Universidade Federal de Mato Grosso
Instituto de Ciências Exatas e da Terra
Departamento de Matemática

O Universo dos Poliedros Regulares

Nayara Longo Sartor
Mestrado Profissional em Matemática: PROFMAT/SBM

Orientador: **Prof. Dr. Andre Krindges**

Trabalho financiado pela Capes

Cuiabá - MT

Abril de 2013

O Universo dos Poliedros Regulares

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação devidamente corrigida e defendida por Nayara Longo Sartor e aprovada pela comissão julgadora.

Cuiabá, 10 de maio de 2013.

____
Prof. Dr. Andre Krindges
Orientador

Banca examinadora:

Prof. Dr. Andre Krindges (UFMT)
Prof. Dr. Moiseis dos Santos Cecconello (UFMT)
Prof. Dr. Roy Wilhelm Probst (UTFPR)

Dissertação apresentada ao curso de Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT da Universidade Federal de Mato Grosso, como requisito parcial para obtenção do título **de Mestre em Matemática**.

Dados Internacionais de Catalogação na Fonte.

S251u Sartor, Nayara Longo.
O Universo dos Poliedros Regulares / Nayara Longo Sartor. -- 2013
78 f. : il. color. ; 30 cm.

Orientador: Andre Krindges.
Dissertação (mestrado profissional) - Universidade Federal de Mato Grosso, Instituto de Ciências Exatas e da Terra, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Cuiabá, 2013.
Inclui bibliografia.

1. Geometria Espacial. 2. Poliedros Regulares. 3. GeoGebra. I. Título.

Ficha catalográfica elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Dissertação de Mestrado defendida em 15 de abril de 2013 e aprovada pela banca examinadora composta pelos Professores Doutores

Prof. Dr. Andre Krindges

Prof. Dr. Moiseis dos Santos Cecconello

Prof. Dr. Roy Wilhelm Probst

À Dona Vani (in memoriam), Dona "Vani", que me dera quando criança um brinquedo, o qual chamávamos de "estrela", que muito me encantou na época e que hoje é o tema da minha dissertação. A meus pais, exemplos de perseverança e dedicação. E ao meu professor do ensino médio e superior, Marcos Ohse, "professor Hitler", minha grande inspiração profissional.

Agradecimentos

Agradeço a Deus, pelo dom da vida e pela sabedoria e aos meus pais por tudo que fizeram e ainda fazem por mim. Agradeço também a oportunidade de ministrar aulas de Geometria Espacial no curso de Licenciatura em Matemática, no Instituto Federal de Mato Grosso, Campus Juina, pois através destas conheci os poliedros de Platão e sua história. À Lucy Aparecida Gutiérrez de Alcântara, por ter mencionado que existem mais poliedros regulares além dos platônicos. Aos professores Andre Krindges e Moiseis Cecconello, pela compreensão e paciência. Ao Ivan Cesar Rocha Zagui, pela força e apoio que me dedicou durante esses dois anos. E ao Anderson André Pereira Beloni, que sempre me substituiu quando precisei.

Talvez não tenha conseguido fazer o melhor, mas lutei para que o melhor fosse feito. Não sou o que deveria ser, mas graças a Deus, não sou o que era antes.

Marthin Luther King

Resumo

Mesmo sem saber, nos deparamos o tempo todo com objetos que remetem a ideia de poliedros, que são sólidos geométricos formados por polígonos convexos ou não, regulares ou não. Podem ser classificados entre convexos e não convexos. Se suas faces forem todas congruentes entre si e se seus vértices também forem congruentes, então o poliedro será regular. Neste trabalho fizemos uma abordagem histórico-descritiva dos poliedros, dando especial atenção aos poliedros regulares. A partir de três diferentes definições podemos ter cinco, nove ou infinitos poliedros regulares. Adotamos a definição cuja interpretação nos remete a existência de nove poliedros regulares: os cinco de Platão, que são os convexos, e os quatro de Kepler-Poinsot, os não convexos, onde todas as faces são polígonos regulares e congruentes e todos os vértices são congruentes. Se suas arestas e vértices forem todos congruentes, então o poliedro será semirregular. Este grupo de poliedros, formado apenas por sólidos convexos, é infinito, pois apesar de existirem treze cujos vértices são formados por faces diferentes, temos também os infinitos prismas e antiprismas formados por arestas e vértices congruentes. Ao longo deste trabalho veremos definições, relações, entre outros, a respeito dos poliedros regulares.

Palavras chave: Geometria Espacial; Poliedros Regulares; GeoGebra.

Abstract

Without even knowing it, we encounter all the time with objects that remit the idea of polyhedron, which are geometric solids formed by convex polygons or not, regular or not. They can be classified into convex and non-convex. If their faces are all congruent among them and if their vertices are also congruent, then the polyhedron will be regular. In this work we made a historical-descriptive approach of the polyhedron, giving special attention to regular polyhedron. From three different definitions we can have five, nine or infinite regular polyhedron. We used the definition which the interpretation brings us the existence of nine regular polyhedron: the five of Plato, which are convex, and the four of Kepler-Poinsot, non-convex, where all faces are regular and congruent polygons and all vertices are congruent. If their edges and vertices are all congruent, then the polyhedron will be semi-regular. This group of polyhedron, formed only by solid convex, is infinite, because although there are thirteen whose vertices are formed by different faces, we also have the infinite prisms and antiprisms formed by edges and congruent vertices. Throughout this work we will see definitions, relationships, among others, about the regular polyhedron.

Keywords: Spatial Geometry; Regular Polyhedra; GeoGebra.

Sumário

Lista de Figuras

Introdução

Os poliedros são corpos geométricos presentes no nosso cotidiano. Mesmo quando observamos uma lata de lixo, implicitamente, estamos observando um sólido geométrico. Não é possível estabelecer uma data para a criação do primeiro poliedro, mas sabendo que as famosas pirâmides egípcias existem desde aproximadamente 2000 a. C. [14], é possível afirmar que existem pelo menos desde esta época.

Também há séculos os poliedros regulares vêm encantando grandes estudiosos e pensadores pela sua beleza e perfeição.

Prova disso é a grande admiração que Platão tinha pelos sólidos convexos regulares. O grande filósofo associava um aspecto místico a eles, e apesar de não ter descoberto-os, foi grande apreciador de cada um deles. O trecho a seguir mostra que Platão associava os poliedros convexos regulares à origem do fogo, da terra, da água e do ar.

> "Em primeiro lugar, é claro para toda a gente que o fogo, a terra, a água e o ar são corpos, e que todos os corpos são sólidos. Todos os corpos são limitados por superfícies e todas as superfícies rectilíneas são compostas por triângulos. Há dois tipos fundamentais de triângulos, cada um deles tendo um ângulo recto e dois ângulos agudos [...]. Postulamos isso como a origem do fogo e dos outros corpos, combinando o nosso argumento a verosimilhança e a necessidade; as suas origens últimas são conhecidas dos deuses e dos homens a quem os deuses amam.
>
> Devemos continuar a indagar quais são os quatro corpos mais perfeitos possível que, embora diferentes uns dos outros, são capazes de se transformar uns nos outros. Se conseguirmos encontrar a resposta para esta questão temos a verdade sobre a origem da terra e do fogo e dos dois termos entre eles; porque nunca admitiremos que haja corpos visíveis mais perfeitos que estes, cada um do seu tipo. Assim, devemos fazer o possível para construirmos quatro tipos de corpo perfeito [...]" apud [32]

Desta forma, podemos perceber quão profunda era a sua admiração.

Além disso, nos Elementos, que é um tratado de matemática e geômetra constituído de 13 livros, escrito por Euclides em Alexandria por volta de 300 a.C., os poliedros são estudados nos livros XI, XII e XIII, e a partir da proposição 13 do livro XIII, os poliedros de Platão são estudados minuciosamente. [32]

Arquimedes é outro exemplo de grande pensador que se interessou por um conjunto específico de sólidos, os semirregulares. Ele é o “responsável” pelo conjunto de poliedros que tem todas as arestas congruentes e todos os vértices congruentes. Estes sólidos também chamaram a atenção de Kepler, tanto que o astrônomo atribuiu nome a cada um dos treze poliedros, os que restam se retirarmos os prismas e antiprismas.

Kepler, juntamente com Poinsot, descobriram os quatro últimos poliedros regulares, tão belos e interessantes quanto os cinco primeiros.

Se homens renomados, como os citados aqui, ficaram fascinados por estes sólidos, o que dizer de alunos e professores do ensino básico? É impossível passarem desapercebidos e não querermos saber suas histórias, seus processos de formação.

Entretanto, o estudo de poliedros no ensino médio é, na maioria das vezes, muito superficial. Isto porque o vemos como uma introdução para ensinarmos prismas, pirâmides, e em seguida corpos redondos. Quando procuramos nas Orientações Curriculares para o Ensino Médio [9] assuntos referentes à Geometria, percebemos que a abordagem feita a respeito de poliedros é muito limitada, e sequer são citadas as existências dos poliedros de Kepler-Poinsot e de Arquimedes:

> “O estudo da Geometria deve possibilitar aos alunos o desenvolvimento da capacidade de resolver problemas práticos do quotidiano, como por exemplo, orientar-se no espaço, ler mapas, estimar e comparar distâncias percorridas, reconhecer propriedades de formas geométricas básicas, saber usar diferentes unidades de medidas. [...]
>
> O trabalho de representar as diferentes figuras planas e espaciais, presentes na natureza ou imaginadas, deve ser aprofundado e sistematizado nesta etapa de escolarização. [...]
>
> Para trabalhar com poliedros, existem também programas interessantes. Neles há poliedros em movimento, sob diferentes vistas [...].
>
> O estudo de poliedros, o Teorema de Euler e a classificação dos poliedros platônicos compõem um interessante tópico. [...]” [9]

Nos dias atuais, a pergunta tão comum “Para quê eu vou usar isso?” requer uma resposta melhor elaborada. O aluno do ensino básico não escolheu estudar Matemática: ela foi imposta a ele. Logo, o professor precisa conquistar a atenção do aluno, o que não é tarefa fácil. É nesse sentido que trabalhar com poliedros, principalmente os regulares, pode ajudar. Eles chamam a atenção pela sua beleza e peculiaridade.

Desta forma, aprofundar os conhecimentos a respeito desse assunto poderia aumentar o interesse do aluno no estudo da geometria plana e espacial como um todo. Além disso, a visualização das faces e vértices de um poliedro estrelado por parte deles seria uma grande contribuição para aumentar a sua capacidade de visualização e para desvinculá-los do tradicional. Por isso, queremos, com este trabalho, aprofundar os estudos a respeito dos poliedros, focando nos regulares. Para isso, apresentaremos e discutiremos diferentes definições a respeito de poliedros: poliedros convexos, poliedros não convexos, poliedros regulares e poliedros semirregulares. Explicaremos também, os processos de construção dos poliedros de Platão (e seus duais), de Kepler-Poinsot e de Arquimedes. E ainda, demonstraremos que existem apenas cinco poliedros regulares convexos.

Além disso, durante todo o trabalho, serão relatados fatos históricos relativos aos assuntos abordados. Serão feitas também, biografias dos matemáticos, astrônomos, filósofos, entre outros, que contribuíram de maneira significativa para o descobrimento dos sólidos. Apresentaremos contextualizações dos poliedros de Platão com a natureza, arte, etc.

O primeiro capítulo apresenta os poliedros de maneira geral. Expõe conceitos, definições, classifica-os quanto a sua convexidade, além de dar uma ideia do que são polígonos.

O segundo e terceiro capítulos são voltados para o estudo de poliedros regulares e semirregulares, respectivamente. Apresentam diferentes definições para estes poliedros, quais são a partir de cada definição, suas histórias e seus processos de construção. Neles, os poliedros de Platão, de Kepler-Poinsot e de Arquimedes serão observados de maneira aprofundada.

No decorrer do trabalho, nos depararemos com várias figuras ilustrativas que auxiliarão de forma significativa no entendimento de cada tópico. Estas imagens foram elaboradas, na sua maioria, no software GeoGebra 5.0 JOGL1 Beta, além dos softwares Great Stella e s3D SecBuilder.

Capítulo 1

Poliedros

Poliedros são sólidos geométricos presentes nas nossas vidas, seja no formato de uma lata de óleo usada no preparo de alimentos, ou de um dado utilizado nos jogos de entretenimento, em embalagens de variados produtos consumidos diariamente, além das tão famosas pirâmides do Egito, dos "Arranha-céus" de grandes cidades, enfim, vários objetos triviais presentes no nosso cotidiano tem a forma de um poliedro.

Podemos classificá-los entre convexos e não convexos. Os convexos são aqueles onde quaisquer dois pontos, pertencentes à superfície do poliedro ou ao seu interior, definem um segmento de reta contido no poliedro. Os não convexos, ou côncavos, são aqueles onde isso não acontece para todos os pares de pontos.

Dentro do grupo dos convexos, destacam-se, entre outros, os poliedros de Platão, de Arquimedes, de Catalan, e de Johnson. Os poliedros de Platão possuem todas as faces com o mesmo número de lados e em todos os vértices concorrem o mesmo número de arestas. Já os poliedros de Arquimedes, têm todos os vértices e arestas congruentes. No entanto, nem todas as faces têm o mesmo número de arestas. Apesar disso, todas são polígonos regulares. Dentro do grupo dos poliedros não convexos, destacam-se os de Kepler-Poinsot, que também possuem todas as faces com o mesmo número de arestas e em todos os vértices concorrem o mesmo número de arestas.

A seguir apresentaremos algumas definições equivalentes.

Garcia e Castilho [18] definem poliedros de uma forma muito sucinta: "[...] todo sólido fechado formado exclusivamente por superfícies planas (polígonos)".

Já Lima et al. [21] colocam alguns detalhes. Segundo eles, um poliedro é a união de um número finito de polígonos planos, sendo que cada lado de um destes polígonos é lado também de um único outro polígono.

Iezzi et al. [19] explicam, a priori, o que são sólidos geométricos: "[...] formas tridimensionais idealizadas pela Geometria [...]". Em seguida, definem poliedros como "[...] sólidos geométricos cujas superfícies são formadas apenas por polígonos planos (triângulos, quadriláteros, pentágonos, etc.) ", e complementam esclarecendo que "A palavra poliedro vem do grego antigo, em que *poli* significa 'vários', e *edros*, 'faces' ".

Segundo Dante [10]:

> "Cada poliedro é formado pela reunião de um número finito de regiões poligonais planas chamadas *faces* e a região do espaço limitada por elas. Cada lado de uma dessas regiões poligonais é também lado de uma outra única região poligonal. A intersecção de duas faces quaisquer é um lado comum, ou é um vértice, ou é vazia.
>
> Cada lado de uma região poligonal comum a exatamente duas faces é chamado *aresta* do poliedro. E cada vértice de uma face é um *vértice* do poliedro". [10]

Segundo Coxeter [7], um poliedro é um conjunto finito de polígonos, onde cada aresta é comum a dois, e somente dois deles, sendo que os que estão ao redor de um vértice formam uma única sequência de polígonos. Estes são as faces, e seus lados e vértices são, respectivamente, as arestas e vértices do poliedro. Para ele, cada vértice possui uma figura que o representa (figura do vértice). O autor explica que, marcando os pontos médios das arestas que concorrem no vértice, e ligando-os, de forma que cada segmento formado esteja contido em uma das faces que o circundam, formamos um polígono que representa a figura do vértice. Sendo assim, a figura do vértice de um cubo, por exemplo, é um triângulo, como podemos observar na Figura 1.1.

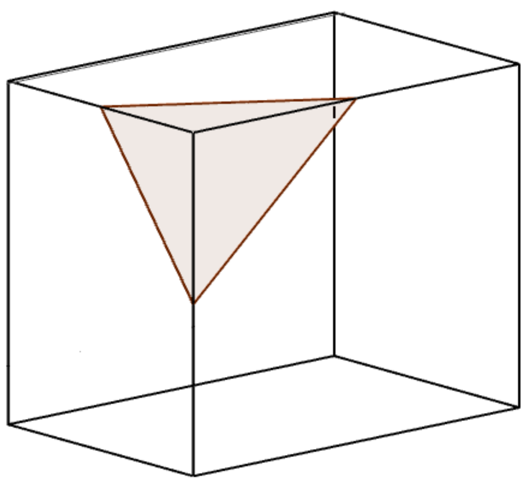


Figura 1.1: Figura do vértice

Harold Scott MacDonald Coxter (1907 – 2003) foi um matemático naturalizado canadense, mas nascido na Inglaterra, cujo campo de trabalho foi a geometria. Estudou, entre outros assuntos, os politopos regulares. Politopos são generalizações, para um número arbitrário de dimensões (finitas), dos conceitos conhecidos de polígonos e poliedros. Basicamente são o termo geral da sequência: ponto (dimensão 0), segmento (dimensão 1), polígono (dimensão 2), poliedro (dimensão 3), etc.

Para compreendermos melhor o que são os poliedros, quais os tipos, quais as peculiaridades, etc., é preciso, *a priori*, conhecermos bem suas faces, seus vértices, pois são quem atribuem características aos poliedros e diferenciam uns dos outros. Como faces e figuras dos vértices são polígonos, então vamos defini-los, classificá-los e exemplificá-los.

1.1 Polígonos

Polígonos são regiões planas delimitadas por segmentos de reta que formam uma linha poligonal fechada. Linha poligonal fechada é um conjunto de segmentos consecutivos que não estão alinhados na mesma reta e que se fecham. Exemplos triviais de polígonos são os triângulos, os retângulos, quadrados, etc.

A seguir apresentaremos algumas definições equivalentes.

Dolce e Pompeo [13], definem polígonos como a reunião dos segmentos $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_2A_3}$, ..., $\overline{A_{n-1}A_n}$, $\overline{A_nA_1}$ onde A_1, A_2, ..., A_{n-1}, A_n são uma sequência de pontos de um plano, todos distintos, sendo que três deles consecutivos não são colineares, e $n \geq 3$. Entendemos por pontos consecutivos os pontos A_{n-1}, A_n e A_1, bem como A_n, A_1 e A_2, etc. Segundo os autores, os pontos A_1, A_2, ..., A_{n-1}, A_n, são os vértices do polígono, os segmentos $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_2A_3}$, ..., $\overline{A_{n-1}A_n}$, $\overline{A_nA_1}$, são os lados do polígono e os ângulos $\hat{A}_1 = A_n\hat{A}_1A_2$, $\hat{A}_2 = A_1\hat{A}_2A_3$, ..., $\hat{A}_n = A_{n-1}\hat{A}_nA_1$ são os ângulos do polígono.

Na Figura 1.2 temos um polígono que ilustra a definição acima.

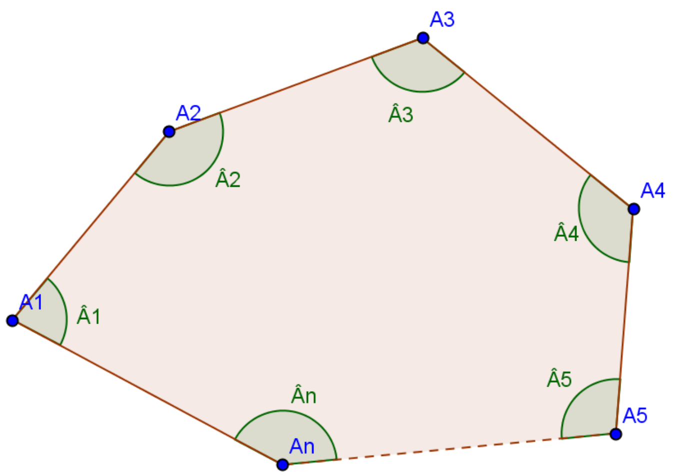


Figura 1.2: Polígono qualquer

Já Garcia e Castilho [18], antes de definirem polígonos, definem linha poligonal como "[...] uma figura plana formada por segmentos de reta consecutivos e não colineares. A linha poligonal pode ser aberta ou fechada". Na sequência, definem polígono como "[...] a figura formada por uma linha poligonal fechada".

Para Dante [11], "Polígono é uma linha fechada formada apenas por segmentos de reta que não se cruzam no mesmo plano".

1.1.1 Polígonos Regulares

São polígonos onde todos os lados são congruentes entre si e todos os ângulos também.

A seguir apresentaremos algumas definições equivalentes.

Segundo Dolce e Pompeo [13], "Um polígono que possui os lados congruentes é equilátero. Se possui os ângulos congruentes, é equiângulo". Mas ao definirem polígono regular, referem-se apenas aos convexos: "Um polígono conexo é regular se, e somente se, tem todos os lados congruentes (é equilátero) e todos os ângulos congruentes (é equiângulo)". Dante [11], quando define polígonos regulares, também faz referência apenas aos convexos: "Um polígono convexo é denominado *regular* quando todos os seus lados são congruentes e todos os seus ângulos internos são congruentes".

Na Figura 1.3 temos exemplos de alguns polígonos regulares convexos.

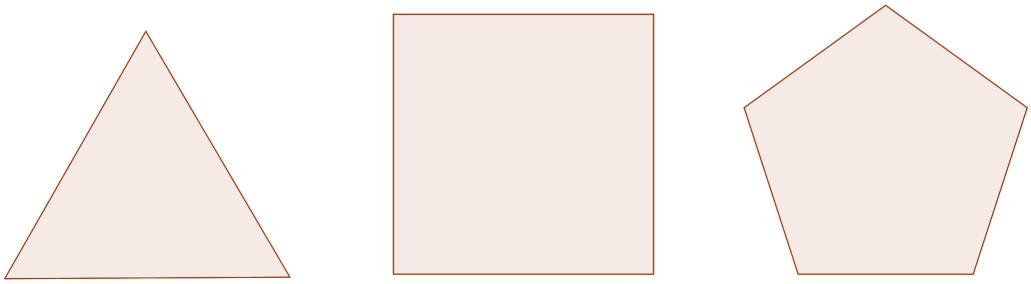


Figura 1.3: Triângulo equilátero, quadrado e pentágono regular

Garcia e Castilho [18] restringem a definição de polígonos regulares aos convexos: "É todo polígono convexo que possui todos os lados e todos os ângulos com as mesmas medidas (equilátero e equiângulo)".

Apesar das definições acima, os polígonos regulares não resumem-se a apenas convexos. Nas seções seguintes, veremos que existem polígonos regulares que não são convexos. Por enquanto, fica aqui, na Figura 1.4, um exemplo de um polígono regular não convexo. Nela, podemos observar que os lados do polígono são os segmentos conguentes ($FG = GH = HI = IJ = JF = 12.9$ unidades) $\overline{FG}$, $\overline{GH}$, $\overline{HI}$, $\overline{IJ}$, $\overline{JF}$, e que $\hat{F} = \hat{G} = \hat{H} = \hat{I} = \hat{J} = 36°$. Portanto, pela definição dada acima de polígonos equiláteros e polígonos equiângulos, podemos afirmar que o polígono abaixo é equilátero e equiângulo, e que consequentemente, é regular, apesar de côncavo.

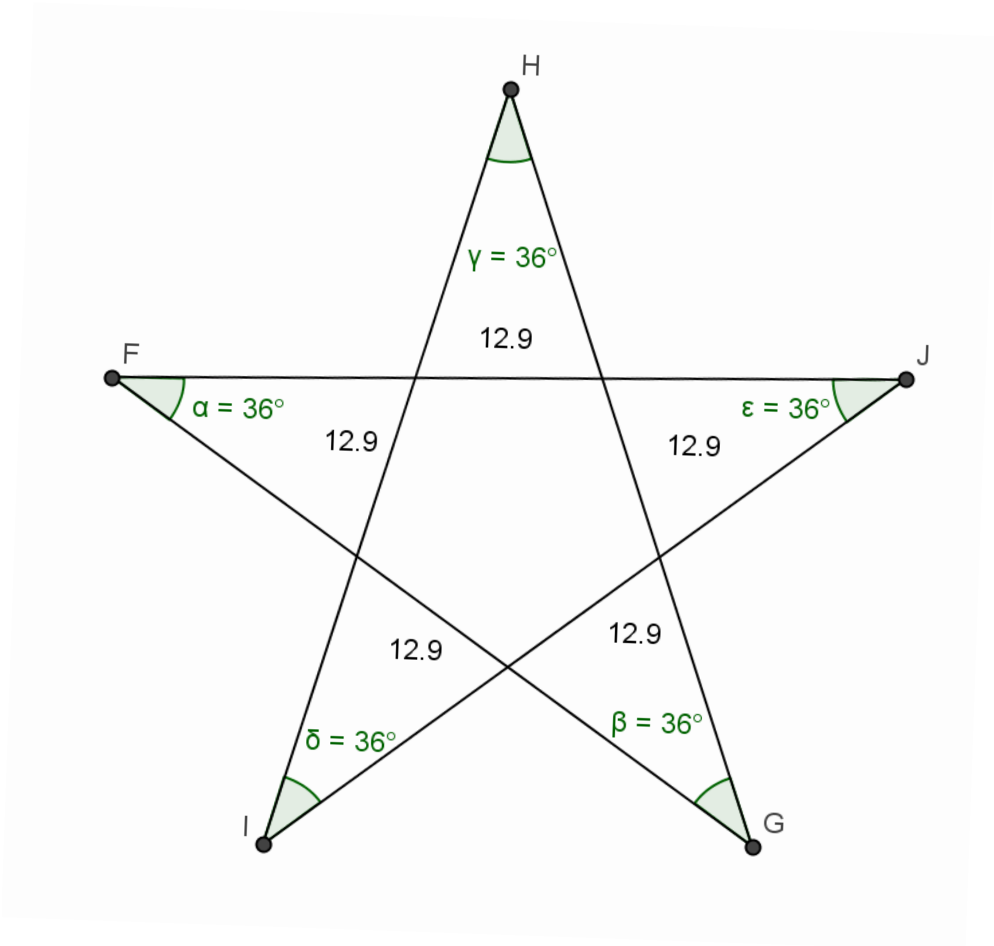


Figura 1.4: Polígono não convexo regular

1.1.2 Polígonos Convexos

São polígonos onde quaisquer dois pontos pertencentes ao polígono ou ao seu interior definem um segmento de reta contido no polígono.

A seguir apresentaremos algumas definições equivalentes.

Segundo Dolce e Pompeo [13]:

> "Um polígono [...] é um *polígono convexo* se, e somente se, a reta determinada por dois vértices consecutivos quaisquer deixa todos os demais $(n-2)$ vértices num mesmo semiplano dos dois que ela determina." [13]

A Figura 1.5 ilustra a definição acima. Nela temos um polígono e todas as retas determinadas pelos seus vértices. Podemos observar que todas elas deixam todos os demais vértices num mesmo semiplano. Portanto, o polígono em questão é convexo.

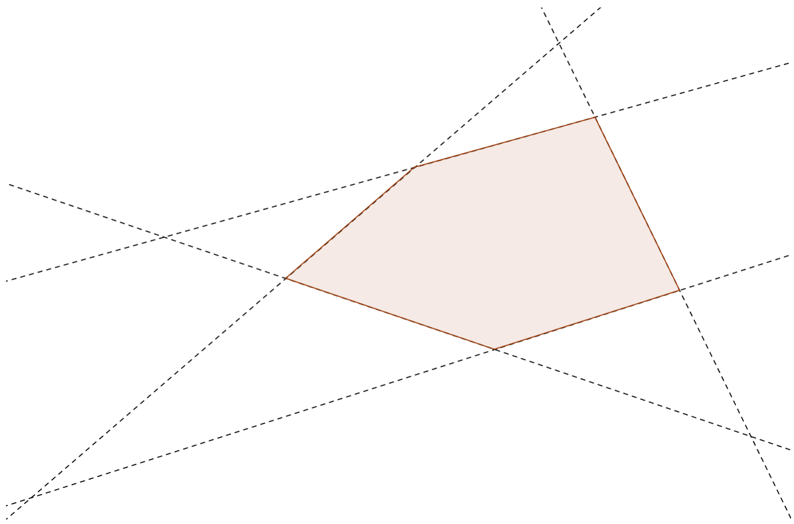


Figura 1.5: Polígono convexo

Para Garcia e Castilho [18], um polígono será convexo se, dados dois pontos A e B no interior de um polígono, o segmento de reta $\overline{AB}$ estiver inteiramente contido no interior do polígono.

Dante [10] explica, *a priori*, que "Uma região do plano é *convexa* quando o segmento de reta que liga dois pontos quaisquer dessa região está inteiramente contido nela". Em seguida, afirma que "Um polígono é convexo quando o segmento que liga dois de seus pontos está sempre contido nele".

A Figura 1.6 ilustra as duas últimas definições dadas. Nela temos um polígono e os pontos A e B, ambos pertencentes ao seu interior, e os pontos C e D, ambos pertencentes ao polígono. Podemos observar que os segmentos de reta $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ estão contidos no interior do polígono, bem como qualquer outro segmento definido por dois pontos pertencentes a ele ou ao seu interior. Portanto, o polígono em questão é convexo.

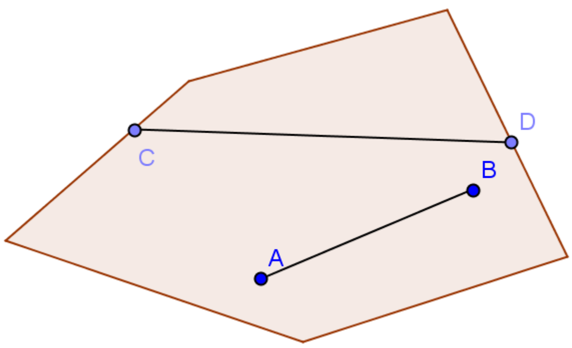


Figura 1.6: Polígono convexo

1.1.3 Polígonos Não Convexos

Ou polígonos côncavos, são polígonos onde nem todos os pares de pontos pertencentes ao polígono ou ao seu interior definem um segmento que esteja contido no polígono ou no seu interior.

Dolce e Pompeo [13] definem polígonos não convexos a partir da definição de polígonos convexos. Segundo eles, se um polígono não é convexo, então ele é côncavo.

Na Figura 1.7 temos o polígono $DCEFG$, e as retas definidas pelos seus vértices. Podemos observar que as retas $\overleftrightarrow{DE}$, $\overleftrightarrow{EF}$ e $\overleftrightarrow{FG}$, deixam os demais vértices num mesmo semiplano. No entanto, as retas $\overleftrightarrow{CD}$ e $\overleftrightarrow{CG}$ separam os vértices entre os dois semiplanos definidos por cada uma delas. Portanto, o polígono $DCEFG$ não é convexo.

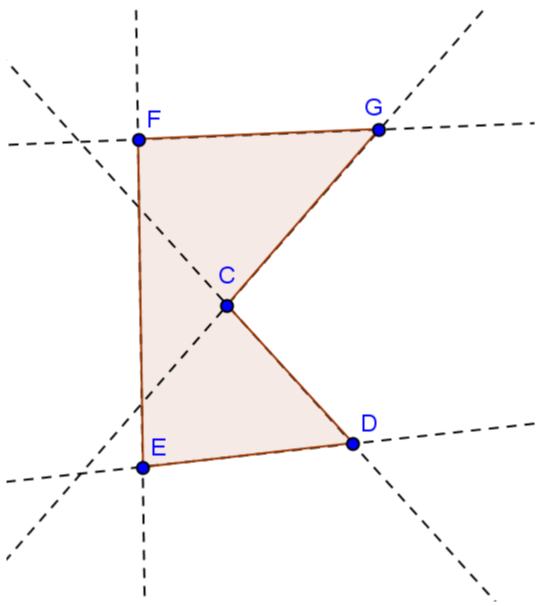


Figura 1.7: Polígono não convexo

Garcia e Castilho [18] seguem o mesmo raciocínio. Se o polígono não for convexo, será côncavo. Ou seja, dados dois pontos A e B no interior de um polígono, se o segmento de reta $\overline{AB}$ não estiver contido no seu interior, então este polígono será côncavo.

Na Figura 1.8 temos um polígono e os pontos A e B, ambos pertencentes ao seu interior. Podemos observar que o segmento de reta $\overline{AB}$ não está contido no interior do polígono. Desta forma, não podemos garantir que qualquer segmento definido por dois pontos pertencentes ao polígono ou ao seu interior definem um segmento que está todo no contido nesta região. Portanto, o polígono em questão não é convexo.

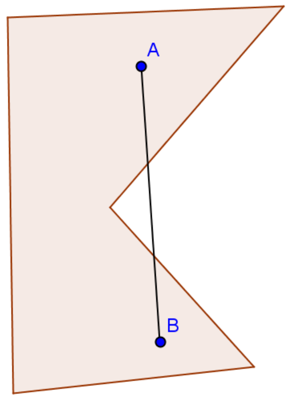


Figura 1.8: Polígono não convexo

1.1.3.1 Polígonos Estrelados

Ao prolongarmos os lados de um polígono, é possível obter ou não outro polígono. Por exemplo, as retas que contém os lados de um triângulo qualquer, somente se intersectam nos vértices deste triângulo. O mesmo acontece com as retas que contém os lados de um quadrado. No entanto, se prolongarmos os lados de um pentágono, que não tenha nenhum par de lados paralelos, haverá novas intersecções entre elas e será formado outro polígono famoso, não convexo, denominado pentagrama ou pentágono estrelado. A Figura 1.9 ilustra esse processo, chamado de "Estrelação" de um polígono.

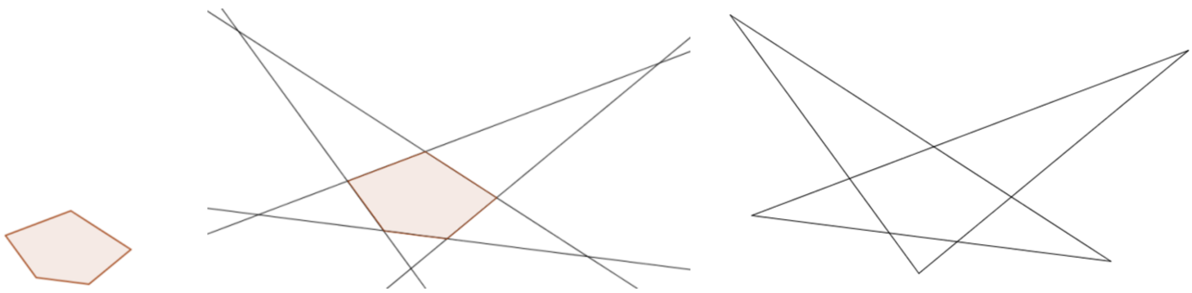


Figura 1.9: Estrelação do pentágono

Alguns polígonos podem ter mais do que uma estrelação, como é o caso do heptágono (Figura 1.10).

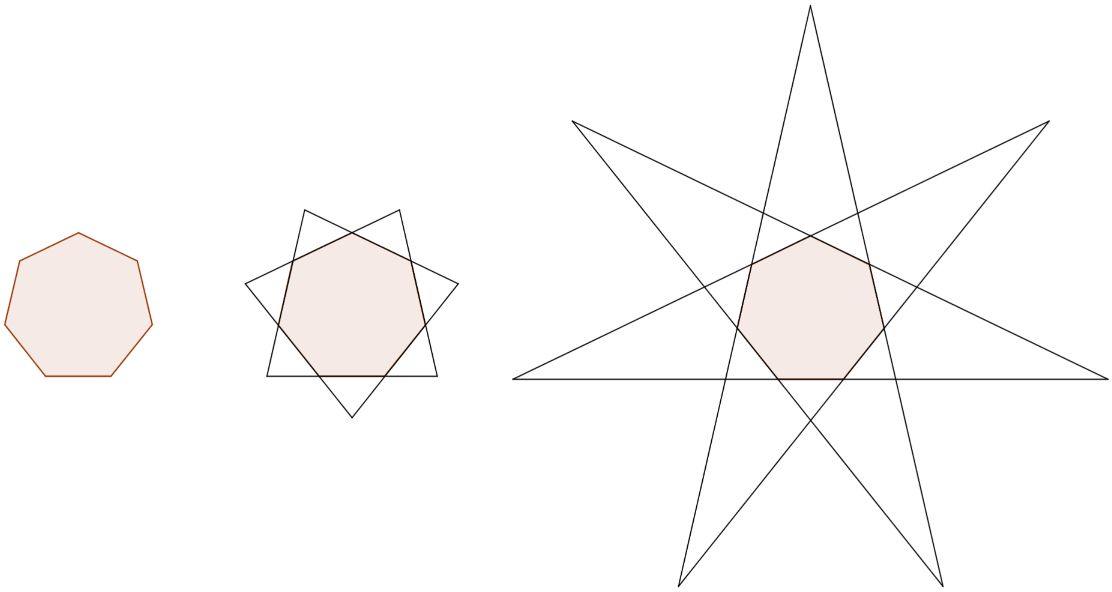


Figura 1.10: Estrelações do heptágono

Entretanto, segundo Atractor: Matemática Interativa [3], esta não é a única condição para construirmos um polígono estrelado. É necessário também que, partindo de um vértice deste polígono e, contornando-o por inteiro, retornemos ao vértice "de partida". Desta forma, não existe o hexágono estrelado, por exemplo, pois, apesar de seus lados se intersectarem ao serem prolongadas, não é possível passarmos por todos os vértices ao contorná-lo partindo de um único vértice (Figura 1.11).

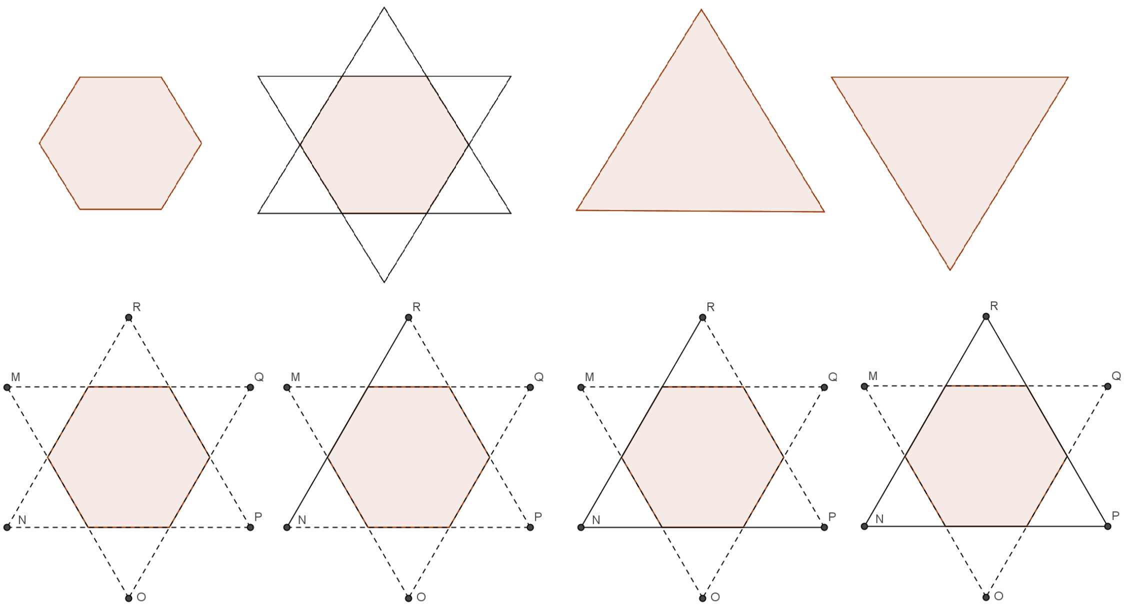


Figura 1.11: Prolongamento dos lados do hexágono

Se o pentágono for regular, então o pentagrama, construído a partir dele também será regular, já que todos os lados e ângulos internos também serão congruentes. O mesmo acontece com todos os demais polígonos estrelados.

Marques [22] explica como se faz a construção de um polígono estrelado regular. Para construirmos um polígono regular convexo, fazemos rotações de comprimento $\frac{2\pi}{n}$ em torno de um ponto, onde n é o número de lados do polígono. Em seguida, ligamos os pontos e pronto, está formado o polígono convexo regular. Já no caso dos polígonos estrelados regulares, as rotações são de $\frac{d}{n} \times 2\pi$, onde d é o número de voltas dadas até retornar ao vértice de partida. Se d e n forem primos entre si, então o polígono é estrelado. Desta forma, para se construir um pentágono regular, os vértices são marcados a cada rotação de $72°$ ou $\frac{2\pi}{5} rad$, e para o pentagrama regular, a cada $144°$ ou $\left(\frac{2}{5} \times 2\pi\right) rad$.

Coxeter [7] faz uma explanação a respeito destes polígonos. Explica que dada uma rotação S qualquer, de medida $\frac{2\pi}{p}$, os pontos $A_i = A_0 s^i (i = 0, \pm 1, \pm 2, ...)$ são os vértices de um polígono regular e $\overline{A_0A_1}$, $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_2A_3}$, ... são os lados. Além disso, p deve ser um número racional maior ou igual a 2. Isto porque se $p = 2$, temos um polígono com 2 lados coincidentes e 2 vértices, ou seja, um segmento de reta, e se fosse irracional, não seria possível retornarmos ao vértice A_0. Se p é um número inteiro, temos um polígono regular convexo. No entanto, se é fracionário, é um polígono regular estrelado. Logo, se $p = \frac{n}{d}$, onde n e d são primos entre si, com n representando o número de vértices (ou lados) e d o número de voltas dadas em torno do centro para voltar a A_0, o poliedro regular é estrelado. d representa também a "densidade" do polígono, ou seja, ao traçarmos um raio a partir do centro do polígono, o número de lados que este raio intersecta, representa o valor da "densidade". A partir dessa explicação, podemos afirmar que num pentagrama $p = \frac{5}{2}$, e entender porque o hexágono, por exemplo, não tem estrelação. No caso deste polígono, temos $n = 6$ e $d = 2$. Logo, $p = \frac{6}{2}$, ou seja, $p = 3$, que simboliza um triângulo equilátero, como veremos posteriormente, e não um "hexágono estrelado".

1.2 Poliedros Convexos

Em geral, quando falamos em poliedros, automaticamente associamos a ideia de poliedros convexos, até porque é o tipo mais comumente visto e estudado.

A seguir apresentaremos algumas definições equivalentes.

Lima et al. [21] definem poliedro convexo como todo poliedro cujo interior é convexo, ou seja, quando quaisquer dois pontos pertencentes ao seu interior definem um segmento contido no seu interior.

Segundo Dolce e Pompeo [12],

> "Consideremos um número finito n ($n \geq 4$) de polígonos planos convexos (ou regiões poligonais convexas) tais que:
>
> a) dois polígonos não estão num mesmo plano;
>
> b) cada lado de polígono é comum a dois e somente dois polígonos;
>
> c) o plano de cada polígono deixa os demais polígonos num mesmo semi-espaço.
>
> Nessas condições, ficam determinados n semi-espaços, cada um dos quais tem origem no plano de um polígono e contém os restantes. A interseção desses semi-espaços é chamado *poliedro convexo*.
>
> Um poliedro convexo possui: *faces*, que são os polígonos convexos; *arestas*, que são os lados dos polígonos e *vértices*, que são os vértices dos polígonos.
>
> A reunião das faces é a *superfície* do poliedro". [12]

Segundo Dante [10], "[...] um poliedro é convexo se qualquer reta não paralela a nenhuma das faces intersecta suas faces em, no máximo, dois pontos".

Na Figura 1.12, podemos observar um poliedro convexo qualquer, e a característica que o torna convexo.

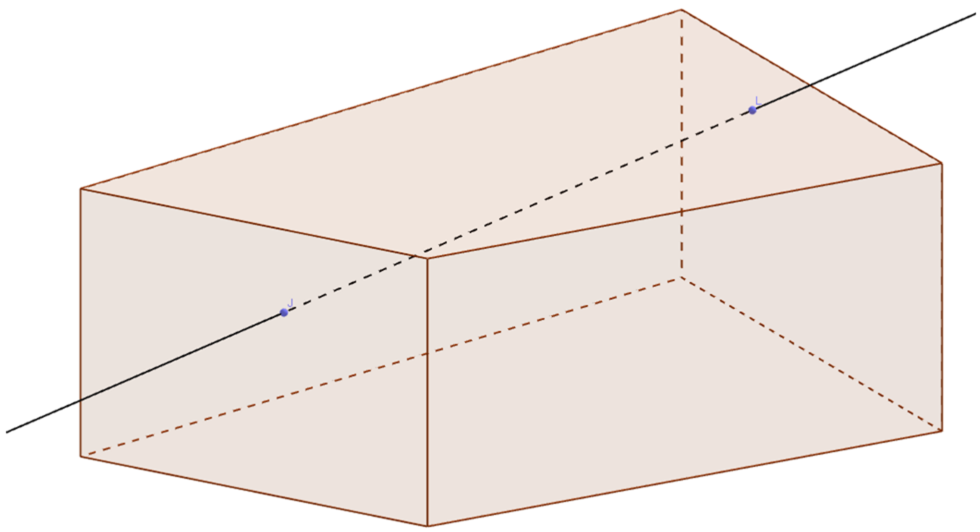


Figura 1.12: Poliedro convexo

1.2.1 Relação de Euler

A Relação de Euler é uma equação que envolve o número de vértices (V), arestas (A) e faces (F) de um poliedro convexo qualquer.

Recebeu este nome, pois foi descoberta em 1750 por Leonhard Euler ($1707-1783$), um matemático suíço muito reconhecido. Nasceu em Basileia, onde trabalhou por muito tempo. Também passou por Berlim, na Alemanha, e em São Petesburgo, na Rússia. Euler graduou-se em Filosofia, pois era desejo de seu pai que seguisse os estudos religiosos. No entanto, pouco tempo depois mudou seu objetivo acadêmico, já que era amante da Matemática. Foi aluno de Johann Bernoulli ($1667-1748$), que referiu-se a ele como "o príncipe dos matemáticos". Deu algumas contribuições para o desenvolvimento da Matemática, como a criação da Teoria dos Grafos, a descoberta de três pontos importantes associados a cada triângulo, que são o baricentro (encontro das medianas), ortocentro (encontro das alturas) e circuncentro (centro da circunferência que contém os três vértices), entre outros. Contribuiu também para o desenvolvimento da Matemática Recreativa, com os quadrados e hexágonos mágicos, além de ter sido uma das inspirações para a criação do *Sudoku*. [29]

Dolce e Pompeo [12] demonstram de forma clara e de fácil entendimento a Relação de Euler.

Primeiramente, é necessário definir superfície poliédrica limitada convexa.

> "[...]É a reunião de um número finito de polígonos planos e convexos (ou de regiões poligonais convexas), tais que:
> a) dois polígonos não estão num mesmo plano;
> b) cada lado de polígono não está em mais que dois polígonos;
> c) havendo lados de polígonos que estão em um só polígono, eles devem formar uma única poligonal fechada, plana ou não, chamada contorno;
> d) o plano de cada polígono deixa os demais num mesmo semi-espaço (condição de convexidade).
>
> As superfícies poliédricas limitadas convexas que têm contorno são chamadas abertas. [...]" [12]

Relação de Euler: Para todo poliedro convexo, ou para sua superfície, vale a relação

$$V - A + F = 2$$

em que V é o número de vértices, A é o número de arestas e F é o número de faces do poliedro.

Demonstração: Podemos provar que, para uma superfície poliédrica limitada convexa aberta é válida a relação $V - A + F = 1$, onde V é o número de vértices, A é o número de arestas e F é o número de faces. Chamando a proposição em relação a faces de $P(F) : V - A + F = 1$, e aplicando o Princípio da Indução Finita, temos:

(i) Queremos provar que $P(1)$ é verdadeira.

Para $F = 1$ a superfície em questão é apenas um polígono. Por definição, num polígono plano qualquer, o número de vértices é igual ao número de arestas, ou seja, $V = A$. Logo:

$$P(1) : V - A + F = A - A + 1 = 1$$

Portanto, $P(1)$ é verdadeira, pois vale para $F = 1$.

(ii) Queremos provar que se $P(F)$ é verdadeira, então $P(F + 1)$ é verdadeira.

Seja uma superfície poliédrica limitada aberta com F faces, A arestas e V vértices. Se a essa superfície for acrescentada uma face de n arestas sendo que m delas $(n > m)$ coincidam com arestas já existentes, então a nova superfície poliédrica limitada aberta terá $F_s = F + 1$ faces, $A_s = A + n - m$ arestas e $V_s = V + n - (m + 1)$ vértices, já que $m + 1$ vértices irão coincidir. Assim, usando que $V - A + F = 1$, temos:

$$\begin{aligned}
P(F+1) : V_s - A_s + F_s &= [V + n - (m+1)] - (A + n - m) + (F + 1) = \\
&= V + n - (m+1) - A - (n - m) + F + 1 = \\
&= n - n - m + m - 1 + 1 + V - A + F = \\
&= V - A + F = 1
\end{aligned}$$

Portanto, $P(F+1)$ é verdadeira, já que a relação não se altera se for acrescentada ou retirada uma face da superfície em questão.

Como (i) e (ii) são verdadeiras, então fica provado que $V - A + F = 1$ se a superfície poliédrica limitada for aberta.

Por fim, seja agora uma superfície poliédrica limitada fechada com F faces, A arestas e V vértices. Retirando uma face, a nova superfície torna-se poliédrica limitada aberta com $F_a = F - 1$ faces, $A_a = A$ arestas e $V_a = V$ vértices. Desta forma, usando que $V_a - A_a + F_a = 1$, temos:

$$V_a - A_a + F_a = 1 \Longleftrightarrow V - A + F - 1 = 1 \Longleftrightarrow V - A + F = 2$$

Portanto, provamos que para todo poliedro convexo vale a relação de Euler.

1.3 Poliedros Não Convexos

Da mesma forma que existem polígonos que não são convexos, existem também poliedros que não são convexos.

Se poliedros convexos são aqueles onde quaisquer dois pontos pertencentes a ele ou ao seu interior definem um segmento contido nele ou no seu interior, então os poliedros onde isso não acontece são chamados não convexos.

Na Figura 1.13, podemos observar um poliedro não convexo qualquer, e a característica que o torna não convexo.

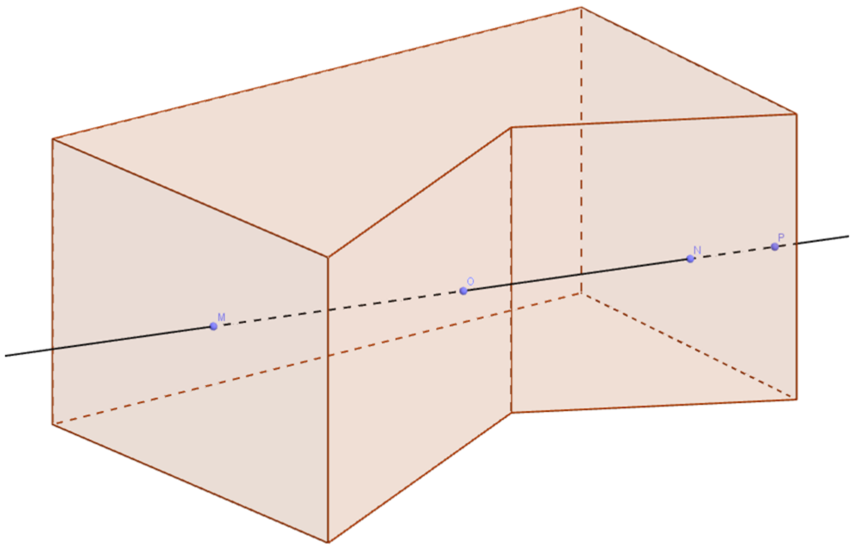


Figura 1.13: Poliedro não convexo

1.3.1 Característica de Euler

Para poliedros convexos, $V - A + F = 2$, como vimos anteriormente. No entanto, $V - A + F$ nem sempre será igual a 2. De maneira geral, temos que $\chi(P) = V - A + F$, ou seja $\chi(P)$ é a soma alternada de $b_0 - b_1 + b_2$, onde $\chi(P)$ é a característica de Euler, e b_0 representa o número de vértices (dimensão 0), b_1 o número de arestas (dimensão 1) e b_2 representa o número de faces (dimensão 2). No caso dos poliedros convexos, $\chi(P) = 2$, e da superfície poliédrica limitada convexa aberta, $\chi(P) = 1$. [31]

1.3.2 Poliedros Estrelados

Da mesma forma que ao prolongarmos os lados de um polígono podemos obter um polígono estrelado, ao prolongarmos as faces de um poliedro podemos obter um poliedro estrelado. Se o fizermos com as faces de um tetraedro, de um hexaedro ou de um octaedro, por exemplo, nada acontecerá, mas se o fizermos com o dodecaedro, podemos encontrar três poliedros diferentes, repetindo-se o processo chamado de "Estrelação" de um poliedro.

A partir da primeira estrelação, é obtido um poliedro que recebe o nome de Pequeno Dodecaedro Estrelado. A partir da segunda, o Grande Dodecaedro e a partir da terceira, o Grande Dodecaedro Estrelado. A primeira, segunda e terceira estrelações em questão, respectivamente, estão ilustradas na Figura 1.14.

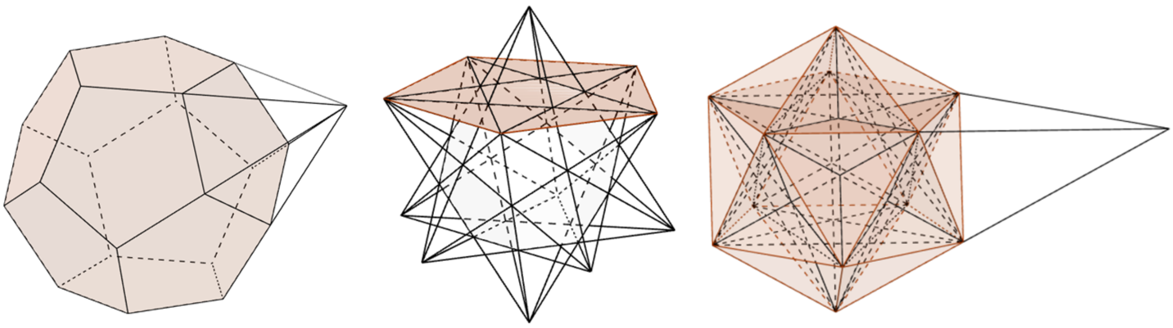


Figura 1.14: Estrelações do Dodecaedro

Além do dodecaedro, o icosaedro também pode ser estrelado. Coxeter provou que este poliedro de Platão pode ser estrelado 59 vezes. Mas dentre todas essas estrelações, a mais notória é a 16^a, chamada de Grande Icosaedro. [20] [32].

Ao "estrelarmos" o icosaedro pela primeira vez, o sólido formado parece o Grande Dodecaedro Estrelado. No entanto, as faces das pirâmides de bases triangulares formadas que, aparentemente formam um polígono, não estão contidas num mesmo plano. Assim, não formam um pentagrama, apesar de parecer muito próximo a ele.

Capítulo 2

Poliedros Regulares

Dependendo da definição adotada, é possível existir cinco poliedros regulares, ou nove, ou infinitos.

A partir da definição "Poliedro regular é todo poliedro convexo onde suas faces são polígonos regulares congruentes e seus vértices são congruentes", existem apenas cinco poliedros regulares: os de Platão.

Já a partir da definição "Poliedro regular é todo poliedro onde suas faces são polígonos regulares congruentes e seus vértices são congruentes", existem nove poliedros regulares: os cinco de Platão e os quatro de Kepler-Poinsot.

Mas se poliedro regular for considerado como "todo poliedro onde os vértices e as arestas são congruentes", então existem, além dos nove anteriores, os infinitos poliedros de Arquimedes.

Aqui adotaremos a segunda definição, pois segundo Veloso [32] e Marques [22] Cauchy provou, em 1913, que existem nove, e apenas nove poliedros regulares.

No entanto, quando procuramos a definição de poliedros regulares, o mais comum é encontrarmos a definição de poliedros convexos regulares.

Garcia e Castilho [18], por exemplo, ao definir poliedros regulares, definem poliedros convexos regulares:

> "Um poliedro é regular quando satisfaz as três seguintes condições:
>
> a) Todas as faces são polígonos regulares com o mesmo número de lados.
>
> b) Em todos os vértices concorrem o mesmo número de arestas.
>
> c) É um poliedro convexo. [18]

Já Lima et. al. [21] dá a definição de poliedro convexo regular. No entanto, no seguinte trecho que transcreveremos aqui, é possível verificar a associação que os autores fazem de poliedros regulares com poliedros convexos regulares: “Desde a antiguidade são conhecidos os poliedros regulares, ou seja, poliedros convexos cujas faces são polígonos regulares iguais e que em todos os vértices concorrem o mesmo número de arestas. [...]”

De fato aqui estão falando de poliedros regulares, no entanto, apenas dos convexos.

Em seguida, definem, de fato, poliedros convexos regulares: “Um poliedro convexo é regular quando todas as faces são polígonos regulares iguais e em todos os vértices concorrem o mesmo número de arestas. ”

Eves, traduzido por Domingues [15], por sua vez, afirma que:

> “Um poliedro se diz *regular* se suas faces são polígonos regulares congruentes e se seus ângulos poliédricos são todos congruentes. Embora existam polígonos regulares de todas as ordens, sucede que só há cinco poliedros regulares diferentes [...]”[15]

Assim, percebemos novamente a tendência de associar poliedros regulares aos poliedros convexos regulares.

Vários autores, como Dolce e Pompeo [12], definem os poliedros convexos regulares como sendo aqueles cujas faces são polígonos convexos regulares e congruentes entre si, e cujos ângulos poliédricos também são congruentes.

Dante [10] também corrobora com esta definição. Para ele “Um poliedro convexo é regular quando todas as faces são regiões poligonais regulares e congruentes e em todos os vértices concorre o mesmo número de arestas”.

A partir destas definições, e de alguns teoremas que veremos e demonstraremos aqui, poderemos concluir que existem apenas cinco tipos de poliedros convexos regulares, os quais são denominados Poliedros de Platão.

Para que um poliedro seja regular é necessário que três condições sejam atendidas:

i) as faces devem ser polígonos regulares;

ii) as faces devem ser congruentes entre si;

iii) e os ângulos sólidos também devem ser iguais.

No entanto, se trocarmos “ângulo sólido” pela ideia de “figura do vértice”, podemos substituir as três condições acima, por apenas duas: basta que as faces e que as figuras dos vértices sejam regulares para que o poliedro seja regular. Isto porque se as faces são regulares, então as arestas devem ser congruentes e se as figuras dos vértices são regulares, então as faces também são iguais, pois faces diferentes, mesmo que regulares nunca, definirão um polígono regular como figura do vértice. [7]

De maneira geral, damos aqui a seguinte definição para poliedros regulares: Todo poliedro cujas faces são polígonos regulares congruentes e cujos ângulos poliédricos são congruentes.

Esta definição pode ter mais que uma interpretação. Se a definição de poliedros regulares for restringida, ou seja, se não forem admitidas como faces polígonos que se intersectam além dos vértices, então de fato, os únicos sólidos regulares existentes são os cinco de Platão (tetraedro, hexaedro, octaedro, dodecaedro e icosaedro). Mas se esta definição for interpretada tal qual foi escrita, então não haverá restrição quanto à intersecção das faces. Desta forma, podemos acrescentar aos poliedros regulares, os quatro poliedros regulares não convexos, denominados Poliedros de Kepler-Poinsot (pequeno dodecaedro estrelado, grande dodecaedro, grande dodecaedro estrelado e grande icosaedro), já que são, de fato, poliedros cujas faces são polígonos regulares congruentes e cujos ângulos poliédricos também são congruentes. Assim, o grupo dos poliedros regulares é composto por nove sólidos.

2.1 Poliedros de Platão

São poliedros convexos onde todas as faces possuem o mesmo número de arestas e em todos os vértices também concorrem o mesmo número de arestas: tetraedro, hexaedro, octaedro, dodecaedro e icosaedro. Foram assim denominados porque Platão tinha profunda admiração pelos sólidos.

Platão foi um filósofo muito conhecido. Nasceu em Atenas, Grécia, por volta do ano de 429 a. C. e morreu por volta do ano de 348 a. C. Foi amigo e íntimo de Sócrates, mas não foi com este outro grande filósofo que tomou gosto pela matemática. Depois da morte do seu grande amigo, Platão viajou muito. Em Cirene, uma antiga colônia grega na atual Líbia, que estudou matemática com Teodoro. Passou também pelo Egito, pela Baixa Itália e Sicília, onde conheceu os pitagóricos. Tornou-se amigo de Arquitas de Tarento e de Timeo de Lócrida. Por volta de 389 a. C. voltou à Atenas e fundou sua escola, onde dedicou o resto da sua vida ensinando e escrevendo. Sua filosofia natural é em parte baseada na dos pitagóricos. Para ele, todo o universo estava fundamentado na aritmética e na geometria. Por isso, acreditava que para aprender filosofia, era preciso primeiro saber geometria. Platão não contribuiu muito com obras matemáticas, mas cooperou para o avanço da lógica e de métodos de emprego da geometria. [4]

Eves [15] afirma que, apesar de serem conhecidos assim, os poliedros de Platão não foram descobertos por este filósofo. Segundo o autor, no Livro XIII dos *Elementos* de Euclides, há uma observação que diz que o tetraedro, o cubo e o dodecaedro se devem aos pitagóricos, enquanto o octaedro e o icosaedro a Teeteto.

Existe no museu Ashmolean Museum of Oxford um conjunto de cinco pedras, que reproduzem com exatidão os poliedros de Platão, conforme a Figura 2.1. Foram esculpidas por volta do ano de 1400 a. C., e tem aproximadamente o tamanho de um punho. [25]

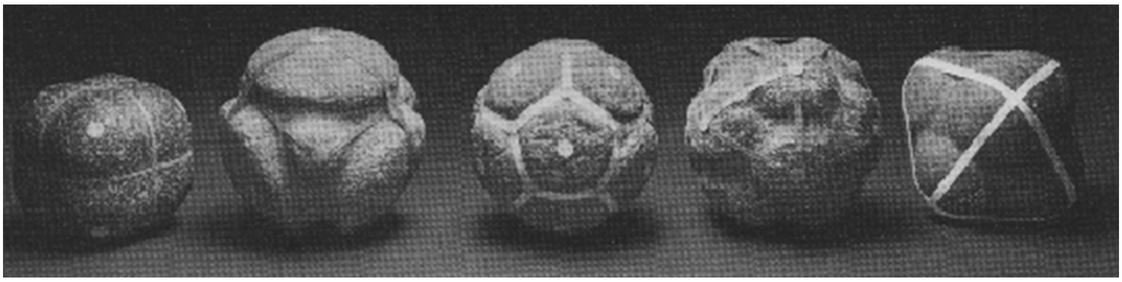


Figura 2.1: Poliedros de Platão esculpidos no período neolítico
Fonte: http://www.math.ist.utl.pt/˜ppinto/plato5.htm

Acredita-se que estas pedras foram esculpidas por povos neolíticos que viveram na Escócia. [27]

Segundo Eves [15] e Boyer, traduzido por Gomide [2], quatro dos cinco sólidos em questão eram associados aos quatro elementos de Empédocles (fogo, terra, ar e água). O fogo correspondia ao tetraedro, a terra ao cubo, o ar ao octaedro e a água ao icosaedro. O segundo autor afirma, ainda, que provavelmente o fascínio que os pitagóricos tinham sobre o dodecaedro foi o que levou Platão a defini-lo como símbolo do universo. Estas relações estão apresentadas na Figura 2.2.

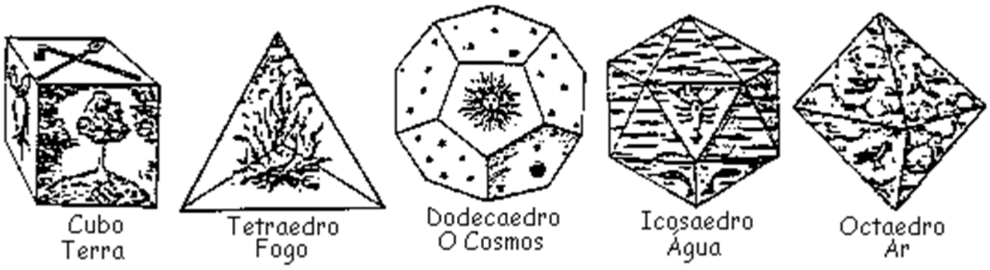


Figura 2.2: Correspondência entre os poliedros de Platão e os elementos de Empédocles
Fonte: http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm99/icm43/sol_plat.htm

Platão afirma em um de seus textos, incluído no diálogo Timeu (apud [32]), que a água, o fogo, o ar e a terra são corpos, e que como corpos são sólidos limitados por superfícies retilíneas, então os quatro elementos também são sólidos limitados por superfícies retilíneas. No entanto, não é qualquer sólido que é capaz de representá-los: devem ser os corpos mais perfeitos possíveis que, mesmo sendo diferentes entre si, são capazes de se transformar uns nos outros. Segundo Platão, o cubo representa a terra, pois é o sólido mais imóvel, já que é formado por quadrados, que é mais firme que triângulos equiláteros. Assim, a segunda figura menos móvel, o icosaedro, é atribuída à água, elemento mais estável depois da terra, a intermediária, o octaedro, ao ar e a mais instável, o tetraedro, ao fogo. Desta forma, afirma que a figura que tem o menor número de faces deverá ser a mais móvel, mais cortante, mais penetrante, mais leve. Por fim, afirma que o dodecaedro era a última construção que faltava para organizar as constelações do céu.

Eves [15] relata que Kepler sugeriu uma explicação para estas associações. Segundo ele, as relações volume-superfície referiam-se a características de umidade, de forma que, o tetraedro, cujo volume intuitivamente seria menor, corresponderia ao fogo, que é mais seco, enquanto que o icosaedro, de volume maior, à água, o mais úmido dos elementos. Quanto ao cubo e ao octaedro, por ter mais estabilidade o cubo equivaleria à terra, e por ser mais instável, o octaedro ao ar. O dodecaedro representaria o Universo, pois da mesma forma que o zodíaco tem 12 seções, este sólido tem 12 faces.

Johannes Kepler (1571 – 1630) nasceu na Alemanha. Apesar de ser uma criança fraca e doente, logo apresentou muita habilidade com a matemática. Estudou em um seminário protestante, mas pouco tempo antes de ordenar-se pastor, mudou-se para Áustria onde foi ensinar Astronomia. Era muito místico e religioso, e acreditava, tal qual os pitagóricos, que existia uma explicação matemática para toda a estrutura do Universo.

Seu primeiro trabalho foi o desenvolvimento de uma teoria sobre as órbitas dos planetas do Sistema Solar, onde relacionava-as com o sólidos de Platão. A partir daí, tornou-se um astrônomo famoso. Foi convidado por Tucho Brahe, grande astrônomo que fez observações sistemáticas do céu, a trabalhar como seu assistente em Praga, atual capital da República Tcheca. Acreditava que as órbitas dos planetas eram circulares. No entanto, não obteve sucesso ao tentar ajustar os dados das observações da órbita de Marte, feitas por Brahe, a um círculo. Verificou então, que supondo a órbita do planeta oval, seus cálculos concordariam com os dados das observações. Concluiu então que as órbitas dos planetas eram elípticas, com o Sol em um de seus focos. A partir daí, elaborou suas três leis do movimento planetário. [6]

Segundo Carvalho Filho e Germano [6], Kepler acreditava que havia alguma relação entre o fato de existirem apenas cinco poliedros convexos regulares e existirem seis planetas, já que na época somente eram conhecidos Mercúrio, Vênus, Terra, Marte, Júpiter e Saturno. O astrônomo construiu uma espécie de sistema solar, onde colocava os cinco sólidos platônicos uns dentro dos outros, separados por esferas concêntricas, circunscritas a uns e inscritas em outros. Acreditava que se a ordem dos sólidos inscritos fosse octaedro, icosaedro, dodecaedro, tetraedro e por fim, hexaedro, então haveria uma relação entre os intervalos destas esferas e o tamanho das órbitas dos planetas. No entanto, seu modelo de sistema solar, denominado de *Mysterium Cosmographicum* (Figura 2.3), foi totalmente desaprovado quando os demais planetas, Urano Netuno e Plutão, foram descobertos.

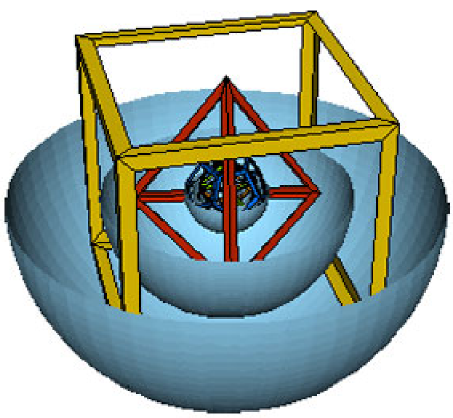


Figura 2.3: *Mysterium Cosmographicum*
Fonte: http://www.uff.br/cdme/platonicos/platonicos-html/solidos-platonicos-br.html

2.1.1 Construção dos Sólidos

Platão explica, em um de seus textos, incluído no diálogo Timeu (apud [32]), que quatro desses sólidos mais perfeitos são gerados a partir de dois tipos de triângulos retângulos notáveis: o isósceles, representado à esquerda da Figura 2.4, e o cujos ângulos agudos são 30° e 60°, representado à direita.

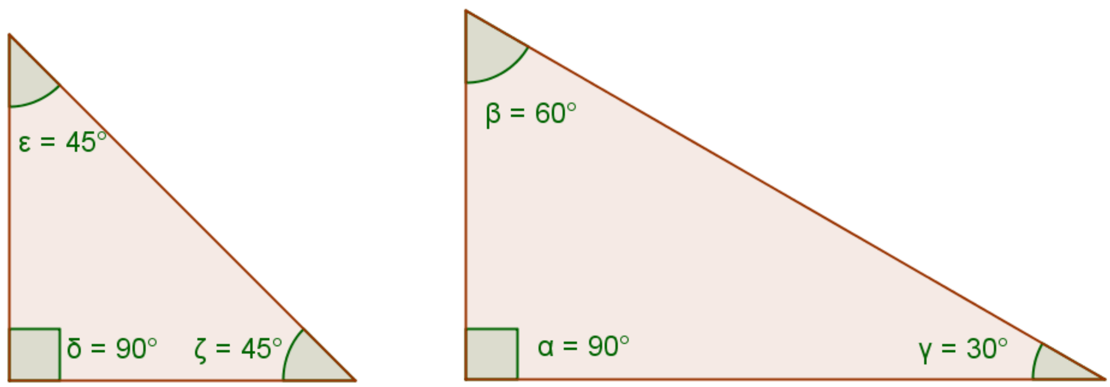


Figura 2.4: Triângulos retângulos notáveis

Segundo ele, cada face do tetraedro, do octaedro e do icosaedro era formada pela reunião de seis triângulos 30°, 60° e 90°. De fato, se reunirmos dois desses triângulos congruentes de forma que as hipotenusas se encontrem e os ângulos congruentes sejam adjacentes, e se repetirmos esse procedimento três vezes, com triângulos congruentes aos primeiros, e em seguida os seis triângulos se encontrarem em seus respectivos ângulos de 60°, será possível obtermos um triângulo equilátero. A Figura 2.5 reproduz a formação dessas faces.

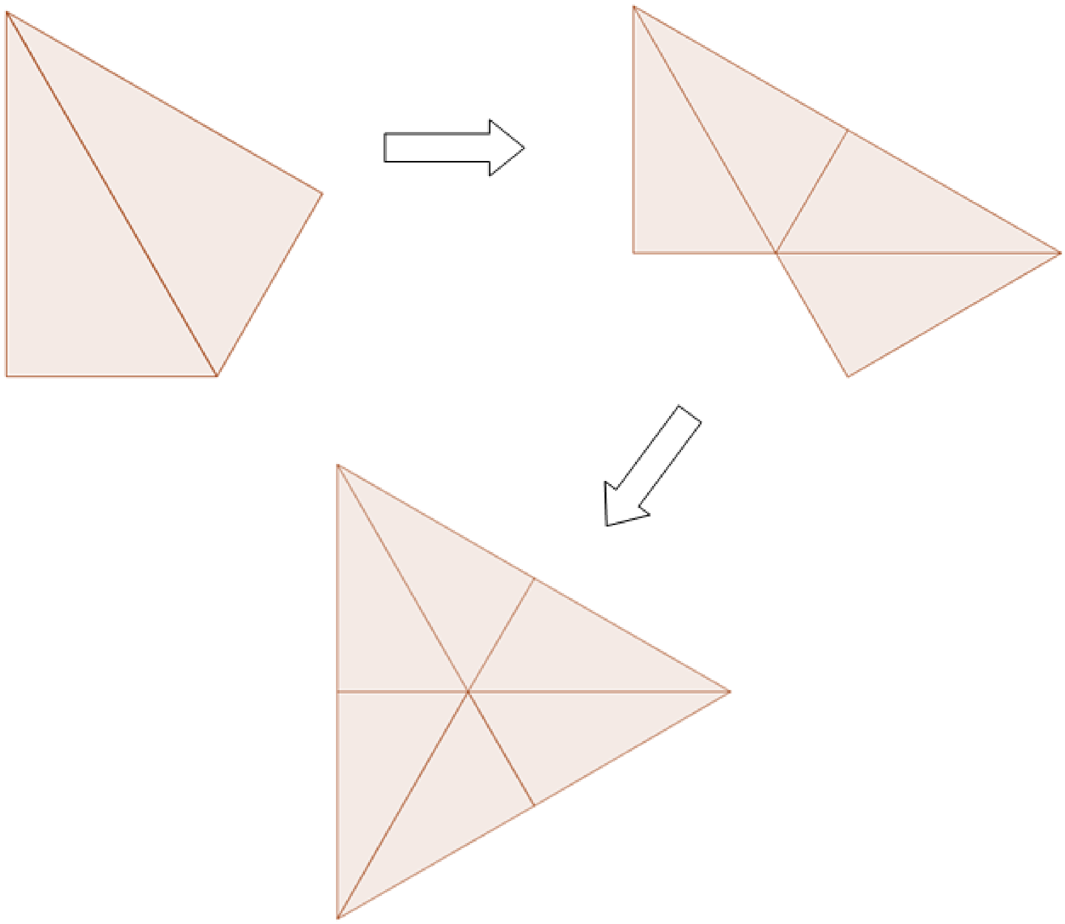


Figura 2.5: Construção do triângulo equilátero a partir de triângulos retângulos

Desta forma ele mostra que é possível reunirmos até cinco desses triângulos, já que a integração de um sexto triângulo resultaria num ângulo plano (de 360°), e então não haveria ângulo poliédrico. Temos a representação da formação do tetraedro, do octaedro e do icosaedro, respectivamente, na Figura 2.6.

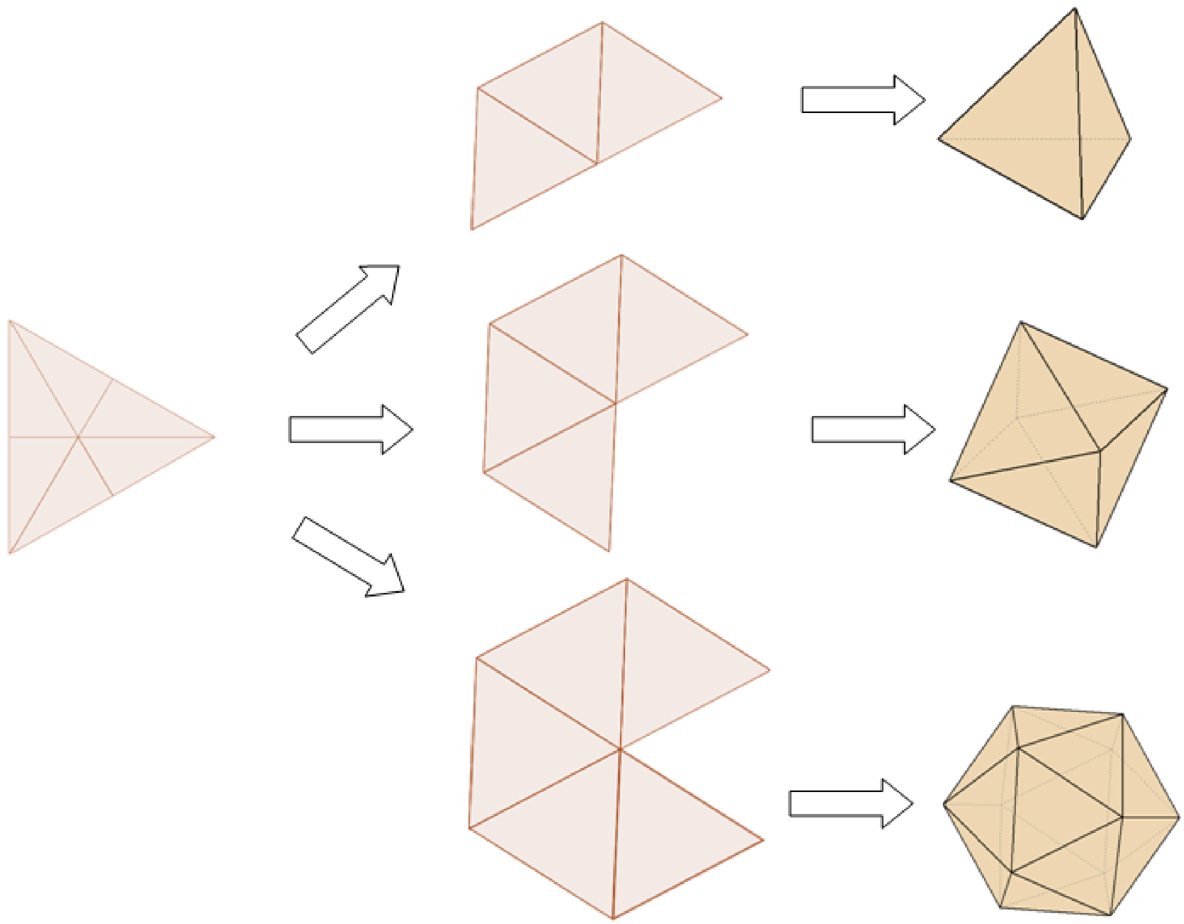


Figura 2.6: Formação do tetraedro, octaedro e icosaedro

Assim, formamos o tetraedro, com quatro triângulos equiláteros, sendo que a combinação de três deles constitui um ângulo sólido; o octaedro, com oito triângulos equiláteros, sendo que a combinação de quatro deles constitui um ângulo sólido; e o icosaedro, com vinte triângulos equiláteros, sendo que a combinação de cinco deles constitui um ângulo sólido. [28]

Como cada face destes três sólidos é formada pela reunião de seis triângulos retângulos, como explicamos anteriormente, então o tetraedro é formado por 24 triângulos, já que tem 4 faces; o octaedro por 48 e o icosaedro por 120.

Por outro lado, se ligarmos quatro triângulos retângulos isósceles e congruentes, de forma que seus ângulos retos se encontrem, o polígono que formaremos será um quadrado, justamente o polígono convexo regular que define o cubo. A Figura 2.7 reproduz a formação dessa face.

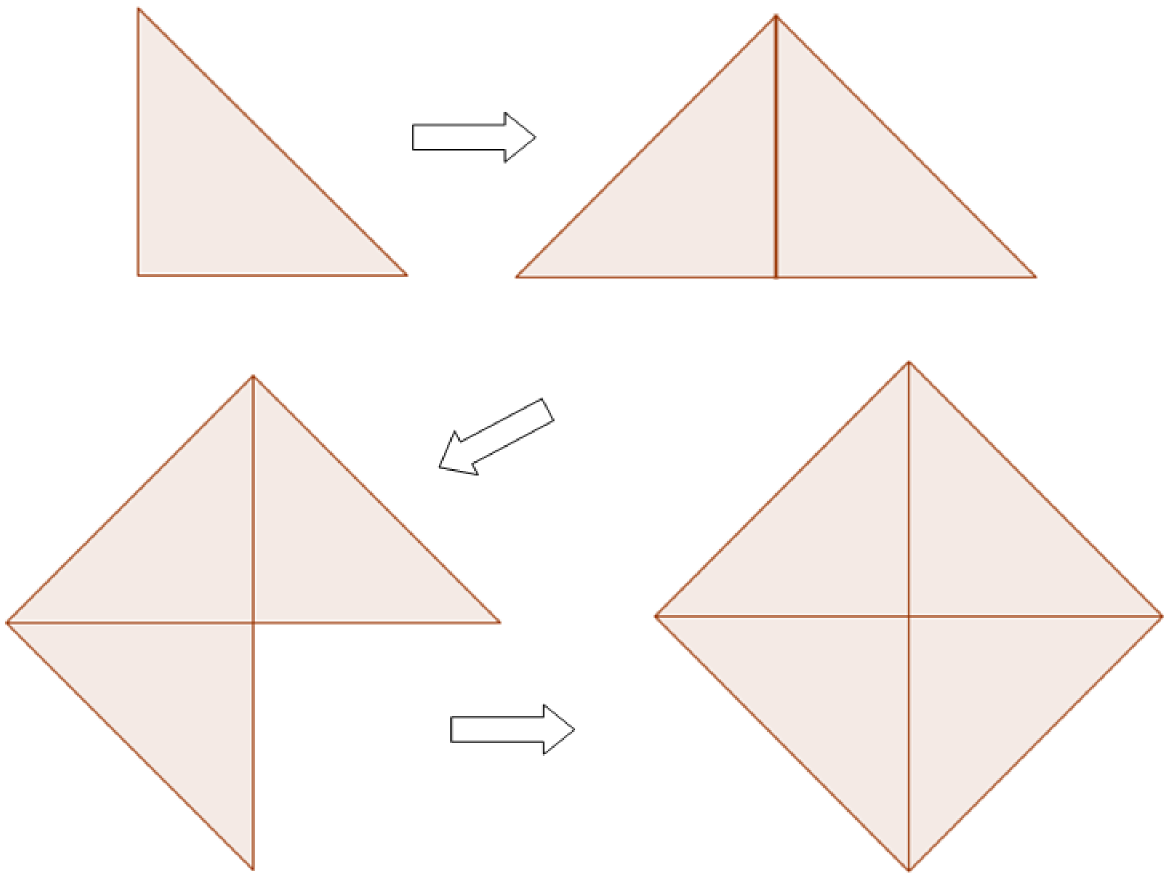


Figura 2.7: Construção do quadrado a partir de triângulos retângulos

Analogamente ao caso dos triângulos equiláteros, somente é possível reunir três desses quadrados. A Figura 2.8 mostra como é formado o hexaedro.

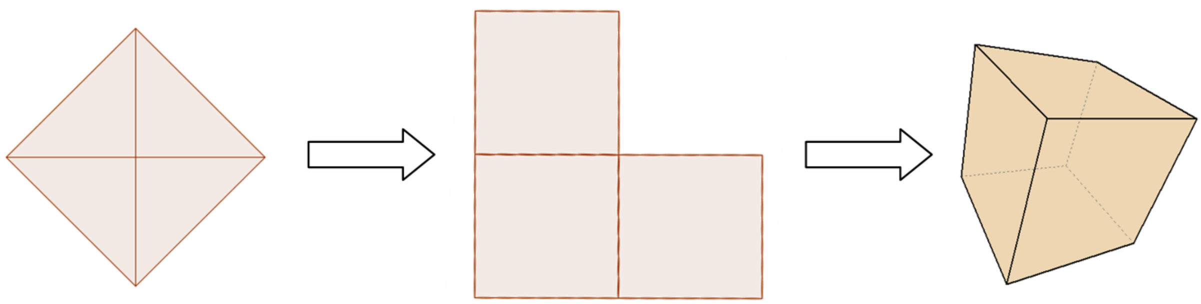


Figura 2.8: Formação do hexaedro

Assim formamos o hexaedro, com seis quadrados, sendo que a combinação de três deles constitui um ângulo sólido. [28]

Como cada face é formada pela reunião de 4 triângulos retângulos isósceles, então o hexaedro é formado por 24 triângulos, já que tem 6 faces.

Desta forma, Platão explica a montagem do tetraedro, hexaedro, octaedro e icosaedro.

O quinto poliedro (dodecaedro) é formado a partir de pentágonos regulares, conforme podemos observar na Figura 2.9.

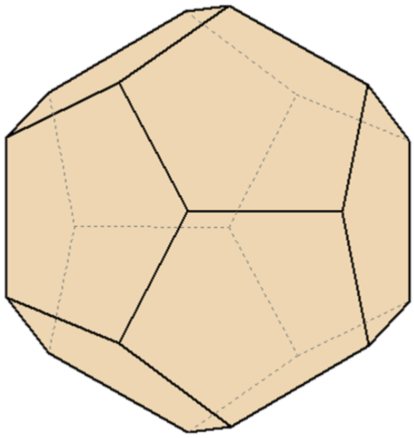


Figura 2.9: Dodecaedro

Segundo Albino (apud [28]):

> "Deus serviu-se do dodecaedro para o universo: por isso se veem no céu doze signos zodiacais no círculo do zodíaco, e cada um destes se divide em trinta partes; e como no dodecaedro, que resulta composto de doze pentágonos divididos cada um em cinco triângulos, cada um ulteriormente composto de seis triângulos, encontram-se complexivamente trezentos e sessenta triângulos, assim também no zodíaco encontram-se o mesmo número de partes."

A partir da fala de Albino, é possível imaginar que a construção deste sólido segue os mesmos procedimentos usados para a construção dos demais. Primeiramente formaríamos os triângulos retângulos de ângulos agudos iguais a 30° e 60°. Em seguida, agruparíamos seis destes triângulos, formando um triângulo equilátero. A reunião de cinco destes triângulos formaria uma das faces, ou seja, um pentágono, de forma que cada um deles seria composto por 30 triângulos retângulos. Já que o dodecaedro tem 12 faces, então o sólido teria 360 triângulos retângulos em sua constituição. No entanto, os matemáticos observam que a formação do dodecaedro a partir destes procedimentos não é possível, já que a reunião de cinco triângulos equiláteros não resulta em um pentágono, e sim um ângulo poliédrico. Logo, para que o texto de Albino fosse justificado, seria necessária a utilização de triângulos diferentes dos retângulos definidos por Platão. [28]

Desta forma, é possível concluir que não formamos este sólido a partir de triângulos retângulos, como é o caso dos demais.

2.1.2 Os Poliedros de Platão na natureza

Os Poliedros de Platão estão presentes na natureza, nos lugares mais inusitados. Existem células, cristais, moléculas, organismos vivos, etc., com o seu formato, além de obras de arte que contemplam a sua perfeição.

Podemos citar como exemplos a calcopirita, a magnetita e a galena, minerais que se cristalizam quase sempre no formato de tetraedro, octaedro e hexaedro, respectivamente. Podemos observá-las na Figura 2.10. [17]

Figura 2.10: Calcopirita, magnetita e galena, respectivamente
Fonte: http://www.uff.br/cdme/platonicos/platonicos-html

Além destes minerais, existe também a pirita, um dissulfeto de ferro, cujos cristais aparecem no formato de cubo, dodecaedro ou octaedro (Figura 2.11). [34]

Figura 2.11: Pirita
Fonte: http://www.mindat.org/min-3314.html

Alguns radiolários, que são microfósseis, exclusivamente marinhos, como o *Cir-*

coporus octahedrus, *Circogonia icosahedra*, *Lithocubus geometricus* e *Circorrhegma dodecahedra*, também têm o formato de sólidos platônicos (Figura 2.12). [16] e [17]

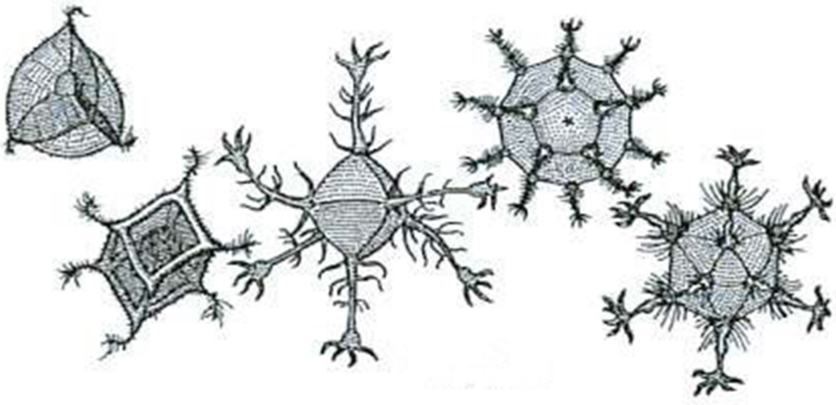


Figura 2.12: Radiolários
Fonte: http://www.uff.br/cdme/platonicos/platonicos-html/solidos-platonicos-br.html

O vírus da herpes é um exemplo de organismo vivo que assume a simetria icosaédrica, já que o icosaedro é a maneira mais simples de montar subunidades proteicas idênticas repetidas, as quais constituem as estruturas virais (Figura 2.13). [17]

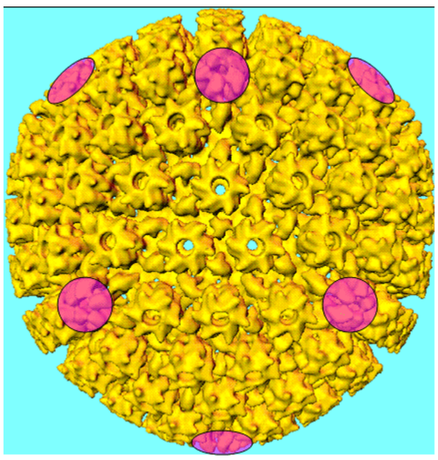


Figura 2.13: Vírus da herpes
Fonte: http://www.uff.br/cdme/platonicos/platonicos-html/icosaedro-br.html

O arranjo geométrico dos átomos da estrutura de alguns materiais sólidos assume o formato de cubo (Figura 2.14). [5]

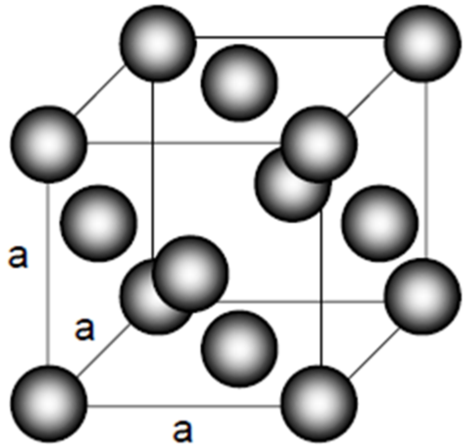


Figura 2.14: Estrutura de alguns materiais sólidos
Fonte: http://www.trajanocamargo.com.br

O dodecaedro de bronze, que podemos observar na Figura 2.15, um objeto encontrado em 1939 na Alemanha, que pode ter sido um candelabro, um instrumento de guerra ou de medida, ou um objeto místico também é um exemplo da utilização dos poliedros de Platão [17]. Já foram encontrados aproximadamente 100 desses objetos feitos em bronze ou em pedra, que datam dos séculos II ou III. [8]

Figura 2.15: Dodecaedro de bronze
Fonte: http://teoriadaconspiracao.org/discussion/46/dodecaedro-romano/p1

Existe também o Icosaedro Romano de Bronze, que tal qual o Dodecaedro de Bronze, não sabe-se a sua real utilização (Figura 2.16). [17]

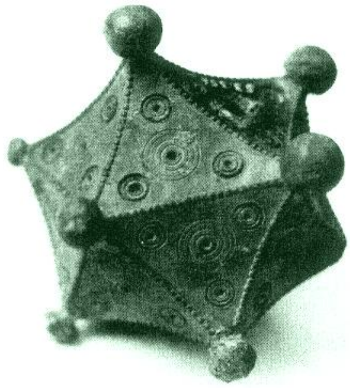


Figura 2.16: Icosaedro de bronze
Fonte: http://www.uff.br/cdme/platonicos/platonicos-html/icosaedro-br.html

2.1.3 Definição dos Poliedros de Platão e suas consequências

Segundo Dolce e Pompeo [12], um poliedro poderá ser chamado poliedro de Platão se, e somente se, todas as faces possuírem o mesmo número de arestas, todos os ângulos poliédricos possuírem o mesmo número de arestas e, valer a relação de Euler.

A definição acima também nos permite provar que existem cinco, e somente cinco, modalidades de poliedros de Platão.

Propriedade 1: Existem cinco, e somente cinco, modalidades de poliedros de Platão.
Demonstração: Seja um poliedro com F faces, A arestas e V vértices. Suas faces possuem, cada uma, n arestas, e seus vértices (ângulos poliédricos) possuem, cada um, m arestas. É preciso que $n \geq 3$, com $n \in N$, já que caso contrário não temos polígono, e que $m \geq 3$, com $m \in N$, já que caso contrário também não temos ângulo poliédrico. A partir das condições impostas pela definição, temos:

i) Como todas as faces devem ter o mesmo número de arestas, e cada aresta está em duas, e somente duas, faces, então:

$$n.F = 2.A \Longleftrightarrow F = \frac{2A}{n} \tag{2.1}$$

ii) Como todos os ângulos poliédricos devem ter o mesmo número de arestas, e cada aresta está em dois, e somente dois, ângulos, então:

$$m.V = 2.A \Longleftrightarrow V = \frac{2A}{m} \tag{2.2}$$

iii) Como o poliedro deve satisfazer a relação de Euler para ser um poliedro de Platão, então, substituindo (2.1) e (2.2) na relação de Euler, temos:

$$V - A + F = 2 \Longleftrightarrow \frac{2A}{m} - A + \frac{2A}{n} = 2$$

Dividindo toda a equação por $2.A$, obtemos:

$$\frac{1}{m} - \frac{1}{2} + \frac{1}{n} = \frac{1}{A} \tag{2.3}$$

Estabelecemos que $n \geq 3$ e $m \geq 3$. No entanto, se ambos fossem, simultaneamente, maiores que 3, teríamos:

$$n > 3 \Longleftrightarrow n \geq 4 \Longleftrightarrow \frac{1}{n} \leq \frac{1}{4} \tag{2.4}$$

$$m > 3 \Longleftrightarrow m \geq 4 \Longleftrightarrow \frac{1}{m} \leq \frac{1}{4} \tag{2.5}$$

Somando as desigualdades (2.4) e (2.5), temos:

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} \leq \frac{1}{2} \Longleftrightarrow \frac{1}{m} + \frac{1}{n} - \frac{1}{2} \leq 0 \tag{2.6}$$

Substituindo (2.3) em (2.6), temos:

$$\frac{1}{A} \leq 0,$$

o que é absurdo, já que A é o número de arestas do poliedro, por isso deve ser um número natural maior que zero.

Com isso concluímos que, obrigatoriamente $m = 3$ ou $n = 3$, ou seja, ou as faces serão triangulares ou os ângulos poliédricos serão triedros.

Para $m = 3$, temos, substituindo em (2.3):

$$\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{n}=\frac{1}{A}>0 \Longleftrightarrow \frac{1}{n}-\frac{1}{6}>0 \Longleftrightarrow \frac{1}{n}>\frac{1}{6} \Longleftrightarrow n<6.$$

Logo, se $m=3$, então $n=3$, $n=4$ ou $n=5$. Ou seja, se os ângulos poliédricos forem triedros, então as faces serão triângulos, quadriláteros ou pentágonos. Para $n=3$, temos, substituindo em (2.3):

$$\frac{1}{m}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{1}{A}>0 \Longleftrightarrow \frac{1}{m}-\frac{1}{6}>0 \Longleftrightarrow \frac{1}{m}>\frac{1}{6} \Longleftrightarrow m<6.$$

Logo, se $n=3$, então $m=3$, $m=4$ ou $m=5$. Ou seja, se as faces forem triângulares, então os ângulos poliédricos serão convexos de três, quatro ou cinco arestas.

Desta forma, os poliedros de Platão são determinados pelos pares (n,m): $(3,3)$; $(4,3)$; $(5,3)$; $(3,4)$ e $(3,5)$. Posteriormente entenderemos a verdadeira relevância desses "pares".

Portanto, existem cinco, e somente cinco modalidades de poliedros de Platão.

Substituindo os valores dos pares (n,m) em (2.3), é possível encontrar o número de arestas A, e a partir daí, o número de vértices V e de faces F de cada um dos cinco poliedros de Platão:

Para $(3,3)$, obtemos:

$$\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{1}{A} \Longleftrightarrow \frac{2-3+2}{6}=\frac{1}{A} \Longleftrightarrow \frac{1}{6}=\frac{1}{A} \Longleftrightarrow A=6.$$

Substituindo o valor encontrado para A em (2.1) e (2.2), temos:

$$F=\frac{2.6}{3} \Longleftrightarrow F=4$$

$$V=\frac{2.6}{3} \Longleftrightarrow V=4.$$

Desta forma, obtemos um poliedro de Platão cujas faces e vértice são, respectivamente, triângulos e triedros. Como os nomes são dados a partir do número de faces, que neste caso é quatro, então o poliedro obtido é o Tetraedro (Figura 2.17).

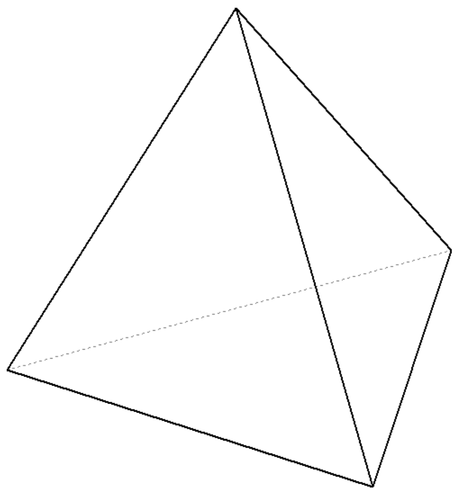


Figura 2.17: Tetraedro

Na planificação do tetraedro (Figura 2.18) podemos observar os 4 triângulos que formam-no.

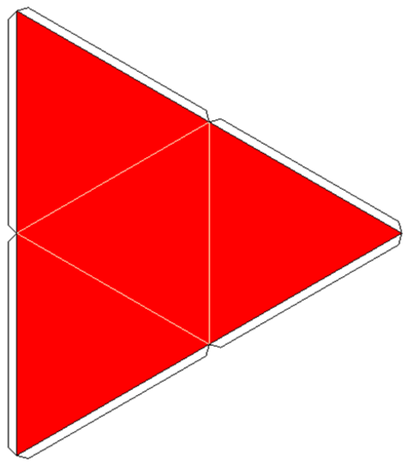


Figura 2.18: Planificação do tetraedro

Para $(4,3)$, obtemos:

$$\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{1}{A}\iff\frac{4-6+3}{12}=\frac{1}{A}\iff\frac{1}{12}=\frac{1}{A}\iff A=12$$

.

Substituindo o valor encontrado para A em (2.1) e (2.2), temos:

$$F=\frac{2.12}{4}\iff F=6$$

$$V = \frac{2.12}{3} \Longleftrightarrow V = 8.$$

Desta forma, obtemos um poliedro de Platão cujas faces e vértice são, respectivamente, quadrados e triedros. Como aqui o número de faces é seis, então o poliedro obtido é o Hexaedro (Figura 2.19).

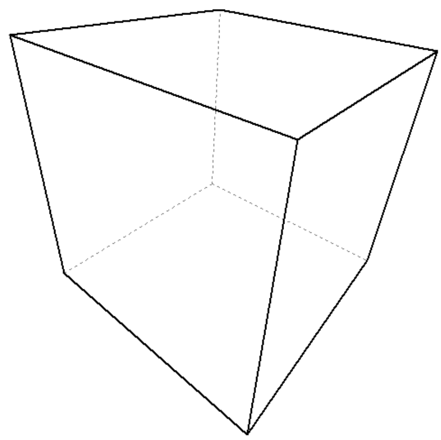


Figura 2.19: Hexaedro

Na planificação do hexaedro (Figura 2.20) podemos observar os 6 quadrados que formam-no.

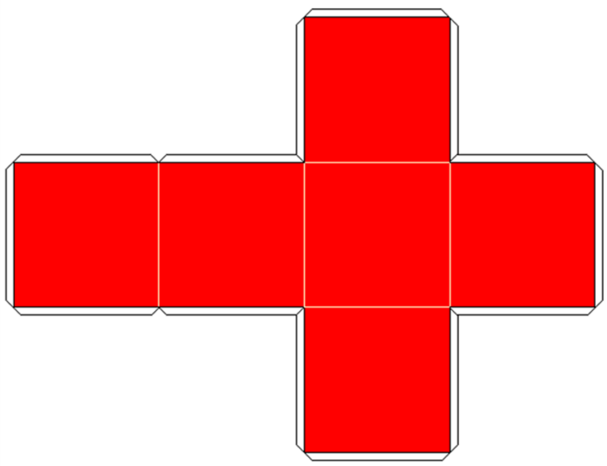


Figura 2.20: Planificação do hexaedro

Para $(5,3)$, obtemos:

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} = \frac{1}{A} \Longleftrightarrow \frac{10 - 15 + 6}{30} = \frac{1}{A} \Longleftrightarrow \frac{1}{30} = \frac{1}{A} \Longleftrightarrow A = 30.$$

Substituindo o valor encontrado para A em (2.1) e (2.2), temos:

$$F = \frac{2.30}{5} \Longleftrightarrow F = 12$$

$$V = \frac{2.30}{3} \Longleftrightarrow V = 20.$$

Desta forma, obtemos um poliedro de Platão cujas faces e vértice são, respectivamente, pentágonos e triedros. Como aqui o número de faces é doze, então o poliedro obtido é o Dodecaedro (Figura 2.21).

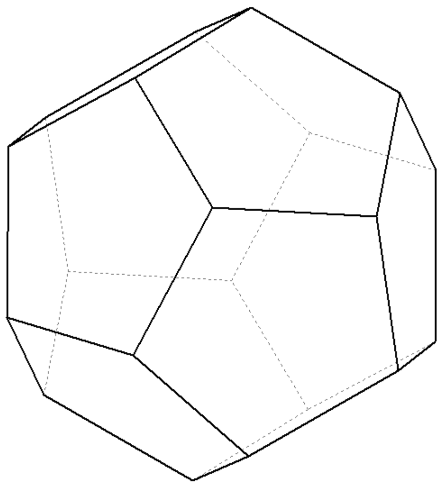


Figura 2.21: Dodecaedro

Na planificação do dodecaedro (Figura 2.22) podemos observar os 12 pentágonos que formam-no.

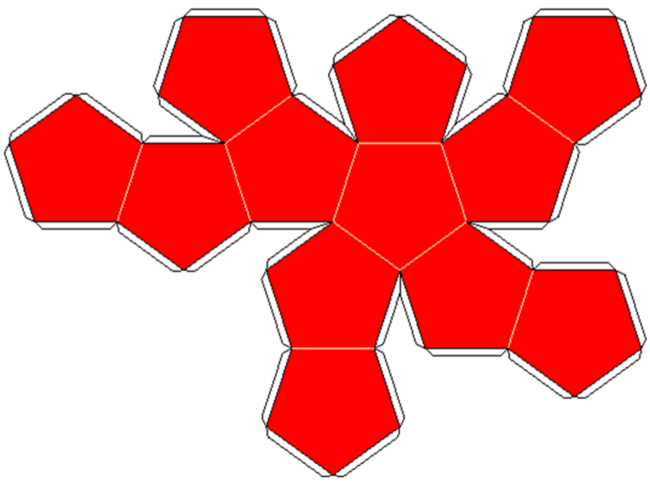


Figura 2.22: Planificação do dodecaedro

Para $(3,4)$, obtemos:

$$\frac{1}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{1}{A} \Longleftrightarrow \frac{3-6+4}{12} = \frac{1}{A} \Longleftrightarrow \frac{1}{12} = \frac{1}{A} \Longleftrightarrow A = 12.$$

Substituindo o valor encontrado para A em (2.1) e (2.2), temos:

$$F = \frac{2.12}{3} \Longleftrightarrow F = 8$$

$$V = \frac{2.12}{4} \Longleftrightarrow V = 6.$$

Desta forma, obtemos um poliedro de Platão cujas faces e vértice são, respectivamente, triângulos e ângulos poliédricos de 4 arestas. Como aqui o número de faces é oito, então o poliedro obtido é o Octaedro (Figura 2.23).

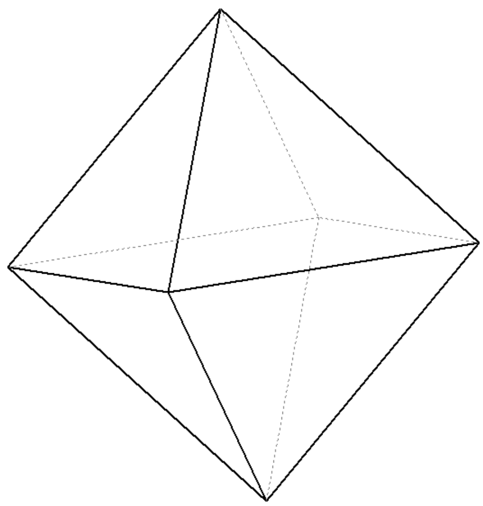


Figura 2.23: Octaedro

Na planificação do octaedro (Figura 2.24) podemos observar os 8 triângulos que formam-no.

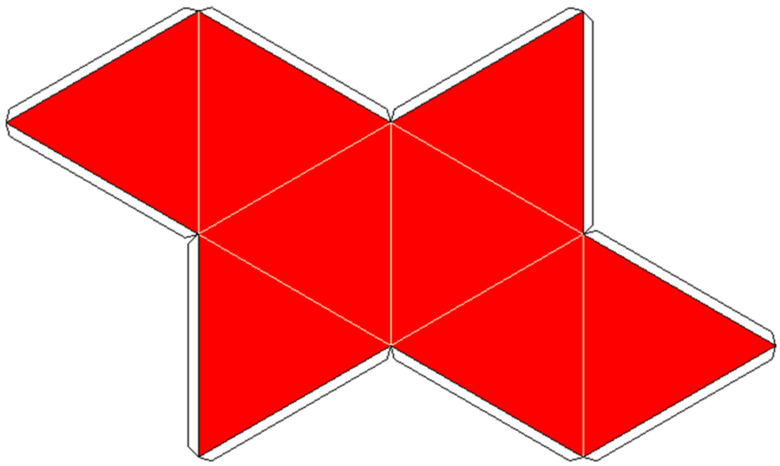


Figura 2.24: Planificação do octaedro

Para $(3,5)$, obtemos:

$$\frac{1}{5}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{1}{A}\Longleftrightarrow\frac{6-15+10}{30}=\frac{1}{A}\Longleftrightarrow\frac{1}{30}=\frac{1}{A}\Longleftrightarrow A=30.$$

Substituindo o valor encontrado para A em (2.1) e (2.2), temos:

$$F=\frac{2.30}{3}\Longleftrightarrow F=20$$

$$V=\frac{2.30}{5}\Longleftrightarrow V=12.$$

Desta forma, obtemos um poliedro de Platão cujas faces e vértice são, respectivamente, triângulos e ângulos poliédricos de 5 arestas. Como aqui o número de faces é vinte, então o poliedro obtido é o Icosaedro (Figura 2.25).

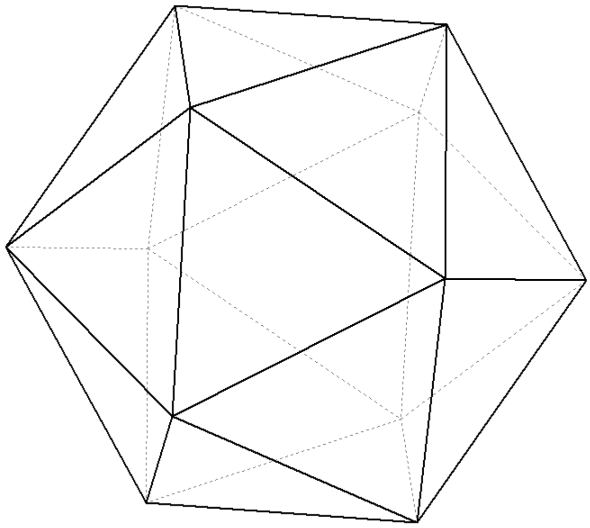


Figura 2.25: Icosaedro

Na planificação do icosaedro (Figura 2.26) podemos observar os 20 triângulos que formam-no.

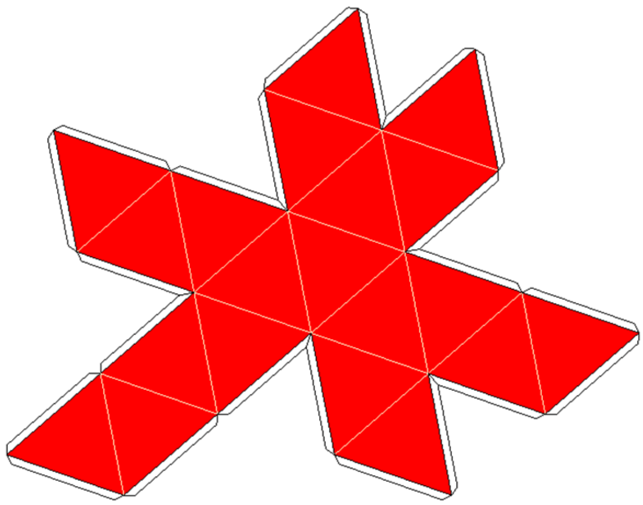


Figura 2.26: Planificação do icosaedro

Ainda segundo Dolce e Pompeo [12], para o poliedro convexo ser regular, é necessário que suas faces sejam polígonos convexos regulares congruentes e seus ângulos poliédricos também sejam congruentes. A partir desta definição é possível provar que existem apenas cinco tipos de poliedros convexos regulares.

Propriedade 2: Existem cinco, e somente cinco, tipos de poliedros convexos regulares.
Demonstração: Usando as condições descritas acima, temos:

i) Para que todas as faces sejam polígonos convexos regulares e congruentes, é necessário que todas as faces tenham o mesmo número de arestas;

ii) Para que todos os ângulos poliédricos sejam congruentes, é necessário que todos eles tenham o mesmo número de arestas.

Assim, podemos afirmar que todos os poliedros regulares convexos são também poliedros de Platão. Portanto existem cinco e somente cinco tipos de poliedros regulares: tetraedro regular, hexaedro regular, octaedro regular, dodecaedro regular e icosaedro regular.

Desta forma, podemos perceber que todo poliedro convexo regular é um poliedro de Platão, mas que nem todo poliedro de Platão é um poliedro convexo regular. Um paralelepípedo qualquer, por exemplo, é um poliedro de Platão, mas somente se for um cubo, será convexo regular.

2.1.4 Dualidade dos Poliedros de Platão

Ao ligarmos os centros geométricos (pontos centrais) de faces consecutivas de um poliedro, formando segmentos de reta, obtemos outro poliedro. O sólido formado é chamado de dual do sólido original. Neste novo sólido, o número de vértices será igual ao número de faces do poliedro original, já que os vértices do novo poliedro equivalem aos pontos centrais das faces do primeiro poliedro, e as faces serão os polígonos formados pela reunião dos segmentos obtidos com a ligação dos pontos centrais das faces consecutivas que circundam cada vértice.

Se fizermos este procedimento com os sólidos platônicos, os poliedros resultantes também serão poliedros de Platão.

Desta forma, o dual do cubo terá seis vértices (número de faces do cubo), e suas faces serão triângulos (polígono formado pela reunião dos segmentos obtidos com a ligação dos pontos centrais das faces consecutivas que circundam cada vértice do cubo). Como cada face possui três arestas, temos que:

$$3F = 2A \Longleftrightarrow A = \frac{3F}{2} \tag{2.7}$$

Substituindo (2.7) e o número de vértices na relação de Euler, temos:

$$V - A + F = 2$$

$$6 - \frac{3F}{2} + F = 2$$

$$12 - 3F + 2F = 4$$

$$F = 8$$

Logo, o dual do cubo é o octaedro, já que possui oito faces, seis vértices e doze arestas (Figura 2.27).

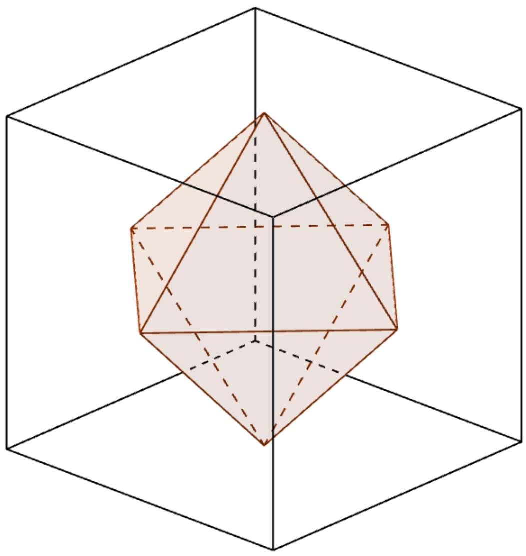


Figura 2.27: Dual do cubo

Repetindo o mesmo raciocínio com o octaedro, seu dual terá oito vértices e suas faces serão quadrados. Como cada face possui quatro arestas, temos que:

$$4F = 2A \Longleftrightarrow A = 2F \tag{2.8}$$

Substituindo (2.8) e o número de vértices na relação de Euler, temos:

$$V - A + F = 2$$

$$8 - 2F + F = 2$$

$$F = 6$$

Logo, o dual do octaedro é o cubo, já que possui seis faces, oito vértices e doze arestas (Figura 2.28).

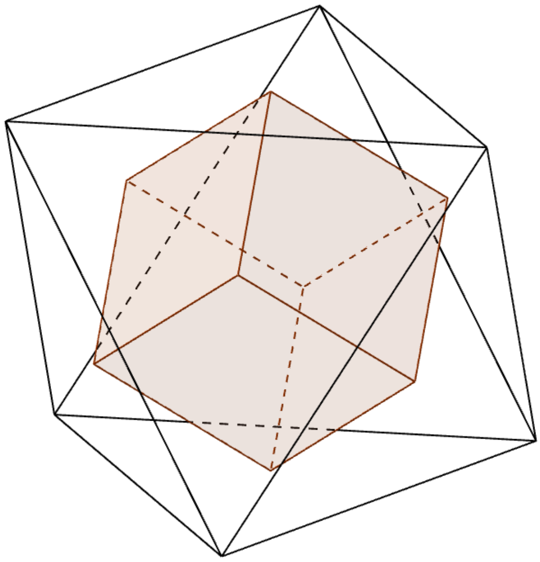


Figura 2.28: Dual do octaedro

O dual do dodecaedro terá doze vértices, e suas faces serão triângulos. Como cada face possui três arestas, temos que, tal qual o dual do cubo, $3F = 2A$. Substituindo (2.7) e o número de vértices na relação de Euler, temos:

$$V - A + F = 2$$

$$12 - \frac{3F}{2} + F = 2$$

$$24 - 3F + 2F = 4$$

$$F = 20$$

Logo, o dual do dodecaedro é o icosaedro, já que possui vinte faces, doze vértices e trinta arestas (Figura 2.29).

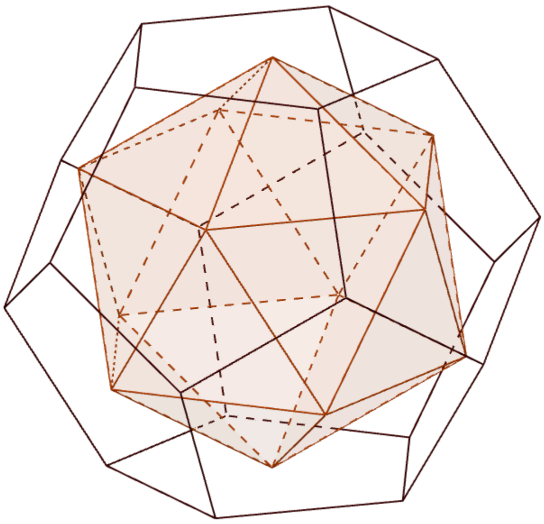


Figura 2.29: Dual do dodecaedro

Repetindo o mesmo raciocínio com o icosaedro, seu dual terá vinte vértices e suas faces serão pentágonos. Como cada face possui cinco arestas, temos que:

$$5F = 2A \iff A = \frac{5F}{2} \tag{2.9}$$

Substituindo (2.9) e o número de vértices na relação de Euler, temos:

$$V - A + F = 2$$

$$20 - \frac{5F}{2} + F = 2$$

$$40 - 5F + 2F = 4$$

$$F = 12$$

Logo, o dual do icosaedro é o dodecaedro, já que possui doze faces, vinte vértices e trinta arestas (Figura 2.30).

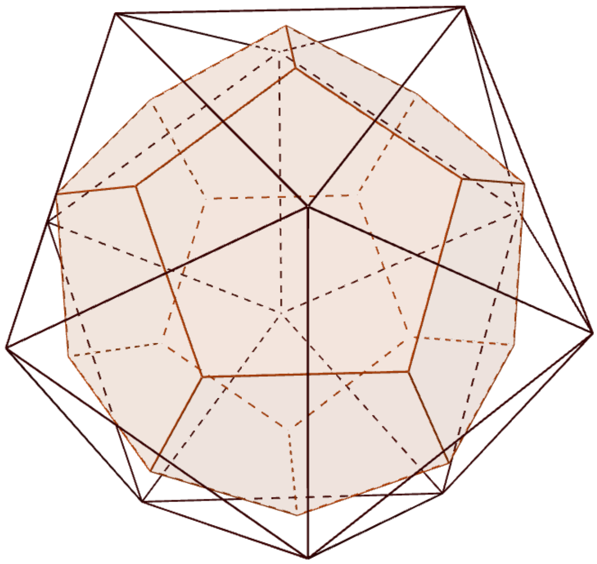


Figura 2.30: Dual do icosaedro

Por fim, o dual do tetraedro terá quatro vértices, e suas faces serão triângulos. Como cada face possui três arestas, temos que, tal qual o dual do cubo, $3F = 2A$. Substituindo (2.7) e o número de vértices na relação de Euler, temos:

$$V - A + F = 2$$

$$4 - \frac{3F}{2} + F = 2$$

$$8 - 3F + 2F = 4$$

$$F = 4$$

Logo, o dual do tetraedro é o próprio tetraedro, já que possui quatro faces, quatro vértices e seis arestas (Figura 2.31).

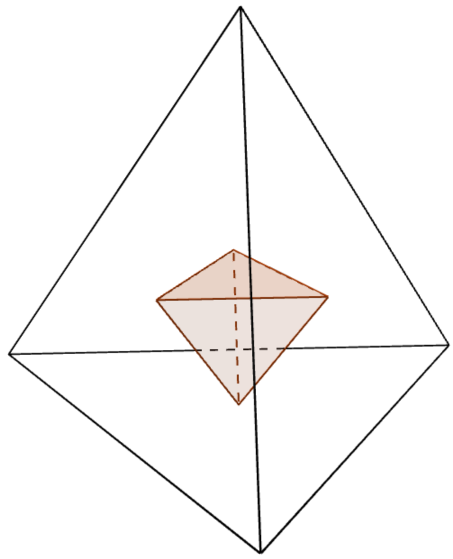


Figura 2.31: Dual do tetraedro

2.2 Poliedros de Kepler-Poinsot

Os Poliedros de Kepler-Poinsot são poliedros não convexos cujas faces são polígonos regulares congruentes, e cujos ângulos poliédricos também são congruentes. As faces desses sólidos podem ser convexas ou não convexas. São eles: Pequeno Dodecaedro Estrelado, Grande Dodecaedro, Grande Dodecaedro Estrelado e Grande Icosaedro. São os quatro que faltavam para fechar o grupo dos nove sólidos regulares.

Segundo Wolfram MathWorld [23], estes quatro poliedros foram denominados assim, pois Kepler, por volta do ano de 1600, estudou os dois primeiros e os descreveu em sua obra *Harmonice Mundi*. No entanto, não foram descobertos pelo alemão. Havia o desenho do pequeno dodecaedro estrelado no piso da Catedral de San Marco, em Veneza, como um mosaico de Paolo Uccello, em 1430 (figura 2.32).

Figura 2.32: Mosaico de Paolo Uccello
Fonte: http://www.veraviana.net/keplerpoinsot.html

Já o grande dodecaedro estrelado foi publicado por Wenzel Jamnitzer, em 1568. Os dois últimos foram descobertos por Poinsot, por volta do ano de 1800.

Louis Poinsot (1777 – 1859) nasceu em Paris, na França. Começou a fazer engenharia, mas percebeu que se interessava mais pela Matemática abstrata do que pelas disciplinas práticas do curso. Por isso resolveu ser professor de Matemática. Começou então a lecionar em importantes escolas e universidades de Paris. Foi eleito pela Academia de Ciências para substituir Lagrange na seção de Matemática. Sua pesquisa em geometria, estática e dinâmica é importante. Foi o inventor da mecânica geométrica, investigando como um sistema de forças que atuam sobre um corpo rígido pode ser resolvido em uma única força e uma dupla. Além disso, Poinsot trabalhou em teoria dos números e sobre este tema, estudou equações diofantinas, a forma de expressar números como a diferença de dois quadrados e raízes primitivas. No entanto, ele é mais conhecido por sua dedicação à geometria. [26]

2.2.1 Pequeno Dodecaedro Estrelado

O pequeno dodecaedro estrelado é a primeira estrelação do dodecaedro.

Logo, tal qual o sólido platônico, possui doze faces e trinta arestas. No entanto, em cada vértice concorrem cinco faces, diferentemente do dodecaedro (onde em cada vértice concorrem três faces), totalizando doze vértices (Figura 2.33). Assim, com $V = 12$, $A = 30$

e $F = 12$, sua característica de Euler é $\chi(P) = -6$.

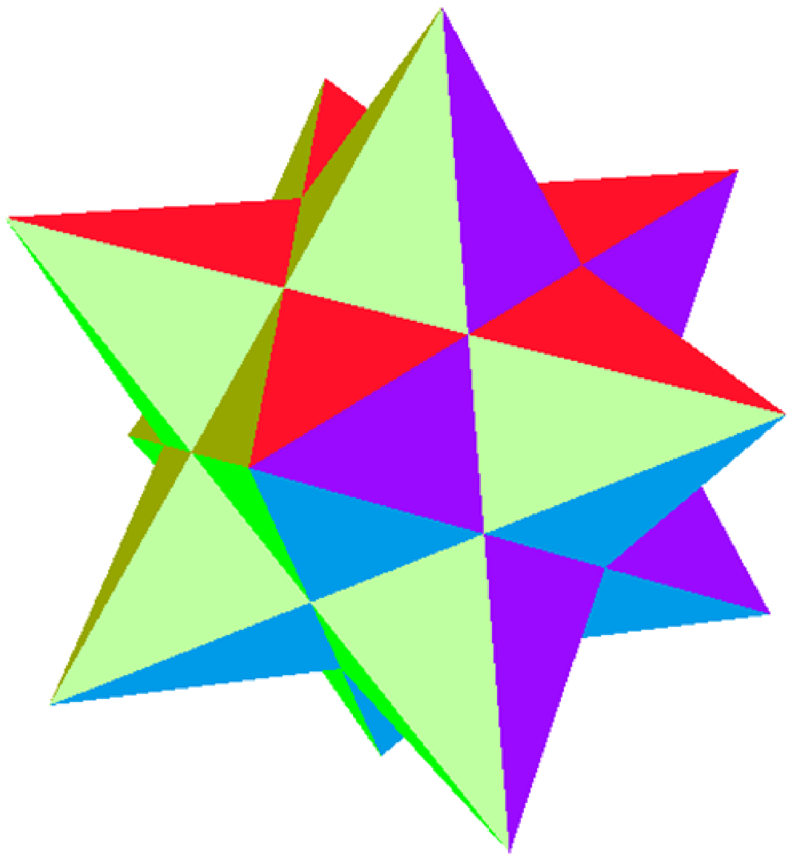


Figura 2.33: Pequeno dodecaedro estrelado

No primeiro momento, o sólido parece a reunião de várias pirâmides regulares de base pentagonal. Se vista desta forma, este poliedro é somente um poliedro não convexo. No entanto, as suas faces são os pentagramas, que na figura aparecem cada um de uma cor, e os seus vértices são os encontros destes pentagramas. Podemos perceber que, desta forma, todas as suas faces são polígonos regulares congruentes e seus ângulos poliédricos também são congruentes. Portanto, pela definição de poliedros regulares, o pequeno dodecaedro estrelado é um poliedro regular.

2.2.2 Grande Dodecaedro

O grande dodecaedro é a segunda estrelação do dodecaedro.

Da mesma forma que o pequeno dodecaedro estrelado possui doze faces, trinta arestas e doze vértices, o grande dodecaedro também apresenta as mesmas características. A diferença entre eles é o tipo de face. Neste, as faces são pentágonos regulares, e não pentagramas (Figura 2.34). Assim, com $V = 12$, $A = 30$ e $F = 12$, sua característica de Euler também é $\chi(P) = -6$.

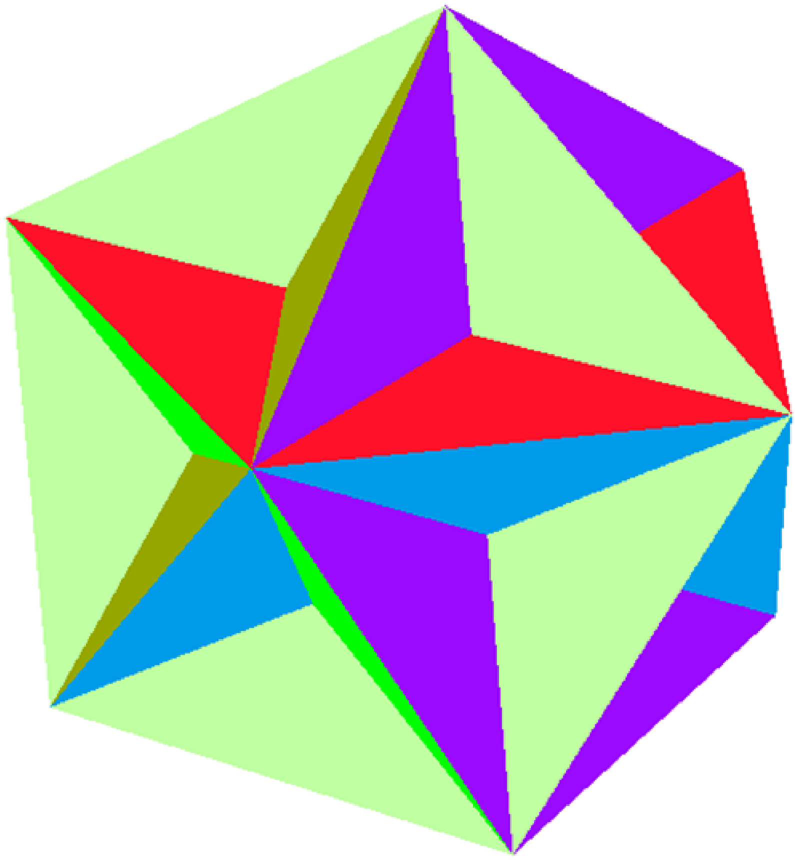


Figura 2.34: Grande dodecaedro

Neste caso, também temos polígonos regulares congruentes como faces e vértices congruentes. Portanto, pela definição de poliedros regulares, o grande dodecaedro também é um poliedro regular.

2.2.3 Grande Dodecaedro Estrelado

O Grande dodecaedro estrelado é a terceira estrelação do dodecaedro.

Neste sólido, os números de faces, vértices e arestas são exatamente iguais aos números do sólido platônico (Figura 2.35). Logo, apesar de não ser convexo, este poliedro satisfaz a relação de Euler, ou seja, sua característica de Euler é $\chi(P) = 2$.

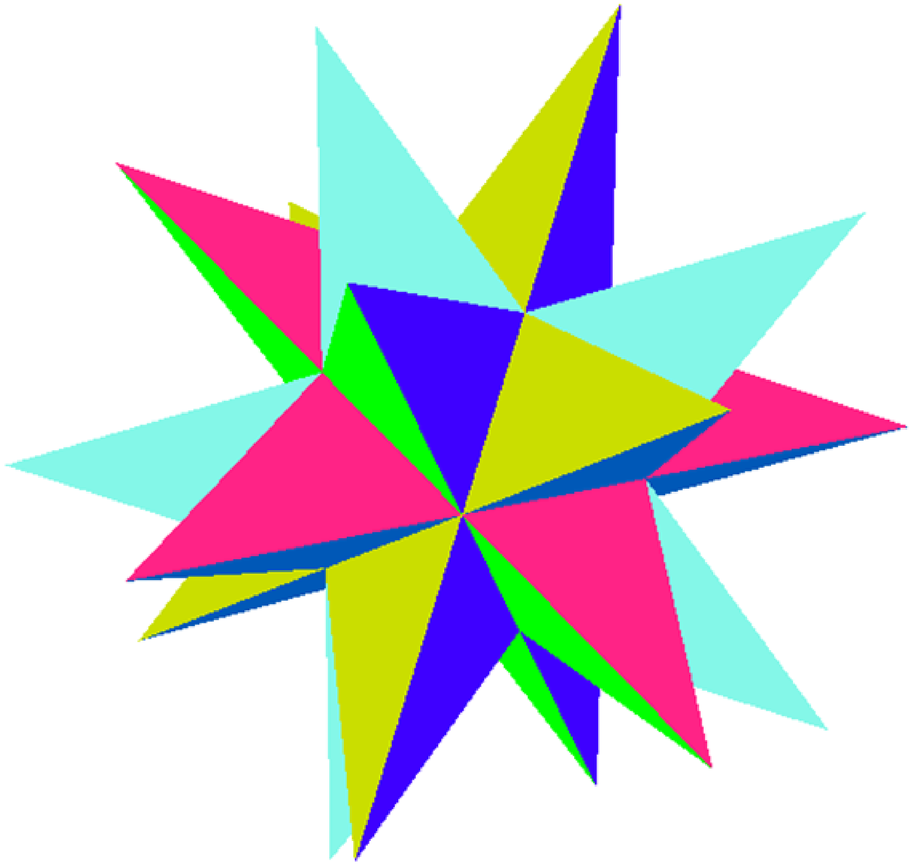


Figura 2.35: Grande dodecaedro estrelado

A princípio, o sólido parece a reunião de várias pirâmides regulares de base triangular. Se visto desta forma, este, tal qual o pequeno dodecaedro estrelado, também é somente um poliedro não convexo. No entanto, as suas faces são os pentagramas, que na figura aparecem cada um de uma cor, e os seus vértices são os encontros de três destes pentagramas. Podemos perceber que, desta forma, todas as suas faces são polígonos regulares congruentes e seus vértices também são congruentes. Portanto, pela definição de poliedros regulares, o grande dodecaedro estrelado também é um poliedro regular.

2.2.4 Grande Icosaedro

O grande icosaedro é, dentre as 59 estrelações do icosaedro, a 16^a. [20] [32]

Da mesma forma que o sólido platônico, este poliedro também possui vinte faces, também triangulares, trinta arestas e doze vértices (Figura 2.36). Portanto, também satisfaz a relação de Euler, apesar de não ser convexo, ou seja, sua característica de Euler também é $\chi(P) = 2$.

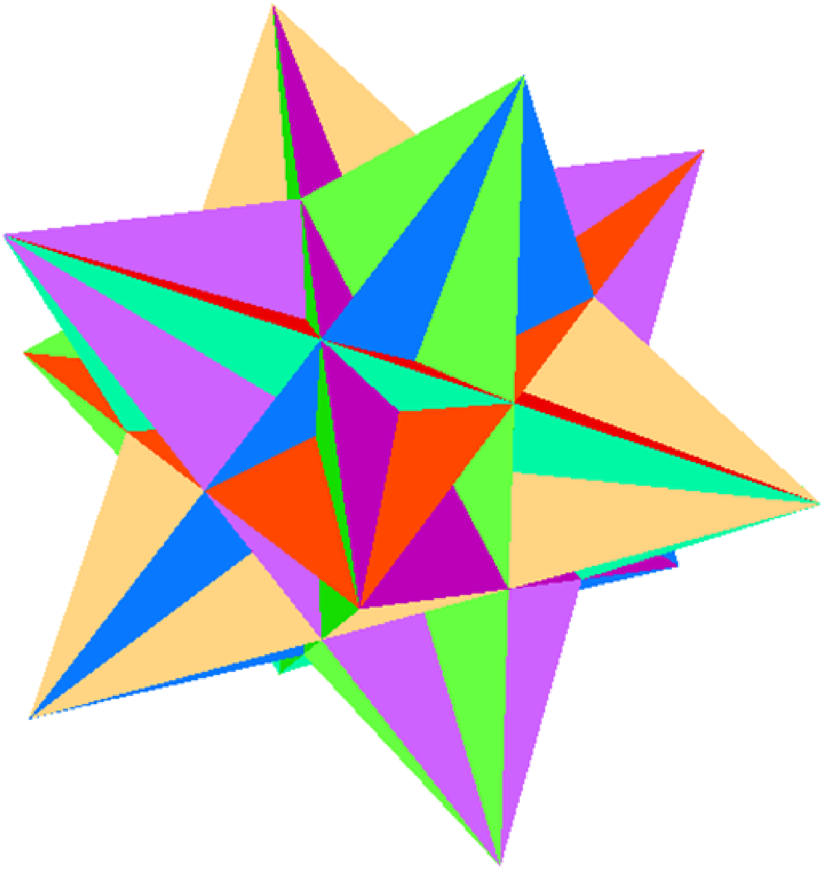


Figura 2.36: Grande icosaedro

Neste caso, também temos polígonos regulares congruentes como faces e vértices congruentes. Portanto, pela definição de poliedros regulares, o grande icosaedro também é um poliedro regular.

2.2.5 Dualidade dos Poliedros de Kepler-Poinsot

Da mesma forma que os poliedros de Platão possuem duais, e seus duais são outros poliedros também de Platão, os poliedros de Kepler-Poinsot também possuem duais, e seus duais também são poliedros de Kepler-Poinsot.

O processo para encontrarmos os duais destes sólidos é o mesmo explicado anteriormente.

Desta forma, o dual do pequeno dodecaedro estrelado terá doze vértices (número de faces do pequeno dodecaedro estrelado), e suas faces serão pentágonos (polígono formado pela reunião dos segmentos obtidos com a ligação dos pontos centrais das faces consecutivas que circundam cada vértice do pequeno dodecaedro estrelado). Como cada face possui cinco arestas, temos que:

$$5F = 2A \iff A = \frac{5F}{2} \tag{2.10}$$

Substituindo (2.10) e o número de vértices deste novo poliedro na característica de Euler do pequeno dodecaedro estrelado, temos:

$$V - A + F = -6$$
$$12 - \frac{5F}{2} + F = -6$$
$$24 - 5F + 2F = -12$$
$$F = 12$$

Logo, o dual do pequeno dodecaedro estrelado é o grande dodecaedro, já que possui doze faces, doze vértices e trinta arestas.

Repetindo o mesmo raciocínio com o grande dodecaedro, seu dual terá doze vértices e suas faces serão pentagramas. Como cada face possui cinco arestas, temos que, tal qual o dual do pequeno dodecaedro estrelado, $5F = 2A$. Substituindo (2.10) e o número de vértices deste novo poliedro na característica de Euler do grande dodecaedro, temos:

$$V - A + F = -6$$
$$12 - \frac{5F}{2} + F = -6$$
$$24 - 5F + 2F = -12$$
$$F = 12$$

Logo, o dual do grande dodecaedro é o pequeno dodecaedro estrelado, já que possui doze faces, doze vértices e trinta arestas.

O dual do grande dodecaedro estrelado terá doze vértices, e suas faces serão triângulos. Como cada face possui três arestas, temos:

$$3F = 2A \iff A = \frac{3F}{2} \tag{2.11}$$

Substituindo (2.11) e o número de vértices deste novo poliedro na característica de Euler do grande dodecaedro estrelado, temos:

$$12 - \frac{3F}{2} + F = 2$$

$$24 - 3F + 2F = 4$$

$$F = 20$$

Logo, o dual do grande dodecaedro estrelado é o grande icosaedro, já que possui vinte faces, doze vértices e trinta arestas.

Por fim, o dual do grande icosaedro terá vinte vértices, e suas faces serão pentagramas. Como cada face possui cinco arestas, temos que, tal qual o pequeno dodecaedro estrelado, $5F = 2A$. Substituindo (2.10) e o número de vértices na característica de Euler do grande icosaedro, temos:

$$20 - \frac{5F}{2} + F = 2$$

$$40 - 5F + 2F = 4$$

$$F = 12$$

Logo, o dual do grande icosaedro é o grande dodecaedro estrelado, já que possui doze faces, vinte vértices e trinta arestas.

As equações apresentadas acima sobre dualidade dos poliedros de Kepler-Poinsot são válidas da mesma forma que para os sólidos de Platão, apesar de não encontrarmos bibliografia que embase.

2.3 Símbolo Schläfli

Ludwig Schläfli (1814−1895) foi um geômetra e uma das figuras mais importantes quando se fala de dimensões do espaço maiores que 3. É considerado pessoa fundamental da geometria multidimensional. [33] Além disso, introduziu a ideia do que hoje é conhecido como vetores, normas e álgebra linear, matemática de suma importância para o desenvolvimento da física moderna, estatística, equações diferenciais e simulação de realidades por computadores. [30]

O símbolo Schläfli, que representa, entre outros, polígonos regulares e poliedros regulares, é chamado assim pois foi criado pelo geômetra. Um polígono regular é simbolizado por $\{p\}$, onde p representa o número de lados que o compõem, um poliedro regular por $\{p, q\}$, onde p representa o número de arestas por faces, ou seja, o tipo de polígono que as faces assumem, e q representa a figura do vértice. [24]

Desta forma, um triângulo equilátero é representado por $\{3\}$, um quadrado por $\{4\}$, um pentágono regular por $\{5\}$ e assim por diante.

Se marcarmos os pontos médios das arestas que circundam um vértice do tetraedro, e os ligarmos, formaremos um triângulo equilátero. Logo, este é o polígono regular que representa a figura do vértice deste poliedro. Portanto, $p = 3$, já que as faces são triangulares, e $q = 3$, já que a figura do vértice é um triângulo. Desta forma, seu símbolo Schläfli é $\{3, 3\}$.

Repetindo o mesmo processo para o hexaedro, dodecaedro, octaedro e icosaedro, formaremos, respectivamente, um triângulo equilátero em cada um dos dois primeiros sólidos, um quadrado e um pentágono regular. Portanto, para o hexaedro $p = 4$, já que as faces são quadrangulares, e $q = 3$, já que a figura do vértice é um triângulo. Desta forma, seu símbolo Schläfli é $\{4, 3\}$. Para o dodecaedro $p = 5$, já que as faces são pentagonais, e $q = 3$, já que a figura do vértice é um triângulo. Desta forma, seu símbolo Schläfli é $\{5, 3\}$. Para o octaedro $p = 3$, já que as faces são triangulares, e $q = 4$, já que a figura do vértice é um quadrado. Desta forma, seu símbolo Schläfli é $\{3, 4\}$. Para o icosaedro $p = 3$, já que as faces são triangulares, e $q = 5$, já que a figura do vértice é um pentágono. Desta forma, seu símbolo Schläfli é $\{3, 5\}$.

Coxeter [7] chama q de "figura do vértice", que equivale a um polígono, como explicado anteriormente. Este polígono, tal qual qualquer outro, também pode ser estrelado. Logo, q também pode ser representado por um polígono estrelado e, conforme explicado anteriormente, também pode ser representado por um número fracionário. Logo, a partir da definição dada pelo autor a respeito de poliedros regulares, apresentada anteriormente, poliedros que tenham como figura do vértice um polígono estrelado regular também pode ser regular, desde que suas faces sejam regulares. Portanto, mais uma vez podemos reforçar a ideia de que os poliedros de Kepler-Poinsot são regulares.

Se marcarmos os pontos médios das arestas que circundam um vértice do pequeno dodecaedro estrelado, e os ligarmos, formaremos um pentágono regular. Logo, este é o polígono regular que representa a figura do vértice deste poliedro. Portanto, $p = \frac{5}{2}$, já que as faces são pentagramas, e $q = 5$, já que a figura do vértice é um pentágono. Desta forma, seu símbolo Schläfli é $\{\frac{5}{2}, 5\}$.

Repetindo o mesmo processo para o grande dodecaedro, grande dodecaedro estrelado e grande icosaedro formaremos, respectivamente, um pentagrama regular, um triângulo equilátero e um pentagrama regular. Portanto, para o grande dodecaedro $p = 5$, já que as faces são pentágonais, e $q = \frac{5}{2}$, já que a figura do vértice é um pentágono. Desta forma, seu símbolo Schläfli é $\{5, \frac{5}{2}\}$. Para o grande dodecaedro estrelado $\frac{5}{2}$, já que as faces são pentagramas, e $q = 3$, já que a figura do vértice é um triângulo. Desta forma, seu símbolo Schläfli é $\{\frac{5}{2}, 3\}$. Para o grande icosaedro $p = 3$, já que as faces são triangulares, e $q = \frac{5}{2}$, já que a figura do vértice é um pentagrama. Desta forma, seu símbolo Schläfli é $\{3, \frac{5}{2}\}$.

Outra característica importante que o símbolo Schläfli define é o sólido dual de cada poliedro regular. O dual do poliedro regular $\{p, q\}$ é o poliedro regular $\{q, p\}$ e do poliedro regular $\{q, p\}$ é o poliedro regular $\{p, q\}$ [24]. De fato vimos anteriormente que o dual do hexaedro $\{4, 3\}$ é o octaedro $\{3, 4\}$ e vice-versa, do dodecaedro $\{5, 3\}$ é o icosaedro $\{3, 5\}$ e vice-versa, e do tetraedro $\{3, 3\}$ é ele mesmo $\{3, 3\}$. Desta forma, o dual do pequeno dodecaedro estrelado $\{\frac{5}{2}, 5\}$ é o grande dodecaedro $\{5, \frac{5}{2}\}$ e vice-versa, e do grande dodecaedro estrelado $\{\frac{5}{2}, 3\}$ é o grande icosaedro $\{3, \frac{5}{2}\}$ e vice-versa.

Além disso, mosaicos, malhas, grades, de duas dimensões também podem ser definidos pelo símbolo Schläfli. Por exemplo, $\{4, 4\}$, pode representar um tabuleiro de xadrez, já que teremos quatro quadrados em torno de cada vértice (Figura 2.37). Da mesma forma, favos de abelha podem ser representados por $\{6, 3\}$, já que possuem três hexágonos em torno de cada vértice (Figura 2.38). [30]

Figura 2.37: Tabuleiro de Xadrez
Fonte: http://www.tabuleirodexadrez.com.br/tabuleiro-e-pecas-do-xadrez.htm

Figura 2.38: Favos de abelha
Fonte: http://favitodemel.blogspot.com.br/2009_03_01_archive.html

Assim, podemos afirmar com o que vimos anteriormente, que o símbolo Schläfli define, com faces triangulares, o grande icosaedro $\{3, \frac{5}{2}\}$, o tetraedro $\{3, 3\}$, o octaedro $\{3, 4\}$, o icosaedro $\{3, 5\}$, e a grade triangular $\{3, 6\}$, já que a reunião de apenas dois triângulos não resulta num ângulo sólido e não conseguimos reunir em torno de um mesmo vértice mais que seis triângulos. Com faces quadrangulares, o hexaedro $\{4, 3\}$ e a grade quadrangular $\{4, 4\}$, já que a reunião de apenas dois quadrados não resulta num ângulo sólido e não conseguimos reunir em torno de um mesmo vértice mais que quatro quadrados. Com faces pentagonais o grande dodecaedro $\{5, \frac{5}{2}\}$ e o icosaedro $\{5, 3\}$, já que a reunião de apenas dois pentágonos não resulta num ângulo sólido e não conseguimos reunir em torno de um mesmo vértice mais que três pentágonos regulares. Com faces hexagonais apenas a grade hexagonal $\{6, 3\}$, já que a reunião de apenas dois hexágonos não resulta num ângulo sólido e não conseguimos reunir em torno de um mesmo vértice mais que três hexágonos.

Os politopos regulares de dimensões maiores que 3, também são representados pelo símbolo de Schläfli, na forma $\{p, q, r, ...\}$.

Capítulo 3

Poliedros Semirregulares

3.1 Poliedros de Arquimedes

Existem poliedros convexos cujos ângulos poliédricos são congruentes e cujas faces são polígonos convexos regulares, no entanto, não congruentes entre si. A estes sólidos dá-se o nome de poliedros de Arquimedes. São denominados assim, pois foi este matemático quem os estudou. Por terem todos os vértices e arestas congruentes, estes sólidos também são chamados de semirregulares.

Arquimedes (281 a. C. - 212 a. C.) nasceu em Siracusa, na Grécia Antiga, e passou algum tempo no Egito, onde provavelmente estudou com os sucessores de Euclides na cidade de Alexandria, centro da ciência grega da época. É considerado um dos maiores cientista da humanidade e o maior matemático da sua época. Apesar disso, era mais conhecido na antiguidade pelos trabalhos de engenharia e de construção de armas de guerra. Há relatos que Siracusa venceu várias batalhas contra Roma graças aos seus inventos, como catapulta, guindaste, espelhos ardentes etc., até que finalmente Roma cercou a cidade durante 3 anos, e um soldado romano capturou e matou Arquimedes. O rei de Roma ficou contrariado, pois havia dado ordens para que a vida do cientista fosse poupada, já que a sua genialidade dificultou tanto a invasão da cidade. É também o autor da expressão “Eureca! ”, que significa “Encontrei! ”, a qual disparou várias vezes quando descobriu como verificar se a coroa que o rei de Siracusa mandou fazer era de ouro puro ou se havia sido fraudada. Esta história é famosa, pois a intuição de como comprovar a fraude deu-se durante um de seus banhos. Quando percebeu que ao colocar sua perna na banheira a água aumentava seu nível na mesma proporção, entendeu como fazê-la, e saiu correndo pelado até sua casa. Desta maneira surgiu o princípio fundamental da hidrostática. Era tão apaixonado pela geometria, que tinha o desejo de que em seu túmulo fosse construído uma esfera e um cilindro circunscrito a ela, com uma inscrição da razão entre seus volumes. É o autor de várias obras como *Sobre a esfera e o cilindro*, *Medida do círculo*, *Quadratura da parábola*, entre outros. [1]

Existem infinitos polígonos regulares. Logo, tomando qualquer um deles como base de um prisma e quadrados como faces laterais, temos um poliedro de Arquimedes. Além disso, se os quadrados forem substituídos por triângulos equiláteros, então será formado um antiprisma, que também pode ser considerado um sólido de semirregular. Desta forma, existem infinitos poliedros de Arquimedes. Na Figura 3.1, temos como exemplo desses poliedros, o prisma heptagonal à esquerda, e o antiprisma heptagonal à direita.

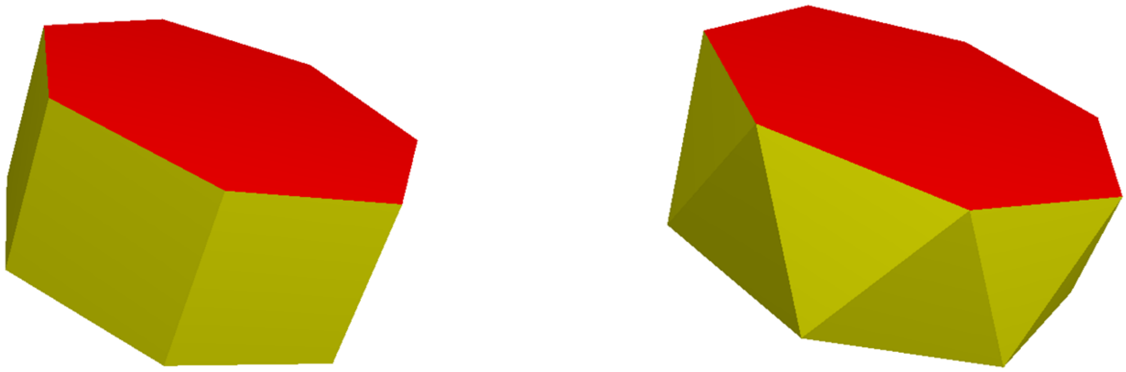


Figura 3.1: Prisma e antiprisma heptagonal

Podemos observar nas figuras que todas as arestas e vértices de ambos os sólidos arquimedianos são congruentes.

No entanto, se estes prismas e antiprismas forem desconsiderados, então os poliedros arquimedianos se resumirão a apenas treze sólidos. Isto porque somente treze combinações entre polígonos regulares formam ângulos poliédricos cuja reunião resulte num poliedro onde vértices e arestas sejam congruentes. [32]

Cada tipo de vértice corresponde a um único poliedro arquimediano. A notação para cada um deles é dada a partir do tipo de polígono regular que o circunda e quantas vezes este o faz. Por exemplo, no cubo truncado, todos os ângulos poliédricos são formados por um triângulo e dois octógonos. Logo, sua notação é 3.8^2. Já no cuboctaedro, todos os vértices são compostos por dois triângulos e dois quadrados. Por isso, sua notação é $(3.4)^2$. No caso do rombicosidodecaedro, cada ângulo sólido é formado por um triângulo, um quadrado, um pentágono e por último outro quadrado. Desta maneira, sua notação é 3.4.5.4. Nas Figuras 3.2, 3.3, 3.4, 3.5 e 3.6 estão representados todos os tipos de vértices destes sólidos, sendo que seus nomes são dados na sequência que aparecem, da esquerda para a direita.

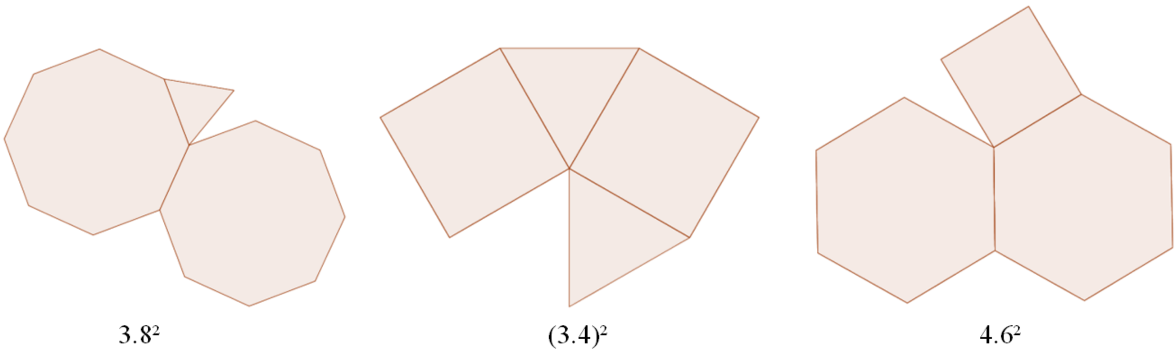


Figura 3.2: Vértices do cubo truncado, cuboctaedro e octaedro truncado

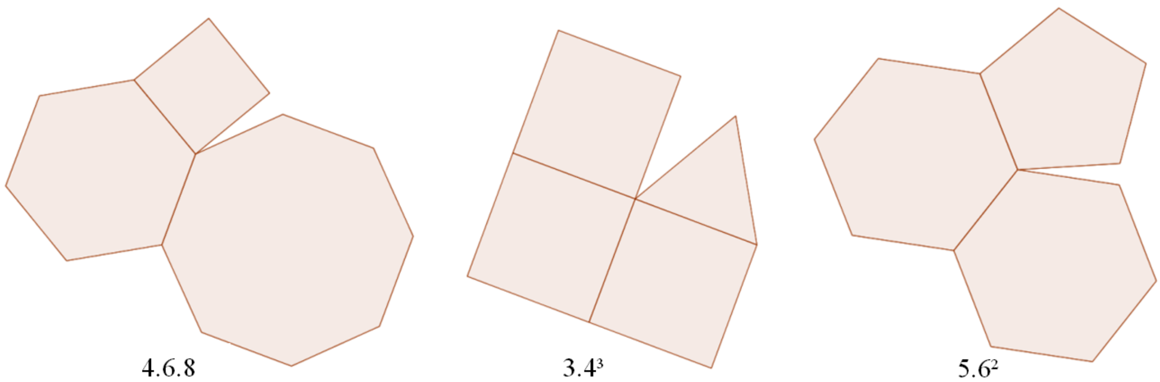
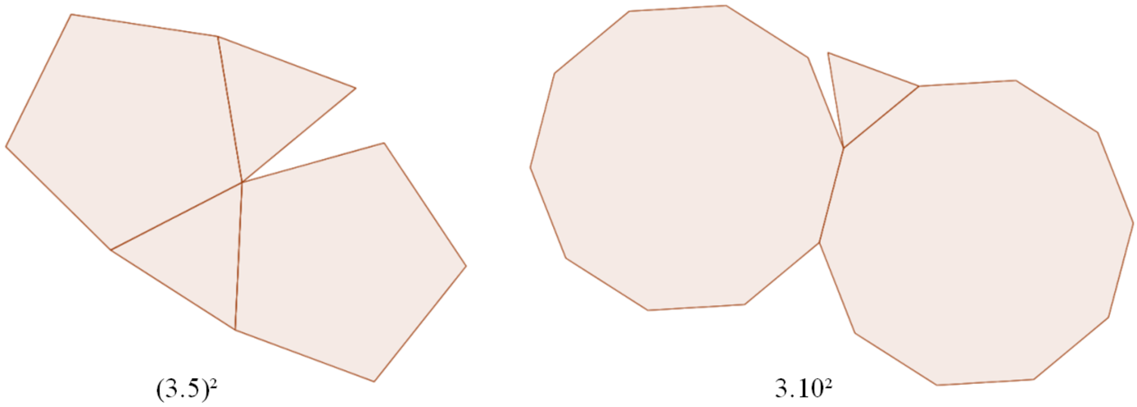
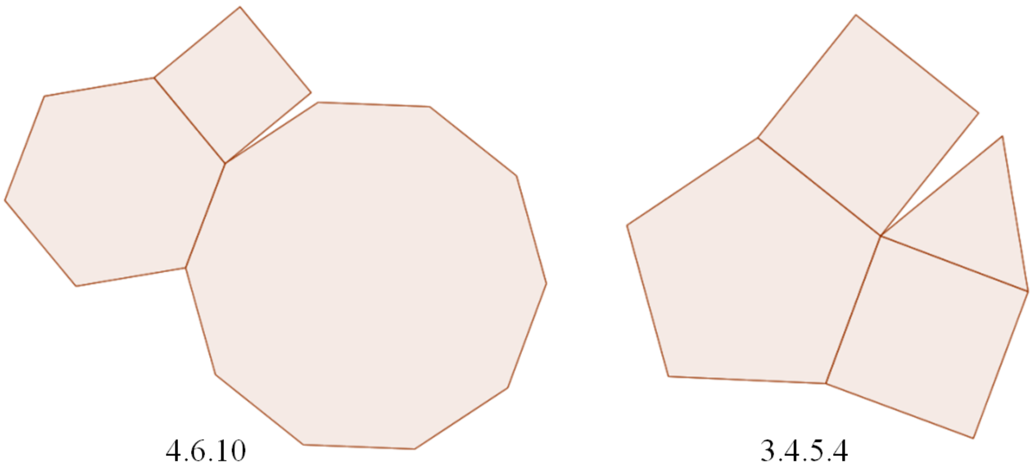


Figura 3.3: Vértices do cuboctaedro truncado, rombicuboctaedro e icosaedro truncado



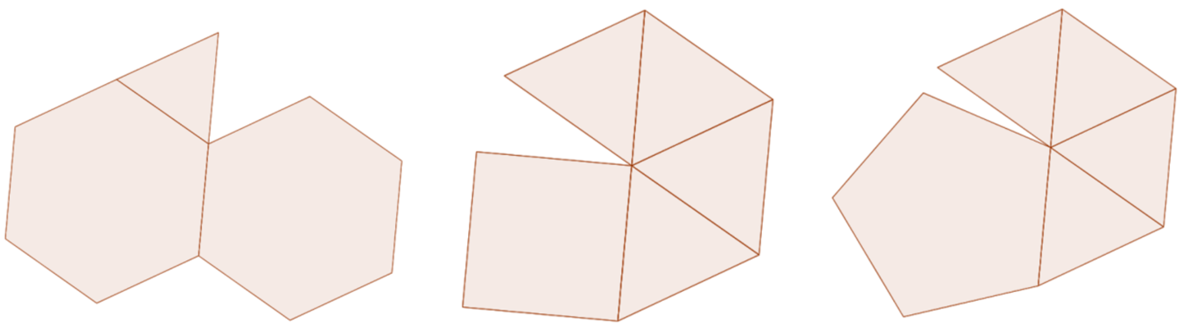
$(3.5)^2$ 3.10^2

Figura 3.4: Vértices do icosidodecaedro e dodecaedro truncado



4.6.10 3.4.5.4

Figura 3.5: Vértices do icosidodecaedro truncado e rombicosidodecaedro



3.6^2 $3^4.4$ $3^4.5$

Figura 3.6: Vértices do tetraedro truncado, cubo snub e dodecaedro snub

Kepler também se interessou por esses sólidos. Como os livros de Arquimedes a respeito do assunto foram perdidos, então o alemão reconstruiu-os e atribuiu nomes a cada um deles. [32]

Dentre os treze poliedros, onze podem ser obtidos a partir de truncaturas (cortes) dos poliedros de Platão. Por isso recebem o nome de poliedros truncados. Os outros dois são os chamados arquimedianos snub's.

3.2 Processos de construção dos sólidos truncados

Seja um tetraedro regular. A partir de um vértice e sobre cada uma das três arestas que concorrem nesse vértice, os pontos que estão a uma distância de $\frac{1}{3}$ de aresta desse vértice são assinalados. Esses três pontos formam um triângulo equilátero. Retira-se, então, o tetraedro formado. Repetindo o mesmo processo para todos os vértices do tetraedro, obtemos o poliedro arquimediano Tetraedro Truncado (Figura 3.7).

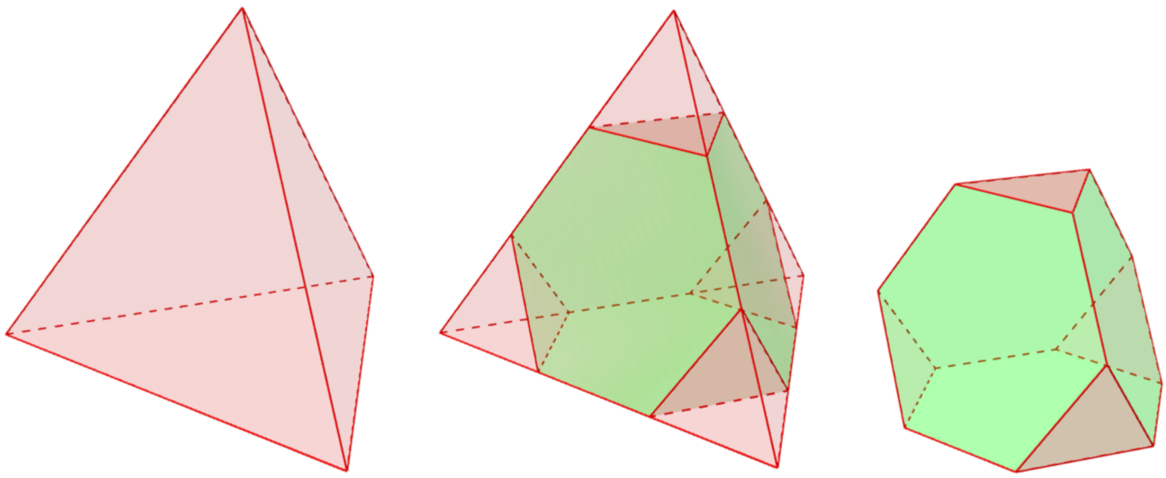


Figura 3.7: Formação do tetraedro truncado

Como cada vértice e cada face do tetraedro dão origem a, respectivamente, um triângulo e um hexágono, ambos regulares, então este poliedro é composto por quatro triângulos e quatro hexágonos. Desta forma, o sólido possui dezoito arestas, oito faces e doze vértices.

Seja um cubo. A partir de um vértice e sobre cada uma das três arestas que concorrem nesse vértice, os pontos que estão a uma distância de $\frac{1}{2+\sqrt{2}}$ de aresta desse vértice são assinalados. Esses três pontos formam um triângulo equilátero. Retira-se, então, o tetraedro formado. Repetindo o mesmo processo para todos os vértices do cubo, obtemos o poliedro arquimediano Cubo Truncado (Figura 3.8).

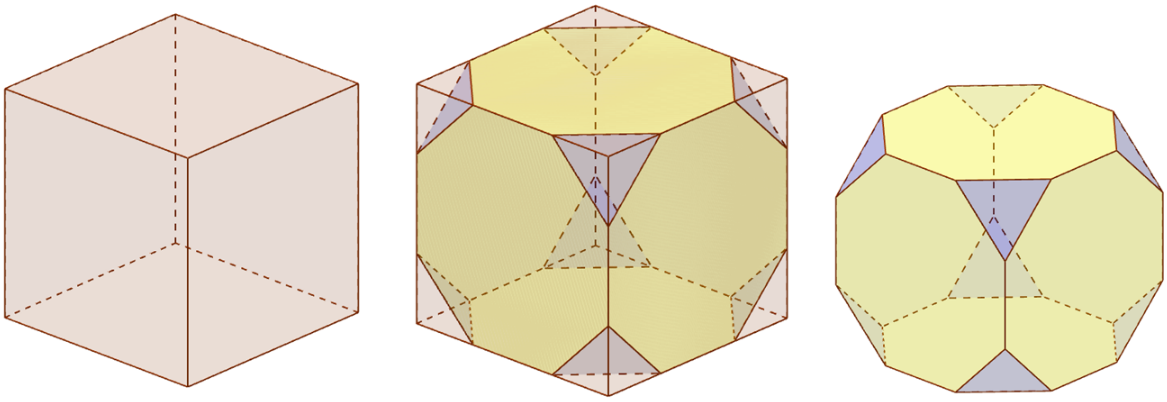


Figura 3.8: Formação do cubo truncado

Como cada vértice e cada face do cubo dão origem a, respectivamente, um triângulo e um octógono, ambos regulares, então este poliedro é composto por oito triângulos e seis octógonos. Desta forma, o sólido possui 36 arestas, 14 faces e 24 vértices.

Seja um octaedro regular. A partir de um vértice e sobre cada uma das três arestas que concorrem nesse vértice, os pontos que estão a uma distância de $\frac{1}{3}$ de aresta desse vértice são assinalados. Esses quatro pontos formam um quadrado. Retira-se, então, a pirâmide de base quadrada formada. Repetindo o mesmo processo para todos os vértices do octaedro, obtemos o poliedro arquimediano Octaedro Truncado (Figura 3.9).

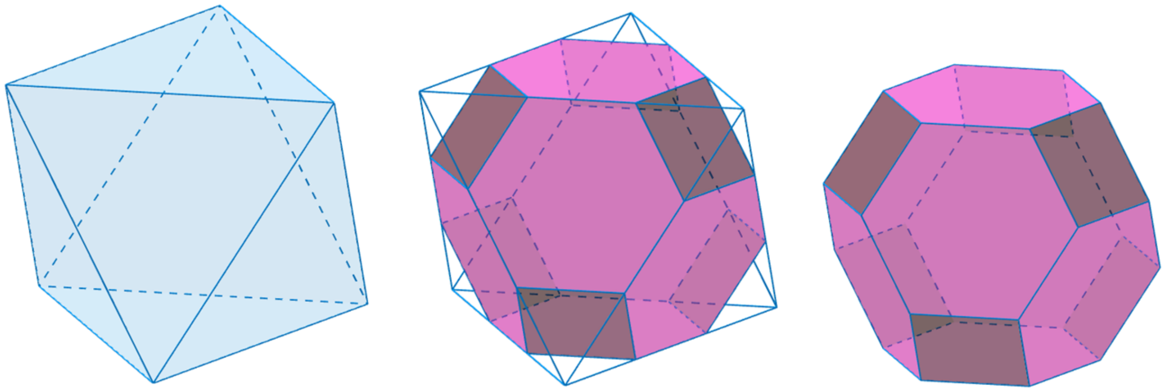


Figura 3.9: Formação do octaedro truncado

Como cada vértice e cada face do octaedro dão origem a, respectivamente, um quadrado e um hexágono regulares, então este poliedro é composto por seis quadrados e oito hexágonos. Desta forma, o sólido possui 36 arestas, 14 faces e 24 vértices.

Seja um dodecaedro regular. A partir de um vértice e sobre cada uma das três arestas que concorrem nesse vértice, os pontos que estão a uma distância de $\frac{1}{2+\sqrt{2+2\cos(72°)}}$ de aresta desse vértice são assinalados. Esses três pontos formam um triângulo equilátero. Retira-se, então, o tetraedro formado. Repetindo o mesmo processo para todos os vértices do dodecaedro, obtemos o poliedro arquimediano Dodecaedro Truncado (Figura 3.10).

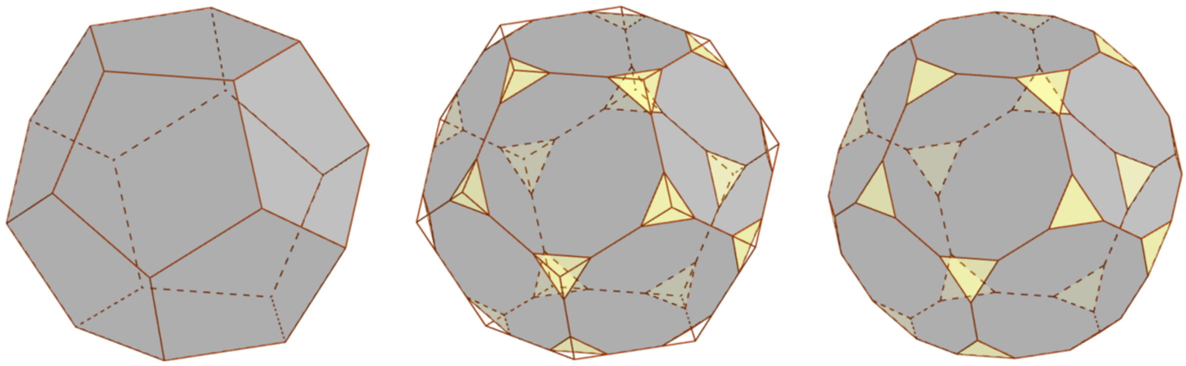


Figura 3.10: Formação do dodecaedro truncado

Como cada vértice e cada face do dodecaedro dão origem a, respectivamente, um triângulo e um decágono, ambos regulares, então este poliedro é composto por vinte triângulos e doze decágonos. Desta forma, o sólido possui 90 arestas, 32 faces e 60 vértices.

Seja um icosaedro regular. A partir de um vértice e sobre cada uma das cinco arestas que concorrem nesse vértice, os pontos que estão a uma distância de $\frac{1}{3}$ de aresta desse vértice são assinalados. Esses cinco pontos formam um pentágono regular. Retira-se, então, a pirâmide de base pentagonal formada. Repetindo o mesmo processo para todos os vértices do icosaedro, obtemos o poliedro arquimediano Icosaedro Truncado (Figura 3.11).

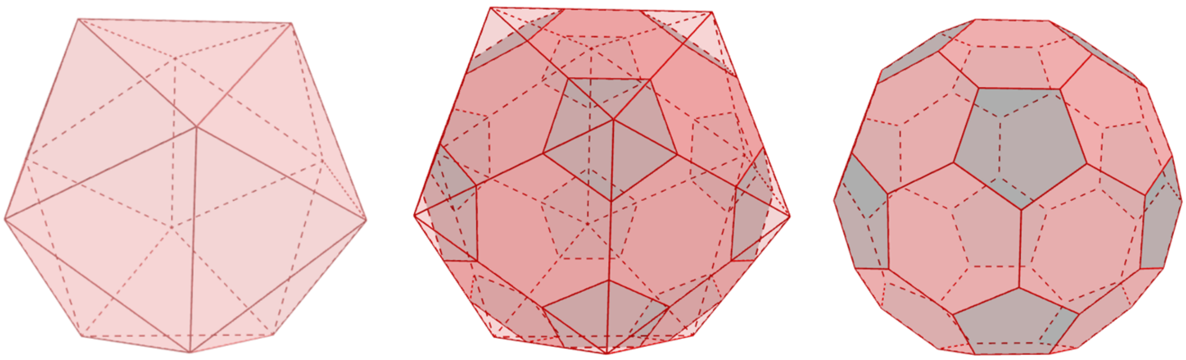


Figura 3.11: Formação do icosaedro truncado

Como cada vértice e cada face do icosaedro dão origem a, respectivamente, um pentágono e um hexágono, ambos regulares, então este poliedro é composto por doze pentágonos e vinte hexágonos. Desta forma, o sólido possui 90 arestas, 32 faces e 60 vértices.

Seja um cubo. A partir de um vértice e sobre cada uma das três arestas que concorrem nesse vértice, os pontos que estão a uma distância de $\frac{1}{2}$ de aresta desse vértice são assinalados. Esses três pontos formam um triângulo equilátero. Retira-se, então, o tetraedro formado. Repetindo o mesmo processo para todos os vértices do cubo, obtemos o poliedro arquimediano Cuboctaedro (Figura 3.12).

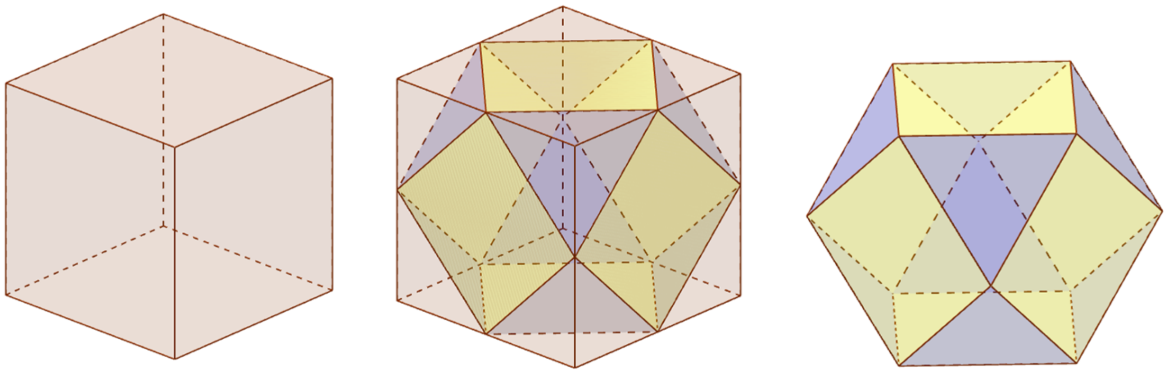


Figura 3.12: Formação do cuboctaedro a partir do cubo

Como cada vértice e cada face do cubo dão origem a, respectivamente, um triângulo equilátero e um quadrado, então este poliedro é composto por oito triângulos e seis quadrados. Desta forma, o sólido possui 24 arestas, 14 faces e 12 vértices.

O cuboctaedro recebe este nome, pois pode ser obtido a partir tanto do cubo quanto do octaedro.

Seja um octaedro regular. A partir de um vértice e sobre cada uma das três arestas que concorrem nesse vértice, os pontos que estão a uma distância de $\frac{1}{2}$ de aresta desse vértice são assinalados. Esses quatro pontos formam um quadrado. Retira-se, então, a pirâmide de base quadrada formada. Repetindo o mesmo processo para todos os vértices do octaedro, obtemos o poliedro arquimediano Cuboctaedro (Figura 3.13).

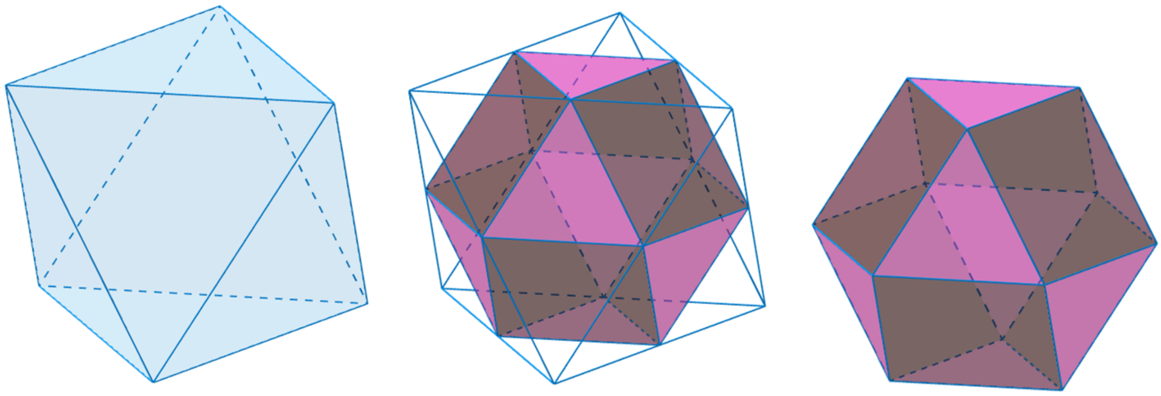


Figura 3.13: Formação do cuboctaedro a partir do octaedro

Como cada vértice e cada face do octaedro dão origem a, respectivamente, um quadrado e um triângulo equilátero, então este poliedro é composto por seis quadrados e oito triângulos. Desta forma, o sólido possui 24 arestas, 14 faces e 12 vértices.

Seja um dodecaedro regular. A partir de um vértice e sobre cada uma das três arestas que concorrem nesse vértice, os pontos que estão a uma distância de $\frac{1}{2}$ de aresta desse vértice são assinalados. Esses três pontos formam um triângulo equilátero. Retira-se, então, o tetraedro formado. Repetindo o mesmo processo para todos os vértices do dodecaedro, obtemos o poliedro arquimediano Icosidodecaedro (Figura 3.14).

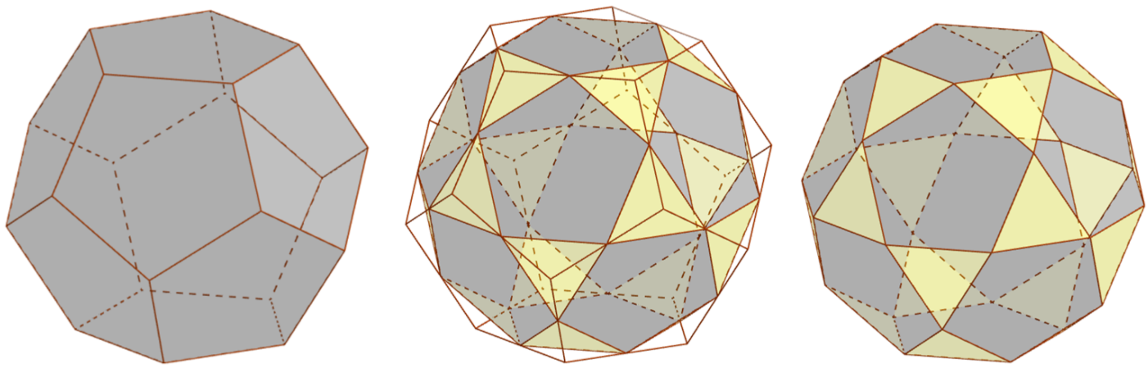


Figura 3.14: Formação do icosidodecaedro a partir do dodecaedro

Como cada vértice e cada face do dodecaedro dão origem a, respectivamente, um triângulo e um pentágono, ambos regulares, então este poliedro é composto por vinte triângulos e doze pentágonos. Desta forma, o sólido possui 60 arestas, 32 faces e 30 vértices.

Tal qual o Cuboctaedro, este poliedro também recebe o nome de Icosidodecaedro porque pode ser obtido tanto a partir do dodecaedro quanto do icosaedro.

Seja um icosaedro regular. A partir de um vértice e sobre cada uma das cinco arestas que concorrem nesse vértice, os pontos que estão a uma distância de $\frac{1}{2}$ de aresta desse vértice são assinalados. Esses cinco pontos formam um pentágono regular. Retira-se, então, a pirâmide de base pentagonal formada. Repetindo o mesmo processo para todos os vértices do icosaedro, obtemos o poliedro arquimediano Icosidodecaedro (Figura 3.15).

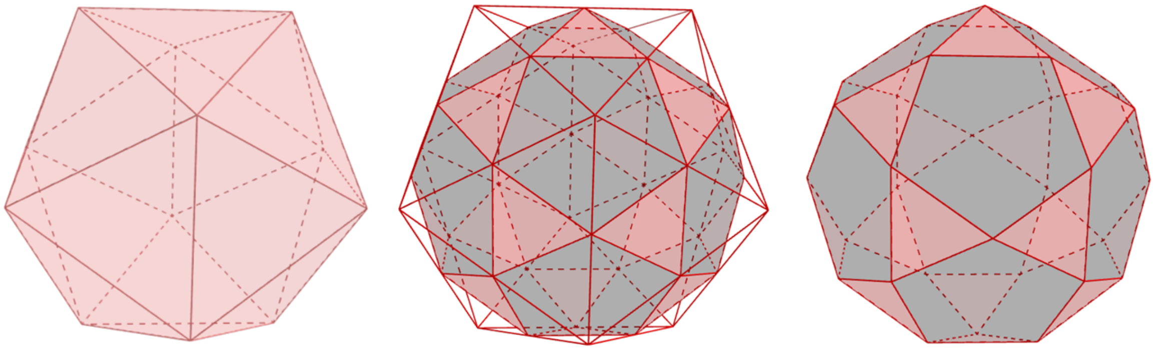


Figura 3.15: Formação do icosidodecaedro a partir do icosaedro

Como cada vértice e cada face do icosaedro dão origem a, respectivamente, um pentágono e um triângulo, ambos regulares, então este poliedro é composto por doze pentágonos e vinte triângulos. Desta forma, o sólido possui 60 arestas, 32 faces e 30 vértices.

Esses são os poliedros arquimedianos formados a partir do truncamento dos cinco poliedros platônicos. Os demais são formados a partir das truncaturas sucessivas dos sólidos truncados.

A partir de truncaturas de um cuboctaedro obtemos um poliedro convexo qualquer, com faces retangulares, hexagonais e octogonais. Como cada vértice do cuboctaedro dá origem a um retângulo, cada face triangular a um hexágono e cada face quadrangular a um octógono, então este poliedro é composto por doze retângulos, oito hexágonos e seis octógonos. Desta forma, o sólido, que aqui será denominado “Poliedro P”, possui 72 arestas, 26 faces e 48 vértices. A partir deste poliedro P obtemos o poliedro arquimediano Cuboctaedro Truncado (Figura 3.16).

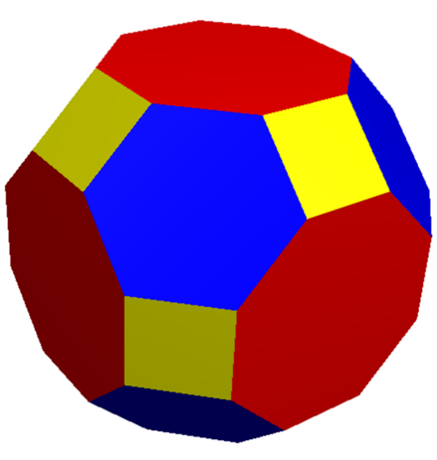


Figura 3.16: Cuboctaedro truncado

Como cada face retangular do poliedro P dá origem a um quadrado, cada face hexagonal a um hexágono regular e cada face octogonal a um octógono regular, então este poliedro é composto por doze quadrados, oito hexágonos e seis octógonos. Desta forma, o sólido, possui 72 arestas, 26 faces e 48 vértices.

Seja um cuboctaedro truncado. A partir dos vértices que definem um quadrado e sobre as arestas que concorrem nesses vértices e que não definem o quadrado, os pontos que estão a uma distância de $\frac{1}{2}$ de aresta desses vértices são assinalados. Esses quatro pontos formam um quadrado. Retira-se, então, o tronco de pirâmide de base quadrangular formado. Repetindo o mesmo processo para todos os vértices que definem os quadrados, obtemos o poliedro arquimediano Rombicuboctaedro (Figura 3.17).

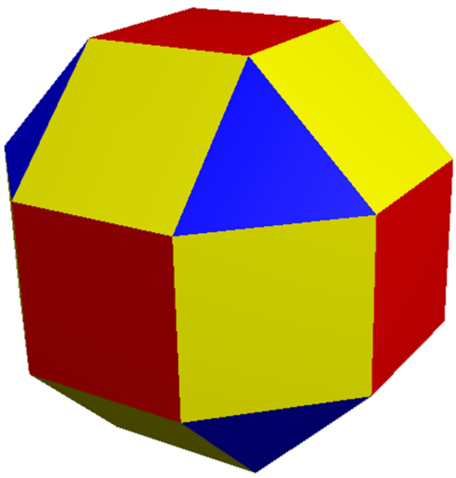


Figura 3.17: Rombicuboctaedro

Como cada face quadrangular do cuboctaedro truncado dá origem a um quadrado, cada face hexagonal a um triângulo equilátero e cada face octogonal também a um quadrado, então este poliedro é composto por dezoito quadrados e oito triângulos. Desta forma, o sólido possui 48 arestas, 26 faces e 24 vértices.

A partir de truncaturas de um icosidodecaedro obtemos um poliedro convexo qualquer, com faces retangulares, hexagonais e decagonais. Como cada vértice do icosidodecaedro dá origem a um retângulo, cada face triangular a um hexágono e cada face pentagonal a um decágono, então este poliedro é composto por trinta retângulos, vinte hexágonos e doze decágonos. Desta forma, o sólido, que aqui será denominado "Poliedro Q", possui 180 arestas, 62 faces e 120 vértices. A partir deste poliedro Q obtemos o poliedro arquimediano Icosidodecaedro Truncado (Figura 3.18).

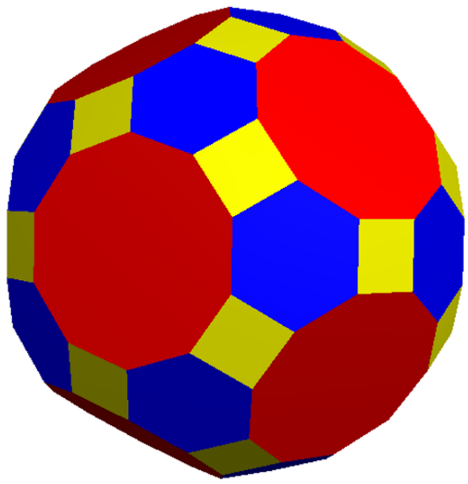


Figura 3.18: Icosidodecaedro truncado

Como cada face retangular do poliedro Q dá origem a um quadrado, cada face hexagonal a um hexágono regular e cada face decagonal a um decágono regular, então este poliedro é composto por trinta quadrados, vinte hexágonos e doze decágonos. Desta forma, o sólido, possui 180 arestas, 62 faces e 120 vértices.

Seja um icosidodecaedro truncado. A partir dos vértices que definem um quadrado e sobre as arestas que concorrem nesses vértices e que não definem o quadrado, os pontos que estão a uma distância de $\frac{1}{2}$ de aresta desses vértices são assinalados. Esses quatro pontos formam um quadrado. Retira-se, então, o tronco de pirâmide de base quadrangular formado. Repetindo o mesmo processo para todos os vértices que definem os quadrados, obtemos o poliedro arquimediano Rombicosidodecaedro (Figura 3.19).

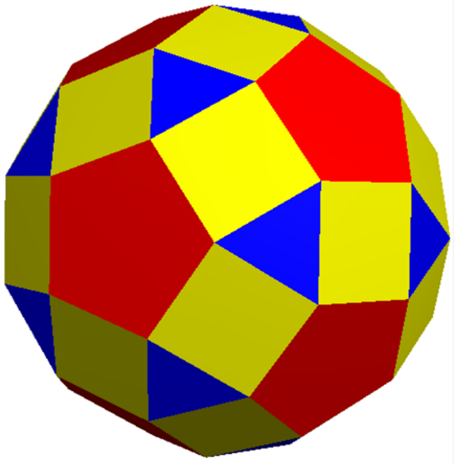


Figura 3.19: Rombicosidodecaedro

Como cada face quadrangular do icosidodecaedro truncado dá origem a um quadrado, cada face hexagonal a um triângulo equilátero e cada face decagonal a um pentágono regular, então este poliedro é composto por trinta quadrados, vinte triângulos e doze pentágonos. Desta forma, o sólido possui 120 arestas, 62 faces e 60 vértices.

Os sólidos cujos nomes são constituídos pelo prefixo "rombi" se deve ao fato destes poliedros serem inscritíveis em sólidos com faces rômbicas, ou seja, sólidos cujas faces são losangos (o romboedro, que é um hexaedro que tem como faces losangos, é um exemplo de sólido com faces rômbicas). [32]

3.3 Sólidos snub´s

Estes dois poliedros arquimedianos não podem ser obtidos a partir da truncatura de outros sólidos. São eles: Cubo Snub, à esquerda da Figura 3.20, e Dodecaedro Snub, à direita. Recebem estes nomes pelos seus processos de formação.

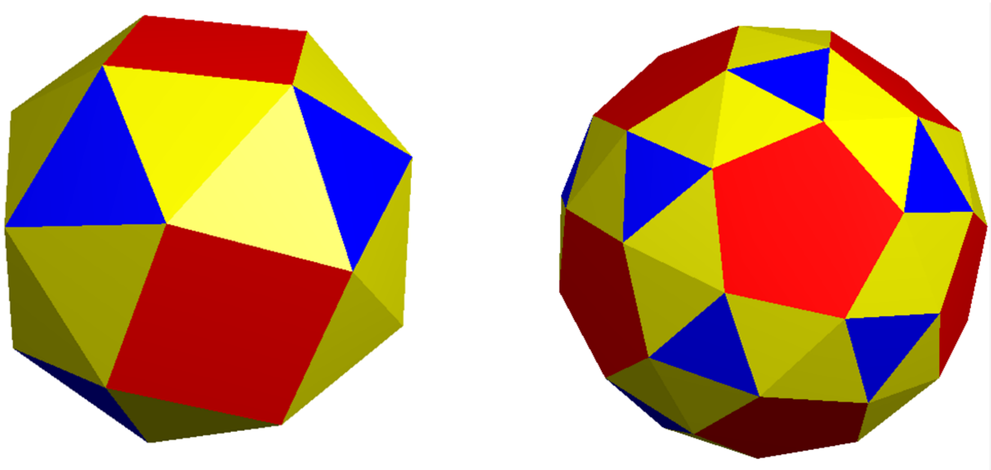


Figura 3.20: Cubo snub e Dodecaedro snub

Estes sólidos são obtidos a partir de um processo chamado “Snubificação”, que consiste em afastar todas as faces do poliedro, rotacioná-las um determinado ângulo (normalmente 45°), e preencher os espaços vazios com polígonos. Desta forma, o cubo snub é formado a partir da snubificação do hexaedro, e o dodecaedro snub é formado a partir da snubificação do dodecaedro. [14]

A tradução de “snub” é, segundo o dicionário de inglês online Michaelis, “nariz pequeno e arrebitado” ou “arrebitado”. Por isso esses sólidos também são chamados de “achatados”.

O primeiro é formado por 6 quadrados e 32 triângulos equiláteros. Logo, possui 60 arestas, 38 faces e 24 vértices.

Já o segundo é formado por 12 pentágonos regulares e 80 triângulos equiláteros. Logo, possui 150 arestas, 92 faces e 60 vértices.

Conclusão

Ao aprofundarmos os estudos a respeito de poliedros regulares, podemos perceber que este assunto não é tão limitado quanto vemos nas Orientações Curriculares para o Ensino Médio [9]. Pelo contrário, é amplo, mas muito pouco difundido no Brasil. Quase não há obra brasileira que trate do tema Poliedros Regulares Estrelados, por exemplo.

Em nossos estudos, encontramos, entre outros autores que se dedicaram ao estudo dos poliedros, Coxeter. Sua obra *Regular Polytopes*, citada neste trabalho, é totalmente voltada ao estudo dos poliedros regulares, e a demonstrações de que existem apenas nove. A princípio, estas demonstrações parecem fáceis, como a de que existem apenas cinco poliedros convexos regulares, apresentada aqui. No entanto, é muito mais elaborada, tanto que a maioria das definições, equações, entre outros, encontrados em seu livro destina-se principalmente ao entendimento destas demonstrações.

Além disso, a elaboração das figuras observadas no trabalho, elaboradas através dos softwares GeoGebra 5.0 JOGL1 Beta, Great Stella e s3D SecBuilder, reforçaram conceitos de geometria plana e espacial, além de nos capacitar a manuseá-los de forma eficiente.

Desta forma, nosso objetivo, de maneira geral, foi o de apresentar os poliedros regulares de maneira mais profunda. De modo específico, defini-los, apresentar e demonstrar alguns teoremas, despertar o interesse pelo assunto e discutir definições, fazer uma reflexão a respeito das que nos dão abertura para várias interpretações.

Apesar de dedicarmos muita atenção à demonstração de que existem apenas nove poliedros regulares, apresentada por Coxeter [7], decidimos não colocá-la, tendo em vista o escopo do nosso trabalho e os complicadores técnicos desta demonstração.

Referências Bibliográficas

[1] André Koch Torres ASSIS. *Arquimedes, o Centro de Gravidade e a Lei da Alavanca.* Apeiron, Montreal, 2008.

[2] Carl B BOYER. *História da Matemática.* Blucher, São Paulo, SP, 2010. Tradução de Elza F. Gomide / 3^a Edição.

[3] ATRACTOR Associação Cultural de Direito Privado. Os poliedros regulares estrelados. Disponível em: http://www.atractor.pt/simetria/matematica/docs/estrel.html Acesso em: 4 de jan. 2013.

[4] Florian CAJORI. *Uma História da Matemática.* Editora Ciência Moderna Ltda., Rio de Janeiro, RJ, 2007. Tradução de Lázaro Coutinho Título original: A History of Mathematics.

[5] ESCOLA TÉCNICA ESTADUAL TRAJANO CAMARGO. Estruturas cristalinas. Disponível em: http://www.trajanocamargo.com.br/wp-content/uploads/2012/05/Estrutura_Cristalina_materialdeapoio2.pdf Acesso em: 15 de fev. 2013.

[6] Joel Câmara de CARVALHO FILHO and Auta Stella de Medeiros GERMANO. *Astronomia: Interdisciplinar.* EDUFRN, Natal, RN, 2007. Aula 10 - Leis de Kepler e a gravitação universal.

[7] Harold Scott MacDonald COXETER. *Regular Polytopes.* Methuen & Co. Ltd., Londres, 1948.

[8] Teoria da conspiracao. *Dodecaedro de bronze.* . Disponível em: http://teoriadaconspiracao.org/discussion/46/dodecaedro-romano/p1 Acesso em: 15 de fev. 2013.

[9] BRASIL Ministério da educação e cultura. *Parâmetros curriculares nacionais: Ensino médio*, volume 2. MEC, Brasília, 2006. Ciência da natureza, matemática e tecnologia.

[10] Luiz Roberto DANTE. *Matemática: contexto e aplicações*, volume 2. Ática, São Paulo, SP, 2010. 1^a Edição.

[11] Luiz Roberto DANTE. *Matemática: contexto e aplicações*, volume Único. Ática, São Paulo, SP, 2010. 3^a Edição.

[12] O. DOLCE and José Nicolau POMPEO. *Fundamentos de Matemática Elementar 10: Geometria Espacial*. Atual, São Paulo, 2005.

[13] O. DOLCE and José Nicolau POMPEO. *Fundamentos de Matemática Elementar 9: Geometria Plana*. Atual, São Paulo, 2005.

[14] Paulo José Moreira DUARTE. *Sólidos Geométricos: história, conceitos e aplicações no ensino fundamental*. UFAL, Maceió, AL, 2010. Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Universidade Federal de Alagoas.

[15] Howard EVES. *Introdução à história da matemática*. Editora da Unicamp, Campinas, SP, 2011. Tradução de Hygino H. Domingues Título original: Introduction to the History of Mathematics / 5^a Edição.

[16] Gerson FAUTH and Simone Baecker FAUTH. Microfósseis. Disponível em: http://www.ufrgs.br/paleodigital/Radiolarios.html Acesso em: 15 de fev. 2013.

[17] UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE. Os sólidos platônicos. Disponível em: http://www.uff.br/cdme/platonicos/platonicos-html/solidos-platonicos-br.html Acesso em: 15 de fev. 2013.

[18] Antônio Carlos de Almeida GARCIA and João Carlos Amarante CASTILHO. *Matemática sem mistérios - geometria plana e espacial*. Editora Ciência Moderna Ltda., Rio de Janeiro, RJ, 2006.

[19] Gelson IEZZI, Osvaldo DOLCE, David DEGENSZAJN, Roberto PÉRIGO, and Nilze de ALMEIDA. *Matemática: ciência e aplicações*, volume 2. Atual, São Paulo, SP, 2010. Ensino Médio.

[20] Wellington Gonçalves LEMOS and Marcelo Almeida BAIRRAL. *Recursos na internet e dobraduras para poliedros estrelados: uma proposta para o trabalho no ensino médio*, volume 1. Ponta Grossa, 2008. Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia / Número 2.

[21] Elon Lages LIMA and et al. *Matemática do Ensino Médio*, volume 2. SBM, Rio de Janeiro, 2006.

[22] Pedro Macias MARQUES. *Notas sobre ensino da geometria: grupo de trabalho de geometria da APM. Poliedros Regulares.* Portugal, 2008. Educação e Matemática Número 97.

[23] WOLFRAM MATHWORLD. Kepler-poinsot solid. Disponível em: http://mathworld.wolfram.com/Kepler-PoinsotSolid.html Acesso em: 7 de jan. 2013.

[24] WOLFRAM MATHWORLD. Schläfli symbol. Disponível em: http://mathworld.wolfram.com/SchlaefliSymbol.html Acesso em: 21 de mar. 2013.

[25] Temet NOSCE. Linhas de ley, 2008. Disponível em: http://www.deldebbio.com.br/2008/10/15/linhas-de-ley/ Acesso em: 4 de jan. 2013.

[26] J. J. O' CONNOR and E. F ROBERTSON. Louis poinsot. Disponível em: http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/history/Biographies/Poinsot.html Acesso em: 11 de fev. 2013.

[27] Paulo R PINTO. Notas sobre sólidos platónicos e simetrias, 2006. Disponível em: http://www.math.ist.utl.pt/˜ppinto/plato5.htm Acesso em: 4 de jan. 2013.

[28] Giovanni REALE. *Para uma nova interpretação de Platão: Releitura da metafísica dos grandes diálogos à luz das "Doutrinas não-escritas"*. Edições Loyola, São Paulo, SP, 2004. Tradução de Marcelo Perine 2^a Edição Título original: Per una nuova interpretazione di Platone: Rilettura della metafisica dei grandi dialoghi alla luce delle "Dottrine non scritte".

[29] Carlos Pereira dos SANTOS, João PEDRO NETO, and Jorge Nuno SILVA. Os quadrados latinos + puzzle hexágono mágico, 2007. Disponível em: http://jnsilva.ludicum.org/hm2008_9/Livro10.pdf Acesso em: 11 de fev. 2013.

[30] DEPARTMENT OF COMPUTER SCIENCE. Schläfli symbols. Disponível em: http://www.cs.virginia.edu/~lat7h/blog/posts/219.html Acesso em: 21 de mar. 2013.

[31] Lúcia Fernández SUAREZ. *A Característica de Euler?* 2009. Universidade do Milho.

[32] Eduardo VELOSO. *Geometria: temas actuais.* Instituto de Inovação Educacional, Lisboa, 1998.

[33] WIKIPEDIA. Ludwig schläfli. Disponível em: http://es.wikipedia.org/wiki/Ludwig_Schl%C3%A4fli Acesso em: 21 de mar. 2013.

[34] WIKIPEDIA. Pirita. Disponível em: http://pt.wikipedia.org/wiki/Pirita Acesso em: 15 de fev. 2013.