UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Campus de Bauru

Regina Claudia Tinto Zeca Silva

Trigonometria: história e aplicações no contexto escolar

Bauru
2019

Regina Claudia Tinto Zeca Silva

Trigonometria: história e aplicações no contexto escolar

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre, junto ao Programa de Pós-Graduação – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, do departamento de Matemática da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Campus de Bauru.

Financiadora: CAPES

Orientadora: Profa. Dra. Cristiane Alexandra Lázaro

Bauru
2019

S586t

Silva, Regina Claudia Tinto Zeca
Trigonometria: história e aplicações no contexto escolar / Regina Claudia Tinto Zeca Silva. -- Bauru, 2019
123 p. : il., fotos

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista (Unesp), Faculdade de Ciências, Bauru
Orientadora: Cristiane Alexandra Lázaro

1. Triângulos. 2. Trigonometria. 3. Razões trigonométricas. 4. Ciclo trigonométrico. 5. Proposta didática. I. Título.

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp. Biblioteca da Faculdade de Ciências, Bauru. Dados fornecidos pelo autor(a).

Essa ficha não pode ser modificada.

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

Câmpus de São José do Rio Preto

IBILCE

ATA DA DEFESA PÚBLICA DA DISSERTAÇÃO DE MESTRADO DE REGINA CLAUDIA TINTO ZECA SILVA, DISCENTE DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL, DO INSTITUTO DE BIOCIÊNCIAS, LETRAS E CIÊNCIAS EXATAS - CÂMPUS DE SÃO JOSÉ DO RIO PRETO.

Aos 05 dias do mês de abril do ano de 2019, às 15:00 horas, no(a) UNESP/ Câmpus de Bauru, reuniu-se a Comissão Examinadora da Defesa Pública, composta pelos seguintes membros: Profa.Dra. CRISTIANE ALEXANDRA LAZARO - Orientador(a) do(a) Departamento de Matemática / UNESP/ Câmpus de Bauru (SP), Prof. Dr. FABIANO BORGES DA SILVA do(a) Departamento de Matemática / UNESP/ Câmpus de Bauru , Prof. Dr. ALLAN VICTOR RIBEIRO do(a) Departamento de Física / Instituto Federal de São Paulo, sob a presidência do primeiro, a fim de proceder a arguição pública da DISSERTAÇÃO DE MESTRADO de REGINA CLAUDIA TINTO ZECA SILVA, intitulada ***Trigonometria: história e aplicações no contexto escolar***. Após a exposição, a discente foi arguida oralmente pelos membros da Comissão Examinadora, tendo recebido o conceito final: APROVADA. Nada mais havendo, foi lavrada a presente ata, que após lida e aprovada, foi assinada pelos membros da Comissão Examinadora.

Profa.Dra. CRISTIANE ALEXANDRA LAZARO

Prof. Dr. FABIANO BORGES DA SILVA

Allan V. Ribeiro

Prof. Dr. ALLAN VICTOR RIBEIRO

Regina Claudia Tinto Zeca Silva

Trigonometria: história e aplicações no contexto escolar

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre, junto ao Programa de Pós-Graduação – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, do departamento de Matemática da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Campus de Bauru.

Financiadora: CAPES

Comissão Examinadora

Profa. Dra. Cristiane Alexandra Lázaro
Orientadora

Prof. Dr. Fabiano Borges da Silva
UNESP - Faculdade de Ciências - Bauru

Prof. Dr. Allan Victor Ribeiro
Instituto Federal de São Paulo - Birigui

Bauru
5 de abril de 2019

Aos meus pais, meu marido e meus queridos filhos

Agradecimentos

Agradeço em primeiro lugar a Deus, que sempre esteve ao meu lado, me iluminando, me guiando e me protegendo em todos os momentos da minha vida.

Agradeço ao meu marido, Luís Henrique, e aos meus filhos, Luís Guilherme e Pedro Henrique, pelo carinho, pelas palavras de motivação, pela ajuda e apoio em todas as situações que necessitei e pelo companheirismo.

Agradeço aos meus pais, Alcides e Maria José, que desde a infância me mostraram a importância dos estudos e não mediram esforços para me apoiar durante todo o curso de mestrado.

Agradeço a minha orientadora Professora Doutora Cristiane Alexandra Lázaro, pela paciência, dedicação e orientação que foram muito importantes para a realização deste trabalho.

Agradeço a todos os professores mestres doutores do PROFMAT que me guiaram até aqui.

O presente trabalho foi realizado com o apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001, à qual agradeço.

"As pessoas fazem a história, mas raramente se dão conta do que estão fazendo"

Chistopher Lee

Resumo

Neste trabalho é contado um pouco da história da matemática, da história dos homens que construíram e desenvolveram a matemática. Isso foi possível devido a observação da realidade, da necessidade de solucionar problemas cotidianos da época, tudo através de experimentos reais e conclusões de acordo com os resultados obtidos. No âmbito escolar nota-se uma dificuldade muito grande pelos discentes na parte de matemática que trata sobre a trigonometria e também sobre os triângulos. Consequentemente, algumas atividades práticas foram desenvolvidas com os discentes do Ensino Fundamental II e Ensino Médio com o intuito de facilitar a compreensão deste tema e torná-lo interessante e agradável. Nestas atividades, os próprios discentes construíram figuras utilizando compasso, régua e transferidor, podendo vivenciar na prática as situações de aprendizagem, verificar os teoremas, opinar e até indagar situações diferentes, mas que encaixaram perfeitamente nas atividades propostas, propiciando uma aprendizagem agradável e duradoura.

Palavras-chave: Triângulos, Trigonometria, Razões trigonométricas, Ciclo trigonométrico, Proposta didática.

Abstract

The purpose of this study is to tell a bit of the history of mathematics as well as the history of the men who have built and developed its theorems. It was possible due to the observation of real situations, the necessity to solve contemporary problems through realistic experiments and conclusions according to the results achieved. In school environment it is noted a great difficulty that the students have in learning trigonometry and also about triangles. Consequently, some hands-on activities were developed among Middle and High School students in order to facilitate the understanding of this subject and make it more interesting and enjoyable. The students were presented activities in which they built figures (geometrical forms) using drawing compass, ruler and protractor. In doing that, they could experiment learning practices, check the theorems, give their opinions and even ask about different situations, but that truly suited to the activities suggested, providing an enjoyable and lasting learning.

Keywords: Triangles, Trigonometry, Trigonometric ratios, Trigonometric cycle, Didatic proposal.

Lista de Figuras

Sumário

INTRODUÇÃO

A matemática é uma ciência extraordinária que sempre esteve presente na história da humanidade, desde os tempos mais remotos, contribuindo para os avanços tecnológicos e científicos do mundo. No âmbito escolar, é uma disciplina tida como muito difícil, onde somente alguns discentes conseguem compreendê-la, aqueles que tem facilidade para os cálculos. Com o intuito de desmistificar esse ambiente que envolve a matemática, estamos, constantemente, buscando alternativas para que os conteúdos matemáticos estejam cada vez mais próximos dos nossos discentes, mais presentes no cotidiano. Temos o objetivo de tornar estes conteúdos cada vez mais significativos para os discentes, logo estes estão sendo apresentados de forma mais contextualizada que no passado, fazendo com que os discentes estejam ativos na própria construção do conhecimento, visando tornar o aprendizado cada vez mais sólido e duradouro.

Dentro deste ambiente, identificamos a necessidade de desenvolver algumas atividades práticas com os discentes do Ensino Fundamental II e Ensino Médio sobre os conteúdos de trigonometria, trazendo para a sala de aula régua, compasso e transferidor. E, também levando os discentes para fora da sala de aula, para observar as dificuldades e necessidades do nosso dia a dia, e que a matemática nos ajuda a resolver, e também, a fim de comprovar todos os conceitos e teoremas apresentados a eles através de experiências práticas. O intuito é oferecer condições para que consigam atribuir significado aos conteúdos de trigonometria e desta maneira tornar o aprendizado interessante e agradável. Este trabalho está organizado da seguinte forma:

No Capítulo 1 foi introduzido um pouco da história da Trigonometria, as célebres pessoas que a desenvolveram, a maneira como tudo isso aconteceu e as condições e dificuldades enfrentadas e vencidas na época. Os desafios daquela época eram muitos, mas a busca pelo conhecimento era maior, e mesmo sem aparelhos modernos, os estudiosos conseguiram desenvolver tudo, ou quase tudo, que utilizamos atualmente. Podemos citar alguns exemplos, a construção de rodas, determinar as medidas do seu comprimento e de sua área, a construção de objetos que possibilitassem a defesa de um povo, em caso de alguma guerra. Ou então, como é o universo, o sistema solar, ou então qual é a medida da circunferência da Terra, todas estas e muitas outras descobertas feitas por pessoas movidas pela busca do conhecimento. Devemos ressaltar que os matemáticos citados nesta história, fizeram várias outras descobertas, mas iremos evidenciar somente as que estão relacionadas com a Trigonometria.

No capítulo 2 foram introduzidas as teorias, definições, postulados, corolários e teoremas, demonstrados e comprovados, abordando triângulos, a Geometria e a Trigonometria, que norteiam todo o conhecimento nesta área até os dias atuais.

No capítulo 3 foram introduzidas as atividades práticas desenvolvidas com os discentes, com o intuito de facilitar o entendimento da Trigonometria e tornar o aprendizado duradouro e agradável. Foram desenvolvidas, no total, onze atividades, que podem ser resumidas da seguinte maneira:

Atividade 1: Realizado com discentes do 8º ano, ensino particular, sobre Casos de Congruência de Triângulos.

Atividade 2: Realizado com discentes do 8º ano, ensino particular, sobre Semelhança de Triângulos.

Atividade 3: Realizado com discentes do 8º ano, ensino particular e público, sobre aprender a diferenciar Triângulos Congruentes de Triângulos Semelhantes e também aprender a reconhecer cada um deles.

Atividade 4: Realizado com discentes do 8º ano, ensino particular, usamos como tema a experiência de Tales de Mileto no Egito, quando foi convidado pelo faraó, para medir a altura de uma pirâmide. Tales usou seus conhecimentos sobre Triângulos semelhantes e a regra da proporcionalidade dos lados do triângulo.

Atividade 5: Realizado com discentes do 9º ano, ensino particular e público, sobre o Teorema de Pitágoras e quem foi Pitágoras.

Atividade 6: Realizado com discentes do 9º ano, ensino particular e público, sobre as razões trigonométricas: seno, cosseno e tangente.

Atividade 7: Realizado com discentes do 9º ano, ensino particular e público, sobre a construção da tabela trigonométrica dos arcos notáveis.

Atividade 8: Realizado com discentes do 1º ano ensino médio particular, sobre as relações trigonométricas.

Atividade 9: Realizado com discentes do 1º ano ensino médio particular, sobre radiano e as conversões para grau e vice-versa.

Atividade 10: Realizado com discentes do 1º ano ensino médio particular, sobre o ciclo trigonométrico.

Atividade 11: Realizado com discentes do 1º ano ensino médio particular, sobre as razões trigonométricas no ciclo trigonométrico, as medidas das razões trigonométricas nos quatro quadrantes, usando a tabela trigonométrica dos arcos notáveis.

Por fim, no Capítulo 4, constam as pesquisas dos alunos em relação ao uso da trigonometria, ou seja, onde a trigonometria é usada? Quais são as profissões que utilizam os descobrimentos desta área? Somente os matemáticos a usam? E no cotidiano das pessoas, a trigonometria é usada? Onde e quando? E ainda, em quais condições? Somente algumas pessoas a utilizam, ou todas, sem restrições?

CAPÍTULO 1

UM POUCO SOBRE A HISTÓRIA

Apenas usando uma vara e medindo sombras, um matemático grego da Antiguidade conseguiu determinar a altura das pirâmides do Egito. Usando ideias simples e brilhantes como essa, surgiu a Trigonometria. Iremos fazer um breve passeio acompanhando um pouco da história desse ramo tão fascinante da Matemática. O desenvolvimento da Trigonometria passou pela Grécia, pelo Egito, pela Índia e, com a expansão do islamismo (632 - 750), na região do Mediterrâneo.

Por volta de 600 a.C., o sábio grego Tales de Mileto fez uma viagem ao Egito. Foi convidado pelo faraó, que já conhecia sua fama de grande matemático, e foi "desafiado" a medir a altura de uma pirâmide. Tales de Mileto viveu por volta de 585 a.C. e deixou muitas demonstrações de Geometria, sendo a mais importante a de um teorema que leva o seu nome e diz o seguinte:

"Um feixe de paralelas determina sobre duas transversais segmentos proporcionais"

Chegando ao Egito, alguns matemáticos egípcios foram recepcioná-lo e Tales ouviu-os com atenção, pois traziam o pedido do monarca, e se dispôs a atendê-los imediatamente.

Foram ao deserto e próximo à pirâmide, Tales fincou no chão uma vara, na vertical. Observou a posição da sombra e deitou a vara no chão, marcando na areia o tamanho do seu comprimento. Depois voltou a vara à posição vertical. Ficaram ali observando a sombra que a vara projetava no chão. Quando a sombra ficou exatamente do comprimento da vara que estava marcado no chão, Tales disse aos egípcios para irem até a pirâmide, bem rápido, medirem a sombra dela e somarem com a metade do lado da base, atestando que essa soma é a altura exata da pirâmide.

Tales usou um grande conhecimento de Geometria para resolver uma questão prática. No momento em que a vara e sua sombra tem exatamente o mesmo tamanho, formam um triângulo retângulo isósceles, semelhante a outro triângulo retângulo isósceles formado pela pirâmide e por sua sombra. Através da semelhança de triângulos, e utilizando apenas uma vara e duas sombras, Tales teve uma ideia brilhante e conseguiu resolver o problema dos egípcios.

Para realizar as construções de que necessitavam, como calcular as alturas das pirâmides e de montanhas, a largura de rios e outras necessidades, os matemáticos da antiguidade baseavam-se em dois conceitos:

- razão entre dois números
- triângulos semelhantes

Assim, começou a TRIGONOMETRIA, onde:

TRI significa três
GONO significa ângulos
METRIA significa medida

Desse modo, o significado de TRIGONOMETRIA é medida dos três ângulos de um triângulo e determina um ramo da Matemática que estuda a relação entre as medidas dos lados e dos ângulos de um triângulo. De acordo com a literatura matemática, a Trigonometria não foi obra de um homem só, nem de um povo só.

1.1 Razões

Quando somos crianças esperamos pelo Natal e a festa demora muito, parece nunca chegar. Quando vamos crescendo parece que a cada ano o Natal fica mais próximo. Uma explicação para isso pode ser dada pelas razões: para uma criança de 6 anos, um ano representa $\frac{1}{6}$ de toda a sua vida; para uma pessoa de 60 anos, um ano representa apenas $\frac{1}{60}$. Assim, $\frac{1}{6}$ é muito maior que $\frac{1}{60}$.

Atualmente os arquitetos usam bastante as razões. Por exemplo, se um morro se eleva 20 metros para um afastamento horizontal de 100 metros, eles dizem que a inclinação do morro é de $\frac{20}{100}$ ou 20%.

Os egípcios também usavam bastante as razões, mas seguiam um raciocínio inverso ao dos arquitetos de hoje. A inclinação, para os egípcios, é denominada de *seqt*, e é a razão entre o afastamento horizontal e a elevação vertical. Assim, de acordo com o exemplo anterior, teríamos, segundo os egípcios:

$$seqt = \frac{100}{20} = 5$$

No Egito, todos os cálculos eram feitos pelos escribas, que eram indivíduos provindos de várias classes sociais. Nas escolas de escribas, filhos de humildes agricultores ou comerciantes estudavam ao lado dos filhos de ricos e poderosos. Aprendiam a ler e escrever rudimentos Matemáticos e de Medicina, para seguir carreira administrativa ou religiosa e tinham grande prestígio social. O primeiro escriba reconhecido pela História foi Aahmesu, cujo significado é "Filho da Lua". Conhecido como Ahmes entre os cientistas, escreveu o Papiro Ahmes, um dos textos matemáticos mais antigos. Esse documento, escrito por volta de 1650 a.C., é composto de 80 problemas, todos resolvidos detalhadamente, mas os processos usados nas resoluções não são justificados. Nessa época, o nosso sistema de numeração que usamos atualmente, não havia sido inventado. Mas os egípcios apresentaram, nesse documento, multiplicações e divisões resolvidas através da ideia de dobro.

1.2 Triângulos semelhantes

Duas figuras geométricas são semelhantes se tem exatamente a mesma forma, mas não necessariamente o mesmo tamanho, ou seja, dois triângulos são ditos semelhantes quando um deles, ampliado ou reduzido, é um modelo exato do outro. Isso é possível quando os lados de um triângulo são proporcionais aos lados do outro e os ângulos correspondentes são congruentes. Foi usando essa definição que as civilizações antigas conseguiram realizar cálculos de grandes distâncias, obtendo resultados precisos. Hoje os cientistas dispõem de instrumentos apropriados, como por exemplo, lunetas gigantescas, raios laser e satélites.

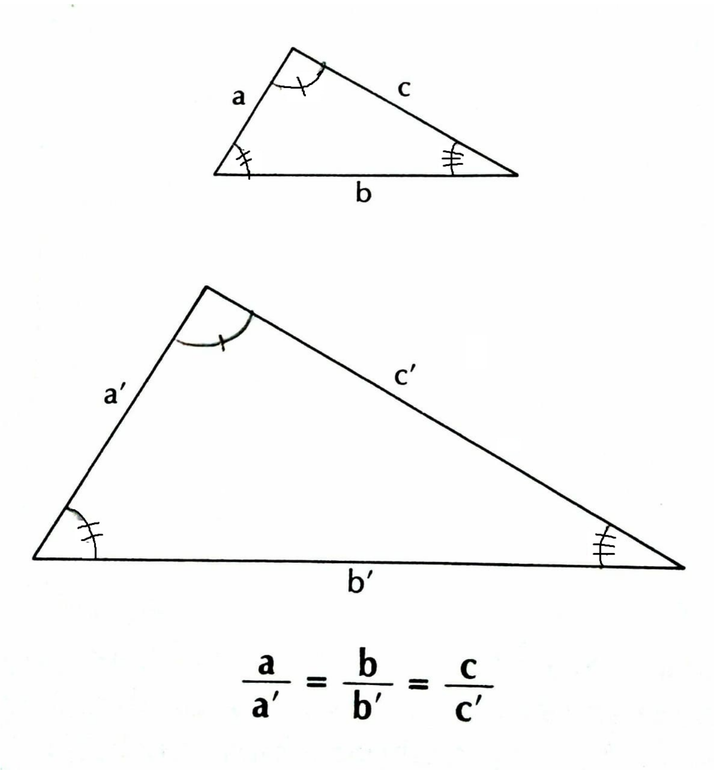


Figura 1.1: Triângulos semelhantes

1.3 Triângulo retângulo

Um tipo especial de triângulo, que tem dois lados perpendiculares entre si, era chamado pelos matemáticos da Antiguidade de triângulo reto. Os triângulos retos foram assunto dos estudos de Pitágoras, importante matemático grego, que nasceu na ilha de Samos, no mar Egeu, por volta de 580 a.C., passou parte da vida no sul da Itália e descobriu uma propriedade usada em todos os triângulos retos.

De Pitágoras não sabemos quase nada. Ele e seus seguidores, conhecidos como pitagóricos, não deixaram nenhum trabalho escrito e por isso ninguém sabe o que é obra do próprio Pitágoras e o que foi descoberto por seus seguidores.

"O número dirige o Universo", diziam Pitágoras e seus seguidores. Eles diziam que tudo, simplesmente tudo, que existe na natureza pode ser explicado através dos números naturais. Ele e seus seguidores fizeram muitas descobertas em Matemática, Filosofia e Astronomia. Naquela época, sabiam que a Terra é redonda e se move ao redor do Sol.

Apesar de todo misticismo, os pitagóricos eram grandes matemáticos. Eles descobriram propriedades interessantes e curiosas sobre os números. Por exemplo:

- NÚMEROS TRIANGULARES

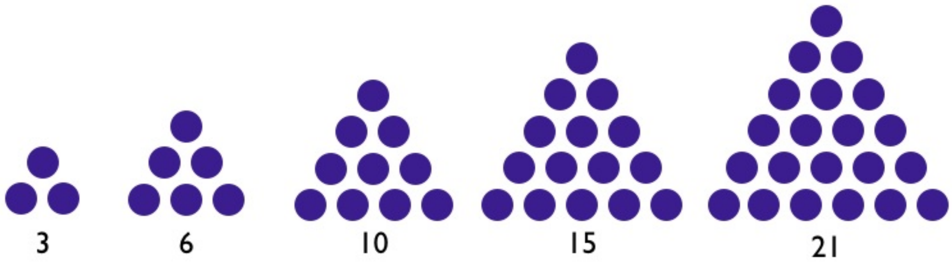


Figura 1.2: Números triangulares

- NÚMEROS QUADRADOS

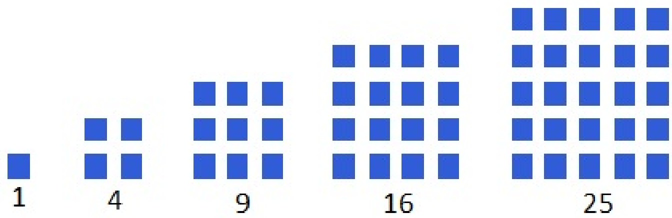


Figura 1.3: Números quadrados

- NÚMEROS PERFEITOS

Um número é perfeito quando a soma de seus divisores, com exceção dele mesmo, é o próprio número.

Por exemplo: os divisores do número 6 são 1, 2, 3 e o 6, então $1 + 2 + 3 = 6$. Logo, o número 6 é um número perfeito.

O que ficou mais conhecido na história da Matemática, envolvendo os triângulos retângulos, e é muito usado em diversas áreas, foi o TEOREMA DE PITÁGORAS:

"Num triângulo retângulo, o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos".

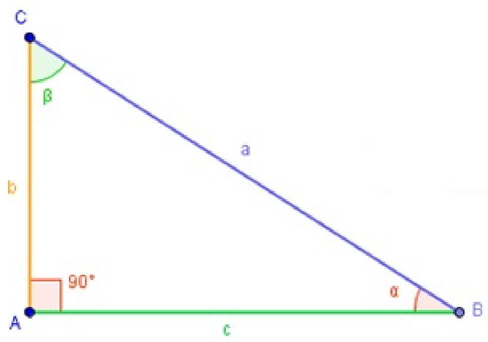


Figura 1.4: Triângulo retângulo

Segundo a lenda, como prova de gratidão por ter demonstrado esse teorema, Pitágoras sacrificou 100 bois aos deuses. Mas como os trabalhos de Pitágoras e seus seguidores se perderam com o tempo, durante séculos houveram dúvidas sobre a demonstração desse teorema feita por Pitágoras. Mas, atualmente, acredita-se que Pitágoras seguiu os seguintes passos:

1º: Desenhe um quadrado de lado $a + b$

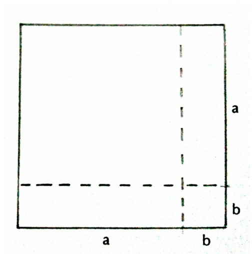


Figura 1.5: Verificando Teorema de Pitágoras-1

2º: Trace dois segmentos paralelos aos lados do quadrado

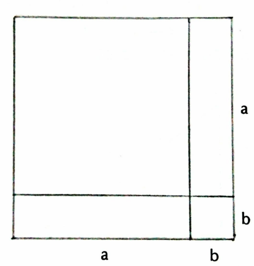


Figura 1.6: Verificando Teorema de Pitágoras-2

3º: Divida cada um destes dois retângulos em dois triângulos retos, traçando as diagonais.

Chamamos de c a medida de cada diagonal

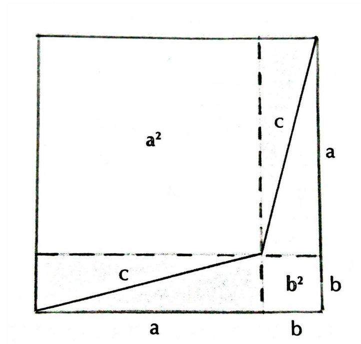


Figura 1.7: Verificando Teorema de Pitágoras-3

4º: Assim, a área da região formada quando se tiram os quatro triângulos retos é igual a $a^2 + b^2$.

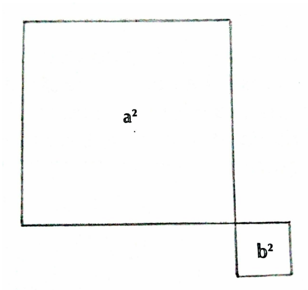


Figura 1.8: Verificando Teorema de Pitágoras-4

5º: Desenhamos o mesmo quadrado de lado $a + b$, mas colocamos os quatro triângulos retos em outra posição

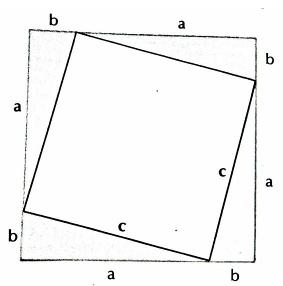


Figura 1.9: Verificando Teorema de Pitágoras-5

Dessa maneira, a área da região formada quando se tiram novamente os quatro triângulos retos é igual a c^2. Acredita-se que foi assim que Pitágoras chegou à conclusão de que

$c^2 = a^2 + b^2$, sendo c a medida do segmento tido como hipotenusa e os de medida a e b são os catetos de cada um dos quatro triângulos retângulos.

Outros matemáticos da época, antes de Pitágoras, conheciam o teorema, mas nenhum deles havia conseguido demonstrar que era válido para qualquer triângulo reto.

CURIOSIDADE:

"Saudações ao ser cabeça de elefante que infunde alegria na mente da seus adoradores e cujos pés são reverenciados pelos deuses."

Quem escreveu a citação acima foi Bhaskara Akaria, matemático indiano que viveu no século XII, no início de um livro hindu que tratava de uma obra de Matemática. Tudo é explicado porque na Índia o ensino da Matemática tinha uma ligação estreita com a religião. Bhaskara é autor de um dos mais importantes livros de história da Matemática, LILAVATI, repleto de problemas interessantes e resolvidos usando o Teorema de Pitágoras.

1.4 Arquimedes

Entre os anos de 214 a.C. e 212 a.C., que foi quanto durou o cerco de Siracusa, as legiões romanas comandadas pelo general Marcelo tentaram tomar a cidade que fica na Sicília e havia se aliado a Cartago, a grande cidade do norte da África, que disputava com Roma o domínio do Mediterrâneo. Mas os navios com os soldados romanos não conseguiam chegar à praia devido a parafernália de espelhos, que mesmo à distância, ateava fogo em seus navios. O poderoso general, também não conseguia entender como máquinas extravagantes, cheias de cordas, polias e ganchos, levantavam e espatifavam as embarcações romanas. E as catapultas que atiravam enormes pedras sobre suas legiões, com precisão inacreditável. "Isso só pode ser obra de um gênio", pensava o general Marcelo.

Quando o cerco de Siracusa foi rompido, o general deu ordens expressas aos seus soldados para que poupassem a vida do estrategista, mas um dos soldados encontrou um velho de roupas simples que desenhava na areia, que dizia palavras sem sentido e não respondia às perguntas que lhe eram feitas, e matou-o sem piedade e sem saber que se tratava de Arquimedes, o maior matemático da antiguidade e inventor de numerosos instrumentos: a alavanca, a roldana, o parafuso sem fim, as rodas dentadas etc. Seus pensamentos e rascunhos eram feitos na areia da praia.

Arquimedes nasceu em Siracusa por volta de 287 a.C., filho de Fídias, famoso matemático e astrônomo, viveu muitos anos em Alexandria, antes de voltar a sua cidade natal. Os trabalhos científicos de Arquimedes causam admiração até hoje, devido a grande precisão dos cálculos. Ele criou métodos para o cálculo de áreas e volumes. O seu nome ficou unido ao cálculo de área de uma circunferência, um problema da época que ele solucionou, destacando-se entre os grandes matemáticos.

Muito antes de Arquimedes, os matemáticos já sabiam que o comprimento de uma circunferência é igual a **um número um pouco maior que 3 multiplicado pela medida do diâmetro da circunferência**. Muitos matemáticos se dedicaram a calcular o valor exato desse número **um pouco maior que 3** que hoje sabemos que se trata do número π.

Arquimedes desenvolveu um método para calcular um valor aproximado de π.

O matemático grego tinha muito interesse pelas circunferências, pois era um construtor de rodas. Os passos que Arquimedes seguia para determinar a área de um círculo, era:

1º: Vamos pensar num círculo como sendo formado por infinitas circunferências concêntricas e de raios cada vez menores

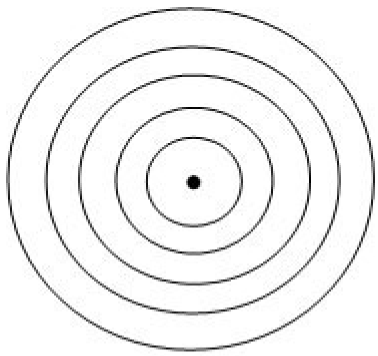


Figura 1.10: Circunferências concêntricas

2º: Retificando cada uma das circunferências, estaremos decompondo o círculo e transformando-o em um triângulo em que a base é a maior circunferência retificada.

3º: As demais circunferências retificadas formam a região triangular com altura igual ao raio R.

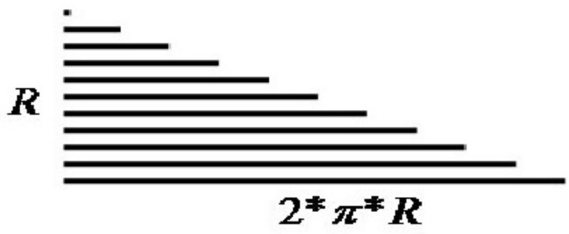


Figura 1.11: Circunferências retificadas

4º: Assim, a área do círculo é igual a área desse triângulo, que é:

$$\textbf{área do círculo} = \textbf{área do triângulo} = \frac{base.altura}{2} = \frac{2.\pi.R.R}{2} = \pi.R^2$$

Arquimedes sabia também que a área do círculo está compreendida entre a área de um quadrado com lados tangentes à circunferência, **quadrado circunscrito**, e a área de um quadrado com vértices na circunferência, **quadrado inscrito**.

Para calcular o valor de π, Arquimedes considerou um círculo de raio 1 e utilizou a fórmula anteriormente demonstrada, chegando a conclusão de que a área do círculo de raio 1 é igual a π.

Segundo Arquimedes, a área de um círculo é *menor* que a área do quadrado circunscrito de lado l:

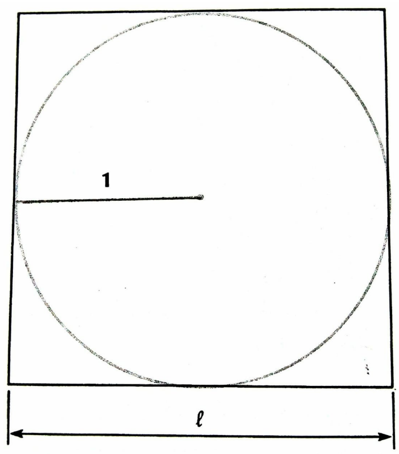


Figura 1.12: Quadrado circunscrito

Agora, o lado do quadrado circunscrito é $l = 2$, a **área do quadrado circunscrito é** $l^2 = 2^2 = 4$.

E, a área de um círculo é *maior* que a área do quadrado inscrito.

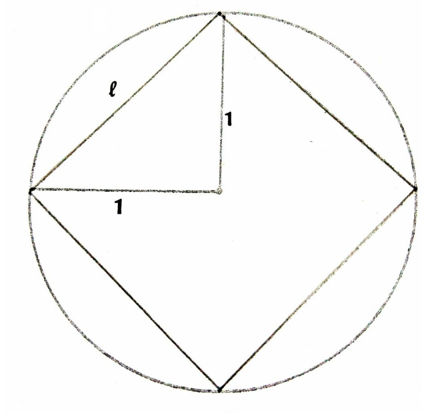


Figura 1.13: Quadrado inscrito

A área do quadrado inscrito de lado l é l^2. Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo formado por um lado do quadrado inscrito e pelos raios da circunferência, encontramos: $l^2 = 1^2 + 1^2$, ou seja, $l = \sqrt{2}$.

Assim, a **área do quadrado inscrito é igual a** 2.

Procedendo dessa forma, Arquimedes obteve que **a área do quadrado inscrito é menor que a área do círculo de raio 1 que, por sua vez, é menor que a área do quadrado circunscrito**, ou seja, $2 < \pi < 4$.

Usando, agora, dois octógonos, um inscrito e outro circunscrito, Arquimedes conseguiu uma aproximação melhor para π:

$$2,8 < \pi < 3,3$$

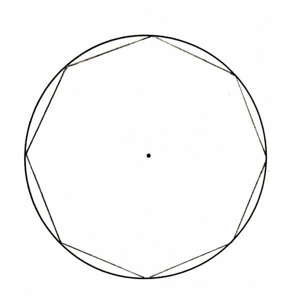


Figura 1.14: Octógono inscrito

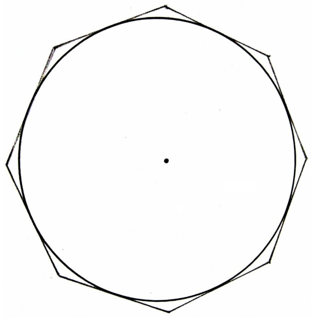


Figura 1.15: Octógono circunscrito

Uma aproximação melhor foi conseguida quando o matemático grego usou dois polígonos de 96 lados:

$3\,\dfrac{10}{71} \;<\; \pi \;<\; 3\,\dfrac{1}{7}$ que significa, aproximadamente:

$3,140845 \;<\; \pi \;<\; 3,142857,$ que foi considerado um resultado fantástico!!!

1.5 Uma revolução na trigonometria, JIVA

Na mesma época que viveu Arquimedes, um outro matemático grego também se destacou: Eratóstenes (276 a.C. - 196 a.C.).

Eratóstenes era natural de Cirene, mas viveu parte da juventude em Atenas. Era um atleta popular e se destacou em várias modalidades esportivas. Autor de muitos livros de Astronomia e Geometria, escreveu também poesias e textos para teatro. Porém, nenhuma de suas obras chegou até nós. Tudo que sabemos sobre Eratóstenes é através de outros autores.

Apesar de seus múltiplos interesses, ele não conseguiu ser pioneiro em nenhuma das atividades que desenvolveu, nas Ciências e nem nas Letras. Mas, façamos justiça, nenhum matemático ou astrônomo se igualou a Eratóstenes nos cálculos para medir a circunferência da Terra.

Uma das questões que desafiavam os matemáticos e astrônomos da Antiguidade era determinar o tamanho do Sol e da Lua. Só que era necessário, anteriormente, determinar o tamanho da circunferência da Terra. E foi Eratóstenes que fez a demonstração mais interessante para determinar o tamanho da Terra.

Eratóstenes sabia o dia exato em que aconteceria o *solstício* de verão na cidade de Assuan, às margens do rio Nilo. *Solstício* significa *sol estático* e vem do latim. Nesse dia especial, ao meio dia, o Sol ficava completamente a pino. Desse modo, uma vara fincada verticalmente no solo não fazia sombra nesse horário, e o fundo de um poço ficava completamente iluminado.

Solstício de verão é o dia em que essa sombra é mínima e define o início do verão. Da mesma forma, o solstício de inverno é quando a sombra do meio dia é máximo e define o início do inverno. Em São Paulo, o solstício de verão é no dia 22 de dezembro e o de inverno é no dia 22 de junho. Em Assuan, ocorre o contrário: o solstício de verão acontece no dia 22 de junho e o de inverno, no dia 22 de dezembro.

Fincando uma vara no solo e observando o tamanho da sombra projetada pela vara, verificamos variações, ou seja, no período da manhã o comprimento da sombra é bem longo, e vai diminuindo até atingir um tamanho mínimo, para depois voltar a aumentar até o pôr-do-sol. Quando a sombra atingi o tamanho mínimo, chamamos de meio dia. Se medirmos a sombra ao meio dia, durante vários dias sucessivos, veremos que ela tem uma variação. Os antigos já sabiam que, quanto mais quente estivesse o clima, menor seria o tamanho da sombra ao meio dia. Com isso, quando o tamanho da sombra era o menor, então se tratava do *solstício de verão* e quando o tamanho da sombra era o maior, se tratava do *solstício de inverno*.

Voltando à demonstração de Eratóstenes, ele dirigiu-se a cidade de Alexandria e, aproximadamente no mesmo horário em que o sol ficava a pino em Assuan, fincou verticalmente uma vara no chão. Em seguida, mediu o ângulo formado pela vara e pelo segmento formado pela vara até a extremidade da sombra.

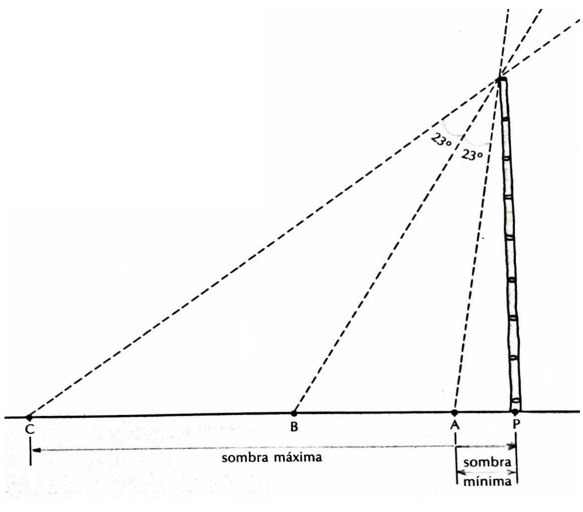


Figura 1.16: Experiência de Eratóstenes

Com isso, o raciocínio de Eratóstenes foi:

• C é o centro da Terra;

• A vara em Assuan não forma sombra;

• $\hat{a}$ é o ângulo formado pela vara e sua sombra, em Alexandria;

• $\hat{b}$ é o ângulo com vértice no centro da Terra, cujos lados são formados pelos prolongamentos das varas fincadas em Alexandria e Assuan.

Como os raios de sol são aproximadamente paralelos, as retas r e s são paralelas e os ângulos $\hat{a}$ e $\hat{b}$ são alternos internos. Portando, $\hat{a}$ e $\hat{b}$ são congruentes ($\hat{a} \cong \hat{b}$).

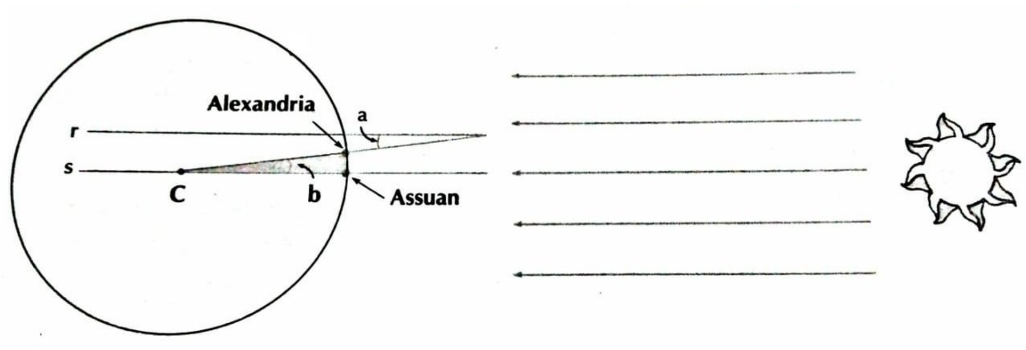


Figura 1.17: Experiência de Erastóstenes-2

Eratóstenes descobriu que o ângulo $\hat{a}$ media $\frac{1}{50}$ de toda a circunferência da Terra. Como $\hat{a} \cong \hat{b}$ a distância entre Assuan e Alexandria também era $\frac{1}{50}$ da circunferência da Terra.

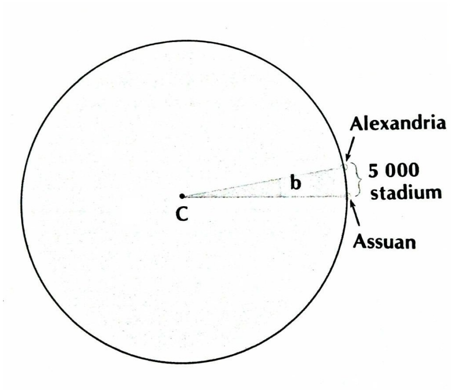


Figura 1.18: Experiência de Erastóstenes-3

Sabendo que a distância aproximada entre Assuan e Alexandria era de 5000 stadium, antiga medida grega, que tem a seguinte equivalência: $1Km = 6,3 \ stadium$. Eratóstenes pode concluir então que a circunferência da Terra era aproximadamente igual a:

$$50 \times 5000 \; stadium \; = \; 250.000 \; stadium$$

Em quilômetros, aproximadamente, 39682 Km.

Assim, Eratóstenes determinou o tamanho da Terra, mas defrontou-se com um problema que os matemáticos da época ainda não haviam resolvido: uma unidade prática para medir ângulos e arcos de circunferência.

Atualmente, utilizando todos os aparelhos disponíveis, a circunferência da Terra é $40072Km$ ao longo da linha do equador.

1.5.1 A circunferência

Hiparco de Nicéia, famoso matemático, viveu na Grécia entre os anos de 180 e 125 a.C., e foi muito influenciado pela matemática da Babilônia.

Como os babilônios, ele também acreditava que a melhor base para realizar contagens era a **base 60**. Não foi por acaso que os babilônios escolheram essa base. O número 60 tem muitos divisores: 1, 2, 3, 4, 5, 10, 12, 15, 20, 30 e 60. Sendo assim, este pode ser decomposto facilmente num produto de fatores, o que facilita muito os cálculos e, principalmente as divisões.

Deste modo, pensando nessas facilidades, Hiparco escolheu um múltiplo de 60 para a circunferência total: 360. Cada uma das 360 partes iguais em que a circunferência foi dividida recebeu o nome de **arco de 1 grau**. Cada arco de 1 grau foi dividido em 60 partes iguais e cada uma dessas partes recebeu o nome de **arco de 1 minuto**. Cada arco de 1 minuto também foi dividido em 60 arcos de **1 segundo**.

Com a circunferência de 360°, ficou fácil criar uma unidade de medida para os ângulos:

Ângulo de 1° é um ângulo que determina um arco de 1° em qualquer circunferência com centro no vértice desse ângulo;

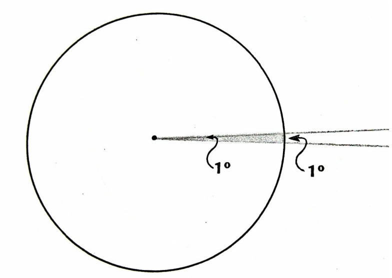


Figura 1.19: Ângulo de 1°

Ângulo de 90° é um ângulo que determina um arco de 90° em qualquer circunferência com centro no vértice desse ângulo.

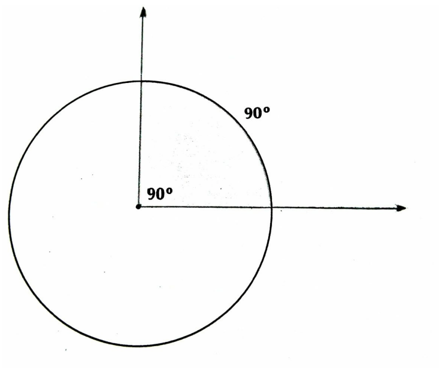


Figura 1.20: Ângulo de 90°

A matemática foi evoluindo de acordo com as necessidades do homem. Como vimos, Hiparco, que além de matemático era astrônomo, e dividiu a circunferência em 360°, construiu também uma tabela com os valores das cordas, que é a distância entre dois pontos quaisquer em uma circunferência. Hiparco fez a tabela com os valores das cordas de uma série de ângulos de 0° a 180°, e isso representou um grande avanço para a astronomia, o que o rendeu o título de **Pai da Trigonometria**.

Porém, esse título foi esquecido anos mais tarde, com o aparecimento da mais importante obra trigonométrica da Antiguidade: **Síntese Matemática**, uma coleção de 13 livros. A **Síntese Matemática** foi escrita no primeiro século da era cristã por **Ptolomeu de Alexandria**. Pouco se sabe sobre a vida desse matemático egípcio, mas sua obra é conhecida como **Almajesto**, que significa **o maior**. Ptolomeu, em seu almajesto, fez uma tabela trigonométrica bem mais completa que a de Hiparco, com medidas das cordas de uma circunferência para ângulos que variam de meio em meio grau, entre 0° e 180°. Para determinar essas medidas, Ptolomeu utilizou a base sexagesimal, o mesmo que fez Hiparco, mas utilizou uma circunferência com raio de 60 unidades.

Usando o teorema de Pitágoras, Ptolomeu determinou a corda correspondente ao ângulo de 90°, que ele indicava *cd* 90°.

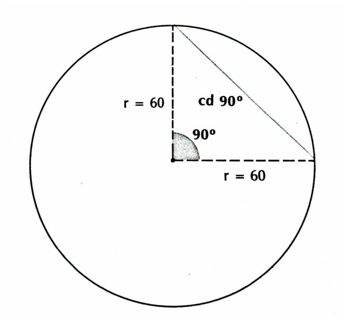


Figura 1.21: Corda do ângulo de 90°

$$(cd\ 90^{o})^2 = r^2 + r^2 \Rightarrow cd\ 90^{o} = \sqrt{2r^2} \Rightarrow cd\ 90^{o} = 60\sqrt{2}$$

Para calcular a medida da corda de 60°, $cd\ 60^{o}$, Ptolomeu observou que o triângulo formado é equilátero. Assim, $cd\ 60^{o} = r = 60$

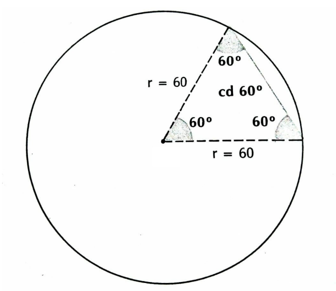


Figura 1.22: Corda do ângulo de 60°

Sempre que calculava o valor da corda de um ângulo, Ptolomeu calculava também a corda do suplemento desse ângulo, aplicando mais uma vez o teorema de Pitágoras.

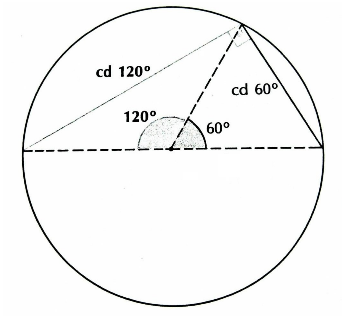


Figura 1.23: Corda do ângulo de 120°

$$(cd\ 120^{o})^2 + (cd\ 60^{o})^2 = (r + r)^2$$

Como $cd\ 60^o = r$, temos:

$(cd\ 120^o)^2 + r^2 = (2r)^2 \Rightarrow (cd\ 120^o)^2 = 3r^2 \Rightarrow cd\ 120^o = 60\sqrt{3}$

O Almajesto representou a mais importante fonte de consulta para os astrônomos de todo o mundo durante seis séculos, depois disso os cientistas voltariam sua atenção para as obras trigonométricas de um povo que sempre surpreendeu o mundo com uma matemática original e criativa: os hindus.

No final do século IV começou a surgir na Índia um conjunto de textos matemáticos denominado **Siddhanta**, cujo significado é sistemas de astronomia. O **Siddhanta** era escrito em versos em sânscrito, uma língua muito antiga e difícil, usada apenas nas cerimônias religiosas. Apresentava regras enigmáticas de Astronomia e raríssimas explicações. Em **Almajesto**, Ptolomeu relacionava as cordas de um círculo com os ângulos centrais correspondentes, e em **Siddhanta** os matemáticos hindus apresentavam uma Trigonometria baseada na relação entre a metade da corda e a metade do ângulo central.

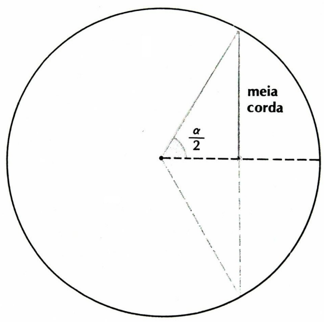


Figura 1.24: Meia corda

Essa meia corda era chamada de **JIVA** pelos hindus. Fazendo os cálculos dessa forma, os hindus sempre estavam manuseando triângulos retângulos dentro do círculo, o que facilitava muito as descobertas desse povo. Os autores de **Siddhanta** construíram uma tabela trigonométrica calculando os valores da meia corda para os valores da metade dos ângulos centrais correspondentes, até 90°. Assim, durante alguns anos os matemáticos árabes oscilavam entre o **Almajesto** e a **Trigonometria de Jiva**. Entre os anos de 850 e 929, o matemático árabe **Al-Battani** adotou a Trigonometria hindu e introduziu uma inovação fazendo com que todos abandonassem o Almajesto de Ptolomeu. Ele fez **o círculo de raio unitário**.

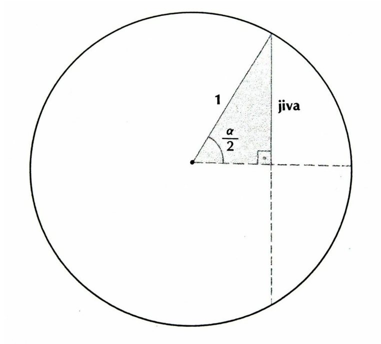


Figura 1.25: Círculo de raio unitário

As tabelas trigonométricas elaboradas a partir de Al-Battani, o valor da corda correspondente a $\dfrac{\alpha}{2}$ podia ser interpretado como a razão:

$$\frac{cateto\ oposto}{hipotenusa} = jiva$$

Como todo número dividido por 1 é o próprio número, então:

$$\frac{cateto\ oposto}{hipotenusa} = \frac{jiva}{1}$$

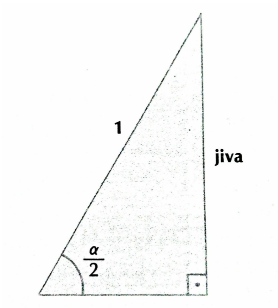


Figura 1.26: Jiva

A partir do século VII, os árabes expandiram-se por toda a região do Mediterrâneo. Na península Ibérica formaram reinos que duraram centenas de anos. A longa permanência dos conquistadores muçulmanos deixou marcas definitivas no Ocidente. Assim, no começo do século XII, a Matemática árabe era tão desenvolvida que o restante do mundo não podia ficar alheio. Foram feitas uma série de traduções do árabe para o latim, o que possibilitou o desenvolvimento da Matemática na Europa. Entre os tradutores, destacou-se o inglês **Robert de Chester**. Devemos nos recordar que os árabes traduziram textos de Trigonometria do sânscrito, o **Siddhanta**, dos hindus. Nesse processo, quando se depararam com a palavra **JIVA**, que significa para os hindus meia corda, eles simplesmente escreveram **JIBA**. E na língua árabe é comum escrever apenas as consoantes de uma palavra, deixando que o leitor acrescente mentalmente as vogais. Dessa forma, os tradutores árabes registraram **JB**, que na tradução do árabe para o latim ficou JAIB, que significa baía ou enseada e escreve-se: **SINUS**.

Assim, todas as obras mais importantes da Antiguidade ficaram acessíveis aos europeus devido as traduções feitas. Na cidade de Toledo, no território espanhol, se desenvolveu uma verdadeira escola de tradutores. A tomada de Toledo pelo Rei Afonso VI de Leão e Castela, em 1805, marcou o início da Reconquista cristã e o término do domínio muçulmano na península Ibérica.

Assim, a razão entre o cateto oposto e a hipotenusa de um triângulo retângulo passou a ser chamada de sinus, que em português ficou **SENO**.

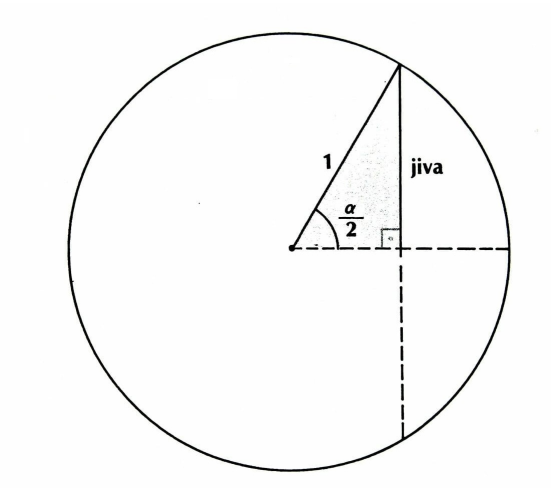


Figura 1.27: Seno

$$sen\,\frac{\alpha}{2} = \frac{cateto\ oposto}{hipotenusa} = \frac{jiva}{1}$$

Esta razão denominada de seno é válida para qualquer triângulo retângulo. Triângulos semelhantes têm lados proporcionais, assim, em qualquer triângulo retângulo que tiver um ângulo agudo medindo $\frac{\alpha}{2}$, a razão entre o cateto oposto e a hipotenusa é denominada seno de $\frac{\alpha}{2}$.

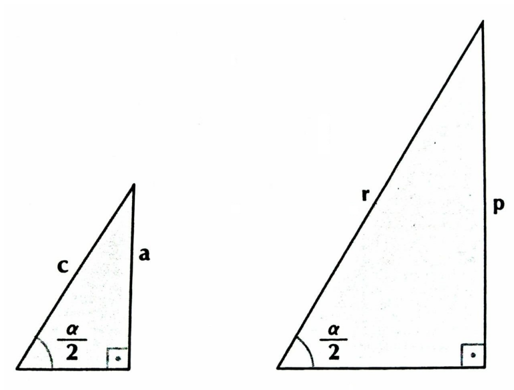


Figura 1.28: Triângulos semelhantes e seno de ângulo

Assim, $sen\ \frac{\alpha}{2} = \frac{a}{c}$, no primeiro triângulo retângulo, e $sen\ \frac{\alpha}{2} = \frac{p}{r}$ no segundo triângulo retângulo.

Dessa forma, toda a Trigonometria que estudamos hoje foi baseada no **seno** dos hindus. Depois do seno, outras razões trigonométricas foram sendo criadas: o **cosseno**, a **tangente** e outras, sempre a partir de um triângulo retângulo.

Assim, dado um triângulo retângulo ABC qualquer, temos:

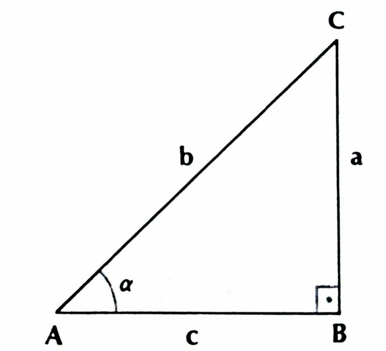


Figura 1.29: Triângulo retângulo e razões trigonométricas

Cosseno é a razão entre o cateto adjacente e a hipotenusa. $cos\ \alpha = \frac{c}{b}$

Tangente é a razão entre o cateto oposto e o cateto adjacente. $tg\ \alpha = \frac{a}{c}$

Atualmente, a Trigonometria é muito estudada e usada em várias áreas do conhecimento humano, ao longo dessa dissertação falaremos sobre o seu desenvolvimento e utilização no nosso cotidiano.

CAPÍTULO 2

TRIGONOMETRIA

O objetivo principal desta dissertação é apresentar e aplicar conceitos da Trigonometria, mas para chegarmos até ela precisamos de um bom estudo sobre os Triângulos, como por exemplo: Congruência de triângulos, Semelhança de triângulos e também teremos que falar sobre o triângulo retângulo e o importante Teorema de Pitágoras.

2.1 Conceitos básicos de geometria

A palavra *Geometria* vem da palavra grega *geometrein*, onde *geo* significa *terra* e *metrein* significa *medir*. Com isso, geometria foi originalmente uma ciência de medir terras.

A Geometria Euclidiana é estudada nas escolas no Ensino Fundamental, tendo início no 7º ano. Recebe esta denominação porque é baseada no texto do matemático grego Euclides, em *Elementos*, escrito por volta do ano 300 a.C..

Precisaremos de alguns postulados, corolários e teoremas sobre retas paralelas, segmentos proporcionais e ângulos congruentes formados por uma reta transversal "cortando" duas ou mais retas paralelas.

Definição 2.1. Uma **transversal** a duas retas é uma reta que intersecciona essas duas retas em dois pontos distintos. Neste caso dizemos que as duas retas são cortadas pela transversal.

Definição 2.2. Seja r uma transversal às retas s e t, interseccionando-as nos pontos P e Q, respectivamente. Seja A um ponto de s e B um ponto de t, tais que A e B estejam em

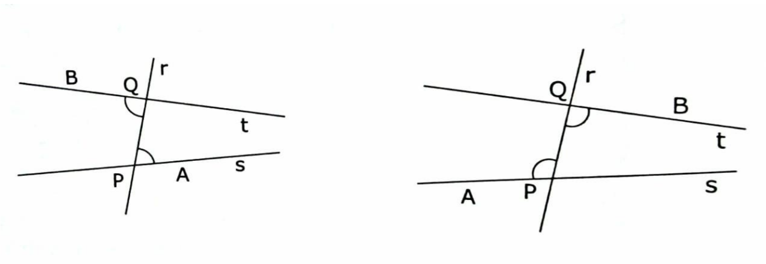


Figura 2.1: Ângulos alternos internos

lados opostos de r. Os ângulos $A\widehat{P}Q$ e $B\widehat{Q}P$ são chamados **ângulos alternos internos** formados por s, t e a transversal r.

Definição 2.3. Sejam $\hat{x}$ e $\hat{y}$ ângulos alternos internos formados por duas retas cortadas por uma transversal. Se $\hat{z}$ é tal que $\hat{y}$ e $\hat{z}$ são ângulos opostos pelo vértice, então $\hat{x}$ e $\hat{z}$ são ditos **ângulos correspondentes**

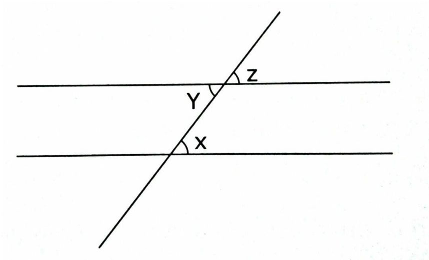


Figura 2.2: Ângulos correspondentes

O Postulado das Paralelas

POSTULADO 1 (Postulado Das Paralelas) Por um ponto não pertencente a uma reta dada, passa uma única reta paralela a essa reta.

Teorema 2.1. Se duas retas paralelas são cortadas por uma transversal, então os ângulos alternos internos são congruentes.

Demonstração: Consideremos as retas paralelas r e s, e uma transversal t que as corta nos pontos P e Q respectivamente.

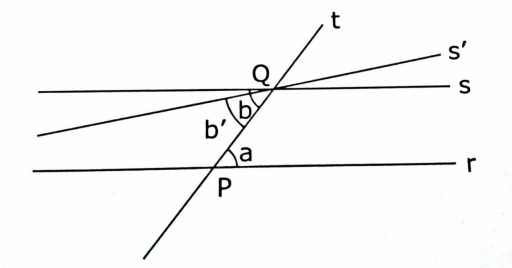


Figura 2.3: Retas paralelas

Suponhamos que os ângulos alternos internos a e b não sejam congruentes. Seja s' uma reta que passa por Q formando com r e t os ângulos alternos internos a e b' congruentes. Então a reta s' é paralela a reta r. Disso e da hipótese temos, passando por Q, duas retas s e s', ambas paralelas à reta r. Isto contradiz o Postulado das Paralelas. Logo $\hat{a}$ e $\hat{b}$ são congruentes.

■

Teorema 2.2. a) Duas retas paralelas cortadas por uma transversal formam pares de ângulos correspondentes.

b) Duas retas distintas paralelas a uma mesma reta são paralelas entre si.

c) Se uma reta é perpendicular a uma de duas retas paralelas, então é perpendicular à outra.

Demonstração: Estas demonstrações são mais simples, então deixaremos as referências. Para o item a, ver a Definição 2.3. Para os itens b e c, ver [2].

Teorema 2.3. A soma das medidas dos ângulos de um triângulo é 180°.

Demonstração: Dado o $\triangle ABC$, seja r a reta paralela ao lado $\overline{BC}$ e passando pelo vértice A. Consideremos os ângulos $\hat{a}, \hat{b}$ e $\hat{c}$, como aparecem na figura.

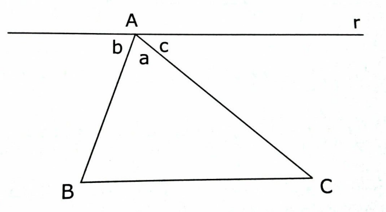


Figura 2.4: Soma dos ângulos internos do triângulo

Como $\overleftrightarrow{AB}$ é transversal a $\overleftrightarrow{BC}$ e a r, temos, pelo Teorema 2.1, que $\widehat{b} \cong A\widehat{B}C$. De modo análogo, $\widehat{c} \cong A\widehat{C}B$. Logo $mB\widehat{A}C + mA\widehat{B}C + mB\widehat{C}A = 180^{\text{o}}$.

■

Deste teorema, obtemos vários resultados importantes que serão demonstrados e mais detalhados no decorrer do nosso estudo.

Corolário 2.1. a) Seja dada uma correspondência entre dois triângulos. Se dois pares de ângulos correspondentes são congruentes, então o terceiro par é também de ângulos correspondentes congruentes.

b) Os ângulos agudos de um triângulo retângulo são complementares.

c) Em todo triângulo, a medida de um ângulo externo é a soma das medidas dos dois ângulos internos não adjacentes.

O Teorema Fundamental da Proporcionalidade e o Teorema de Tales

Teorema 2.4. (Teorema Fundamental da Proporcionalidade) Se uma reta paralela a um dos lados de um triângulo corta os outros dois lados em pontos distintos, então ela os divide na mesma razão.

Demonstração: Consideremos o triângulo ABC como na figura. Seja r uma reta paralela ao lado $\overline{BC}$ a qual intersecciona os lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ nos pontos D e E, respectivamente. Vamos mostrar que $\dfrac{AB}{AD} = \dfrac{AC}{AE}$.

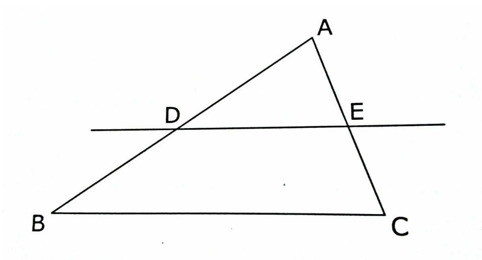


Figura 2.5: Teorema da proporcionalidade

Iniciamos considerando o caso em que $\dfrac{AB}{AD}$ é um número racional, isto é, $\dfrac{AB}{AD} = \dfrac{n}{m}$, com m e n números inteiros positivos. Desse modo, existe um segmento de comprimento c tal que $AD = mc$ e $AB = nc$, e ainda com $m < n$, pois $AD < AB$.

Consideremos em $\overrightarrow{AB}$ os pontos $P_0, P_1, ..., P_m, ..., P_n$, com $P_0 = A$, $P_m = D$ e $P_n = B$ tais que $P_iP_{i+1} = c$, com $i = 0, ..., m, ..., n-1$.

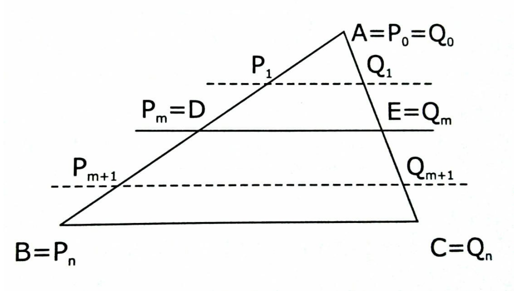


Figura 2.6: Retas paralelas- Teorema da proporcionalidade

Agora tracemos paralelas à $\overleftrightarrow{BC}$ por $P_1, ..., P_{n-1}$. Estas retas cortam o segmento AC em pontos que denotamos por $Q_1, ..., Q_{n-1}$. Usando o corolário que diz:

Corolário 2.2. Se três ou mais retas paralelas determinam segmentos congruentes em uma transversal, então determinam segmentos congruentes em qualquer outra transversal.

Assim, existe um número real positivo d tal que $Q_iQ_{i+1} = d$ para $i = 0, ..., n-1$ com $Q_0 = A, Q_m = E$ e $Q_n = C$. Portanto $AC = nd$ e $AE = md$ e, deste modo,

$$\frac{AC}{AE} = \frac{nd}{md} = \frac{n}{m} = \frac{nc}{mc} = \frac{AB}{AD}.$$

Agora consideraremos o caso em que $\dfrac{AB}{AD}$ é um número irracional.

Seja m um número inteiro positivo. Consideremos na semirreta $\overrightarrow{AB}$ pontos $P_0 = A, P_1, ...,$ $P_m = D, ..., P_n, P_{n+1}$, tais que $P_iP_{i+1} = c; i = 0, 1, ..., m, m+1, ..., n$, e daí $AD = mc$ para algum c, e, ainda, $nc < AB < (n+1)c$.

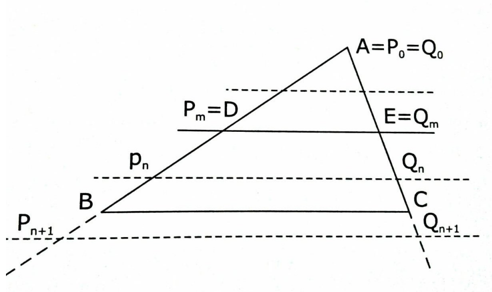


Figura 2.7: Retas paralelas

Então, temos

$$\frac{n}{m} < \frac{AB}{AD} < \frac{n+1}{m} \text{ (I).}$$

Tracemos paralelas a $\overleftrightarrow{BC}$ por $P_1, ..., P_{n+1}$.

Estas retas cortam a semirreta AC em pontos $Q_0 = A, Q_1, ..., Q_{n+1}$ e, pelo Corolário 2.2, temos que existe um número real positivo d tal que $Q_iQ_{i+1} = d$, $i = 0, 1, ..., n$ com $Q_0 = A, AE = md$ e $nd < AC < (n+1)d$. Portanto, obtemos

$$\frac{n}{m} < \frac{AC}{AE} < \frac{n+1}{m} \text{ (II).}$$

De (I) e (II) obtemos

$$\left|\frac{AB}{AD} - \frac{AC}{AE}\right| < \frac{n+1}{m} - \frac{n}{m} = \frac{1}{m}.$$

Como esta desigualdade vale para qualquer número inteiro positivo m, temos

$$\frac{AB}{AD} - \frac{AC}{AE} = 0, \text{ ou seja, } \frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}.$$

■

Vamos ver a recíproca deste teorema.

Teorema 2.5. Se uma reta corta dois lados de um triângulo dividindo-os na mesma razão, então ela é paralela ao terceiro lado.

Demonstração: Seja ABC um triângulo qualquer. Consideremos a reta $\overleftrightarrow{DE}$ onde D é um ponto entre A e B, e E é um ponto entre A e C, com $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$.

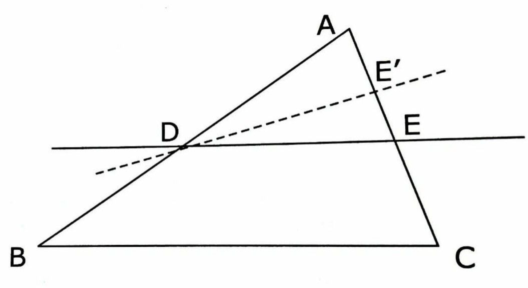


Figura 2.8: Recíproca

Seja $\overleftrightarrow{DE'}$ a reta passando por D, paralela à $\overleftrightarrow{BC}$ e interseccionando $\overleftrightarrow{AC}$ no ponto E'. Pelo Teorema anterior temos

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE'}$$

e, portanto, $AE' = AC.\dfrac{AD}{AB}$.

Mas, por hipótese temos $AE = AC\dfrac{AD}{AB}$.

Portanto $AE' = AE$. Logo, $E = E'$, e $\overleftrightarrow{DE}$ é paralela a $\overleftrightarrow{BC}$.

■

Como consequência do Teorema Fundamental da Proporcionalidade, temos o Teorema de Tales.

Teorema 2.6. (Teorema de Tales) Se duas retas são transversais a um conjunto de três ou mais retas paralelas, então a razão entre os comprimentos de dois segmentos quaisquer determinados sobre uma delas é igual à razão entre os comprimentos dos segmentos correspondentes determinados sobre a outra.

Demonstração: A demonstração deste teorema segue essencialmente a do Teorema Fundamental da Proporcionalidade, com a utilização de propriedades das proporções entre números reais.

2.2 Congruência de triângulos

Congruência, segundo o dicionário, é um substantivo feminino que significa coincidência ou correspondência de caráter ou qualidades; adequação, conformidade, harmonia etc. Então trazendo para a matemática, se dois segmentos são congruentes significa que possuem a mesma medida ou comprimento. De maneira análoga, se dois ângulos são ditos congruentes, significa que possuem a mesma medida.

Logo, de um modo intuitivo, duas figuras planas são congruentes se uma delas puder ser "deslocada", sem que sejam modificadas suas formas nem suas medidas, até que passe a coincidir com a outra. Ou melhor, duas figuras serão congruentes se forem exatamente "iguais", ou seja, se tiverem lados com a mesma medida e ângulos também com a mesma medida, de acordo com as figuras abaixo:

Se duas figuras $F_1 \; e \; F_2$ forem congruentes, será denotado por $F_1 \cong F_2$.

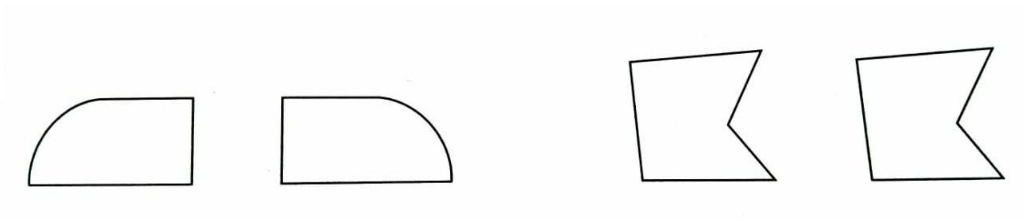


Figura 2.9: Figuras congruentes

Dessa forma, a congruência entre figuras planas satisfaz as propriedades reflexiva, simétrica e transitiva.

Vamos agora desenvolver a teoria de congruência entre triângulos. Por triângulo entendemos um polígono de três lados, triângulo ABC, denotado por $\triangle ABC$, com três vértices, que são os pontos A, B e C; os três lados, que são os segmentos AB, BC e CA; e os três ângulos internos, que são $A\widehat{B}C$, $B\widehat{C}A$ e $C\widehat{A}B$.

Quanto à medida de seus lados um triângulo pode ser denominado:

• **triângulo equilátero**: quando possui os três lados dois a dois congruentes.

• **triângulo isósceles**: quando possui dois de seus lados congruentes entre si. O terceiro lado é chamado *base* do triângulo isósceles.

• **triângulo escaleno**: aquele em que quaisquer dois de seus lados têm medidas diferentes.

Quanto à medida de seus ângulos um triângulo pode ser:

• **triângulo retângulo**: quando possui um ângulo reto. O lado do triângulo oposto ao ângulo reto é chamado de *hipotenusa* e os outros dois são chamados *catetos*.

• **triângulo acutângulo**: quando possui os três ângulos agudos.

• **triângulo obtusângulo**: quando possui um ângulo obtuso.

• **triângulo equiângulo**: quando possui os três ângulos dois a dois congruentes.

Analisaremos esta definição sobre triângulos congruentes.

Definição 2.4. Dois triângulos são congruentes se for possível definir uma correspondência entre seus vértices de modo que sejam congruentes os pares de lados correspondentes e também sejam congruentes os pares de ângulos correspondentes. Assim, dizemos que os dois triângulos são congruentes, e denotamos por $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

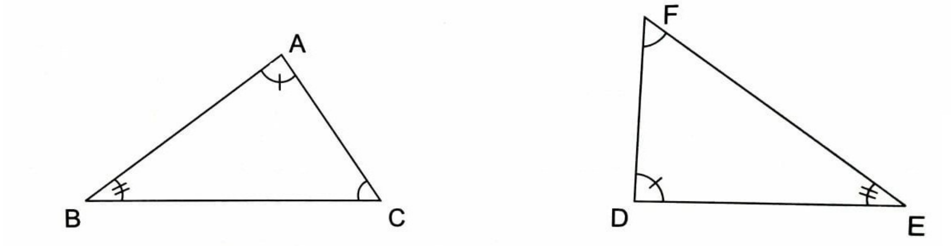


Figura 2.10: Triângulos congruentes

Para determinarmos a congruência entre triângulos seria necessário verificar essas seis congruências entre seus elementos vistos na definição anterior. Entretanto, algumas teorias foram desenvolvidas para facilitar o nosso trabalho, e veremos que existem os casos de congruência entre triângulos, que estudaremos a seguir.

Os Três Primeiros Casos de Congruência de Triângulos

O primeiro caso será apresentado em forma de postulado e os demais, como teoremas que decorrem desse postulado.

POSTULADO 1 (1º - Caso L.A.L.)

Dados dois triângulos ABC e DEF, se $\overline{AB} \cong \overline{DE}$, $\widehat{B} \cong \widehat{E}$ e $\overline{BC} \cong \overline{EF}$, então $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

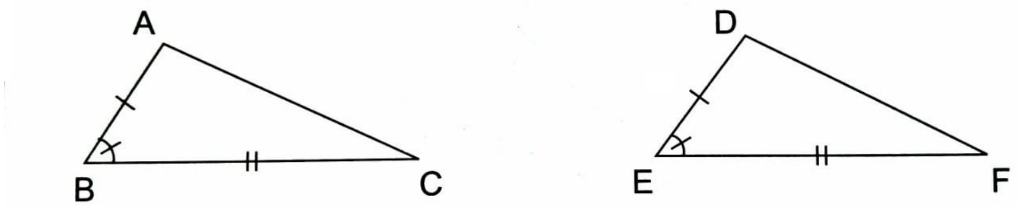


Figura 2.11: Congruência LAL

Teorema 2.7. (**Teorema do Triângulo Isósceles**) Em um triângulo isósceles, os ângulos da base são congruentes.

Demonstração: Consideremos o triângulo isósceles ABC, com base $\overline{BC}$

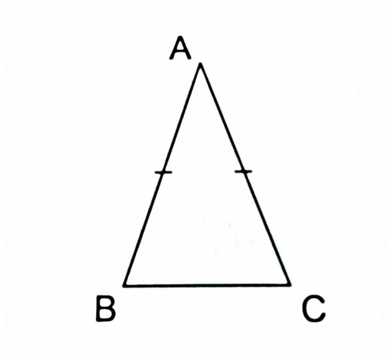


Figura 2.12: Triângulo isósceles

Queremos provar que $\widehat{B} \cong \widehat{C}$. Para isso, consideremos a correspondência que leva o triângulo ABC nele mesmo de modo que $A \to A$, $B \to C$ e $C \to B$.

Por hipótese obtemos $\overline{AB} \cong \overline{AC}$ e $\overline{AC} \cong \overline{AB}$ e, como $\widehat{A} \cong \widehat{A}$ segue, pelo caso L.A.L. de congruência de triângulos, que $\triangle ABC \cong \triangle ACB$. Como consequência temos $\widehat{B} \cong \widehat{C}$.

$\blacksquare$

Definição 2.5. Uma semirreta $\overrightarrow{OC}$ é uma bissetriz de um ângulo $A\widehat{O}B$ se C está no interior de $A\widehat{O}B$ e $A\widehat{O}C \cong B\widehat{O}C$. Neste caso, temos $mA\widehat{O}C = mB\widehat{O}C = \dfrac{1}{2}\, mA\widehat{O}B$.

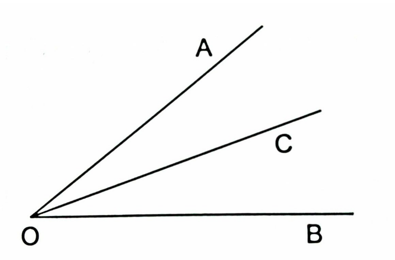


Figura 2.13: Bissetriz

Teorema 2.8. (**2º - Caso A.L.A.**) Dados dois triângulos ABC e DEF, se $\widehat{A} \cong \widehat{D}$, $\overline{AB} \cong \overline{DE}$ e $\widehat{B} \cong \widehat{E}$, então os triângulos são congruentes.

Demonstração: Consideremos os triângulos ABC e DEF, satisfazendo as hipóteses do teorema.

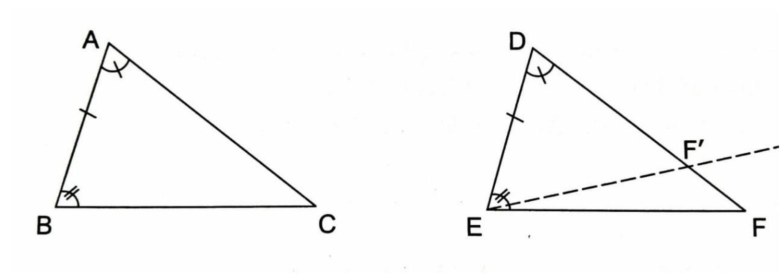


Figura 2.14: Caso ALA

Seja F' um ponto da semirreta DF tal que $DF' = AC$. Comparemos os triângulos ABC e DEF'. Como $\overline{AB} \cong \overline{DE}$, $\widehat{A} \cong \widehat{D}$ e $\overline{AC} \cong \overline{DF'}$, segue que eles são congruentes, pelo caso L.A.L. Portanto $A\widehat{B}C \cong D\widehat{E}F'$.

Deste fato e da hipótese, segue que $D\widehat{E}F \cong D\widehat{E}F'$, assim $\overrightarrow{EF}$ e $\overrightarrow{EF'}$ coincidem.

Portanto, F e F' são o mesmo ponto e temos $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

■

Teorema 2.9. (**3º - Caso L.L.L.**) Se dois triângulos têm os três pares de lados correspondentes congruentes, então são triângulos congruentes.

Demostração: Consideremos os triângulos ABC e DEF tais que $\overline{AB} \cong \overline{DE}$, $\overline{BC} \cong \overline{EF}$ e $\overline{CA} \cong \overline{FD}$.

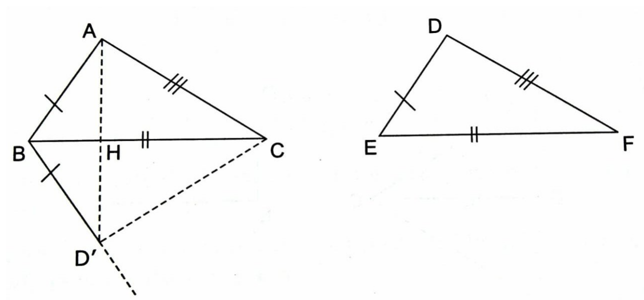


Figura 2.15: Caso LLL

No semiplano determinado por $\overleftrightarrow{BC}$ e que não contém o ponto A, consideremos uma semirreta de origem B formando com $\overleftrightarrow{BC}$ um ângulo congruente ao $D\widehat{E}F$. Escolhamos sobre ela um ponto D' tal que $BD' = DE$. Pelo caso L.A.L., obtemos $\triangle D'BC \cong \triangle DEF$.

Vamos mostrar que $\triangle ABC \cong \triangle D'BC$.

Seja H o ponto em que $\overline{AD'}$ corta $\overleftrightarrow{BC}$.

Vamos supor que H está entre B e C, como na figura 2.15.

Pelo Teorema do Triângulo Isósceles aplicado aos triângulos $BD'A$ e CAD' respectivamente, obtemos $B\widehat{A}D' \cong B\widehat{D'}A$ e $C\widehat{A}D' \cong C\widehat{D'}A$.

Usando a adição de ângulos, temos: $mB\widehat{A}C = mB\widehat{A}D' + mD'\widehat{A}C = mB\widehat{D'}A + mA\widehat{D'}C = mB\widehat{D'}C$.

Então, pelo caso L.A.L., segue que $\triangle ABC \cong \triangle D'BC$.

No caso em que B está entre H e C como na figura 2.16, é demonstrado analogamente que $\triangle D'BC \cong \triangle DEF$, e que $\triangle ABC \cong \triangle D'BC$.

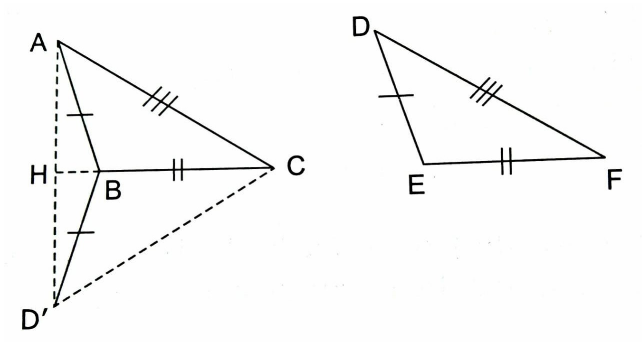


Figura 2.16: Triângulos congruentes - Caso LLL

Em ambos os casos, por transitividade, obtemos $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

Analisaremos agora o caso em que $H = B$, isto é, A, B e D' são colineares, como na figura 2.17.

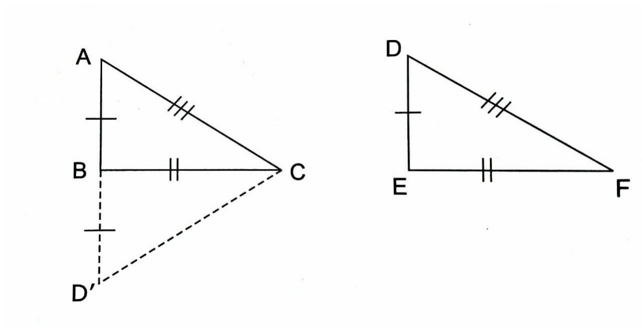


Figura 2.17: Triângulos retângulos congruentes

Neste caso, $\widehat{A} \cong \widehat{D'}$, pelo Teorema do Triângulo Isósceles, e, por transitividade, $\widehat{A} \cong \widehat{D}$. Novamente, pelo caso L.A.L. e por transitividade, obtemos $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

Os outros dois casos, $H = C$ ou $B - C - H$, são exatamente análogos aos casos anteriores.

$\blacksquare$

O Teorema do Ângulo Externo e suas Consequências

Definição 2.6. Se C está entre B e D então $A\widehat{C}D$ é um ângulo externo do triângulo ABC.

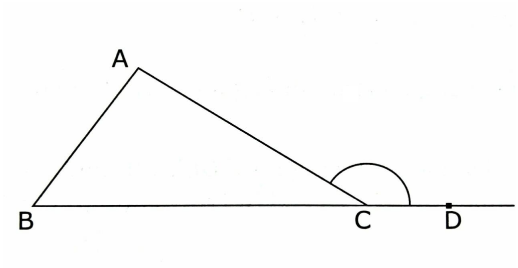


Figura 2.18: Ângulo externo

Neste caso, os ângulos A e B são os ângulos internos não adjacentes ao ângulo externo $A\widehat{C}D$. Analogamente para os outros vértices. Cada triângulo tem seis ângulos externos, e formam três pares de ângulos congruentes, pois constituem três pares de ângulos opostos pelo vértice.

Teorema 2.10. Teorema do Ângulo Externo Um ângulo externo de um triângulo é maior que qualquer um dos seus ângulos internos não adjacentes.

Demonstração: Seja $\triangle ABC$ um triângulo qualquer.

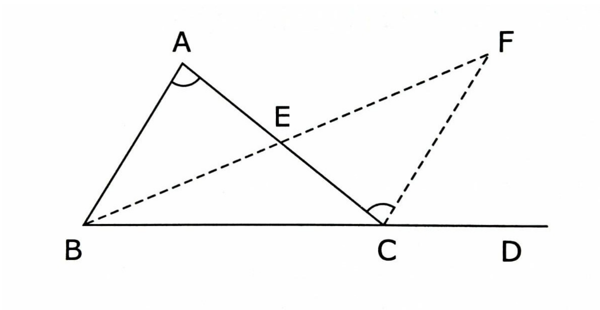


Figura 2.19: Teorema do ângulo externo

Consideremos D um ponto qualquer tal que C está entre B e D. Vamos demonstrar que $A\widehat{C}D > \widehat{A}$ e $A\widehat{C}D > \widehat{B}$.

Sejam E o ponto médio de $\overline{AC}$ e F o ponto da semirreta oposta a $\overrightarrow{EB}$ tal que $EF = EB$.

Pelo Postulado L.A.L., temos que $\triangle BEA \cong \triangle FEC$ já que $\overline{AE} \cong \overline{CE}$ e $\overline{BE} \cong \overline{FE}$ por construção e $B\widehat{E}A \cong F\widehat{E}C$, pois são ângulos opostos pelo vértice.

Portanto $\widehat{A} \cong E\widehat{C}F$.

Desse modo, verificando que o ponto F é o ponto interior ao ângulo ACD, obtemos $A\widehat{C}D > \widehat{A}$. Analogamente mostramos que $A\widehat{C}D > \widehat{B}$.

■

O Quarto Caso de Congruência de Triângulos

Agora, com o recurso do Teorema do Ângulo Externo, podemos apresentar e demonstrar um quarto caso de congruência, do qual decorrem importantes consequências, como por exemplo o Teorema da Hipotenusa e do Cateto.

Teorema 2.11. (4º - Caso L.A.A.) Sejam ABC e DEF dois triângulos tais que $\overline{AB} \cong \overline{DE}$, $\widehat{B} \cong \widehat{E}$ e $\widehat{C} \cong \widehat{F}$. Então, $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

Demostração: Consideremos os triângulos ABC e DEF, e X um ponto da semirreta BC tal que $BX = EF$. Consideremos inicialmente $B - X - C$.

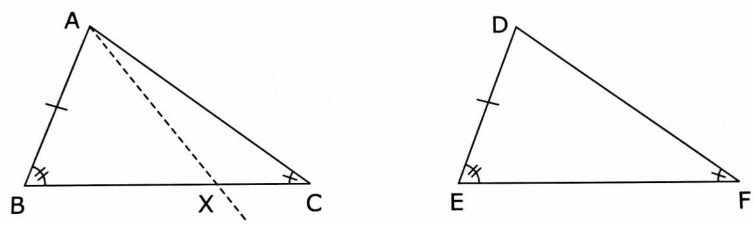


Figura 2.20: Caso LAA

Pelo Postulado L.A.L., obtemos $\triangle ABX \cong \triangle DEF$. Assim, $A\widehat{X}B \cong D\widehat{F}E$ (*).

Mas, $A\widehat{X}B$ é um ângulo externo do $\triangle AXC$, do qual $A\widehat{C}X$ é ângulo interno não adjacente. Logo, pelo Teorema do Ângulo Externo, $A\widehat{X}B > A\widehat{C}X$ e, portanto, pela hipótese, $A\widehat{X}B > D\widehat{F}E$, o que contradiz (*).

Se tivéssemos $B - C - X$, demonstraríamos analogamente que $A\widehat{X}B < D\widehat{F}E$, o que novamente contradiz (*).

Logo, o ponto X coincide com C e, portanto, $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

■

Em geral, L.L.A. não fornece um caso de congruência de triângulos, mas existe um caso especial, o caso do triângulo retângulo, o qual deduzimos do teorema anterior.

Teorema 2.12. (Teorema da Hipotenusa e do Cateto) Sejam ABC e DEF dois triângulos retângulos. Se a hipotenusa e um cateto do triângulo ABC são congruentes com as partes correspondentes do triângulo DEF, então os dois triângulos são congruentes.

Demonstração: Consideremos os triângulos ABC e DEF com $m\widehat{B} = m\widehat{E} = 90$, $\overline{AC} \cong \overline{DF}$ e $\overline{AB} \cong \overline{DE}$.

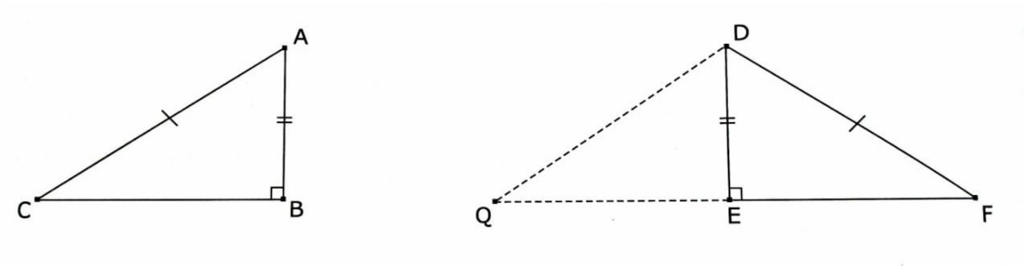


Figura 2.21: Teorema da hipotenusa e do cateto

Tomemos o ponto Q na semirreta oposta a $\overrightarrow{EF}$ de modo que $EQ = BC$. Pelo Postulado L.A.L. temos:

$$\triangle DEQ \cong \triangle ABC \ (1)$$

O triângulo DQF assim obtido é um triângulo isósceles visto que, por (1) e pela hipótese, $\overline{DQ} \cong \overline{DF}$. Logo, $E\widehat{F}D \cong E\widehat{Q}D$. Deste fato e de (1) decorre que $E\widehat{F}D \cong B\widehat{C}A$.

Então, pelo Teorema L.A.A., obtemos $\triangle DEF \cong \triangle ABC$.

■

2.3 Semelhança de triângulos

Semelhança, segundo o dicionário, é um substantivo feminino que significa qualidade de semelhante, parecença entre seres, coisas ou ideias que tem elementos conformes, independentemente daqueles que são comuns à espécie; analogia, identidade. Vamos trazer esta definição para a matemática, que é o nosso objetivo. Na teoria de semelhança entre figuras é fundamental a precisão nas formas idênticas entre figuras, obedecendo à mesma proporção entre suas dimensões, sendo uma ferramenta importante em muitas áreas, como por exemplo, na Engenharia e Arquitetura, na ampliação e redução de plantas, mapas e maquetes. Estudaremos os casos de semelhança de triângulos para o desenvolvimento do estudo das relações trigonométricas no triângulo retângulo.

Definição 2.7. Seja S uma correspondência biunívoca entre os vértices de dois triângulos. Se os ângulos correspondentes são congruentes e os lados correspondentes são proporcionais, então a correspondência S é uma **semelhança**, e dizemos que os **triângulos são semelhantes**.

Consideremos o triângulos ABC e DEF como na figura.

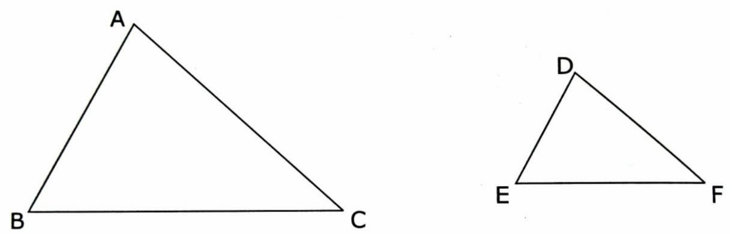


Figura 2.22: Triângulos semelhantes

Escrevemos $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ para denotar que o triângulo ABC é semelhante ao triângulo DEF, com a correspondência que leva A em D, B em E, e C em F.

Assim, se $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ temos $m\widehat{A} = m\widehat{D}$, $m\widehat{B} = m\widehat{E}$, $m\widehat{C} = m\widehat{F}$ e $\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{BC}{EF} = \dfrac{CA}{FD}$.

O quociente comum entre as medidas dos lados correspondentes é chamado de **razão de proporcionalidade** ou **razão de semelhança entre os dois triângulos**.

Observe que, se dois triângulos são semelhantes com razão de semelhança igual a um, então eles são congruentes.

Teoremas Fundamentais sobre Semelhança de Triângulos

Teorema 2.13. (O Teorema de Semelhança A.A.A) Dados dois triângulos ABC e DEF, se $\widehat{A} \cong \widehat{D}$, $\widehat{B} \cong \widehat{E}$ e $\widehat{C} \cong \widehat{F}$, então $\triangle ABC \sim \triangle DEF$.

Demonstração: Consideremos os triângulos ABC e DEF satisfazendo as hipóteses do teorema.

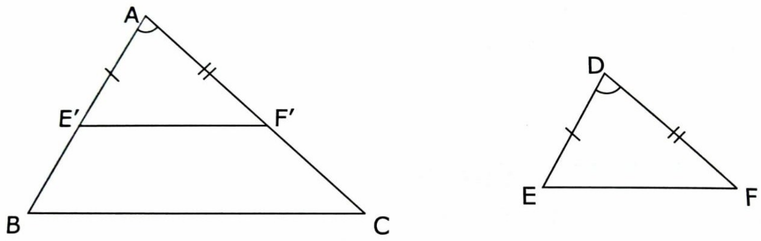


Figura 2.23: Semelhança AAA

Consideremos E' e F' pontos de $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$, respectivamente, tais que $AE' = DE$ e $AF' = DF$. Pelo Postulado L.A.L., temos que

$$\triangle AE'F' \cong \triangle DEF$$

Portanto, $A\widehat{E'}F' \cong \widehat{B}$. Assim, $\overleftrightarrow{E'F'}$ e $\overleftrightarrow{BC}$ são paralelas ou coincidem. Se coincidem, então, pelo caso de congruência A.L.A., temos $\triangle AE'F' \cong \triangle ABC$, e, portanto, os triângulos ABC e DEF são congruentes e daí, semelhantes.

Se $\overleftrightarrow{E'F'}$ e $\overleftrightarrow{BC}$ são paralelas, então pelo Teorema Fundamental da Proporcionalidade, temos

$$\frac{AB}{AE'} = \frac{AC}{AF'}.$$

Como $AE' = DE$ e $AF' = DF$, temos

$$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}.$$

Analogamente demonstramos que

$$\frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF}.$$

Logo, $\triangle ABC \sim \triangle DEF$.

■

Como consequência deste teorema, temos o seguinte corolário que será usado com mais frequência que o Teorema de Semelhança A.A.A..

Corolário 2.3. (Corolário A.A.) Seja S uma correspondência entre os vértices de dois triângulos. Se dois pares de ângulos correspondentes são congruentes, então a correspondência S é uma semelhança.

Teorema 2.14. (O Teorema de Semelhança L.A.L.) Dados dois triângulos ABC e DEF, se $\widehat{A} \cong \widehat{D}$ e $\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{AC}{DF}$, então $\triangle ABC \sim \triangle DEF$.

Demonstração: Consideremos os triângulos ABC e DEF satisfazendo as hipóteses do teorema.

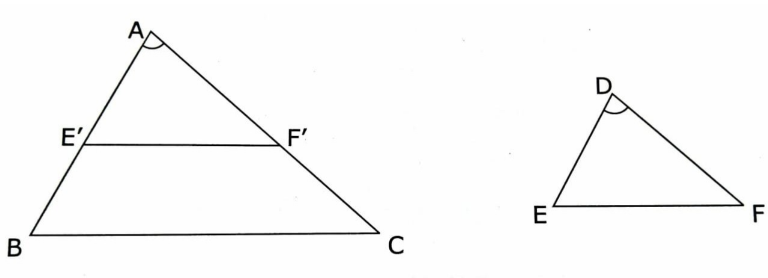


Figura 2.24: Semelhança LAL

Consideremos E' e F' pontos de $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ respectivamente, tais que $AE' = DE$ e $AF' = DF$. Temos

$$\frac{AB}{AE'} = \frac{AC}{AF'}$$

Portanto, pelo Teorema 2.5 obtemos que $\overleftrightarrow{E'F'}$ e $\overleftrightarrow{BC}$ são paralelas e, então, $\widehat{B} \cong A\widehat{E'}F'$ e $\widehat{C} \cong A\widehat{F'}E'$.

Mas, pelo Postulado L.A.L., os triângulos $AE'F'$ e DEF são congruentes. Logo, temos $A\widehat{E'}F' \cong \widehat{E}$ e $A\widehat{F'}E' \cong \widehat{F}$.

Portanto, $\widehat{B} \cong \widehat{E}$ e $\widehat{C} \cong \widehat{F}$, e pelo Corolário A.A. temos $\triangle ABC \sim \triangle DEF$.

■

Teorema 2.15. (O Teorema de Semelhança L.L.L.) Se dois triângulos ABC e DEF, são tais que seus lados satisfazem a relação $\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{AC}{DF} = \dfrac{BC}{EF}$, então $\triangle ABC \sim \triangle DEF$.

Demonstração: Sejam E' e F' pontos de $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$, respectivamente, tais que $AE' = DE$ e $AF' = DF$.

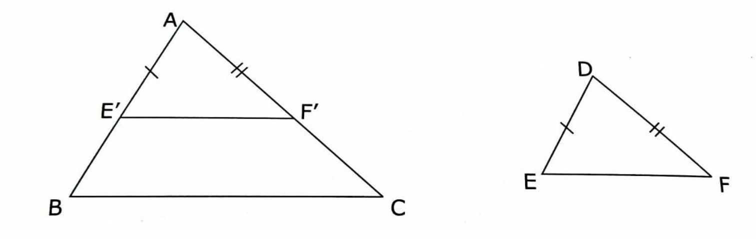


Figura 2.25: Semelhança LLL

Como da hipótese decorre $\dfrac{AB}{AE'} = \dfrac{AC}{AF'}$, segue, usando o Teorema 2.5, que $\overleftrightarrow{E'F'}$ e $\overleftrightarrow{BC}$ são paralelas. Então, temos

$$\widehat{B} \cong A\widehat{E'}F' \text{ e } \widehat{C} \cong A\widehat{F'}E' \text{ (a).}$$

Pelo Corolário A.A. temos $\triangle ABC \sim \triangle AE'F'$. Portanto $\dfrac{E'F'}{BC} = \dfrac{AE'}{AB}$, e, daí,

$$E'F' = BC\frac{AE'}{AB} = BC\frac{DE}{AB} \quad \text{(b).}$$

Mas, pela hipótese, temos $\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{BC}{EF}$, ou seja,

$$EF = BC\frac{DE}{AB} \quad \text{(c).}$$

De (b) e (c) segue que $E'F' = EF$. Então pelo Teorema L.L.L. de congruência de triângulos, temos $\triangle AE'F' \cong \triangle DEF$ e, portanto

$$A\widehat{E'}F' \cong \widehat{E} \text{ e } A\widehat{F'}E' \cong \widehat{F} \quad \text{(d).}$$

Por (a) e (d), temos $\widehat{B} \cong \widehat{E}$ e $\widehat{C} \cong \widehat{F}$. E, pelo Corolário A.A., segue o resultado.

■

2.4 Semelhança nos triângulos retângulos e Teorema de Pitágoras

Teorema 2.16. A altura correspondente à hipotenusa de qualquer triângulo retângulo divide-o em dois triângulos que são semelhantes um ao outro e também semelhantes ao triângulo original.

Demonstração: Consideremos o triângulo ABC, retângulo em A. Seja $\overline{AH}$ a altura desde A à hipotenusa $\overline{BC}$. Vamos mostrar que

$$\triangle ABC \sim \triangle HBA \text{ e que } \triangle ABC \sim \triangle HAC.$$

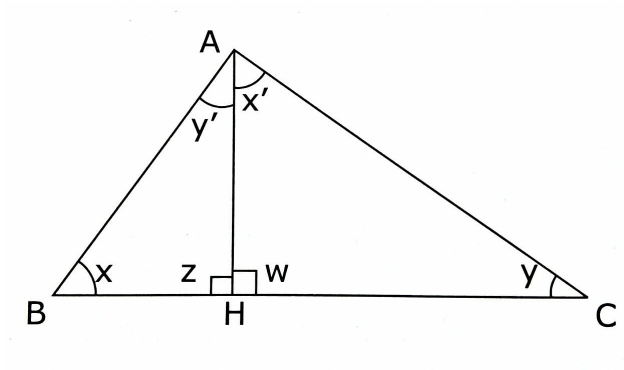


Figura 2.26: Semelhança em triângulos retângulos

Consideremos os ângulos x, y, z, w, x' e y', como na figura.

Como $B\widehat{A}C$ é um ângulo reto, temos que $m\hat{x} + m\hat{y} = 90$.

Também, como z é um ângulo reto, temos $m\hat{x} + m\hat{y'} = 90$.

Portanto $\hat{y} \cong \hat{y'}$.

Como x é um ângulo comum aos triângulos ABC e HBA, segue pelo Corolário A.A. que tais triângulos são semelhantes.

Analogamente demonstramos que $\triangle ABC \sim \triangle HAC$.

■

Corolário 2.4. Em um triângulo retângulo

(a) a altura relativa à hipotenusa é a média geométrica entre os segmentos em que é dividida a hipotenusa e

(b) cada cateto é a média geométrica entre a hipotenusa e o segmento da hipotenusa que é a projeção deste cateto sobre ela.

Demonstração: Consideremos o triângulo ABC, retângulo em $\hat{A}$, e seja H o pé da altura desde A até $\overline{BC}$.

Denotamos: $a = BC, b = CA$ e $c = AB; m = BH, n = HC$ e $h = AH$.

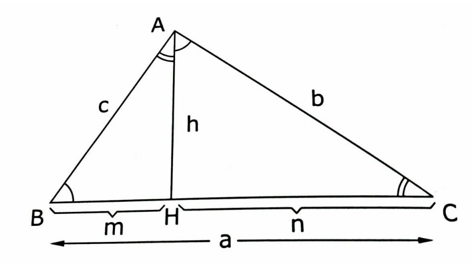


Figura 2.27: Semelhança em triângulos retângulos

Vamos mostrar que

$$h^2 = mn. \ (1)$$
$$c^2 = am \ \text{ e } \ b^2 = an.(2)$$

Pelo teorema anterior, $\triangle ABH \sim \triangle CAH$. Portanto, obtemos $\dfrac{BH}{AH} = \dfrac{AH}{HC}$, ou seja, $h^2 = mn$.

Também pelo teorema anterior, temos $\triangle ABH \sim \triangle CBA$. Portanto, $\dfrac{BH}{AB} = \dfrac{AB}{BC}$, ou seja, $c^2 = am$.

Do mesmo modo, $\triangle CHA \sim \triangle CAB$ e, portanto, $\dfrac{CH}{AC} = \dfrac{AC}{BC}$, ou seja, $b^2 = an$.

■

Teorema de Pitágoras

Existem inúmeras demonstrações do Teorema de Pitágoras, apresentaremos uma demonstração simples, que decorre imediatamente dos resultados sobre semelhança.

Teorema 2.17. (Teorema de Pitágoras) Num triângulo retângulo qualquer, o quadrado do comprimento da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos comprimentos dos catetos.

Demonstração: Consideremos o triângulo retângulo ABC, sendo $\hat{A}$ o seu ângulo reto. Sejam $a = BC, b = AC$ e $c = AB$. Vamos mostrar que $a^2 = b^2 + c^2$.

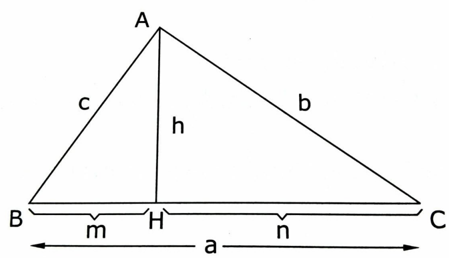


Figura 2.28: O Teorema de Pitágoras

Do Corolário 2.4 obtemos os resultados: $c^2 = am$ e $b^2 = an$. Portanto, $c^2+b^2 = a(m+n)$. Como $m + n = a$, segue que $a^2 = b^2 + c^2$.

■

E a recíproca de Teorema de Pitágoras? É verdadeira?

Proposição 2.1. (Recíproca do Teorema de Pitágoras) Se o quadrado da medida de um lado de um triângulo é igual à soma dos quadrados dos outros dois lados, então o triângulo é retângulo, sendo o ângulo reto oposto ao primeiro lado.

Demonstração: Consideremos o triângulo ABC com $(BC)^2 = (AB)^2 + (AC)^2$.

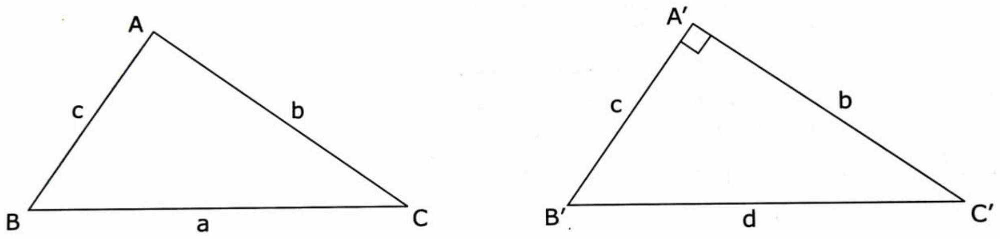


Figura 2.29: Recíproca do Teorema de Pitágoras

Sejam $a = BC, b = AC$ e $c = AB$. Temos $a^2 = b^2 + c^2$, ou seja, $a = \sqrt{b^2 + c^2}$.

Seja $A'B'C'$ um triângulo retângulo com catetos b e c, e seja d a medida da sua hipotenusa.

Pelo Teorema de Pitágoras aplicado a esse triângulo, temos $d^2 = b^2 + c^2$, ou seja, $d = \sqrt{b^2 + c^2}$. Logo, $d = a$.

Pelo Teorema L.L.L., temos que $\triangle A'B'C' \cong \triangle ABC$. Portanto, $\hat{A} \cong \hat{A}'$ e, assim, $\hat{A}$ é reto.

■

2.5 Razões trigonométricas

Às razões entre as medidas dos lados de um triângulo retângulo dá-se o nome de **razões trigonométricas**.

Cada uma destas razões recebeu um nome especial. Observe um triângulo retângulo qualquer, com seus respectivos ângulos, hipotenusa e catetos correspondentes.

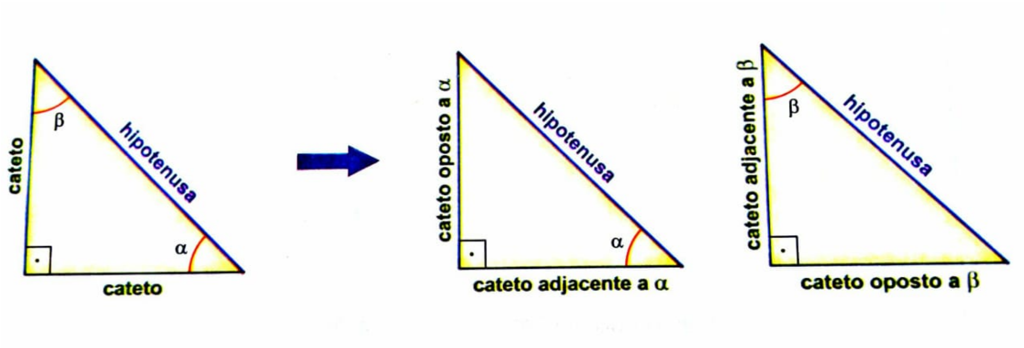


Figura 2.30: Razões trigonométricas

I. Para a razão entre cateto oposto e hipotenusa, damos o nome de **seno**.

Representamos para o ângulo α

$$sen\ \alpha = \frac{cateto\ oposto\ a\ \alpha}{hipotenusa}$$

E, para o ângulo β,

$$sen\ \beta = \frac{cateto\ oposto\ a\ \beta}{hipotenusa}$$

II. Para a razão entre cateto adjacente e hipotenusa, damos o nome de **cosseno**.

Representamos para o ângulo α

$$cos\ \alpha = \frac{cateto\ adjacente\ a\ \alpha}{hipotenusa}$$

E para o ângulo β

$$cos\ \beta = \frac{cateto\ adjacente\ a\ \beta}{hipotenusa}$$

III. Para a razão entre cateto oposto e cateto adjacente, damos o nome de **tangente**.

Representamos para o ângulo α

$$tg\ \alpha = \frac{cateto\ oposto\ a\ \alpha}{cateto\ adjacente\ a\ \alpha}$$

Representamos para o ângulo β

$$tg\ \beta = \frac{cateto\ oposto\ a\ \beta}{cateto\ adjacente\ a\ \beta}$$

Dado um ângulo $\hat{B}$, vamos marcar sobre um de seus lados os pontos $A_1, A_2, A_3, ...$, e vamos traçar, por eles, as perpendiculares $\overline{A_1C_1}$, $\overline{A_2C_2}$, $\overline{A_3C_3}$,..., de acordo com a figura.

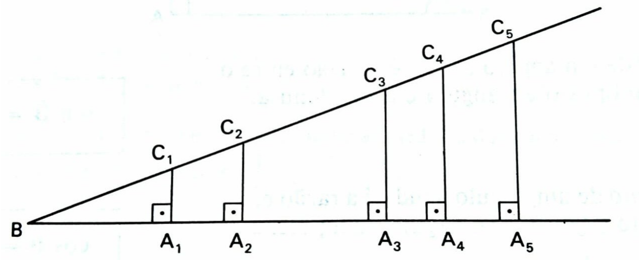


Figura 2.31: Perpendiculares e razões trigonométricas

Os triângulos BA_1C_1, BA_2C_2, BA_3C_3, ..., são todos semelhantes entre si. Logo:

I) Fixando o $\widehat{B}$ nos triângulos anteriores temos os lados $\overline{A_1C_1}, \overline{A_2C_2}, \overline{A_3C_3}, ...$ como sendo todos catetos opostos ao ângulo $\widehat{B}$. E também, os lados $\overline{BC_1}, \overline{BC_2}, \overline{BC_3}, ...$ são todos as hipotenusas dos triângulos em questão. Assim, podemos dizer que:

$$\frac{A_1C_1}{BC_1} = \frac{A_2C_2}{BC_2} = \frac{A_3C_3}{BC_3} = ...$$

II) Fixando ainda o ângulo $\widehat{B}$ nos triângulos semelhantes acima, temos os lados $\overline{BA_1}, \overline{BA_2}, \overline{BA_3}, ...$ todos sendo cateto adjacente em relação ao ângulo fixado. E também, os lados $\overline{BC_1}, \overline{BC_2}, \overline{BC_3}, ...$ são todas as hipotenusas dos triângulos considerados. Assim, temos:

$$\frac{BA_1}{BC_1} = \frac{BA_2}{BC_2} = \frac{BA_3}{BC_3} = ...$$

III) Fixando o ângulo $\widehat{B}$ nos triângulos, os lados $\overline{A_1C_1}, \overline{A_2C_2}, \overline{A_3C_3}, ...$ são catetos opostos, e os lados $\overline{BA_1}, \overline{BA_2}, \overline{BA_3}, ...$ são os catetos adjacentes. Então:

$$\frac{A_1C_1}{BA_1} = \frac{A_2C_2}{BA_2} = \frac{A_3C_3}{BA_3} = ...$$

Verificamos que as razões acima não dependem do tamanho dos triângulos $\triangle BA_1C_1$, $\triangle BA_2C_2$, $\triangle BA_3C_3$, ... mas dependem apenas do valor do ângulo $\widehat{B}$. Assim, considerando um triângulo retângulo e fixando um ângulo agudo $\widehat{B}$, temos:

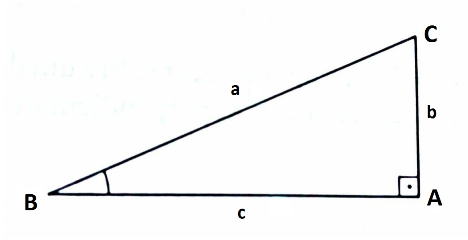


Figura 2.32: Triângulo retângulo

I) **SENO** de um ângulo é a razão entre o cateto oposto ao ângulo e a hipotenusa.

$$sen\widehat{B} = \frac{b}{a}$$

II) **COSSENO** de um ângulo é a razão entre o cateto adjacente ao ângulo e a hipotenusa.

$$cos\widehat{B} = \frac{c}{a}$$

III) **TANGENTE** de um ângulo é a razão entre o cateto oposto ao ângulo e o cateto adjacente ao ângulo.

$$tg\widehat{B} = \frac{b}{c}$$

Podemos inverter as razões trigonométricas acima, e teremos outras razões com nomes diferentes. Assim, **cotangente** é a razão que admite ser o inverso da tangente, sendo tangente a razão entre o cateto oposto ao ângulo e o cateto adjacente ao ângulo, então **cotangente** é a razão entre o cateto adjacente ao ângulo e o cateto oposto ao ângulo. Definimos também a **cossecante** como a razão inversa do seno, ou seja, **cossecante** é a razão entre a hipotenusa e o cateto oposto ao ângulo. E definimos a **secante** como a razão que admite ser o inverso do cosseno, ou seja, **secante** é a razão entre a hipotenusa e o cateto adjacente ao ângulo.

Denotamos:

cotg $\rightarrow$ **cotangente**

cossec $\rightarrow$ **cossecante**

sec $\rightarrow$ **secante**

Desse modo, podemos definir:

$$tg\,\widehat{B} = \frac{cateto\ oposto}{cateto\ adjacente}$$

$$cotg\,\widehat{B} = \frac{cateto\ adjacente}{cateto\ oposto}$$

Ou seja, $\mathbf{cotg\,\hat{B}} = \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{tg\,\hat{B}}}$

Vamos determinar também as razões da cossecante e da secante da mesma maneira.

$$sen\,\widehat{B} = \frac{cateto\ oposto}{hipotenusa}$$
$$cossec\,\widehat{B} = \frac{hipotenusa}{cateto\ oposto}$$

Assim, $\mathbf{cossec\,\hat{B}} = \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{sen\,\hat{B}}}$

E, agora a secante

$$cos\,\widehat{B} = \frac{cateto\ adjacente}{hipotenusa}$$
$$sec\,\widehat{B} = \frac{hipotenusa}{cateto\ adjacente}$$

Assim, $\mathbf{sec\,\hat{B}} = \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{cos\,\hat{B}}}$

2.6 Relações trigonométricas

Vamos definir as relações existentes entre as razões trigonométricas vistas anteriormente. Começaremos com a chamada Relação Fundamental.

$$\boxed{sen^2\widehat{B} + cos^2\widehat{B} = 1.}$$

De fato, conforme figura 2.33, num triângulo retângulo qualquer de catetos b e c e hipotenusa a temos, de acordo com o teorema de Pitágoras:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

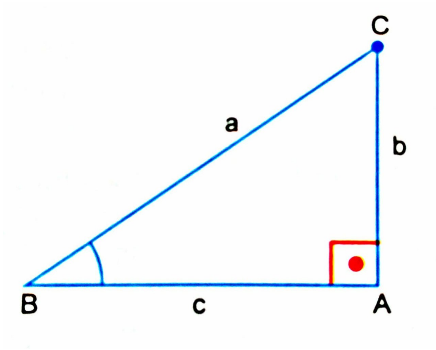


Figura 2.33: Relação fundamental

Fixando o ângulo $\widehat{B}$, sabemos que $sen\widehat{B} = \dfrac{b}{a}$ e $cos\widehat{B} = \dfrac{c}{a}$, e usando o teorema de Pitágoras, tem-se:

$$sen^2\widehat{B} + cos^2\widehat{B} = (\frac{b}{a})^2 + (\frac{c}{a})^2 = \frac{b^2}{a^2} + \frac{c^2}{a^2} = \frac{b^2+c^2}{a^2} = \frac{a^2}{a^2} = 1$$

Logo, $sen^2\widehat{B} + cos^2\widehat{B} = 1$.

Outra relação é a

$$\boxed{tg\widehat{B} = \frac{sen\widehat{B}}{cos\widehat{B}}}.$$

De fato, utilizando o mesmo triângulo e fixando o ângulo $\widehat{B}$, temos:

$$tg\widehat{B} = \frac{b}{c} = \frac{\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}} = \frac{sen\widehat{B}}{cos\widehat{B}} = tg\widehat{B}.$$

Logo, $tg\widehat{B} = \dfrac{sen\widehat{B}}{cos\widehat{B}}$.

Anteriormente vimos que $cotg\widehat{B} = \dfrac{1}{tg\widehat{B}}$. Assim:

$$cotg\widehat{B} = \frac{1}{tg\widehat{B}} = \frac{1}{\frac{sen\widehat{B}}{cos\widehat{B}}} = \frac{cos\widehat{B}}{sen\widehat{B}}.$$

Logo, $cotg\hat{B} = \dfrac{cos\hat{B}}{sen\hat{B}}$.

Desse modo, temos as seguintes relações fundamentais:

I) $sen^2\widehat{B} + cos^2\widehat{B} = 1$

II) $tg\widehat{B} = \dfrac{sen\widehat{B}}{cos\widehat{B}}$

III) $cotg\widehat{B} = \dfrac{cos\widehat{B}}{sen\widehat{B}}$

IV) $cossec\widehat{B} = \dfrac{1}{sen\widehat{B}}$

V) $sec\widehat{B} = \dfrac{1}{cos\widehat{B}}$.

Usando a relação fundamental, definiremos outras relações auxiliares.
a) Dividindo ambos os membros da relação fundamental por $cos^2\widehat{B}$, temos:

$$\frac{sen^2\widehat{B}}{cos^2\widehat{B}} + \frac{cos^2\widehat{B}}{cos^2\widehat{B}} = \frac{1}{cos^2\widehat{B}} \Rightarrow \boxed{tg^2\widehat{B} + 1 = sec^2\widehat{B}}$$

b) Dividindo ambos os membros da relação fundamental por $sen^2\widehat{B}$, temos:

$$\frac{sen^2\widehat{B}}{sen^2\widehat{B}} + \frac{cos^2\widehat{B}}{sen^2\widehat{B}} = \frac{1}{sen^2\widehat{B}} \Rightarrow \boxed{1 + cotg^2\widehat{B} = cossec^2\widehat{B}}$$

Assim, determinamos mais duas relações fundamentais, que são:
VI) $sec^2\widehat{B} = 1 + tg^2\widehat{B}$

VII) $cossec^2\widehat{B} = 1 + cotg^2\widehat{B}$

2.7 Arcos notáveis

Estudamos que existem razões entre os lados de um triângulo retângulo qualquer que são chamadas de razões trigonométricas, e recebem nomes especiais: seno, cosseno e tangente. Estas razões tem valores que determinam os valores dos ângulos do triângulo retângulo. Atualmente existe uma tabela chamada de Tabela Trigonométrica onde constam todos os valores de ângulos ou arcos menores que 90^o e seus valores de seno, cosseno e tangente. No segundo capítulo desta dissertação, que trata da história da trigonometria, apresentamos como originou-se esta tabela.

Mas existem alguns valores de arcos que são mais utilizados que outros, então receberam o nome de **arcos notáveis**. Iremos determinar os valores dos seno, cosseno e tangente desses arcos notáveis, utilizando triângulos. Os arcos notáveis são os arcos de valores 30º, 45º e 60º. Começaremos com o arco de 45º.

- **Arco notável de 45º**

Num triângulo retângulo isósceles qualquer, se l for a medida de cada cateto então, pelo teorema de Pitágoras, temos:

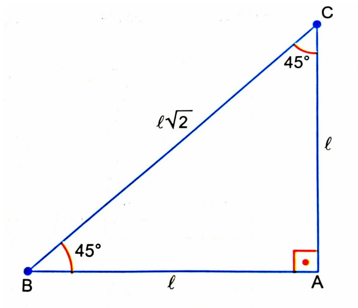


Figura 2.34: Arco notável de 45º

$(BC)^2 = l^2 + l^2 \Leftrightarrow (BC)^2 = 2l^2 \Leftrightarrow BC = l\sqrt{2}$

Logo,

a) $sen\widehat{B} = \dfrac{AC}{BC} \Rightarrow sen\,45^o = \dfrac{l}{l\sqrt{2}} \Rightarrow sen\,45^o = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \mathbf{sen\,45^o = \dfrac{\sqrt{2}}{2}}$

b) $cos\widehat{B} = \dfrac{AB}{BC} \Rightarrow cos\,45^o = \dfrac{l}{l\sqrt{2}} \Rightarrow \mathbf{cos\,45^o = \dfrac{\sqrt{2}}{2}}$

c) $tg\widehat{B} = \dfrac{AC}{AB} \Rightarrow tg\,45^o = \dfrac{l}{l} \Rightarrow \mathbf{tg\,45^o = 1}$

- **Arco notável de 60º**

Num triângulo equilátero qualquer de lado l, conforme figura, sabemos que a altura relativa ao vértice C divide o lado AB ao meio, assim a medida dos segmentos AM e MB são iguais e medem $\dfrac{l}{2}$.

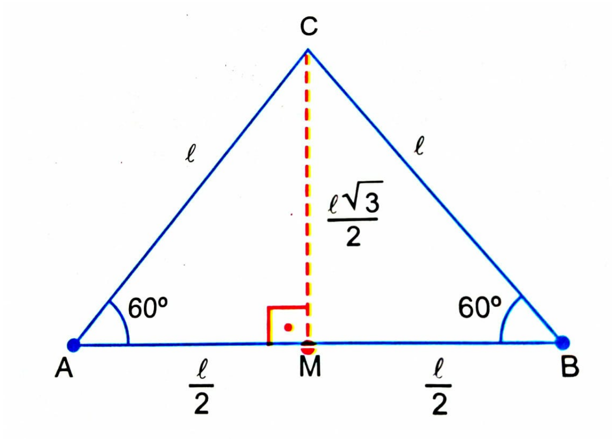


Figura 2.35: Arco notável de 60º

Tomando o triângulo retângulo AMC e, aplicando o teorema de Pitágoras, tem-se:
$(AC)^2 = (AM)^2 + (MC)^2 \Leftrightarrow l^2 = (\frac{l}{2})^2 + (MC)^2 \Leftrightarrow (MC)^2 = l^2 - \frac{l^2}{4}$

$(MC)^2 = \frac{3l^2}{4} \Leftrightarrow MC = \frac{l\sqrt{3}}{2}$

Logo,

a) $sen\widehat{A} = \frac{MC}{AC} \Rightarrow sen\,60^o = \frac{\frac{l\sqrt{3}}{2}}{l} \Rightarrow \mathbf{sen\,60^o} = \frac{\sqrt{\mathbf{3}}}{\mathbf{2}}$

b) $cos\widehat{A} = \frac{AM}{AC} \Rightarrow cos\,60^o = \frac{\frac{l}{2}}{l} \Rightarrow \mathbf{cos\,60^o} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$

c) $tg\widehat{A} = \frac{MC}{AM} \Rightarrow tg\,60^o = \frac{\frac{l\sqrt{3}}{2}}{\frac{l}{2}} \Rightarrow \mathbf{tg\,60^o} = \sqrt{\mathbf{3}}$

• **Arco notável de 30º**

No mesmo triângulo retângulo anterior, o $\triangle AMC$, o ângulo $M\widehat{C}A$ tem medida de 30º, pois é complementar ao $\widehat{A}$, com isso temos:

a) $sen\widehat{C} = \frac{AM}{AC} \Rightarrow sen\,30^o = \frac{\frac{l}{2}}{l} \Rightarrow \mathbf{sen\,30^o} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$

b) $cos\widehat{C} = \frac{MC}{AC} \Rightarrow cos\,30^o = \frac{\frac{l\sqrt{3}}{2}}{l} \Rightarrow \mathbf{cos\,30^o} = \frac{\sqrt{\mathbf{3}}}{\mathbf{2}}$

c) $tg\widehat{C} = \dfrac{AM}{MC} \Rightarrow tg\,30^o = \dfrac{\frac{l}{2}}{\frac{l\sqrt{3}}{2}} \Rightarrow tg\,30^o = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \mathbf{tg\,30^o} = \dfrac{\sqrt{\mathbf{3}}}{\mathbf{3}}$

Com isso, determinamos os valores das razões trigonométricas, seno, cosseno e tangente, dos arcos notáveis de 30^o, 45^o e 60^o, conforme a tabela abaixo.

Ângulos	30°	45°	60°
seno	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cosseno	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tangente	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Figura 2.36: Tabela trigonométrica

2.8 Medidas de arcos e ângulos na circunferência

Consideremos uma circunferência de centro O e um ângulo central $A\widehat{O}B$, sendo A e B pontos que pertencem aos lados do ângulo e à circunferência.

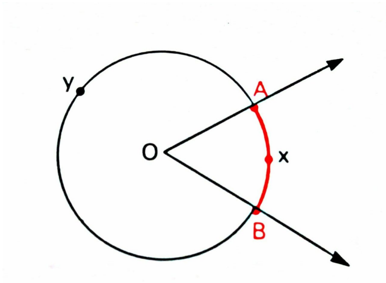


Figura 2.37: Arco de circunferência

A circunferência fica dividida em duas partes, cada uma das quais é um arco de circunferência, o arco de circunferência $\widehat{AXB}$ e o arco $\widehat{AYB}$, sendo que A e B são as extremidades do arco, de acordo com figura 2.37.

O arco de uma volta mede 360º e o arco nulo mede 0º. O arco de 1º corresponde a $\dfrac{1}{360}$ do arco de uma volta. Os submúltiplos do grau são o minuto e o segundo, representado pelo símbolo $1'$ e $1''$, respectivamente. O arco de $1'$ corresponde a $\dfrac{1}{60}$ do arco de um grau, ou seja, $1^o = 60'$. O arco de $1''$ corresponde a $\dfrac{1}{60}$ do arco de um minuto, ou seja, $1' = 60''$. Com isso, $1^o = 60' = 3600''$.

A medida de um arco também pode ser em radianos, que é a razão entre o comprimento do arco e a medida do comprimento do raio da circunferência sobre a qual este arco está determinado. De acordo com a figura, temos:

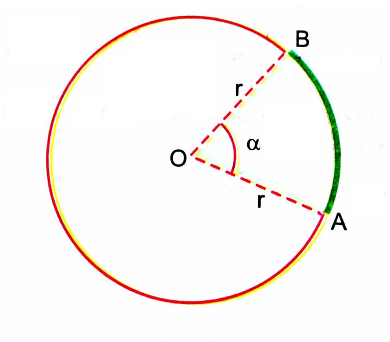


Figura 2.38: Medida em radianos

$$\alpha = \frac{comprimento\ do\ arco\, AB}{medida\ do\ raio}$$

Assim, o arco $\widehat{AB}$ mede 1 radiano, representado por 1 rad, se o seu comprimento for igual ao raio da circunferência. A medida de um arco, em radianos, é um número real, então ao dizer que um certo arco mede 3 rad, significa que o comprimento do arco é o triplo da medida do raio.

Sabemos que o arco de uma volta tem medida de 360º e tem comprimento de $2.\pi.r$, então usaremos a fórmula anterior para determinarmos a medida do arco de uma volta, em radianos. Assim,

$$\alpha = \frac{comprimento\ do\ arco\, AB}{medida\ do\ raio} = \frac{2.\pi.r}{r} = 2.\pi \cong 6,28.$$

Dessa forma, o arco de uma volta mede 2π *rad*. As conversões das medidas dos arcos em graus para a medida em radianos, ou vice versa, são feitas através de uma regra de três simples usando a correspondência de $360^o \Leftrightarrow 2\pi\, rad$ ou, então,

$$180^o \Leftrightarrow \pi\, rad.$$

Tomemos uma circunferência qualquer de centro O e raio r. Os pontos da circunferência que pertencem à região angular formam um arco $\widehat{AB}$, e temos também um ângulo $A\hat{O}B$ denominado de ângulo central. Assim, **a medida, em graus ou radianos, do ângulo central é a mesma medida do arco.**

2.9 Ciclo trigonométrico

O ciclo trigonométrico corresponde a uma circunferência de raio unitário na qual fixamos um ponto como origem dos arcos e adotamos o sentido anti-horário como sendo o positivo, e o sentido horário como o negativo. Esses arcos são obtidos partindo-se da origem e girando em qualquer sentido, positivo ou negativo, até a extremidade, seja na primeira passagem ou após várias voltas completas no ciclo trigonométrico.

Seja P um ponto qualquer de um ciclo trigonométrico de origem A. A medida do arco $\widehat{AP}$, de origem A e extremidade P, é, por convenção:

a) **Positiva** se o sentido do percurso de A para P for o **anti-horário**.

b) **Negativa** se o sentido do percurso de A para P for o **horário**.

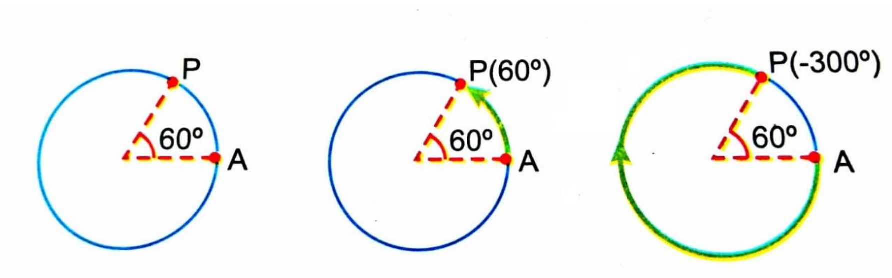


Figura 2.39: Sentidos

O ponto P é extremidade de infinitos arcos de origem A e a medida de cada um deles é chamada **determinação**. A medida α_0 do arco $\widehat{AP}$, tal que $0 \leq \alpha_0 < 2\pi$, é chamada

primeira determinação positiva do arco, porque está na primeira volta do ciclo trigonométrico que tem comprimento de 2π sendo que o raio é unitário.

Adicionando à primeira determinação positiva o número 2π, que equivale a percorrer uma volta completa no sentido anti-horário no ciclo trigonométrico, obtém-se o número $\alpha_0 + 2\pi$ que é a **segunda determinação positiva** do arco $\widehat{AP}$. Adicionando à primeira determinação o número $2.2\pi = 4\pi$, que equivale a percorrer duas voltas no sentido anti-horário, obtém-se o número $\alpha_0 + 4\pi$ que é a **terceira determinação positiva** do arco $\widehat{AP}$. E assim por diante.

Podemos também percorrer o comprimento do ciclo trigonométrico no sentido horário, ou seja, no sentido negativo. Subtraindo da primeira determinação positiva o número 2π, que equivale a percorrer uma volta no sentido horário, obtém-se $\alpha_0 - 2\pi$ que é a **primeira determinação negativa** do arco $\widehat{AP}$. Subtraindo da primeira determinação positiva o número $2.2\pi = 4\pi$, que equivale a percorrer duas voltas no sentido horário, obtém-se $\alpha_0 - 4\pi$ que é a **segunda determinação negativa** do arco $\widehat{AP}$, e assim por diante.

Se a medida dos arcos for expressa em graus, então $\alpha = \alpha_0 + n.360^o$, onde n representa a quantidade de voltas, que é multiplicado por 360^o que representa uma volta completa no ciclo trigonométrico na unidade de graus. O número α_0, usado nas determinações pode ser o valor de qualquer uma delas, é usual escolher o valor da primeira determinação positiva ou negativa.

2.9.1 Função seno

Consideremos, no ciclo trigonométrico de origem A, um sistema cartesiano ortogonal xOy conforme mostra a figura.

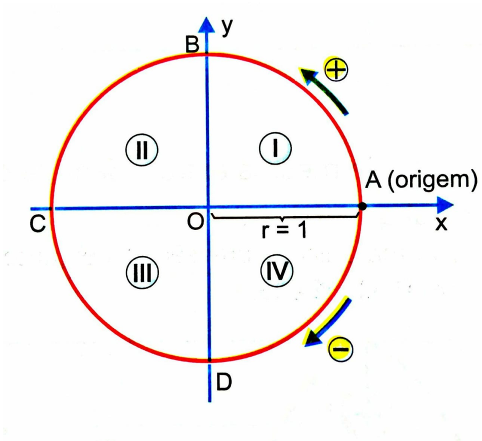


Figura 2.40: Função seno

De acordo com a figura 2.40, temos que como o raio de um ciclo trigonométrico é unitário, então os pontos $A(1,0)$, $B(0,1)$, $C(-1,0)$ e $D(0,-1)$ dividem o ciclo em quatro quadrantes. Caso o arco $\widehat{AP}$ pertença ao segundo quadrante, significa que a extremidade do arco, ou seja, o ponto P está no segundo quadrante.

O **seno de um arco trigonométrico** $\widehat{AP}$, de extremidade P, é o valor da ordenada do ponto P, ou seja, $sen\,\widehat{AP} = ON$ conforme a figura 2.41.

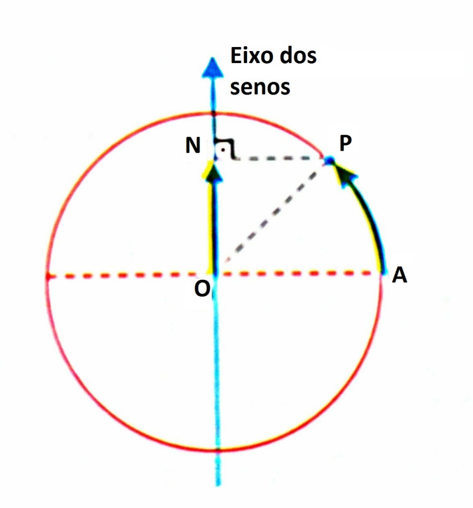


Figura 2.41: Eixo dos senos

A cada número real x corresponde um único ponto P, que é a extremidade do arco $\widehat{AP}$ de medida x. E, a cada ponto P corresponde uma única ordenada chamada **seno de** x.

Vamos observar melhor de acordo com a figura 2.42.

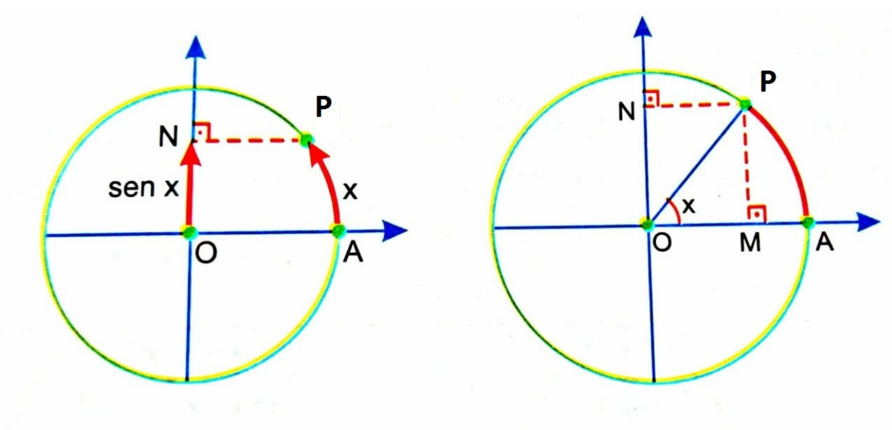


Figura 2.42: O seno

O arco $\widehat{AP}$ de origem em A e extremidade em P tem medida x, e o ângulo central $A\hat{O}P$

também mede x e OA é o raio do ciclo trigonométrico, de medida unitária. Como $0 < x < \frac{\pi}{2}$ então P pertence ao primeiro quadrante. Sendo assim, o triângulo $\triangle OMP$ retângulo em M tem $OP = 1$, já que é o raio do ciclo trigonométrico e $MP = ON$, pois são segmentos paralelos. Assim,

$$\boxed{sen\, x = \frac{cateto\ oposto}{hipotenusa} \Leftrightarrow sen\, x = \frac{MP}{OP} \Leftrightarrow sen\, x = \frac{ON}{1} \Leftrightarrow sen\, x = ON}$$

Logo, a função seno pode ser definida como, a função de $I\!R$ em $I\!R$ que a cada número real x associa a ordenada do ponto P. Simbolicamente, tem-se:

$$\boxed{f : I\!R \rightarrow I\!R\ tal\, que\ f(x) = sen\, x = ON}$$

Propriedades

I) Se x é do primeiro ou do segundo quadrante, então $sen\, x$ é positivo.

Observe pelas figuras que o ponto P está acima do eixo x e sua ordenada é positiva.

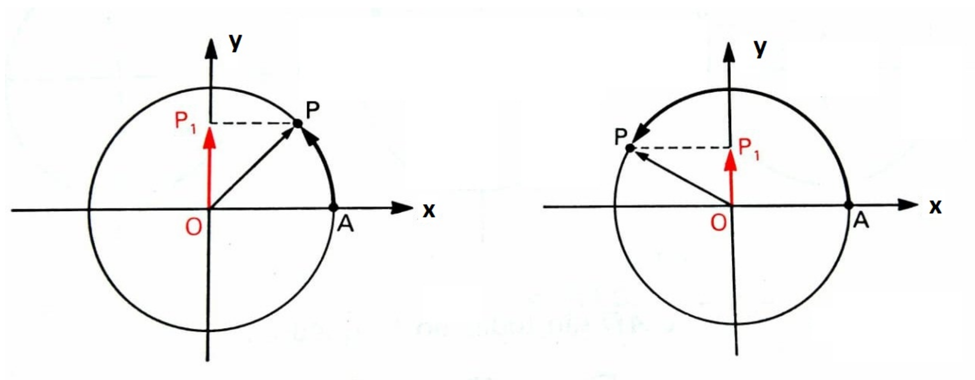


Figura 2.43: Valores de seno

$$0 \leq OP_1 \leq 1 \qquad\qquad 0 \leq OP_1 \leq 1$$
$$0 \leq sen\, x \leq 1 \qquad\qquad 0 \leq sen\, x \leq 1$$

II) Se x é do terceiro ou do quarto quadrante, então $sen\, x$ é negativo.

Observe pela figura 2.44 que o ponto P está abaixo do eixo x e sua ordenada é negativa.

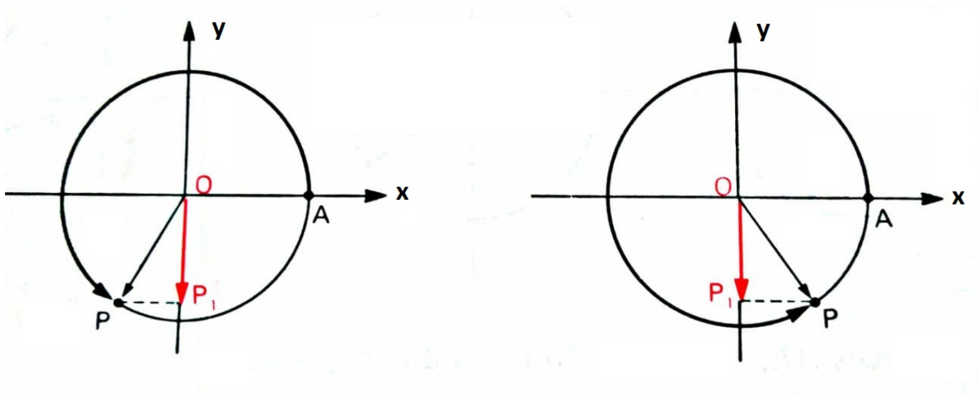


Figura 2.44: Valores de seno

$$-1 \leq OP_1 \leq 0 \qquad\qquad -1 \leq OP_1 \leq 0$$
$$-1 \leq sen\,x \leq 0 \qquad\qquad -1 \leq sen\,x \leq 0$$

Portanto, para todo $0 \leq x < 2\pi$, temos $-1 \leq sen\,x \leq 1$. Então podemos afirmar que -1 é o valor mínimo de $sen\,x$ e 1 é o valor máximo de $sen\,x$.

III) Se x percorre o primeiro ou o quarto quadrante, então $sen\,x$ é crescente.
Para o primeiro quadrante

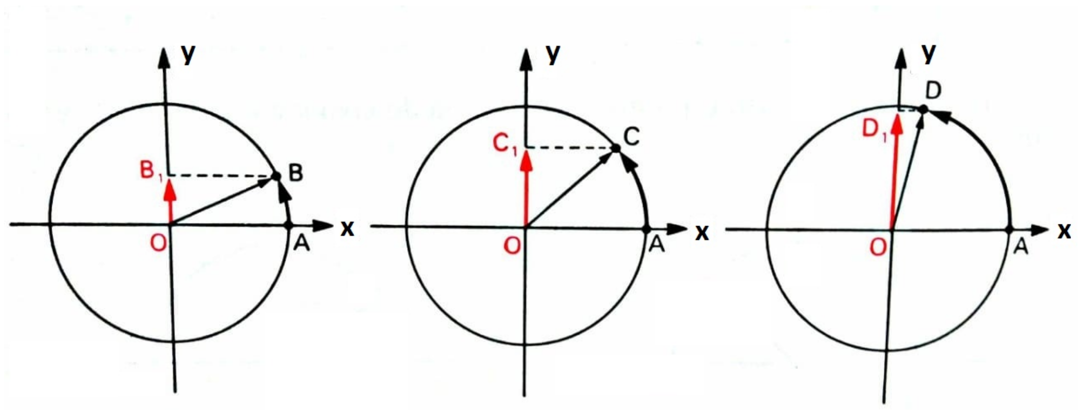


Figura 2.45: Valores de seno no primeiro quadrante

Observe que os arcos $\widehat{AB}$, $\widehat{AC}$ e $\widehat{AD}$ são todos do primeiro quadrante. E, $m\widehat{AB} < m\widehat{AC} < m\widehat{AD}$.

Agora observe as medidas no eixo das ordenadas, $OB_1 < OC_1 < OD_1$. Dessa forma, como as medidas dos arcos aumentam e as medidas no eixo das ordenadas também aumentam, verificamos que $sen\,x$ cresce, sendo que o valor do $sen\,x$ é medido no eixo das ordenadas.

Para o quarto quadrante

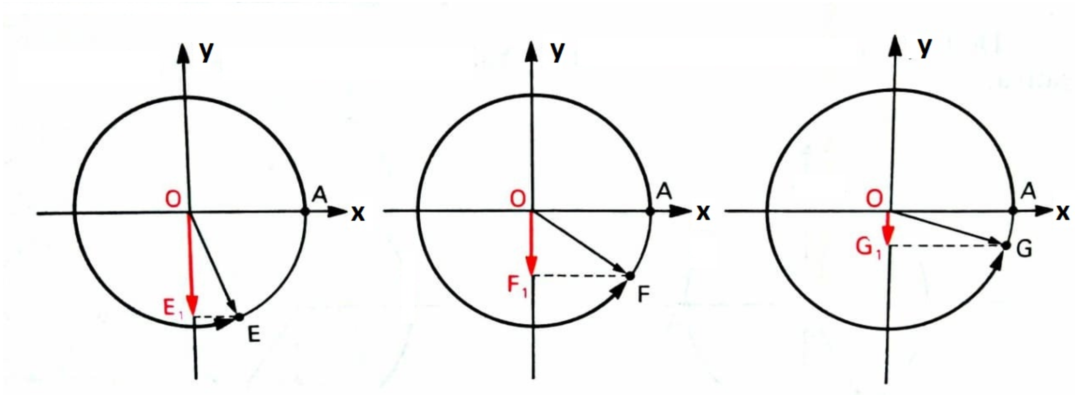


Figura 2.46: Valores de seno no quarto quadrante

Os arcos $\widehat{AE}$, $\widehat{AF}$ e $\widehat{AG}$ são todos do quarto quadrante. E, $m\widehat{AE} < m\widehat{AF} < m\widehat{AG}$. Agora observe as medidas no eixo das ordenadas, $OE_1 < OF_1 < OG_1$. Dessa forma, analogamente ao item anterior verificamos que $sen\,x$ cresce no quarto quadrante.

IV) Se x percorre o segundo ou o terceiro quadrante, então $sen\,x$ é decrescente.
Para o segundo quadrante

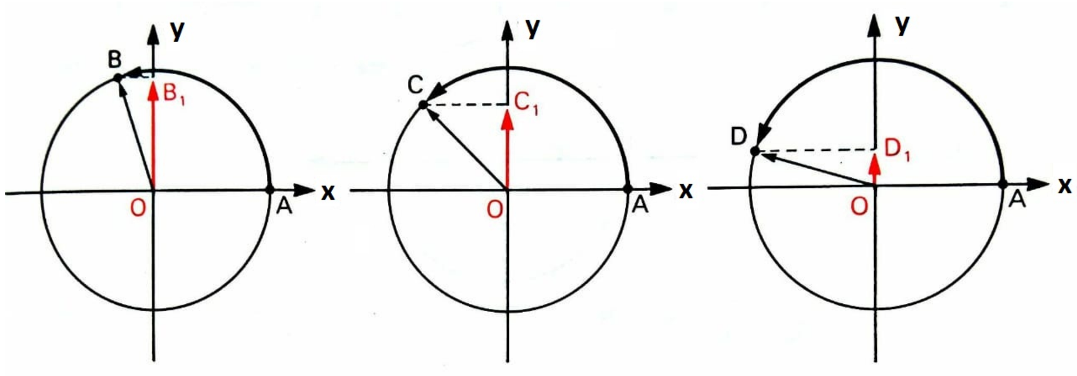


Figura 2.47: Valores de seno no segundo quadrante

Os arcos $\widehat{AB}, \widehat{AC}$ e $\widehat{AD}$ são todos do segundo quadrante. E, $m\widehat{AB} < m\widehat{AC} < m\widehat{AD}$. Observe as medidas no eixo das ordenadas, $OB_1 > OC_1 > OD_1$. Dessa forma, como as medidas dos arcos aumentam mas as medidas no eixo das ordenadas diminuem, verificamos que $sen\,x$ decresce, sendo que o valor do $sen\,x$ é medido no eixo das ordenadas. Então, aumentando o valor dos arcos, no segundo quadrante, o valor do $sen\,x$ diminui.

Para o terceiro quadrante

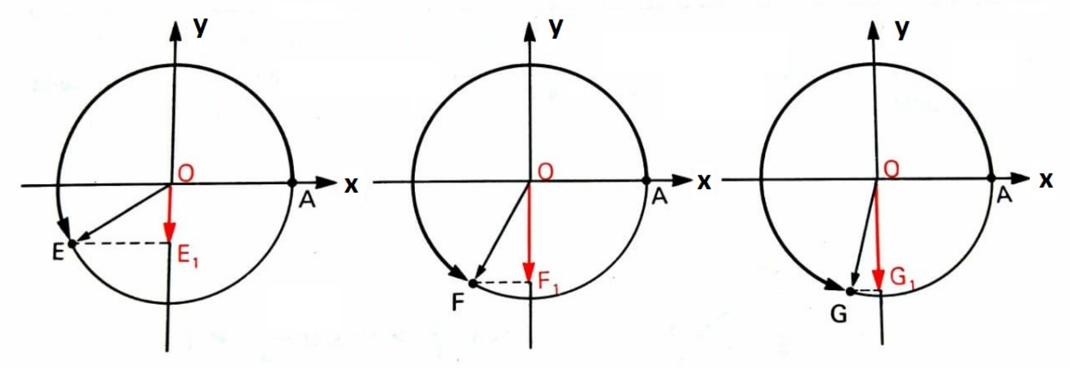


Figura 2.48: Valores de seno no terceiro quadrante

Os arcos $\widehat{AE}, \widehat{AF}$ e $\widehat{AG}$ estão todos no terceiro quadrante. E, $m\widehat{AE} < m\widehat{AF} < m\widehat{AG}$. Agora observe as medidas no eixo das ordenadas, $OE_1 > OF_1 > OG_1$. Dessa forma, analogamente ao item anterior, verificamos que $sen\,x$ decresce no terceiro quadrante.

Logo, o sinal de $sen\,x$ pode ser assim sintetizado:

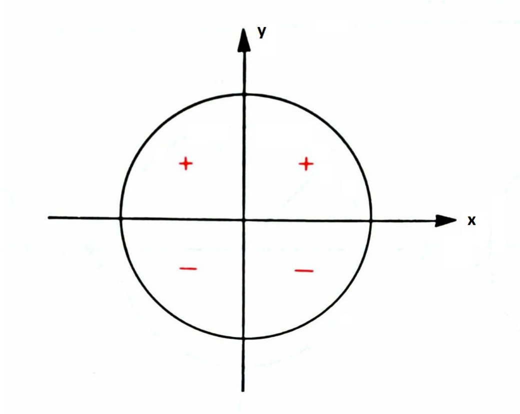


Figura 2.49: Sinais de seno

2.9.2 Função cosseno

O cosseno de um arco trigonométrico $\widehat{AP}$, de extremidade P, é a abscissa do ponto P, ou seja, $cos\widehat{AP} = OM$ conforme a figura 2.50.

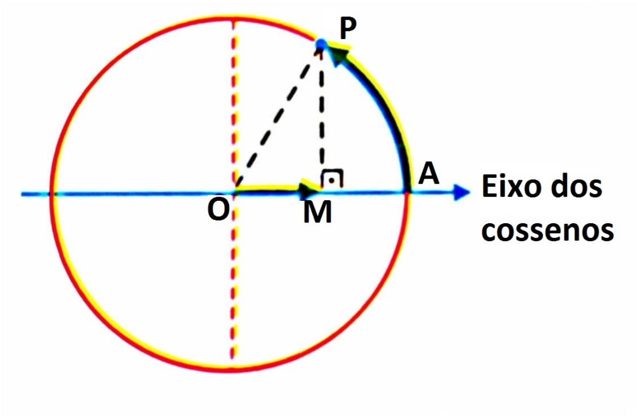


Figura 2.50: Eixo dos cossenos

A cada número real x corresponde um único ponto P, extremidade do arco $\widehat{AP}$ de medida x. E, a cada ponto P corresponde uma única abscissa chamada cosseno de x. Vamos observar a figura 2.51.

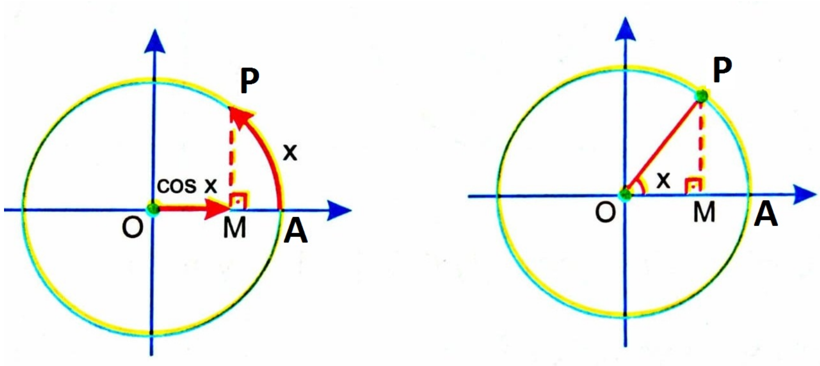


Figura 2.51: Eixo dos cossenos

O arco $\widehat{AP}$ de origem em A e extremidade em P tem medida x, e o ângulo central $A\hat{O}P$ também mede x e OA é o raio do ciclo trigonométrico, de medida unitária.

Como $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ então P pertence ao primeiro quadrante. Sendo assim, o triângulo $\triangle OMP$, retângulo em M, tem $OP = 1$ pois é o raio do ciclo trigonométrico. Logo,

$$\boxed{cos\, x = \frac{cateto\ adjacente}{hipotenusa} \Leftrightarrow cos\, x = \frac{OM}{OP} \Leftrightarrow cos\, x = \frac{OM}{1} \Leftrightarrow cos\, x = OM}$$

Assim, a **função cosseno** pode ser definida como, a função de $I\!R$ em $I\!R$ que a cada número real x associa a abscissa do ponto P. Simbolicamente, temos:

$$\boxed{f : I\!R \to I\!R\ tal\ que\ f(x) = cos\, x = OM}$$

Propriedades

I) Se x é do primeiro ou do quarto quadrante, então $cos\, x$ é positivo.

Observe pelas figuras que o ponto P está à direita do eixo y e sua abscissa é sempre positiva.

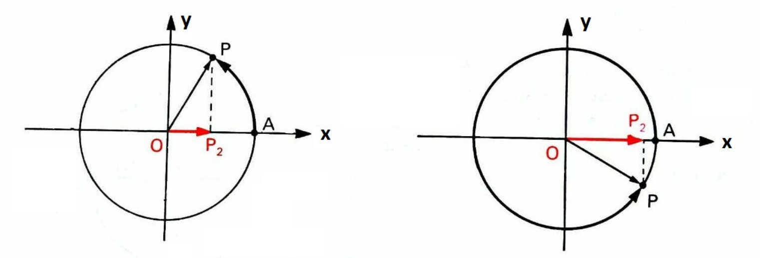


Figura 2.52: Valores de cossenos positivos

$0 \leq OP_2 \leq 1$ $\quad$ $0 \leq OP_2 \leq 1$

$0 \leq cos\, x \leq 1$ $\quad$ $0 \leq cos\, x \leq 1$

II) Se x é do segundo ou do terceiro quadrante, então $cos\, x$ é negativo.

Observe pelas figuras que o ponto P está à esquerda do eixo y e sua abscissa é negativa.

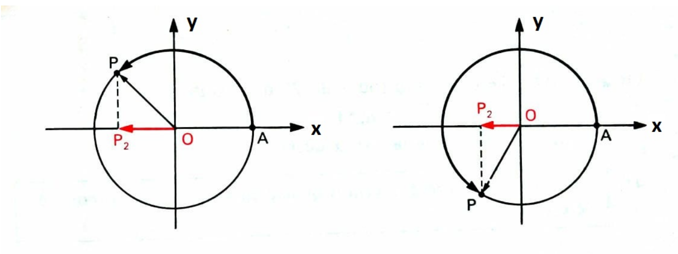


Figura 2.53: Valores negativos de cosseno

$-1 \leq OP_2 \leq 0$ $\quad$ $-1 \leq OP_2 \leq 0$

$-1 \leq cos\, x \leq 0$ $\quad$ $-1 \leq cos\, x \leq 0$

Portanto, para todo $0 \leq x < 2\pi$, temos $-1 \leq cos\, x \leq 1$. Então podemos afirmar que -1 é o valor mínimo de $cos\, x$ e 1 é o valor máximo de $cos\, x$.

III) Se x percorre o primeiro ou o segundo quadrante, então $cos\, x$ é decrescente.

Para o primeiro quadrante

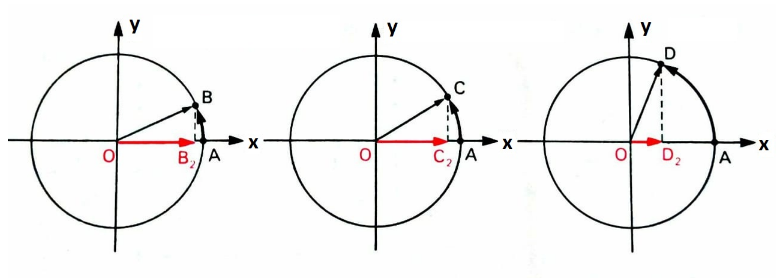


Figura 2.54: Valores de cosseno no primeiro quadrante

Observe na figura 2.54 que os arcos $\widehat{AB}$, $\widehat{AC}$ e $\widehat{AD}$ são todos do primeiro quadrante. E, $m\widehat{AB} < m\widehat{AC} < m\widehat{AD}$.

Agora observe as medidas no eixo das abscissas, $OB_2 > OC_2 > OD_2$. Dessa forma, como as medidas dos arcos aumentam mas as medidas no eixo das abscissas diminuem, verificamos que $cos\,x$ decresce, sendo que o valor do $cos\,x$ é medido no eixo das abscissas. Então, aumentando o valor dos arcos, no primeiro quadrante, o valor do $cos\,x$ diminui.

Para o segundo quadrante

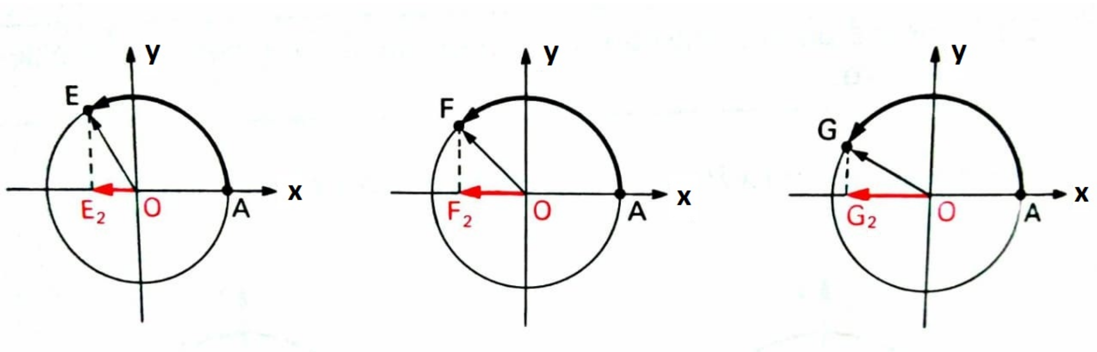


Figura 2.55: Valores de cosseno no segundo quadrante

Os arcos $\widehat{AE}$, $\widehat{AF}$ e $\widehat{AG}$ são todos do segundo quadrante. E, $m\widehat{AE} < m\widehat{AF} < m\widehat{AG}$.

Agora observe as medidas no eixo das abscissas, $OE_2 > OF_2 > OG_2$. Dessa forma, analogamente ao item anterior verificamos que $cos\,x$ decresce no segundo quadrante.

IV) Se x percorre o terceiro ou o quarto quadrante, então $cos\,x$ é crescente.

Para o terceiro quadrante

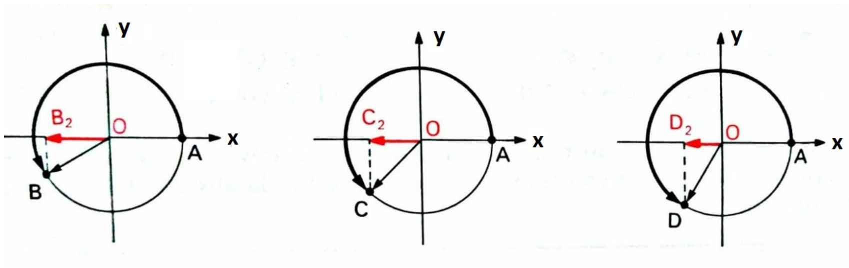


Figura 2.56: Valores de cosseno no terceiro quadrante

Os arcos $\widehat{AB}, \widehat{AC}$ e $\widehat{AD}$ são todos do terceiro quadrante. E, $m\widehat{AB} < m\widehat{AC} < m\widehat{AD}$.

Observe as medidas no eixo das abscissas, $OB_2 < OC_2 < OD_2$. Dessa forma, como as medidas dos arcos aumentam e as medidas no eixo das abscissas também aumentam, verificamos que $cos\,x$ cresce, sendo que o valor do $cos\,x$ é medido no eixo das abscissas. Então, aumentando o valor dos arcos, no terceiro quadrante, o valor do $cos\,x$ aumenta.

Para o quarto quadrante

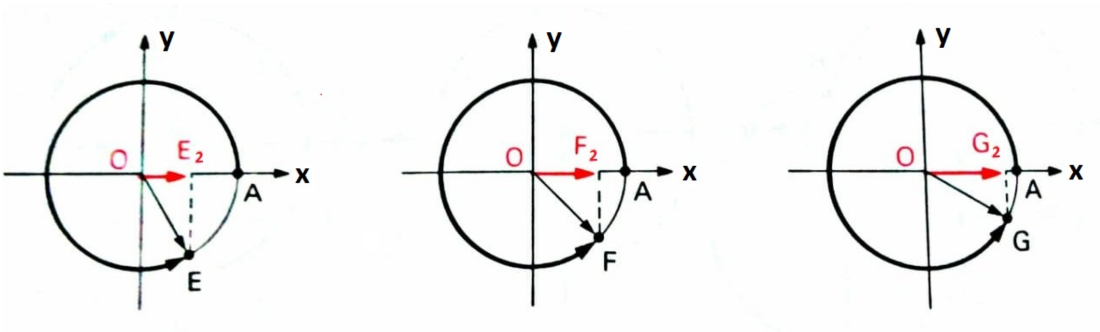


Figura 2.57: Valores de cosseno no quarto quadrante

Os arcos $\widehat{AE}, \widehat{AF}$ e $\widehat{AG}$ estão todos no quarto quadrante. E, $m\widehat{AE} < m\widehat{AF} < m\widehat{AG}$.

Agora observe as medidas no eixo das abscissas, $OE_2 < OF_2 < OG_2$. Dessa forma, analogamente ao item anterior, verificamos que $cos\,x$ cresce no quarto quadrante.

Logo, o sinal de $cos\,x$ pode ser assim sintetizado:

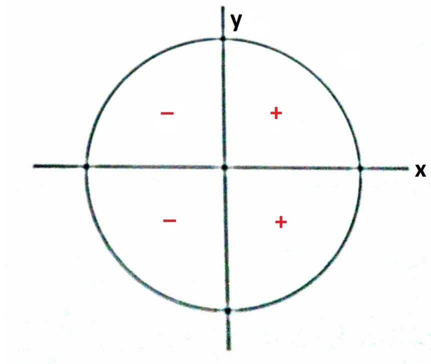


Figura 2.58: Sinais de cosseno

2.9.3 Função tangente

Consideremos, no ciclo trigonométrico de origem A, o eixo t perpendicular ao eixo x e de origem A, chamado eixo das tangentes.

Seja T a intersecção da reta $\overleftrightarrow{OP}$ com o eixo t. A tangente do arco trigonométrico $\widehat{AP}$, de extremidade P, com $P \neq B$ e $P \neq D$, é a medida algébrica do segmento $\overline{AT}$.

De acordo com a figura 2.59, temos que $tg\widehat{AP} = AT$.

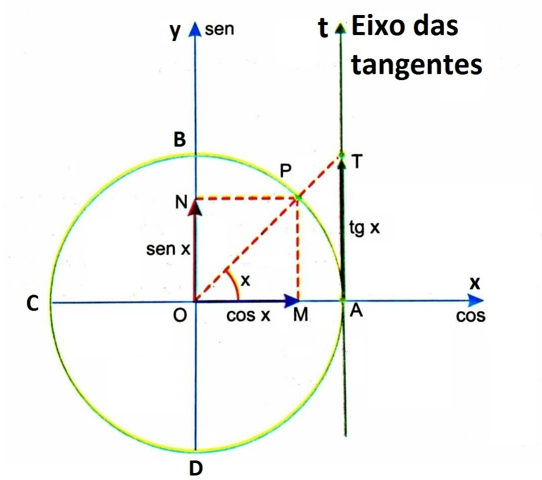


Figura 2.59: Eixo das tangentes

A cada número real x corresponde um único ponto P, extremidade do arco $\widehat{AP}$ de medida x. A cada ponto P, corresponde uma única medida algébrica AT, chamada **tangente de x.**

Observando a figura 2.59, se $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ então P pertence ao primeiro quadrante e $OA = 1$, pois é o raio do ciclo trigonométrico.

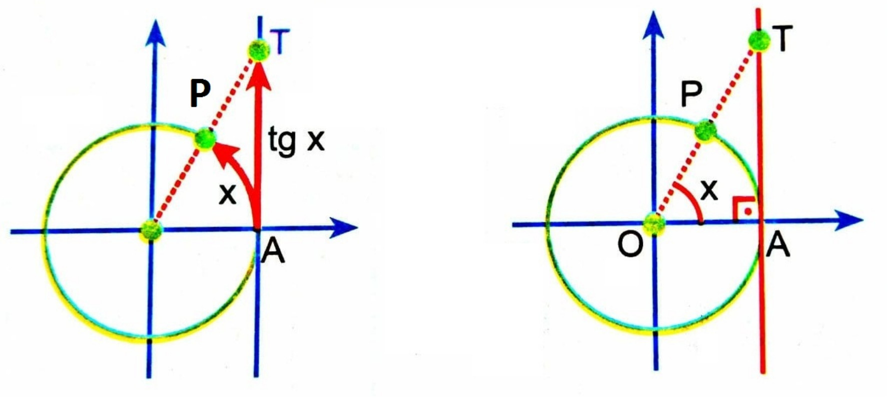


Figura 2.60: Tangentes

Observando a figura 2.60, o arco $\widehat{AP}$ tem medida x e o ângulo central $A\hat{O}P$ também mede x. Deste modo, temos triângulo $\triangle AOT$ com o prolongamento do segmento de reta $\overline{OP}$ até a intersecção com o eixo das tangentes originando o ponto T. Este triângulo formado $\triangle AOT$ é retângulo em A. Assim,

$$\boxed{tg\, x = \frac{cateto\ oposto}{cateto\ adjacente} \Leftrightarrow tg\, x = \frac{AT}{OA} \Leftrightarrow tg\, x = \frac{AT}{1} \Leftrightarrow tg\, x = AT}$$

Com isso, a função tangente pode ser definida como, a função de $I\!R$ em $I\!R$ que a cada número real x associa a medida algébrica AT. Pelas figuras anteriores percebemos que, se as extremidades dos arcos forem iguais a $\frac{\pi}{2}$ ou $\frac{3\pi}{2}$ não conseguimos determinar um ponto no eixo das tangentes, sendo que o segmento de reta AT é paralelo ao eixo das ordenadas. Logo não existe um valor de tangente para os arcos que tem extremidade nestes dois pontos, ou seja, a $tg\, x$ não está definida para estes arcos com extremidade nestes dois pontos.

Assim, simbolicamente, temos:

$$\boxed{f : I\!R - \frac{\pi}{2} + n\pi, n \in Z \to R\ tal\, que\, f(x) = tg\, x = AT}$$

Propriedades

I) Se x é do primeiro ou do terceiro quadrante, então $tg\, x$ é positiva.

Observe pela figura 2.61 que o ponto T está acima de A e AT é positiva.

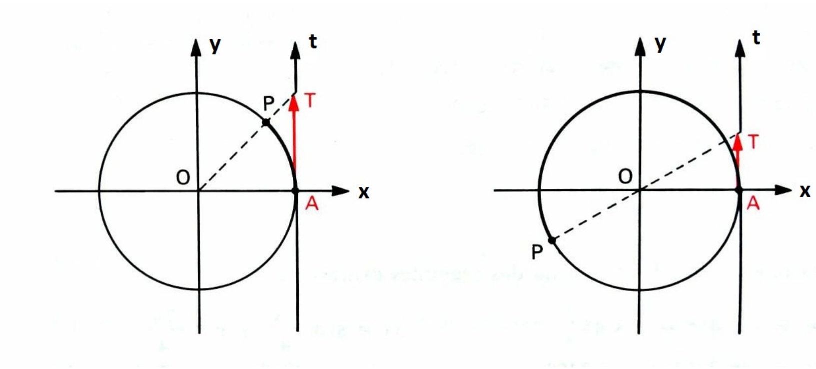


Figura 2.61: Valores positivos de tangente

$AT > 0$ $AT > 0$

II) Se x é do segundo ou do quarto quadrante, então $tg\, x$ é negativa.

Observe pelas figuras que o ponto T está abaixo de A e AT é negativa.

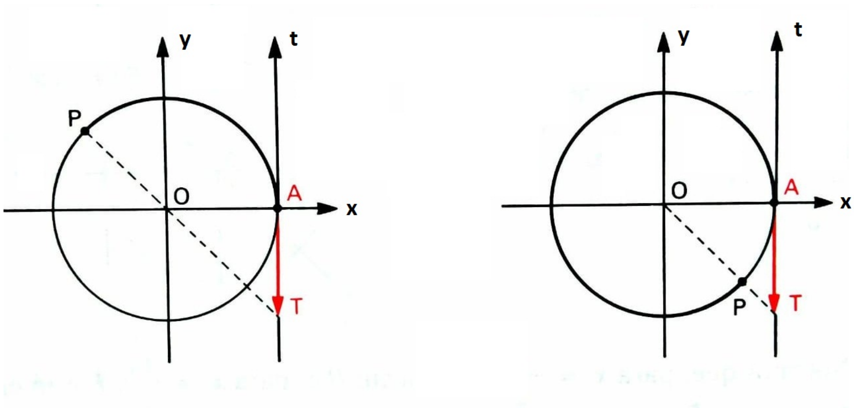
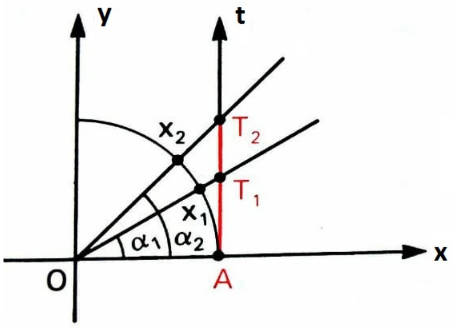


Figura 2.62: Valores negativos de tangente

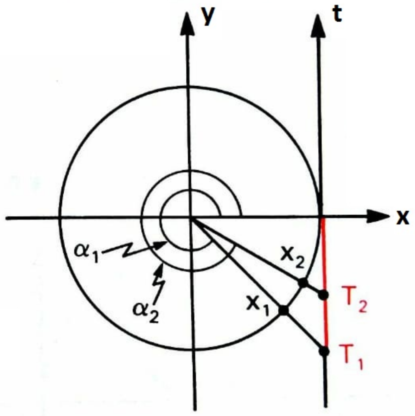
$AT < 0$ $AT < 0$

III) Se x percorre qualquer um dos quatro quadrantes, então $tg\, x$ é crescente.

De acordo com a figura 2.63, a $tg\, x$ no primeiro e no terceiro quadrante se comportam da mesma maneira, e por outro lado, no segundo e no quarto quadrante se comportam também da mesma maneira.



Primeiro quadrante



Quarto quadrante

Figura 2.63: Comportamento da tangente

Sendo as medidas dos arcos $m\widehat{AX_1} < m\widehat{AX_2}$, e as medidas dos ângulos centrais $m\widehat{\alpha_1} < m\widehat{\alpha_2}$ temos que as medidas algébricas dos segmentos $AT_1 < AT_2$, com isso a $tg\, x_1 < tg\, x_2$, ou seja, o valor da tangente aumenta de acordo com o aumento das medidas dos arcos no primeiro e igualmente no terceiro quadrante.

No segundo e no quarto quadrante acontece praticamente a mesma coisa. As medidas dos arcos $m\widehat{AX_1} < m\widehat{AX_2}$, e as medidas dos ângulos centrais $m\widehat{\alpha_1} < m\widehat{\alpha_2}$, logo as medidas algébricas dos segmentos $AT_1 < AT_2$, assim a $tg\, x_1 < tg\, x_2$. Dessa maneira, o valor da tangente aumenta de acordo com o aumento das medidas dos arcos no segundo e igualmente no quarto quadrante.

Logo, o sinal da $tg\, x$ pode ser assim sintetizado:

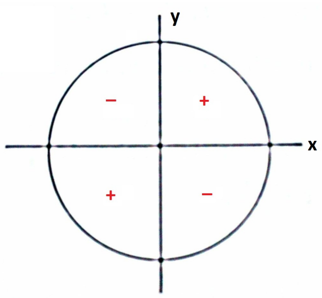


Figura 2.64: Sinais de tangente

Lembrando que a tangente não é definida para valores de arcos em $\dfrac{\pi}{2}$ e $\dfrac{3\pi}{2}$ e suas determinações.

CAPÍTULO 3

APLICAÇÕES EM SALA DE AULA

Esta dissertação tem como objetivo principal propor algumas mudanças na situação de aprendizagem da Trigonometria, apresentando atividades práticas para trabalhar com os alunos, para que estes tornem-se mais participativos e ativos, tendo como base experimentos dos grandes matemáticos e filósofos, como Tales de Mileto, Pitágoras e vários outros.

Atualmente, sou professora de matemática da rede pública municipal e privada de ensino fundamental II e ensino médio. Fui graduada por essa universidade no ano de 1997, trabalhei 4 anos em Bauru no Colégio Anglo e depois interrompi devido a maternidade. Voltei a lecionar ininterruptamente em 2009, na minha cidade natal, Ipaussu.

No início desse assunto verifica-se uma grande dificuldade nos discentes em visualizar as figuras geométricas e os ângulos. Aliás, nota-se um déficit muito grande na área da Geometria, construção de figuras e de ângulos. É perceptível a falta de atividades práticas de Desenho Geométrico, utilizando compasso, transferidor, esquadros e até mesmo régua. O Desenho Geométrico foi retirado da grade curricular em 1961, a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional - LDB 4024/61 determina novos rumos para o ensino do Desenho Geométrico, tornando-o uma disciplina curricular optativa.

Em 1971, foi promulgada a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional, Lei 5692, que excluiu definitivamente o Desenho Geométrico como disciplina obrigatória da grade curricular escolar, instituindo a obrigatoriedade do ensino da Educação Artística.

Com isso, nossos alunos ficam com dificuldade para entender a Geometria, porque não têm a prática dos desenhos. Destacamos "... falta da geometria repercute seriamente em todo o estudo das ciências exatas, da arte e da tecnologia. Mas o desenho geométrico foi afetado na sua própria razão de ser, já que em si é uma forma gráfica do estudo de geometria e de suas aplicações." (COSTA,1981,p.89).

Com isso, foram desenvolvidas atividades simples com os discentes, como por exemplo, medições com régua, construções de ângulos, construções de triângulos até o uso do ciclo trigonométrico, identificando os valores dos arcos e transferindo-os para o primeiro quadrante para fazermos a determinação dos valores de seno, cosseno e tangente dos ângulos, usando também os valores dos arcos notáveis.

3.1 Atividade 1

Está atividade foi desenvolvida com o 8º ano e iniciamos com desenhos. A atividade foi desenhar, usando régua e compasso, dois triângulos: o primeiro com lados medindo $3cm, 4cm$ e $5cm$, e o outro teriam de usar régua, compasso e transferidor e desenhar um triângulo sabendo as medidas de dois lados, um de $5cm$ e outro de $2,5cm$ e o ângulo entre eles medindo 60º.

O objetivo é verificar que não precisamos conhecer todas as medidas envolvidas em um triângulo para conseguir desenhá-lo, ou seja, todas as medidas dos três lados e todas as medidas dos três ângulos, mesmo conhecendo somente algumas, conseguimos desenhar corretamente.

No primeiro caso, conhecemos as medidas dos três lados, e todos os alunos desenharam e, em seguida, comparamos os desenhos, ficaram todos iguais, apesar de uns estarem virados mais para a direita enquanto outros estavam mais virados para a esquerda, e ainda outros perfeitamente centrados, mesmo assim colocando um sobre o outro, eram todos congruentes. No segundo desenho, aconteceu a mesma coisa, conhecíamos a medida de dois lados e o ângulo entre eles, e mesmo assim, cada aluno desenhando o seu de forma individual, os triângulos também ficaram todos congruentes.

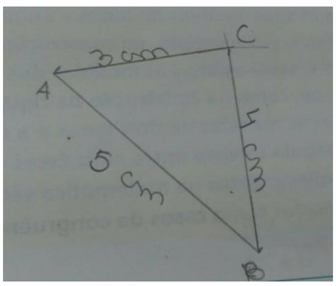


Figura 3.1: Atividade 1- Construindo triângulos congruentes

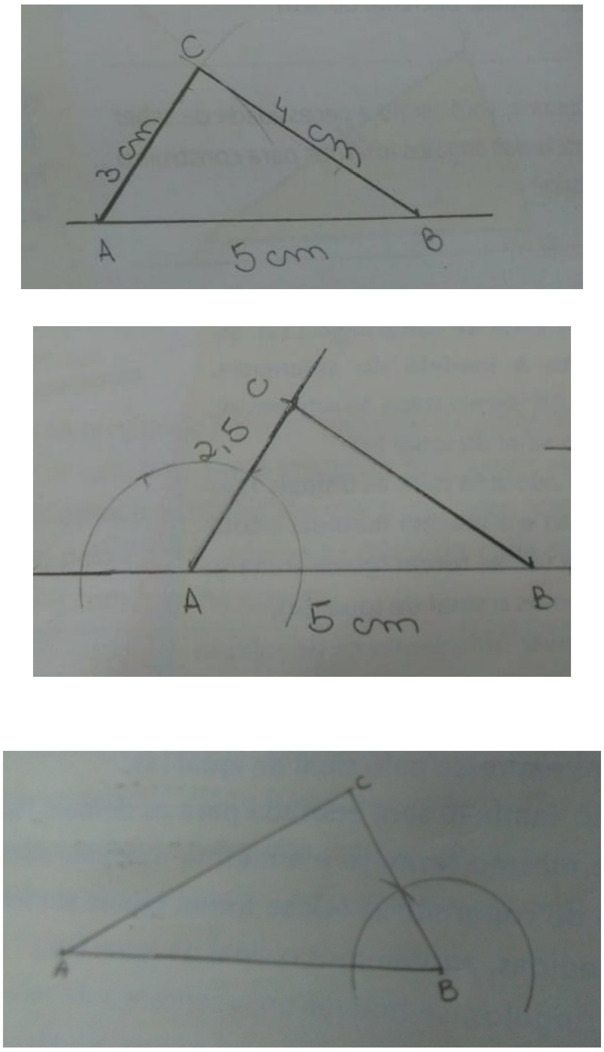


Figura 3.2: Atividade 1- Construindo triângulos congruentes

Continuando com esta mesma turma, iniciamos os casos de congruência entre os triângulos, e suas notações. Como por exemplo, $\triangle ABC \cong \triangle EFG$, pois, $C\hat{A}B \cong G\widehat{E}F$, $\overline{AB} \cong \overline{EF}$ e $A\widehat{B}C \cong E\widehat{F}G$, assim pelo caso de congruência ALA os triângulos são congruentes.

O objetivo idealizado era facilitar a explicação e o entendimento por parte dos alunos dos casos de congruência começando com os desenhos, com a prática, com algumas medidas do triângulo conhecidas, e depois verificando que todos os desenhos são iguais, mesmo cada aluno fazendo o seu individualmente. Portanto, sabendo somente algumas medidas do triângulo, todos desenharam os mesmos desenhos, são todos iguais, ou seja, congruentes.

3.2 Atividade 2

A atividade 2 é continuação da atividade 1 com a mesma turma. Iniciamos com uma pergunta. Se, caso um triângulo tivesse os três ângulos internos iguais, também seriam congruentes? Responderam que sim. Em seguida, um novo questionamento. Então como são triângulos congruentes, por que este caso de congruência AAA não existe?

Na sequência foi apresentado o seguinte desenho, pois o objetivo desta atividade é mostrar a diferença entre triângulos congruentes e triângulos semelhantes.

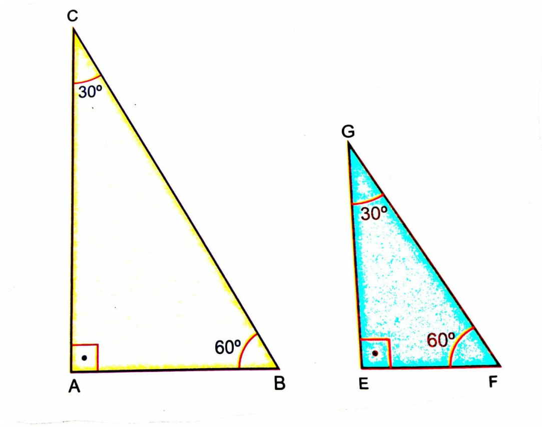


Figura 3.3: Atividade 2- Comparando triângulos

Dessa forma, os alunos concluíram que os dois triângulos não são congruentes, mas eles tem uma certa semelhança, pois tem os três ângulos internos com a mesma medida, somente as medidas dos lados são diferentes. Assim, foi iniciada a explicação sobre triângulos semelhantes, que tem tamanhos diferentes, mas podem ser chamados de semelhantes, segundo algumas regras.

Foram levados para a sala de aula, recortados em uma cartolina, pares de triângulos semelhantes, com os três ângulos internos com a mesma medida e os lados correspondentes com medidas proporcionais. Entregamos aos alunos um par de triângulos e foi pedido para que verificassem se são triângulos congruentes. De forma rápida perceberam que não, pois tem tamanhos diferentes, logo não podem ser iguais.

Em seguida, os alunos verificaram, por sobreposição, se os ângulos internos tinham a mesma medida, em caso afirmativo, pintassem os ângulos iguais utilizando a mesma cor de lápis. Depois colassem no caderno obedecendo as cores dos ângulos coloridos, ou seja, colando os dois triângulos na mesma posição de acordo com a cor dos ângulos. Em seguida, a orientação dada foi para que colocassem nomes nos vértices e medissem o comprimento dos lados, registrando tudo no desenho. Com tudo isso pronto, foram feitas as razões das medidas dos lados do triângulo maior em relação as medidas dos lados do triângulo menor, obedecendo os ângulos congruentes que foram coloridos da mesma cor. Dessa forma, verificamos que todas as razões eram iguais. Assim, concluímos que os triângulos são semelhantes, porque possuem a mesma forma, tem ângulos internos correspondentes com a mesma medida e lados com medidas proporcionais.

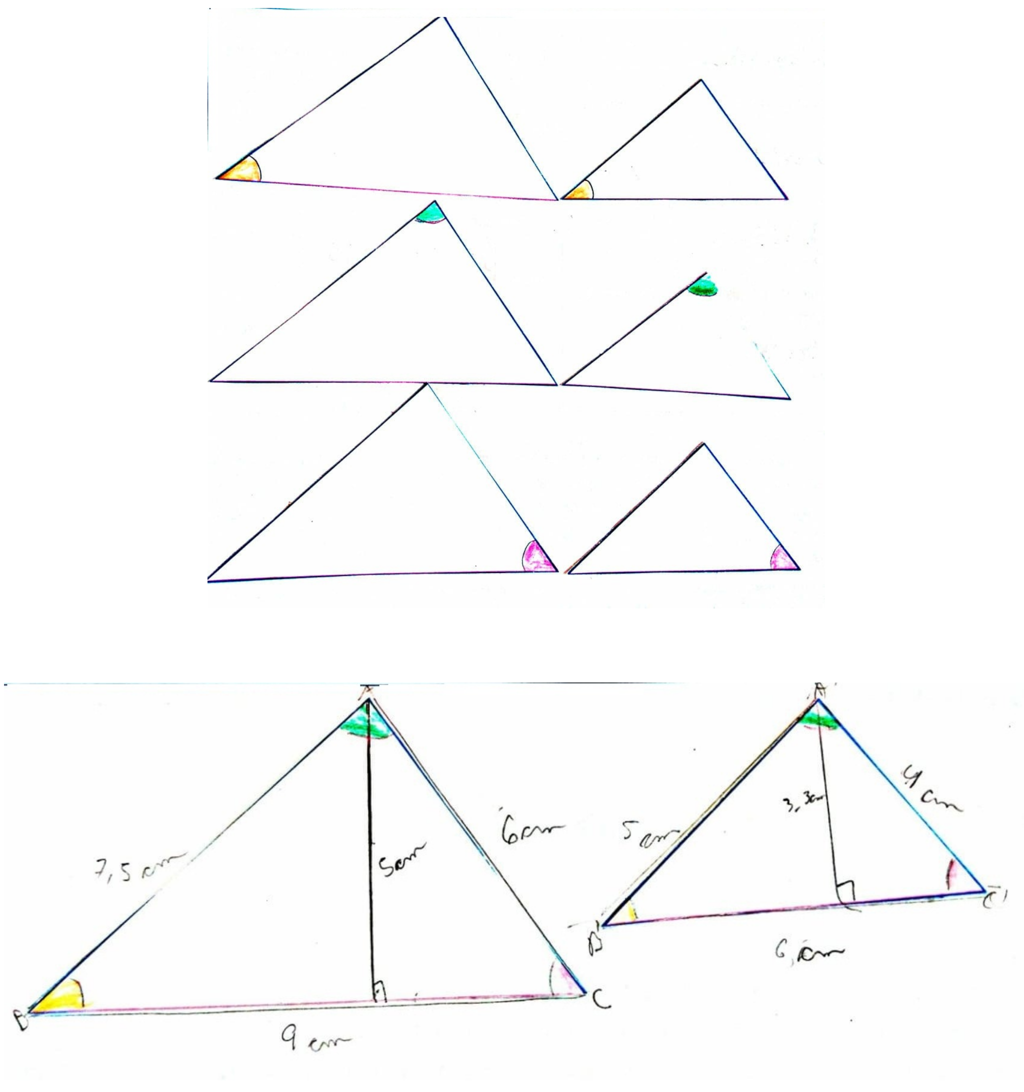


Figura 3.4: Atividade 2- Construindo triângulos semelhantes

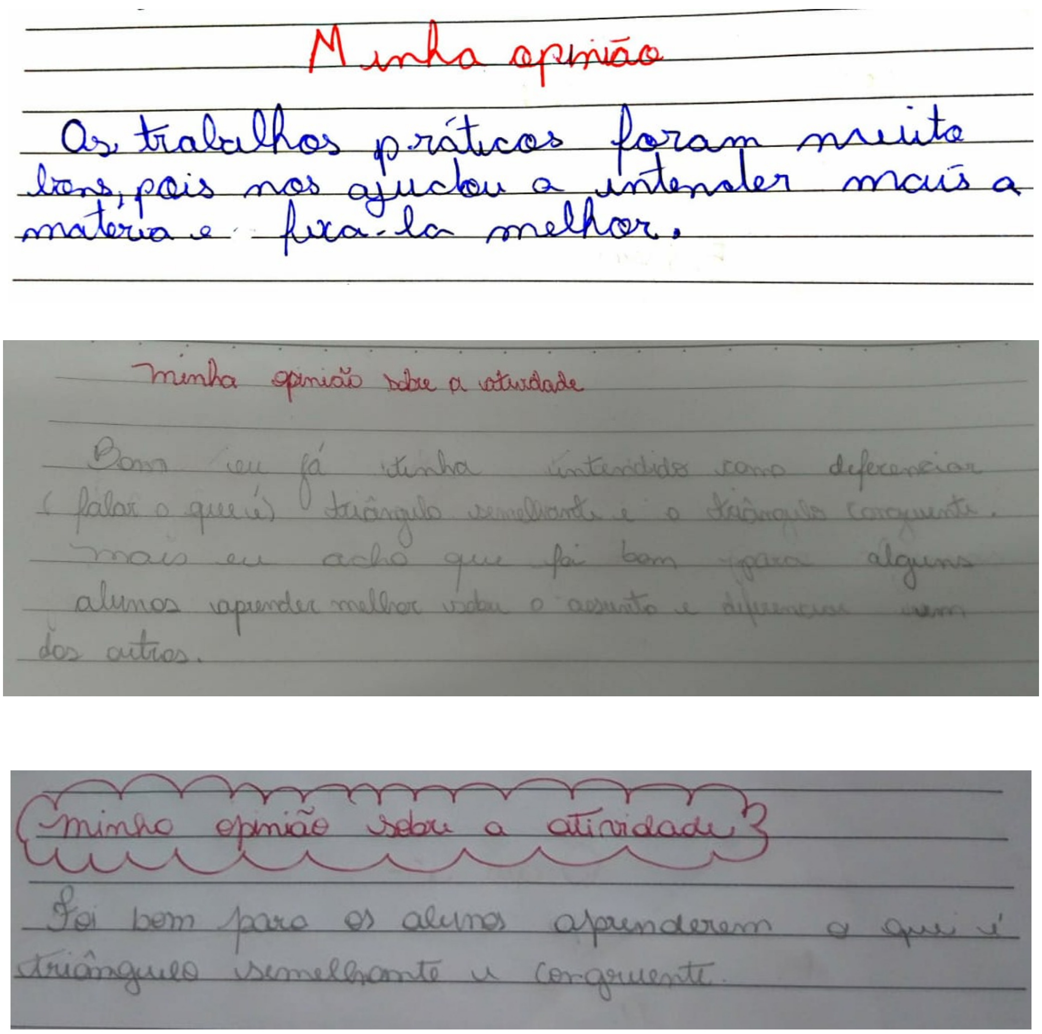


Figura 3.5: Atividade 2- Opiniões de alunos

3.3 Atividade 3

Nesta atividade os alunos desenharam e recortaram, em cartolina colorida, três pares de triângulos congruentes e três pares de triângulos semelhantes, usando cores de cartolina diferentes para cada triângulo e usando medidas diferentes para cada par. Cada aluno trouxe para a sala de aula seis pares de triângulos, sendo três pares de triângulos congruentes e três pares de triângulos semelhantes.

O objetivo é fixar os conteúdos sobre triângulos congruentes e triângulos semelhantes, sendo que ainda estamos com a mesma turma do 8º ano.

O início se deu, colocando todos os triângulos sobre uma mesa grande, e de forma ordenada, em duplas ou em trios, vinham à mesa e cada um escolhia um par de triângulos congruentes e um par de triângulos semelhantes, sempre explicando e mostrando porque aquele par era congruente e porque aquele par era semelhante. Em seguida, colavam os triângulos no caderno, nomeavam os vértices, mediam os lados, faziam os cálculos necessários, e escreviam porque eram congruentes e porque eram semelhantes. No final, escreveram a opinião deles sobre a atividade realizada.

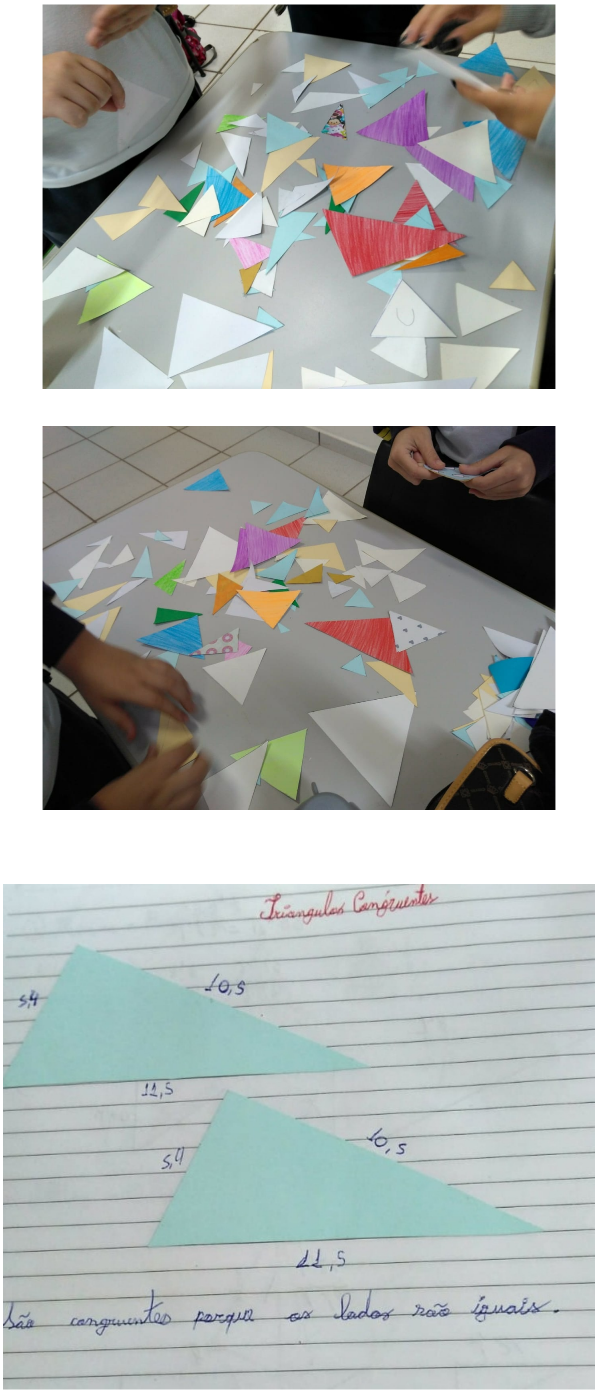


Figura 3.6: Atividade 3- Construindo triângulos congruentes e semelhantes

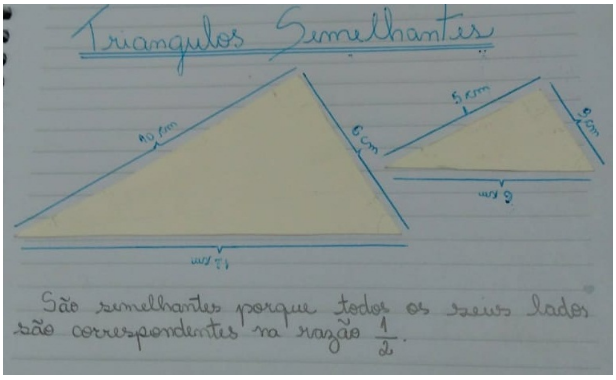


Figura 3.7: Atividade 3- Construindo triângulos congruentes e semelhantes

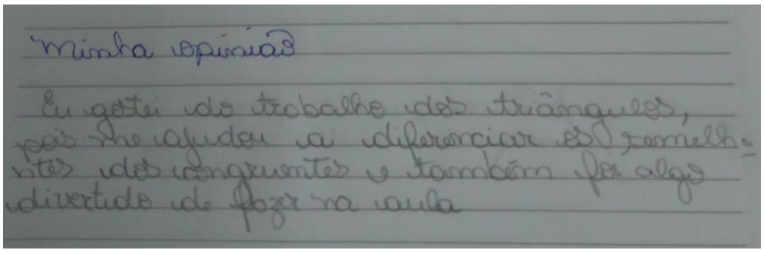


Figura 3.8: Atividade 3- Opinião de aluno

3.4 Atividade 4

Esta atividade também é continuação da anterior, é sobre o uso da regra de proporcionalidade que podemos utilizar nos triângulos semelhantes para determinarmos o valor de algum lado desconhecido. O início foi contar aos alunos sobre a história da experiência de Tales de Mileto ao conseguir medir a altura de uma pirâmide, a Pirâmide de Quéops, usando a sombra dela e a sombra de um bastão colocado em lugar estratégico tal que formassem triângulos semelhantes entre a pirâmide e sua sombra e o bastão e sua sombra, fazendo as medições no mesmo horário para garantir os mesmos ângulos dos raios solares.

O objetivo desta atividade é utilizar os conteúdos aprendidos sobre semelhança de triângulos, sobre as medidas dos lados serem proporcionais, e o uso da regra de proporcionalidade para resolver problemas reais.

Assim, resolvemos fazer o mesmo experimento, mas medindo a altura de árvores e postes de iluminação da rua perto da nossa escola, utilizando as definições de triângulos semelhantes, respeitando os mesmos ângulos internos dos triângulos formados. Então, no início, foram levados alguns cabos de vassoura para servir de auxílio na formação do triângulo menor, e durante a experiência na rua, um aluno perguntou se ele próprio, não poderia servir para formarmos o triângulo semelhante menor. Ele iria contribuir com a sua altura e sua sombra no mesmo instante da medição da sombra da árvore e assim formaríamos dois triângulos semelhantes, com os mesmos ângulos internos e dessa forma possibilitaria a determinação da altura da árvore através da regra de proporcionalidade, ou seja, da regra de três.

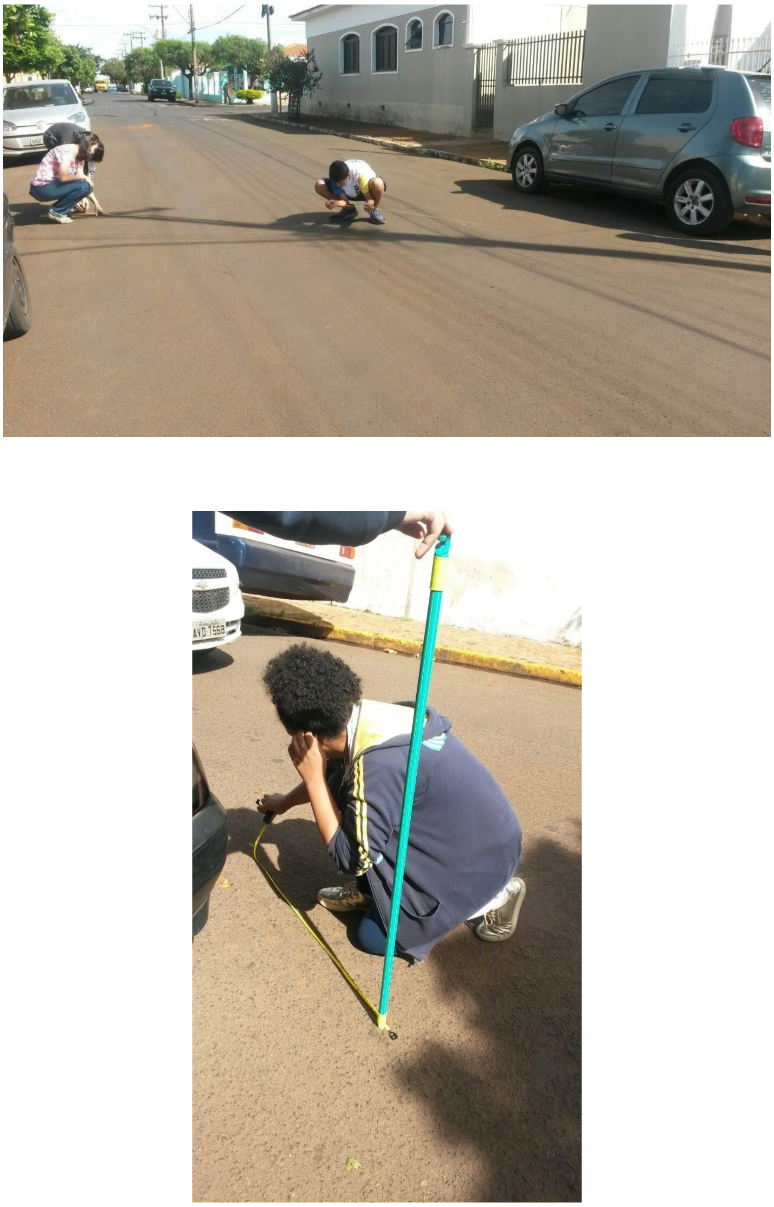


Figura 3.9: Atividade 4- Medindo altura

Figura 3.10: Atividade 4- Alunos medindo altura

Figura 3.11: Atividade 4- Alunos em ação

Acredita-se que realizando esta experiência foi mostrado uma utilidade dessa regra de proporcionalidade na vida e não somente nos livros.

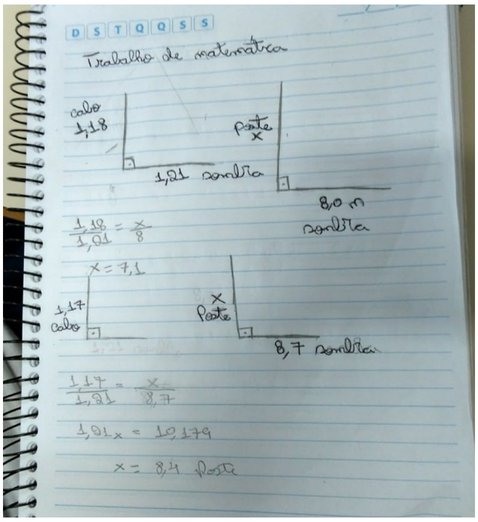
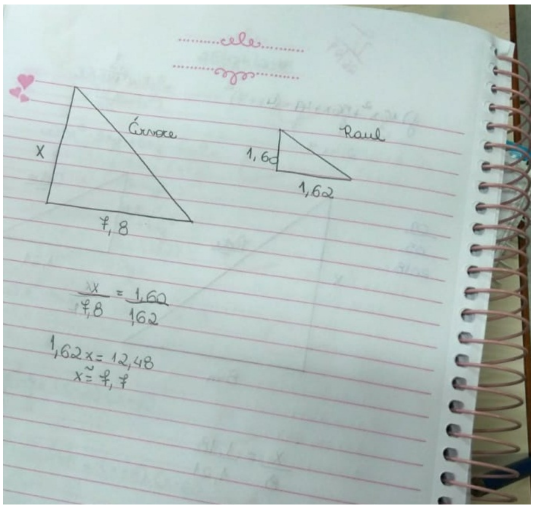


Figura 3.12: Atividade 4- Atividade no caderno



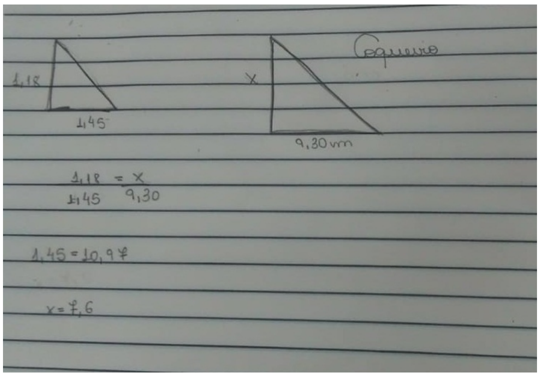


Figura 3.13: Atividade 4- Atividade no caderno

3.5 Atividade 5

Esta atividade é sobre o Teorema de Pitágoras, e foi desenvolvida com o 9º ano. Antes de iniciarmos o Teorema, os alunos fizeram uma pesquisa sobre Pitágoras, onde viveu, em que época viveu, enfim, quem foi Pitágoras e realizou-se uma roda de conversa onde todos puderam falar sobre Pitágoras e verbalizar suas opiniões.

O objetivo é mostrar na prática o Teorema de Pitágoras. Existem várias maneiras de provar este teorema, escolhemos pelo método do papel quadriculado.

Iniciamos a atividade distribuindo um papel quadriculado para cada aluno. Desenhamos um triângulo retângulo de medidas $3cm, 4cm$ e $5cm$, utilizando apenas régua e lápis. Marcamos a medida de cada lado. Em seguida construímos três quadrados de lados $3cm$, $4cm$ e $5cm$. Estes quadrados foram coloridos, recortados e marcados a área de cada um. Em seguida, colamos os quadrados quadriculados e coloridos nos lados correspondentes do triângulo. Observando os desenhos dos quadrados, os alunos perceberam que havia um quadrado maior, e consequentemente, com um valor de área maior. Os outros dois quadrados eram menores. E fazendo algumas continhas com os valores das áreas, os alunos logo perceberam que a área do quadrado maior é igual a soma das áreas dos outros dois quadrados. Dessa maneira, descobriram o Teorema de Pitágoras, que diz, "O quadrado da hipotenusa é igual a soma dos quadrados dos catetos". Fazer as medidas dos lados do triângulo retângulo ao quadrado é a mesma coisa que calcular a área de um quadrado. Acredita-se que os alunos puderam compreender o famoso Teorema de Pitágoras.

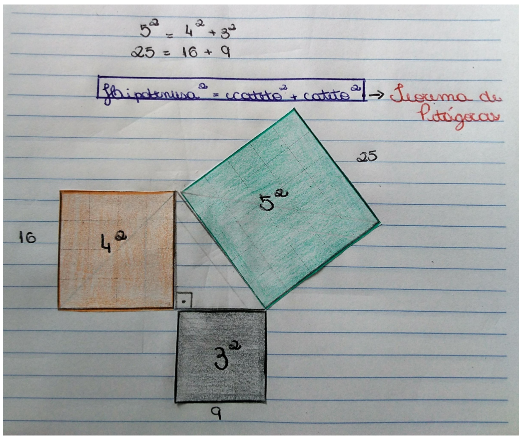


Figura 3.14: Atividade 5- Teorema de Pitágoras

Durante os exercícios no caderno, após esta atividade, os alunos usavam o desenho do papel quadriculado para resolverem os exercícios propostos.

3.6 Atividade 6

Esta atividade é continuação da atividade anterior, portanto com a mesma turma. O assunto é sobre as razões trigonométricas no triângulo retângulo: seno, cosseno e tangente.

O objetivo é mostrar aos alunos que as razões trigonométricas são apenas razões entre as medidas dos lados de um triângulo retângulo, tem nomes diferentes, mas são razões, ou seja, frações.

O início foi relembrar os nomes correspondentes a HIPOTENUSA e CATETOS, e que esses nomes somente existem nos triângulos retângulos, que tem um ângulo reto, assim sempre podemos identificar a hipotenusa, e os outros dois lados, são os catetos. Em seguida, aprendemos a identificar o cateto oposto e o cateto adjacente em um triângulo retângulo, mostrando que tudo depende do ângulo escolhido. Um lado do triângulo retângulo pode ser cateto oposto, e em outra ocasião, o mesmo lado é chamado de cateto adjacente, isso pode acontecer devido ao ângulo considerado, ou seja, é o ângulo que define os catetos como sendo cateto oposto ou cateto adjacente, já que o lado correspondendo a hipotenusa é definido pelo ângulo reto. O cateto oposto é o lado do triângulo que está oposto ao ângulo considerado. O cateto adjacente é o lado do triângulo que está ao lado do ângulo considerado.

A atividade iniciou-se com a construção de triângulos retângulos semelhantes, com lados correspondentes proporcionais e ângulos internos correspondentes com a mesma medida. Em cada novo triângulo construído, fazíamos as razões dos lados, e definindo o ângulo escolhido, já usando os nomes de hipotenusa, cateto oposto e cateto adjacente. Em seguida, mudávamos de ângulo e calculávamos novamente as mesmas razões que eram:

$$\frac{cateto\ oposto}{hipotenusa},\ \frac{cateto\ adjacente}{hipotenusa}\ \text{e}\ \frac{cateto\ oposto}{cateto\ adjacente}.$$

Não demorou muito para começarem a perceber os resultados iguais. O por quê dos resultados iguais, já que as medidas dos lados são diferentes? Demoraram um pouco para perceber que o motivo era pela igualmente dos ângulos, e como os ângulos tinham a mesma medida, tratava-se de triângulos semelhantes, onde as razões dos lados correspondentes são iguais.

Em seguida, definimos que estas razões tem nomes especiais. Sempre que utilizarmos a razão $\frac{cateto\ oposto}{hipotenusa}$ denominaremos de SENO. E quando utilizarmos a razão $\frac{cateto\ adjacente}{hipotenusa}$ denominaremos de COSSENO, e quando utilizarmos $\frac{cateto\ oposto}{cateto\ adjacente}$ denominaremos de TANGENTE.

Percebeu-se que o valor do seno de um determinado ângulo, terá sempre o mesmo valor, independente do tamanho do triângulo, quem define o valor são os ângulos. Sempre teremos que definir o ângulo considerado, então devemos escrever, por exemplo, $SEN\ 30^o$ para representar que é o ângulo de 30^o que está servindo como referência para calcular a razão $\frac{cateto\ oposto}{hipotenusa}$.

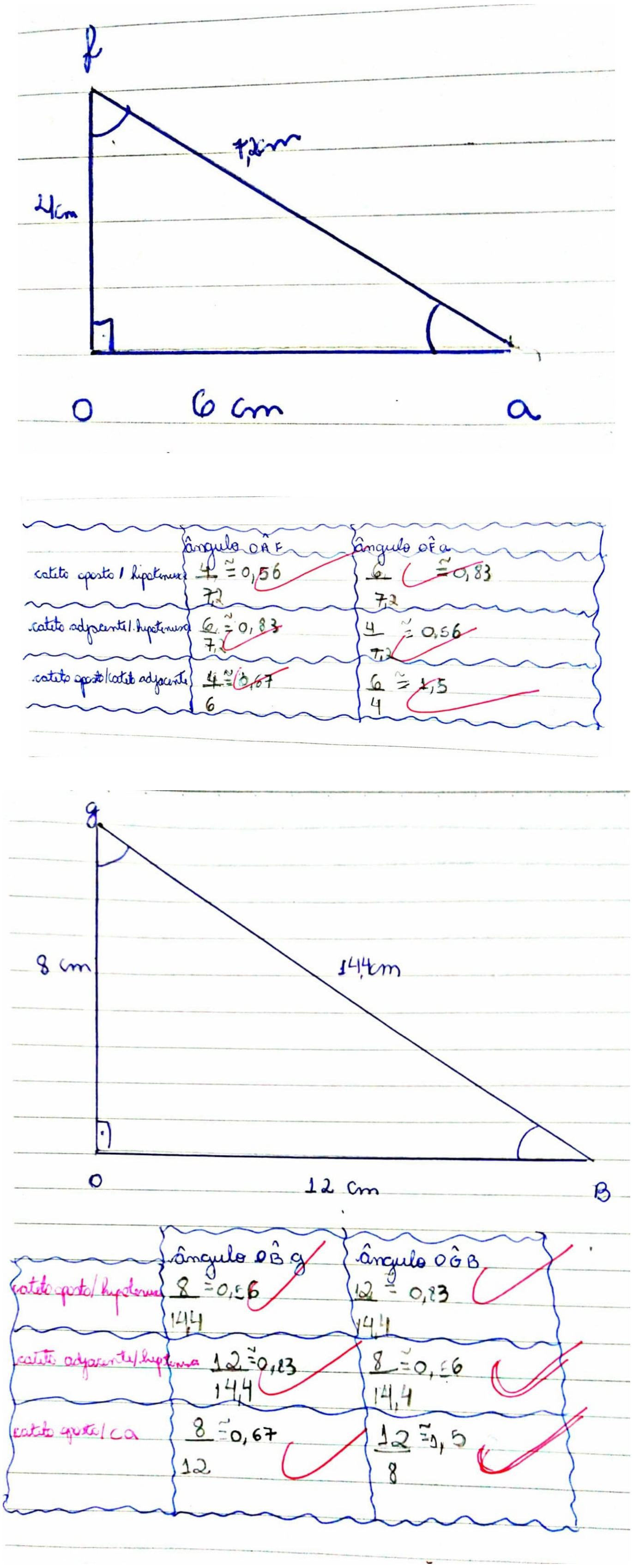


Figura 3.15: Atividade 6- Razões trigonométricas

3.7 Atividade 7

Esta atividade é uma continuação da atividade anterior. A diferença é que utilizaremos a tabela de razões trigonométricas com ângulos de 1^o até 89^o. Nesta tabela estão todos os valores de seno, cosseno e tangente dos ângulos, em decimal com aproximação de quatro casas decimais. Conhecemos a tabela trigonométrica e construímos triângulos com alguns valores de ângulos e calculamos as razões trigonométricas, seno, cosseno e tangente dos ângulos. Depois, comparamos com os resultados da tabela.

O objetivo é descobrir os valores do seno, cosseno e da tangente dos arcos notáveis, ou seja, os ângulos de $30^o, 45^o$ e 60^o. Mas queremos esses valores na forma de fração para montarmos uma tabela somente com esses valores.

Para determinarmos as frações construímos dois triângulos. O primeiro, um triângulo retângulo isósceles, com os catetos medindo $5cm$ e a hipotenusa medindo $5\sqrt{2}cm$, que os alunos calcularam usando o Teorema de Pitágoras. Assim os ângulos internos são de 45^o.

E o outro triângulo retângulo com ângulos de 30^o e 60^o, com um dos catetos medindo $5cm$ e a hipotenusa $10cm$ e o ângulo entre eles medindo 60^o. Os alunos calcularam o outro cateto, que mediu $5\sqrt{3}cm$, usando também o Teorema de Pitágoras. Assim calculamos os valores de seno, cosseno e tangente para os dois ângulos usando apenas um triângulo. Utilizando os resultados das razões trigonométricas dos ângulos notáveis em forma de frações, montamos uma tabela somente com os valores de seno, cosseno e tangente dos ângulos de $30^o, 45^o$ e de 60^o.

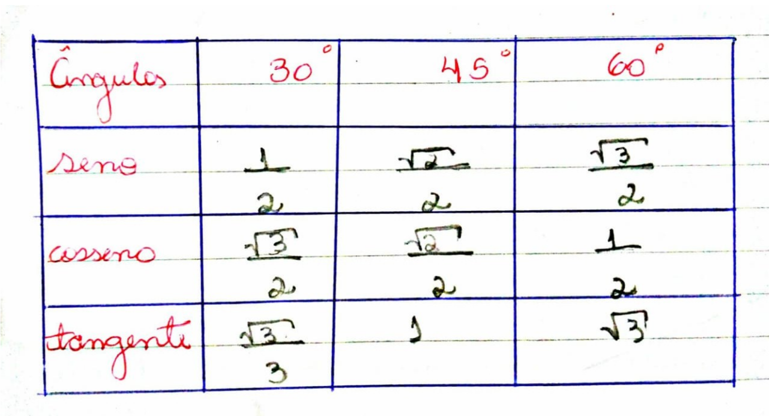


Figura 3.16: Atividade 7- Tabela trigonométrica

Ao final desta atividade também cantamos uma música que foi criada para lembrarmos com mais facilidade destes resultados.

3.8 Atividade 8

Esta atividade foi desenvolvida com os alunos do 1º ano do ensino médio. O início foi uma revisão sobre triângulos retângulos, Teorema de Pitágoras, razões trigonométricas e ângulos notáveis.

O objetivo é demonstrar as relações trigonométricas mostrando como elas surgiram, ou seja, não apenas apresentando as fórmulas, mas mostrando como fazer para obtê-las.

Iniciamos com o Teorema de Pitágoras, usando a lousa e giz e, uma figura de um triângulo retângulo de lados a, b e c e com ângulo x, onde a hipotenusa é o lado a, considerando o ângulo x, o cateto oposto é o lado b e o cateto adjacente é o lado c. E utilizamos também as razões trigonométricas do seno e do cosseno para mostrarmos a relação fundamental $sen^2\, x \ + \ cos^2\, x = 1$.

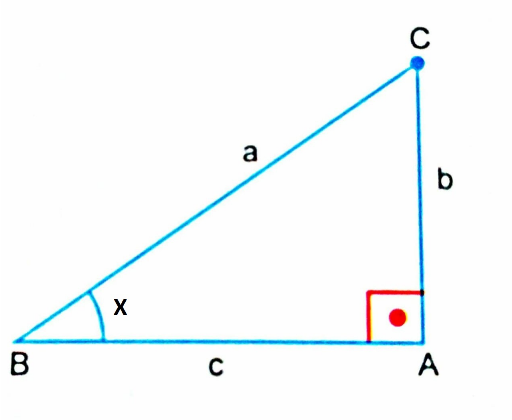


Figura 3.17: Atividade 8- Relações fundamentais

Partimos usando a Relação Fundamental que é $sen^2\, x \ + \ cos^2\, x = 1$, mas mostrando que o resultado é 1, usando o $sen\ x = \dfrac{b}{a}$ e também o $cos\ x = \dfrac{c}{a}$, e o Teorema de Pitágoras $a^2 = b^2 + c^2$. Dessa forma, temos:

$$sen^2\, x \ + \ cos^2\, x = \frac{b^2}{a^2} + \frac{c^2}{a^2} = \frac{b^2 + c^2}{a^2} = \frac{a^2}{a^2} = 1$$

Usamos a relação da tangente $tg\, x = \dfrac{sen\, x}{cos\, x}$ e, em seguida definimos cotangente como sendo o inverso da tangente, secante como o inverso do cosseno e cossecante o inverso do seno. Dessa forma, obtemos as seguintes relações fundamentais:

$sen^2\,x \;+\; cos^2\,x = 1$

$tg\,x = \dfrac{sen\,x}{cos\,x}$

$cotg\,x = \dfrac{1}{tg\,x} = \dfrac{cos\,x}{sen\,x}$

$sec\,x = \dfrac{1}{cos\,x}$

$cossec\,x = \dfrac{1}{sen\,x}$

Usando novamente a Relação Fundamental $sen^2\,x \;+\; cos^2\,x = 1$ e dividindo-a por $sen^2\,x$, obtemos outra relação trigonométrica, que é:

$cossec^2\,x = 1 + cotg^2\,x$

Começando pela Relação Fundamental $sen^2\,x \;+\; cos^2\,x = 1$, mas agora dividindo-a por $cos^2\,x$, obtemos outra relação trigonométrica, que é a seguinte:

$sec^2\,x = 1 + tg^2\,x$

No final da atividade, notou-se que poucos alunos acompanharam as demonstrações, a maioria se interessou apenas nos resultados.

3.9 Atividade 9

Esta atividade também foi desenvolvida com a turma do 1º ano do ensino médio. Ela trata sobre a unidade usada para os ângulos. Definimos também que o ângulo central tem o mesmo valor do arco definido pelo ângulo na circunferência.

O objetivo é trabalhar com as transformações entre grau, minuto e segundo, que na verdade é uma revisão. A principal finalidade é apresentar que o ângulo ou o arco da circunferência pode ser expresso em radianos, que não é uma unidade de medida, é uma razão entre o comprimento do arco e o tamanho do raio da circunferência, e fazer também as conversões para grau e radiano e vice-versa.

A medida de ângulo, e consequentemente de arco, é o grau, que tem seus submúltiplos que são o minuto e o segundo, com a seguinte correspondência:

$1^{\text{o}} = 60'$

$1' = 60''$

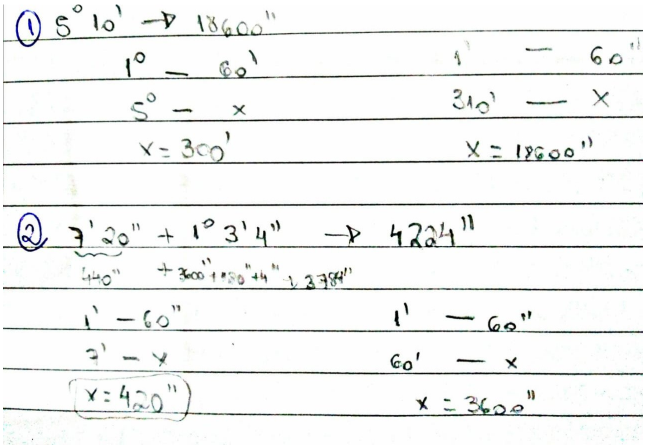


Figura 3.18: Atividade 9- Medidas de ângulos

E as conversões de grau para radiano e radiano para grau, usando regra de três e as seguintes correspondências:

$360^{\text{o}} = 2\pi$ ou $180^{\text{o}} = \pi$

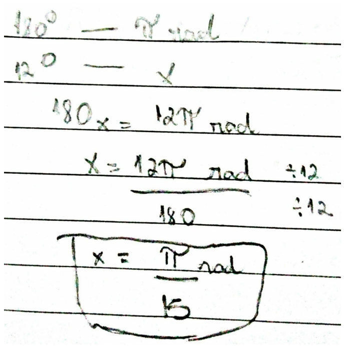


Figura 3.19: Atividade 9- Conversões

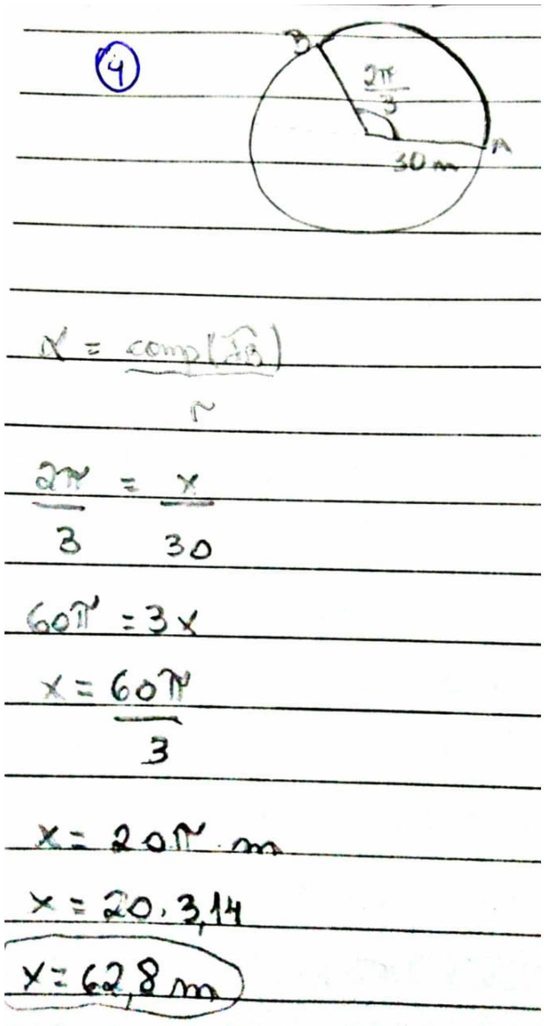


Figura 3.20: Atividade 9- Conversões

3.10 Atividade 10

Nesta atividade usaremos o ciclo trigonométrico, iremos marcar alguns ângulos e conhecer os quadrantes, também desenvolvida com o 1º ano do ensino médio.

O objetivo é familiarizar o aluno com o ciclo trigonométrico, sempre desenhado sobre os eixos x e y do plano cartesiano. A identificação dos locais dos ângulos que servirão como referência, que são $0^o, 90^o, 180^o, 270^o, 360^o$. A definição dos quadrantes e o reconhecimento de arcos que são maiores que uma volta completa no ciclo trigonométrico.

Iniciamos explicando sobre o nome de ciclo trigonométrico, o motivo deste nome é porque tem raio unitário, e marcamos os arcos no sentido anti-horário como sendo o positivo e, no sentido horário como sendo o negativo.

Foi desenhado no caderno com o compasso, e usamos o plano cartesiano como base, ou seja, o centro do plano cartesiano é o centro do ciclo trigonométrico e a medida de 1 unidade tanto no eixo das abscissas como no eixo das ordenadas é a medida do raio. Em seguida marcamos os arcos de medida $0^o, 90^o, 180^o, 270^o$ e 360^o. Em seguida, desenhamos outro ciclo trigonométrico e marcamos os arcos em radianos, $0, \dfrac{\pi}{2}, \pi, \dfrac{3\pi}{2}$ e 2π, para determinarmos essas medidas em radianos fizemos as conversões em relação com as medidas em graus.

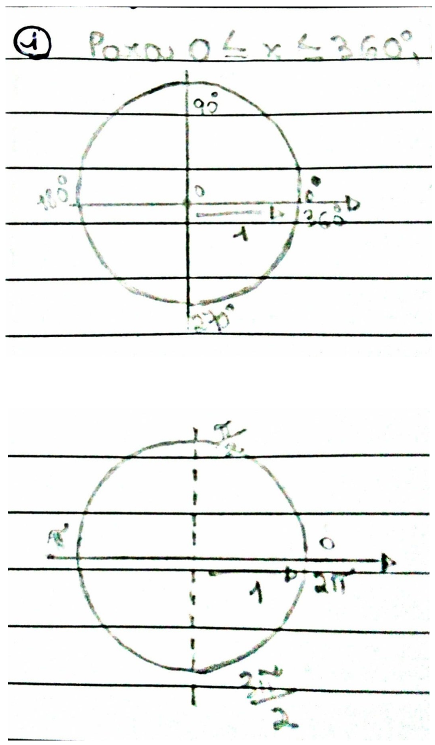


Figura 3.21: Atividade 10- Ciclo trigonométrico

Em seguida, definimos os quadrantes e marcamos alguns ângulos no ciclo trigonométrico de forma intuitiva. Por exemplo, um ângulo em cada quadrante, e depois fizemos a conversão para radianos.

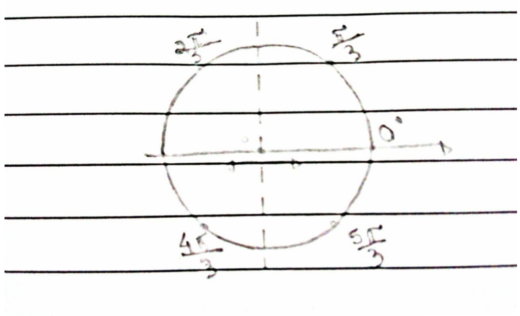


Figura 3.22: Atividade 10- Ciclo trigonométrico e contas

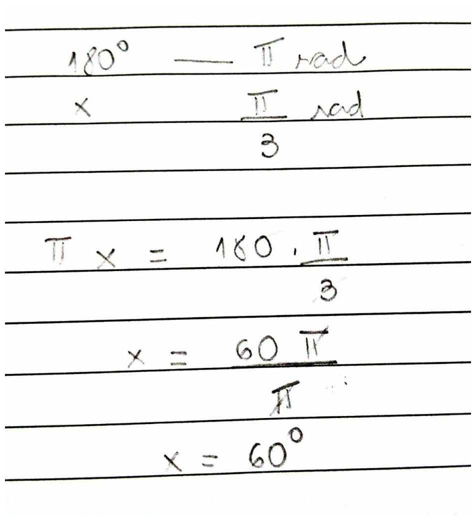


Figura 3.23: Atividade 10- Ciclo trigonométrico e contas

Calculamos também, valores de ângulos ou arcos, maiores de uma volta, assim foi necessário descobrir que era preciso dar uma volta ou mais voltas e depois o que sobrou de 360º é o valor do arco que fica marcado no ciclo trigonométrico. Por exemplo, um arco de 1860º graus, é um arco que deu cinco voltas completas no ciclo trigonométrico de 360º e fica marcado no ponto que corresponde a 60º, mas significa cinco voltas e mais 60º no ciclo.

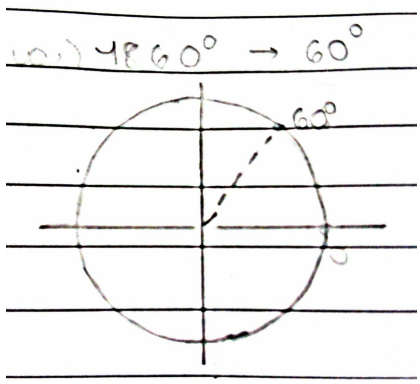


Figura 3.24: Atividade 10- Ciclo trigonométrico e contas

3.11 Atividade 11

Nesta atividade iremos conhecer e usar a prancha trigonométrica com o 1º ano do ensino médio.

O objetivo é mostrar que as razões trigonométricas estão no ciclo trigonométrico e, trazer os ângulos dos outros quadrantes para o primeiro quadrante para podermos usar os valores da tabela trigonométrica.

Para a definição dos eixos do seno, cosseno e tangente, foi desenhado na lousa o ciclo trigonométrico sobre o plano cartesiano, utilizou-se o ângulo de 30º para o exemplo, ou um arco de 30º, originou-se um triângulo retângulo e dessa forma foi calculada a razão trigonométrica $sen\ 30^o = \dfrac{cateto\ oposto}{hipotenusa}$, onde a hipotenusa corresponde ao raio do ciclo, que nós sabemos que é unitário, tem valor de uma unidade. O cateto oposto é o segmento paralelo ao eixo das ordenadas no plano cartesiano que serviu de base. Logo concluímos que a medida do seno está sobre o eixo das ordenadas, ou seja, é a vertical. Em seguida também já definimos o valor máximo e o valor mínimo do seno, ou seja o valor do seno está entre 1 *e* -1 que é exatamente a medida do raio.

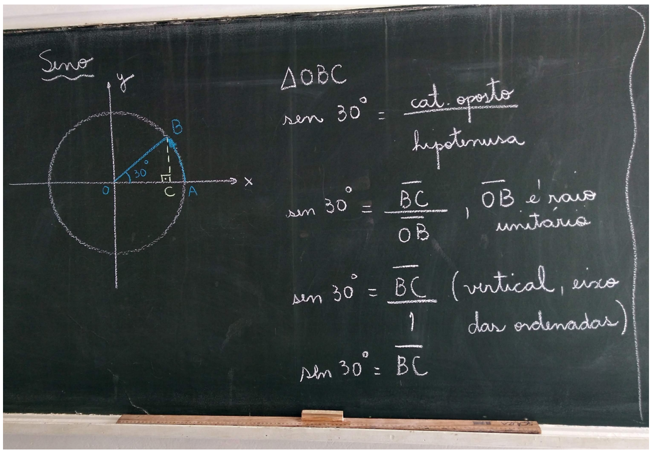


Figura 3.25: Atividade 11- Lousa com senos

Realizou-se a mesma coisa para determinarmos o eixo do cosseno. O ângulo escolhido foi também de 30º e em seguida formou-se um triângulo retângulo. Dessa forma, definimos a razão cosseno que é $cos\ 30^o = \dfrac{cateto\ adjacente}{hipotenusa}$ e, como a hipotenusa tem valor unitário, então o eixo que corresponde ao cosseno é o eixo das abscissas. E o cosseno também tem os seus valores entre 1 e -1 porque é o valor do raio do ciclo trigonométrico. Assim, o cosseno é medido na horizontal.

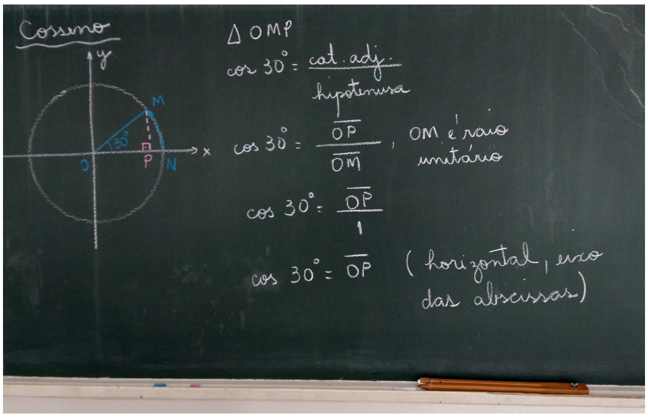


Figura 3.26: Atividade 11- Lousa com cossenos

Para a tangente, utilizou-se um segmento de reta paralelo ao eixo das ordenadas e tangente ao ciclo trigonométrico no ponto de início das determinações dos ângulos ou arcos. O ângulo utilizado também foi o de 30º e assim construiu-se um triângulo retângulo, e calculamos a razão trigonométrica tangente que é $tg\ 30^{\text{o}} = \dfrac{cateto\ oposto}{cateto\ adjacente}$ onde percebemos que o cateto oposto é a medida correspondente ao seno e o cateto adjacente corresponde ao cosseno, que são os eixos das ordenadas e o eixo das abscissas. Logo, a tangente é medida em um eixo tangente ao ciclo trigonométrico e pode ter valores maiores que 1 e menores que -1, pois o seu eixo é fora do ciclo trigonométrico de raio unitário.

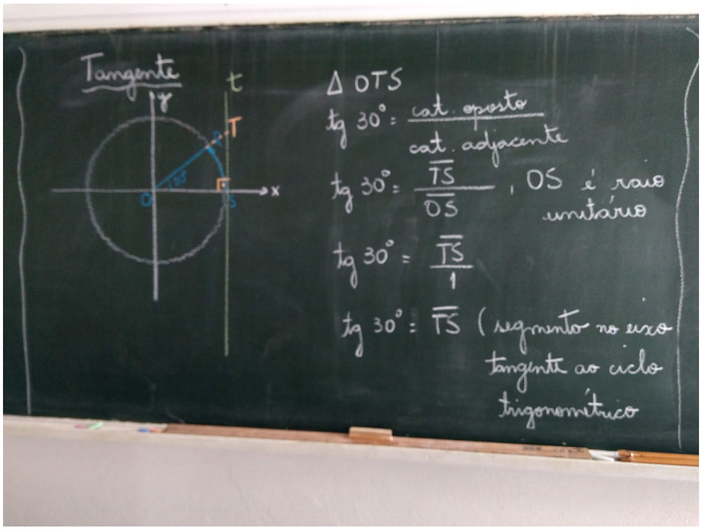


Figura 3.27: Atividade 11- Lousa com tangentes

Dessa forma, demonstrou-se as definições dos eixos x e y do plano cartesiano como sendo os eixos do seno e do cosseno, respectivamente, e da tangente também. Em seguida, iniciamos os exercícios da determinação dos valores das razões trigonométricas no 1º quadrante, utilizando somente os arcos notáveis.

Na sequência, foi apresentada a prancha trigonométrica para realizarmos as correspondências dos ângulos dos $2^o, 3^o$ e 4^o quadrantes para o 1^o quadrante, de uma maneira visual no início, e depois com cálculos e desenhos no caderno.

O intuito era a construção individual da prancha trigonométrica, no tamanho $A4$ para fazer parte do material diário, mas não houve tempo suficiente, tornou-se necessário o prosseguimento do conteúdo programático do 1º ano.

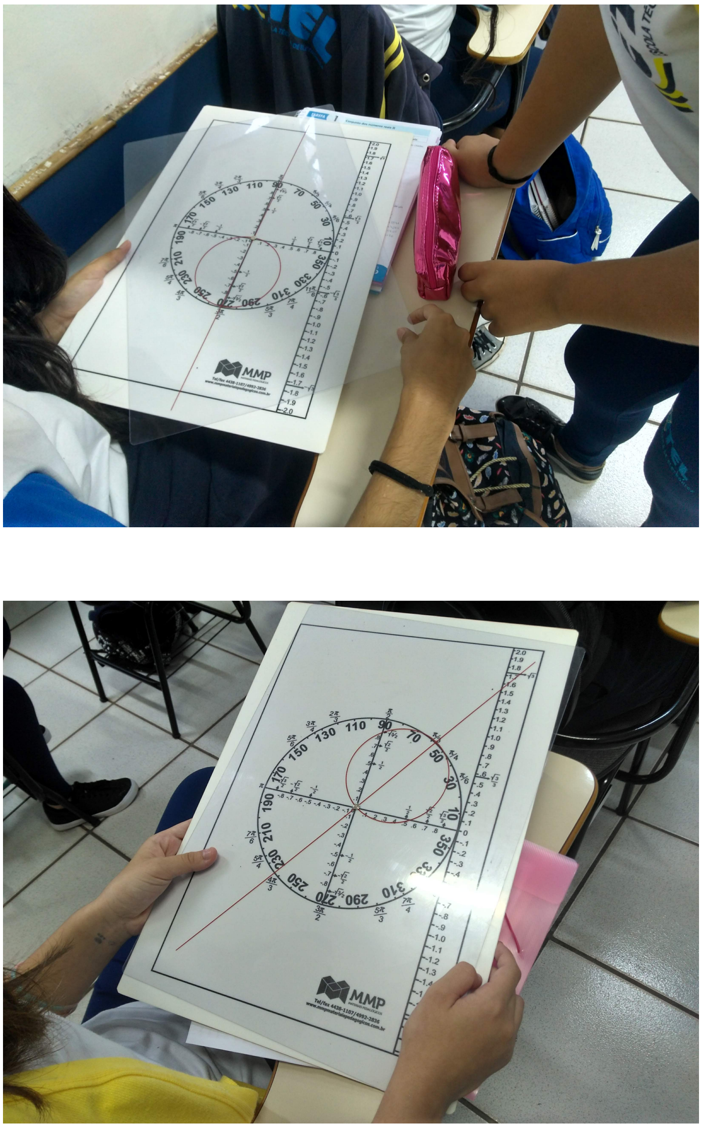


Figura 3.28: Atividade 11- Prancha trigonométrica

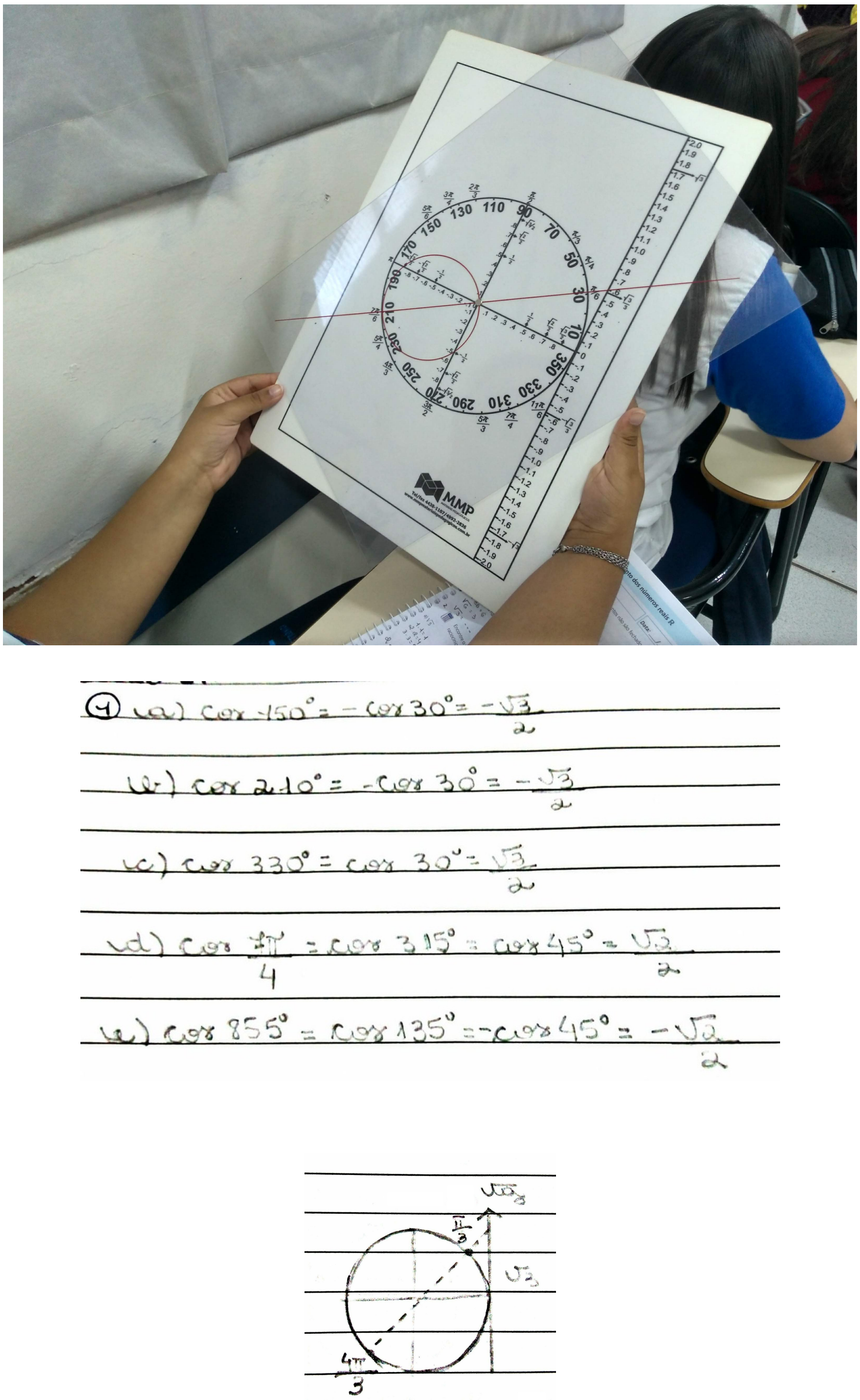


Figura 3.29: Atividade 11- Prancha trigonométrica e contas

CAPÍTULO 4

A TRIGONOMETRIA NAS PROFISSÕES E NO COTIDIANO

Sempre que iniciamos um conteúdo novo em Matemática tem um discente que pergunta onde ele utilizaria esse conteúdo na vida, ou então faz um comentário, que não é necessário ter esse conhecimento porque não será utilizado na vida, ou seja, não tem utilidade nenhuma no cotidiano dele. Pensando nisso, foi proposto aos discentes do 9º ano do Ensino Fundamental II para que fizessem uma pesquisa sobre onde a Trigonometria é usada, se existem outras profissões que a utilizam, ou se eles, simples discentes, a utilizam de alguma forma sem mesmo saberem que a estão utilizando. Eles se dividiram em grupos, e entregaram um trabalho escrito e depois fizeram uma apresentação, utilizando slides. As pesquisas foram:

Grupo 1: Trigonometria na Meteorologia

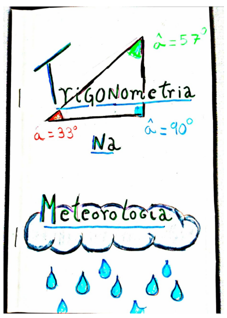


Figura 4.1: Trigonometria na Meteorologia

Nesta pesquisa descobriram que um meteorologista utiliza a trigonometria para análises, modelagens e previsões. As técnicas trigonométricas ajudam a estimar a altitude das nuvens, por exemplo, a base das nuvens é o ponto mais baixo em que uma nuvem permanece visível. Os meteorologistas estimam essa base para garantir voos seguros. Quando as nuvens estão baixas demais, a visibilidade é afetada e pode ser perigoso para aeronaves estabelecerem voo. À noite, uma coluna de luz vertical de um farol ou equivalente é apontada a um ponto da nuvem. A altitude é estimada usando a fórmula da tangente. Se o ângulo do ponto for chamado x e a distância da pessoa até o farol for y, então a altura, ou h, é encontrada usando a fórmula $tan\ x = \frac{h}{y}$.

Grupo 2: Trigonometria na Medicina

Figura 4.2: Trigonometria na Medicina

Nesta pesquisa descobriram que uma das aplicações da função trigonométrica na Medicina é evidenciada na análise e estudo da frequência cardíaca, isto é, do número de batimentos cardíacos num determinado intervalo de tempo, geralmente medido em bpm (batimentos cardíacos por minuto). Desta análise, podemos verificar a pressão arterial de uma pessoa. O sangue bombeado pelo coração é transportado para todos os tecidos e órgãos do corpo humano através de vasos chamados de artérias. A pressão arterial ou sanguínea é a força que o sangue exerce sobre as paredes das artérias.

Grupo 3: Trigonometria na Arquitetura


TRABALHO DE
MATEMÁTICA

Uso da Trigonometria na Arquitetura

Figura 4.3: Trigonometria na Arquitetura

Nesta pesquisa descobriram que a matemática torna o design das construções mais seguro e preciso. A trigonometria é muito importante para a Arquitetura, já que permite ao arquiteto calcular as distâncias e as forças relacionadas aos elementos diagonais. Das seis funções da trigonometria básica, o seno, o cosseno e a tangente são as mais importantes para a Arquitetura, pois permite ao arquiteto achar facilmente os valores opostos e adjacentes relacionados a um ângulo ou uma hipotenusa e a converter um vetor diagonal em um vetor horizontal e vertical.

Grupo 4: Trigonometria na Química

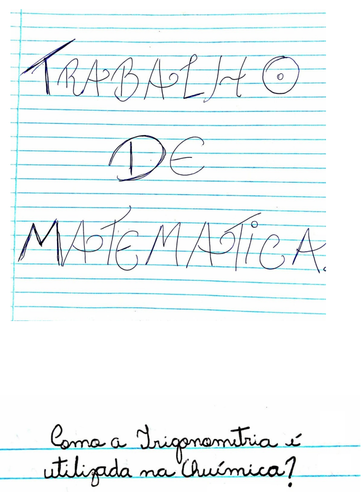


Figura 4.4: Trigonometria na Química

Nesta pesquisa descobriram que os químicos utilizam as funções trigonométricas para descrever com precisão os ângulos que são criados quando os átomos se ligam para formar as moléculas. A química é uma ciência que descreve como as substâncias se interagem e as funções trigonométricas, como o seno, o cosseno e a tangente, são essenciais para descrever os compostos em suas três dimensões. A função seno é a função trigonométrica mais utilizada na química. O seno é usado pelos matemáticos para representar o valor de um dos ângulos internos de um triângulo, e é usada na química para determinar o ângulo exato de uma ligação.

Grupo 5: Trigonometria na Música e Acústica

Figura 4.5: Trigonometria na Música e Acústica

Nesta pesquisa descobriram o quanto a trigonometria é importante no desenvolvimento dos sons que ouvimos a todo instante e da música por meio de ondas sonoras. A música pode ser transformada em senoides (também chamadas de onda seno, onda senoidal, sinusoide ou onda sinusoidal) que são formas de onda cujo gráfico é idêntico ao da função seno generalizada. A imagem desta onda ocorre naturalmente na natureza, como podemos observar nas ondas do mar, do som e da luz. Uma onda cosseno também é considerada sinusoidal, visto que ela possui o mesmo formato, porém está defasada com relação à onda seno no eixo horizontal. O ouvido humano pode reconhecer ondas seno simples, pois elas soam limpas e claras para nós. Enquanto que um som que é constituído por mais de uma onda seno terá uma aparência barulhenta ou possuirá harmônicas detectáveis.

A música pode ser transformada em senoides e cada nota é determinada pelo tamanho de sua onda senoidal, ou seja, é determinado por sua frequência. Notas com ondas mais amplas são mais graves e têm menos ciclos por segundo, enquanto que notas que têm ondas senoidais estreitas são mais agudas e possuem mais ciclos por segundo. Essas ondas estão em constante evolução e a evolução da amplitude dessas ondas ao longo do tempo é diferente e define uma forma de onda diferente, ou seja, as ondas senoides é que definirão os sons. Esta característica das ondas é importante principalmente para a determinação do timbre de um som ou para aplicações de modulação.

A trigonometria é capaz de estudar a evolução, intensidade e frequência das ondas, sem ela seria mais difícil harmonizar os sons, pois é ela que nos faz identificar qual tom será necessário, por exemplo, se ela será sequência de dó ou de mi, e assim fazer as modificações necessárias. Sem isso não conheceríamos as músicas da forma que conhecemos atualmente, e é por isso que a música até o século XV era considerada uma ciência Matemática.

Grupo 6: Trigonometria na Robótica

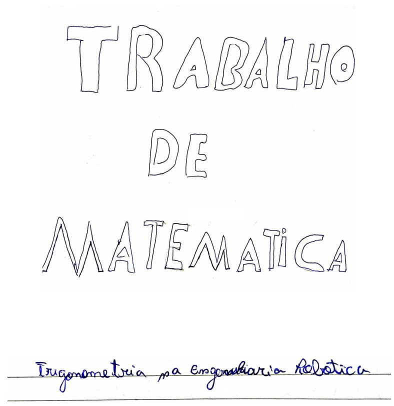
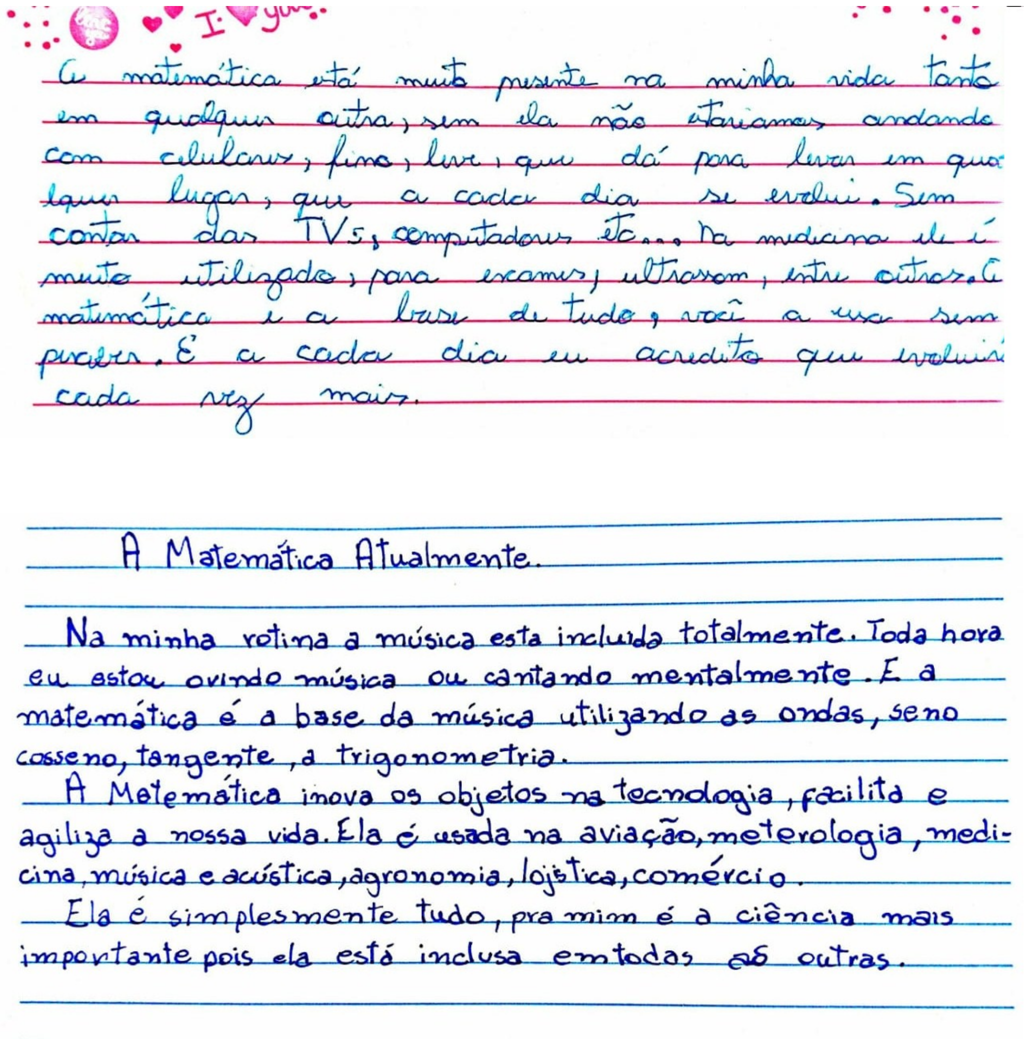


Figura 4.6: Trigonometria na Robótica

Nesta pesquisa descobriram que para ingressar na área tecnológica, os cálculos são o alicerce de qualquer projeto, mesmo para uma simples regra de três, os cálculos são necessários. Projetar robôs sem usar cálculos é igual a ir a um lugar onde você nunca foi sem usar mapas ou perguntar a alguém como chegar, ou seja, se acertar na primeira será por acaso. Para mover um braço robótico é muito usado o teorema de Pitágoras. Imagine o seguinte, você tem um braço robótico, mas o seu acionamento é feito com eixo de rosca sem fim, note que a dobra do braço mecânico, a haste que puxa o braço, e o eixo da rosca sem fim formam um triângulo, e quando totalmente puxado trata-se de um triângulo retângulo (um dos ângulos tem 90°). Para calcular a trajetória do robô é usado seno, cosseno e tangente, imagine um robô que tenha em sua central de processamento um programa que controla os motores, conforme o mapa configurado em sua memória ele faz a sua trajetória, porém um obstáculo ou uma mudança de planos faz com que ele mude o destino final. Para determinar quantos graus o robô terá que mudar a sua trajetória para alcançar o destino desejado, é utilizado as razões trigonométricas seno, cosseno e tangente.

Essas foram as pesquisas dos discentes. Quando terminamos, conversamos bastante e depois foi solicitado para que escrevessem o que eles acham da matemática na nossa vida. As opiniões deles foram:


A matemática está muito presente na minha vida tanto em qualquer outra, sem ela não estaríamos andando com celulares, finos, leves, que dá para levar em qualquer lugar, que a cada dia se evolui. Sem contar das TVs, computadores etc... Na medicina ele é muito utilizado, para exames, ultrasom, entre outros. A matemática é a base de tudo, você a usa sem perceber. E a cada dia eu acredito que evoluirá cada vez mais.

A Matemática Atualmente.

Na minha rotina a música esta incluida totalmente. Toda hora eu estou ouvindo música ou cantando mentalmente. E a matemática é a base da música utilizando as ondas, seno cosseno, tangente, a trigonometria.

A Metemática inova os objetos na tecnologia, facilita e agiliza a nossa vida. Ela é usada na aviação, meterologia, medicina, música e acústica, agronomia, lojística, comércio.

Ela é simplesmente tudo, pra mim é a ciência mais importante pois ela está inclusa em todas as outras.

Figura 4.7: Opinião de alunos

O que a matemática representa em minha vida?

Não diria que sou fã de matemática, porém acho muito interessante. Muito complexo também, mas afinal, a base de tudo que temos hoje não poderia ser algo muito simples.

Hoje em dia, temos "tudo na mão", mas graças aos antigos matemáticos, astrônomos e pensadores (obrigada!!!).

Tudo está modernizando cada vez mais, e tudo tornando-se mais preciso, porém, podemos, sem sombra de duvidas, dizer que a matemática é a base de tudo, desde muitos anos atrás.

a matemática atualmente

A matemática me ajuda muito no dia-a-dia, por exemplo, usando a trigonometria e estudando a matemática é possível fazer aparelhos eletrônicos que nos ajudam hoje em dia. Ajuda a astrologia a saber o tempo com mais exatidão, ajuda a medicina a saber a pressão arterial. A matemática nos ajuda em qualquer coisa, por exemplo, na hora de fazer compras e passar no caixa para pagar a conta

Figura 4.8: Opinião de alunos

O resultado foi melhor que o esperado. Eles ficaram perplexos com os resultados obtidos na pesquisa. Eles comentaram muito sobre as descobertas realizados, dizendo que não faziam ideia que a Trigonometria estava em tantas profissões diferentes, e até na música, que eles gostam tanto, não dava para imaginar. Como professora, o resultado foi ótimo, assim eles concluíram que tudo que é ensinado, mesmo que não faça sentido naquele momento, é importante ou é utilizado para melhorar o nosso cotidiano, a nossa vida.

CAPÍTULO 5

CONCLUSÃO

A escola atualmente está se tornando um local com múltiplas funções, não é mais um local somente de construção do conhecimento. Nossos discentes estão com problemas em casa, na família, e enxergam na escola e nos professores, uma esperança para a resolução dos seus problemas. Logo, os conteúdos estudados tem de ter significado para que sejam interessantes.

Esta dissertação foi elaborada com o objetivo de fazer o aprendizado sobre a Trigonometria ter sentido, ter significado para os discentes. O intuito foi mostrar que tudo que estudamos atualmente, nada disso estava pronto, tudo que sabemos e usamos hoje na Trigonometria, foi descoberto, foi desenvolvido e foi construído por pessoas, e o que as motivou foi a necessidade de fazer algo diferente, ou então de fazer algo que necessitava ser feito para aquela época, um desafio a ser vencido.

A interatividade entre os discentes na execução das atividades foi observado em várias ocasiões, o interesse em concluir e compreender o assunto, o fascínio pela descoberta tornou o trabalho muito gratificante.

Durante a elaboração e aplicação das atividades, a intenção foi fazer com que o discente se tornasse ativo no seu aprendizado, construindo o seu próprio conhecimento usando a prática dos conteúdos abordados na lousa e nos livros, e assim conferir, refletir e concluir que esses conteúdos fazem parte do nosso cotidiano, e que é fácil aprender, basta dedicação.

Assim, espera-se que os discentes possam adquirir o conhecimento com significado nesta área tão fascinante da Matemática que é a Trigonometria. Mesmo não conseguindo construir a prancha trigonométrica com os discentes, os resultados obtidos com a aplicação das atividades, em comparação com turmas anteriores, foi muito boa. Percebemos que as dificuldades em relação aos conteúdos tratados foram sanadas e que os discentes obteram uma melhora na compreensão da Trigonometria e da Geometria, e uma empatia maior pela Matemática.

REFERÊNCIAS

[1] GUELLI, O. **Contando a história da matemática: dando corda na trigonometria**. 9. ed. São Paulo: Editora Ática, 2002.

[2] REZENDE, E. Q. F.; QUEIROZ, M. L. B. **Geometria Euclidiana Plana e construções geométricas**. 2. ed. Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2010.

[3] MUNIZ NETO, A. C. **Geometria**. 1. ed. Rio de Janeiro: Coleção PROFMAT, Sociedade Brasileira de Matemática, 2013.

[4] IEZZI, G. **Fundamentos de Matemática Elementar**. 7. ed. São Paulo: Atual Editora, 1994.

[5] BOYER, C. B. **História da Matemática**. 2. ed. São Paulo: Edgard Blucher, 1996.

[6] BRASIL, Ministério da Educação: **Parâmetros Curriculares Nacionais:** ensino médio. Brasília: MEC/SEF, 2000

[7] BRASIL, Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais:** matemática. Brasília: MEC/SEF, 1998b.

[8] COSTA, M. D. **O desenho básico na área tecnológica**. In: CONGRESSO NACIONAL DE DESENHO, 2, Florianópolis, 1981. Florianópolis: UFSC, 1981.

[9] KENNEDY, E. S. **Tópicos de História da Matemática para Uso em Sala de Aula**. volume 5: Trigonometria, trad. de Hygino H. Domingues. Editora Atual Ltda, 1994.

[10] KALEFF, A. M. M. R. **Novas tecnologias no ensino da matemática**: tópicos em ensino de geometria: a sala de aula frente ao laboratório de ensino e à história da geometria. Rio de Janeiro: UAB/CEDERJ, 2008.

[11] FIORENTINI, D.; MIORIM, M. A. Uma reflexão sobre o uso de materiais concretos e jogos no ensino da matemática. **Boletim da SBEM-SP**, São Paulo, Ano 4, n. 7, 1990.

[12] EVES, H. **Introdução à história da matemática**. Campinas: Unicamp Editora, 2004.

[13] DANYLUK, O. S. **Alfabetização matemática**: o cotidiano da vida escolar. 2. ed. Caxias do Sul: Educs, 1991.