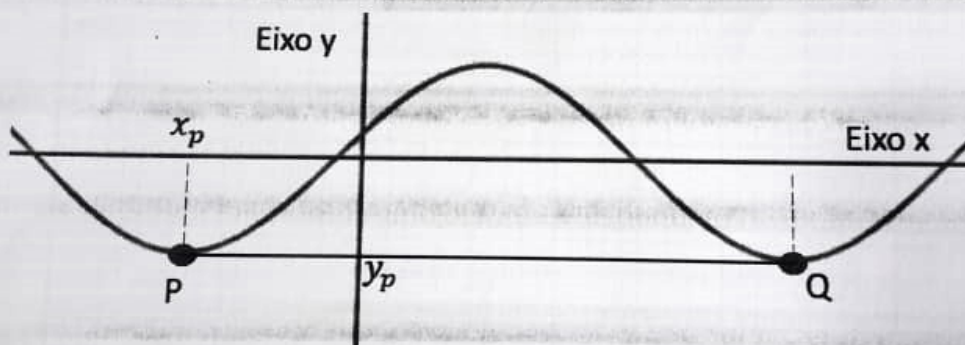
Figura A.1: Atividade 3 - Folha de questões.

1) a) calcule $\operatorname{sen}\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ e $\operatorname{cos}\left(\frac{\pi}{12}\right)$ utilizando as aproximações $\sqrt{6} = 2,45$ e $\sqrt{2} = 1,41$

b) considere $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = a \operatorname{sen}(x) + c \operatorname{cos}(x)$, com $a = 0,965$, $b = 1$ e c lados do triângulo ABC, retângulo em B, na figura abaixo. Determine o valor máximo de $f(x)$. Justifique o resultado.



c) considere o gráfico da função f do item b



Determine a distância entre os pontos P e Q , mínimos da função f , e as coordenadas de P

Fonte: O próprio autor.

Figura A.2: Atividade 3 - Folha de questões.

2) (UNESP Modificada)

Considere que no ano de 1900 o consumo mundial de água foi de 500 km^3 , e que vem aumentando 25% a cada 10 anos.

a) Determine uma função $f(x)$ que expresse esse consumo em termos do tempo em anos, com $x = 0$ representando o ano de 1900.

b) De acordo com $f(x)$, a partir do dia de hoje, quanto tempo demorará para quadruplicar o consumo mundial de água. Se necessário utilize $\log 2 = 0,3$ e $\log 5 = 0,7$

c) Esboce, na escala $x:y = 1:100$, o gráfico de $f(x)$ no plano cartesiano abaixo

Fonte: O próprio autor.

Figura A.3: Atividade 3 – Obtenção, por um aluno, de seno e cosseno maiores que 1 – Observação i, página 33.

$$\begin{aligned}
 & \text{d) } \sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) \quad \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) \\
 & \downarrow \\
 & \sin\frac{3\pi}{12} + \frac{2\pi}{12} = \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}\right) = \sin\frac{\pi}{4} \cdot \cos\frac{\pi}{6} + \sin\frac{\pi}{6} \cdot \cos\frac{\pi}{4} \\
 & \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2,45 + 1,41}{2} = \frac{3,86}{2} = 1,93 \\
 & \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{12} - \frac{2\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{\pi}{4} \cdot \cos\frac{\pi}{6} + \sin\frac{\pi}{4} \cdot \sin\frac{\pi}{6} \\
 & = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2} = 1,93
 \end{aligned}$$

Fonte: O próprio autor.

Figura A.4: Atividade 3 – Observação ii, página 33.

$$\begin{aligned}
 & 1-a) \textcircled{I} \frac{5\pi}{12} = \frac{2\pi}{12} + \frac{3\pi}{12} = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} \quad \therefore \sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}\right) \\
 & \sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{6} \cdot \cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{4} \cdot \cos\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \\
 & = \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4} = \boxed{0,965} \\
 & \textcircled{II} \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} \quad \therefore \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right) \\
 & \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{\pi}{4} \cdot \cos\frac{\pi}{6} + \sin\frac{\pi}{4} \cdot \sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} \\
 & = \boxed{0,965}
 \end{aligned}$$

Fonte : O Próprio autor

Figura A.5: Atividade 3 - Observação iii.

a) $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$, uma vez que $\frac{5\pi}{12} + \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{2}$
 $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \sin 75^\circ = \sin(30^\circ + 45^\circ) = \sin 30^\circ \cdot \cos 45^\circ + \sin 45^\circ \cdot \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} = 0,965$

b) $f(x) = 0,965 \cdot \sin(x) + c \cdot \cos(x)$ $a^2 + c^2 = b^2$
 $f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) \cdot \sin(x) + \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) \cdot \cos(x)$ $\cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right) + c^2 = 1 \quad \therefore c = \sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$
 $f(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{12}\right)$
 $f(x)_{\max} = 1$

c) $d_{p,q} = \text{período de } f(x)$
 $T = \frac{2\pi}{1} \rightarrow \therefore d_{p,q} = 2\pi$

Fonte: O próprio autor.

Figura A.6: Atividade 3 - Observação iv.

$= 75^\circ$ e $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ utilizando as aproximações

$1,41 \cos(45^\circ - 30^\circ) = \cos 45^\circ \cdot \cos 30^\circ + \sin 45^\circ \sin 30^\circ$

$\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2}$

$\frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} \Rightarrow \frac{3,86}{4}$

tal que $f(x) = a \sin(x) + c \cos(x)$, com

los do triângulo ABC, retângulo em B, na fig

máximo de $f(x)$. Justifique o resultado.

valor máx. para $f(x)$ tem valores máximos de seus termos positivos

a maior possível para $\sin(x) = 1$

c maior possível para $\cos(x) = 1$

ção f do item b

$0,965(-1) + c(-1)$

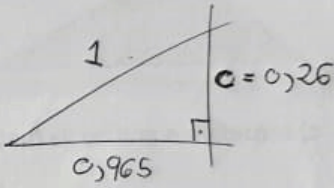
Figura A.7: Atividade 3 – Observação v.

a

- $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \sin(75^\circ) = \sin(45^\circ + 30^\circ) \Rightarrow \sin(75^\circ) = \sin 45^\circ \cos 30^\circ + \sin 30^\circ \cos 45^\circ$
- $\sin(\theta + \gamma) = \sin\theta \cos\gamma + \sin\gamma \cos\theta \Rightarrow \sin(75^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow$
 $\Rightarrow \frac{1}{2}(\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} + \sqrt{2}) = \frac{1}{4}(\sqrt{6} + \sqrt{2}) = \frac{1}{4}(2,45 + 1,41) = \sin 75^\circ$
- $\Rightarrow \sin 75^\circ = \frac{1}{4} \cdot 3,86 = 0,965$ ~~$\Rightarrow \cos\theta = (1 - \sin^2\theta)^{1/2} = (1 - 0,965^2)^{1/2} = 0,26$~~

b

- O Valor Máximo de $f(x)$ corresponde, geometricamente, à Hipotenusa b , do triângulo, logo, o Valor Máximo é 1.
- $a \cdot \sin x + c \cdot \cos x = f(x)$
 \downarrow
 $0,965$ $\hookrightarrow c = (0,26)^{1/2}$ [Pitágoras]



$\therefore \sin 75^\circ \sin x + \cos 75^\circ \cos x = f(x)$
 $\Rightarrow \cos(75^\circ - x) = f(x)$

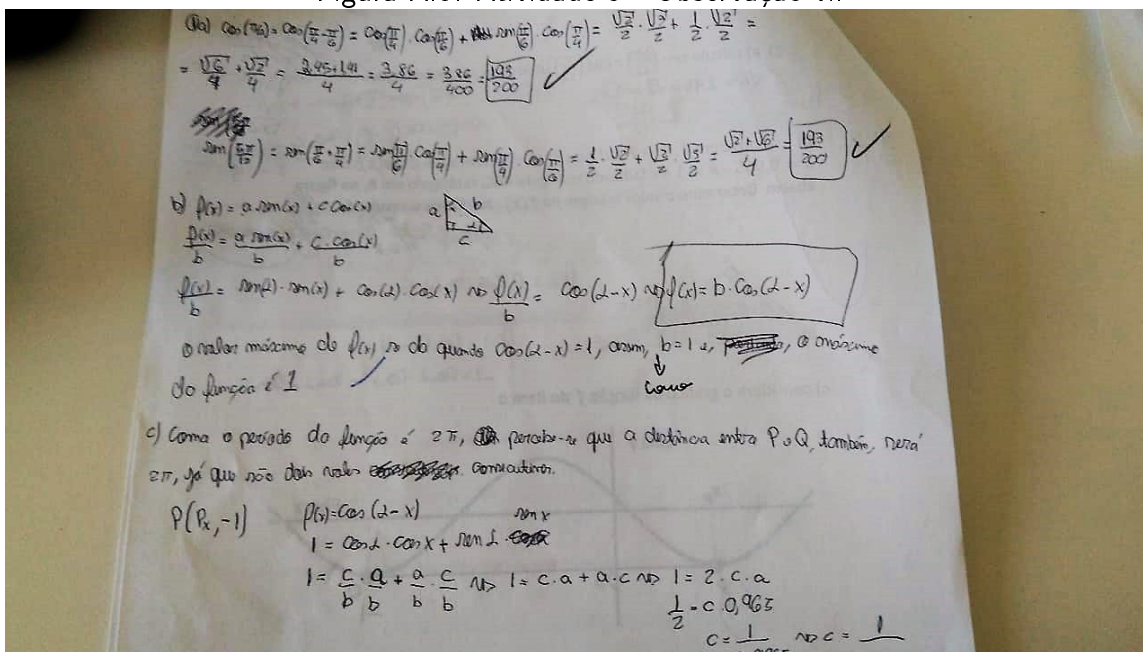
c

- $\cos(75^\circ - x) = f(x)$
- Os valores mínimos de $f(x)$ temem à $\cos(75^\circ - x) = -1$, logo,
 $75^\circ - x = 180^\circ \therefore x_p = -105^\circ \therefore f(x_p) = \cos(75^\circ + 105^\circ) = f(x_p) = -1$
- Para o próximo valor mínimo tem-se que, $75^\circ - x = 180^\circ + 2 \cdot 180^\circ \therefore x = -465^\circ$
 $x = -105^\circ + 360$

75

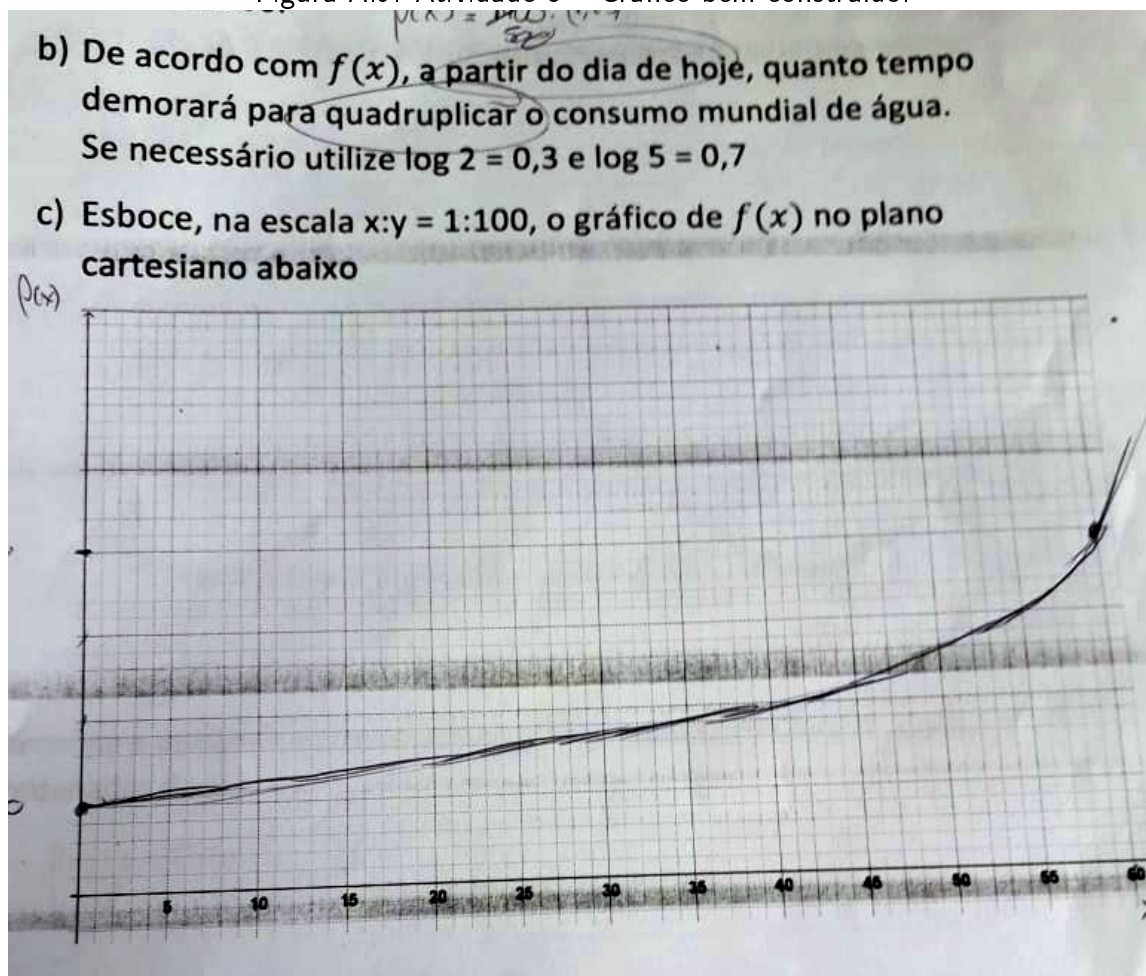
Fonte: O próprio autor

Figura A.8: Atividade 3 - Observação vi.



Fonte: O próprio autor.

Figura A.9: Atividade 3 – Gráfico bem construído.

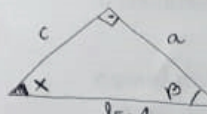


Fonte: O próprio autor

Figura A.10: Atividade 3 – Solução incompleta.

$$\sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{6} \cos\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{6} \sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\therefore \sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4} \rightarrow \frac{1,41 + 2,45}{4} = \frac{193}{200}$$

b) 

$$f(x) = a \cdot \sin x + c \cdot \cos x$$

$$f(x) = r \left(\frac{a}{r} \sin x + \frac{c}{r} \cos x \right)$$

$$\therefore f(x) = r \sin(x + \beta)$$

Sendo o valor máximo de $\sin(x + \beta) = 1$, o valor máximo de $f(x) = r = 1$

c) a distância entre P e Q corresponde à distância equivalente ao período da função $\sin(x)$.
 Portanto, ela vale 2π e $P: (-1)$ $P: 2\pi$

2a) $f(x) = 500 \cdot (1,25)^{\frac{T}{10}}$

b) Os quadruplicar-se: $4 \cdot 500 = 500 (1,25)^{\frac{T}{10}} \Rightarrow 4 = (1,25)^{\frac{T}{10}}$

$$\log 4 = \log 1,25^{\frac{T}{10}}$$

$$\log(2 \cdot 2) = \frac{T}{10} \cdot \log \frac{125}{100}$$

$$0,3 + 0,3 = \frac{T}{10} (3 \cdot 0,7 - 2 \cdot 0,7 - 2 \cdot 0,3)$$

$$0,6 = \frac{T}{10} (0,1) \Rightarrow T = 60 \text{ anos}$$

\therefore considerando 2016 o ano atual, será daqui

*

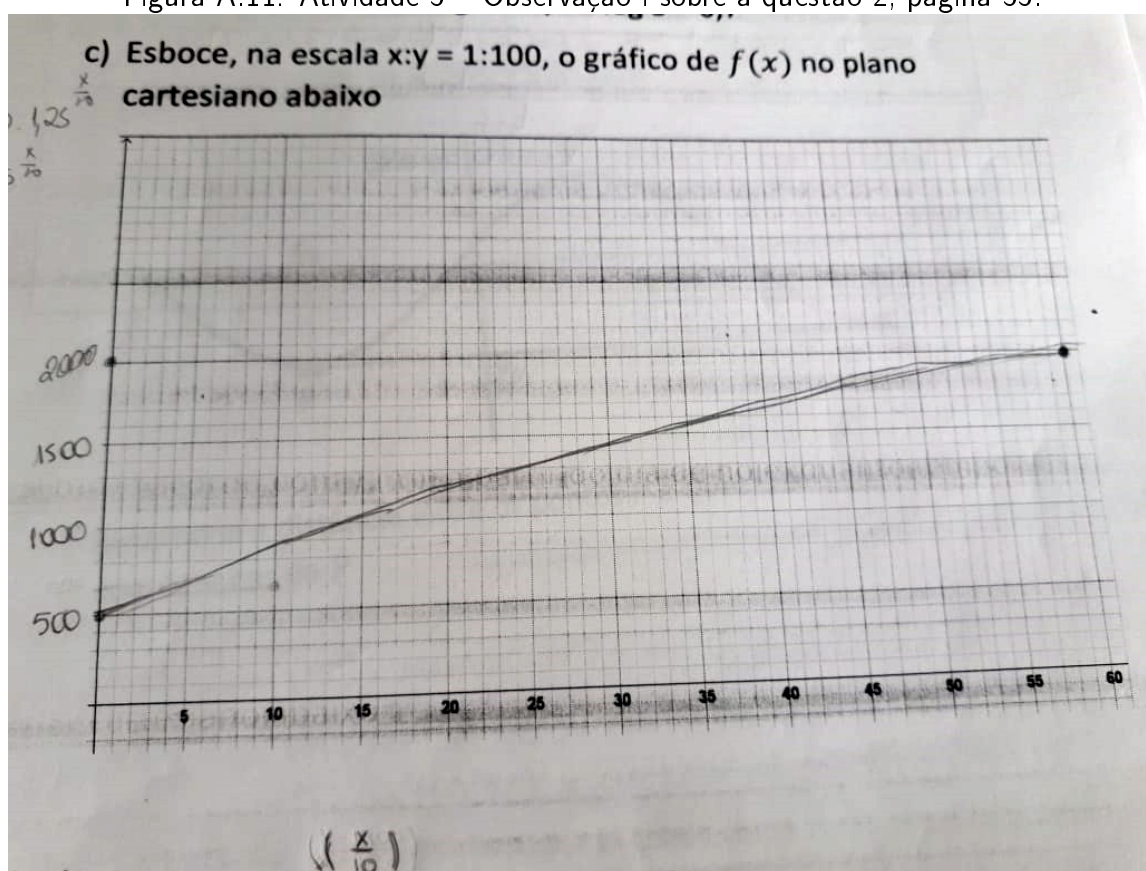
1a) $\cos\left(\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{12}\right) = \cos\frac{\pi}{6}$

$$\therefore \cos\left(2 \cdot \frac{\pi}{12}\right) = \cos\frac{\pi}{6}$$

$$\begin{cases} \cos^2 \frac{\pi}{12} - \sin^2 \frac{\pi}{12} = \cos \frac{\pi}{6} \\ \cos^2 \frac{\pi}{12} + \sin^2 \frac{\pi}{12} = 1 \end{cases} \Rightarrow \cos^2 \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3} + 1}{2} \Rightarrow \cos \frac{\pi}{12} = \sqrt{\frac{\sqrt{3} + 1}{2}}$$

Fonte: O próprio autor.

Figura A.11: Atividade 3 – Observação i sobre a questão 2, página 33.



Fonte: O próprio autor.