UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
SETOR DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROFMAT - MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA

FELIPE ALBUQUERQUE MACHADO

FRAÇÕES CONTÍNUAS: UMA CONTEXTUALIZAÇÃO PARA O ENSINO MÉDIO

CURITIBA
2019

FELIPE ALBUQUERQUE MACHADO

FRAÇÕES CONTÍNUAS: UMA CONTEXTUALIZAÇÃO PARA O ENSINO MÉDIO

Dissertação apresentada ao curso de Mestrado Profissional em Matemática, Setor de Ciências Exatas, da Universidade Federal do Paraná - UFPR, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.
Orientadora: Adriana Luiza do Prado

CURITIBA

2019

Catalogação na Fonte: Sistema de Bibliotecas, UFPR
Biblioteca de Ciência e Tecnologia

M149fe Machado, Felipe Albuquerque

Frações contínuas: uma contextualização para o ensino médio [recurso eletrônico] / Felipe Albuquerque Machado, 2019.

Dissertação (mestrado) – Mestrado Profissional em Matemática, Setor Ciências Exatas da Universidade Federal do Paraná.

Orientadora: Adriana Luiza do Prado

1. Matemática – ensino médio. 2. Frações contínuas. I. Universidade Federal do Paraná. II. Prado, Adriana Luiza do. III. Título.

CDD 510.22

Bibliotecária: Vilma Machado CRB9/1563

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
SETOR SETOR DE CIENCIAS EXATAS
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - 31075010001P2

TERMO DE APROVAÇÃO

Os membros da Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL da Universidade Federal do Paraná foram convocados para realizar a arguição da Dissertação de Mestrado de **FELIPE ALBUQUERQUE MACHADO** intitulada: **Frações contínuas - uma contextualização para o ensino médio**, após terem inquirido o aluno e realizado a avaliação do trabalho, são de parecer pela sua APROVAÇÃO no rito de defesa.
A outorga do título de mestre está sujeita à homologação pelo colegiado, ao atendimento de todas as indicações e correções solicitadas pela banca e ao pleno atendimento das demandas regimentais do Programa de Pós-Graduação.

CURITIBA, 03 de Maio de 2019.

Adriana L do Prado
ADRIANA LUIZA DO PRADO
Presidente da Banca Examinadora (UFPR)

Diego das Neves de Souza
DIEGO DAS NEVES DE SOUZA
Avaliador Externo (DMAE - POA)

Aldemir Silva
ALDEMIR JOSÉ DA SILVA PINTO
Avaliador Interno (UFPR)

Agradecimentos

Primeiramente a Deus, Grande e Soberano, que nos sustentou com mãos caridosas e firmes. "Eis que Deus é o meu ajudador, o Senhor é quem me sustenta a vida."(Sl 54:4) Amém!

A minha esposa, Ana Claudia Cristina Barbosa, pelas noites que ficou ao meu lado acompanhando o processo de escrita desse trabalho, pelos cafés que me deixaram acordados e por sempre me ajudar em tudo que precisei.

Aos meus pais, Riva Mendes Machado e Leila Mara Albuquerque Machado, que sempre me auxiliaram nos momentos de dificuldade, sempre me incentivaram e investiram no meu crescimento, para sempre minha base de apoio.

A minha irmã, Raissa Albuquerque Machado, que sempre me ajudou a não desistir dos meus sonhos e me deu força nos momentos que mais precisei.

Ao meu amigo, Anderson Zacher Dutra, que abriu as portas de sua casa para que pudéssemos finalizar toda a base deste belíssimo trabalho.

A Universidade Federal do Paraná, pela oportunidade de estudo e engrandecimento intelectual.

A professora Dra. Adriana Luiza do Prado, por todo auxílio e compreensão para a finalização do trabalho. Pelo fundamento e por toda base que necessitávamos.

Aos professores do PROFMAT, pelas aulas e toda contribuição para que essa obra fosse realizada.

Aos colegas de turma, que tornaram as noites de aula mais divertidas.

Meus sinceros e infinitos agradecimentos!

“Se eu vi mais longe, foi por estar sobre
ombros de gigantes.”
(Sir Isaac Newton)

RESUMO

Mesmo com os avanços das incipientes propostas curriculares do ciclo básico, alguns temas matemáticos, geralmente abordados no Ensino Superior, ainda se encontram distantes do cotidiano da sala de aula. Esta dissertação propõe uma reflexão envolvendo aspectos curriculares, epistemológicos e didáticos para a discussão da temática das Frações Contínuas dentro da problemática do ensino médio. A abordagem das Frações Contínuas, não como mais um componente, mas sim como um tema que permite articular e retratar os próprios conhecimentos matemáticos presentes no atual currículo de Matemática, trazendo uma alternativa para atualizar o currículo do Ensino Médio.

Palavras-chave: Conjuntos Numéricos. Algoritmo de Euclides. Frações Contínuas. Calendário.

ABSTRACT

Even with the advances of the initial curricular proposals of the basic cycle, some mathematical themes, usually addressed in University, are still far from the everyday of the classroom. This dissertation proposes a reflection involving curricular, epistemological and didactic aspects for the discussion of the theme of Continuous Fractions within the problematic of secondary education. The Fractions Continuous approach, not as a component, but as a theme that allows articulating and portraying the mathematical knowledge present in the current Mathematics curriculum, bringing an alternative to update the curriculum of High School.

Key words: Numerical Sets. Euclidean Algorithm. Continued Fractions. Calendar.

SUMÁRIO

Introdução

A busca pelo desconhecido sempre levou o homem a ir além e a cada passo dado ao futuro era um passo mais distante do passado. Hoje estamos no auge da evolução em muitos aspectos, deixamos para trás boa parte de nossas raízes e entramos na era digital e com a educação não foi diferente. O novo paradigma educacional cercado de tecnologias que servem ao docente novas ferramentas para conquistar o discente em formação vem sendo uma vitória de superação para todos. Mas não devemos contar apenas com todos esses novos recursos, por vezes o tradicional supera as expectativas. Sob esta ótica é que se resolveu fazer esta dissertação, ou seja, deixar um pouco de lado as tecnologias e resgatar a matemática clássica para a sala de aula.

O objetivo deste trabalho é apresentar a teoria de frações contínuas enfatizando seus aspectos de aproximação e mostrar como se realizam cálculos que, inicialmente, só poderiam ser efetuados por métodos mais ortodoxos, com ajuda de calculadoras e /ou tábuas de logaritmos. O intuito é minimizar os óbices encontrados pelos alunos em tais assuntos. As frações contínuas constituem um exemplo interessante de procedimento que é finito, quando operado sobre números racionais, e infinito, quando o número dado é irracional.

Sendo assim, o trabalho se desenvolve, além da introdução, em mais seis capítulos: no primeiro capitulo é exposta parte da história da construção dos Conjuntos Numéricos, suas principais propriedades e seus principais personagens.

No segundo capítulo explorou-se as diferenças entre os números Algébricos e Transcendentes, para complementar o estudo desta dissertação, apresentando exemplos e propriedades.

No terceiro capítulo foi apresentado o Contexto Histórico das Frações Contínuas, sua possível origem e sua relação com o algoritmo de Euclides, além de alguns matemáticos que as estudaram.

No quarto capítulo foi aplicado o algoritmo de Euclides como ferramenta para cálculo do m.d.c. e para obtenção da Fração Contínua.

No quinto Capítulo foi abordado o estudo das Frações Contínuas propriamente dito, como: sua representação simbólica, frações contínuas reduzidas, lei de formação das reduzidas, Frações Contínuas Periódicas.

No sexto Capítulo trabalharemos resolvendo algumas situações problemas com o uso de frações contínuas que poderiam ser dadas no ensino médio.

Capítulo 1

Conjuntos Numéricos

1.1 Conjunto dos Números Naturais ($\mathbb{N}$)

Os números estão presentes na vida do homem desde os primórdios da criação. Para o ser humano primitivo os números tinham duas funções básicas: a contagem e a medição. Num primeiro instante a humanidade desenvolveu de maneira lenta o princípio de contagem como a comparação entre grandezas discretas, como por exemplo, o pastor de ovelhas que para controlar seu rebanho utilizava pedras guardadas em uma sacola, cada ovelha correspondia a uma pedrinha. No início e final do dia ele fazia as devidas comparações, se sobrassem pedras, faltavam ovelhas. Assim se originou a palavra cálculo que do latim "Calculus" significa pedrinha. Na próxima seção veremos uma abordagem formal para o conjunto dos números naturais, o qual será denotado por $\mathbb{N}$.

1.1.1 Os Axiomas de Peano

Giuseppe Peano - FONTE: Famous Mathematicians [1]

O Matemático Italiano Giuseppe Peano, no inicio do século XX, fez a caracterização do conjunto dos naturais de forma axiomática e tomando como base seus quatro axiomas, conhecidos como Axiomas de Peano, como citado em [9] e [6]. Como sabemos alguns matemáticos não consideram o número zero como pertencente ao conjunto $\mathbb{N}$, porém por conveniência, neste trabalho, faremos a construção de tal conjunto com o número zero pertencente a ele. Definiremos também, as operações de adição, multiplicação, a relação de ordem e algumas propriedades em $\mathbb{N}$.

Em $\mathbb{N}$ temos que a principal ideia é a de sucessor e, deixamos claro, que sucessor é aquele que aparece logo após. Os Axiomas de Peano, citados acima, foram sintetizados de forma concisa e precisa. Estes axiomas são as regras básicas para construção de $\mathbb{N}$. Usaremos a notação A_1, A_2, A_3, A_4 para identificá-los, e os elencaremos em seguida:
A_1 - Todo número natural tem um único sucessor.
A_2 - Números naturais diferentes possuem sucessores diferentes.
A_3 - Existe um único número natural, chamado de "zero" e representado pelo símbolo 0, que não é sucessor de nenhum outro.
A_4 - Seja X um conjunto de números naturais (isto é, $X \subseteq \mathbb{N}$). Se $0 \in X$ e se além disso, o sucessor de todo elemento de X ainda pertencer a X, então temos que $X = \mathbb{N}$.

[1]Disponível em: <https://famous-mathematicians.com/giuseppe-peano> acesso Abril 2018

Os Axiomas de Peano se tornaram tão sólidos na matemática que até os dias atuais afirmamos que tudo que se sabe sobre os números naturais pode ser demonstrado como consequência destes quatro axiomas. Um engenhoso processo chamado sistema de numeração decimal, com auxílio dos dez símbolos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, nos permite representar qualquer número natural. Os símbolos que compõe esse sistema de numeração decimal possuem nomes, assim como qualquer outro substantivo, como vimos aquele que não é sucessor de nenhum outro chama-se "zero", seu sucessor, representado pelo símbolo 1, chama-se "um", o sucessor, representado pelo símbolo 2, chama-se "dois", o sucessor do dois, representado pelo símbolo 3, chama-se "três" e assim sucessivamente, até que os nomes dos números se tornam bastante complicados.

Assim, segue que o conjunto dos números naturais é:

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10...\}$.

Obs.: Como dito anteriormente o número 0 (zero) por muitos autores não é considerado um número natural, sendo assim sua representação é facultativa.

1.1.2 Propriedades dos Naturais

O conjunto dos naturais tem as seguintes propriedades :

Para adição dados a, b e $c \in \mathbb{N}$

Fecho $(a + b) \in \mathbb{N}$

Associativa $a + (b + c) = (a + b) + c$

Comutativa $a + b = b + a$

Elemento neutro $a + 0 = a$

Distributiva $a.(b + c) = a.b + a.c$

Para Multiplicação dados a, b e $c \in \mathbb{N}$

Fecho $(a.b) \in \mathbb{N}$.

Associativa $a.(b.c) = (a.b).c$

Comutativa $a.b = b.a$

Elemento neutro $a.1 = a$

Distributiva $a.(b + c) = a.b + a.c$

Sem divisores de zero $a.b = 0 \Rightarrow a = 0$ ou $b = 0$

1.2 Conjunto dos Números Inteiros ($\mathbb{Z}$)

Durante milênios a humanidade trabalhou com sistemas inadequados, com a falta de um símbolo para o zero (vazio) e também de uma simbologia para os números negativos que hoje usamos para expressar, por exemplo, uma dívida ou representar a profundidade do nível do mar. Sabe-se que com o advento do zero estes obstáculos foram superados o que permitiu o prolongamento dos números "naturais" aos números "relativos" pela incorporação a estes de seus "simétricos" com relação ao zero.

Dentro da cronologia dos algarismos os números negativos surgiram em primeiro lugar na China antiga, pois este povo calculava usando coleções de barras vermelhas para os números positivos e barras pretas para os números negativos, contudo não aceitavam que um número negativo fosse solução de uma equação. Coube aos matemáticos indianos descobrirem os números negativos quando da tentativa de formular soluções de equações quadráticas, descobriram os números negativos, antes chamados de "*numeri absurdi*" e "*numeri ficti*" [12].

Nicolas Chuquet - FONTE: SUTORI [2]

Ainda na cronologia dos números negativos, em 1484 o matemático Francês Nicolas Chuquet começa a utilizar com destreza o zero e também os números negativos, e em 1489 o matemático alemão Johann Widmann de Eger introduz os sinais + e - em substituição as letras "p" inicial de piu (mais) e de "m" inicial de minus (menos), segundo [8].

[2] Disponível em: <https://www.sutori.com/item/nicolas-chuquet-1445-1488-european-mathematician> acesso em Junho 2018

Johann Widmann - FONTE: LEXIQUE [3]

Simon Stévin - FONTE: BRITANNICA [4]

Em 1582 o matemático Belga Simon Stévin (1548 d.C. - 1620 d.C.) elaborou um sistema de notação unificando o domínio de aplicação das regras aritméticas, que é uma aproximação das regras que hoje são aplicadas aos números inteiros [10].

A necessidade de um novo conjunto era inevitável, uma vez que dados $x, y \in \mathbb{N}$, a diferença entre x e y, ou seja, $x - y \notin \mathbb{N}$, se $x < y$. Assim temos o conjunto dos Números Inteiros, representado por $\mathbb{Z}$, o qual é formado pelos números naturais e pelos números negativos, descrito como:

$\mathbb{Z} = \{\ldots, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$.

[3]Disponível em: <https://lexique.netmath.ca/johann-widmann-1460-1498/> acesso Junho 2018

[4]Disponível em: <https://www.britannica.com/biography/Simon-Stevin/media/565994/14526> acesso Junho 2018

1.2.1 Subconjuntos de $\mathbb{Z}$

Utilizamos as seguintes notações para representar os subconjutos do Conjunto dos Números Inteiros.

$\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} - \{0\} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \neq 0\} = \{..., -3, -2, -1, 1, 2, 3, ...\}$ (Conjunto dos Inteiros não-nulos)

$\mathbb{Z}_+ = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \geq 0\} = \{0, 1, 2, 3, ...\}$ (Conjunto dos Inteiros não negativos)

$\mathbb{Z}_+^* = \{x \in \mathbb{Z} \mid x > 0\} = \{1, 2, 3, ...\}$ (Conjunto dos Inteiros não negativos, excluindo zero)

$\mathbb{Z}_- = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \leq 0\} = \{..., -3, -2, -1, 0\}$ (Conjunto dos Inteiros não positivos)

$\mathbb{Z}_-^* = \{x \in \mathbb{Z} \mid x < 0\} = \{..., -3, -2, -1\}$ (Conjunto dos Inteiros não positivos, excluindo zero)

1.2.2 Propriedades dos inteiros

O conjunto dos inteiros tem as seguintes propriedades :

Para adição dados a, b e $c \in \mathbb{Z}$

Fecho $(a + b) \in \mathbb{Z}$

Associativa $a + (b + c) = (a + b) + c$

Comutativa $a + b = b + a$

Elemento neutro $a + 0 = a$

Inverso aditivo $\exists\, a' \in \mathbb{Z} \mid a + a' = 0$

Distributiva $a.(b + c) = a.b + a.c$

Para Multiplicação dados a, b e $c \in \mathbb{Z}$

Fecho $(a.b) \in \mathbb{Z}$

Associativa $a.(b.c) = (a.b).c$

Comutativa $a.b = b.a$

Elemento neutro $a.1 = a$

Distributiva $a.(b + c) = a.b + a.c$

1.3 Conjunto dos Números Racionais ($\mathbb{Q}$)

A palavra fração deriva do latim “fractus” que significa “partido”, “quebrado”, assim pode-se dizer que a fração é a representação das partes iguais de um todo. As primeiras notícias sobre o uso das frações remetem a cerca de 3000 a.C. e vêm do Egito. As terras que margeavam o Rio Nilo eram divididas entre grupos familiares, em troca de pagamento de tributos para o Estado. Durante inundações do Rio Nilo, muitas terras ficavam submersas, e isso fazia com que elas recebessem nutrientes. Essas terras tornavam-se muito férteis para a agricultura. Como os tributo eram pagos proporcionalmente às áreas a serem cultivadas, quando as águas baixavam, era necessário remarcar os limites entre os terrenos de cada proprietário. Para essas marcações os proprietários usavam cordas (que seriam uma espécie de medida), esticando-as e, assim, verificavam quantas vezes aquela unidade de medida (encontrada através da corda esticada) estava contida nos lados do terreno. No entanto, por mais eficientes que tentassem ser, não encontravam um número inteiro para representar tais medidas, o que os levou à utilização de frações. Os antigos egípcios, utilizavam apenas frações da forma $\frac{1}{n}$ de modo que todas as demais frações tinham que ser expressas como somas de frações de numerador 1 e denominadores diferentes. Só duas frações podiam ser apontadas como exceção a tal regra: $\frac{3}{4}$ e $\frac{2}{3}$, sendo que a última era contemplada como fração geral, uma vez que era utilizada como base para diversas operações matemáticas. Os babilônios usavam em geral frações com denominador 60. É provável que o uso do número 60 pelos babilônios se deve ao fato que é um número menor do que 100 com maior quantidade de divisores inteiro [8]. Os romanos, por sua vez, usavam constantemente frações com denominador 12. Provavelmente os romanos usavam o número 12 por ser um número que embora pequeno, possui um número expressivo de divisores inteiros, como visto em [2]. Com o passar dos tempos, muitas notações foram usadas para representar frações. A forma de escrever frações usando um número sobre outro vem dos hindus, eles colocavam um número sobre outro sem o traço, com o tamanho da parte abaixo e o número de vezes que essa parte devia ser contada em cima. Esse costume se espalhou pela Europa mais tarde, como em [6]. Assim, o conjunto dos Números Racionais, representado por $\mathbb{Q}$, é definido como o quociente de dois números inteiros, sendo o denominador diferente de zero, o conjunto pode ser descrito como:

$\mathbb{Q} = \{p/q \mid p, q \in \mathbb{Z} \ e \ q \neq 0\}$

Assim, todo número que pode ser escrito como a razão entre dois números inteiros, com o denominador diferente de zero, é chamado de número racional. Em particular, os números naturais e inteiros são racionais, pois podem ser representados como quociente dele mesmo, por 1. Então, podemos afirmar que o conjunto dos números naturais e o dos números inteiros podem ser vistos como subconjuntos do conjunto dos números racionais. Além dos naturais e dos inteiros, as frações, os decimais finitos e os decimais infinitos periódicos são números racionais.

Exemplo: São racionais os números $2 = \frac{2}{1}; -3 = \frac{-3}{1}; 1,5 = \frac{3}{2}; 0,44444... = \frac{4}{9}$

1.3.1 Subconjuntos de $\mathbb{Q}$

Utilizamos as seguintes notações para representar os subconjutos do Conjunto dos Números Racionais.

$\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} - \{0\}$ (Conjunto dos Racionais não-nulos)

$\mathbb{Q}_+ =$ (Conjunto dos Racionais não negativos)

$\mathbb{Q}^*_+ =$ (Conjunto dos Racionais não negativos, excluindo zero)

$\mathbb{Q}_- =$ (Conjunto dos Racionais não positivos)

$\mathbb{Q}^*_- =$ (Conjunto dos Racionais não positivos, excluindo zero)

1.3.2 Propriedades dos racionais

O conjunto dos racionais tem as seguintes propriedades :

Para adição dados $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ e $\frac{e}{f} \in \mathbb{Q}$

Fecho $(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}) \in \mathbb{Q}$

Associativa $\frac{a}{b} + (\frac{c}{d} + \frac{e}{f}) = (\frac{a}{b} + \frac{c}{d}) + \frac{e}{f}$

Comutativa $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{c}{d} + \frac{a}{b}$

Elemento neutro $\frac{a}{b} + 0 = \frac{a}{b}$

Inverso aditivo $\forall \frac{a}{b}$, $\exists\ \frac{a'}{b'} \in \mathbb{Q} \mid \frac{a}{b} + \frac{a'}{b'} = 0$

Distributiva $\frac{a}{b} \cdot (\frac{c}{d} + \frac{e}{f}) = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} + \frac{a}{b} \cdot \frac{e}{f}$

Para Multiplicação dados $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ e $\frac{e}{f} \in \mathbb{Q}$

Fecho $(\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}) \in \mathbb{Q}$

Associativa $\frac{a}{b} \cdot (\frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f}) = (\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}) \cdot \frac{e}{f}$

Comutativa $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{c}{d} \cdot \frac{a}{b}$

Elemento neutro $\frac{a}{b} \cdot 1 = \frac{a}{b}$

Inverso multiplicativo $\forall\ \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}^*$; $\exists\ \frac{b}{a} \mid \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1$

Distributiva $\frac{a}{b} \cdot (\frac{c}{d} + \frac{e}{f}) = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} + \frac{a}{b} \cdot \frac{e}{f}$

1.3.3 Frações Equivalentes

Frações equivalentes são frações representadas por expressões diferentes mas que resultam na mesma quantia.

Sendo a, b, c, d e $\in \mathbb{Z}^*$ dizemos que as frações $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ são equivalentes se, e somente se $a.d = b.c$.

1.3.3.1 Propriedades das Frações Equivalentes

$$\text{Reflexiva: } \frac{a}{b} = \frac{a}{b}$$

$$\text{Simétrica: } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{c}{d} = \frac{a}{b}$$

$$\text{Transitiva: } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ e } \frac{c}{d} = \frac{e}{f} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{e}{f}$$

1.3.4 Ordenação dos Racionais

Como será mais utilizado, no decorrer deste trabalho, os números racionais, abordaremos somente a ordenação destes. A relação de ordem entre números racionais sempre é estabelecida a partir de representações fracionárias de denominadores positivos.

Dados dois números racionais $r = \frac{a}{b}$ e $s = \frac{c}{d}$, temos:

$$\frac{a}{b} > \frac{c}{d} \Longleftrightarrow a.d > c.b$$

O corpo (vide ANEXO A) $[\mathbb{Q}, +, \cdot, <]$ tem a estrutura de corpo ordenado, ou seja, é um corpo no qual a relação de ordem verifica as duas seguintes propriedades:

Sendo $r, s, t \in \mathbb{Q}$

Propriedade 1.

$r < s \Longleftrightarrow r + t < s + t \ \forall \ t \in \mathbb{Q}$

$(\Leftarrow) r + t + (-t) < s + t + (-t)$

$r + 0 < s + 0$

$r < s$

Propriedade 2.

$r < s \Longleftrightarrow r.t < s.t \qquad \forall \quad t > 0$

$(\Leftarrow) r \cdot t \cdot \frac{1}{t} < s \cdot t \cdot \frac{1}{t}$

$r \cdot \frac{t}{t} < s \cdot \frac{t}{t}$

$r < s$

1.3.5 Representação decimal

Pode-se transformar um número racional $\frac{a}{b}$ para a forma decimal dividindo o inteiro a pelo inteiro b,com isso podemos obter dois casos:

1. Um número decimal que tem uma quantidade finita de algarismos, diferentes de zero, isto é, um decimal exato.

Exemplos: $\frac{-2}{1} = -2; \quad \frac{6}{20} = 0,3; \quad \frac{71}{100} = 0,71$

2. Um número decimal que tem uma quantidade infinita de algarismos que se repetem periodicamente, isto é, uma dízima periódica.

Exemplos: $\frac{1}{3} = 0,333... = 0,\overline{3} \rightarrow$ dízima periódica simples

$\frac{2}{7} = 0,285714285714... = 0,\overline{285714} \rightarrow$ dízima periódica simples

$\frac{11}{6} = 1,8333... = 1,8\overline{3} \rightarrow$ dízima periódica composta

Todo número na forma de decimal exata ou de dízima periódica pode ser convertido à forma de fração $\frac{a}{b}$, portanto, representa um número racional.

1.4 Conjunto dos Números Irracionais ($\mathbb{I}$)

Acreditava-se que todo número poderia ser escrito como a razão entre dois inteiros. Mas isso começou a ser extinto na Grécia Antiga, entre a sociedade pitagórica. Para eles foram duas sensações bem opostas, algo surpreendente e intrigante, o fato de que a medida do comprimento da diagonal de um quadrado de lado unitário não poderia ser expressa como um número racional. A incansável busca para encontrar qualquer fração que multiplicada por ela mesma resulta em dois fracassou. Foi um golpe mortal na filosofia pitagórica, pois para tudo se dependia dos números inteiros.

A descoberta da irracionalidade de $\sqrt{2}$ provocou tamanha consternação entre os pitagóricos que, por algum tempo, se manteve a questão em segredo. Alguns historiadores acreditam que o pitagórico Hipaso foi expulso da sociedade por revelar o segredo e teria sido lançado ao mar. Hoje os Números Irracionais, definidos como números que não podem ser expressos como a razão entre dois inteiros, são bem aceitos. Os números racionais parecem ilhas de ordem num interminável oceano de desordem representado pelos irracionais. Há um número infinito de racionais, porém os irracionais são bem mais numerosos, no sentido de que os racionais são contáveis e os irracionais não. Enquanto os números racionais tem um padrão como as dízimas periódicas os irracionais são desprovidos de padrão. Os números irracionais formam espaços entre os padrões.

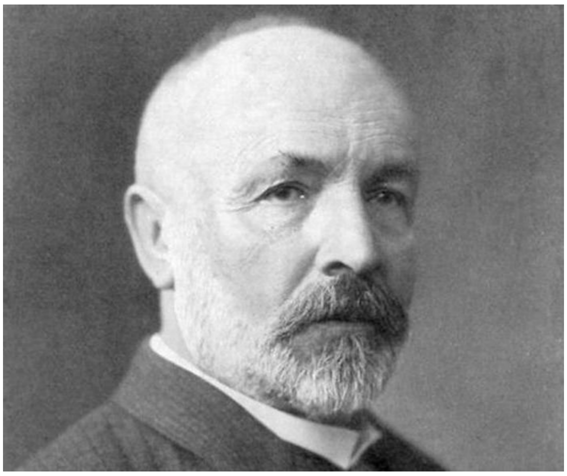
Um número irracional é um número real que não pode ser obtido pela divisão de dois números inteiros, ou seja, são números reais mas não racionais.

Exemplo: Podemos escrever $\frac{3}{7} = 0,428571428571428571...(\frac{3}{7} \in \mathbb{Q})$ e por outro lado $\sqrt{2} = 1,414213562373095...$ e observe que $\sqrt{2}$ não pode ser escrito como quociente de dois inteiros, logo é irracional.

1.5 Conjunto dos Números Reais ($\mathbb{R}$)

O matemático Georg Cantor estudou os conjuntos infinitos e se era possível contá-los. Ele descobriu que os conjuntos dos números naturais, inteiros e racionais são enumeráveis (ou contáveis), pois era possível estabelecer uma bijeção entre estes conjuntos e o conjunto dos números naturais. Porém o conjunto dos números irracionais não é enumerável (incontável). A união dos conjuntos dos números racionais e dos irracionais formam o conjunto dos Números Reais, representado por $\mathbb{R}$, que não é enumerável. Notação: $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$

Os números Reais podem ser classificados em Algébricos e Transcendentes.



Georg Cantor - FONTE: Nextews [5]

Definição 1.1. Dizemos que um número é algébrico se o mesmo é solução de uma equação polinomial com coeficientes inteiros. Caso contrário ele é dito transcendente.

Deste fato já podemos concluir que todo número racional, é algébrico pois é solução da equação polinomial de coeficientes inteiros $qx - p = 0$. Além disso, alguns irracionais também são algébricos como por exemplo $\sqrt{2}$ que é solução da equação x^2 - 2 = 0. Existem porém alguns números irracionais que não são solução de nenhuma equação polinomial com coefientes inteiros. É o caso do π, do e e dos números de Liouville. Estes são chamados números transcendentes. Aliás, o matemático francês Joseph Liouville foi o

[5] Disponível em: <http://nextews.com/images/73/4f/734f97a87e390ecf.jpg> acesso Abril 2018

autor da primeira demonstração da existência de números transcendentes estabelecendo um critério para que um número seja transcendente.

Este resultado permitiu a construção da famosa constante de Liouville, qual seja: 0,110001000000000000000001...

Joseph Liouville - FONTE: PINTEREST [6]

Será explorado mais sobre os números algébricos e transcendentais no próximo capítulo.

[6]Disponível em: <https://br.pinterest.com/pin/608126755908312892/?lp=true> acesso MAIO 2018

Capítulo 2

Números Algébricos e Transcendentais

Neste capítulo vamos abranger os números algébricos e transcendentes, como complemento de estudo desse trabalho, apresentando exemplos e propriedades desses números.

Como observamos no capítulo anterior os números Reais podem ser classificados em Algébricos e Transcendentes.

2.1 Números Algébricos

Definição 2.1. Qualquer solução real de uma equação polinomial da forma

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$$

onde $n \in \mathbb{N}, a_i \in \mathbb{Z}$ para todo $i = 1, 2, \ldots, n$ é chamado número algébrico. O conjunto destes números será denotado por $\overline{\mathbb{Q}}$.

Exemplo: Todo número racional é algébrico, como já citado anteriormente, todo número da forma $\dfrac{p}{q}$ com $p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{Z}^*$ é raiz do polinômio $qx - p$. Entretanto, nem todo número algébrico é racional, já que $\sqrt{2}$ é algébrico e não é racional.

Exemplo: $\sqrt{2} + \sqrt[3]{3}$ é um número algébrico pois é solução da equação $x^6 - 6x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 36x + 1 = 0$.

2.2 Números Transcendentes

Definição 2.2. Os números que não são algébricos são chamados transcendentes e o conjunto destes números será denotado por $\mathbb{T}$. Observe que, por definição, o conjunto $\mathbb{T}$ é o complementar do conjunto $\overline{\mathbb{Q}}$, também denotado por $\mathbb{T} = \overline{\mathbb{Q}}^c$.

Exemplo: São transcendentes os números π, e (base do logaritmo neperiano), os Números de Liouville.

2.3 Conjunto enumerável

Definição 2.3. Um conjunto A é dito enumerável se A é finito ou se existe uma bijeção $f : \mathbb{N} \to A$.

Exemplo: Os conjuntos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ são enumeráveis.

Teorema 2.1. As seguintes afirmações são verdadeiras:

1. O conjunto dos números reais, $\mathbb{R}$, é não enumerável.

2. A união enumerável de conjuntos enumeráveis é enumerável.

3. Se o conjunto A é enumerável então $A^n = A \times A \times \ldots \times A$ é enumerável.

As demonstrações do teorema 2.1 se encontram em [7].

Teorema 2.2. O conjunto
$\mathbb{Z}[x] = \{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 | n \in \mathbb{N}, a_n \neq 0, a_i \in \mathbb{Z}\ \forall i = 1, 2, 3, \ldots, n\}$
é enumerável.

Demonstração:

Como $\mathbb{Z}$ é enumerável é fácil ver que $\mathbb{Z}^*$ também é enumerável e pelo Teorema 3.1 segue que $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \ldots \times \mathbb{Z}^*$ é enumerável. Considere a função

$$f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \ldots \times \mathbb{Z}^* \to \mathbb{Z}[x]$$
$$(a_0, a_1, a_2, ..., a_n) \mapsto a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0.$$

Note que f é obviamente bijetora, já que admite inversa igual a

$f^{-1}(a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0) = (a_0, a_1, a_2, ..., a_n)$ donde podemos concluir que $\mathbb{Z}[x]$ é enumerável.

Sabemos que um polinômio não nulo, de grau n e com coeficientes em um domínio de integridade [1] possui no máximo n raízes nesse domínio. Logo, dado um polinômio não nulo $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ em que $a_i \in \mathbb{Z}$ para todo $i = 1, 2, 3, \ldots, n$ temos que o conjunto

$$Rp = \{k \in \mathbb{R} \mid p(k) = 0\}$$

é finito e, portanto, enumerável.

Teorema 2.3. $\overline{\mathbb{Q}}$ é enumerável.

Demonstração: Observe que $\overline{\mathbb{Q}}$ é uma união enumerável de conjuntos enumeráveis e assim pelo teorema (2.2) segue que o conjunto dos números algébricos é enumerável.

Com os resultados acima, já pode-se concluir que os números transcendentes são muitos. Temos que $\mathbb{R} = \overline{\mathbb{Q}} \cup \mathbb{T}$ e sabemos que $\mathbb{R}$ é não enumerável. Logo, $\mathbb{T}$ é não enumerável pois senão teríamos que $\mathbb{R}$ é a união enumerável de conjuntos enumeráveis, o que implicaria que $\mathbb{R}$ é enumerável o que é um absurdo.

Com este fato podemos concluir também que existem números transcendentes, pois, se $\mathbb{T} = \emptyset$ teríamos novamente um absurdo de $\mathbb{R} = \overline{\mathbb{Q}}$ ser enumerável. E, mais do que

[1]Domínio de Integridade é um anel comutativo com identidade sem divisores de zero.

isso, concluí-se que existem mais números transcendentes do que algébricos, no sentido de que os algébricos são contáveis e os transcendentes não.

Capítulo 3

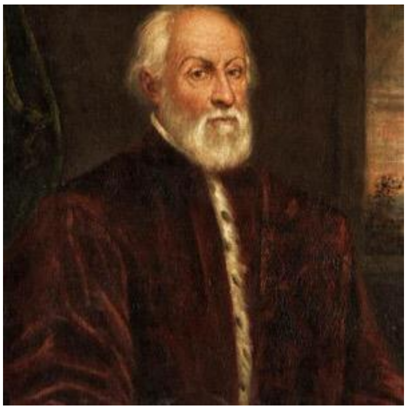
Contexto Histórico

A origem das frações contínuas é um grande dilema no seu aspecto histórico, pois se tem conhecimento dessas frações por toda história da Matemática, conforme Beskin [1] e Andrade e Bracciali [3]. O algoritmo da divisão de Euclides (325 a.C. - 265 a.C.) que tem por objetivo o cálculo do Máximo Divisor Comum (m.d.c.), é utilizado para obtenção de uma fração contínua de certo número racional, basta aplicá-lo sucessivamente numa divisão de inteiros. Não se sabe se Euclides ou seus antecessores utilizaram este algoritmo para estudo das frações contínuas, porém significou o início do seu progresso.

Aryabhata - FONTE: PRABOOK [1]

Aos anos que se seguiram o estudo das frações contínuas não obteve evoluções significativas, pois foi limitado a exemplos específicos. O matemático indiano Aryabhata (476 d.C. - 550 d.C.) utilizou-as para resolver equações lineares diofantinas, mas não desenvolveu um método genérico, apenas utilizou as frações contínuas para alguns exemplos específicos. No decorrer dos anos é possível encontrar sinais de frações contínuas na escrita matemática grega e árabe, porém ainda de uso apenas específico.

[1]Disponível em: <https://prabook.com/web/aryabhata.-/727126/> acesso MAIO 2018



Rafael Bombelli - FONTE: ALCHETRON [2]

As frações contínuas voltaram a ser tema de estudo na Europa do século XVI, quando os cientistas bolonheses Rafael Bombelli (1526 d.C. - 1572 d.C.) e Pietro Antonio Cataldi (1548 d.C. - 1626 d.C.) fizeram também suas contribuições neste campo, apesar de fornecerem apenas mais exemplos. Bombelli demonstrou uma aproximação da raiz quadrada de 13 utilizando uma fração contínua dada por $\sqrt{13} \approx 3 + \cfrac{4}{6 + \cfrac{4}{6}} = \frac{18}{5}$.

Cataldi, em 1613, obteve a aproximação para $\sqrt{18}$, ele é considerado por muitos o descobridor das frações contínuas. Sua aproximação ficou da seguinte maneira $\sqrt{18} \approx 4 + \cfrac{2}{8 - \cfrac{}{2}}$. Mas assim como Bombelli, não prosseguiu os estudos.

Pietro Antonio Cataldi - FONTE: AUTORI [3]

[2]Disponível em: <https://alchetron.com/Rafael-Bombellic/> acesso MAIO 2018
[3]Disponível em: <http://mathematica.sns.it/autori/1366/> acesso MAIO 2018

John Wallis - FONTE: INDIA TODAY [4]

Johannis Wallis S. T. D.
Geometriæ Professoris SAVILIANI,
in Celeberrima Academia OXONIENSI;
OPERA MATHEMATICA.
Volumen Primum.
OXONIÆ,
E THEATRO SHELDONIANO MDCXCV.

Livro Opera Mathematica - FONTE: MATHEMATICAL ASSOCIATION OF AMERICAN [5]

Em seu livro *"Opera Mathematica" (1695), Wallis (1616 d.C. - 1703 d.C.) utilizou o termo* ("fração contínua") pela primeira vez e colocou alguns dos seus fundamentos básicos, como por exemplo, o cálculo do n-ésimo convergente, descobrindo algumas de suas propriedades.

[4]Disponível em: <https://www.indiatoday.in/education-today/gk-current-affairs/story/know-about-john-wallis-the-designer-of-infinity-symbol-1394707-2018-11-23> acesso Julho 2018

[5]Disponível em: <https://www.maa.org/press/periodicals/convergence/mathematical-treasure-collected-works-of-john-wallis> acesso Julho 2018

Willian Brouncker - FONTE: THE PEERAGE [6]

Realizações matemáticas de Brouncker inclui trabalhos sobre frações contínuas e logaritmos através de cálculo por séries infinitas. Em 1655, ele forneceu uma expansão na forma de fração contínua do número real $\frac{4}{\pi}$.

$$\frac{4}{\pi} = 1 + \cfrac{1^2}{2 + \cfrac{3^2}{2 + \cfrac{5^2}{2 + \cfrac{9^2}{2 + \dots}}}} \tag{3.1}$$

Christian Huygens - FONTE: ESCRITAS [7]

O matemático e astrônomo holandês Christian Huygens (1629 d.C. - 1695 d.C.) foi o primeiro a mostrar uma aplicação prática de frações contínuas. Escreveu um artigo explicando como usar os convergentes de uma fração contínua para encontrar as melhores aproximações racionais para as relações entre as engrenagens. Essas aproximações permitiram-lhe escolher as engrenagens com o número correto de dentes.

[6]Disponível em: <http://www.thepeerage.com/p17980.htm> acesso Julho 2018
[7]Disponível em: <https://www.escritas.org/pt/bio/christiaan-huygens> acesso Setembro 2018

Leonard Euler - FONTE: GRUPO ESCOLAR [8]

Em primeiro texto abrangente em que explicava as propriedades de frações contínuas, Euler (1707 d.C. - 1783 d.C.) demonstrou que os racionais são escritos como frações contínuas finitas e provou que a representação dos irracionais é na forma de fração contínua infinita. Uma constante matemática estudada nesse contexto é o número e. É interessante saber que o número e, definido por

$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$, cujo valor aproximado é 2,718281..., se escreve como $e = |2; 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6...|$.

[8] Disponível em: <https://www.grupoescolar.com/a/b/6B96E.jpg> acesso Setembro 2018

Johann Heinrich Lambert - FONTE: REVOLVY [9]

Lambert (1728 d.C. - 1787 d.C.) forneceu a primeira demonstração de que o número π é irracional, usando frações contínuas para calcular $tan(x)$ através da relação

$$tg(x) = \cfrac{1}{\cfrac{1}{x} - \cfrac{1}{\cfrac{3}{x} - \cfrac{1}{\cfrac{5}{x} - \dots}}}$$

Lambert usou essa expressão para concluir que se x é um número racional não-nulo, então $tan(x)$ não pode ser um número racional. Sendo assim, como $tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$, então π não pode ser racional.

[9]Disponível em: <https://www.revolvy.com/page/Johann-Heinrich-Lambert> acesso Setembro 2018

Capítulo 4

O Algoritmo de Euclides

Euclides - FONTE: EBIOGRAFIA [1]

4.1 Elementos de Euclides

Euclides foi um matemático que teve sua carreira na cidade grega de Alexandria, embora não possamos afirmar com precisão a cidade de seu nascimento, muito menos a época em que viveu. Segundo alguns historiadores, Euclides foi um dos grandes professores da famosa escola de matemática de Alexandria, conhecida como "Museu". Ele é autor de algumas publicações sobre matemática, música, astronomia e tantas outras áreas do conhecimento, dentre as quais, a geometria com destaque para Os Elementos,

[1] Disponível em: <https://www.ebiografia.com/euclides/> acesso Maio 2018

uma coleção formada por treze livros, que datam aproximadamente do ano 300a.C., trazem resultados, organizados sistematicamente, muitos atribuídos a outros matemáticos, alguns anteriores a Euclides.
Ao contrário do que muitos pensam, Os Elementos não tratam apenas de geometria. Em suas 465 proposições figuram textos sobre teoria dos números e álgebra elementar. Os treze volumes desta publicação estão divididos da seguinte maneira: Livros I-VI Geometria plana; Livros VII-IX Aritmética e Livros XI-XIII Geometria espacial.

A grande inovação feita por Euclides, nos Elementos, é a adoção do método axiomático-dedutivo, no qual, partindo de alguns conceitos primitivos, aceitos como triviais ou intuitivos, demonstram-se consequências chamadas de teoremas ou proposições.
No início do livro VII, Euclides expõe o processo conhecido hoje, como Algoritmo Euclidiano da divisão, bem como o processo para encontrar o Máximo Divisor Comum de dois ou mais números inteiros. Tais procedimentos servem de base para outros métodos como a técnica usada para resolver uma Equação Diofantina Linear.

4.2 O Algoritmo da Divisão

O Algoritmo é uma ferramenta no cálculo do m.d.c de dois números inteiros, onde o maior dos números é reduzido, a partir de sucessivas divisões, até o resto convergir a zero.

Definição 4.1. *Dados $x, y \in \mathbb{Z}$, não nulos e dizemos que $d \in \mathbb{Z}_+^*$, é um divisor comum de x e y se $d|x$ e $d|y$.*

$$\begin{gathered}
x = y.a_0 + r_0,\ (0 < r_0 < y)\\
y = r_0.a_1 + r_1,\ (0 < r_1 < r_0)\\
r_0 = r_1.a_2 + r_2,\ (0 < r_2 < r_1)\\
r_{n-3} = r_{n-2}.a_{n-1} + r_{n-1},\ (0 < r_{n-1} < r_{n-2})\\
r_{n-2} = r_{n-1}.a_n
\end{gathered} \tag{4.1}$$

Segue, que se $r_i = 0$ o processo do algoritmo chegara ao fim, seja na 1^a equação ou após um certo número de passos, e r_{n-1} será o m.d.c dos números x e y.

Exemplo: Sejam $x = 76$ e $y = 31$, calcule m.d.c (x, y), utilizando o algoritmo de Euclides

$76 = 31.2 + 14$

$31 = 14.2 + 3$

$14 = 3.4 + 2$

$3 = 2.1 + 1$

$2 = 1.2$

Logo o m.d.c (76, 31) = 1.

As igualdades em (4.1) podem ser escritas da seguinte forma:

$$\frac{x}{y} = a_0 + \frac{r_0}{y} \tag{4.2}$$

$$\frac{y}{r_0} = a_1 + \frac{r_1}{r_0} \tag{4.3}$$

$$\frac{r_0}{r_1} = a_2 + \frac{r_2}{r_1} \tag{4.4}$$

$$\frac{r_{n-3}}{r_{n-2}} = a_{n-1} + \frac{r_{n-1}}{r_{n-2}} \tag{4.5}$$

$$\frac{r_{n-2}}{r_{n-1}} = a_n \tag{4.6}$$

Cada igualdade (exceto a última) representa a soma de um número inteiro com uma fração própria. Fazendo as substituições necessárias, temos:

De (2.3) em (2.2) obtemos:

$$\frac{x}{y} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{r_1}{r_0}} \tag{4.7}$$

De (2.4) em (2.5) obtemos: $\dfrac{x}{y} = a_0 + \dfrac{1}{a_1 + \dfrac{1}{a_2 + \dfrac{r_2}{r_1}}}$ e assim sucessivamente.

Continuando neste processo obteremos o desenvolvimento de $\dfrac{x}{y}$ sob a forma de uma fração contínua simples.

Capítulo 5

Frações Contínuas

Definição 5.1. *A fração contínua simples é uma expressão da forma*

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ldots + \cfrac{1}{a_n}}}} \quad \textit{Com } a_i \in \mathbb{Z} \textit{ e } a_i, \ldots, a_n \geq 1.$$

Podemos representar simbolicamente uma fração contínua dos seguintes modos:

Modo 1 $|a_0; a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n|$;

Modo 2 $[a_0; a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n]$;

Modo 3 $(a_0; a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n)$;

Modo 4 $a_0; a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$.

Neste trabalho será utilizado a notação do **Modo 1**.

Assim $|a_0; a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n| = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ldots + \cfrac{1}{a_n}}}}$

Não havendo a parte inteira, ou seja, $a_0 = 0$, a fração contínua simples deverá ser escrita da seguinte forma: $a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\dots + \cfrac{1}{a_n}}}$, entretanto a sua simbologia poderá ser representada: $|0; a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n|$.

O número a_0 que representa parte inteira da fração contínua simples é chamado de primeiro quociente incompleto; $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n$ são os demais quocientes incompletos, a cada um dos quais corresponde uma ordem definida. As frações: $\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \frac{1}{a_3}, \dots, \frac{1}{a_n}$ são denominadas frações integrantes. Os denominadores das frações integrantes são os quocientes incompletos, como dito anteriormente, e os numeradores são iguais à unidade.

Definição 5.2. *As expressões abaixo são chamadas quocientes completos*

$$a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c\dots}}, \quad b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{a\dots}}, \quad c + \cfrac{1}{d + \cfrac{1}{e\dots}}, \quad d + \cfrac{1}{e + \cfrac{1}{f\dots}}$$

Definição 5.3. *As expressões abaixo são denominadas reduzidas ou convergentes.*

$$a_0, \quad a_0 + \frac{1}{a_1}, \quad a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2}}, \quad a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3}}}$$

5.1 Frações Reduzidas

As reduzidas representam os valores aproximados das frações contínuas, quanto maior for a sua ordem mais aproximada do valor ela é. Quando a fração contínua é limitada a última reduzida representa o seu valor exato, quando é ilimitada, não há última reduzida e o valor da fração contínua só poderá ser calculado aproximadamente, mas com aproximação desejada, como em [5].

A primeira, a terceira, a quinta etc. reduzidas são denominadas reduzidas de ordem ímpares. A segunda, a quarta, a sexta etc. são reduzidas de ordem pares.

A primeira reduzida é sempre constituída pela parte inteira da fração contínua, de modo que, quando a fração contínua não tem parte inteira, a primeira reduzida é zero e costuma-se escrever sob a forma: $\frac{0}{1}$.

A representação simbólica das frações contínuas pode ser aplicada reduzidas, assim

$|a_0|$ é a primeira reduzida, $|a_0, a_1|$ é a segunda reduzida e $|a_0, a_1, a_2|$ é a terceira, etc.

5.1.1 Lei de Formação das Reduzidas

Seja a fração contínua $Z = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ldots + \cfrac{1}{a_n}}}}$

Onde $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_n, \ldots$ representam os quocientes incompletos, cuja ordem é designada pelo índice.

As reduzidas a calcular são $z_1 = a_1, z_2 = a_1 + \dfrac{1}{a_2}, z_3 = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3}}, \ldots$ cujas ordens são designadas pelos índices pertencentes a Z.

Observemos que, para passar da reduzida de primeira ordem para a segunda, basta substituir a_1 por $a_1 + \dfrac{1}{a_2}$; para passar da segunda reduzida para a terceira, basta substituir a_2 por $a_2 + \dfrac{1}{a_3}$; para passar da terceira reduzida para a quarta, basta substituir a_3 por $a_3 + \dfrac{1}{a_4}$; e assim por diante.

Definição 5.4. *Sejam $p_n \in \mathbb{Z}, q_n \in \mathbb{N}^*$ primos entre si tais que $\dfrac{p_n}{q_n} = |a_0; a_1, a_2, ..., a_n|, n > 0$. A fração $\dfrac{p_n}{q_n}$ é chamada n-ésima reduzida ou convergente da fração contínua de Z.*

Teorema 5.1. [Formação das reduzidas] Dada uma sequência (finita ou infinita) $a_0, a_1, a_2, \ldots \in \mathbb{R}$ tal que $a_k > 0$, para todo $k \geq 1$, definimos sequências (x_m) e (y_m) por:

(i) $x_0 = a_0, y_0 = 1, x_1 = a_0 \cdot a_1 + 1, y_1 = a_1,$

(ii) $x_{m+2} = a_{m+2}x_{m+1} + x_m, y_{m+2} = a_{m+2}y_{m+1} + y_m, \forall m \geq 0.$

Temos então

$$|a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n| = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ldots + \cfrac{1}{a_n}}}} = \frac{x_n}{y_n} \tag{5.1}$$

Temos também,

$$x_{n+1}.y_n - x_n.y_{n+1} = (-1)^n, \forall n \geq 0 \tag{5.2}$$

Demonstração de 5.1: A prova será por indução em n.

Para n = 0 temos $|a_0| = a_0 = \frac{a_0}{1} = \frac{x_0}{y_0}$.

Para n = 1, temos $|a_0; a_1| = a_0 + \frac{1}{a_1} = \frac{a_0 a_1 + 1}{a_1} = \frac{x_1}{y_1}$ e,

Para n = 2, temos $|a_0; a_1; a_2|$

$$\begin{aligned}
&= a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2}} \\
&= a_0 + \frac{a_2}{a_1 a_2 + 1} \\
&= \frac{a_0 a_1 a_2 + a_0 + a_2}{a_1 a_2 + 1} \\
&= \frac{a_2(a_0 a_1 + 1) + a_0}{a_1 a_2 + 1} \\
&= \frac{a_2 x_1 + x_0}{a_2 y_1 + y_0} \\
&= \frac{x_2}{y_2}
\end{aligned}$$

Suponha que a afirmação seja válida para n. Para n+1 em lugar de n, temos:

$$[a_0; a_1, a_2, a_3, ..., a_n, a_{n+1}] = |a_0; a_1, a_2, a_3, ..., a_n + \frac{1}{a_{n+1}}|$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(a_n + \frac{1}{a_{n+1}})x_{n-1} + x_{n-2}}{(a_n + \frac{1}{a_{n+1}})y_{n-1} + y_{n-2}} \\
&= \frac{a_{n+1}(a_n x_{n-1} + x_{n-2}) + x_{n-1}}{a_{n+1}(a_n y_{n-1} + y_{n-2}) + y_{n-1}} \\
&= \frac{a_{n+1} x_n + x_{n-1}}{a_{n+1} y_n + y_{n-1}} \\
&= \frac{x_{n+1}}{y_{n+1}}
\end{aligned}$$

Demonstração de 5.2: Vamos agora mostrar, por indução, a segunda afirmação. Temos:

$$x_{n+1}.y_n - x_n.y_{n+1} = (-1)^n, \forall n \geq 0$$

Se $n = 0$ temos que: $x_1 y_0 - x_0 y_1 = a_0 a_1 + 1 - a_0 a_1 = 1 = (-1)^0$

Agora, se $x_{n+1} y_n - x_n y_{n+1} = (-1)^n$ para algum valor de n, então:

$$\begin{aligned} & x_{n+2} y_{n+1} - x_{n+1} y_{n+2} \\ &= (a_{n+2} x_{n+1} + x_n) y_{n+1} - (a_{n+2} y_{n+1} + y_n) x_{n+1} \\ &= -(x_{n+1} y_n - x_n y_{n+1}) \\ &= -(-1)^n = (-1)^{n+1} \end{aligned}$$

Portanto, a igualdade é verdadeira para todo $n \geq 0$.

Para as próximas soluções $z = |a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n|$ será um número real e $\left(\dfrac{x_n}{y_n}\right)_n \in \mathbb{N}$ dada por $\dfrac{x_n}{y_n} = |a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n|$ será a sequência de reduzidas da fração contínua de Z

Corolário 5.1. *As sequências (x_n) e (y_n) satisfazem as seguintes recorrências:*

$x_{n+2} = a_{n+2}.x_{n+1} + x_n$ *e* $y_{n+2} = a_{n+2}.y_{n+1} + y_n$

$\forall n \geq 0,\ x_0 = a_0,\ x_1 = a_0 a_1 + 1,\ y_0 = 1$ *e* $y_1 = a_1$

Temos ainda, $x_{n+1}.y_n - x_n.y_{n+1} = (-1)^n \forall n \geq 0$

Demonstração: As sequências (x_n) e (y_n) definidas acima satisfazem, pelo **Teorema 5.1** anterior, as igualdades:

$\dfrac{x_n}{y_n} = |a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n|$ e $x_{n+1}.y_n - x_n.y_{n+1} = (-1)^n \forall n \geq 0$

Temos que: $x_{n+1}.y_n - x_n.y_{n+1} = (-1)^n \forall n \in \mathbb{N}$, então (x_n) (y_n) dados pela recorrência sobredita são primos entre si. Da recorrência conclui-se que $y_n > 0,\ \forall n \geq 0$.

Logo $\left(\dfrac{x_n}{y_n}\right)$, com $n \in \mathbb{N}$, é a sequência reduzida da fração contínua em Z.

Corolário 5.2. *Tem-se que* $\forall\ n \in \mathbb{N}$

$$z = \frac{\theta_n x_{n-1} + x_{n-2}}{\theta_n y_{n-1} + y_{n-2}} \ \text{ e } \theta_n = \frac{x_{n-2} - y_{n-2}.z}{y_{n-1}.z - y_{n-1}}$$

Demonstração: A primeira igualdade segue do **Teorema 5.1** , já que: $z = |a_0, a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, \theta_n|$ e a segunda igualdade é consequência direta da primeira.

Teorema 5.2. *Tem-se*

$$z - \frac{x_n}{y_n} = \frac{(-1)^n}{\theta_{n+1} + \dfrac{\alpha_{n+1}}{(y_n)^2}}$$

$$\alpha_{n+1} = \frac{y_{n-1}}{y_n} = |0; a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_1|$$

Particularmente

$$\frac{1}{(a_{n+2})(y_n)^2} < |z - \frac{x_n}{y_n}| = \frac{1}{(\theta_{n+1} + \alpha_{n+1})(y_n)^2} < \frac{1}{a_{n+1}(y_n)^2}$$

Demonstração: pelo **Corolário 5.2**, vem

$$\begin{aligned} z - \frac{x_n}{y_n} &= \frac{\theta_{n+1}x_n + x_{n-1}}{\theta_{n+1}y_n + y_{n-1}} - \frac{x_n}{y_n} = \frac{x_{n-1}y_n - x_n y_{n-1}}{(\theta_{n+1}y_n + y_{n-1})y_n} \\ = -\frac{(x_n y_{n-1} - x_{n-1}y_n)}{(\theta_{n+1}y_n + y_{n-1})y_n} &= \frac{-(-1)^{n-1}}{(\theta_{n+1}y_n + y_{n-1})y_n} = \frac{(-1)^n}{(\theta_{n+1}y_n + y_{n-1})y_n} \\ &= \frac{(-1)^n}{(\theta_{n+1} + \dfrac{y_{n-1}}{y_n})(y_n)^2} \\ &= \frac{(-1)^n}{(\theta_{n+1} + \alpha_{n+1})(y_n)^2} \end{aligned}$$

No caso particular, $|z - \dfrac{x_n}{y_n}| = \dfrac{1}{(\theta_{n+1} + \alpha_{n+1})(y_n)^2}$

e, como $|\theta_{n+1}| = a_{n+1}$ e $0 < \alpha_{n+1} < 1$, tem-se que $a_{n+1} < \theta_{n+1} + \alpha_{n+1} < a_{n+1} + 2$, resultando na última assertiva.

A expressão de α_{n+1} como fração contínua:

$$\frac{y_{n-1}}{y_n} = \frac{y_{n-1}}{a_n.y_{n-1} + y_{n-2}} \Rightarrow \frac{y_{n-1}}{y_n} = \frac{1}{a_n + \dfrac{y_{n-2}}{y_{n-1}}}$$

Observação: Como o $\lim_{n\to\infty} y_n = +\infty$ (já que y_n é estritamente crescente), do **Teorema 5.2**:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = z,$$

Isso possibilita resolver z a partir de $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots,$ e de uma lógica à igualdade $z = |a_0, a_1, a_2, a_3, \dots|$ quando a fração contínua de z é infinita (z é irracional).

Teorema 5.3. $\forall\ k \geq 0$, *temos*

$$\frac{x_{2k}}{y_{2k}} \leq \frac{x_{2k+2}}{y_{2k+2}} \leq z \leq \frac{x_{2k+3}}{y_{2k+3}} \leq \frac{x_{2k+1}}{y_{2k+1}}$$

Demonstração: De uma forma geral $\forall\ n \geq 0$, temos que:

$$\begin{aligned}
&= \frac{x_{n+2}}{y_{n+2}} - \frac{x_n}{y_n} = \frac{a_{n+2}x_{n+1} + x_n}{a_{n+2}y_{n+1} + y_n} - \frac{x_n}{y_n} \\
&= \frac{a_{n+2}x_{n+1}y_n + x_n y_n - x_n a_{n+2} y_{n+1} - x_n y_n}{y_n(a_{n+2}y_{n+1} + y_n)} \\
&= \frac{a_{n+2}(x_{n+1}y_n - x_n y_{n+1})}{y_n(a_{n+2}y_{n+1} + y_n)}, \text{ do } \textbf{Teorema 5.1} \text{ vem,} \\
&= \frac{(a_{n+2})(-1)^n}{y_{n+2} \cdot y_n}, \text{ se } n \begin{cases} \textit{par} \to \textit{positivo} \\ \text{ímpar} \to \textit{negativo} \end{cases}
\end{aligned}$$

Para $\forall n \geq 0$, temos:

$$z - \frac{x_n}{y_n} = \frac{(-1)^n}{(\theta_{n+1}y_n + y_{n-1})y_n} > 0 \text{ se n for par;}$$
$$z - \frac{x_n}{y_n} = \frac{(-1)^n}{(\theta_{n+1}y_n + y_{n-1})y_n} < 0 \text{ se n for ímpar.}$$

Na prática, emprega-se o seguinte tipo de cálculo:

Na primeira linha estão os quocientes incompletos e na segunda escrevemos as duas primeiras reduzidas que convencionamos ser $\frac{1}{0}$ e $\frac{a_1}{1}$. Formamos as outras reduzidas multiplicando os dois termos da reduzida precedente pelo quociente incompleto ao qual se chegou e somando resultado termo a termo com a reduzida ante precedente. Empregamos o algoritmo abaixo:

	a_1	a_2	a_3	...
$\frac{1}{0}$	$\frac{a_1}{1}$	$\frac{(a_1a_2+1)}{(1a_2+0)}$	$\frac{(a_1a_2+1)a_3+a_1}{(a_2a_3+1)}$	...

Teorema 5.4. *Tomando uma reduzida qualquer para o valor de uma fração contínua, comete-se um erro menor que a unidade dividida pelo quadrado do denominador da reduzida.*

Demonstração: Seja $\frac{x_n}{y_n}$ uma reduzida, tomada como valor aproximado, da fração contínua Z e $\frac{x_{n+1}}{y_{n+1}}$ a reduzida seguinte. O valor de Z da fração contínua está compreendido entre as duas reduzidas consecutivas $\frac{x_n}{y_n}$ e $\frac{x_{n+1}}{y_{n+1}}$, logo:

$$Z - \frac{x_n}{y_n} < \frac{x_{n+1}}{y_{n+1}} - \frac{x_n}{y_n}$$

Porém temos, $\frac{x_{n+1}}{y_{n+1}} - \frac{x_n}{y_n} = \frac{1}{y_n y_{n+1}}$, logo

$$Z - \frac{x_n}{y_n} < \frac{1}{y_n y_{n+1}}$$

Sendo $y_{n+1} > y_n$ será evidentemente $\frac{1}{y_n y_{n+1}} < \frac{1}{{y_n}^2}$ logo, com mais forte razão:

$$Z - \frac{x_n}{y_n} < \frac{1}{{y_n}^2} \tag{5.3}$$

A diferença de $Z - \frac{x_n}{y_n}$ representa, em valor absoluto, o erro que se comete tomando $\frac{x_n}{y_n}$ para o valor aproximado da fração contínua e a desigualdade 5.3 mostra que este erro é inferior a $\frac{1}{{y_n}^2}$

Exemplo: Desenvolver em fração contínua e formar as reduzidas da fração $\frac{907}{18564}$:

Solução:

Procurando o m.d.c entre (907,18564), teremos:

	0	20	2	7	5	2	1	3
907	18564	907	424	59	11	4	3	1
	424	59	11	4	3	1	0	

Então os divisores 0, 20, 2, 7, 5, 2, 1 e 3, deste m.d.c., ficam representados, em forma de fração contínua, assim: $|0; 20, 2, 7, 5, 2, 1, 3|$ Agora formaremos as reduzidas da fração $\frac{907}{18564}$;

	0	20	2	7	5	2	1	3
$\frac{1}{0}$	$\frac{0}{1}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{2}{41}$	$\frac{15}{307}$	$\frac{77}{1576}$	$\frac{169}{3459}$	$\frac{246}{5035}$	$\frac{907}{18564}$

Logo as reduzidas serão:

$\frac{0}{1}, \frac{1}{20}, \frac{2}{41}, \frac{15}{307}, \frac{77}{1576}, \frac{169}{3459}, \frac{246}{5035}, \frac{907}{18564}$

Exemplo: Transformar em fração ordinária a fração contínua $|1, 2, 1, 1, 1, 2, 1, 3|$

	1	2	1	1	1	2	1	3
$\frac{1}{0}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{7}{5}$	$\frac{11}{8}$	$\frac{29}{21}$	$\frac{40}{29}$	$\mathbf{\frac{149}{108}}$

Exemplo:Transformar em fração ordinária a fração contínua $|0, 3, 3, 4, 2, 3, 1, 1, 2|$

	0	3	3	4	2	3	1	1	2
$\frac{1}{0}$	$\frac{0}{1}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{13}{43}$	$\frac{29}{96}$	$\frac{100}{331}$	$\frac{129}{427}$	$\frac{229}{758}$	$\mathbf{\frac{587}{1943}}$

Exemplo: As frações $\frac{100}{313}$ e $\frac{23}{72}$ podem ser reduzidas consecutivas de uma fração contínua? E qual delas é a de ordem par?

Solução:

$$\frac{100}{313} - \frac{23}{72}$$

$$= \frac{72 \cdot 100 - 23 \cdot 313}{72 \cdot 313}$$

$$= \frac{7200 - 7199}{72 \cdot 313}$$

$$= \frac{1}{72 \cdot 313}$$

Podem ser reduzidas consecutivas, pois são frações irredutíveis e sua diferença é uma fração cujo numerador é a unidade.

Como as reduzidas de ordem par são maiores que as de ordem ímpar e a diferença obtida é positiva, $\frac{100}{313}$ é de ordem par.

Teorema 5.5. *Quando uma fração contínua é ilimitada, pode se formar uma outra reduzida que divirja da fração original por um número dado $\varepsilon > 0$.*

Seja $\frac{x_n}{y_n}$ a reduzida que difere da fração contínua Z de um número inferior a ε.
Em virtude da propriedade anterior, temos: $Z - \frac{x_n}{y_n} < \frac{1}{{y_n}^2}$ e logo das condições exigidas temos:

$$Z - \frac{x_n}{y_n} < \varepsilon$$

Para que esta segunda desigualdade seja satisfeita, sem prejudicar a primeira é necessário e suficiente que se tenha

$$\varepsilon \geq \frac{1}{{y_n}^2} \text{ ou } {y_n}^2 \geq \frac{1}{\varepsilon}$$

Donde tiramos

$$y_n \geq \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}, \text{ o que é sempre possível.}$$

Daí resulta que o denominador da reduzida deve ser igual ou maior que o inverso da raiz quadrada do número dado ε.
Obs.: Pelo teorema anterior, para calcular uma expressão, com uma aproximação dada

ε, isso é com um erro inferior a ε formam-se as reduzidas sucessivas até obter uma cujo denominador seja igual ou maior que o inverso da raiz de ε e adota-se essa reduzida para o valor da expressão.

Exemplo: As frações $\dfrac{1}{20}$ e $\dfrac{2}{41}$ podem ser reduzidas consecutivas de uma fração contínua? Qual o limite de erro que se comete tomando a primeira delas em lugar da própria fração contínua? Este erro será para menos ou para mais?

Solução:

$\dfrac{1}{20} - \dfrac{2}{41} = \dfrac{41-40}{20.41} = \dfrac{1}{820}$

O erro é para mais e inferior a $\dfrac{1}{820}$

Exemplo: Substituir a fração $\dfrac{260}{187}$ por outra mais simples, cometendo um erro inferior a 0,01.

Solução: A aproximação pedida é $\varepsilon = 0,01$, logo

$$\sqrt{\varepsilon} = 0,1$$
$$\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} = 10$$

O denominador da reduzida deverá ser igual ou superior a 10, então calculemos o m.d.c. (260,187)

	1	2	1	1	3	1	1	4
260	187	73	41	32	9	5	4	1
	41	32	9	5	4	1	0	

Então a fração $\dfrac{260}{187}$ poderia ser representada assim: $|1; 2, 1, 1, 3, 1, 1, 4|$ Agora formaremos as reduzidas da fração $\dfrac{260}{187}$;

	1	2	1	1	3	1	1	4
$\frac{1}{0}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{7}{5}$	$\frac{25}{18}$	...	...	$\frac{260}{187}$

Observe que a reduzida $\dfrac{25}{18}$ já nos deu o denominador desejado, ou seja, maior ou igual a 10, então não é necessário continuar a formar as reduzidas seguintes, logo

$\frac{260}{187} \cong \frac{25}{18} \approx 1,38$

5.2 Frações Contínuas Periódicas

Fração contínua periódica é aquela em que os quocientes incompletos se reproduzem sempre na mesma ordem e indefinidamente. O conjunto dos quocientes incompletos que se reproduzem constitui o período. Quando o período começa no primeiro quociente incompleto, a fração contínua é denominada periódica simples. Quando não começa no primeiro quociente incompleto, a fração contínua é denominada periódica mista ou composta. Os quocientes incompletos que não se reproduzem, isto é, que ficam antes do primeiro período, constitui a parte não periódica. As frações contínuas periódicas são geralmente representadas pelos quocientes incompletos que formam a parte não periódica seguidos dos que formam o primeiro período. Separam-se os quocientes consecutivos por vírgula e assinala-se o período colocando sobre cada quociente um ponto ou somente sobre os primeiro e último do período. Este conjunto pode ser colocado entre dois traços paralelos ou dentro de um parênteses, mas isso não é obrigatório.
Assim, os símbolos:

$$\dot{5}, \dot{2}, \dot{7}, \dot{1}$$
$$\dot{5}, 2, 7, \dot{1}$$
$$(\dot{5}, 2, 7, \dot{1})$$
$$|\dot{5}, 2, 7, \dot{1}|$$

Representam a fração contínua simples

$$5 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{5 + ...}}}}}}}}$$

E os símbolos:

$$6, \dot{3}, \dot{9}, \dot{4}$$

$$6, \dot{3}, 9, \dot{4}$$

$$(6, \dot{3}, 9, \dot{4})$$

$$|6, \dot{3}, 9, \dot{4}|$$

Representam a fração contínua mista ou composta

$$6+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{9+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{9+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{9+...}}}}}}}}$$

Capítulo 6

Situações Problemas

6.1 O Problema do Calendário

(Adaptado de [12]) Existem indícios que mesmo em eras pré-históricas, alguns homens já se preocupavam em marcar o tempo. Em um período mais recente, os Sumérios adotaram um Calendário bem parecido com o nosso, com um ano dividido em 12 meses de 30 dias, o dia em 12 períodos e cada um desses períodos em 30 partes. Já na Babilônia, havia um calendário com um ano de 12 meses lunares que se alternavam em 29 e 30 dias, num total de 354 dias. Os egípcios inicialmente fizeram um calendário baseado nos ciclos lunares, mas depois notaram que quando o Sol se aproximava da "Estrela do Cão" (Sirius), estava próximo de o Nilo inundar. Notaram que isso acontecia em ciclos de 365 dias. Com base nesse conhecimento eles fizeram um Calendário com um ano de 365 dias, possivelmente inaugurado em 4.236 a.C. Essa é a primeira data registrada na história. Segundo Teixeira e Khrushchev, na atualidade, existem aproximadamente 40 calendários em uso no mundo, que podem ser classificados em três tipos:

1. Solares: Baseados no movimento da Terra em torno do Sol; os meses não têm conexão com o movimento da Lua. Um exemplo desse tipo de calendário é o cristão.
2. Lunares: Baseados no movimento da Lua; o ano não tem conexão com o movimento da Terra em torno do Sol. O calendário islâmico é um exemplo desse tipo de calendário.
3. Lunisolares: Os anos estão relacionados com o movimento da Terra em torno do Sol

e os meses com o movimento da Lua em torno da Terra. O calendário hebreu, que é o mais antigo ainda existente, é um exemplo desse tipo.

Os principais calendários cristãos, ainda em uso são os calendários Juliano e o Gregoriano. O calendário Juliano foi proposto por Sosígenes, astrônomo de Alexandria, e introduzido por Júlio César em 45 a.C.. Foi usado pelas igrejas e países cristãos até o século XVI, quando começou a ser trocado pelo calendário Gregoriano. Ainda é usado por algumas Igrejas Ortodoxas, entre elas a Igreja Russa. Já o calendário Gregoriano foi proposto por Aloysius Lilius, astrônomo de Nápoles, e adotado pelo Papa Gregório XIII, seguindo instruções do Concílio de Trento (1545-1563). O decreto instituindo esse calendário foi publicado em 24 de fevereiro de 1582. Atualmente, a diferença entre esses dois calendários é de 13 dias, dado que foram suprimidos 10 dias do ano de 1582, e que os anos de 1700, 1800 e 1900, não foram bissextos no calendário Gregoriano. Devido às imprecisões desses calendários, em relação a real duração de um ano, o calendário Juliano se defasa de 1 dia a cada 128 anos, enquanto o calendário Gregoriano se defasa 1 dia a cada 3.320 anos. De fato, dado que a cada ano, ocorre uma defasagem de 11min 14seg, no Juliano, a cada 128 anos, teremos uma defasagem de um dia. Por meio de frações contínuas, daremos um tratamento matemático ao problema dos calendários. Como já observamos, a origem desse problema está relacionada ao fato da duração de um ano terrestre não ser um número inteiro de dias. Matematicamente, esse problema se resolve ao se aproximar esse tempo adicional por uma fração. Como veremos, o calendário Juliano aproxima esse número com sendo $\frac{1}{4}$. E dessa forma, a cada 4 anos, se faz necessário termos um ano bissexto. O método de frações contínuas fornece uma sequência de frações que rapidamente converge para o número em questão. Tais frações, longe de serem complicadas, possuem como principal característica o fato de terem denominadores não tão grandes. E isso acarreta que as soluções propostas por tal método possuem regras cíclicas, de períodos aplicáveis. O método de frações fornecerá o calendário Juliano como uma solução intermediária do problema, ou seja, uma solução com uma imprecisão. Além disso, as demais aproximações têm regras mais complexas. A solução proposta pela comissão de Gregório conseguiu uma regra, que mesmo perdendo em precisão, é bem simples de aplicação. Com precisão de segundos, um ano consiste de 365 dias, 5 horas, 48 minutos e 46 segundos, ou seja, consiste no intervalo de 365,242199 dias. Apresenta-se agora a solução por frações contínuas e também a solução decretada pelo Papa Gregório XIII para o problema do calendário. Tem-se que a parte decimal do ano (0,242199074) evidentemente, deve ser convertida em 1 dia (ano bissexto) num determinado período. Ao utilizar frações contínuas para resolver o problema obtém-se

$$\frac{5 \ \text{h} \ 48 \ \text{min} \ 46 \ \text{seg}}{1 \ \text{dia}}$$

$$\frac{20926 \ \text{seg}}{86400 \ \text{seg}}$$

$$\frac{10463 \ \text{seg}}{43200 \ \text{seg}}$$

$$\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{64}}}}}}$$

Observe que $\dfrac{10463}{43200} \approx 0{,}242199074$, esta fração contínua, simbolicamente representada por $|0; 4, 7, 1, 3, 5, 64|$, fornece aproximações para o número 0,242199074. E essas aproximações proporcionam diversas alternativas de correção do problema.

A primeira aproximação desse número é dada por $C_1 = |0; 4| = 0{,}25$

Esse convergente (C_1) consiste na aproximação dada pelo calendário Juliano, que toma um ano bissexto a cada 4 anos. Como se pode verificar no Calendário Juliano, em média, um ano possui 365 dias e 6 horas. E essa média difere de 11min e 14 segundos da real duração de um ano. Portanto, esse é o erro encontrado ao utilizar tal aproximação. Esta diferença pode até parecer pequena, mas, ao longo de séculos, não pode ser desprezada, pois a mesma produz este erro a cada 128 anos, um dia de avanço em relação ao ano real.

O próximo convergente é dado por $C_2 = |0; 4, 7| = \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{7}} = \frac{7}{29} \approx 0{,}24137931$

Assim, com essa aproximação, têm-se 7 anos bissextos a cada 29 anos. Contudo, seria uma regra de difícil aplicabilidade. Pode-se simplificá-la, multiplicando seu numerador e denominador por 4. Então, $C_2 = |0; 4, 7| = \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{7}} = \frac{7.4}{29.4} = \frac{28}{116}$, ou seja, a cada 116 anos têm-se somente 28 anos bissextos, ao invés dos 29 anos bissextos previstos pelo calendário Juliano. Se utilizar tal aproximação, deve-se excluir um dos 29 anos que são bissextos, e transformá-lo em um ano simples. A única complexidade dessa regra seria a obtenção dos múltiplos de 116. O erro ocasionado por essa aproximação seria de 1 minuto e 11 segundos a menos que a duração de 1 ano, pois, a fração $\frac{7}{29}$ de um dia, equivale a aproximadamente 20855 segundos, que é 71 segundos a menos do que deve ser.

Essa diferença de 20926 - 20855 = 71 segundos por ano gera a cada 1217 anos, o erro de um dia a menos no calendário em relação ao ano real.

A seguir, temos que $C_3 = |0; 4, 7, 1| = \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{1}}} = \frac{8}{33} \approx 0{,}2424242424...$ Essa aproximação é muito boa em termos de erro, pois a fração $\frac{8}{33}$ de um dia equivale a 20945 segundos, que é 19 segundos a mais do que o esperado. Isso ocasiona 1 dia a mais a cada 4.547 anos. Seriam 8 anos bissextos em cada conjunto de 33 anos, mas também, teríamos dificuldade com a elaboração de uma regra para sua aplicação. Podemos contornar tal problema, considerando que $C_3 = |0; 4, 7, 1| = \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{1}}} = \frac{8.4}{33.4} = \frac{32}{132}$, então, se aplicássemos tal regra, teríamos 32 anos bissextos a cada 132 anos, ao invés dos 33 anos bissextos do calendário Juliano. Da mesma forma do caso anterior, a principal dificuldade técnica seria a obtenção dos múltiplos de 132.

O próximo convergente $C_4 = |0; 4, 7, 1, 3| = \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3}}}} = \dfrac{31}{128} = 0{,}2421785$

é extremamente próxima do esperado, diferindo apenas de 1 segundo da duração média de 1 ano, que é de fato um erro muito pequeno. Assim, se utilizássemos tal regra, levaríamos 86400 anos para temos um dia de diferença entre o calendário e o ano real. E, a cada 128 anos, teríamos 31 anos bissextos, ao invés de 32, do calendário Juliano.

O quinto convergente é mais preciso, mas, devido ao tamanho do seu denominador, torna inviável seu uso. $C_5 = |0; 4, 7, 1, 3, 5| = \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{5}}}}} = \dfrac{163}{673} \approx 0{,}242199108.$

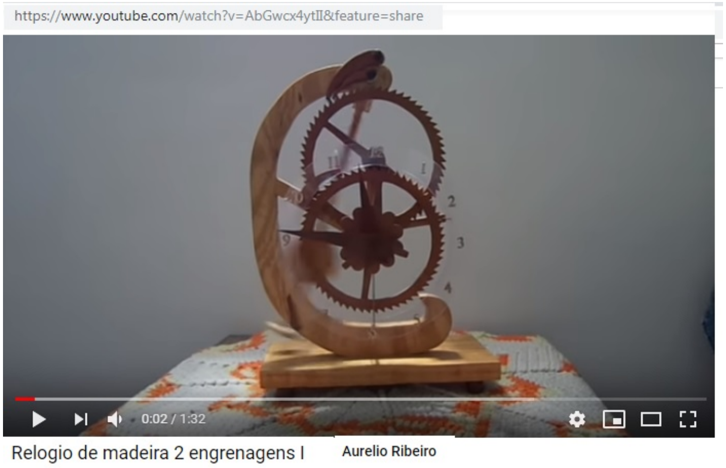
Mais uma vez, tomaremos outro representante para C_5, dado por $C_5 = |0; 4, 7, 1, 3, 5| = \dfrac{163.4}{673.4} = \dfrac{652}{2692}$.

Assim, se utilizássemos esse convergente, teríamos a cada 2692 anos, 652 anos bissextos, ao invés dos 673 previstos pelo calendário Juliano. Essa regra, além de difícil aplicabilidade, pois teria um ciclo de 2692 anos, traria o problema da escolha dos 21 anos que deveriam ser bissextos, mas seriam transformados em anos simples. Isso poderia ser resolvido, por exemplo, excluindo-se um ano bissexto, a cada 128 anos.

6.2 O Problema das Engrenagens do Relógio

Um fabricante de relógios precisa produzir dois tipos de rodas dentadas na razão, de números de dentes, de $\sqrt{2}$ por 1. É impraticável que estas rodas tenham mais que 20 dentes. Encontre algumas possibilidades para os números de rodas que irão aproximar a razão desejada, utilizando as aproximações dadas pelos convergentes consecutivos de uma fração contínua simples. (Adaptado de Sanches e Salomão [11]).

A Relação de transmissão, da coroa (engrenagem maior) para o pinhão (engrenagem



menor), pode ser representada por $\frac{x}{y} = \sqrt{2}$, onde x representa o número de dentes da coroa e y representa o número de dentes do pinhão, com x e y inteiros positivos. Para representar a raiz na forma de frações contínuas aritmeticamente, devemos escrever, sequencialmente, os convergentes, até se obter uma fração que responda a questão, ou seja, que respeite a condição de contorno dada pelo limite de 20 dentes, para a engrenagem maior (coroa).

1º convergente

$$C_0 = \sqrt{2} = 1,4142136 = \mathbf{1}$$

2º convergente

$$C_1 = \sqrt{2} = 1,4142136 = 1 + 0,4142136 = 1 + \cfrac{1}{\cfrac{1}{0,4142136}} = 1 + \frac{1}{2,4142136} \approx 1 + \frac{1}{2} = \mathbf{\frac{3}{2}}$$

3º convergente

$$C_2 = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2,4142136}} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + 0,4142136}}$$

$$= 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2,4142133}}} \approx 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}} = \mathbf{\frac{7}{5}}$$

4º convergente

$$C_3 = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2,4142133}}} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + 0,4142133}}}$$

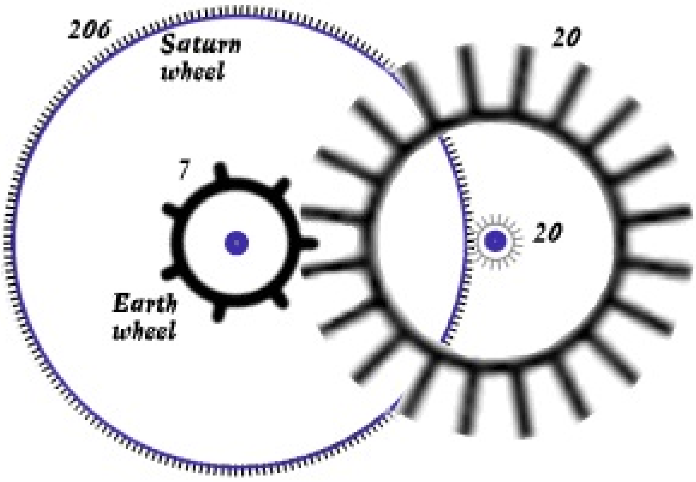
$$= 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2,41421151}}} \approx 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}}} = \mathbf{\frac{17}{12}}$$

O 4º convergente revela que o número de dentes da coroa seria 17 e o do pinhão 12, com aproximação dada por: $\frac{17}{12} = 1,4166667$, o que proporciona uma aproximação correta até a ordem das centenas, que para um par de engrenagens usuais é satisfatória.

6.3 Projetando um planetário

Christiaan Huygens (1629-1695), foi matemático, astrônomo, físico, probabilista e também era um grande horologista neerlandes. Ele estava construindo um modelo mecânico do sistema solar e queria projetar as relações de transmissão para produzir uma versão em escala adequada das órbitas planetárias. Assim, por exemplo, nos dias de Huygens, acreditava-se que o tempo necessário para que o planeta Saturno orbitasse o Sol é cerca de

$$\frac{77708431}{2640858} = 29,425448... = [29, 2, 2, 1, 5, 1, 4, \ldots]$$



O quarto convergente é $[29, 2, 2, 1] = \dfrac{206}{7}$, portanto, ele fez a engrenagem que regula o movimento do saturno com 206 dentes e o mecanismo de regulação do movimento da Terra com 7 dentes, como mostrado na figura 6.3.

Considerações Finais

As considerações tecidas neste texto revelam possibilidades de abordagem das Frações Contínuas Simples no Ensino Básico, considerando-a como uma oportunidade de atualização do currículo de Matemática. Ainda, este tópico possibilita a articulação entre os conjuntos dos números racionais e o conjunto dos números irracionais. Em relação às contribuições de ordem didática, o recurso à introdução das frações contínuas como tema mediador possibilita a exploração de diversas estratégias de abordagem na resolução de problemas envolvendo frações contínuas.

A história da matemática assume papel importante pois mostra como os matemáticos estudavam os problemas ao longo do tempo, e de que maneira a contribuição de cada um deles foi essencial para cada estágio da compreensão do conceito. O leitor pode tomar como base a progressão do assunto e perceber que uma teoria matemática atravessa séculos e, geralmente, muitas perguntas são respondidas apenas em um período bem mais avançado. Por exemplo, temos o caso do número irracional π, que já estava sendo estudado desde a antiguidade. Lambert (1728 d.C. - 1787 d.C.) forneceu a primeira demonstração de que o número π é irracional, usando as frações contínuas.

O calendário gregoriano é uma das aplicações bem discutidas dentro do assunto, e está diretamente ligada com a noção de tempo. Outra aplicabilidade das frações contínuas é das engrenagens do relógio, um assunto bem curioso, e por fim, qual seria o tempo necessário para que o planeta Saturno orbitasse o Sol.

O recurso à introdução das frações contínuas possibilita a exploração de diversas estratégias de abordagem na resolução de problemas como os citados acima, deste modo, a aritmética pode ser abordada concomitante com o uso da álgebra, favorecendo o desenvolvimento das habilidades pessoais dos alunos.

Referências Bibliográficas

[1] ANDRADE, E.X.L. e BRACCIALI, C.F. **Frações Contínuas**. ed. Plêiade, 2005.

[2] BERLINGHOFF, W. P.; GOUVEA, F.Q. **A Matemática Através Dos Tempos: Um Guia Facil E Pratico Para Professores E Entusiastas**. ed. Edgarg Blucher. Tradução de Elza F. Gomide e Helena Castro. São Paulo, 2012.

[3] BESKIN, N.M. **Frações Contínuas: Iniciação à Matemática**. ed. Mir Moscovo, 1987. Tradução de Pedro Lima.

[4] BOYER, C.B.; **História da Matemática**. ed. Edgarg Blucher. Tradução de Elza F. Gomide. São Paulo, 1974.

[5] FARIAS, S. **Curso de Álgebra**. Edição 1. Porto Alegre: ed. Globo, 1967. v.2

[6] FERREIRA, J. **A Construção dos Números**. Edição 3. Rio de Janeiro: Editora SBM, 2013.

[7] FIGUEREIDO, D.G. **Números Irracionais e Transcendentes**. Edição 3. Rio de Janeiro: ed. SBM, 2011.

[8] IFRAH, G. **História Universal dos Algarismos**. Tomo I e II. Rio de Janeiro: ed. Nova Fronteira, 1997.

[9] LIMA, E.L. **A Matemática do Ensino Médio**. Rio de Janeiro: ed SBM, 2006. v.1

[10] STEVIN, S. (1585).**L'Arithmétique**. Leyde: Christophle Plantin - Documento digitalizado obtido a partir de http://books.google.pt/

[11] SANCHES, C.F.M.; SALOMÃO, L.A.D. **A Expansão Do Número e em Frações Contínuas**. Uberlândia: FAMAT em Revista, n.1, dez. 2003.

[12] Frações contínuas e aplicações no ensino médio **http://repositorio.bc.ufg.br/tede/handle/tede/3678** acessado em 09/01/2018.

ANEXO A

1. ANÉIS

Definição: Um sistema matemático constituído de um conjunto não vazio A e uma par de operação sobre A, respectivamente uma adição $(x,y) \rightarrow x+y$ e uma multiplicação (x,y) (ou x.y), é chamado anel se:

1. $(A,+)$ é um grupo abeliano, ou seja:

   a) se $a,\ b,\ c \in A$, então $a+(b+c) = (a+b)+c$ (associatividade);

   b) se $a,\ b \in A$, então $a+b = b+a$ (comutatividade);

   c) existe um elemento $0_A \in A$ tal que, qualquer que seja $a \in A, a+0_A = a$ (existência de elemento neutro);

   d) qualquer que seja $a \in A$, existe um elemento A, indicado genericamente por $-a$, tal que $a+(-a) = 0_A$ (existência de opostos).

2. A multiplicação goza da propriedade associativa, isto é, se $a,\ b,\ c \in A$, então $a(b \cdot c) = (a \cdot b)c$.

3. A multiplicação é distributiva em relação à adição, vale dizer: se $a,\ b,\ c \in A$, então $a(b+c) = ab+ac$ e $(a+b)c = ac+bc$.

1.1. Tipos de Anéis

A definição de anel é bastante aberta no que se refere à multiplicação. Existem anéis que possuem elemento neutro para a multiplicação e outros que não. O anel $\mathbb{Z}$, por exemplo, possui elemento neutro para a multiplicação: o número 1. O anel $2Z = \{0, \pm 2, \pm 4, ..\}$, não.
Da mesma forma, há anéis cuja multiplicação é comutativa e outros que isso não acontece. Por exemplo, a multiplicação do anel dos inteiros goza da propriedade comutativa. Mas, o anel Mn(R), por exemplo, isso não acontece, exceto quando $n = 1$.

1. **ANEL COMUTATIVO COM IDENTIDADE**

Um anel $(\mathbb{R}, +, \cdot)$, onde a operação é comutativa é dito ser um anel comutativo. Um anel $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ onde tem elemento neutro é dito ser um anel com elemento identidade ou simplesmente, um anel com 1. Tal elemento neutro será indicado por 1 ou 1_R.

Exemplo: Seja $\mathbb{R} = f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; f é função. Para todo f, $g \in \mathbb{R}$, definimos $(f + g) \in \mathbb{R}$ e $(f \cdot g) \in R$, por:

i) $(f + g)(x) = f(x) + g(x), \forall x \in \mathbb{R}$

ii) $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x), \forall x \in \mathbb{R}$

$(\mathbb{R}, +, \cdot)$ é um anel comutativo com 1.

2. **ANEL DE INTEGRIDADE**

Um domínio, ou um anel de integridade é um anel comutativo, com 1, sem divisores de zero, ou seja, um anel $(\mathbb{R}, +, \cdot)$, comutativo com 1 é domínio $\Leftrightarrow (\forall a, b \in \mathbb{R}, ab = 0 \Rightarrow a = 0 oub = 0)$. Exemplo Com as operações usuais, o anel dos inteiros $\mathbb{Z}$ é um domínio que não é corpo.

2. CORPOS

Obs.: Antes de definir o que é um corpo, será adotado a notação $U(A)$ para indicar os elementos de uma anel que têm inverso, elementos esses que serão chamados de inversíveis. Não esquecer que $U(A)$ nunca é vazio, mas também nunca inclui o zero. Existem anéis comutativos com unidade em que o zero não é inversível. É o caso, por exemplo, do $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$. E anéis em que, além do zero, há outros elementos não inversíveis, como por exemplo, o Anel $\mathbb{Z}$ dos inteiros. Na verdade, $U(\mathbb{Z}) = \{-1, +1\}$. A definição que segue diz respeito à primeira dessas possibilidades.

Definição: Seja K um anel comutativo com unidade. Se $U(K) = K^* = K - \{0\}$, então K recebe o nome de corpo.

Exemplo: Os anéis numéricos $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$, são corpos.