unesp
UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS E CIÊNCIAS EXATAS

Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional

Algumas Desigualdades Matemáticas: Históricas, da Análise e Sugestões de Atividades para o Ensino Básico

Lucas Bastioni

PROFMAT

RIO CLARO

2019

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA "JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Câmpus de Rio Claro

Algumas Desigualdades Matemáticas: Históricas, da Análise e Sugestões de Atividades para o Ensino Básico

Lucas Bastioni

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, do Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Câmpus de Rio Claro.

Orientador
Prof. Dr. Ricardo de Sá Teles

2019

B326a

Bastioni, Lucas
Algumas desigualdades matemáticas: históricas, da análise e sugestões de atividades para o ensino básico / Lucas Bastioni. -- Rio Claro, 2019
86 p. : il.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista (Unesp), Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro
Orientador: Ricardo de Sá Teles

1. Desigualdades. 2. Análise. 3. Medida. 4. Integração. I. Título.

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp. Biblioteca do Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro. Dados fornecidos pelo autor(a).

Essa ficha não pode ser modificada.

TERMO DE APROVAÇÃO

Lucas Bastioni

Algumas Desigualdades Matemáticas: Históricas, da Análise e Sugestões de Atividades para o Ensino Básico

Dissertação aprovada como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre no Curso de Pós-Graduação – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, do Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", pela seguinte banca examinadora:

Prof. Dr. Ricardo de Sá Teles
Orientador

Profa. Dra. Ariane Luzia dos Santos
FCL - UNESP/Araraquara

Prof. Dr. Flavio Andrade Faria
IQ - UNESP/Araraquara

Rio Claro, 03 de maio de 2019

Aos meus primos José Aparecido Salvi e Marcio Donizete Lopes Peres.
Que Deus lhes conceda o repouso eterno.

Agradecimentos

A Deus e aos teus santos e santas, a quem sempre pedi que me dessem a penetração da inteligência, a faculdade de lembrar-me, o método e a facilidade do estudo, a profundidade na interpretação e uma graça abundante de expressão. Se eu tivesse sido mais diligente e persistente e pusesse-me a estudar com um ardor ainda mais implacável, poderia ter usufruído muito mais de todas essas virtudes. Tudo o que aprendi, ainda que ínfimo diante de todo oceano de verdades, convida-me a admirar ainda mais a vossa grandeza e render-vos graças por todas as vossas obras.

Aos meus pais, pela eterna paciência. Às minhas irmãs e à Ângela, por sempre cuidarem de mim.

A todos os meus professores. Vossas lições foram como o Sol: aclararam a minha vista embaçada. Eu vos amo e respeito. Em vosso nome, e lembrando-me de vós, farei o melhor que puder, e vos recordarei sempre.

Ao meu orientador e aos demais membros da banca.

A todas as pessoas que de alguma forma contribuíram para a realização deste trabalho e que me auxiliaram na aquisição do meu conhecimento matemático. Em especial aos colegas da turma de ingressantes desse mestrado profissional no campus da Unesp de Rio Claro em 2016 e aos colegas que fiz ao longo dos quatro anos de graduação e do ano em que fiz uma tentativa frustrada de mestrado na Unicamp.

De Deus nós sabemos que existe,
que é causa de todos os seres e que é
infinitamente superior a tudo. Isto é
a conclusão e o ponto culminante do
nosso saber nesta vida terrena.
Tomás de Aquino

Tocar uma nota errada é insignificante.
Tocar sem paixão é imperdoável.
Ludwig van Beethoven

Prefiro entender uma causa
a ser o rei da Pérsia.
Demócrito de Abdera

Resumo

Esta dissertação discorrerá sobre como as desigualdades são abordadas no ensino básico, com foco no ensino médio. Traremos à tona algumas desigualdades notórias seja por sua importância histórica, elegância ou importância dentro da Matemática. Com auxílio de tópicos de medida e integração deduziremos algumas desigualdades em sua forma mais geral e mostraremos aplicações das mesmas em conjuntos discretos de números reais em problemas diversos.

Palavras-chave: Desigualdades, Análise, Medida, Integração.

Abstract

This work will talk about how the inequalities are treat in basic school, with focus in high school. We will address some notorious inequalities, due for its historical importance, elegance or importance inside Mathematics. With topics of measure and integration, we deduce some inequalities in their more general form and we will show its applications in discrete sets of real numbers in several problems.

Keywords: Inequalities, Analysis, Measure, Integration.

Lista de Figuras

Sumário

1 Introdução

Sabe-se desde o início da educação formal que os números apresentam uma ordem. Compara-se os naturais, inteiros, racionais e por fim os reais. Embora seja visto apenas no final da educação básica, quando se estuda o conjunto dos números complexos o símbolo de desigualdade, em uma espécie de encanto, desaparece. Isso se deve ao fato de o conjunto dos números reais ser um corpo ordenado e o conjunto dos complexos ser apenas um corpo sem relação de ordem. Neste trabalho consideraremos apenas os números reais e estudaremos alguns resultados interessantes sobre a relação de ordem. Admitiremos conhecidas todas as propriedades e fatos elementares sobre essa relação.

Estudaremos os tópicos iniciais de teoria de medida e integração de Lebesgue para enunciar e demonstrar algumas desigualdades em sua forma mais geral dentro da Análise Matemática e depois construir conjuntos e funções convenientes que possibilitem enunciá-las e demonstrá-las em sua forma mais básica em conjuntos discretos de números reais, para que seja possível usá-las na educação básica e fornecer aos alunos novas ferramentas para que sejam usadas na resolução de problemas.

No Capítulo 2 faremos uma análise dos documentos oficiais do Ministério da Educação sobre os Parâmetros Curriculares Nacionais, seguida de uma análise de alguns livros didáticos usados na sala de aula, alguns desses livros escritos por consagrados autores, como Dante e Iezzi. Ainda neste capítulo, apresentaremos algumas desigualdades que são usadas no ensino médio. No Capítulo 3, de cunho histórico, mostraremos algumas desigualdades demonstradas ou assumidas por alguns matemáticos da antiguidade, a desigualdade de Bernoulli, um resultado interessante sobre a constante de Euler e mais um outro resultado que relaciona duas das mais importantes constantes matemáticas. No Capítulo 4 estudaremos tópicos elementares de teoria da medida para que façamos a construção da integral de Lebesgue e dos espaços L_p, sendo possível enunciar algumas desigualdades importantes da Análise, por exemplo, as desigualdades de Hölder, de Minkowsky, de Jensen e de Chebyshev. Ainda neste capítulo, apresentaremos as desigualdades de Gagliardo-Nirenberg e de Poincaré, usadas para fazer estimativas sobre as soluções de equações diferenciais parciais. No Capítulo 5, algumas das desigualdades apresentadas nos capítulos anteriores serão apresentadas em forma elementar, através de sequências de números reais, e com isso poderemos resolver alguns problemas interessantes, como um problema da Olimpíada Internacional de Matemática de 2001. Além disso, faremos comentários breves explicando quais são os objetivos dos problemas propostos, tendo em vista as orientações dadas nos documentos do Ministério da Educação.

2 Algumas Desigualdades Cotidianas e o Tratamento das Desigualdades na Educação Básica

Neste capítulo resolveremos cinco problemas elementares que envolvem desigualdades, faremos comentários que expliquem de que forma julgamos que elas se ajustam no que dizem os parâmetros curriculares nacionais para o ensino médio, além disso, analisaremos a forma com que alguns livros didáticos usados na escola básica abordam as desigualdades e mostraremos alguns exemplos que aparecem neles.

2.1 Alguns problemas elementares com desigualdades

Nesta seção resolveremos alguns problemas cotidianos e elementares com uso de desigualdades. Não serão necessárias técnicas avançadas, raciocínios complicados ou evocação de alguma desigualdade notória para a resolução desses problemas. A intenção nesta seção é apenas mostrar que, de fato, as desigualdades são comuns em situações rotineiras.

2.1.1 Da responsabilidade do presidente da república

Nossa república viveu dias de grande perturbação política em abril de 2016 e agosto de 2017.

O artigo 86 da constituição da república diz

> Admitida a acusação contra o presidente da república, por dois terços da Câmara dos Deputados, será ele submetido a julgamento perante o Supremo Tribunal Federal, nas infrações penais comuns, ou perante o Senado Federal, nos crimes de responsabilidade.

Em abril de 2016 a câmara dos deputados admitiu abertura de processo por crime de responsabilidade contra a presidente Dilma Rousseff e, em agosto de 2017, recusou abertura de processo por infração penal comum contra o presidente Michel Temer.

Sabendo que a câmara dos deputados é composta por 513 deputados federais, então dois terços dessa quantidade equivale a 342 deputados.

Alguns brasileiros passaram o domingo, 17 de abril de 2016, e a noite de quarta-feira, 2 de agosto de 2017, acompanhando as seções que votaram as acusações contra os respectivos presidentes. Como prever, ao longo da votação, qual seria o resultado da mesma?

Sejam x a quantidade de deputados que votam a favor da abertura de processo até um dado momento e seja y a quantidade de deputados que são contrários a abertura do processo até um dado momento. Suponhamos que todos os deputados estão presentes[1]. A rigor x e y dependem do tempo, pois variam conforme os deputados forem votando, mas usaremos a notação x, y ao invés de $x(t), y(t)$.

Quando todos os deputados tiverem votado, teremos $x + y + z = 513$, onde z é a quantidade de deputados que se abstiveram de votar.

Para que a denúncia seja admitida deve-se ter que $x \geq 342$, ou seja, pelo menos 342 deputados devem ser favoráveis a abertura do processo, ou ainda, ao final da votação x deve ser pelo menos igual ao dobro de $y + z$, que matematicamente pode ser escrito como a desigualdade $x \geq 2(y + z)$.

Logo, se ao longo da votação o resultado parcial fosse $x \geq 2(y + z)$ poderia-se presumir que seria aceita a denúncia.

2.1.2 Do combustível no automóvel

Antes de viajar, o motorista prudente faz uma verificação básica dos elementos de segurança do carro: analisa faróis, palhetas do parabrisa, calibra os pneus, verifica estepe e um dos mais importantes de todos: verifica se há combustível suficiente para realizar a viagem, e no caso de viagens mais longas, se há combustível suficiente para encontrar algum posto na rodovia.

Automóveis modernos possuem computador de bordo com uma função que mostra a autonomia, o volume de combustível do tanque, o consumo médio e instantâneo do veículo, etc. Suponhamos que a viagem será realizada em um automóvel sem esse acessório.

A forma mais comum é analisar o indicador de volume de combustível presente no painel do automóvel, dado geralmente em forma de fração, e conhecendo o consumo médio de combustível do automóvel e a distância que será percorrida, pode-se saber se há combustível suficiente.

Sejam d a distância de uma viagem, q o consumo médio de combustível do veículo que fará a viagem e l a quantidade de combustível presente no tanque. Conhecendo-se a capacidade máxima do tanque e a fração do mesmo que está preenchida de combustível, é possível estimar um valor para l. Veremos que se uma desigualdade for satisfeita, o motorista pode realizar a viagem.

A quantidade de combustível consumida durante a viagem é dada por $\dfrac{d}{q}$. Então, se $\dfrac{d}{q} \leq l$ há combustível suficiente. Apenas lembrando que a opção mais segura é quando $\dfrac{d}{q} < l$, pois o artigo 180 do Código de Trânsito diz que a pane seca é considerada uma infração de trânsito, de natureza média e que é punida com multa.

2.1.3 Da lei da demanda, lei da oferta e equilíbrio de mercado

A lei da demanda indica que o preço mais baixo atrai mais consumidores dispostos a adquirir um produto e que o preço elevado atrai menos consumidores dispostos a adquiri-lo.

[1]Há a necessidade de quórum para que a seção seja iniciada e haja a votação, aqui admitimos que todos estão presentes apenas para simplificar os cálculos.

A lei da oferta indica que o preço mais baixo resulta em uma quantidade menor de produtos ofertados e que o preço mais elevado resulta em uma quantidade maior de produtos ofertados.

O equilíbrio de mercado indica uma estabilidade entre demanda e a oferta, ou seja, o preço é razoável e a quantidade ofertada do produto é suficiente para os consumidores interessados em adquiri-lo.

Sejam a a quantidade ofertada de um determinado produto e b a quantidade de pessoas que demandam por esse produto. Se $a > b$ então presume-se que o preço do produto tende a cair. Com o preço baixo, mais pessoas interessam-se pelo produto, o que fará com que $a < b$ e o preço tenderá a aumentar. Se $a = b$ não há oscilação de preço.

Vejamos a situação descrita acima por meio de um gráfico. O eixo x representa a quantidade ofertada do produto, o eixo y representa o preço do produto, (x_0, y_0) representa o ponto de equilíbrio, a linha ascendente (a) representa a oferta e a linha descendente (b) a demanda.

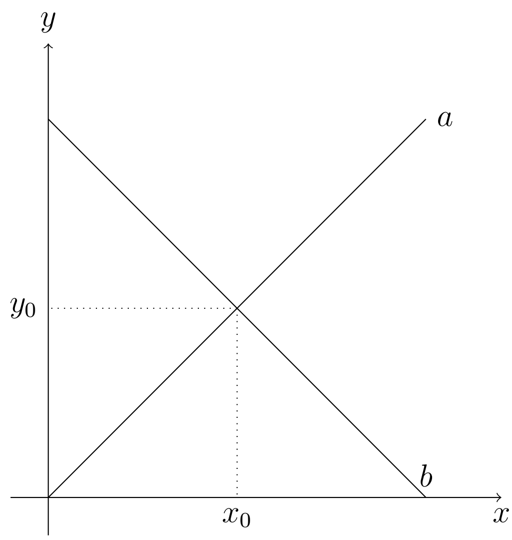

Figura 2.1: Gráfico da oferta e da demanda.

2.1.4 Da ida ao supermercado

Ao fazer compras em um supermercado, temos diante de nós uma vasta gama de produtos a nossa disposição. Muitos deles são vendidos em embalagens de diversos tamanhos ou com diferentes quantidades. Alguns possuem preço proporcional, outros podem apresentar vantagem se comprados em embalagens de maior quantidade ou tamanho.

Essa diferença dá-se principalmente pelo fato de que a embalagem tem custos, e uma vez que ela consegue armazenar mais coisas, pode ser vendida por um preço um pouco mais em conta. Como saber se ao comprar uma embalagem maior estamos pagando de forma proporcional ou se, de fato, estamos pagando um pouco mais barato?

É claro que quando dizemos um pouco mais barato isso não é em termos absolutos. Obviamente uma embalagem com mais produto será mais cara que uma com menos produto. A questão que propomos é que se as embalagens tivessem o mesmo tamanho, quanto custaria cada uma delas? Se feito esse procedimento de transformá-las em uma embalagem de mesmo tamanho e elas custarem o mesmo preço, então a maior é proporcional a menor. Se feito o procedimento e a embalagem menor custar mais caro do que a maior, então a maior é mais vantajosa para a compra. Não é natural fazer o procedimento e a embalagem maior custar menos do que a menor, isso não faz sentido.

Como proceder? Sejam a e b as quantidades (podem ser peso, volume, quantidades unitárias do produto, etc) de duas embalagens de um mesmo produto, onde $b > a$. Suponha que cada uma delas seja vendida por x e y reais, respectivamente. É claro que $y > x$, pois há mais produto na segunda embalagem do que na primeira. Mas veremos que em termos relativos, comprar a embalagem maior pode ser mais vantajoso.

Como a primeira embalagem custa x e tem a de quantidade, a razão $\frac{x}{a}$ nos dá o preço relativo do produto quando vendido nesta embalagem. Fazendo o mesmo raciocínio para a outra, a razão $\frac{y}{b}$ nos dá o preço relativo do produto quando vendido nesta outra embalagem.

Se $\frac{x}{a} = \frac{y}{b}$, então o preço da maior é proporcional ao da menor, e é indiferente comprar qualquer uma das duas. Se $\frac{x}{a} > \frac{y}{b}$, mesmo que $y > x$, é mais vantajoso comprar a embalagem maior.

Esse raciocínio deve ser levado em conta para economizarmos quando formos comprar um produto que geralmente é consumido em grandes quantidades, e consequentemente, levar uma embalagem com mais quantidade é mais vantajoso do que levar várias embalagens com menos quantidade. Pensando de forma sustentável: as vezes é mais econômico comprar uma embalagem maior, mas se seu conteúdo não for usado totalmente até a data de validade, isso gera desperdício. O consumidor consciente deve ponderar entre essas duas variáveis, economia $\times$ sustentabilidade, para fazer uma compra ideal.

2.1.5 Dos investimentos financeiros

Uma das aplicações mais importantes das progressões geométricas são os juros compostos. Eles são de fundamental importância para que uma pessoa compreenda como um investimento feito aumenta ou como um empréstimo feito é amortizado ao longo do tempo. Em todos os livros didáticos a matemática financeira é abordada como aplicação e como forma de conscientização. Aqui abordaremos a matemática financeira de forma mais simples.

Falaremos de forma sucinta sobre as taxas de juros. Em nosso cenário admitiremos apenas a taxa básica de juros e a inflação: a primeira agrega valor ao nosso dinheiro e a segunda faz nosso dinheiro desvalorizar-se.

Entre meados de 2015 e meados de 2016 a taxa básica de juros praticada no Brasil estava indexada em 14,25%[2]. De meados de 2016 até o momento em que escrevemos este trabalho ela está em queda. Essa taxa serve como parâmetro para controlar a taxa que bancos e corretoras aplicam para valorizarem o dinheiro do investidor. Por ter estado alta, várias pessoas investiram nos chamados investimentos de renda fixa, que são indexados com base na taxa básica de juros.

Uma vez que elas estão em queda, muitos investidores questionam-se se ainda é vantajoso investir ou manter os investimentos feitos.

[2]A taxa Selic, definida pelo Banco Central do Brasil, foi de 14,25% ao ano durante 30/07/2015 até 19/10/2016, conforme histórico disponível no site da instituição: https://www.bcb.gov.br/

O que muitos esquecem, é que simultaneamente há a chamada inflação. Em dezembro de 2015 seu valor acumulado em 12 meses foi de 10,71%[3]. Lembrando que esse valor desvaloriza o dinheiro e também está em queda.

Sejam j a taxa de juros que faz com que nosso dinheiro seja valorizado e i a taxa de juros da inflação. Como elas variam ao longo do tempo, denotaremos $j(t)$ e $i(t)$ para as taxas no período em que j era considerada alta e atraia investimentos. Para saber se ainda é vantajoso manter o dinheiro aplicado ou aplicar mais dinheiro em renda fixa, basta tomar o tempo de hoje, que denotaremos por t', e analisar as diferenças $d = j(t) - i(t)$ e $d' = j(t') - i(t')$.

Os valores d e d' representam o ganho real do dinheiro investido. Se $d' \geq d$ então é vantajoso manter ou aplicar ainda mais em renda fixa. Na verdade, não basta analisar uma das taxas para concluir que a renda fixa é uma boa opção de investimento. O que um investidor consciente deve ter em mente é a diferença entre a taxa que valoriza e a taxa que desvaloriza seu dinheiro, ou seja, uma taxa de juros alta não significa altos ganhos se a inflação também é alta, ou ainda, uma taxa de juros baixa pode ser uma boa opção se a inflação também é baixa.

2.2 Parâmetros curriculares nacionais para o ensino médio

Citaremos alguns trechos de BRASIL[1] e em seguida faremos comentários que associam estes ao estudo das desigualdades. A referência BRASIL[2] faz comentários complementares acerca de BRASIL[1]. As ideias desses documentos serão uma das bases das aplicações que faremos no Capítulo 5.

> [...] no Ensino Fundamental, os alunos devem ter se aproximado de vários campos do conhecimento matemático e agora estão em condições de utilizá-los e ampliá-los e desenvolver de modo mais amplo capacidades tão importantes quanto as de abstração, raciocínio em todas as suas vertentes, resolução de problemas de qualquer tipo, investigação, análise e compreensão de fatos matemáticos e de interpretação da própria realidade.

Ainda nos anos iniciais do ensino fundamental o aluno aprende a comparar dois números, geralmente dois naturais, com o uso dos símbolos $>, <, \geq$ e $\leq$. Logo após, a comparação estende-se ao conjunto dos inteiros e, por fim, em uma aplicação interessante das frações equivalentes, compara-se os racionais. Ainda no fundamental, aprende-se a resolver inequações, cujas técnicas são muito parecidas com a resolução de equações, exceto pelo fato de que quando se multiplica uma inequação por um número real negativo deve-se tomar o cuidado de trocar o símbolo da desigualdade. Uma vez compreendido e amadurecido o conceito de desigualdade, o aluno está preparado para entender as desigualdades que aparecerão no ensino médio, que o ajudarão a resolver problemas, investigar, analisar e compreender.

> Saber aprender é a condição básica para prosseguir aperfeiçoando-se ao longo da vida. Sem dúvida, cabe a todas as áreas do Ensino Médio auxiliar no desenvolvimento da autonomia e da capacidade de pesquisa, para que cada aluno possa confiar em seu próprio conhecimento.

[3]Vide o site do Banco Central do Brasil

Conforme apresentado nos exemplos iniciais desta dissertação, com o auxílio de desigualdades o aluno pode confiar em seu próprio conhecimento para, por exemplo, calcular a autonomia de um automóvel, prever o resultado de uma votação, entender como funcionam os preços ou usar o seu dinheiro de forma consciente.

A referência BRASIL[1] apresenta uma série de finalidades do ensino da Matemática no ensino médio. Destacaremos algumas a seguir.

- aplicar seus conhecimentos matemáticos a situações diversas, utilizando-os na interpretação da ciência, na atividade tecnológica e nas atividades cotidianas;
- analisar e valorizar informações provenientes de diferentes fontes, utilizando ferramentas matemáticas para formar uma opinião própria que lhe permita expressar-se criticamente sobre problemas da Matemática, das outras áreas do conhecimento e da atualidade;
- expressar-se oral, escrita e graficamente em situações matemáticas e valorizar a precisão da linguagem e as demonstrações em Matemática;
- promover a realização pessoal mediante o sentimento de segurança em relação às suas capacidades matemáticas, o desenvolvimento de atitudes de autonomia e cooperação.

Quanto ao primeiro item, já destacamos o uso das desigualdades nas atividades cotidianas. No entanto as desigualdades surgem naturalmente nas demais ciências e nas atividades tecnológicas, por exemplo, a quantidade máxima de antibiótico que deve ser administrada de tal forma que o organismo do paciente não seja prejudicado, o peso máximo de água que uma barragem suporta, o torque mínimo que um motor deve gerar para colocar um automóvel em movimento. O aluno deve estar ciente de que esses problemas envolvem desigualdades.

Quanto ao segundo item, enfatizamos que vivemos em uma época de revolução tecnológica, que nos cerca de várias informações, muitas delas contraditórias, que nos levam a tomar uma decisão baseados em mais do que uma delas. O conhecimento das desigualdades pode nos auxiliar a tomar algumas delas de forma coerente e justificada. Escolher entre um pagamento à vista ou a prazo, entender o porquê da destinação de recursos públicos ser maior para uma determinada área do que para outra, escolher abastecer o automóvel com etanol ou gasolina, escolher o plano telefônico para o dispositivo móvel, são alguns dos problemas em que há muitas opções e informações onde devemos comparar mais do que um valor para tomar uma decisão ou formar uma opinião.

O terceiro item é associado ao que já dissemos no parágrafo acima, uma vez tomada uma decisão é necessário convencer-se ou convencer a outrem sobre o motivo de tê-la tomado. Isso exige correta linguagem e raciocínio. Manipular algebricamente uma desigualdade, invocar alguma desigualdade notória e construir um raciocínio que mostra que a desigualdade explica bem o motivo da tomada da decisão são desafios que esse item nos apresenta.

O último item nos mostra que o aluno deve estar seguro e confiante quanto à decisão tomada. Uma vez que a decisão foi tomada e devidamente justificada, ele fica realizado em saber que está tomando uma decisão que as desigualdades mostraram ser a mais eficiente, segura ou vantajosa. Saber que o dinheiro renderá mais na aplicação escolhida, que o automóvel andará quando o motor fornecer o torque julgado como mínimo, que a compra a prazo trará mais vantagem e que a barragem não vai se romper mostram que o professor obteve êxito em dar o sentimento de satisfação ao aluno ao ver que pôde tomar uma decisão baseado no que aprendeu. Seguro da decisão, ele poderá compartilhá-la, e tendo tido êxito no item três, talvez convencer mais pessoas a tomá-la.

> O trabalho com números pode também permitir que os alunos se apropriem da capacidade de estimativa, para que possam ter controle sobre a ordem de grandeza de resultados de cálculo ou medições e tratar com valores numéricos aproximados de acordo com a situação e o instrumental disponível.

Aqui, vemos o uso do famoso $a \leq x \leq b$, ou seja, estimamos que um valor x é maior ou igual do que um número a e também menor ou igual do que um número b. O trabalho com estimativas exige conhecimento de desigualdade e manipulações algébricas associadas à sua resolução. Quanto a estimativa do resultado de cálculo, veremos abaixo que isso é uma ferramenta importante quando trabalhamos com números que já sabemos pertencer a um intervalo fixo, como o valor das funções seno e cosseno e da probabilidade. A técnica de estimativa é valorizada desde os tempos remotos, mostraremos no capítulo seguinte, por exemplo, como Arquimedes estimou uma importante constante matemática.

> Os conceitos matemáticos que dizem respeito a conjuntos finitos de dados ganham também papel de destaque para as Ciências Humanas e para o cidadão comum, que se vê imerso numa enorme quantidade de informações de natureza estatística ou probabilística. No tratamento desses temas, a mídia, as calculadoras e os computadores adquirem importância natural como recursos que permitem a abordagem de problemas com dados reais e requerem habilidades de seleção e análise de informações.

Neste tópico, os parâmetros apenas reforçam o que já discutimos acima com respeito a tomada de decisões com base em várias informações. Aqui assume-se que as Ciências Humanas também fazem parte do rol de aplicações. Além, é claro, de enfatizar o uso de computadores para auxiliarem os cálculos ou servirem como fonte de pesquisa. Citamos aqui como exemplo a força que uma pesquisa de intenção de votos tem. Quando o eleitor vê em alguma mídia uma pesquisa como essa, e nota que a intenção de votos de um determinado candidato é muito maior ou muito menor do que a de outro, essa informação tem um papel decisivo na escolha do eleitor. Uma pessoa sem ideologia política, ou que vota apenas por obrigação ou que não tem o menor interesse por política (acreditamos que pessoas assim formem uma parcela considerável da população) tem grande probabilidade de escolher o seu voto com base nessa pesquisa. Mesmo alguém que tenha algum interesse e que veja em algum candidato propostas das quais tenha simpatia, pode desistir de votar nele ao vê-lo com uma quantidade ínfima de intenção quando comparado com algum outro.

2.3 Análise de livros e materiais didáticos

Analisaremos DANTE[3], IEZZI[4], SOUZA[5], BALESTRI[6], que são livros didáticos utilizados em sala de aula do PNLD de 2018 e MURAKAMI[7] e NICOLAU[8], que são volumes de uma das mais importantes coleções de Matemática elementar disponíveis. Faremos comentários de como os autores abordam as desigualdades.

Todos os livros didáticos e MURAKAMI[7] tem um capítulo que trata dos conjuntos numéricos. Na seção em que tratam dos números reais todos fazem a apresentação desses por meio da reta real, apresentando o conceito de desigualdade com o tratamento geométrico: um número real a é menor do que um número real b se o ponto que representa a na reta real está à esquerda do ponto que representa b, ou um número real a é maior do que um número real b se o ponto que representa a na reta real está à direita do ponto que representa b.

O único que traz uma definição algébrica é DANTE[3], ou seja, um número real a é menor do que um número real b se a diferença $b - a$ for maior do que zero, ou suas formas equivalentes.

O tratamento geométrico é interessante, principalmente quando é necessário verificar alguma desigualdade onde pelo menos um dos números é um real negativo. Fica evidente ao desenhar a reta e inserir os pontos que representam os números, por exemplo, que -3 e maior do que -5, pois o ponto que representa -3 está à direita do ponto que representa -5.

O tratamento algébrico é interessante na resolução de problemas.

As aplicações imediatas são os intervalos de números reais, a função módulo e a resolução de inequações afim. Os problemas que os livros propõem nesse tópico são interessantes, pois a maioria segue as orientações de BRASIL[1] e relaciona a solução do problema com um fato cotidiano. Vejamos um exercício de BALESTRI[6].

Exemplo 2.1. Para uma visita agendada, um técnico de informática cobra uma taxa fixa de R$20,00 mais uma taxa de R$25,00 por hora trabalhada. Em uma única visita, quantas horas esse técnico precisa trabalhar para receber mais de R$120,00?

Exercícios desse tipo repetem-se nos demais livros. Todos também fazem o estudo das desigualdades com a função quadrática, mas como esse tema é um pouco mais complexo, será abordado posteriormente.

Abaixo, seguem as principais desigualdades encontradas nesses livros, que são as desigualdades estudadas no ensino médio.

2.3.1 As funções seno e cosseno

Com auxílio da circunferência unitária centrada na origem e com a definição de seno e cosseno de um ângulo agudo do triângulo retângulo podemos definir as funções reais seno e cosseno. Na figura abaixo, considere $A = (1, 0)$ e $B = (0, 1)$.

A princípio define-se como contradomínio dessas funções o conjunto $\mathbb{R}$. Com a análise da geometria da definição das funções concluí-se que a imagem de ambas é o intervalo $[-1, 1]$, ou seja, $\text{sen} : \mathbb{R} \to [-1, 1]$ e $\cos : \mathbb{R} \to [-1, 1]$, de onde podemos concluir que para qualquer númereo real x valem as seguintes desigualdades

$$-1 \leq \text{sen}(x) \leq 1 \text{ e } -1 \leq \cos(x) \leq 1.$$

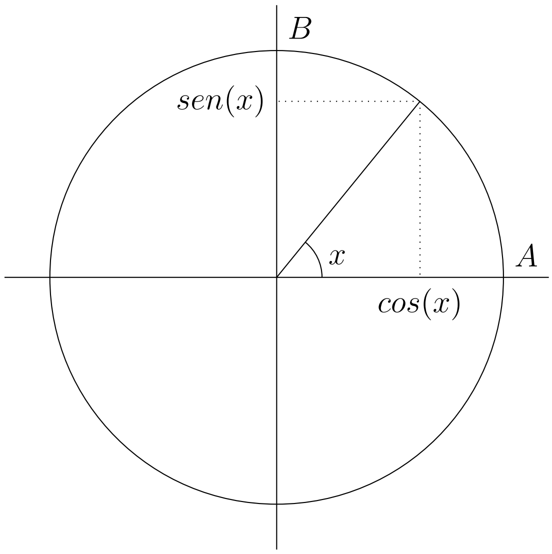

Figura 2.2: A circunferência unitária e as funções seno e cosseno.

2.3.2 Probabilidade

Se Ω é o espaço amostral de um determinado experimento aleatório e $E \subset \Omega$, definimos a probabilidade do evento E como o número real $P(E)$, sendo que $P(E) = 0$, se $E = \emptyset$ e $P(E) = 1$, se $E = \Omega$. Um dos axiomas que definem o número $P(E)$ é a desigualdade

$$0 \leq P(E) \leq 1.$$

Uma aplicação interessante para essa desigualdade é que ao final da resolução de um exercício sobre probabilidade, o aluno terá uma condição necessária (mas não suficiente) para saber se seu resultado está correto: se o valor que ele encontrou for menor do que zero ou maior do que um, então sua solução está errada. Aqui, vemos uma aplicação do que BRASIL[1] diz no trecho a respeito de estimativas e controle da ordem de grandeza de um número.

2.3.3 Sólidos de Platão

A relação de Euler para poliedros convexos $V - A + F = 2$ fornece uma demonstração para a existência de somente cinco sólidos de Platão. Na demonstração, usam-se algumas desigualdades. Abaixo, com auxílio de NETO[9], enunciaremos e demostraremos esse resultado.

Definição 2.1. *Um poliedro convexo é regular quando todas as suas faces são polígonos regulares congruentes e em todos os vértices concorrem o mesmo número de arestas.*

Um poliedro convexo regular também é chamado de sólido de Platão.

Teorema 2.1. *Existem apenas cinco poliedros regulares convexos.*

Demonstração. Sejam n o número de lados de cada face, p o número de arestas que concorrem em cada vértice e V, A e F, respectivamente, o número de vértices, arestas e faces do poliedro. O número nF nos dá o dobro do número de arestas, pois cada uma delas é lado de exatamente duas faces. Da mesma forma, pV nos dá o dobro do número de arestas, pois cada aresta é contada duas vezes, uma vez que elas tem por extremidade dois vértices do poliedro. Daí

$$2A = nF = pV \Leftrightarrow A = \frac{nF}{2} \text{ e } V = \frac{nF}{p}.$$

Como $V - A + F = 2$, segue que

$$\frac{nF}{p} - \frac{nF}{2} + F = 2 \Leftrightarrow F = \frac{4p}{2p + 2n - pn}.$$

Devemos ter $2p + 2n - pn > 0$, ou seja,

$$\frac{2n}{n-2} > p.$$

Como $p \geq 3$, concluímos que $n < 6$. Pela definição, $n \geq 3$, então $n \in \{3, 4, 5\}$.

Se $n = 3$, então $F = \dfrac{4p}{6-p}$. Como $p \geq 3$, então $p \in \{3, 4, 5\}$. Se $(n, p) = (3, 3) \Rightarrow F = 4$, que é o tetraedro; $(n, p) = (3, 4) \Rightarrow F = 8$, que é o octaedro; $(n, p) = (3, 5) \Rightarrow F = 20$, que é o icosaedro.

Se $n = 4$, então $F = \dfrac{2p}{4-p}$. Neste caso $p = 3$ e $(n, p) = (4, 3) \Rightarrow F = 6$, que é o cubo.

Se $n = 5$, então $F = \dfrac{4p}{10-3p}$. Neste caso $p = 3$ e $(n, p) = (5, 3) \Rightarrow F = 12$, que é o dodecaedro. $\square$

Observe que todas as desigualdades usadas acima justificam-se somente por resultados elementares, como o fato de que um denominador não poder ser nulo e do fato de que F é um inteiro positivo.

2.3.4 Função quadrática

Considere a função real $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$. A função f é denominada função quadrática. Sabemos que seu gráfico é uma parábola cujo vértice V é dado pelas coordenadas

$$\left(\frac{-b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right).$$

Assim, podemos concluir que para qualquer número real x valem as seguintes desigualdades

$$f(x) \geq \frac{4ac - b^2}{4a}, \text{ se } a > 0.$$

$$f(x) \leq \frac{4ac - b^2}{4a}, \text{ se } a < 0.$$

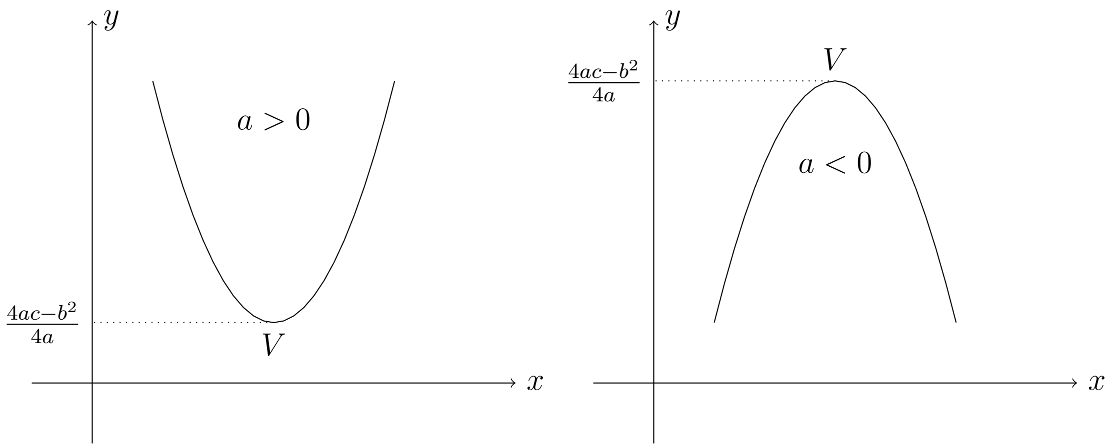

Figura 2.3: Gráfico da função quadrática.

Surgem situações interessantes de máximos e mínimos com problemas que possuem mais do que uma variável, geralmente os problemas nos dão um sistema de duas equações, em que uma delas nos informa algo a respeito do produto entre essas duas variáveis e a outra a respeito da soma. Ao resolver o sistema encontramos uma equação quadrática em uma das variáveis. Vejamos um exercício de IEZZI[4].

Exemplo 2.2. Entre todos os retângulos de perímetro 20cm, determine aquele cuja área é máxima. Qual é essa área?

Se considerarmos x e y as medidas dos lados do retângulo, queremos maximizar a área $x \cdot y$ sabendo o perímetro $2x + 2y = 20$, ou seja, $x + y = 10$. Se escrevemos que $y = 10 - x$, então a expressão para a área torna-se $x \cdot (10 - x) = -x^2 + 10x$, ou seja, uma equação quadrática na variável x.

2.3.5 Triângulos

Embora seja o polígono com o menor número de lados, o triângulo apresenta uma série de resultados interessantes[4], sendo que alguns deles referem-se a desigualdades que relacionam o comprimento de seus lados e a medida de seus ângulos.

A desigualdade a seguir possui uma valiosa importância no ensino da Geometria. Essa desigualdade é eclipsada por um resultado que vem imediatamente após o seu estudo: o fato de que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo ser igual a dois ângulos retos.

Teorema 2.2. *A medida de cada ângulo externo de um triângulo é maior do que as medidas dos ângulos internos não adjacentes a ele.*

Dados uma reta e um ponto não pertencente a essa reta. Essa desigualdade nos fornece uma justificativa para construir uma reta paralela a reta dada passando pelo ponto dado. Repare que o artigo que precede a palavra reta é 'uma' e não 'a', pois até aqui não há necessidade de assumir o quinto postulado dos *Elementos* de Euclides. Outro fato interessante que pode ser provado com essa desigualdade é que um triângulo retângulo possui dois ângulos agudos.

[4]Apenas NICOLAU[8] deduz as desigualdades que aqui são apresentadas. Seu estudo nos livros didáticos é feito na segunda parte do ensino fundamental.

Assumindo o quinto postulado, um dos primeiros resultados que obtemos é o da soma das medidas dos ângulos internos do triângulo, de onde concluímos que a medida de cada ângulo externo é na verdade a soma das medidas dos outros dois internos não adjacentes a ele.

Então, em algumas geometrias não euclidianas, a desigualdade mencionada ainda vale.

Uma outra desigualdade muito interessante é a desigualdade triangular.

Teorema 2.3. *A medida de cada lado de um triângulo é menor do que a soma das medidas dos outros dois lados.*

Essa desigualdade não se limita à Geometria. Ela aparece em tópicos de Análise e de Álgebra Linear. Além de nos fornecer um método prático para escolhermos um menor caminho a ser percorrido.

A desigualdade seguinte relaciona comprimento de lados e ângulos de um triângulo.

Teorema 2.4. *Considere um triângulo que tem pelo menos dois lados não congruentes. Então os ângulos que são opostos aos lados não congruentes também não são congruentes e o ângulo oposto ao lado de maior medida terá a medida maior do que o ângulo oposto ao lado de menor medida.*

Esse resultado é geralmente enunciado de maneira menos rigorosa da seguinte forma: "ao maior lado opõe-se o maior ângulo", ou de formas equivalentes. Uma aplicação interessante é que com esse resultado, nota-se sem usar o teorema de Pitágoras, que a hipotenusa tem medida maior do que qualquer um dos catetos.

2.3.6 Geometria analítica

Definindo a circunferência como o conjunto dos pontos do plano cuja distância a um ponto dado é igual a um número real positivo dado, podemos definir o círculo como o conjunto de pontos do plano cuja distância a um ponto dado é menor ou igual do que um número real positivo dado. Por meio de uma inequação, temos

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leq r^2$$

o círculo de raio r e centro no ponto (x_0, y_0). Ou seja, a descrição do círculo é feita com uma desigualdade.

Ainda na geometria analítica, usam-se desigualdades para estudar a posição relativa entre uma reta e uma circunferência. Usando a notação $d(s, O)$ para representar a distância da reta s ao ponto O, dizemos que uma reta s é secante a uma circunferência de centro O e raio r se $d(s, O) < r$; que elas são tangentes se $d(s, O) = r$; e s é exterior à circunferência se $d(s, O) > r$.

Além da circunferência, as desigualdades também podem ser usadas para descrever regiões diversas do plano. Uma desigualdade pode nos dar a região interna ou externa a uma elipse, a região acima ou abaixo de uma reta ou uma região um pouco mais sofisticada que envolva um sistema de inequações.

2.3.7 Radiciação

Quando estudamos o símbolo $\sqrt[x]{y}$, onde $\sqrt{\ }$ é chamado de radical, x de índice e y de radicando, podem surgir problemas interessantes de comparação de números, como o problema proposto pelo vestibular da Universidade Estadual de Campinas de 1993: dados os números positivos, $\sqrt[3]{3}$ e $\sqrt[4]{4}$, determine o maior.

Basta notar que $\sqrt[3]{3} = \sqrt[12]{3^4} = \sqrt[12]{81}$ e que $\sqrt[4]{4} = \sqrt[12]{4^3} = \sqrt[12]{64}$. Comparando radicais de mesmo índice, sabemos que o maior é o que possui o maior radicando, ou seja, $\sqrt[3]{3} > \sqrt[4]{4}$.

3 Algumas Desigualdades Históricas

Este capítulo trará algumas desigualdades encontradas por grandes matemáticos do passado ou que envolvam números notórios da Matemática. A inclusão deste capítulo é para mostrar que desde tempos remotos os matemáticos já trabalhavam com as desigualdades, seja para exibir resultados elegantes ou fazer estimativas. Serão seguidas várias bibliografias, que serão citadas em momento apropriado.

Vamos esclarecer algumas notações que aparecerão ao longo do capítulo. Usaremos AB para representar o segmento cujos extremos são os pontos A e B, a reta que passa pelos pontos A e B, a semirreta que passa pelos pontos A e B e para representar a medida do segmento cujos extremos são A e B. Não faremos distinção pois as situações em que esse símbolo é usado são claras e não trarão ambiguidades. O símbolo $A\hat{B}C$ representa o ângulo cujos lados são AB e BC e o vértice é B ou a medida desse ângulo. Aqui também não faremos distinção pois não haverá ambiguidades. Quando dissermos que o ângulo $A\hat{B}C$ é igual, maior ou menor do que o ângulo $D\hat{E}F$ é claro que estamos nos referindo a medida dos ângulos.

3.1 A desigualdade triangular

A Proposição 20 do livro I de *Elementos* é um importante resultado em geometria. Sabemos que ela se estende a vários outros campos da Matemática, inclusive com a desigualdade de Minkowski que apresentaremos mais adiante. Nesta seção, veremos como Euclides a demonstrou. Listaremos os resultados de que Euclides precisou e faremos a demonstração. Todos estão no livro I de *Elementos*. A versão que usamos aqui está disponível no site da *Clark University*[1].

Noção Comum 1 (Quinta Noção Comum). *O todo é maior do que as suas partes.*

Postulado 1 (Primeiro Postulado). *Sempre é possível traçar um linha reta entre dois pontos.*

Postulado 2 (Segundo Postulado). *Uma linha reta pode ser prolongada indefinidamente em ambas as direções.*

Proposição 3.1 (Terceira Proposição). *Dadas duas linhas retas desiguais, é possível cortar da maior uma parte igual a menor.*

[1] O acesso se dá por https://mathcs.clarku.edu/~djoyce/java/elements/elements.html. Caso o leitor não consiga acessar, verifique se o símbolo ~ aparece antes de 'djoyce' no endereço que aparece em seu navegador.

Proposição 3.2 (Quinta Proposição). *Em qualquer triângulo isósceles, os ângulos que estão na base são iguais. E produzidos lados iguais, os ângulos que estão na base também são iguais.*

Proposição 3.3 (Décima Nona Proposição). *Em qualquer triângulo o lado maior fica oposto ao maior ângulo.*

Temos os requisitos para enunciar e demonstrar o seguinte resultado.

Teorema 3.1 (Vigésima Proposição). *Em qualquer triângulo a soma de quaisquer dois lados é maior do que o lado restante.*

Demonstração. Seja ABC um triângulo.

Pelo Postulado 2 e pela Proposição 3.1 podemos inserir um ponto D na reta AB, de modo que A e D fiquem de um mesmo lado em relação a B e que AD seja igual a AC.

Pelo Postulado 1 desenhamos o segmento CD.

Como AD é igual a AC, então pela Proposição 3.2 segue que o ângulo $A\hat{D}C$ é igual ao ângulo $A\hat{C}D$. Então, pela Noção Comum 1, o ângulo $B\hat{C}D$ é maior do que o ângulo $A\hat{D}C$.

Como DCB é um triângulo que tem o ângulo $B\hat{C}D$ maior do que o ângulo $B\hat{D}C$, pela Proposição 3.3, segue que DB é maior do que BC.

Mas DA é igual a AC, assim a soma de BA e AC é maior do que BC.

De forma similar, podemos provar que a soma de AB com BC é maior do que AC, e que a soma de BC com CA é maior do que AB.

Então, em qualquer triângulo a soma de quaisquer dois lados é maior do que o lado restante.

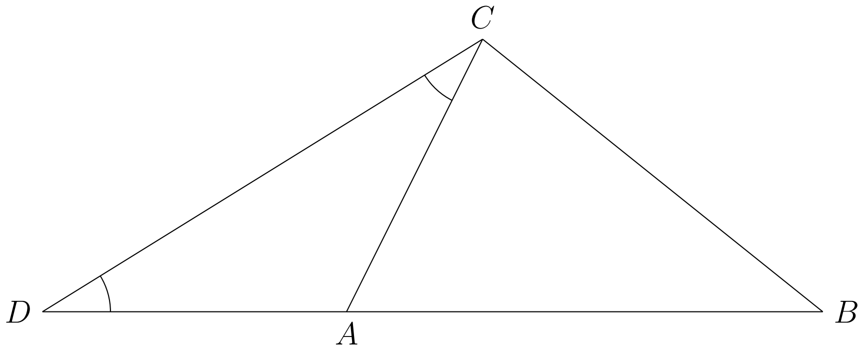

Figura 3.1: A desigualdade triangular.

□

3.2 Aproximação para π

Em HEATH[10], vemos que na terceira Proposição do livro *A medida do círculo*, Arquimedes encontra um limitante superior e um limitante inferior para o número π.

Veremos como Arquimedes encontrou essa aproximação. Ao longo da demonstração, ele usa algumas aproximações racionais para as raízes quadradas sem justificar como as encontrou. Neste trabalho omitimos as raízes e escrevemos apenas as aproximações racionais.

Usaremos a notação original da referência para representar um número que possui parte inteira e fracionária.

Proposição 3.4. *A razão entre a circunferência de qualquer círculo pelo seu diâmetro é menor do que $3\frac{1}{7}$ e maior do que $3\frac{10}{71}$.*

Demonstração. Nesta primeira parte, encontraremos um limitante superior para π.

Sejam AB o diâmetro de uma circunferência de centro O e AC a tangente à circunferência passando por A de modo que $A\hat{O}C$ seja um terço de um ângulo reto. Então

$$\frac{OA}{AC} > \frac{265}{153} \text{ e } \frac{OC}{AC} > \frac{306}{153}.$$

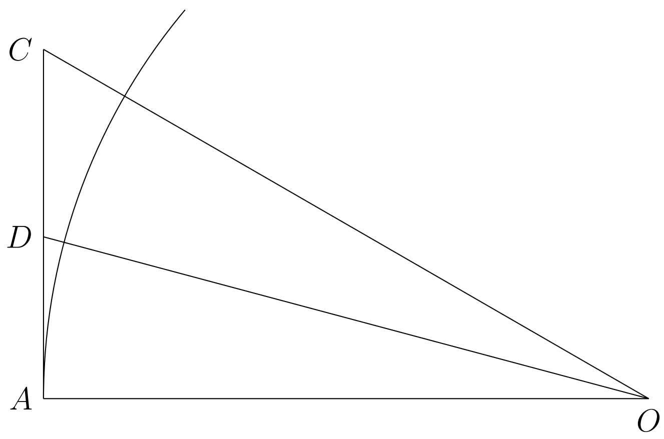

Figura 3.2: Limitante superior I.

Considere OD a bissetriz de $A\hat{O}C$ onde D é um ponto da reta AC. Então, pela Proposição 3 do livro VI de *Elementos*[2], segue que

$$\frac{CO}{OA} = \frac{CD}{DA}$$

ou seja,

$$\frac{CO}{OA} = \frac{CD}{DA} \Rightarrow \frac{CO+OA}{OA} = \frac{CD+DA}{DA} = \frac{CA}{DA} \Rightarrow \frac{CO+OA}{CA} = \frac{OA}{DA}.$$

Sendo assim

$$\begin{aligned}\frac{OA}{DA} &= \frac{CO+OA}{CA} = \frac{CO}{CA} + \frac{OA}{CA}\\ &> \frac{306}{153} + \frac{265}{153}\\ &= \frac{571}{153}.\end{aligned}$$

Pelo teorema de Pitágoras, $OD^2 = OA^2 + AD^2$, o que implica

$$\begin{aligned}\frac{OD^2}{AD^2} &= \frac{OA^2}{AD^2} + 1\\ &> \left(\frac{571}{153}\right)^2 + 1 = \frac{349450}{23409}\end{aligned}$$

[2]Essa proposição é a que hoje conhecemos como teorema da bissetriz interna.

ou seja,

$$\frac{OD}{AD} > \frac{591\frac{1}{8}}{153}.$$

Considere OE a bissetriz de $A\hat{O}D$ onde E é um ponto da reta AC. Usando novamente a Proposição 3 do livro VI de *Elementos*, e usando o mesmo raciocínio que fizemos acima, segue que

$$\frac{OA}{EA} > \frac{1162\frac{1}{8}}{153}$$

e

$$\frac{OE}{EA} > \frac{1172\frac{1}{8}}{153}.$$

Considere OF a bissetriz de $A\hat{O}E$ onde F é um ponto da reta AC. Usando novamente a Proposição 3 do livro VI de *Elementos*, e usando o mesmo raciocínio que fizemos acima, segue que

$$\frac{OA}{AF} > \frac{2334\frac{1}{4}}{153}$$

e

$$\frac{OF}{FA} > \frac{2339\frac{1}{4}}{153}.$$

Considere OG a bissetriz de $A\hat{O}F$ onde G é um ponto da reta AC. Usando novamente a Proposição 3 do livro VI de *Elementos*, e usando o mesmo raciocínio que fizemos acima, segue que

$$\frac{OA}{AG} > \frac{4673\frac{1}{2}}{153}.$$

Como $A\hat{O}C$ foi bisseccionado quatro vezes, então $A\hat{O}G$ é a quadragésima oitava parte de um ângulo reto. Considere o ponto H na reta AC de modo que ele esteja do lado oposto a semirreta que contém os pontos A e C e de tal forma que o ângulo $A\hat{O}H$ tenha a mesma medida do que $A\hat{O}G$. Então $G\hat{O}H$ é a vigésima quarta parte de um ângulo reto e GH é um lado do polígono regular de 96 lados circunscrito à circunferência.

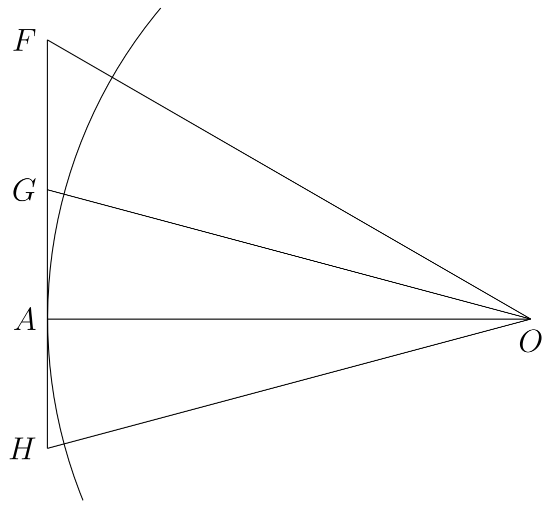

Figura 3.3: Limitante superior II.

Sendo $AB = 2AO$ e $GH = 2AG$, segue que

$$\frac{AB}{96 \cdot GH} > \frac{1}{96}\frac{4673\frac{1}{2}}{153} = \frac{4673\frac{1}{2}}{14688}.$$

Mas

$$\frac{14688}{4673\frac{1}{2}} = 3 + \frac{667\frac{1}{2}}{4673\frac{1}{2}} < 3\frac{1}{7}.$$

Conclui-se que a razão entre o perímetro de um polígono regular de 96 lados circunscrito a uma circunferência e o seu diâmetro é menor do que $3\frac{1}{7}$.

Agora, encontraremos um limitante inferior para π.

Sejam AB o diâmetro de uma circunferência de centro O e C um ponto da circunferência de tal forma que $C\hat{A}B$ seja igual a um terço de um ângulo reto. Então

$$\frac{AC}{BC} < \frac{1351}{780}.$$

Considere a bissetriz AD de $B\hat{A}C$ onde D é um ponto da circunferência e D' é a interseção da bissetriz com o segmento BC. Observe que $A\hat{C}B$ e $A\hat{D}B$ são retos. Sendo AD bissetriz e $D\hat{B}D'$ e $D\hat{A}C$ inscritos sob o mesmo arco DC, segue que

$$B\hat{A}D = D'\hat{A}C = D\hat{B}D'.$$

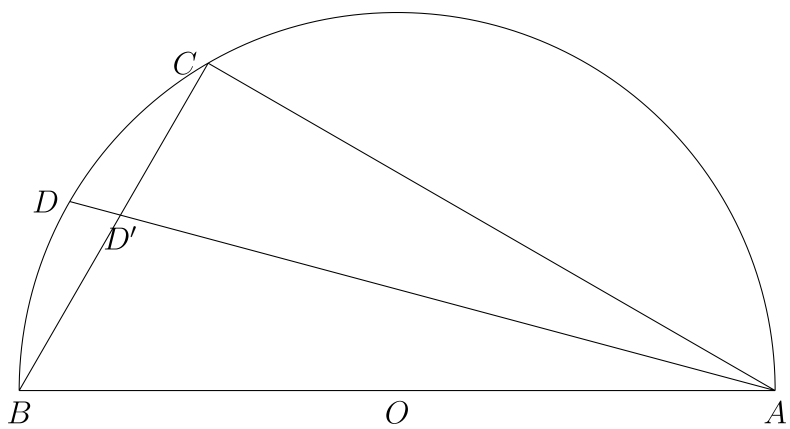

Figura 3.4: Limitante inferior I.

Concluímos que os triângulos ADB e BDD' são semelhantes, de onde segue que

$$\begin{aligned}\frac{AD}{BD} = \frac{BD}{DD'} = \frac{AB}{BD'} &\\ = \frac{AB+AC}{BD'+CD'} &\\ = \frac{AB+AC}{BC}.&\end{aligned}$$

Como $\frac{AB}{BC} = \frac{2}{1}$, temos

$$\begin{aligned}\frac{AD}{DB} &= \frac{AB+AC}{BC}\\ &= \frac{AB}{BC} + \frac{AC}{BC}\\ &< \frac{2}{1} + \frac{1351}{780} = \frac{2911}{780}.\end{aligned}$$

Pelo teorema de Pitágoras, $AB^2 = AD^2 + BD^2$, e

$$\begin{aligned} \frac{AB^2}{BD^2} &= \frac{AD^2}{BD^2} + 1 \\ &< \frac{2911^2}{780^2} + 1 = \frac{9082321}{608400} \end{aligned}$$

ou seja,

$$\frac{AB}{BD} < \frac{3013\frac{3}{4}}{780}.$$

Considere a bissetriz AE de $B\hat{A}D$ onde E é um ponto da circunferência. Usando o mesmo raciocínio que fizemos acima, segue que

$$\frac{AE}{BE} < \frac{5924\frac{3}{4}}{780} = \frac{1823}{240}$$

e

$$\frac{AB}{BE} < \frac{1838\frac{9}{11}}{240}.$$

Considere a bissetriz AF de $B\hat{A}E$ onde F é um ponto da circunferência. Usando o mesmo raciocínio que fizemos acima, segue que

$$\frac{AF}{BF} < \frac{3661\frac{9}{11}}{240} = \frac{1007}{66}$$

e

$$\frac{AB}{BF} < \frac{1009\frac{1}{6}}{66}.$$

Considere a bissetriz AG de $B\hat{A}F$ onde G é um ponto da circunferência. Usando o mesmo raciocínio que fizemos acima, segue que

$$\frac{AG}{BG} < \frac{2016\frac{1}{6}}{66}$$

e

$$\frac{AB}{BG} < \frac{2017\frac{1}{4}}{66}.$$

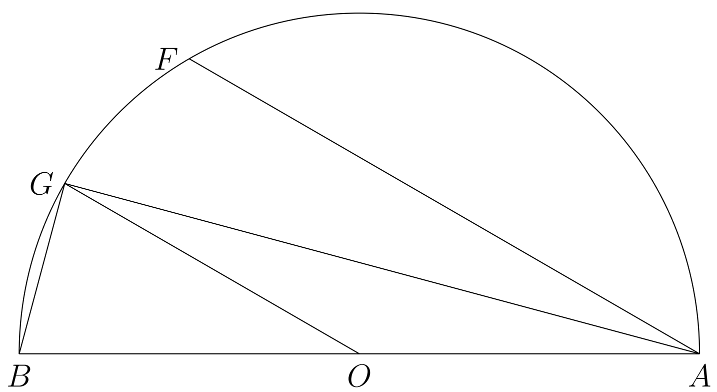

Figura 3.5: Limitante inferior II.

Como $B\hat{A}C$ foi bisseccionado quatro vezes, então $B\hat{A}G$ é a décima sexta parte de $B\hat{A}C$, ou a quadragésima oitava parte de um ângulo reto. Então o ângulo central $B\hat{O}G$ é a vigésima quarta parte de um ângulo reto ou a nonagésima sexta parte de quatro ângulos retos. Assim, BG é o lado de um polígono regular de 96 lados inscrito na circunferência.

Daí

$$\frac{96 \cdot BG}{AB} > \frac{6336}{2017\frac{1}{4}}.$$

Mas

$$\frac{6336}{2017\frac{1}{4}} > 3\frac{10}{71}.$$

Conclui-se que a razão entre o perímetro de um polígono regular de 96 lados inscrito em uma circunferência e o seu diâmetro é maior do que $3\frac{10}{71}$.

Logo

$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}.$$

□

3.3 Propriedade de Arquimedes

Em HEATH[10], vimos que no quinto axioma do livro I de *Sobre a esfera e o cilindro*, Arquimedes escreve[3] que: se $x > 0$ e y são dois números reais quaisquer, então existe pelo menos um número natural n tal que $nx > y$.

Geometricamente, isso quer dizer que um segmento pode ser unido a si mesmo um número finito de vezes, de forma que o segmento resultante tenha comprimento maior do que qualquer outro segmento dado.

Embora tenha sido admitido como axioma por Arquimedes, esse resultado pode ser demonstrado para os números reais, admitindo-se a propiedade do supremo. Seguiremos GUIDORIZZI[11].

Definição 3.1 (Propriedade do supremo)**.** *Todo conjunto de números reais, não vazio e limitado superiormente, admite supremo.*

Teorema 3.2 (Propriedade de Arquimedes)**.** *Se $x > 0$ e y são dois números reais quaisquer, então existe pelo menos um número natural n tal que $nx > y$.*

Demonstração. Vamos supor que para qualquer natural n, tenhamos $nx \leq y$. Considere o conjunto $A = \{nx : n \in \mathbb{N}\}$. Então, A é não vazio, pois $1 \cdot x = x \in A$ e é limitado superiormente, pois por hipótese $nx \leq y$. Logo, A admite supremo, que denotaremos por s. Como $x > 0$, então $s - x < s$ e $s - x$ não é cota superior de A. Daí, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $s - x < mx$. Disso, concluímos que $s < (1 + m)x$. Sendo $1 + m$ um natural, então $(1 + m)x \in A$. Mas s é o supremo de A. Absurdo.

Então, existe algum $n \in \mathbb{N}$ tal que $nx > y$. □

[3]Em linguagem moderna

3.4 Desigualdade de Ptolomeu

Este é um problema proposto por STANKOVA[12]. Usaremos o resultado sobre a inscrição de quadriláteros para verificarmos onde vale a igualdade.

Teorema 3.3. *Considere o quadrilátero $ABCD$. Então*

$$AB \cdot CD + BC \cdot DA \geq AC \cdot BD$$

ocorrendo a igualdade apenas se $ABCD$ for um quadrilátero inscritível.

Demonstração. Construímos o ponto P de tal forma que os triângulos APB e DCB sejam semelhantes. Observe que isso é possível pois temos acesso ao ângulo $B\hat{D}C$ e a razão entre os lados AB e DB. Daí,

$$BD = \frac{BA \cdot DC}{AP}.$$

Como $A\hat{B}P = A\hat{B}D + D\hat{B}P$ e $D\hat{B}C = D\hat{B}P + P\hat{B}C$, e como $A\hat{B}P = D\hat{B}C$, segue que $A\hat{B}D = P\hat{B}C$. Da semelhança acima, temos também que

$$\frac{AB}{BD} = \frac{PB}{BC}.$$

O último parágrafo mostra que os triângulos ABD e PBC possuem um ângulo congruente e os lados que formam esse ângulo são proporcionais, logo esses triângulos são semelhantes. Daí,

$$BD = \frac{BC \cdot AD}{PC}.$$

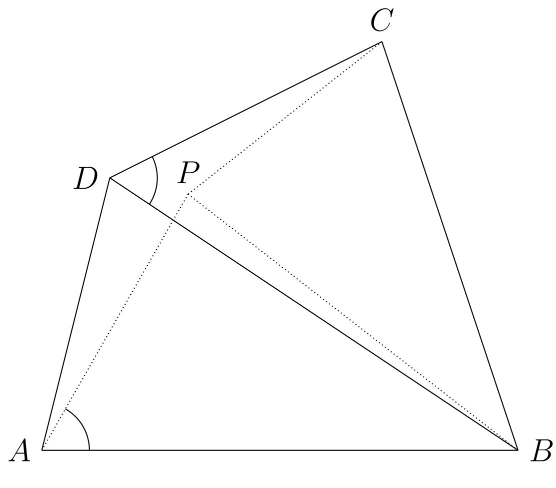

Figura 3.6: A desigualdade de Ptolomeu.

Se o ponto P for interior ao triângulo ABD, o raciocínio é completamente análogo e também conseguimos concluir que os triângulos ABD e PBC são semelhantes.

Da desigualdade triangular,concluímos que $AP + PC \geq AC$. Multiplicando ambos os lados de forma conveniente por BD, obtemos $BD(AP + PC) \geq BD \cdot AC$. Portanto

$$AB \cdot CD + BC \cdot DA \geq AC \cdot BD.$$

Se A, P e C são colineares, temos a igualdade. Nesse caso, da semelhança de BAP e BDC segue que os ângulos BAC e BDC são congruentes, ou seja, o quadrilátero é inscritível.

□

3.5 Desigualdade de Bernoulli

A desigualdade de Bernoulli é uma desigualdade clássica que sempre é abordada no estudo do princípio da indução finita. No capítulo 5 vamos mostrar uma aplicação interessante dessa desigualdade. Vamos enunciar e demonstrar a desigualdade e outras duas variações da mesma.

Teorema 3.4 (Desigualdade de Bernoulli)**.** *Sejam n um número natural e h um número real tal que $h \geq -1$. Então $(1+h)^n \geq 1+nh$.*

Demonstração. Usaremos o princípio da indução finita. Para $n = 1$, temos que $(1+h)^n = 1+h$. Por outro lado, $1+nh = 1+h$. Daí, $(1+h)^n \geq 1+nh$ para $n = 1$.

Suponhamos, por hipótese, que $(1+h)^k \geq 1+kh$, para algum $k \in \mathbb{N}$. Como $h \geq -1$, podemos multiplicar ambos os lados dessa desigualdade por $(1+h)$ que a mesma se mantém. Logo,

$$\begin{aligned}
(1+h)^k(1+h) &\geq (1+kh)(1+h)\\
(1+h)^{k+1} &\geq 1+h+kh+kh^2\\
&\geq 1+(k+1)h+kh^2.
\end{aligned}$$

Como $h^2 \geq 0$ e $k \in \mathbb{N}$, então $1+(k+1)h+kh^2 \geq 1+(k+1)h$. Por transitividade, segue que $(1+h)^{k+1} \geq 1+(k+1)h$.

Concluímos por indução que $(1+h)^n \geq 1+nh$, para todo $n \in \mathbb{N}$ e $h \geq -1$. □

A seguir mostraremos duas variantes dessa desigualdade.

Proposição 3.5. *Sejam n um número natural e h um número real não negativo. Então $(1+h)^n \geq 1+nh+\dfrac{n(n-1)}{2}h^2$.*

Demonstração. Usaremos o princípio da indução finita. Para $n = 1$, temos que $(1+h)^n = 1+h$. Por outro lado, $1+nh+\dfrac{n(n-1)}{2}h^2 = 1+h$. Daí, $(1+h)^n \geq 1+nh+\dfrac{n(n-1)}{2}h^2$ para $n = 1$.

Suponhamos, por hipótese, que $(1+h)^k \geq 1+kh+\dfrac{k(k-1)}{2}h^2$, para algum $k \in \mathbb{N}$. Como $h \geq 0$, podemos multiplicar ambos os lados dessa desigualdade por $(1+h)$ que a mesma se mantém. Logo,

$$\begin{aligned}
(1+h)^k(1+h) &\geq \left[1+kh+\frac{k(k-1)}{2}h^2\right](1+h)\\
(1+h)^{k+1} &\geq 1+h+kh+kh^2+\frac{k(k-1)}{2}h^2+\frac{k(k-1)}{2}h^3\\
&\geq 1+(k+1)h+kh^2+\frac{k(k-1)}{2}h^2+\frac{k(k-1)}{2}h^3\\
&\geq 1+(k+1)h+\frac{2kh^2+(k^2-k)h^2}{2}+\frac{k(k-1)}{2}h^3\\
&\geq 1+(k+1)h+\frac{k(k+1)}{2}h^2+\frac{k(k-1)}{2}h^3
\end{aligned}$$

Como $h \geq 0$ e $k \in \mathbb{N}$, então $\frac{k(k-1)}{2}h^3 \geq 0$, portanto $1+(k+1)h+\frac{k(k+1)}{2}h^2+\frac{k(k-1)}{2}h^3 \geq 1+(k+1)h+\frac{k(k+1)}{2}h^2$. Por transitividade, segue que $(1+h)^{k+1} \geq 1+(k+1)h+\frac{k(k+1)}{2}h^2$.

Concluímos por indução que $(1+h)^n \geq 1+nh+\dfrac{n(n-1)}{2}h^2$, para todo $n \in \mathbb{N}$ e $h \geq 0$. □

Proposição 3.6. *Sejam n um número natural e h um número real não nulo. Então $(1+h)^{2n} \geq 1+2nh$.*

Demonstração. Usaremos o princípio da indução finita. Para $n=1$, temos que $(1+h)^{2n} = (1+h)^2 = 1+2h+h^2$. Por outro lado, $1+2nh = 1+2h$. Como $h \neq 0$, então $(1+h)^{2n} \geq 1+2nh$, para $n=1$.

Suponhamos, por hipótese, que $(1+h)^{2k} \geq 1+2kh$, para algum $k \in \mathbb{N}$. Então,

$$\begin{aligned}(1+h)^{2(k+1)} &= (1+h)^{2k+2} = (1+h)^{2k}(1+h)^2 \\ &\geq (1+2kh)(1+h)^2 \\ &\geq (1+2kh)(1+2h) \\ &= 1+2h+2kh+4kh^2 \\ &= 1+2(k+1)h+4kh^2\end{aligned}$$

Como $h \neq 0$ e $k \in \mathbb{N}$, então $1+2(k+1)h+4kh^2 \geq 1+2(k+1)h$. Por transitividade, segue que $(1+h)^{2(k+1)} \geq 1+2(k+1)h$.

Concluímos por indução que $(1+h)^{2n} > 1+2nh$, para todo $n \in \mathbb{N}$ e $h \neq 0$. □

3.6 O número e

Sabemos que a sequência cujo termo geral é dado por

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \tag{3.1}$$

é convergente e converge para a importante constante matemática e: o número de Euler. Seguindo GUIDORIZZI[11], vamos mostrar que $a_n < 3$, para todo $n \geq 1$. Para isso, precisaremos de um lema auxiliar.

Lema 3.1. *Considere $n \in \mathbb{N}$. Então $2^n \leq (n+1)!$.*

Demonstração. Vamos usar o princípio da indução finita. Para $n=1$, segue que $2^n = 2$ e que $(n+1)! = 2! = 2$. Logo, $2^n \leq (n+1)!$ quando $n=1$.

Suponha, por hipótese, que $2^k \leq (k+1)!$, para algum $k \in \mathbb{N}$. Então, $2^{k+1} = 2^k 2 \leq 2(k+1)!$. Como $k \in \mathbb{N}$, então $2 \leq (k+2)$. Segue que $2^{k+1} \leq (k+2)(k+1)! = ((k+1)+1)!$.

Concluímos por indução que $2^n \leq (n+1)!$, para todo $n \in \mathbb{N}$. □

Teorema 3.5. *Considere a sequência (3.1). Então $a_n < 3$, para todo $n \geq 1$.*

Demonstração. Reescrevemos o termo geral da sequência como

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n &= 1+\binom{n}{1}\frac{1}{n}+\binom{n}{2}\frac{1}{n^2}+\binom{n}{3}\frac{1}{n^3}+\ldots+\binom{n}{n}\frac{1}{n^n} \\ &= 1+1+\frac{n(n-1)}{n^2}\frac{1}{2!}+\frac{n(n-1)(n-2)}{n^3}\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{n!}{n^n}\frac{1}{n!}\end{aligned}$$

Observe que as frações que multiplicam os números $\frac{1}{i!}$, com $i \in \{1, \ldots, n\}$, são todas menores do que 1. Assim,

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq 1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i!}.$$

Do lema acima, temos que

$$\frac{1}{(n+1)!} \leq \frac{1}{2^n}$$

de onde segue que

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq 1 + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{2^i}.$$

Sabemos que a soma infinita dos termos da progressão geométrica cujo termo geral é dado por $b_n = \frac{1}{2^n}$ é igual a 2. Portanto,

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 1 + 2 = 3.$$

Concluímos que $a_n < 3$, para todo $n \geq 1$. □

3.7 Quem é maior: e^π ou π^e?

Este é um problema interessante que aparece em Cálculo, que compara a função exponencial quando calculada em duas das mais importantes constantes matemáticas. Há várias soluções, exibiremos uma que usa a expansão da função e^x através da sua série de Taylor.

Sabemos que se j é nulo ou inteiro positivo e $x \in \mathbb{R}$, então

$$e^x = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{j!}.$$

Para valores positivos de x sabemos que a soma parcial da série é menor do que a série. Assumindo $x > 0$ e tomando apenas os dois primeiros termos da série, temos

$$e^x > 1 + x. \tag{3.2}$$

Como $\pi > e$ (podemos afirmar isso com base no que já apresentamos acima sobre a aproximação de Arquimedes para π e sobre o fato de que $e < 3$) então $\dfrac{\pi}{e} - 1 > 0$. Tomando-se x como esse número e aplicando-o na inequação 3.2, temos

$$e^{\frac{\pi}{e}-1} > 1 + \frac{\pi}{e} - 1 = \frac{\pi}{e}.$$

Lembre-se de que

$$e^{\frac{\pi}{e}-1} = e^{\frac{\pi}{e}}e^{-1} = \frac{e^{\frac{\pi}{e}}}{e}.$$

Logo,

$$e^{\frac{\pi}{e}-1} > \frac{\pi}{e} \Leftrightarrow \frac{e^{\frac{\pi}{e}}}{e} > \frac{\pi}{e} \Leftrightarrow e^{\frac{\pi}{e}} > \pi.$$

Elevando a última desigualdade acima a e, concluímos enfim que

$$e^\pi > \pi^e.$$

4 Desigualdades Notáveis na Análise Matemática

Neste capítulo estudaremos algumas das desigualdades mais interessantes da Análise. Exibiremos e demostraremos as desigualdades em sua forma geral, com noções de medida e integração. Admitiremos conhecidas noções de Cálculo Diferencial. Além disso, apresentaremos as desigualdades de Gagliardo-Nirenberg, de Poincaré e de Gronwall, importantes na teoria de equações diferencias parciais, e a desigualdade do valor médio, importante na Análise Vetorial. A principal referência do capítulo é BARTLE[13]. As demais serão citadas no momento apropriado.

4.1 Tópicos elementares de medida e integração

Nesta seção, com auxílio de BARTLE[13], estudaremos o conceito de medida e integração para enurciarmos e demostrarmos algumas desigualdades.

Estudaremos funções cujo domínio é um conjunto X e cujo contradomínio é o conjunto $\mathbb{R}$ ou os reais estendidos (que serão definidos adiante). O conjunto X é arbitrário, no entanto, deverá existir uma família de subconjuntos de X que apresentem um bom corportamento, que será descrito na definição a seguir. A notação A^c representa o complementar do conjunto A.

Definição 4.1. *Uma família $\mathcal{X}$ de subconjuntos de um conjunto X é dita uma σ-álgebra se*

1. $\emptyset, X \in \mathcal{X}$.
2. *Se* $A \in \mathcal{X}$, *então* $A^c \in \mathcal{X}$.
3. *Se* (A_n) *é uma sequência de subconjuntos de* $\mathcal{X}$, *então* $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{X}$.

Um par ordenado $(X, \mathcal{X})$ será chamado de espaço mensurável. A seguir, daremos a definição de quando uma função $f : X \to \mathbb{R}$ é mensurável.

Definição 4.2. *Uma função $f : X \to \mathbb{R}$ é dita mensurável se para qualquer número real α, tem-se que o conjunto*

$$\{x \in X : f(x) > \alpha\}$$

é um elemento de $\mathcal{X}$.

Observe que a definição de mensurabilidade de uma função depende da σ-álgebra do conjunto X. Doravante, ficará implícito que ao nos referirmos a uma função mensurável, seu domínio é X, com uma σ-álgebra fixa $\mathcal{X}$ e contradomínio $\mathbb{R}$ (mais adiante o contradomínio poderá ser o conjunto dos reais estendidos). O lema a seguir nos diz que dadas funções mensuráveis, então algumas novas funções que surgem a partir dessas também são mensuráveis.

Lema 4.1. *Se f e g são funções mensuráveis e c é um número real, então as funções $cf, f^2, (f+g), fg$ e $|f|$ também são mensuráveis.*

Demonstração. Ver BARTLE[13], página 9. □

Considere $f : X \to \mathbb{R}$. Definimos as funções $f^+ : X \to \mathbb{R}$ e $f^- : X \to \mathbb{R}$, duas funções não negativas, como

$$f^+(x) = \sup\{f(x), 0\} \text{ e } f^-(x) = \sup\{-f(x), 0\}.$$

A função f^+ é chamada de parte positiva de f e a função f^- é chamada parte negativa de f. É fácil ver que elas são, de fato, não negativas e que

$$f = f^+ - f^- \text{ e } |f| = f^+ + f^-$$

de onde segue que

$$f^+ = \frac{1}{2}(|f| + f) \text{ e } f^- = \frac{1}{2}|f| - f.$$

Do lema acima, concluímos que f^+ e f^- são mensuráveis.

Considere o conjunto $\mathbb{R}$. Ele não será suficiente para o estudo de limites e supremos que aparecerão adiante. Então invocaremos o conjunto $\overline{\mathbb{R}}$, o conjunto dos números reais estendido, que nada mais é do que o conjunto dos números reais unido com dois novos elementos, que denotaremos por $+\infty$ e por $-\infty$. A seguir, daremos a definição de função mensurável quando seu contradomínio for $\overline{\mathbb{R}}$.

Definição 4.3. *Uma função $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ é mensurável, se para qualquer número real α, tem-se que o conjunto*

$$\{x \in X : f(x) > \alpha\}$$

é um elemento de $\mathcal{X}$. O conjunto de todas as funções mensuráveis $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ é denotado por $M(X, \mathcal{X})$.

Note que a definição é completamente análoga a que já fizemos. Para incluir os dois novos elementos de $\overline{\mathbb{R}}$ basta notar que os conjuntos

$$\{x \in X : f(x) = +\infty\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \{x \in X : f(x) > n\},$$

$$\{x \in X : f(x) = -\infty\} = \left\{ \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{x \in X : f(x) > -n\} \right\}^c,$$

são ambos elementos de $\mathcal{X}$.

Dado um espaço mensurável $(X, \mathcal{X})$. Definiremos uma medida para esse espaço. Esse valor será associado ao que conhecemos por comprimento, área, massa, etc. Uma sequência (E_n) é dita sequência de conjuntos disjuntos, se $E_n \bigcap E_m = \emptyset$, quando $n \neq m$.

Definição 4.4. *Uma função* $\mu : \mathcal{X} \to \overline{\mathbb{R}}$ *é uma medida se:*

1. $\mu(\emptyset) = 0$.

2. *Para cada* $E \in \mathcal{X}$, *tem-se* $\mu(E) \geq 0$.

3. *Se* (E_n) *é uma sequência de conjuntos disjuntos de* $\mathcal{X}$, *então* $\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(E_n)$.

Se $\mu(E) \neq +\infty$, diremos que o conjunto E tem medida finita. Se existe uma sequência (E_n) tal que $\mathcal{X} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$ e $\mu(E_n) \neq +\infty, \forall n \in \mathbb{N}$, diremos que μ é σ-finita.

A seguir, veremos um lema que nos dá um resultado bastante intuitivo.

Lema 4.2. *Seja* μ *uma medida em um espaço* $(X, \mathcal{X})$. *Se* $E, F \in \mathcal{X}$ *e* $E \subset F$, *então* $\mu(E) \leq \mu(F)$. *Se* $\mu(E) < +\infty$, *então* $\mu(F \setminus E) = \mu(F) - \mu(E)$.

Demonstração. Podemos escrever $F = E \bigcup (F \setminus E)$ onde os conjuntos E e $F \setminus E$ são disjuntos, ou seja, $E \bigcap (F \setminus E) = \emptyset$. Então

$$\mu(F) = \mu(E) + \mu(F \setminus E). \tag{4.1}$$

Sendo $\mu(F \setminus E) \geq 0$, segue que $\mu(F) \geq \mu(E)$. Se $\mu(E) < +\infty$, basta subtraí-lo de ambos os lados da equação 4.1 para obtermos $\mu(F \setminus E) = \mu(F) - \mu(E)$. □

Com a função medida definida, podemos definir um espaço de medida.

Definição 4.5. *Sejam* X *um conjunto,* $\mathcal{X}$ *uma* σ*-álgebra de* X *e* μ *uma medida definida em* $\mathcal{X}$. *O trio* $(X, \mathcal{X}, \mu)$ *será chamado de espaço de medida.*

Seja P uma propriedade em um espaço de medida. Diremos que P acontece quase sempre com relação a μ, se existe um conjunto $A \in \mathcal{X}$ tal que $\mu(A) = 0$ e P é válida em A^c. Para as próximas observações, considere esse mesmo conjunto A. De forma análoga a propriedade P, diremos que duas funções f e g são quase sempre iguais com relação a μ, se $f(x) = g(x)$, para todo $x \in A^c$. Esta última definição pode ser estendida para uma sequência de funções: uma sequência (f_n) converge quase sempre com relação a μ se $f(x) = \lim f_n(x)$, quando $x \in A^c$.

Dado um espaço de medida $(X, \mathcal{X}, \mu)$. O conjunto de todas as funções mensuráveis (com respeito a $\mathcal{X}$) de X em $\overline{\mathbb{R}}$ será denotado por $M = M(X, \mathcal{X})$. Da mesma forma, o conjunto de todas as funções não negativas e mensuráveis de X em $\overline{\mathbb{R}}$ será denotado por $M^+ = M^+(X, \mathcal{X})$.

Vamos definir um tipo especial de função, que servirá como o caso básico para a definição de integral.

Definição 4.6. *Uma função é simples se sua imagem é um conjunto finito.*

Sejam X um conjunto e $A \subset X$. A função característica de A em X é a função $\chi_A : X \to \mathbb{R}$ definida como

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in A \\ 0, & \text{se } x \notin A. \end{cases}$$

Se φ é uma função simples definida em X ela pode ser escrita como

$$\varphi = \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{E_j}, \tag{4.2}$$

onde $a_j \in \mathbb{R}$ e $E_j \in \mathcal{X}$, sendo $\mathcal{X}$ uma σ-álgebra de X. Existe uma única maneira de escrever a função φ, chamada de forma canônica, onde os valores a_j são distintos e $E_j = \{x \in X : \varphi(x) = a_j\}$ são conjuntos disjuntos cuja união é o próprio X.

Feitas essas definições e observações, fixado um espaço $(X, \mathcal{X}, \mu)$, definiremos a integral de uma função simples não negativa.

Definição 4.7. *Considere uma função simples $\varphi \in M^+$ cuja representação canônica é dada por 4.2. A integral de φ com respeito a μ é o número real estendido*

$$\int \varphi \, d\mu = \sum_{j=1}^{n} a_j \mu(E_j). \tag{4.3}$$

Para entender melhor essa definição, lembramos que $0 \cdot (+\infty) = 0$ na álgebra de $\overline{\mathbb{R}}$, o que nos diz que a função nula sempre tem integral nula, independentemente da medida dos conjuntos E_j. Quando $r > 0$, $r \cdot (+\infty) = +\infty$ na álgebra de $\overline{\mathbb{R}}$, o que nos diz que a integral está bem definida.

A seguir, veremos um lema que dá duas propriedades elementares da integral.

Lema 4.3. *Considere as funções simples $\varphi, \psi \in M^+$ e $c \in \mathbb{R}$, com $c \geq 0$. Então,*

$$\int c\varphi \, d\mu = c \int \varphi \, d\mu \ \text{ e } \ \int (\varphi + \psi) \, d\mu = \int \varphi \, d\mu + \int \psi \, d\mu.$$

Demonstração. Ver BARTLE[13], páginas 28, 29 e 30. □

Definimos a integral apenas para funções simples não negativas. A seguir, estenderemos a definição para uma função não negativa qualquer. O espaço $(X, \mathcal{X}, \mu)$ ainda é fixo.

Definição 4.8. *Seja $f \in M^+$. A integral de f com respeito a μ é o número real estendido*

$$\int f \, d\mu = \sup \int \varphi \, d\mu. \tag{4.4}$$

Em (4.4), φ são todas as funções simples em M^+ que satisfazem $0 \leq \varphi(x) \leq f(x)$, para todo $x \in X$.

Se $f \in M^+$ e $E \in \mathcal{X}$, então $f\chi_E \in M^+$ e definimos a integral de f em E com respeito a μ como o número real estendido

$$\int_E f \, d\mu = \int f\chi_E \, d\mu. \tag{4.5}$$

O lema a seguir trata-se da motonocidade da integral em relação ao integrando e em relação ao conjunto onde ela está sendo calculada.

Lema 4.4. *Se $f, g \in M^+$ e $f \leq g$, e se $E, F \in \mathcal{X}$, com $E \subset F$, então*

$$\int f \, d\mu \leq \int g \, d\mu \ \text{ e } \ \int_E f \, d\mu \leq \int_F f \, d\mu.$$

Demonstração. Uma vez que $\varphi \in M^+$ são funções simples tais que $0 \leq \varphi \leq f$, então $0 \leq \varphi \leq g$. Logo, a primeira desigualdade é válida. Para demostrar a segunda, basta notar que $f\chi_E \leq f\chi_F$ e aplicar a primeira desigualdade. □

O teorema a seguir é importante na teoria de convergência de integrais. Uma sequência de funções (f_n) é dita crescente se $f_n \leq f_{n+1}$.

Teorema 4.1 (Convergência Monótona)**.** *Seja (f_n) uma sequência de funções monótonas crescentes em M^+ que convergem para f. Então*

$$\int f\ d\mu = \lim \int f_n\ d\mu.$$

Demonstração. Ver BARTLE[13], páginas 31 e 32. □

Esse resultado tem como corolário o fato de a integração ser linear em M^+.

Corolário 4.1. *Considere $f, g \in M^+$ e $c \in \mathbb{R}$, com $c \geq 0$. Então $cf \in M^+$ e $f+g \in M^+$, além disso,*

$$\int cf\ d\mu = c \int f\ d\mu \text{ e } \int (f+g)\ d\mu = \int f\ d\mu + \int g\ d\mu.$$

Considere uma sequência de funções (f_n). Então

$$\liminf f_n = \lim_{n\to\infty} \left(\inf_{m \geq n} f_m \right).$$

Equivalentemente, podemos escrevê-lo como $\liminf f_n = \sup\{\inf\{f_m : m \geq n\} : n \in \mathbb{N}\}$.

Com essa observação, podemos enunciar o lema de Fatou, que também é um corolário do teorema da convergência monótona.

Lema 4.5 (Fatou)**.** *Se $f_n \in M^+$, então*

$$\int (\liminf f_n)\ d\mu \leq \liminf \int f_n\ d\mu.$$

Demonstração. Considere a sequência (g_m) dada por $g_m = \inf\{f_m, f_{m+1}, \ldots\}$. Daí $g_m \leq f_n$ sempre que $m \leq n$. Assim,

$$\int g_m\ d\mu \leq \int f_n\ d\mu, m \leq n.$$

Então,

$$\int g_m\ d\mu \leq \liminf \int f_n\ d\mu.$$

A construção da sequência (g_m) nos diz que ela é crescente e converge para $\liminf f_n$. Pelo teorema da convergência monótona, segue que

$$\begin{aligned} \int (\liminf f_n)\ d\mu &= \lim \int g_m\ d\mu \\ &\leq \liminf \int f_n\ d\mu. \end{aligned}$$

□

Esse lema nos dá um corolário que será útil mais adiante.

Corolário 4.2. *Seja $f \in M^+$. Então $f(x) = 0$ quase sempre com relação a μ se, e somente se,*

$$\int f \, d\mu = 0.$$

Demonstração. Ver BARTLE[13], páginas 34 e 35. □

Agora, definiremos a integral de uma função $f \in M$, ou seja, f não é necessariamente não negativa. O contradomínio de f será o conjunto $\mathbb{R}$, pois a definição que daremos, se for feita para funções cuja imagem é $\overline{\mathbb{R}}$, pode não estar bem definida, com expressões do tipo $(+\infty) - (+\infty)$.

Definição 4.9. *O conjunto $L = L(X, \mathcal{X}, \mu)$ das funções integráveis consiste de todas as funções reais definidas em um conjunto X, com uma σ-álgebra $\mathcal{X}$ e uma medida μ, que tem tanto a parte postiva f^+ quanto a negativa f^- integrais finitas com respeito a μ. Neste caso, definimos a integral de f com respeito a μ como o número real*

$$\int f \, d\mu = \int f^+ \, d\mu - \int f^- \, d\mu. \tag{4.6}$$

Se $E \in \mathcal{X}$, então

$$\int_E f \, d\mu = \int_E f^+ \, d\mu - \int_E f^- \, d\mu.$$

É fácil ver que se $f = f_1 + f_2$, onde $f_1, f_2 \in M^+$ cujas integrais são finitas, então

$$\int f \, d\mu = \int f_1 \, d\mu + \int f_2 \, d\mu.$$

Teorema 4.2. *Uma função $f \in L$ se, e somente se, $|f| \in L$. Neste caso,*

$$\left| \int f \, d\mu \right| \leq \int |f| \, d\mu. \tag{4.7}$$

Demonstração. Se $f \in L$, então $f^+, f^- \in M^+$ e possuem integrais finitas. Como $|f|^+ = |f| = f^+ + f^-$ e $|f|^- = 0$, então

$$\begin{aligned} \left| \int f \, d\mu \right| &= \left| \int f^+ \, d\mu - \int f^- \, d\mu \right| \\ &\leq \int f^+ \, d\mu + \int f^- \, d\mu = \int |f| \, d\mu. \end{aligned}$$

□

Corolário 4.3. *Se f é mensurável e $g \in L$ com $|f| \leq |g|$, então $f \in L$ e*

$$\int |f| \, d\mu \leq \int |g| \, d\mu$$

Veremos agora que a integral é linear no conjunto L, no seguinte sentido:

Proposição 4.1. *Sejam $f, g \in L$ e $c \in \mathbb{R}$. Então $cf \in L$ e $f+g \in L$, e*

$$\int cf\ d\mu = c\int f\ d\mu \ \text{e}\ \int (f+g)\ d\mu = \int f\ d\mu + \int g\ d\mu.$$

Demonstração. Ver BARTLE[13], páginas 43 e 44. □

Recordaremos a definição de uma norma em um espaço vetorial V.

Definição 4.10. *Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. Uma função $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ é dita uma norma se*

1. $\|v\| \geq 0$ *para todo* $v \in V$;
2. $\|v\| = 0$ *se, e somente se,* $v = 0$;
3. $\|\alpha v\| = |\alpha|\|v\|$ *para todo* $v \in V$ *e* $\alpha \in \mathbb{R}$;
4. $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$ *para todo* $v, w \in V$.

Um espaço vetorial V junto com uma norma $\|\cdot\|$ é chamado espaço vetorial normado. Se $v \neq 0$ e $\|v\| = 0$, então a função $\|\cdot\|$ é dita uma seminorma.

Definição 4.11. *Se $f \in L$, então definimos*

$$\|f\|_\mu = \int |f|\ d\mu.$$

As operações dadas na Proposição 4.1 mostram que L é um espaço vetorial (não é difícil ver, é apenas trabalhoso) e veremos que $\|\cdot\|_\mu$ é uma seminorma em L.

Lema 4.6. *A função $\|\cdot\|_\mu$ é uma seminorma em L. Também, $\|f\|_\mu = 0$ se, e somente se, $f(x) = 0$ quase sempre com relação a μ.*

Demonstração. É trivial notar que $\|f\|_\mu \geq 0$ e que $\|\alpha f\|_\mu = |\alpha|\|f\|_\mu$. Lembre-se que f e g são funções reais, então vale a desigualdade triangular com o módulo, ou seja, $|f + g| \leq |f| + |g|$. Daí

$$\begin{aligned} \|f+g\|_\mu &= \int |f+g|\ d\mu \leq \int (|f| + |g|)\ d\mu \\ &= \int |f|\ d\mu + \int |g|\ d\mu = \|f\|_\mu + \|g\|_\mu. \end{aligned}$$

Do Corolário 4.2, segue que $\|\cdot\|_\mu$ é uma seminorma. □

A partir de agora, usaremos classes de funções ao invés de funções. Para recordar: seja X um conjunto e $\backsim$ uma relação de equivalência em X. Então $[x] = \{y \in X : x \backsim y\}$.

Definição 4.12. *Duas funções em L serão μ-equivalentes se elas forem iguais quase sempre com relação a μ. O espaço de Lebesgue $L_1 = L_1(X, \mathcal{X}, \mu)$ é o espaço de todas as classes de equivalência em L com a propriedade de serem μ-equivalentes. Se $[f] \in L_1$, definimos*

$$\|[f]\|_1 = \int |f|\ d\mu.$$

A norma é bem definida, pois se $g \in [f]$, então $g(x) = f(x)$ exceto em um conjunto de medida nula. Então, $\int |f| \, d\mu = \int |g| \, d\mu$. É fácil ver que L_1 com as operações $[\alpha f] = \alpha[f]$ e $[f] + [g] = [f + g]$ juntamente com $\| \cdot \|_1$ é um espaço vetorial normado.

Doravante, para simplificar a notação, escreveremos $\|f\|_1$ ao invés de $\|[f]\|_1$.

Definição 4.13. *Seja $1 \leq p < +\infty$. O espaço $L_p = L_p(X, \mathcal{X}, \mu)$ consiste de todas as classes de equivalência das funções reais mensuráveis f que são μ-equivalentes e cuja integral de $|f|^p$ com respeito a μ seja finita. Definimos neste espaço a norma*

$$\|f\|_p = \left(\int |f|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}}. \tag{4.8}$$

Como veremos mais adiante, o espaço L_p juntamente com a norma definida em (4.8) é um espaço vetorial normado.

Se p e q são reais com $p > 1$ que satisfazem a relação $p+q = pq$, ou equivalentemente, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, diremos que eles são índices conjugados.

Concluímos aqui os requisitos para apresentar uma das principais desigualdade deste trabalho: a desigualdade de Hölder.

4.2 A desigualdade de Young

Com auxílio de noções elementares de cálculo diferencial vamos demonstrar a desigualdade de Young, que será usada para demonstrar a desigualdade de Hölder.

Teorema 4.3 (Desigualdade de Young)**.** *Sejam $1 < p < \infty$ e q o conjugado de p, e a e b dois reais não negativos. Então*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}. \tag{4.9}$$

Demonstração. Sejam $\alpha \in]0, 1[$ e φ uma função definida para $t \geq 0$ por

$$\varphi(t) = \alpha t - t^\alpha.$$

Se $t \in]0, 1[$, então $\varphi'(t) < 0$ e se $t > 1$, então $\varphi'(t) > 0$. Como $\varphi'(1) = 0$, concluímos que $\varphi(t) \geq \varphi(1)$ e $\varphi(t) = 1$ apenas quando $t = 1$. Sendo assim,

$$t^\alpha \leq \alpha t + (1 - \alpha), t \geq 0. \tag{4.10}$$

Se u e v são reais não negativos, com $v \neq 0$, tomamos $t = \frac{u}{v}$ e multiplicamos (4.10) por v, obtendo

$$u^\alpha v^{1-\alpha} \leq \alpha u + (1 - \alpha)v,$$

sendo a igualdade válida somente se $u = v$, ou seja, $t = 1$.

Sendo p e q conjugados e tomando $\alpha = \frac{1}{p}$, se $a = u^{\frac{1}{p}}$ e $b = v^{\frac{1}{q}}$ são dois reais não negativos segue que

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

□

Observação 4.1. Valerá a igualdade apenas quando $a^p = b^q$, ou seja, $u = v$.

Existe uma variante dessa desigualdade, chamada de desigualdade de Young com ϵ, que é bastante usada para se fazer estimativas. Ela diz que se a e b forem reais não negativos, p e q os índices conjugados e $\epsilon > 0$, então

$$ab \leq \epsilon a^p + \epsilon p^{\frac{-q}{p}} q^{-1} b^q.$$

Para verificar tal desigualdade, basta notar que $ab = ((\epsilon p)^{\frac{1}{p}} a)(\frac{b}{(\epsilon p)^{\frac{1}{p}}})$ e aplicar a desigualdade de Young.

4.3 A desigualdade de Hölder

Essa desigualdade é de grande importância no estudo dos espaços L_p.

Teorema 4.4 (Desigualdade de Hölder)**.** *Sejam $f \in L_p$ e $g \in L_q$, com p e q índices conjugados. Então, $fg \in L_1$ e*

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

Demonstração. Se $f \in L_p$ e $g \in L_q$, com $\|f\|_p \neq 0$ e $\|g\|_q \neq 0$, vamos mostrar que $fg \in L_1$. Tomando $a = \frac{|f(x)|}{\|f\|_p}$ e $b = \frac{|g(x)|}{\|g\|_q}$ e substituindo em (4.9), segue que

$$\frac{|f(x)g(x)|}{\|f\|_p \|g\|_q} \leq \frac{|f(x)|^p}{p\|f\|_p^p} + \frac{|g(x)|^q}{q\|g\|_q^q}.$$

Como ambos os termos do lado direito são integráveis, segue do Corolário 4.3 e da Proposição 4.1 que fg é integrável. Integrando a desigualdade acima

$$\frac{\|fg\|_1}{\|f\|_p \|g\|_q} \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Como vimos acima, vale a igualdade se, e somente se, $a^p = b^q$, que neste caso significa que

$$\frac{|f(x)|^p}{\|f\|_p^p} = \frac{|g(x)|^q}{\|g\|_q^q} \Leftrightarrow \|g\|_q^q |f(x)|^p = \|f\|_p^p |g(x)|^q.$$

□

Observação 4.2. Fazendo $r = \|g\|_q^q$ e $s = \|f\|_p^p$ duas constantes, concluímos que a igualdade vale apenas se existem constantes reais r e s tais que

$$r|f(x)|^p = s|g(x)|^q, \forall x \in X.$$

Sendo r e s constantes não nulas, isso é equivalente a dizer que $|f(x)|^p$ e que $|g(x)|^q$ são linearmente dependentes $\forall x \in X$.

4.4 A desigualdade de Cauchy-Bunyakovskiĭ-Schwartz

Observe que $2+2=2\cdot 2$, ou seja, 2 é conjugado com 2, ou ainda, diremos que 2 é autoconjugado. Seu uso em Análise é importante pois ela é aplicada na integração de produtos.

Teorema 4.5 (Desigualdade de Cauchy-Bunyakovskiĭ-Schwartz). *Se $f, g \in L_2$, então fg é integrável e*

$$\left|\int fg\ d\mu\right| \leq \int |fg|\ d\mu \leq \|f\|_2\|g\|_2.$$

Demonstração. Observe que ela segue de forma imediata da desigualdade de Hölder, uma vez que 2 é autoconjugado. □

4.5 A desigualdade de Minkowski

Esta desigualdade é usada para mostrar que L_p junto com a norma (4.8) é um espaço vetorial normado. Vamos mostrar a única regra que não é verificada trivialmente que torna $(L_p, \|\cdot\|_p)$ um espaço vetorial normado: a desigualdade triangular.

Teorema 4.6 (Desigualdade de Minkowski). *Se $f, h \in L_p$, com $p \geq 1$, então $f+h \in L_p$ e*

$$\|f+h\|_p \leq \|f\|_p + \|h\|_p.$$

Demonstração. O caso $p=1$ já foi tratado acima quando vimos que L_1 é um espaço vetorial. Suponhamos $p>1$. Claramente, a soma $f+h$ é mensurável. Desde que

$$|f+h|^p \leq [2\sup\{|f|,|h|\}]^p \leq 2^p(|f|^p+|h|^p)$$

então do Corolário 4.3 e da Proposição 4.1 segue que $f+h \in L_p$.

Além disso, segue da desigualdade triangular nos números reais que

$$\begin{aligned}|f+h|^p &= |f+h||f+h|^{p-1}\\ &\leq |f||f+h|^{p-1} + |h||f+h|^{p-1}.\end{aligned} \tag{4.11}$$

Como $f+h \in L_p$, então $|f+h|^p \in L_p$. Como $p=(p-1)q$, então $|f+h|^{p-1} \in L_q$. Integrando a primeira parcela da soma do lado direito da inequação (4.11) e aplicando a desigualdade de Hölder, segue que

$$\begin{aligned}\int |f||f+h|^{p-1}\ d\mu &\leq \|f\|_p\left(\int |f+h|^{(p-1)q}\ d\mu\right)^{\frac{1}{q}}\\ &= \|f\|_p\|f+h\|_p^{\frac{p}{q}}.\end{aligned}$$

Fazendo o mesmo procedimento com a segunda parcela da soma do lado direito da inequação (4.11), obtemos

$$\begin{aligned}\int |h||f+h|^{p-1}\ d\mu &\leq \|h\|_p\left(\int |f+h|^{(p-1)q}\ d\mu\right)^{\frac{1}{q}}\\ &= \|h\|_p\|f+h\|_p^{\frac{p}{q}}.\end{aligned}$$

Com essas duas desigualdades podemos voltar em (4.11) e concluiremos que

$$\begin{aligned} \|f+h\|_p^p &\leq \|f\|_p \|f+h\|_p^{\frac{p}{q}} + \|h\|_p \|f+h\|_p^{\frac{p}{q}} \\ &= (\|f\|_p + \|h\|_p)\|f+h\|_p^{\frac{p}{q}}. \end{aligned} \tag{4.12}$$

Se $\|f+h\|_p = 0$, então a desigualde é trivial. Se $\|f+h\|_p \neq 0$, dividimos a desigualdade (4.12) por $\|f+h\|_p^{\frac{p}{q}}$. Sendo $p - \frac{p}{q} = 1$, obtemos a desigualdade de Minkowski. □

Observação 4.3. Como usamos a desigualdade de Hölder para demonstrar a desigualdade de Minkowski, valerá a igualdade apenas se $|f(x)|^p$ e $|g(x)|^q$ forem linearmente dependentes $\forall x \in X$.

4.6 A desigualdade de Jensen

Definição 4.14. *Sejam C um subconjunto convexo de um espaço vetorial real e $f : C \to \mathbb{R}$ uma função. Diremos que f é convexa se dados $c_1, c_2 \in C$ e $\forall t \in [0,1]$ temos*

$$f(tc_1 + (1-t)c_2) \leq tf(c_1) + (1-t)f(c_2).$$

A definição de convexidade de uma função tem a seguinte interpretação geométrica: a parte do gráfico da função f que contém a imagem dos pontos do segmento que une c_1 e c_2 no domínio está abaixo do segmento que une os pontos $f(c_1)$ e $f(c_2)$.

Usando cálculo diferencial, podemos dizer que uma função de uma variável é convexa se ela possui derivadas até segunda ordem e se a sua segunda derivada é sempre positiva.

Se f é uma função convexa de uma variável e c_0 é um ponto de seu domínio, então existe uma reta $y = m(c - c_0) + f(c_0)$ que passa pelo ponto $(c_0, f(c_0))$ que divide o plano em duas regiões de forma que o gráfico da função f esteja contido completamente em apenas um desses lados, ou seja,

$$f(c) \geq m(c - c_0) + f(c_0), \forall c \in C.$$

Na seção 6.6 de ROYDEN[14] há uma explicação para a existência dessa reta. Na demostração da desigualdade, tomamos $a = m$ e $b = f(c_0) - mc_0$.

Lembre-se que a função constante é uma função simples. Então se b é uma função constante, segue que

$$\int_E b\ d\mu = b\mu(E).$$

Teorema 4.7 (Desigualdade de Jensen)**.** *Sejam $f \in L_1$, $E \in \mathcal{X}$ tal que $\mu(E) = 1$ e $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função convexa. Então,*

$$\phi\left(\int_E f\ d\mu\right) \leq \int_E (\phi \circ f)\ d\mu. \tag{4.13}$$

Demonstração. Como ϕ é convexa, para cada $x_0 \in \mathbb{R}$, existem $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $\phi(x_0) = ax_0 + b$ e $\forall x \in \mathbb{R}$ vale também que $\phi(x) \geq ax + b$.

Tome $x_0 = \int_E f\ d\mu$. Então,

$$\phi\left(\int_E f\ d\mu\right) = \phi(x_0) = ax_0 + b = a\int_E f\ d\mu + b$$
$$= \int_E (af+b)\ d\mu \leq \int_E (\phi\circ f)\ d\mu.$$

□

Observação 4.4. Observe que a igualdade é válida apenas se existe um ponto x de tal forma que

$$f(x) = \int_E f\ d\mu. \tag{4.14}$$

Mas isso só ocorre se f for uma função constante, pois $f(x) = c$ e também

$$\int_E f\ d\mu = c\mu(E) = c\cdot 1 = c,$$

ou seja, vale a igualdade (4.14).

4.7 A desigualdade de Chebyshev

A desigualdade abaixo é demonstrada apenas com os conceitos básicos de medida e integração. Ela possui uma forma equivalente em Probabilidade, que envolve o valor esperado de uma variável e a variância.

Teorema 4.8 (Desigualdade de Chebyshev)**.** *Sejam f uma função mensurável real não negativa e λ um real positivo. Então,*

$$\mu\{x\in X : f(x)\geq\lambda\} \leq \frac{1}{\lambda}\int f\ d\mu.$$

Demonstração. Definimos o conjunto $E_\lambda = \{x\in X : f(x)\geq\lambda\}$ e a função $\varphi = \lambda\chi_{E_\lambda}$. Logo,

$$0\leq\varphi\leq f.$$

Como φ é uma função simples, temos que

$$\lambda\mu(E_\lambda) = \int\varphi\ d\mu \leq \int f\ d\mu. \tag{4.15}$$

Dividindo-se a inequação acima por λ, segue o resultado. □

Observação 4.5. Haverá igualdade apenas se $\varphi = f$, ou seja, f é constante igual a λ.

4.8 As desigualdades de Gagliardo-Nirenberg e Poincaré

Esta seção trará algumas desigualdades em $\mathbb{R}^n$ e que possuem aplicações, por exemplo, em equações diferenciais parciais. A seção 20.2 de ROYDEN[14] explica como adaptamos a noção abstrata de medida que construimos para criar a medida usual de $\mathbb{R}^n$ que conhecemos do Cálculo. Nossas referências para esta seção serão MUNKRES[15] e EVANS[16], onde estão demonstradas todas as afirmações que faremos.

Ao longo desta seção restringiremos nosso estudo a funções do tipo $f : A \to \mathbb{R}$, onde A é um aberto de $\mathbb{R}^n$.

Sejam $a \in A$ e $h \in \mathbb{R}^n$ de tal forma que $h \neq 0$ e que $a + h \in A$. Diremos que a função f é diferenciável no sentido de Fréchet no ponto a se exitir uma matriz linha B com n colunas de tal forma que

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a) - Bh}{|h|} = 0. \tag{4.16}$$

A notação Bh só faz sentido se h estiver escrito na forma de um vetor coluna com n linhas. A matriz B será denotada por $Df(a)$, e será chamada de derivada de f no ponto a. Diremos que a função f é diferenciável se for diferenciável em todos os pontos de seu domínio e nesse caso escreveremos Df como a derivada de f, subentendendo-se que ela pode ser aplicada em qualquer ponto de seu domínio.

Note que $Df(a)$ também pode ser vista como uma função de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}$, uma vez que $Df(a)(h) = Bh \in \mathbb{R}$.

Considere $\{e_1, \ldots, e_n\}$ a base canônica de $\mathbb{R}^n$. Definiremos o que são as derivadas parciais da função f. Neste caso, como f está definida em um aberto de $\mathbb{R}^n$, ela terá n derivadas parciais. Sendo t um número real, a i-ésima derivada parcial de f no ponto a é o seguinte limite

$$D_i f(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a + te_i) - f(a)}{t}.$$

Afirmamos que

$$Df(a) = \begin{bmatrix} D_1 f(a) & \ldots & D_n f(a) \end{bmatrix}.$$

Uma função diferenciável que possui todas as derivadas parciais contínuas é chamada de continuamente diferenciável. O conjunto C^1 denotará todas as funções continuamente diferenciáveis definidas em $\mathbb{R}^n$. Ao escrevermos $C^1(X)$ estamos falando de funções continuamente diferenciáveis definidas em um conjunto X. Doravante aparecerão mais alguns símbolos parecidos com esse, e o significado será o mesmo, se houver um par de parênteses em frente ao símbolo com um conjunto em seu interior, isso significa que o conjunto ao qual a letra C faz referência contém funções com uma determinada característica e o domínio dessas funções é o conjunto encerrado dentro dos parênteses.

O suporte de uma função é o fecho topológico do conjunto de pontos que não a anulam, que em nosso caso será o conjunto

$$\overline{\{a \in A : f(a) \neq 0\}}.$$

Lembre-se que em $\mathbb{R}^n$ dizer que um conjunto é compacto é equivalente a dizer que ele é fechado e limitado. Diremos que uma função f pertence ao conjunto C_c^1 se ela for continuamente diferenciável em $\mathbb{R}^n$ e possuir suporte compacto. O conjunto C_c^∞ denotará as funções definidas em $\mathbb{R}^n$ que possuem suporte compacto e com derivadas parciais de todas as ordens contínuas.

Se $1 \leq p < n$, o conjugado de Sobolev do número p é o número p^* definido por

$$p^* = \frac{np}{n-p}.$$

Com isso temos condições de enunciar a desigualdade de Gagliardo-Nirenberg. A demonstração que sugerimos usa a desigualdade de Hölder.

Teorema 4.9 (Desigualdade de Gagliardo-Nirenberg). *Se $1 \leq p < n$ e $f \in C_c^1(A)$, então existe uma constante C, dependendo apenas de p e de n, tal que*

$$\|f\|_{p^*} \leq C\|Df\|_p.$$

Demonstração. Ver EVANS[16], páginas 263 até 265. □

Vamos agora introduzir a desigualdade de Poincaré. Para isso, apresentaremos algumas novas notações e conceitos.

Continuamos trabalhando com uma função $f : A \to \mathbb{R}$, com A um aberto de $\mathbb{R}^n$.

O espaço de Sobolev $H^1(A)$ consiste de todas as funções $f \in L_2$ de tal forma que $Df \in L_2$.

A média de f sobre A será o número $(f)_A$ que definiremos como

$$(f)_A = \frac{1}{\mu(A)} \int_A f \, d\mu.$$

Se $(X, \mathcal{T})$ é um espaço topológico e $U, V \in \mathcal{T}$ de tal forma que U e V são disjuntos e não vazios cuja união é X, diremos que U e V formam uma separação para X. O espaço $(X, \mathcal{T})$ é conexo se não existe uma separação para X. Confira em WILLARD[17].

Para entender o que significa a fronteira ∂A de A ser suave, sugerimos que o leitor verifique a seção 24 de MUNKRES[15].

O gradiente ∇ é um operador que atua em funções escalares definidas em $\mathbb{R}^n$. Considerando $\{e_1, \ldots, e_n\}$ a base canônica de $\mathbb{R}^n$, podemos associá-lo ao que vimos anteriomente da seguinte forma: $D_i f = \nabla f \cdot e_i$. A divergência de uma função f definida de $\mathbb{R}^n$ para $\mathbb{R}^n$ é dada por: $\text{div} f = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} D_i(f \cdot e_i)$. O laplaciano Δ é um operador linear que calcula o divergente do gradiente de uma função definida em $\mathbb{R}^n$. O vetor $\vec{n}$ é o vetor normal a uma superfície. Para mais detalhes, consulte MUNKRES[15].

Teorema 4.10 (Desigualdades de Poincaré). *Sejam A um aberto, conexo e limitado do $\mathbb{R}^n$ com uma fronteira ∂A suave, $\vec{n}$ o vetor normal a essa região, $f \in H^1(A)$ e λ_1 o menor autovalor positivo de $-\Delta$ (com as condições de fronteira apropriadas). Então, as seguintes desigualdades se verificam:*

1. $\|\nabla f\|_2 \geq \lambda_1 \|f\|_2$ *quando* $f = 0$ *em* ∂A*;*
2. $\|\nabla f\|_2 \geq \lambda_1 \|f - (f_A)\|_2$ *quando* $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{n}} = 0$ *em* ∂A*.*

Demonstração. Ver SMOLLER[18], página 112. □

Observe que ambas as desigualdades obordadas nesta seção mostram que a norma de uma função (ou a norma da diferença entre uma função e a sua média) que atende a determinadas condições, seja em L_p ou L_{p^*} é sempre limitada superiormente pelo produto de uma constante pela norma de sua derivada em L_p.

4.9 Desigualdade de Gronwall

Esta desigualdade é importante, por exemplo, para obter estimativas na teoria das equações diferencias ordinarias e estocásticas. Existem algumas versões desta desigualdade, a que demonstraremos aqui é uma variante onde aparece integração. As funções que usaremos são funções reais de uma variável e a notação para a derivada será a usual para esse tipo de função. Nossa referência é RIVERA[19].

Teorema 4.11 (Desigualdade de Gronwall)**.** *Suponhamos que f, g e h são funções contínuas e positivas satisfazendo*

$$h(t) \leq g(t) + \int_0^t f(s)h(s)\ ds, \forall t \in [0, T].$$

Então

$$h(t) \leq g(t) + \int_0^t f(s)g(s) \exp\left(\int_s^t f(x)\ dx\right).$$

Demonstração. Definimos

$$\varphi(t) = \int_0^t f(s)h(s)\ ds.$$

Pelo teorema fundamental do cálculo

$$\varphi'(t) = f(t)h(t).$$

Por hipótese

$$\varphi'(t) = f(t)h(t) \leq f(t)g(t) + f(t)\varphi(t). \tag{4.17}$$

Considere

$$F(t) = \exp\left(-\int_0^t f(x)\ dx\right)\varphi(t).$$

Pela regra da cadeia

$$\begin{aligned} F'(t) &= -f(t)\exp\left(-\int_0^t f(x)\ dx\right)\varphi(t) + \exp\left(-\int_0^t f(x)\ dx\right)\varphi'(t) \\ &= \left[\exp\left(-\int_0^t f(x)\ dx\right)\right](-f(t)\varphi(t) + \varphi'(t)). \end{aligned}$$

Desta expressão para $F'(t)$ e da desigualdade (4.17), concluímos que

$$F'(t) \leq f(t)g(t)\exp\left(-\int_0^t f(x)\ dx\right). \tag{4.18}$$

Integrando a desigualdade (4.18), obtemos

$$F(t) \leq \int_0^t f(x)g(x)\exp\left(-\int_0^t f(x)\ dx\right)\ dx.$$

Da definição de $F(t)$ segue que

$$h(t) \leq \int_0^t f(x)g(x)\exp\left(\int_x^t f(s)\ ds\right)\ dx.$$

Como $h(t) - g(t) \leq \varphi(t)$, segue o resultado.

□

4.10 A desigualdade do valor médio

Com auxílio da notação que introduzimos na seção anterior, apresentaremos uma desigualdade com uma função vetorial, ou seja, seu contradomínio é $\mathbb{R}^m$, sendo m um inteiro positivo. Sua importância na Análise Vetorial dá-se, por exemplo, pelo fato de que dela seguem a continuidade e a diferenciabilidade de algumas funções vetoriais.

Ela é uma generalização do teorema do valor médio para funções de uma variável, que neste caso, torna-se uma desigualdade. Se x, y são pontos de $\mathbb{R}^n$ denotaremos $[x, y]$ o segmento cujos pontos extremos são x e y, incluindo-os. De forma análoga, $]x, y[$ é o segmento cujos pontos extremos são x e y, excluindo-os. A norma que usamos aqui é a norma usual de $\mathbb{R}^n$. Na demonstração seguiremos a referência LIMA[20].

Teorema 4.12 (Desigualdade do valor médio). *Sejam A um aberto do $\mathbb{R}^n$ e $f : A \to \mathbb{R}^m$ contínua em A. Se $h \in A$ e $[a, a+h] \in A$ com f diferenciável em $]a, a+h[$, então*

$$\|f(a+h) - f(a)\| \leq \|h\| \sup_{t\in[0,1]} \{\|Df(a+th)\|\}. \tag{4.19}$$

Demonstração. Considere a função $g : [0, 1] \to \mathbb{R}^m$ definida por $g(t) = f(a + th)$. A função g é contínua e diferenciável. Sua derivada é dada por $Dg = Df(a + th)h$. Definimos

$$M = \sup_{t\in[0,1]} \{Dg(t)\}.$$

Como $g(0) = f(a)$ e $g(1) = f(a + h)$, então é suficiente mostrarmos que $\|g(1) - g(0)\| \leq M$.

Dado $\epsilon > 0$. Considere o conjunto $X = \{t \in [0, 1] : \|g(s) - g(0)\| \leq (M + \epsilon)s, \forall s \in [0, t]\}$. Esse conjunto é um intervalo da forma $[0, y]$ e devemos verificar que $y = 1$. Como X é um intervalo fechado, então $\sup X \in X$.

Suponha que $\sup X = y < 1$. Logo, existe $\delta > 0$ tal que $y + \delta < 1$. Existe também um z, com $0 < z < \delta$ com

$$g(y + z) = g(y) + Dg(y)z + r(z)$$

onde $\|r(z)\| < \epsilon z$[1]. Dessa forma,

$$\|g(y + z) - g(y)\| < \|Dg(y)z\| + \epsilon z.$$

Como $y \in X$, segue também que

$$\|g(y) - g(0)\| < (M + \epsilon)y.$$

Aplicando a desigualdade triangular, segue que

$$\begin{aligned}\|g(y+z) - g(0)\| &= \|g(y+z) - g(y) + g(y) - g(0)\| \\ &\leq \|g(y+z) - g(y)\| + \|g(y) - g(0)\| < (M+\epsilon)(y+z).\end{aligned}$$

Então, $y + z \in X$. Mas $\sup X = y$. Absurdo.
Segue que $y = 1$.

□

[1]Essa é uma versão alternativa da escrita da derivada de uma função que vem da definição que demos na equação (4.16). Confira em LIMA[20].

Uma aplicação interessante deste resultado segue abaixo. Antes de fazermos essa aplicação, vamos mencionar um resultado auxiliar que será usado. Um espaço topológico $(X, \mathcal{T})$ é conexo, se e só se X e $\emptyset$ são os únicos subconjuntos do espaço que são abertos e fechados. Confira em WILLARD[17].

Exemplo 4.1. Seja $A \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e conexo e $f : A \to \mathbb{R}^m$ diferenciável tal que $Df(x) = 0, \forall x \in A$. Então, $f(x) = 0, \forall x \in A$.

Para demonstrarmos esse resultado, considere um ponto $a \in A$. Seja X o conjuntos dos pontos x tais que $f(x) = f(a)$. O conjunto X é fechado em A pois f é uma função contínua. Como A é aberto, podemos encontrar $\delta > 0$ de tal forma que $[x, x+h] \subset A$, para $\|h\| < \delta$.

Aplicando (4.19) e usando a hipótese, segue que

$$\|f(x+h) - f(x)\| \leq 0.$$

Neste caso, $\|f(x+h) - f(x)\| = 0$, ou seja, $f(x+h) = f(x)$. Logo, $x + h \in X$. Então X é aberto em A.

O subconjunto X é aberto e fechado em A, e é não vazio, pois $a \in X$. Como A é conexo, segue que $X = A$.

Portanto $f(x)$ é constante qualquer que seja $x \in A$.

5 Aplicações na Educação Básica

Neste capítulo vamos deduzir algumas das desigualdades do capítulo anterior em sua forma elementar cujos enunciados referem-se a sequências finitas de números reais. E a partir delas, verificaremos novas desigualdades. Proporemos e resolveremos problemas com auxílio dessas desigualdades no contexto do ensino médio. A maioria dos problemas tem como referência o livro MANFRINO[21].

5.1 As desigualdades em suas formas elementares

A desigualdade de Young (4.9) já está em sua forma elementar. Começaremos pela desigualdade de Hölder. A menos de menção contrária, p e q representam os índices conjugados nas condições já mencionadas.

Proposição 5.1 (Desigualdade de Hölder). *Sejam $(a_i)_{i=1}^n$ e $(b_i)_{i=1}^n$ sequências de números reais positivos. Então*

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Demonstração. Considere o conjunto $E = \{e_1, \ldots, e_n\}$ com a medida $\mu(\{e_i\}) = 1$. Definimos as funções $f : E \to \mathbb{R}$ e $g : E \to \mathbb{R}$ de tal forma que $f(e_i) = a_i$ e $g(e_i) = b_i$. Logo, $fg : E \to \mathbb{R}$ e $fg(e_i) = a_i b_i$. Temos que f, g e fg são simples. Daí,

$$\|fg\|_1 = \int |fg| \, d\mu = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \mu(\{e_i\}) = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i.$$

Também,

$$\|f\|_p = \left(\int |f|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p \mu(\{e_i\})\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

$$\|g\|_q = \left(\int |g|^q \, d\mu\right)^{\frac{1}{q}} = \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q \mu(\{e_i\})\right)^{\frac{1}{q}} = \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Aplicando o Teorema 4.4, segue o resultado.
A igualdade é válida se existem r, s constantes reais tais que

$$r|a_i|^p = s|b_i|^q, \forall i \in \{1, \ldots, n\}.$$

Como as funções são positivas não há necessidade de usarmos o módulo, e como r e s são constantes, concluímos que a igualdade é válida se, e somente se,

$$\frac{a_1^p}{b_1^q} = \ldots = \frac{a_n^p}{b_n^q}.$$

$\square$

Como já dissemos antes, a desigualdade de Cauchy-Bunyakovskiĭ-Schwartz é um caso particular da desigualdade de Hölder, por isso vamos simplesmente enunciá-la em sua forma elementar.

Proposição 5.2 (Desigualdade de Cauchy-Bunyakovskiĭ-Schwartz)**.** *Sejam* $(a_i)_{i=1}^n$ *e* $(b_i)_{i=1}^n$ *sequências de números reais positivos. Então,*

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2 \sum_{i=1}^n b_i^2}.$$

De forma análoga com a que fizemos com a desigualdade de Hölder, vejamos agora a desigualdade de Minkowski.

Proposição 5.3 (Desigualdade de Minkowski)**.** *Sejam* $(a_i)_{i=1}^n$ *e* $(b_i)_{i=1}^n$ *sequências de números reais positivos e* $p > 1$*. Então,*

$$\left(\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^n b_i^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Demonstração. Considere o conjunto $E = \{e_1, \ldots, e_n\}$ com a medida $\mu(\{e_i\}) = 1$. Definimos as funções $f : E \to \mathbb{R}$ e $h : E \to \mathbb{R}$ de tal forma que $f(e_i) = a_i$ e $h(e_i) = b_i$. Logo,

$$\|f + h\|_p = \left(\int |f + h|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^p \mu(\{e_i\})\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

$$\|f\|_p = \left(\int |f|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{i=1}^n a_i^p \mu(\{e_i\})\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

$$\|h\|_p = \left(\int |h|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{i=1}^n b_i^p \mu(\{e_i\})\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{i=1}^n b_i^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Basta aplicar o Teorema 4.6 e teremos o resultado. A igualdade valerá apenas se

$$\frac{a_1^p}{b_1^q} = \ldots = \frac{a_n^p}{b_n^q}.$$

$\square$

Vimos que a desigualdade de Cauchy-Bunyakovskiĭ-Schwartz nos mostra um limitante superior para a soma $\sum_{i=1}^{n} a_i b_i$. Veremos agora que sob certas condições essa soma possui um limitante inferior.

Antes de exibirmos o limitante inferior mencionado acima, demonstraremos um lema.

Lema 5.1. *Seja $(x_i)_{i=1}^n$ uma sequência não decrescente de reais positivos. Usaremos a notação $\bar{x} = \dfrac{x_1 + \ldots + x_n}{n}$ para representar a média aritmética da sequência. Então, existe um índice $k \in \{1, \ldots, n\}$ tal que*

$$x_1 \leq \ldots \leq x_k \leq \bar{x} \leq x_{k+1} \leq \ldots \leq x_n.$$

Demonstração. Por hipótese, $(x_i)_{i=1}^n$ é não decrescente, ou seja, x_1 é menor ou igual do que cada x_i quando $i \in \{1, \ldots, n\}$. Podemos escrever

$$\underbrace{x_1 + \ldots + x_1}_{n \text{ vezes}} \leq x_1 + \ldots + x_n. \tag{5.1}$$

O lado esquerdo de (5.1) pode ser reescrito como nx_1. Dividindo-se a inequação (5.1) por n segue que

$$x_1 \leq \bar{x}.$$

De forma completamente análoga, mostramos que

$$\bar{x} \leq x_n.$$

Observe que $x_1 \leq \bar{x} \leq x_n$, isto é, a média é um número entre os dois extremos da sequência. Não necessariamente ele é um dos elementos da sequência, mas podemos afirmar que existe um k nas condições mencionadas acima. □

Empregando esse Lema, podemos enunciar e demonstrar mais uma desigualdade.

Proposição 5.4 (Desigualdade de Chebyshev). *Sejam $(a_i)_{i=1}^n$ e $(b_i)_{i=1}^n$ sequências não decrescentes de números reais positivos. Então*

$$\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \sum_{i=1}^{n} b_i \leq \sum_{i=1}^{n} a_i b_i.$$

Demonstração. Seja k o índice mencionado no Lema 5.1. Admitindo que as sequências são não decrescentes é fácil notar que para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$ tem-se que

$$0 \leq (a_i - \bar{a})(b_i - b_k).$$

Daí,

$$0 \leq \sum_{i=1}^{n} (a_i - \bar{a})(b_i - b_k). \tag{5.2}$$

Desenvolvendo a desigualdade (5.2)

$$
\begin{aligned}
0 &\leq (a_1 - \bar{a})(b_1 - b_k) + \ldots + (a_n - \bar{a})(b_n - b_k) \\
0 &\leq a_1b_1 - a_1b_k - \bar{a}b_1 + \bar{a}b_k + \ldots + a_nb_n - a_nb_k - \bar{a}b_n + \bar{a}b_k \\
a_1b_k + \bar{a}b_1 - \bar{a}b_k + \ldots + a_nb_k + \bar{a}b_n - \bar{a}b_k &\leq \sum_{i=1}^{n} a_ib_i \\
(\sum_{i=1}^{n} a_i - n\bar{a})b_k + \bar{a}(\sum_{i=1}^{n} b_i) &\leq \sum_{i=1}^{n} a_ib_i \\
(\sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{i=1}^{n} a_i)b_k + \bar{a}(\sum_{i=1}^{n} b_i) &\leq \sum_{i=1}^{n} a_ib_i \\
\bar{a}(\sum_{i=1}^{n} b_i) &\leq \sum_{i=1}^{n} a_ib_i \\
\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \sum_{i=1}^{n} b_i &\leq \sum_{i=1}^{n} a_ib_i.
\end{aligned}
$$

□

5.2 A desigualdade das médias

Não iremos enunciar a desigualdade de Jensen em sua forma elementar. Porém, usando uma função convexa conveniente na desigualdade (4.13), vamos demonstrar a desigualdade das médias aritmética e geométrica.

Considere a função $-\ln(x)$. Sua segunda derivada $\frac{1}{x^2}$ é sempre positiva, de onde concluímos que ela é sempre côncava para cima e logo ela é convexa. Sendo assim, tomando f e E como na hipótese da desigualdade de Jensen, segue que

$$-\ln\left(\int_E f \ d\mu\right) \leq \int_E -\ln(f) \ d\mu.$$

Multiplicando esta última desigualdade por -1, segue que

$$\ln\left(\int_E f \ d\mu\right) \geq \int_E \ln(f) \ d\mu. \tag{5.3}$$

Considere o conjunto de índices $j \in \{1, \ldots, n\}$ e as sequências de reais positivos (a_j) e (λ_j) de tal forma que

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1.$$

Seja $E = \{e_1, \ldots, e_n\}$. Definimos $f : E \to \mathbb{R}$ de tal forma que $f(e_j) = a_j$ e em E definimos a medida $\mu(\{e_j\}) = \lambda_j$. Logo, f é simples e $f \in L_1$ e E tem medida 1.

Então,

$$\int_E f \ d\mu = \sum_{j=1}^{n} a_j\mu(\{e_j\}) = \sum_{j=1}^{n} a_j\lambda_j.$$

Daí,

$$\ln\left(\int_E f\ d\mu\right) = \ln\left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j a_j\right). \tag{5.4}$$

Da mesma forma,

$$\begin{aligned}\int_E \ln(f)\ d\mu &= \sum_{j=1}^{n} \ln(a_j)\mu(\{e_j\}) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \ln(a_j)\\ &= \sum_{j=1}^{n} \ln(a_j^{\lambda_j}) = \ln\left(\prod_{j=1}^{n} a_j^{\lambda_j}\right).\end{aligned} \tag{5.5}$$

Substituindo (5.4) e (5.5) em (5.3), concluímos que

$$\ln\left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j a_j\right) \geq \ln\left(\prod_{j=1}^{n} a_j^{\lambda_j}\right).$$

Como ln é uma função crescente, temos

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j a_j \geq \prod_{j=1}^{n} a_j^{\lambda_j}. \tag{5.6}$$

Teorema 5.1 (Desigualdade das Médias Aritmética e Geométrica)**.** *Seja* $(a_j)_{j=1}^n$ *uma sequência de números reais positivos. Então*

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{a_j}{n} \geq \prod_{j=1}^{n} a_j^{\frac{1}{n}}. \tag{5.7}$$

Demonstração. Basta tomar $\lambda_j = \dfrac{1}{n}$ em (5.6). □

Valerá a igualdade em (5.7) apenas se a função f for constante, ou seja, o conjunto $\{a_1, \ldots, a_n\}$, que é a imagem de f, é composto de n elementos iguais.

Uma consequência imediata da desigualdade (5.7), é a desigualdade entre as médias geométrica e harmônica.

Teorema 5.2 (Desigualdade das Médias Geométrica e Harmônica)**.** *Seja* $(a_j)_{j=1}^n$ *uma sequência de números reais positivos. Então*

$$\prod_{j=1}^{n} a_j^{\frac{1}{n}} \geq \frac{n}{\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{a_j}}. \tag{5.8}$$

Demonstração. Como $(a_j)_{j=1}^n$ é uma sequência de reais positivos, então $\left(\frac{1}{a_j}\right)_{j=1}^n$ também é uma sequência de reais positivos. Aplicando a desigualdade entre as médias aritmética e geométrica

$$\frac{\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{a_j}}{n} \geq \prod_{j=1}^{n} \left(\frac{1}{a_j}\right)^{\frac{1}{n}}. \tag{5.9}$$

Basta inverter as frações e mudar o sinal da desigualdade (5.9). □

Como a desigualdade (5.8) decorre da desigualdade entre as médias aritmética e geométrica, a igualdade acontece como dissemos antes.

Por último, vamos mostrar a relação entre as médias quadrática e aritmética.

Teorema 5.3 (Desigualdade das Médias Quadrática e Aritmética)**.** *Seja* $(a_j)_{j=1}^n$ *uma sequência de números reais positivos. Então*

$$\sqrt{\sum_{j=1}^{n} \frac{a_j^2}{n}} \geq \sum_{j=1}^{n} \frac{a_j}{n}. \tag{5.10}$$

Demonstração. Como $n \in \mathbb{N}$, considere as sequências de números reais positivos $\left(\frac{a_j}{n}\right)_{j=1}^n$ e $\{1, \ldots, 1\}$, esta última com n números 1. A desigualdade de Cauchy-Bunyakovskiĭ-Schwartz assegura-nos de que

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{a_j}{n} \cdot 1 \leq \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \frac{a_j^2}{n^2} \sum_{j=1}^{n} 1^2} = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \frac{a_j^2}{n^2} n} = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \frac{a_j^2}{n}}.$$

Logo temos o resultado. □

Vale a igualdade em (5.10) se, e somente se,

$$\frac{\left(\frac{a_1}{n}\right)^2}{1^2} = \ldots = \frac{\left(\frac{a_n}{n}\right)^2}{1^2} \Leftrightarrow a_1 = \ldots = a_n.$$

Após a apresentação de algumas desigualdades em sua formas elementares, proporemos problemas envolvendo as desigualdades no contexto no ensino médio e daremos também as soluções.

A escolha dos problemas levará em conta os comentários que fizemos na seção 2.2. Estimar valores, fazer uma escolha mais vantajosa, encontrar um local ideal e maximizar funções elementares serão algumas das finalidades dos problemas. Alguns deles serão mais técnicos e abstratos. Para estes últimos daremos mais ênfase em valorizar a precisão da linguagem e as demonstrações em Matemática.

5.3 Problema 1

Pedir aos alunos para que se sentem em grupos e propor o seguinte desafio: encontrar quatro números reais positivos a, b, c e d de tal forma que

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{d} + \frac{d}{a} = 2.$$

O problema não tem solução. Pois a desigualdade entre as médias aritmética e geométrica nos diz que

$$\frac{\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{d} + \frac{d}{a}}{4} \geq \sqrt[4]{\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{d} \cdot \frac{d}{a}}$$

de onde segue que

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{d} + \frac{d}{a} \geq 4. \tag{5.11}$$

Este problema tem como objetivo inicial fazer com que os alunos estimem que o número que deveria aparecer no lugar do 2, é na verdade 4. As várias tentativas de encontrar os números procurados não levarão a resultado algum, e ao notarem que o número obtido após somar as frações é sempre maior ou igual a 4, espera-se que eles descubram, sem usar uma demonstração rigorosa, que o 2 não deveria estar ali.

Após alguns grupos conseguirem notar a inviabilidade do problema, o professor poderá apresentar a desigualdade das médias aritmética e geométrica. Por fim, propor que os grupos tentem encontrar a equação (5.11) e consigam obter com a ajuda da desigualdade apresentada o que eles já estimaram: que a soma dada é maior ou igual do que 4.

Conhecida a desigualdade, os alunos podem protestar caso algum professor sugira usar a média geométrica ao invés da média aritmética para calcular as notas.

5.4 Problema 2

Embora seja muito pouco usado no cotidiano, os livros ainda abordam os chamados juros simples.

Após o estudo dos juros simples e compostos, apresentar a desigualdade de Bernoulli e pedir pra que eles verifiquem em qual sistema de juros o valor será maior após um certo tempo.

O resultado é imediato: supondo $j > 0$ uma taxa de juros que é contada em períodos de tempo $t \in \mathbb{N}$, o valor que multiplica o montante inicial após t períodos é $(1+j)^t$ no sistema de juros compostos e $1 + tj$ no sistema de juros simples. Como $j > -1$, segue da desigualdade de Bernoulli que

$$(1+j)^t \geq 1 + tj.$$

Com esse resultado, pedir aos alunos que reflitam sobre qual é o melhor sistema de juros quando um indivíduo aplica dinheiro e qual é o melhor sistema de juros se esse mesmo indivíduo empresta dinheiro. É óbvio que o consumidor geralmente não tem escolha, é apenas uma situação hipotética para que eles possam argumentar com base em um resultado conhecido.

5.5 Problema 3

Vamos dar uma aplicação para a desigualdade triangular. É famoso o problema que nos dá uma reta r e dois pontos A e B de um mesmo lado dessa reta e pede para encontrarmos o ponto P em r de tal forma que $AP + PB$ tenha o menor comprimento possível.

Enunciado desta forma parece que temos um simples problema matemático de minimização de distâncias. Podemos propô-lo de forma mais interessante para que o aluno perceba uma ferramenta poderosa para resolver um problema cotidiano.

Suponha que por uma cidade passe um rio e que seu trecho quando passa por ela seja retilíneo. Suponhamos que a prefeitura precise construir uma estação de tratamento de água que ficará na margem do rio. A água não irá diretamente da estação para as casas. Após sair da estação ela será direcionada a duas grandes caixas de água localizadas de um mesmo lado do rio e estas irão distribuir a água pela cidade. Como a água sai da estação com uma grande pressão, o encanamento que ligará a estação às caixas deve ser feito de um material resistente e com canos de grande diâmetro, ou seja, a construção desses canos será cara.

Temos um problema concreto em que os pontos A, B e P tem um significado. Minimizar a distância é essencial devido ao alto custo da obra. A estação deve ser construída em um lugar ideal, de tal forma que o preço total da obra seja o mínimo possível. Ainda assim faltam dados para o problema, que o professor pode comentar, apenas para que os alunos vejam que existem vários fatores que devem ser levados em conta. Mesmo dando uma significação para o problema ele ainda está idealizado. Pode ser que o ponto ideal encontrado seja em um lugar que os engenheiros julguem que não possui solo adequado para sustentar a construção, que ele esteja em um nível inapropriado para a obra, que ali já esteja ocupado por uma outra construção, etc.

Mesmo idealizado, ele cumpre o papel de mostrar que a Matemática auxilia na resolução de um problema de utilidade pública.

Vamos apresentar uma solução para o problema. Considere A' o simétrico de A em relação a reta r. Façamos o segmento $A'B$. Afirmamos que o ponto P procurado é a interseção de r com $A'B$.

Seja C a interseção de r com AA'. Como $AC = CA', A\hat{C}P = A'\hat{C}P$ e CP é lado comum, os triângulos ACP e $A'CP$ são congruentes. Logo $AP = A'P$, ou seja, $A'B = A'P + PB = AP + PB$.

Seja Q um ponto qualquer de r diferente de P, então temos o triângulo $A'QB$. De forma análoga a que fizemos acima, temos por congruência de triângulos que $AQ = A'Q$. Pela desigualdade triangular, segue que $A'Q + QB > A'B = AP + PB$, ou seja, $AQ + QB > AP + PB$. Portanto P é o ponto que minimiza a distância.

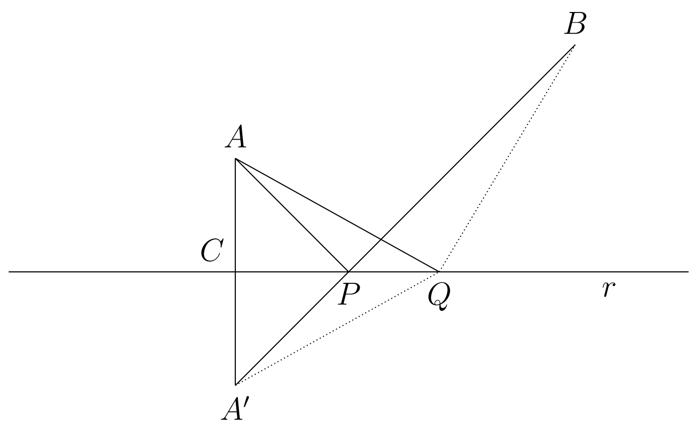

Figura 5.1: Minimização de distância.

5.6 Problema 4

Podemos fazer um problema interessante de maximização de soma de duas funções amplamente estudadas no ensino médio, o seno e o cosseno. Como sabemos que ambas estão limitadas ao intervalo $[-1, 1]$, então é natural pensar que a soma das duas funções é limitada. A questão é ver qual é o máximo, ou seja, qual o maior valor possível para $\mathrm{sen}(x) + \cos(x)$?

Intuitivamente alguns poderão afirmar que é 2, pois cada uma delas possui valor máximo igual a 1. Embora o raciocínio esteja correto, ele nos dá apenas um limitante superior para essa soma, mas seria 2 o supremo?

Para encontrar o valor máximo de uma soma é interessante retirar os valores negativos dessas funções, ou seja, restringiremos o domínio das mesmas apenas aos valores que as tornem positivas. Assim para o cosseno temos que $x \in]0, \frac{\pi}{2}] \bigcup [\frac{3\pi}{2}, 2\pi[$ e para o seno temos que $x \in]0, \pi[$. Portanto os valores de x que tornam tanto a função seno quanto a função cosseno positivas estão no intervalo $]0, \frac{\pi}{2}]$.

Se x está nesse intervalo as funções são positivas, então podemos usar algum dos resultados que temos de desigualdades. Considerando a sequência de dois termos $(\operatorname{sen}(x), \cos(x))$, então a desigualdade entre as médias quadrática e aritmética assegura-nos de que

$$\sqrt{\frac{\operatorname{sen}^2(x) + \cos^2(x)}{2}} \geq \frac{\operatorname{sen}(x) + \cos(x)}{2}.$$

Como $\operatorname{sen}^2(x) + \cos^2(x) = 1$, segue que

$$\operatorname{sen}(x) + \cos(x) \leq 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}.$$

Logo, o supremo para essa soma é na verdade $\sqrt{2}$. Era mesmo de se esperar que 2 não fosse o supremo, pois é fácil ver que não existe $x_0 \in \mathbb{R}$ que faça simultaneamente com que $\operatorname{sen}(x_0) = \cos(x_0) = 1$.

5.7 Problema 5

Considere a circunferência de raio r inscrita no triângulo ABC cujos lados medem a, b e c. Sejam T_a, T_b e T_c os pontos de tangência dos lados do triângulo com a circunferência, onde T_i é o ponto localizado no lado de medida i. Definindo $AT_b = AT_c = x, BT_c = BT_a = y$ e $CT_a = CT_b = z$ temos, $a = y + z, b = x + z$ e $c = x + y$. Vamos mostrar que

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq \frac{\sqrt{3}}{2r}. \tag{5.12}$$

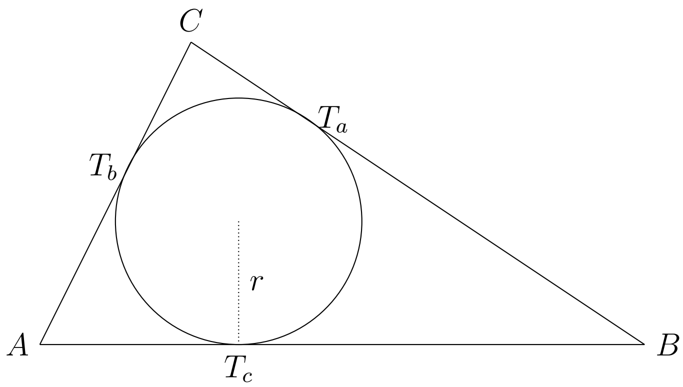

Figura 5.2: Aplicação da desigualdade de Cauchy-Bunyakovskiĭ-Schwartz.

Pela desigualdade das médias aritmética e geométrica, temos que

$$\begin{aligned}
\frac{y+z}{2} \geq \sqrt{yz} &\Leftrightarrow \frac{1}{y+z} \leq \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{yz}}\\
\frac{x+z}{2} \geq \sqrt{xz} &\Leftrightarrow \frac{1}{x+z} \leq \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{xz}}\\
\frac{x+z}{2} \geq \sqrt{xy} &\Leftrightarrow \frac{1}{x+y} \leq \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{xy}}.
\end{aligned}$$

Assim, podemos reescrever a soma do lado esquerdo de (5.12) como

$$\begin{aligned}
\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} &= \frac{1}{y+z}+\frac{1}{x+z}+\frac{1}{x+y}\\
&\leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{yz}}+\frac{1}{\sqrt{xz}}+\frac{1}{\sqrt{xy}}\right).
\end{aligned} \tag{5.13}$$

O último termo de (5.13) é equivalente a

$$\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}}{2\sqrt{xyz}}.$$

Considerando as sequências $\{\sqrt{x}, \sqrt{y}, \sqrt{z}\}$ e $\{1,1,1\}$, podemos aplicar a desigualdade de Cauchy-Bunyakovskiĭ-Schwartz, ou seja,

$$(\sqrt{x}\cdot 1+\sqrt{y}\cdot 1+\sqrt{z}\cdot 1)^2 \leq ((\sqrt{x})^2+(\sqrt{y})^2+(\sqrt{z})^2)\cdot(1^2+1^2+1^2). \tag{5.14}$$

Fazendo o cálculo, aplicando a raiz quadrada em ambos os lados de (5.14) e divindindo por $2\sqrt{xyz}$, temos

$$\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}}{2\sqrt{xyz}} \leq \frac{\sqrt{3}\sqrt{x+y+z}}{2\sqrt{xyz}}.$$

Na página 56 de MANFRINO[21] vemos uma aplicação da fórmula de Herão para área de um triângulo, que nos diz que

$$r = \sqrt{\frac{xyz}{x+y+z}}.$$

Então,

$$\frac{\sqrt{3}\sqrt{x+y+z}}{2\sqrt{xyz}} = \frac{\sqrt{3}}{2r}.$$

Finalmente, temos o resultado da inequação (5.12).

Apesar de a fórmula da área de um triângulo ser uma das mais elementares da geometria, por vezes é negligênciada a fórmula de Herão, que nos dá essa área independentemente de qualquer altura do triângulo. Neste problema é fundamental conhecermos essa fórmula e associá-la ao raio da circunferência inscrita, que também é uma forma de encontrarmos área de triângulos. Outro fato interessante do problema é que aparece uma constante do lado direito da inequação (basta multiplicar (5.12) por r) e essa constante é justamente o cos do ângulo $\frac{\pi}{6}$. Seria uma variante interessante tentar entender o porquê dessa constante.

5.8 Problema 6

Mostraremos que se a, b e c são três números reais não negativos, então

$$(a+b)(b+c)(a+c) \geq 8abc.$$

Como $abc = \sqrt{(abc)^2}$ e $(abc)^2 = a^2b^2c^2 = ab \cdot ac \cdot bc$, então $abc = \sqrt{ab}\sqrt{ac}\sqrt{bc}$. Pela desigualdade das médias aritmética e geométrica

$$\begin{aligned}
\frac{a+b}{2} &\geq \sqrt{ab} \Leftrightarrow \frac{a+b}{\sqrt{ab}} \geq 2 \\
\frac{a+c}{2} &\geq \sqrt{ac} \Leftrightarrow \frac{a+c}{\sqrt{ac}} \geq 2 \\
\frac{b+c}{2} &\geq \sqrt{bc} \Leftrightarrow \frac{b+c}{\sqrt{bc}} \geq 2.
\end{aligned}$$

Basta fazer o produto das três equivalências à direita nas desigualdades acima.

Este problema tem o propósito de nos dar um resultado que será usado no problema 7. Porém, ele ilustra que em certas ocasiões uma afirmação óbvia, que a princípio pode ser negligenciada justamente por ser óbvia, pode ser útil. Por mais trivial que seja que se $x > 0$ então $x = \sqrt{x^2}$, isso foi útil para chegarmos a solução. Uma aplicação geométrica pode ser levada em consideração, uma vez que o produto abc é o volume do paralelepípedo de lados a, b e c. Neste caso, se uma empresa de logística necessita transportar algo em 8 caixas das dimensões mencionadas, talvez seja mais interessante levar em uma única caixa de medidas $a+b, a+c$ e $b+c$, havendo sobra de volume dependendo do caso.

5.9 Problema 7

O resultado do problema 6 será útil para a resolução deste problema, o segundo proposto na Olimpíada Internacional de Matemática em 2001.

Se a, b e c são números reais positivos, então

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2+8ac}} + \frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}} \geq 1.$$

Vamos usar a desigualdade de Hölder, onde $p = 3, q = \frac{3}{2}$ e as sequências reais positivas (x_i) e (y_i) que serão dadas por

$$x_1 = \sqrt[3]{a(a^2+8bc)}, x_2 = \sqrt[3]{b(b^2+8ac)} \text{ e } x_3 = \sqrt[3]{c(c^2+8ab)}.$$

$$y_1 = \sqrt[3]{\left(\frac{a}{\sqrt{a(a^2+8bc)}}\right)^2}, y_2 = \sqrt[3]{\left(\frac{b}{\sqrt{b(b^2+8ac)}}\right)^2} \text{ e } y_3 = \sqrt[3]{\left(\frac{c}{\sqrt{c(c^2+8ab)}}\right)^2}.$$

Com o propósito de simplificar a notação, usaremos os seguintes símbolos

$$\sum_{a,b,c} \frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} = \frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2+8ac}} + \frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}}.$$

$$\sum_{a,b,c} a(a^2+8bc) = a(a^2+8bc) + b(b^2+8ac) + c(c^2+8ab).$$

Com os índices conjugados p e q mencionados, a desigualdade de Hölder assegura-nos de que

$$\sum_{i=1}^{3} x_i y_i \leq \left(\sum_{i=1}^{3} x_i^3\right)^{\frac{1}{3}} \left(\sum_{i=1}^{3} y_i^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{2}{3}}.$$

Elevando ao cubo,

$$\left(\sum_{i=1}^{3} x_i y_i\right)^3 \leq \left(\sum_{i=1}^{3} x_i^3\right) \left(\sum_{i=1}^{3} y_i^{\frac{3}{2}}\right)^2. \tag{5.15}$$

Vamos fazer alguns cálculos separados antes de colocá-los na inequação (5.15).

$$x_1 y_1 = \sqrt[3]{(a(a^2+8bc))\left(\frac{a^2}{a^2+8bc}\right)} = \sqrt[3]{a^3} = a$$

$$x_2 y_2 = \sqrt[3]{(b(b^2+8ac))\left(\frac{b^2}{b^2+8ac}\right)} = \sqrt[3]{b^3} = b$$

$$x_3 y_3 = \sqrt[3]{(c(c^2+8ab))\left(\frac{c^2}{c^2+8ab}\right)} = \sqrt[3]{c^3} = c.$$

Assim, a inequação (5.15) fica com a seguinte forma

$$\left(\sum_{a,b,c} \frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}\right)^2 \left(\sum_{a,b,c} a(a^2+8bc)\right) \geq (a+b+c)^3. \tag{5.16}$$

Antes de continuarmos, faremos as seguintes observações: o desenvolvimento do cubo do lado direito da inequação (5.16) nos diz que

$$(a+b+c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a+b)(b+c)(a+c).$$

O desenvolvimento da soma que não está elevada ao quadrado do lado esquerdo da inequação (5.16) também nos diz que

$$\sum_{a,b,c} a(a^2+8bc) = a^3 + b^3 + c^3 + 24abc.$$

Multiplicando por 3 o resultado do problema 6, temos que

$$3(a+b)(b+c)(a+c) \geq 24abc.$$

Então,

$$(a+b+c)^3 \geq a^3 + b^3 + c^3 + 24abc.$$

Por transitividade,

$$\left(\sum_{a,b,c} \frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}\right)^2 \left(\sum_{a,b,c} a(a^2+8bc)\right) \geq a^3 + b^3 + c^3 + 24abc.$$

Dividindo a inequação acima por $a^3+b^3+c^3+24abc$ e depois extraindo-se a raiz quadrada, concluímos enfim que

$$\sum_{a,b,c} \frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} = \frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2+8ac}} + \frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}} \geq 1.$$

Este talvez seja o problema mais abstrato que resolvemos. Sua resolução mostra ao aluno que um problema nem sempre é resolvido com apenas uma ferramenta. Foi necessário usar a desigualdade de Hölder, a expansão de uma soma ao cubo, o resultado do problema 6 e a criatividade para unir tudo isso para encontrarmos a solução. Aqui usamos índices conjugados diferentes do 2, que é autoconjugado e aparece na maioria dos problemas apresentados pela literatura que usamos no trabalho. O problema também serve de motivação, pois após entrar em contato com a desigualdade, o aluno se vê em condições de resolver um dos problemas propostos pela Olimpíada Internacional de Matemática, motivando-o o conhecer tal competição.

5.10 Problema 8

Sejam a, b e c os lados de um triângulo cujo perímetro é 1 e $p > 1$ é um inteiro. Vamos mostrar que

$$(a^p+b^p)^{\frac{1}{p}} + (b^p+c^p)^{\frac{1}{p}} + (a^p+c^p)^{\frac{1}{p}} < 1 + \frac{2^{\frac{1}{p}}}{2}. \tag{5.17}$$

Como vimos no problema 4, podemos inscrever uma circunferência no triângulo de tal forma que $a = y+z, b = x+z$ e $c = x+y$. Desse modo, temos que $a+b+c = 1$ e $x+y+z = \frac{1}{2}$.

Vamos analisar cada uma das parcelas do lado esquerdo na inequação (5.17).

Considere $(a^p+b^p)^{\frac{1}{p}}$. Como $a = y+z$ e $b = x+z$, é conveniente tomar as sequências com apenas dois termos cada $(r_i) = (y, x)$ e $(s_i) = (z, z)$. Logo, $(a^p+b^p)^{\frac{1}{p}} = ((y+z)^p + (x+z)^p)^{\frac{1}{p}}$. Pela desigualdade de Minkowski

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^{2}(r_i+s_i)^p\right)^{\frac{1}{p}} &\leq \left(\sum_{i=1}^{2} r_i^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} s_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \\ ((y+z)^p + (x+z)^p)^{\frac{1}{p}} &\leq (y^p+x^p)^{\frac{1}{p}} + (z^p+z^p)^{\frac{1}{p}} \\ &< c + \sqrt[p]{2}z. \end{aligned}$$

Assim,

$$(a^p+b^p)^{\frac{1}{p}} < c + \sqrt[p]{2}z.$$

Com um raciocínio completamente análogo ao que fizemos acima, concluímos que os outros dois termos do lado esquerdo da inequação (5.17) são tais que

$$\begin{aligned} (b^p+c^p)^{\frac{1}{p}} &< a + \sqrt[p]{2}x \\ (a^p+c^p)^{\frac{1}{p}} &< b + \sqrt[p]{2}y. \end{aligned}$$

Portanto,

$$
\begin{aligned}
(a^p + b^p)^{\frac{1}{p}} + (b^p + c^p)^{\frac{1}{p}} + (a^p + c^p)^{\frac{1}{p}} &< a + b + c + \sqrt[p]{2}(x + y + z) \\
&= 1 + \frac{\sqrt[p]{2}}{2}.
\end{aligned}
$$

Embora esse seja um problema abstrato, o caso em que $p = 2$ é facilmente visualizado, uma vez que as três parcelas do lado esquerdo de (5.17) podem ser vistas como o comprimento da hipotenusa de um triângulo retângulo. Cuidado, o triângulo retângulo não é necessariamente o triângulo original de perímetro 1. Vejamos abaixo uma ilustração da situação. O triângulo ABC é o triângulo original de perímetro 1, o triângulo DEF é um triângulo auxiliar e os três triângulos retângulos cujas hipotenusas serão analisadas são DGH, HIJ e JKF.

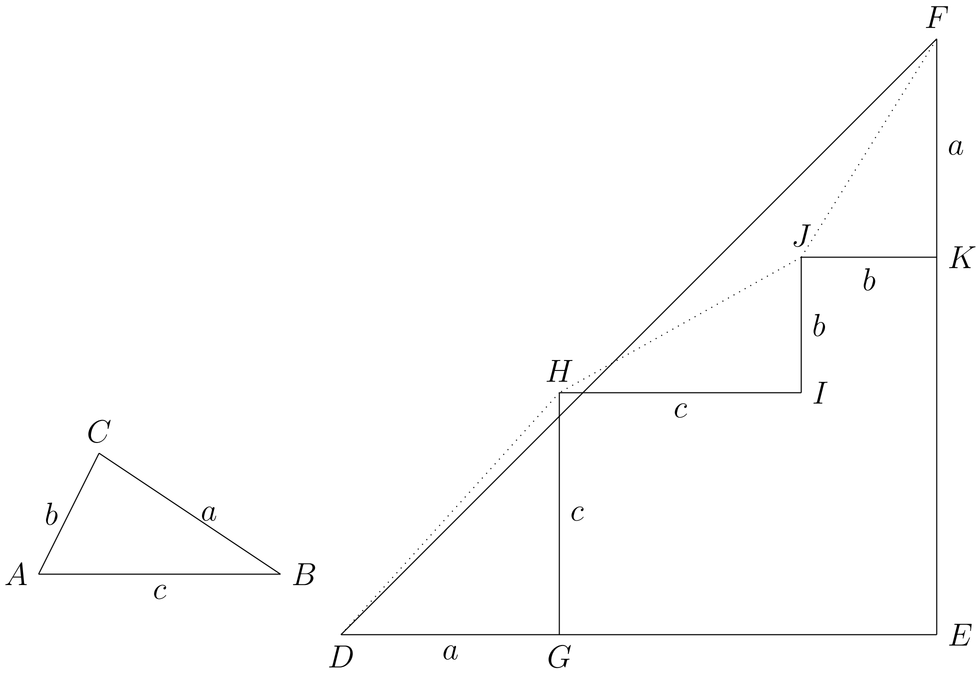

Figura 5.3: Aplicação da desigualdade de Minkowski.

Observe que o lado esquerdo de (5.17) é o comprimento do caminho DF passando por H e J, que chamaremos de γ. Já sabemos que o menor caminho é o segmento DF, mas nas condições dadas encontramos um limitante superior para γ. Observe que fizemos uma ilustração para o problema, há outras situações mudando-se os triângulos retângulos DGH, HIJ e JKF de lugar, obtendo outra configuração para o caminho γ, porém, sabemos que seu comprimento será limitado.

5.11 Problema 9

Vamos mostrar que se a, b e c são números reais positivos, então

$$
\frac{2ab}{a+b} + \frac{2bc}{b+c} + \frac{2ac}{a+c} \leq a + b + c. \tag{5.18}
$$

Vamos analisar cada termo do lado esquerdo da inequação acima. Note que

$$\frac{2ab}{a+b} = \frac{2}{\frac{a+b}{ab}} = \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$$

onde o extremo direito é justamente a média harmônica entre os números a e b. De forma análoga vemos que os outros dois termos da inequação (5.18) são as médias harmônicas entre b e c e entre a e c.

Vimos acima que a média aritmética é sempre maior do que ou igual a média geométrica e que esta é sempre maior do que ou igual a média harmônica. Por transitividade segue que a média aritmética é sempre maior do que ou igual a média hamônica. Esse é o resultado que usaremos aqui.

$$\begin{aligned} \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} &\leq \frac{a+b}{2} \\ \frac{2}{\frac{1}{b}+\frac{1}{c}} &\leq \frac{b+c}{2} \\ \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{c}} &\leq \frac{a+c}{2}. \end{aligned}$$

Se somarmos as três inequações, do lado direito teremos $a+b+c$ e do lado esquerdo a soma das médias harmônicas, que é equivalente a soma do lado esquerdo da inequação (5.18). Portanto, temos o resultado.

Embora o problema seja resolvido simplesmente aplicando a desigualdade entre as médias aritmética e harmônica, ele é interessante pelo fato de que a princípio, a média harmônica não está evidente. É necessário primeiramente uma manipulação algébrica para notá-la. Isso mostra ao aluno que nem sempre a informação chave do problema está evidente. É necessário explorar as informações que foram dadas para encontrá-las, transformando um problema que a príncipio não possuímos ferramentas para resolver em uma tarefa realizável.

5.12 Problema 10

Mostraremos que se ABC é um triângulo acutângulo, então a soma das distâncias do ortocentro aos lados é menor ou igual do que o triplo do raio da circunferência inscrita neste triângulo.

Com a notação usual de medida dos lados e sem perda de generalidade, suponhamos que $c \leq b \leq a$. Suponhamos também que H seja o ortocentro, r seja o raio da circunferência inscrita e que AA', BB' e CC' sejam as três alturas. Denotaremos as seguintes medidas: $HA' = a', HB' = b'$ e $HC' = c'$.

Como $b \leq a$, usaremos o fato de que ao maior lado opõe-se o maior ângulo para concluir que $\hat{B} \leq \hat{A}$. Então, analisando os triângulos retângulos $CC'B$ e $CC'A$ concluímos que $B'\hat{C}H \leq A'\hat{C}H$. Daí, observando que CH é hipotenusa comum aos triângulos retângulos CHA' e CHB' e que o a função seno é crescente entre 0 e $\frac{\pi}{2}$, concluímos que $b' \leq a'$.

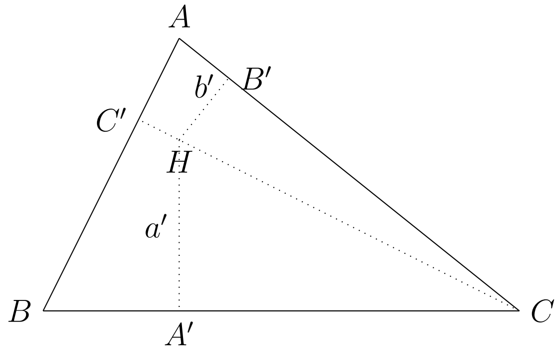

Figura 5.4: Aplicação da desigualdade de Chebyshev I.

De forma análoga, vemos que $c' \leq b'$. Logo, $c' \leq b' \leq a'$.

Se S é a área do triângulo ABC, então $aa' + bb' + cc' = 2S$. Sabemos também que $(a + b + c)r = 2S$.

Usando o desigualdade de Chebyshev para as sequências não decrescentes (a, b, c) e (a', b', c') temos que

$$\frac{1}{3}(a + b + c)(a' + b' + c') \leq aa' + bb' + cc' = 2S = (a + b + c)r. \tag{5.19}$$

Analisando os dois lados de (5.19) e dividindo-os por $(a + b + c)$ e multiplicando-os por 3, segue que

$$a' + b' + c' \leq 3r.$$

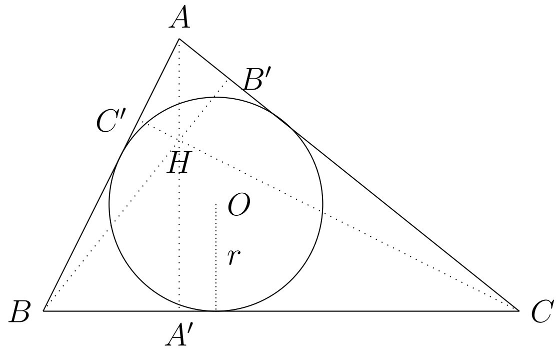

Figura 5.5: Aplicação da desigualdade de Chebyshev II.

Tal como no problema 3, podemos pensar em uma aplicação para este problema. Suponhamos que a circunferência seja uma praça e os lados do triângulo ruas que a tangenciam. A empresa de saneamento básico deseja instalar uma caixa d'água no centro da praça e conectá-la às três ruas. Sabemos que serão necessários $3r$ (digamos metros) de tubulação para realizar o projeto. Porém, o problema demonstra que existe um ponto melhor para instalação da estrutura. Será necessário menos tubulação (ou, na pior das hipóteses, uma quantidade igual) para conectar a caixa às ruas se ela for instalada no ortocentro.

Novamente, é importante observar que isso pode reduzir custos, uma vez que o encanamento deve ser de um tipo especial para suportar a grande pressão de água que é distribuída pela caixa d'água. Observamos também que encontramos um ponto melhor do que o centro, mas não necessariamente o ponto interior da circunferência que minimiza a distância. Será que o ortocentro é de fato tal ponto?

Insistimos que apesar da aplicabilidade do problema abstrato, se transformado em um problema real, ele pode esbarrar em outros fatores limitadores. Pode ser esteticamente melhor deixá-la no centro da praça, o ortocentro pode estar em um local inadequado, o relevo da praça deve ser levado em consideração, entre outros.

6 Conclusão

Ao longo deste trabalho, seguindo uma tendência nas práticas pedagógicas modernas em Matemática, procuramos dar uma significação concreta para os problemas matemáticos. Defendemos, sempre que possível, que isso seja feito. Mostramos como as desigualdades podem ser usadas pelo eleitor, pelo consumidor, pelo pagador de impostos, pelo motorista, pelo investidor, pelo tomador de empréstimo ou pelo aluno que não quer ser iludido pela média geométrica. Porém, uma das características mais peculiares da Matemática é a sua idealização: por mais que nós tentemos, em nosso mundo físico jamais poderemos construir um quadrado de lado a, ou seja, existem fatos que devem ser considerados apenas pensando-se de forma abstrata.

Neste mundo moderno, fruto do esplendoroso desenvolvimento científico das últimas décadas, o cidadão comum está cercado de tecnologias que funcionam com base em algoritmos matemáticos, motores eficientes e rápidos, dados sigilosos criptografados com base nos números primos, aparelhos sofisticados de medicina diagnóstica, um sistema de comunicações sem precedentes em toda a História, dentre outros.

Infelizmente, a maior parte da Matemática na qual tudo isso está alicerçado não está ao alcance de todos, sequer de muitos de nós professores. Soluções sofisticadas de equações diferenciais parciais, funções de análise complexa que auxiliam o estudo dos números primos, espaços abstratos de probabilidade, grupos fundamentais de figuras patológicas: esses são alguns dos temas que a maioria de nós professores não dominamos e que estão presentes em muitas dessas tecnologias. Mas, sabemos que essa Matemática está ali, e que é necessário muito tempo e dedicação para compreender esses tópicos.

Por isso, defendemos que junto com o maior número possível de aplicações da Matemática a situações cotidianas dos alunos, seja ensinada a Matemática abstrata. Que sejam feitos problemas que a princípio sejam úteis somente à própria Matemática. Porém, o professor deve convencer o aluno de que mesmo sem uma aplicação prática, esse problema de alguma forma constrói o conhecimento matemático, desenvolve a capacidade de argumentação e colabora para que sempre que possível, seja feita uma demonstração rigorosa, ou quase que rigorosa, a respeito de algo que se afirma. Que traga a dúvida e a curiosidade a alguns deles. Buscamos a verdade extraída dos fatos e não à imaginação dos mesmos, por isso, admitimos que nem todos verão dessa forma, alguns menos afortunados ficarão presos à pergunta da utilidade de determinado estudo. Para eles, recomendamos a persistência da capacidade persuasiva do professor. Reafirmamos que o mundo moderno está alicerçado no desenvolvimento científico e matemático e que existirão ainda mais avanços se a Ciência e a Matemática também avançarem, e isso só ocorrerá caso os estudantes sentirem-se motivados a estudá-las e desenvolvê-las.

Imaginemos o quão entediante deveria ter sido ao jovem Beethoven quando Johann

Albrechtsberger, um de seus professores, apresentava-lhe calhamaços de lições de contraponto, de fugas e de contrapontos invertidos. Perguntemos-nos: se não tivesse sido submetido a isso, esse jovem teria se transformado no autor de um dos maiores legados musicais da humanidade? Uma parte de sua música voa hoje junto com as duas *Voyagers* rumo ao desconhecido, esperando ser encontrada por alguma outra civilização inteligente ao longo de nosso antigo e vasto *cosmos*, para demonstrar a imensa capacidade criativa de que nossa espécie é capaz.

Fizemos essa comparação com a música apenas para mostrar que não é somente na Matemática que nos confrontamos com problemas como esse. Não estudamos uma coisa somente por ela em si, mas também pelas coisas subjacentes a ela. Perguntamos-nos: como um apostador da loteria saberá se é mais vantajoso fazer uma aposta com sete números ou sete apostas com seis números em um jogo da mega sena se ele acha entediante ou inútil estudar as propriedades das operações de soma e multiplicação no conjunto dos racionais? A Matemática transcede a nossa realidade, embora esteja presente a nossa volta. Essa presença é tão importante que foi imortalizada na máxima de Galileu: "*A Matemática é o alfabeto com o qual Deus escreveu o universo*".

Os últimos problemas que propusemos e resolvemos são, de fato, abstratos para a realidade do ensino praticado na educação básica. Os livros didáticos não abordam esses temas e o material a que recorremos é de preparação para olimpíadas de Matemática. Assim, apenas os alunos mais afortunados que entram em contato com esse tipo de ensino tem a oportunidade de compreendê-los plenamente, embora, em nossas resoluções, procuramos ser o mais didático e claro possível. Ficaremos felizes se o leitor encontrar alguma aplicação mais trivial para eles ou se conseguir despertar nos alunos o encanto pela Matemática abstrata ao exibir estes problemas. Além, é claro, que o próprio aluno após compreendê-los plenamente poderá aplicar o conhecimento obtido por meio desses problemas abstratos em situações diversas, conforme orientação dos próprios parâmetros curriculares nacionais.

Referências

[1] BRASIL. *Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio - Parte III - Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias.* Brasília: Ministério da Educação.

[2] BRASIL. *Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais - Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias.* Brasília: Ministério da Educação.

[3] DANTE, L. R. *Matemática: contexto & aplicações - Volume 1,2 e 3.* 3. ed. São Paulo: Ática, 2016.

[4] IEZZI, G. *Matemática: ciência & aplicações - Volume 1,2 e 3.* 9. ed. São Paulo: Saraiva, 2016.

[5] SOUZA, J. R. de. *# Contato Matemática - Volume 1, 2 e 3.* 1. ed. São Paulo: FTD, 2016.

[6] BALESTRI, R. *Matemática: interação e tecnologia - Volume 1, 2 e 3.* 2. ed. São Paulo: Leya, 2016.

[7] IEZZI, G.; MURAKAMI, C. *Fundamentos de matemática elementar: conjuntos e funções - Volume 1.* 7. ed. São Paulo: Atual, 1993.

[8] DOLCE, O.; NICOLAU, J. *Fundamentos de matemática elementar: geometria plana - Volume 9.* 7. ed. São Paulo: Atual, 1993.

[9] NETO, A. C. M. *Geometria.* 1. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

[10] HEATH, T. L. *The Works of Archimedes.* Cambridge: Cambridge University Press, 1897.

[11] GUIDORIZZI, H. L. *Um curso de Cálculo - Volume 1.* 5. ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., 2001.

[12] STANKOVA, Z.; RIKE, T. *A Decade of the Berkeley Math Circle: The American Experience, Volume I.* [S.l.]: American Mathematical Society, 2008.

[13] BARTLE, R. G. *The Elements of Integration.* New York: John Wiley & Sons, Inc, 1966.

[14] ROYDEN, H. L.; FITZPATRICK, P. M. *Real Analysis.* 4. ed. [S.l.]: Pearson, 2010.

[15] MUNKRES, J. R. *Analisys on Manifolds.* Redwood City: Addison-Wesley Publishing Company, 1991.

[16] EVANS, L. C. *Partial Differential Equations*. 1. ed. Providence - Rhode Island: American Mathematical Society, 2002.

[17] WILLARD, S. *General Topology*. North Chelmsford: Dover Publications, 2004.

[18] SMOLLER, J. *Shock Waves and Reaction—Diffusion Equations*. 2. ed. New York: Springer-Verlag, 1994.

[19] RIVERA, J. E. M. *Teoria das Distribuições e Equações Diferenciais Parciais*. Petrópolis: Série de Textos de Pós Graduação, 2004.

[20] LIMA, E. L. *Análise no Espaço Rn*. Rio de Janeiro: Coleção Matemática Universitária, 2004.

[21] MANFRINO, R. B.; ORTEGA, J. A. G.; DELGADO, R. V. *Inequalities. A Mathematical Olympiad Approach*. [S.l.]: Birkhäuser Verlag AG, 2009.