Universidade Federal do Rio Grande do Norte
Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional
Mestrado Profissional - PROFMAT

As Diversas Maneiras de Explorar a Matemática Através do Jogo Torres de Hanói

Edvan Pontes de Oliveira

Natal-RN,

Abril - 2019

Edvan Pontes de Oliveira

As Diversas Maneiras de Explorar a Matemática Através do Jogo Torres de Hanói

Dissertação de mestrado profissional apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Norte, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre

Orientadora

Prof. Dra. Débora Borges Ferreira

Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional
Mestrado Profissional - PROFMAT
Universidade Federal do Rio Grande do Norte

Natal-RN

Abril - 2019

Universidade Federal do Rio Grande do Norte - UFRN
Sistema de Bibliotecas - SISBI
Catalogação de Publicação na Fonte. UFRN - Biblioteca Setorial Prof. Ronaldo Xavier de Arruda - CCET

Oliveira, Edvan Pontes de.
As diversas maneiras de explorar a matemática através do jogo de Torres de Hanói / Edvan Pontes de Oliveira. - 2019.
69f.: il.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Centro de Ciências Exatas e da Terra, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, Mestrado Profissional - PROFMAT. Natal, 2019.
Orientadora: Débora Borges Ferreira.

1. Matemática - Dissertação. 2. Torre de Hanói - Dissertação. 3. Recorrência - Dissertação. 4. Quantidade mínima de movimentos - Dissertação. 5. Ordem de movimentação dos discos - Dissertação. 6. Números binários - Dissertação. 7. Função parte inteira - Dissertação. I. Ferreira, Débora Borges. II. Título.

RN/UF/CCET CDU 51

Elaborado por Joseneide Ferreira Dantas - CRB-15/324

Dissertação de Mestrado sob o título *As Diversas Maneiras de Explorar a Matemática Através do Jogo Torres de Hanói* apresentado por Edvan Pontes de Oliveira e aceito pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT da Universidade Federal do Rio Grande do Norte, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre, sendo aprovado por todos os membros da banca examinadora abaixo especificada:

Prof. Dra. Débora Borges Ferreira
Presidente
DMAT – Departamento de Matemática
UFRN – Universidade Federal do Rio Grande do Norte

Prof. Dr. André Gustavo Campos Pereira
Examinador Interno
DMAT – Departamento de Matemática
UFRN – Universidade Federal do Rio Grande do Norte

Prof. Dr. Euripedes Carvalho da Silva
Examinador Externo
DMAT – Departamento de Matemática
IFCE – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará

Natal-RN, 17 de abril de 2019.

Dedico esse trabalho a todos aqueles que me apoiaram nesta etapa da minha vida.

Agradecimentos

Agradeço a Deus, por sempre iluminar meus caminhos e ajudar em momentos difíceis.

À minha esposa Camila Jordana, pela apoio imensurável e por sempre ter acreditado no meu potencial, fundamental em todas as minhas conquistas, pois foi através do seu apoio e críticas construtivas que consegui chegar onde estou.

Às minhas filhas de quatro patas, Luna e Mel, pelo companheirismo e momentos de distrações.

À minha mãe Francisca Pontes, pelo carinho, cuidado e investido em mim desda minha infância, acompanhou-me nos períodos mais difíceis onde mais precisa de sua presença.

Ao meu pai Edmilson Ferreira e todos os meus irmãos e irmãs, cada um faz parte do meu coração desde sempre.

À minha orientadora Débora Borges, por sempre me ouvir e por passar ótimos momentos de conversas sobre o tema dessa dissertação. Suas colocações pontuais foram fundamentais para conclusão desse trabalho.

Ao professor Francisco Quaranta, graças a ele me fez despertar em seguir a profissão de professor. Sempre acreditou na minha capacidade e profissionalismo, mesmo no início de tudo quando fazia parte da bolsa de monitoria do IFRN há 9 anos. Hoje somos mais do que alunos e professores, mas sim amigos e companheiros de trabalhos.

Aos meus colegas e amigos da turma do PROFMAT, foram ótimas conversas e contribuições para o meu enriquecimento em matemática.

Por fim, aos meus professores do curso superior e mestrado, Gabriela Lucheze, Odirlei Silva Jesus, Giselle Costa, Carlos Gomes, Marconio Silva, Ronaldo Freire e Fagner Lemos. Sempre tiro um pouco de cada um para ser o melhor profissional.

Se cheguei até aqui foi porque me apoiei no ombro dos gigantes

Isaac Newton

As Diversas Maneiras de Explorar a Matemática Através do Jogo Torres de Hanói

Autor: Edvan Pontes de Oliveira

Orientador(a): Prof. Dra. Débora Borges Ferreira

Resumo

O presente trabalho mostra como explorar diversos conceitos matemáticos usando o jogo clássico Torres de Hanói com 3 pinos. Investigamos uma fórmula matemática que expressasse a quantidade mínima de jogadas necessárias para vencer o jogo em função da quantidade de discos, usamos recorrências, modelagem matemática e progressões geométricas. Além disso, exploramos a ordem dos movimentos dos discos por meio de sequências e numeração binária. Por fim, objetivamos oferecer um material que explora diversos tópicos da matemática que possa ser usado tanto por professores do ensino básico como do ensino superior.

Palavras-chave: Torre de Hanói, Recorrência, Quantidade Mínima de Movimentos, Ordem de Movimentação dos Discos, Números Binários e Função Parte Inteira.

The Many Ways to Explore Mathematics Through the Hanoi Tower Game

Author: Edvan Pontes de Oliveira

Supervisor: Ph.D. Débora Borges Ferreira

Abstract

The present work shows how to explore several mathematical concepts using the classic Hanoi Tower game with 3 pins. We investigate a mathematical formula that expresses the minimum number of plays necessary to win the game according to the number of discs, we use recurrences, mathematical modeling and geometric progressions. In addition, we explore the order of the movements of the disks by means of sequences and binary numbering. Finally, we aim to offer a material that explores several topics of mathematics that can be used for primary and higher education teachers.

Keywords: Hanoi Tower, Recurrence, Minimum Number of Movements, Order of Movement of the Discs, Binary Numbers and Floor Function.

Lista de figuras

Lista de tabelas

Sumário

1 Introdução

Nosso primeiro contato com o jogo Torres de Hanói foi no início da bolsa de monitoria de Matemática em 2010 do curso Técnico em Informática, no Instituto Federal de Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Norte, campus João Câmara. Durante as atividades práticas da disciplina de matemática, os alunos do ensino médio recorriam à monitoria para descobrir uma estratégia para vencer o jogo e também uma fórmula para calcular rapidamente a quantidade de jogadas para vencer perfeitamente. Algum tempo depois, o IFRN e a 6ª Diretoria Regional de Educação e Cultura da cidade de Macau/RN apresentaram um curso de aperfeiçoamento para professores de todas as disciplinas. Em uma dessas aulas de aperfeiçoamento, as Torres de Hanói foi utilizado como possibilidade de estratégia de ensino.

A partir desse contato, percebemos que o jogo explora uma gama de possibilidades de tópicos sobre a Matemática, tais como: função polinomial, função exponencial, função de duas variáveis, função parte inteira, sequências, recorrência, progressão aritmética, progressão geométrica, indução matemática, resto de divisão e números binários, ou seja, com esse material manipulável, podemos explorar em sala de aula uma variedade de conteúdos em qualquer nível de ensino, como o fundamental, médio e até o superior.

> No jogo Torre de Hanói podemos desenvolver várias habilidades que estão intimamente vinculadas aos objetivos do ensino de Matemática, entre as principais podemos citar: planejamento das próximas jogadas, capacidade de generalização, criação do modelo matemático que dá a quantidade mínima de jogadas em função do número de discos. (SILVA, 2015)

A Torre de Hanói é um exemplo clássico de estudo de recursividade, servindo também como um jogo educativo para o desenvolvimento do raciocínio (TORRES; ABREU, 2016). Tendo isso em vista, o objetivo desta dissertação é mostrar diversas maneiras de conectar a Matemática ao material manipulativo Torres de Hanói com três pinos.

Este trabalho é organizado em seis capítulos: Introdução, O Jogo, Número Mínimo de Movimentos e as Possíveis Abordagens Matemáticas, A Matemática da Ordem de Movimentação das Peças, Proposta de Atividade e Conclusão.

O Capítulo 2, O Jogo, apresenta um breve histórico das Torres de Hanói. Em seguida, é explicado o seu funcionamento e objetivo, assim como estratégias para vencer o jogo.

O Capítulo 3, Número Mínimo de Movimentos e as Possíveis Abordagens Matemáticas, explora três modos distintos de se obter uma relação entre o número de discos da torre e a quantidade de movimentos necessários para vencer o jogo. Para tanto, é usado relação de recorrência, modelagem matemática, progressões geométricas e indução matemática.

O Capítulo 4, A Matemática da Ordem de Movimentação das Peças, apresenta a relação da ordenação dos movimentos de cada peça com uma sequência de duas variáveis, ou seja, podemos encontrar qual disco foi movido em qualquer etapa da solução do jogo e como o mesmo se configura em cada etapa.

No Capítulo 5, Proposta de Atividade, é apresentada uma proposta de aplicação de atividade onde prevalece os tópicos abordados no trabalho com as devidas soluções.

No Capítulo 6, Conclusão, são apresentadas as considerações finais e as sugestões de trabalhos futuros.

2 O Jogo

Este capítulo aborda o surgimento do jogo, seu funcionamento e as possíveis estratégias para vencê-lo.

2.1 História

A Torre de Hanói foi popularizada pelo matemático francês Édouard Lucas no ano de 1892 na Obra *Récréations Mathématiques, Vol.III*. Lucas conheceu o jogo atráves de um amigo, professor N. Claus (do Sião), que foi apresentado ao quebra-cabeça em uma das suas viagens ao Vietnã, especificamente na região de Tonkin, em 1891.

Figura 1: Édouard Lucas
Fonte: Wikipédia

Lucas estimou o tempo necessário para resolver o jogo considerando um movimento por segundo. Por curiosidade, ele cita um jogo com 64 discos, no qual são necessários 18.446.744.073.709.551.615 movimentos para vencê-lo, o que levaria bilhões de séculos para resolver sem pausas. Além disso, Lucas equiparou a solução matemática com um quebra-cabeça muito famoso da China, o Baguenaudier, que é um quebra-cabeça de desemaranhamento de anéis. Junto com o jogo, também é muito famosa a lenda por trás das Torres de Hanói:

> No grande templo em Benares, Índia, abaixo da cúpula que marca o centro do mundo, há três pinos de diamante fixados em uma placa de latão. Em um desses pinos, Deus colocou, no início dos tempos, sessenta e quatro discos de ouro puro, o maior apoiado no metal, e os outros, cada vez mais estreitos, sobrepostos um ao outro de forma crescente. É a torre sagrada de Brahma. Noite e dia, os sacerdotes se sucedem nos degraus do céu, ocupados carregando os discos do primeiro pino de diamante ao terceiro, sem se afastar das regras, e foram impostas por Brahma. Quando tudo estiver terminado, a torre de Benares se transformará em pó, e então será o fim dos mundo. (LUCAS, 1892)

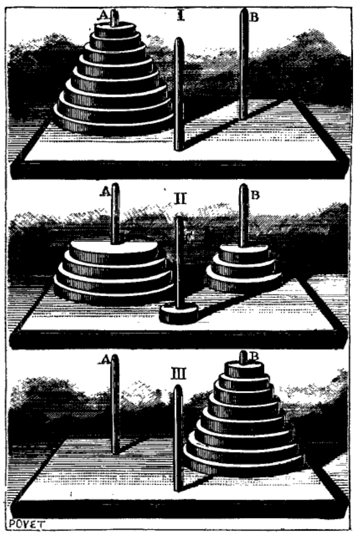


Figura 2: Ilustração da Torre de Hanói do século XIX
Fonte: Récreations Mathématiques Vol. III (1892)

Segundo (DUDENEY, 1908), logo após a descoberta do jogo, surgiram outras variações do desafio no início do século XX, na qual a mais famosa é as Torres de Hanói com 4 pinos.

2.2 Funcionamento do jogo

As Torres de Hanói é um quebra-cabeça composto por uma base e três pinos. Em um dos pinos tem discos empilhados com diferentes tamanhos, em sequência do menor para o maior, como mostra a figura abaixo:

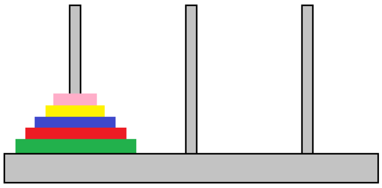


Figura 3: Torre de Hánoi com 5 discos

O objetivo do jogo é transferir a pilha de discos do pino inicial para um dos pinos livres, usando as regras a seguir:

A) Apenas um disco pode ser movido por vez

B) Nenhum disco pode ficar em cima de um de raio menor

C) Apenas o disco do topo pode ser movido

Daqui por diante, os pinos serão identificados pelas letras A (pino da esquerda), B (pino intermediário) e C (pino da direita). Será usado números para diferenciar os discos (de 1 a n, número 1 para o menor e n para o maior disco). Para simbolizar o movimento realizado, é feita a combinação da representação do pino com o disco. Por exemplo, na figura a seguir o disco 1 foi movimentado para o pino C:

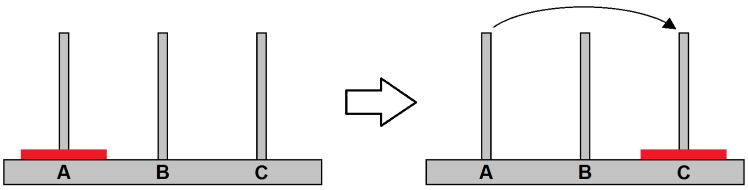


Figura 4: Solução com um disco

Chamamos de S_1 a solução para um disco e a representamos por: $S_1 = (1C)$.

Esse tipo de notação funciona como coordenadas, primeiro é identificado o disco (número do disco de acordo com o seu tamanho) e logo em seguida o pino de destino para onde queremos mover o disco (A, B ou C). A próxima figura apresenta outro exemplo, agora com dois discos, e uma possível solução:

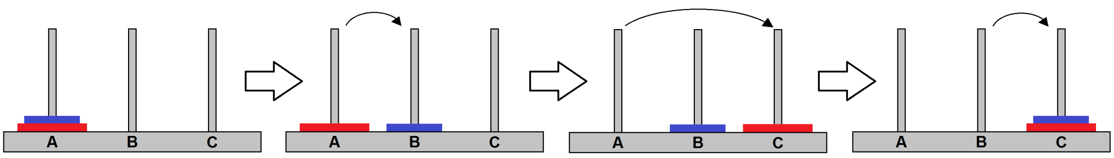


Figura 5: Solução com dois discos

Chamamos de S_2 a solução para dois discos. O disco 1 (menor disco) que estava no pino A vai para o pino B; o disco 2 é movido para o pino C; o disco 1 para o pino C, totalizando três movimentos (quantidade mínima de movimentos). A solução utilizando o registro dos movimentos já mencionado é:

$$S_2 = (1B, 2C, 1C).$$

Observe que nas soluções S_1 e S_2 seus elementos estão entre parênteses, isso acontece porque esses elementos representam uma sequência de movimentos e devem estar em ordem. Abaixo uma solução para três discos, ou seja, S_3:

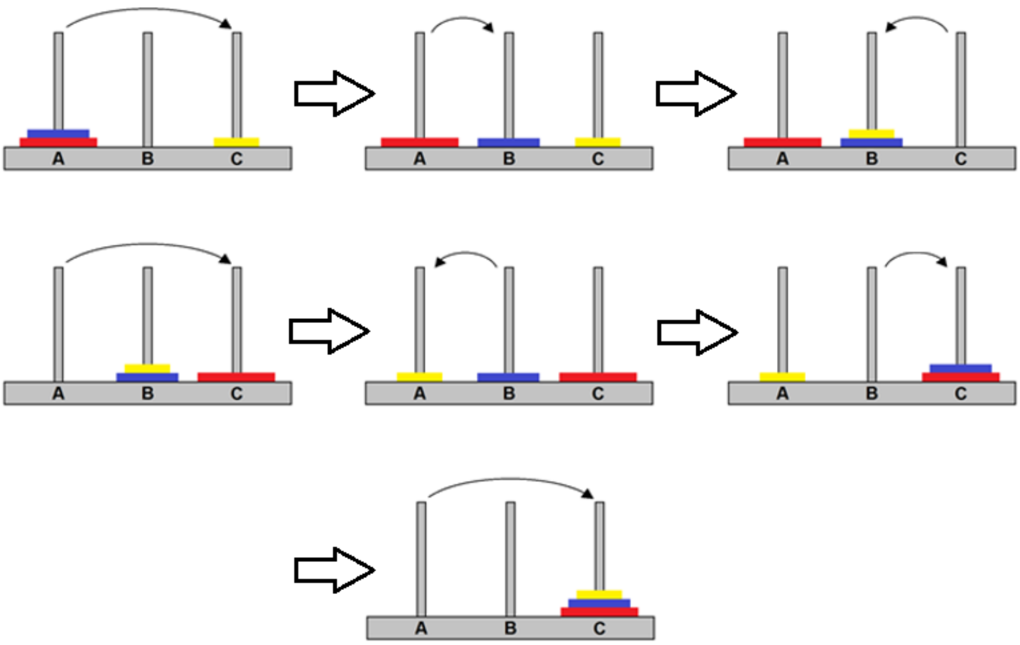


Figura 6: Solução com três discos

Logo, $S_3 = (1C, 2B, 1B, 3C, 1A, 2C, 1C)$. Denotamos por S_n a solução do problema com n discos.

2.3 Estratégias para vencer o jogo com n discos

Uma das maneiras de resolver a Torre de Hanói intuitivamente é saber onde o menor disco deve se mover nas primeiras jogadas. Vejamos possíveis soluções do jogo com até 5 discos:

$$
\begin{aligned}
S_1 &= (1C)\\
S_2 &= (1B, 2C, 1C)\\
S_3 &= (1C, 2B, 1B, 3C, 1A, 2C, 1C)\\
S_4 &= (1B, 2C, 1C, 3B, 1A, 2B, 1B, 4C, 1C, 2A, 1A, 3C, 1B, 2C, 1C)\\
S_5 &= (1C, 2B, 1B, 3C, 1A, 2C, 1C, 4B, 1B, 2A, 1A, 3B, 1C, 2B, 1B,\\
& \quad 5C, 1A, 2C, 1C, 3A, 1B, 2A, 1A, 4C, 1C, 2B, 1B, 3C, 1A, 2C, 1C).
\end{aligned}
$$

Observando as soluções anteriores é possível notar um padrão referente à paridade com a primeira jogada do menor disco, quando o total de discos é ímpar o menor disco inicialmente vai para haste C, em seguida para haste B, por fim haste A, seguindo a sequência $(C, B, A, C, B, A, ..., C)$. Caso o número de discos seja par, a sequência de movimentos muda. O menor disco inicialmente vai para haste B, depois para haste C, depois A, então a sequência fica $(B, C, A, B, C, A, ..., B, C)$. Agora já temos uma estratégia pra resolver o problema da Torre com n discos.

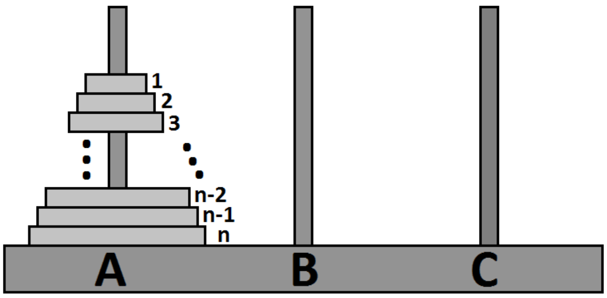


Figura 7: Torre de Hanói com n discos

Uma outra estratégia é sempre mover o menor disco para o pino intermediário B, independentemente da paridade do total de discos. Nessa estratégia o pino destino para finalização do jogo varia entre o pino B e C.

$$
\begin{aligned}
S_1 &= (1B)\\
S_2 &= (1B, 2C, 1C)\\
S_3 &= (1B, 2C, 1C, 3B, 1A, 2B, 1B)\\
S_4 &= (1B, 2C, 1C, 3B, 1A, 2B, 1B, 4C, 1C, 2A, 1A, 3C, 1B, 2C, 1C)
\end{aligned}
$$

Nesse caso, a menor peça sempre segue uma mesma sequência de movimentos para os pinos (B, C, A).

3 Número Mínimo de Movimentos e as Possíveis Abordagens Matemáticas

Nesta seção, recorrências são usadas para relacionar a quantidade mínima de jogadas necessárias para vencer o jogo com o número de discos. Além disso, precisamos de indução matemática para as devidas justificativas dos teoremas e proposições. Definiremos conceitos fundamentais.

Definição 3.1. Uma sequência numérica é uma função com domínio nos naturais e imagem nos reais, onde cada imagem é representada por a_n. Denotamos a sequência por (a_n).

Definição 3.2. Seja (a_n) uma sequência numérica. Chamamos de relação de recorrência à igualdade entre os termos dessa sequência que relaciona o termo a_n com seus anteriores.

Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 3.1. *Considere a sequência de números ímpares (1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, ...). Percebe-se que a diferença de quaisquer dois termos adjacentes é igual a 2, ou seja, se i_n for o n-ésimo termo dessa sequência, $i_n - i_{n-1} = 2$, $n = 2, 3, \cdots$, ou equivalentemente $i_n = i_{n-1} + 2$. Verificamos alguns termos*

$$\begin{array}{ccccccc} i_2 & = & 3 & = & 1+2 & = & i_1+2 \\ i_3 & = & 5 & = & 3+2 & = & i_2+2 \\ i_4 & = & 7 & = & 5+2 & = & i_3+2 \\ i_5 & = & 9 & = & 7+2 & = & i_4+2 \\ i_6 & = & 11 & = & 9+2 & = & i_5+2. \end{array}$$

De modo geral, $i_n = i_{n-1} + 2, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Essa é uma fórmula recorrente, onde conhecemos apenas o primeiro termo $i_1 = 1$. É possível encontrar os termos apenas somando um número fixo ao termo anterior. Para descobrir o valor de i_n, para n natural muito grande, é muito trabalhoso. Por exemplo, para $n = 100$, temos $i_{100} = i_{99} + 2$, mas não sabemos o valor de i_{99}, contudo $i_{99} = i_{98} + 2$, substituindo esse valor no i_{100} obtemos:

$$i_{100} = i_{99} + 2 = (i_{98} + 2) + 2 = i_{98} + 2 \cdot 2.$$

Depois faríamos outra substituição com $i_{98} = i_{97} + 2$, e assim por diante, obtendo $i_{100} = i_{97} + 2 + 2 \cdot 2 = i_{97} + 3 \cdot 2$. Note que, se prosseguirmos dessa maneira, verificamos que $i_{100} = i_k + (100 - k) \cdot 2$. Mais geralmente, $i_n = i_p + (n - p) \cdot 2$. Em particular, se $p = 1$, então $i_n = i_1 + (n - 1) \cdot 2$. Algumas recorrências, entretanto, não são tão simples de encontrar o termo geral, como o exemplo a seguir.

Exemplo 3.2. *A Sequência de Fibonacci (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, ...) é definida de modo que todo termo, a partir do terceiro, é a soma de dois termos antecessores a ele.*

$$\begin{aligned} 2 &= 1 + 1 \\ 3 &= 2 + 1 \\ 5 &= 3 + 2 \\ 8 &= 5 + 3 \\ 13 &= 8 + 5 \\ 21 &= 13 + 8 \\ &\vdots \\ F_n &= F_{n-1} + F_{n-2} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \qquad F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \text{ com } F_1 = 1 \text{ e } F_2 = 1, \forall n \in \mathbb{N} \text{ e } n \geq 2,$$

o que é uma descrição recursiva da sequência. Não conseguiríamos encontrar facilmente o centésimo termo dessa sequência, pois só conhecemos os primeiros números. Por curiosidade, a fórmula do termo geral da sequência de Fibonacci é:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{\left(1 + \sqrt{5}\right)^n}{2} - \frac{\left(1 - \sqrt{5}\right)^n}{2} \right),$$

ver a prova em (MORGADO; CARVALHO, 2015).

Exemplo 3.3. *Uma progressão aritmética é uma recorrência do tipo:* $x_n = x_{n-1} + r$, *onde* $r \in \mathbb{R}$ *é chamada de razão.*

Exemplo 3.4. *Uma progressão geométrica é uma recorrência do tipo:* $x_n = x_{n-1} \cdot q$, *onde* $q \in \mathbb{R}$ *é chamada de razão.*

Voltando ao jogo. Uma maneira de chegar à fórmula do número mínimo de movimentos em função do número de discos é usando o conceito de recorrência.

Teorema 3.1. *Se a_n é a quantidade mínima de movimentos para vencer o jogo Torre de Hanói com n discos, então vale a relação de recorrência $a_n = 2 \cdot a_{n-1} + 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ e $a_1 = 1$.*

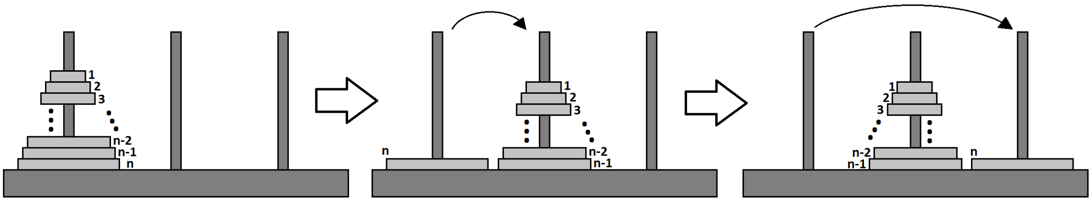


Figura 8: Solucionando o jogo com n discos

Demonstração. Para transferir o maior disco para o pino final C, devemos primeiramente mover todos os $n-1$ discos para o pino intermediário B com a_{n-1} movimentos, uma vez que todos os $n-1$ discos estão no pino B, o maior disco ficará livre para ser transferido para o pino C com 1 movimento, totalizando $a_{n-1} + 1$ movimentos. Em seguida, transferimos todos os $n-1$ discos para o pino C com mais a_{n-1} movimentos, totalizando $a_{n-1} + 1 + a_{n-1} = 2 \cdot a_{n-1} + 1 = a_n$. □

Entretanto, essa é uma fórmula recursiva. Agora queremos uma fórmula que dado o valor de n já encontramos de imediato o valor de a_n, uma expressão fechada, no caso. Para isso, usaremos uma poderosa ferramenta chamada Indução Matemática.

De acordo com (MORGADO; CARVALHO, 2015), a prova por indução consiste em demonstrar a validade de uma propriedade relativa aos números naturais. Seja $P(n)$ uma propriedade, tal que $P(1)$ é verdadeiro e, por hipótese, para algum $n \in \mathbb{N}$, suponha $P(n)$ verdadeiro. Caso essa hipótese implicar na validez de $P(n+1)$, então $P(n)$ é verdadeiro para todo $n \in \mathbb{N}$.

Exemplo 3.5. *Provar que a soma dos números ímpares positivos e consecutivos começando pelo 1, sempre resulta num quadrado perfeito. Logo, nossa propriedade é $P(2n-1)$: $1 + 3 + 5 + \cdots + 2n - 1 = n^2$.*

Resolução. Queremos provar $P(n)$: $1 + 3 + \cdots + (2n-1) = n^2$, $\forall n \in \mathbb{N}$, com $n \geq 1$.

(1) Para $n = 1$ temos que a soma do lado esquerdo se reduz a 1 que por sua vez é igual a 1^2, ou seja, daí temos que $P(1)$ é verdadeira.

(2) Suponhamos agora que para algum $n > 1$, $P(n)$ seja verdadeira:

$$1 + 3 + \cdots + 2n - 1 \;=\; n^2. \tag{3.1}$$

Queremos mostrar que $P(n+1)$ é verdadeira

$$1+3+5+\cdots(2n-1)+2(n+1)-1=(n+1)^2.$$

Somando $2(n+1)-1$ nos dois lados da equação (3.1), obtemos:

$$\begin{aligned}1+3+\cdots+2n-1+2(n+1)-1 &= n^2+2(n+1)-1\\ &= n^2+2n+2-1\\ &= n^2+2n+1\\ &= (n+1)^2.\end{aligned}$$

O que mostra que $P(n+1)$ também é verdadeiro. Portanto, $P(n)$ é verdadeiro para todo $n \in \mathbb{N}$.

Proposição 3.1. *A quantidade mínima de jogadas a_n para vencer o jogo em função da quantidade n de discos é dada por: $a_n = 2^n - 1$.*

Antes de provar a Proposição 3.1, verifiquemos que ela é intuitiva. Sabemos do Teorema 3.1 que

$$\begin{aligned} a_n &= 2a_{n-1}+1 && (3.2)\\ \Rightarrow\ a_{n-1} &= 2a_{n-2}+1 && (3.3)\\ \Rightarrow\ a_{n-2} &= 2a_{n-3}+1 && (3.4)\\ &\vdots \end{aligned}$$

Então, substituindo (3.3) em (3.2), obtemos:

$$\begin{aligned} a_n &= 2\cdot a_{n-1}+1\\ \Rightarrow\ a_n &= 2\cdot(2\cdot a_{n-2}+1)+1\\ \Rightarrow\ a_n &= 2^2\cdot a_{n-2}+3. && (3.5)\end{aligned}$$

Novamente, substituindo (3.4) no (3.5), obtemos:

$$\begin{aligned} a_n &= 4\cdot a_{n-2}+3\\ \Rightarrow\ a_n &= 4\cdot(2\cdot a_{n-3}+1)+3\\ \Rightarrow\ a_n &= 2^3\cdot a_{n-3}+7. && (3.6)\end{aligned}$$

E assim sucessivamente.

Observando a sequência (a_n), e fazendo várias substituições, após k vezes na equação (3.2), intuitivamente a relação de recorrência terá a seguinte forma:

$$a_n = 2^k \cdot a_{n-k} + 2^k - 1. \tag{3.7}$$

Seguindo essa ideia, quando $k = n - 1$ temos

$$\begin{array}{rcl} a_n & = & 2^{n-1} \cdot a_1 + 2^{n-1} - 1 \\ \Rightarrow\ a_n & = & 2^{n-1} \cdot 1 + 2^{n-1} - 1 \\ \Rightarrow\ a_n & = & 2^{n-1} + 2^{n-1} - 1 \\ \Rightarrow\ a_n & = & 2 \cdot 2^{n-1} - 1 \\ \Rightarrow\ a_n & = & 2^{n-1} \cdot 2 - 1 \\ \Rightarrow\ a_n & = & 2^n - 1. \end{array}$$

Demonstraremos agora a Proposição 3.1.

Demonstração. Queremos provar que $a_n = 2^n - 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$, com $n > 0$. Logo, nossa propriedade $P(n)$ é $a_n = 2^n - 1$, $n \geq 1$.

(1) Para $n = 1$ temos que $a_1 = 2^1 - 1 = 1$, $P(1)$ é verdadeira;

(2) Suponhamos agora que para algum $n > 1$, $P(n)$ seja verdadeira, ou seja, $a_n = 2^n - 1$. Pelo Teorema 3.1, sabemos que $a_n = 2 \cdot a_{n-1} + 1$, assim:

$$\begin{array}{rcl} a_{n+1} & = & 2 \cdot a_n + 1 \\ & = & 2 \cdot (2^n - 1) + 1 \\ & = & 2 \cdot 2^n - 2 + 1 \\ & = & 2^{n+1} - 1. \end{array}$$

Logo, $P(n+1)$ é verdadeiro. Por Indução, $a_n = 2^n - 1$ é verdadeiro para todo n natural positivo. $\square$

3.1 Modelagem Matemática

Nesta seção, vamos investigar a fórmula do número mínimo de movimentos em função quantidade de discos por meio da modelagem matemática.

Modelagem matemática é o processo que envolve a obtenção de um mo-

> delo. Este sob certa óptica, pode ser considerado um processo artístico, visto que, para se elaborar um modelo, além de conhecimento de matemática, o modelador precisa ter uma dose significativa de intuição e criatividade para interpretar o contexto, saber discernir que conteúdo matemático melhor se adapta e também ter senso lúdico para jogar com as variáveis envolvidas. (BIEMBENGUT; HEIN, 2000)

De maneira geral, a modelagem matemática é o intermediário entre a matemática e a realidade, ou seja, ela explica comportamentos de fenômenos naturais e físicos por meio de fórmulas matemáticas.

Toda sequência numérica (a_n) é uma função com domínio nos naturais e imagem nos reais. Assim, procuramos uma $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ entre as funções elementares (polinomial, trigonométrica, logarítmica e exponencial) que se encaixa nesse conjunto de pontos gerados pela sequência (a_n), isto é, $a_n = f(n)$. Para facilitar, a partir de agora chamamos a_n de $f(n)$.

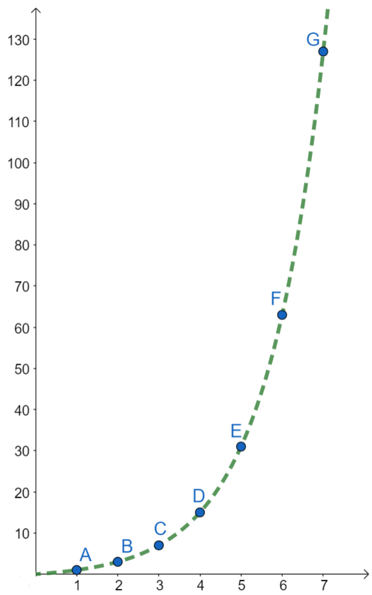


Figura 9: Gráfico no plano cartesiano

Ainda não sabemos que tipo de função descreve a quantidade mínima de jogadas para vencer o jogo. Antes de tentar responder essa pergunta, podemos analisar e afirmar algumas proposições sobre essa sequência (a_n) do jogo.

Proposição 3.2. *A sequência (a_n) é estritamente crescente, isto é, $a_n < a_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$.*

Demonstração. Queremos mostrar que a medida que a quantidade de discos aumenta o número mínimo de jogadas pra vencer o jogo também aumenta, ou seja, $P(n)$:

$$a_n < a_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Mostramos tal fato usando Indução Matemática. Para $n = 1$, temos:

$$a_1 = 1 < 3 = a_2 \quad (verdadeiro).$$

Suponhamos que $P(n)$ é verdade para algum n, ou seja, $a_n < a_{n+1}$. A partir disso, queremos mostrar que $P(n+1)$ é verdade, ou seja, $a_{n+1} < a_{n+2}$. Por hipótese,

$$\begin{aligned} a_n &< a_{n+1} \\ \Rightarrow\ 2 \cdot a_n &< 2 \cdot a_{n+1} \\ \Rightarrow\ 2 \cdot a_n + 1 &< 2 \cdot a_{n+1} + 1 \\ \Rightarrow\ a_{n+1} &< a_{n+2}. \end{aligned}$$

Observe que usamos o Teorema 3.1. Portanto, a sequência (a_n) é estritamente crescente para todo $n \in \mathbb{N}$. □

Proposição 3.3. *A função (a_n) é injetiva, isto é, se $m \neq n$, então $a_m \neq a_n$ para todos m e n naturais.*

Demonstração. Vimos na Proposição 3.2 que (a_n) é estritamente crescente, então é injetiva. De fato, se $m \neq n$, sem perda de generalidade suponha $m < n$, então $a_m < a_n$, logo $a_m \neq a_n$. Concluímos que a sequência (a_n) é injetora. □

Agora, analisamos se a relação anterior pode ser representada por uma função polinomial. Será que (a_n) é uma função polinomial do 1º grau? A resposta é **não**.

Definição 3.3. Chama-se função polinomial do 1º grau a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ax + b$ onde $a \neq 0$, a e $b \in \mathbb{R}$.

Analisamos a função polinomial de grau 1, com domínio em $\mathbb{N}$, então a taxa de variação será $\dfrac{f(n+1) - f(n)}{n+1-n} = f(n+1) - f(n) = a$, para todo n natural. Desse modo, para $n = 1$ e $n = 2$, temos:

$$f(3) - f(2) = 7 - 3 = 4 \neq f(2) - f(1) = 3 - 1 = 2.$$

Nº discos	Quant. movimentos
1	1
2	3
3	7
4	15
5	31

Tabela 1: Número mínimo de jogadas em função do número de discos.

Como a função da Tabela 1 não tem esse tipo de crescimento constante, logo seu gráfico não tem pontos alinhados e não pode ser modelada por uma polinomial do primeiro grau.

Teorema 3.2. *A função $f(n)$, número mínimo de movimentos em função do número de discos n, não é polinomial.*

Demonstração. Suponha por contradição que $f(n) = \sum_{p=0}^{k} b_p n^p$ é um polinômio de grau k, com $b_k \neq 0$. Então:

$$f(n+1) = \sum_{p=0}^{k} b_p (n+1)^p. \tag{3.8}$$

Subtraindo de (3.8) de $f(n)$, obtemos:

$$\begin{aligned} f(n+1) - f(n) &= \sum_{p=0}^{k} b_p (n+1)^p - \sum_{p=0}^{k} b_p n^p \\ &= \sum_{p=0}^{k} b_p \left((n+1)^p - n^p\right) \\ &= b_k \left((n+1)^k - n^k\right) + \sum_{p=0}^{k-1} b_p \left((n+1)^p - n^p\right) \\ &= b_k \left(n^k + \sum_{p=0}^{k-1} \binom{k-1}{p} n^{k-1-p} - n^k\right) + \sum_{p=0}^{k-1} b_p \left((n+1)^p - n^p\right) \\ &= b_k \left(\sum_{p=0}^{k-1} \binom{k-1}{p} n^{k-1-p}\right) + \sum_{p=0}^{k-1} b_p \left((n+1)^p - n^p\right), \end{aligned}$$

que é um polinômio de grau $k-1$. Por recorrência, vimos que $f(n) = 2 \cdot f(n-1) + 1$, logo $f(n+1) = 2 \cdot f(n) + 1$. Assim, $f(n+1) - f(n) = f(n) + 1$. Se f fosse uma polinomial de grau k, então o grau de $f(n+1) - f(n)$ teria o mesmo grau de $f(n) + 1$, que é k. O que não ocorre em polinômios. Logo, f **não** é uma função polinomial.

$\square$

Uma outra demonstração do Teorema 3.2 é por meio de derivadas de ordem superior. Vejamos a seguir.

Demonstração. Seja $f(n) = \sum_{p=0}^{k} b_p n^p$ um polinômio de grau k, com $b_k \neq 0$.

Sabendo que $f(n) = 2 \cdot f(n-1) + 1$ e derivando k vezes f, obtemos:

$$f^{(k)}(n) \quad = \quad k! \cdot b_k.$$

Assim, temos:

$$\begin{aligned} f^{(k)}(n) &= 2 \cdot f^{(k)}(n-1) \\ \Rightarrow k! \cdot b_k &= 2 \cdot k! \cdot b_k \\ \Rightarrow b_k &= 2 \cdot b_k. \end{aligned}$$

Essa igualdade só é verdadeira se $b_k = 0$, o que contraria a nossa hipótese. Portanto, função f não pode ser um polinômio. □

Teorema 3.3. *A função $f(n)$, número mínimo de movimentos em função do número n discos, não é do tipo trigonométrica.*

Demonstração. Sabemos que a sequência $f(n)$ é injetiva pela Proposição 3.2, entretanto as funções trigonométricas seno, cosseno, tangente, secante, cossecante e cotangente não são injetivas. No caso das inversas que são arctangente, arcseno e arcosseno só estão definidas em intervalos limitados, mas (a_n) tem domínio ilimitado. Portanto, $f(n)$ não é trigonométrica. □

Teorema 3.4. *A função $f(n)$, número mínimo de movimentos em função do número n discos, não é logarítmica.*

Demonstração. Seja $f(n) = \log_a(bn + c) + d$, $\forall a, b, c, d \in \mathbb{R}$, onde $a \neq 1$ e $a > 0$.

Utilizando a relação da recorrência, temos:

$$\begin{aligned}
f(n+1) &= 2\cdot f(n)+1 \\
\Rightarrow \log_a\left(b(n+1)+c\right)+d &= 2\cdot(\log_a(bn+c)+d)+1 \\
\Rightarrow \log_a\left(b(n+1)+c\right)+d &= 2\cdot\log_a(bn+c)+2d+1 \\
\Rightarrow \log_a\left(b(n+1)+c\right) &= \log_a(bn+c)^2+d+1 \\
\Rightarrow \log_a\left(b(n+1)+c\right)-\log_a(bn+c)^2 &= d+1 \\
\Rightarrow \log_a\left(\frac{b(n+1)+c}{(bn+c)^2}\right) &= d+1 \\
\Rightarrow a^{d+1} &= \frac{b(n+1)+c}{(bn+c)^2} \\
\Rightarrow a^{d+1}\cdot(bn+c)^2 &= b(n+1)+c \\
\Rightarrow a^{d+1}b^2n^2+2a^{d+1}bcn+c^2a^{d+1} &= bn+b+c.
\end{aligned}$$

Igualando os coeficientes de mesma potência temos:

$$a^{d+1}b^2 = 0, \tag{3.9}$$

$$2a^{d+1}bc = b \quad \text{e} \tag{3.10}$$

$$c^2a^{d+1} = b+c. \tag{3.11}$$

De (3.9), temos que $a=0$ ou $b=0$. Não é possível $a=0$, pois contraria a definição de logaritmo, logo $b=0$. Assim, $f(n)=\log_a(c)+d$ é constante, mas f não é constante, logo não pode ser desse tipo. □

Continuando a nossa análise, vamos verificar se f é exponencial. Analisando o comportamento das derivadas de ordem superior da função polinomial $f^{(k)}(n)=2\cdot f^{(k)}(n-1)$, vemos que a função relacionada ao jogo é uma função de crescimento exponencial. Logo, a função $f(n)=k\cdot a^n+b$, tal que k, b e $a\in\mathbb{R}$ constantes, com $a\neq 1$, é a função candidata que procuramos.

Teorema 3.5. *A função $f(n)$, número mínimo de movimentos em função do número n de discos não é exponencial, e sim de crescimento exponencial.*

Definição 3.4. A função exponencial é uma função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^+$, do tipo $f(x)=a^x, 0<a\neq 1$.

De acordo com (LIMA et al., 2012), as funções exponenciais têm, exclusivamente, as seguintes propriedades:

1. $f(x) \cdot f(y) = f(x+y)$

2. $f(x) = a^x$, $\forall x \in \mathbb{R}$, onde $f(1) = a$

3. $f(nx) = f(x)^n$

4. $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$, $a > 1$
   $x < y \Rightarrow f(y) < f(x)$, $0 < a < 1$

Já sabemos que para vencer o jogo com 1 disco é necessário apenas 1 movimento, ou seja, $f(1) = 1$. Com 2 discos, são necessários 3 movimentos, então $f(2) = 3$. Com 3 discos, são necessários 7 movimentos, ou seja, $f(3) = 7$.

Observando as características da definição de função exponencial, vemos que obedece apenas uma das propriedades:

1. $f(1) \cdot f(2) = 1 \cdot 3 = f(1+2) = 7$ (falso)

2. $f(x) = a^x$, $\forall x \in \mathbb{N}$, onde $f(1) = a = 1$ (falso)

3. $f(2 \cdot 1) = f(1)^2$ (falso)

4. $1 < 2 \Rightarrow f(1) < f(2)$, $a > 1$ (verdadeiro)

O que mostra claramente que a função não é do tipo $f(n) = a^n$. Resta-nos analisar a função da família da exponencial mais geral, a do tipo $f(n) = k \cdot a^n + b$, $a > 0, a \neq 1, k \neq 0, a, b, k \in \mathbb{R}$.

Pela relação da recorrência do Teorema 3.1, sabemos que $f(n) = 2 \cdot f(n-1) + 1$, daí obtemos:

$$\begin{aligned}
f(n) &= 2 \cdot f(n-1) + 1 \\
\Rightarrow k \cdot a^n + b &= 2 \cdot (k \cdot a^{n-1} + b) + 1 \\
\Rightarrow k \cdot a^n + b &= 2 \cdot k \cdot a^{n-1} + 2 \cdot b + 1 \\
\Rightarrow k \cdot a^n &= 2 \cdot k \cdot a^{n-1} + b + 1 \\
\Rightarrow k \cdot a \cdot a^{n-1} &= 2 \cdot k \cdot a^{n-1} + b + 1. \qquad (3.12)
\end{aligned}$$

Da equação (3.12), vamos igualar os coeficiente dos dois lados. Temos que $2 \cdot k = k \cdot a \Rightarrow a = 2$ e $b + 1 = 0 \Rightarrow b = -1$. Portanto, a função $f(n) = k \cdot 2^n - 1$ é a procurada.

Resta saber o valor de k. Como $f(1) = 1$, então $f(1) = k \cdot 2^1 - 1 = 1$. Logo, $2k = 2$, implicando em $k = 1$. Assim, a função que procuramos é $f(n) = 2^n - 1$.

3.2 Progressão Geométrica

Nesta seção, vamos argumentar que a sequência da quantidade de jogadas de cada disco é uma progressão geométrica e, consequentemente, encontrar a fórmula de $f(n)$.

Definição 3.5. Uma progressão geométrica $(b_1, b_2, \cdots, b_n)$ é uma sequência numérica onde o quociente de um termo por o seu antecessor é sempre a mesma constante, essa constante chamamos de razão da progressão.

A partir de uma tabela, vamos analisar o comportamento da quantidade mínima de jogadas através da soma dos movimentos de cada disco. Com um disco temos apenas 1 movimento. Com dois discos temos um movimento da maior peça e mais dois da menor. Com três, uma da maior, duas do disco 2 e quatro do disco 1. Com quatro discos, uma da maior, duas do disco 3, quatro do disco 2 e oito movimentos do disco 1.

Nº discos	Quant. movimentos
1	1
2	$1 + 2$
3	$1 + 2 + 4$
4	$1 + 2 + 4 + 8$

Tabela 2: Número mínimo de jogadas para 4 discos em função da soma dos movimentos de cada disco

Para responder a quinta linha da tabela acima, o raciocínio é o mesmo. Para cinco discos, teríamos primeiramente que gastar 15 movimentos para formar uma torre no pino intermediário (pino B), em seguida, a maior peça (disco 5) ficaria livre para ir a torre destino (pino C) realizando um movimento. Então o número de movimentos mínimo é $1 + 2 \cdot (1 + 2 + 4 + 8) = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 = 31$.

Nº discos	Quant. movimentos
1	1
2	$1 + 2$
3	$1 + 2 + 4$
4	$1 + 2 + 4 + 8$
5	$1 + 2 + 4 + 8 + 16$

Tabela 3: Número mínimo de jogadas para 5 discos em função da soma dos movimentos de cada disco

As tabelas acima mostram que a quantidade de movimentos de cada disco é o dobro do anterior, em especial potências de base 2, sendo que o maior disco tem apenas 1 movimento.

Nº discos	Quant. movimentos
1	2^0
2	$2^1 + 2^0$
3	$2^2 + 2^1 + 2^0$
4	$2^3 + 2^2 + 2^1 + 2^0$
5	$2^4 + 2^3 + 2^2 + 2^1 + 2^0$

Tabela 4: Número mínimo de jogadas para 5 discos em função da soma dos movimentos de cada disco

Pra reforçar esse padrão, vamos utilizar novamente a Proposição 3.4, mostrando a quantidade mínima de movimentos para 6 discos:

$$\begin{aligned} a_n &= 2 \cdot a_{n-1} + 1 \\ \underbrace{2^5 + 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2^1 + 2^0}_{6\ discos} &= 2 \cdot (\underbrace{2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4}_{5\ discos}) + 1 \end{aligned}$$

As tabelas anteriores mostram essa propriedade de uma maneira empírica. Vamos ver uma prova formal para um disco k. Intuímos que, para uma Torre de Hanói com n discos, a quantidade mínima de movimentos de um disco k será 2^{n-k}.

Teorema 3.6. *A quantidade de movimentos de um disco k em função de n discos no total é dado por $d_{n,k} = 2^{n-k}$, $1 \leq k \leq n$.*

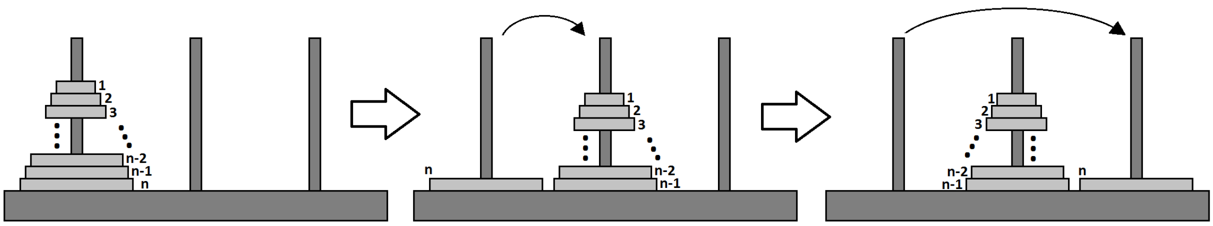


Figura 10: Recorrência com n discos

Demonstração. Seja k fixado tal que $k \leq n$. Para $n = 1$, então $k = 1$ e $d_{1,1} = 2^{1-1} = 2^0 = 1$ que é verdadeiro, pois com 1 disco só ocorre 1 movimento. Suponha por hipótese que $d_{n,k} = 2^{n-k}$ para algum $k \leq n$. Provaremos que $d_{n+1,k} = 2^{n+1-k}$, para todo $k \leq n+1$. Se $k \leq n$, então para movermos a torre com $n+1$ discos do pino A para o pino C, primeiro movemos a torre com n discos de A para B, realizando $d_{n,k}$ movimentos com o disco k, por hipótese movemos o disco $k+1$ para o pino C, e depois movemos a torre com n discos de B para C, realizando mais 2^{n-k} movimentos com o disco k. Totalizando $2 \cdot 2^{n-k} = 2^{n+1-k}$.

Assim, $d_{n+1,k} = 2^{n+1-k}$ se $k \leq n$. Se $k = n+1$, então $d_{n+1,n+1} = 2^{n+1-(n+1)} = 2^0 = 1$ que é a quantidade de movimentos do disco $n+1$. $\square$

Agora que já sabemos que a quantidade jogadas de cada disco é uma progressão geométrica de razão 2, com o primeiro elemento valendo 1, podemos encontrar a fórmula fechada da quantidade mínima de movimentos em função de n.

Aplicando a fórmula da soma S_n de n termos de uma progressão geométrica, de $d_{n,1} = 1$ e razão igual a 2, temos:

$$S_n = \frac{d_{n,1} \cdot (2^n - 1)}{2 - 1} = \frac{1 \cdot (2^n - 1)}{2 - 1} = 2^n - 1.$$

Logo, $a_n = S_n = 2^n - 1$.

3.3 Número de vezes que um disco k vai para os pinos A, B ou C

Nesta seção, iremos estudar, através de sequências e recorrências, o número de vezes que cada disco é movido para o pino inicial (A), o pino intermediário (B) e o pino final (C).

Sejam $A_{n,k}, B_{n,k}$ e $C_{n,k}$ a quantidade mínima de jogadas que um disco k vai para os pinos A, B e C, e $d_{n,k}$ a quantidade de movimentos que do disco k para um total de n discos.

Primeiramente, vamos observar o padrão com 1, 2, 3, 4 e 5 discos no total.

Disco k	A	B	C	Total
Disco 1	0	0	1	1

Tabela 5: Número de vezes que um disco vai para os pinos

Como temos apenas 1 disco, então este só é movimentado uma vez para o pino C, ou seja, $A_{1,1} = 0$, $B_{1,1} = 0$ e $C_{1,1} = 1$. Para 2 discos vemos a Tabela 6.

Disco k	A	B	C	Total
Disco 2	0	0	1	1
Disco 1	0	1	1	2

Tabela 6: Número de vezes que os discos 1 e 2 ocupam os pinos

O maior sempre vai primeiramente para o pino final C, enquanto o disco menor vai para o pino B e C, uma vez para cada. Usando a notação, teremos:

$$A_{2,2} = 0, B_{2,2} = 0 \text{ e } C_{2,2} = 1.$$
$$A_{2,1} = 0, B_{2,1} = 1 \text{ e } C_{2,2} = 1.$$

Vejamos agora uma tabela para 3 discos no total:

Disco k	A	B	C	Total
Disco 3	0	0	1	1
Disco 2	0	1	1	2
Disco 1	1	1	2	4

Tabela 7: Número de vezes que os discos 1, 2 e 3 ocupam os pinos

$$A_{3,3} = 0, B_{3,3} = 0 \text{ e } C_{3,3} = 1.$$
$$A_{3,2} = 0, B_{3,2} = 1 \text{ e } C_{3,2} = 1.$$
$$A_{3,1} = 1, B_{3,1} = 1 \text{ e } C_{3,1} = 2.$$

Observe que a soma das quantidades das jogadas do disco k em cada pino, resulta na quantidade total de movimentos do disco k, que pelo Teorema 3.3 é 2^{n-k}, ou seja:

$$A_{n,k} + B_{n,k} + C_{n,k} = 2^{n-k}. \tag{3.13}$$

Teorema 3.7. *Considere o jogo com n discos. A quantidade de vezes que o disco k ocupa os pinos A, B e C, respectivamente, durante a solução do jogo é dada por:*

$$\begin{aligned} C_{n,k} &= \frac{2^{n+1-k} + 3 + (-1)^{n+k}}{6}, \\ B_{n,k} &= \frac{2^{n-k} + (-1)^{n+k+1}}{3} \quad e \\ A_{n,k} &= \frac{2^{n+1-k} - 3 + (-1)^{n+k}}{6}. \end{aligned}$$

Para encontrar a fórmula geral que relaciona a quantidade de jogadas em cada pino em função do total de discos n e o número do disco k, devemos analisar novamente a solução do jogo, ou seja, saber a sequência das jogadas de cada disco.

Como os movimentos são cíclicos, então certamente cada disco k deve passar por todos os pinos em sequência. Essa sequência de jogadas, discutida no Seção 2.3, vai depender da paridade da quantidade total de discos e do número do disco. Vejamos novamente:

Sejam n a quantidade total de discos e k o número do disco:

(1º caso) Para n e k ímpares:

$$(\underbrace{C, B, A,}_{bloco} \underbrace{C, B, A,}_{bloco} \cdots, A, C)$$

(2º caso) Para n ímpar e k par:

$$(\underbrace{B, C, A,}_{bloco} \underbrace{B, C, A,}_{bloco} \cdots, B, C)$$

(3º caso) Para n par e k ímpar:

$$(\underbrace{B, C, A,}_{bloco} \underbrace{B, C, A,}_{bloco} \cdots, B, C)$$

(4º caso) Para n e k pares:

$$(\underbrace{C, B, A,}_{bloco} \underbrace{C, B, A,}_{bloco} \cdots, A, C).$$

Observando o primeiro caso, temos que a sequência de jogadas dos discos de número ímpar obedece à sequência (C, B, A) em blocos de três em três, finalizando com a última jogada em C (tendo assim um bloco incompleto). Logo a quantidade de jogadas para o pino C terá uma jogada a mais em relação ao pinos A e B, e consequentemente, a quantidade de jogadas ao pino A e B será o mesmo número, já que ambos pertencem ao mesmo bloco da sequência (C, B, A).

Então, para n e k ímpares, temos que $C_{n,k} = A_{n,k} + 1$ e $A_{n,k} = B_{n,k}$, substituindo na equação (3.13), temos:

$$\begin{aligned} C_{n,k} - 1 + C_{n,k} - 1 + C_{n,k} &= 2^{n-k} \\ \Rightarrow 3 \cdot C_{n,k} - 2 &= 2^{n-k} \\ \Rightarrow 3 \cdot C_{n,k} &= 2^{n-k} + 2 \\ \Rightarrow C_{n,k} &= \frac{2^{n-k} + 2}{3}. \end{aligned}$$

Portanto, a quantidade de jogadas para cada pino em função do total n de discos e para um disco k ímpar é dada por:

$$A_{n,k} = \frac{2^{n-k}-1}{3}, \quad B_{n,k} = \frac{2^{n-k}-1}{3} \quad e \quad C_{n,k} = \frac{2^{n-k}+2}{3}.$$

Agora analisamos o segundo caso, onde n é ímpar e o número do disco k par. O bloco de jogadas para os pinos A, B e C muda, como vimos no Seção 2.3, a sequência de jogadas passar a ser (B, C, A). Como o último bloco termina em A e o jogo finaliza no pino C, então teremos um bloco incompleto (B, C), isso nos dá que a quantidade de jogadas para o pino C será igual ao pino B. Assim sendo, $C_{n,k} = B_{n,k}$ e $C_{n,k} = A_{n,k} + 1$, substituindo na equação (3.13), temos:

$$\begin{aligned} C_{n,k} - 1 + C_{n,k} + C_{n,k} &= 2^{n-k} \\ \Rightarrow 3 \cdot C_{n,k} - 1 &= 2^{n-k} \\ \Rightarrow 3 \cdot C_{n,k} &= 2^{n-k} + 1 \\ \Rightarrow C_{n,k} &= \frac{2^{n-k}+1}{3}. \end{aligned} \tag{3.14}$$

À vista disso, as fórmulas para os pinos A, B e C, caso n ímpar e k par, são:

$$A_{n,k} = \frac{2^{n-k}-2}{3}, \quad B_{n,k} = \frac{2^{n-k}+1}{3} \quad e \quad C_{n,k} = \frac{2^{n-k}+1}{3}.$$

Ao invés de apresentar muitas fórmulas para cada caso, podemos apresentar uma Fórmula geral. A única diferença entre as expressões do primeiro e do segundo caso está apenas na segunda parcela do numerador.

Vamos fixar esse problema na fórmula do pino C. Como foi citado no parágrafo anterior, a única diferença entre as fórmulas está na segunda parcela do numerador:

$$C_{n,k} = \frac{2^{n-k}+2}{3} \quad e \quad C_{n,k} = \frac{2^{n-k}+1}{3}. \tag{3.15}$$

Quando k é ímpar, a segunda parcela do numerador é 2. Quando k é par, a segunda parcela do numerador é 1, gerando a subsequência $(2, 1, 2, 1, 2, \cdots)$, cujo termo geral é

$$\frac{3 + (-1)^{k+1}}{2}. \tag{3.16}$$

Substituindo (3.16) em (3.15) obtemos:

$$\begin{aligned} C_{n,k} &= \frac{2^{n-k} + \dfrac{3+(-1)^{k+1}}{2}}{3} \\ \Rightarrow C_{n,k} &= \frac{\dfrac{2\cdot 2^{n-k}}{2} + \dfrac{3+(-1)^{k+1}}{2}}{3} \\ \Rightarrow C_{n,k} &= \frac{\dfrac{2^{n+1-k}+3+(-1)^{k+1}}{2}}{3} \\ \Rightarrow C_{n,k} &= \frac{2^{n+1-k}+3+(-1)^{k+1}}{6}. \end{aligned} \tag{3.17}$$

Para a fórmula do pino B, vamos usar a mesma ideia.

$$B_{n,k} = \frac{2^{n-k} - 1}{3} \quad e \quad B_{n,k} = \frac{2^{n-k} + 1}{3}. \tag{3.18}$$

Quando k é ímpar, a segunda parcela do numerador é -1. Quando k é par, a segunda parcela do numerador é 1, gerando a subsequência $(-1, 1, -1, 1, -1, \cdots)$, cujo termo geral é

$$(-1)^k. \tag{3.19}$$

Substituindo (3.19) em (3.18) obtemos:

$$B_{n,k} = \frac{2^{n-k} + (-1)^k}{3}. \tag{3.20}$$

De maneira análoga, a fórmula para o pino A será:

$$A_{n,k} = \frac{2^{n+1-k} - 3 + (-1)^{k+1}}{6}. \tag{3.21}$$

As fórmulas (3.17), (3.20) e (3.21) são válidas apenas quando o total de discos n for ímpar, independentemente da paridade de k. Nos resta agora analisar os casos 3 e 4 quando n é par.

Sendo n par e k ímpar, as sequências de jogadas para os pinos segue a sequência $(B, C, A, B, C, A, \cdots, B, C)$. Logo a quantidade de jogadas para o pino C e B serão iguais e terão uma jogada a mais em relação ao pino A. Então obtemos:

$$\begin{aligned} C_{n,k} - 1 + C_{n,k} + C_{n,k} &= 2^{n-k} \\ \Rightarrow 3 \cdot C_{n,k} - 1 &= 2^{n-k} \\ \Rightarrow 3 \cdot C_{n,k} &= 2^{n-k} + 1 \\ \Rightarrow C_{n,k} &= \frac{2^{n-k} + 1}{3}. \end{aligned} \tag{3.22}$$

Comparando com a Equação (3.14), esta só será válida quando o n é par.

Para o quarto caso (n e k sendo pares) vamos usar o mesmo argumento anterior. A equação da quantidade de jogadas para o pino C será:

$$C_{n,k} = \frac{2^{n-k} + 2}{3}. \tag{3.23}$$

Comparando as equações (3.23) e (3.22), houve apenas uma mudança na ordem da segunda parcela do numerador, isso porque dependia da paridade da quantidade total de discos n. Agora observando apenas a segunda parcela do numerador das equações (3.23) e (3.22), teremos a sequência $(1, 2, 1, 2, 1, \cdots)$, cuja lei de formação é $\dfrac{3 + (-1)^k}{2}$. Substituindo-a tanto na equação (3.23) ou (3.22) teremos:

$$C_{n,k} = \frac{2^{n+1-k} + 3 + (-1)^k}{6}. \tag{3.24}$$

Agora vamos comparar as equações (3.17) e (3.24):

$$C_{n,k} = \frac{2^{n+1-k} + 3 + (-1)^{k+1}}{6} \quad e \quad C_{n,k} = \frac{2^{n+1-k} + 3 + (-1)^k}{6}.$$

A única diferença está na terceira parcela do numerador. Na primeira fórmula temos $(-1)^{k+1}$ (quando n é ímpar), já na segunda fórmula temos $(-1)^k$ (quando n é par). Se pensarmos em termos de n, obteríamos uma sequência $(-(-1)^k, (-1)^k, -(-1)^k, (-1)^k, \cdots)$ cujo o termo geral é $(-1)^n(-1)^k = (-1)^{n+k}$. Então podemos substituir essa sequência em qualquer uma das equações do pino C. Portanto, as três fórmulas para obtenção da quantidade de jogadas para os pinos em função do disco k com n discos no total são:

$$C_{n,k} = \frac{2^{n+1-k} + 3 + (-1)^{n+k}}{6}, \tag{3.25}$$

$$B_{n,k} = \frac{2^{n-k} + (-1)^{n+k+1}}{3} \quad e \tag{3.26}$$

$$A_{n,k} = \frac{2^{n+1-k} - 3 + (-1)^{n+k}}{6}. \tag{3.27}$$

Agora demonstraremos por Indução Matemática.

Demonstração. Usaremos Indução Matemática, primeiro mostraremos que as três fórmulas anteriores são verdadeiras para $n = 1$; por hipótese de indução suporemos que são verdadeiras para um n qualquer, e mostraremos valem para $n + 1$ discos, isto é,

$$\begin{aligned} A_{n+1,k} &= \frac{2^{n+2-k} - 3 + (-1)^{n+k+1}}{6} \\ B_{n+1,k} &= \frac{2^{n+1-k} + (-1)^{n+k+2}}{3} \quad \text{e} \\ C_{n+1,k} &= \frac{2^{n+2-k} + 3 + (-1)^{n+k+1}}{6}. \end{aligned}$$

Para $n = 1$, temos que $k = 1$, e

$$\begin{aligned} A_{1,1} &= \frac{2^{1+1-1} - 3 + (-1)^{1+1}}{6} = 0 \\ B_{1,1} &= \frac{2^{1-1} + (-1)^{1+1+1}}{3} = 0 \\ C_{1,1} &= \frac{2^{1+1-1} + 3 + (-1)^{1+1}}{6} = 1. \end{aligned}$$

Logo, as três fórmulas valem para $n = 1$.

Suponha que sejam válidas para n discos, e vamos provar que valem para $n + 1$ discos. Para movermos $n+1$ discos para o pino C, primeiro movemos os n discos menores para o pino B, o maior disco para o pino C, e por último os n discos que estão em B para C também.

Observe que $A_{n,k}$ é a quantidade de vezes que o disco k passa por A ao movermos a pilha de n discos de A para C. Assim, $A_{n,k}$ é também a quantidade de vezes que o disco k passa por B ao movermos a pilha de n discos de B para C. Como $B_{n,k}$ é a quantidade de vezes que o disco k passa por B ao mover a pilha de n discos de A para C, $B_{n,k}$ é também a quantidade de vezes que o disco k passa por C ao mover a pilha de n discos de A para B. Seguindo o raciocínio, $C_{n,k}$ é a quantidade de vezes que o disco k se movimenta para o pino C ao transferirmos os n discos de A para C, e é também a quantidade de vezes que o mesmo disco k passa por B ao movermos os n discos de A para B.

Para sabermos quantas vezes um disco k se movimentará para o pino A durante esse processo de transferir $n+1$ discos de A para C, calculamos quantas vezes ele se move para A ao colocarmos os n discos em B e somamos às quantidades de vezes que se move em A para transferir os n discos de B para C: $A_{n+1,k} = A_{n,k} + B_{n,k}$. Da mesma forma, $B_{n+1,k} = A_{n,k} + C_{n,k}$ e $C_{n+1,k} = B_{n,k} + C_{n,k}$.

Assim, se as fórmulas valem para n, podemos mostrar que valem para $n+1$.

$$
\begin{aligned}
A_{n+1,k} &= A_{n,k} + B_{n,k} \\
&= \frac{2^{n+1-k} - 3 + (-1)^{n+k}}{6} + \frac{2^{n-k} + (-1)^{n+k+1}}{3} \\
&= \frac{2^{n+1-k} - 3 + (-1)^{n+k}}{6} + \frac{2 \cdot 2^{n-k} + 2 \cdot (-1)^{n+k+1}}{6} \\
&= \frac{2^{n+1-k} - 3 + (-1)^{n+k}}{6} + \frac{2^{n+1-k} + 2 \cdot (-1)^{n+k+1}}{6} \\
&= \frac{2 \cdot 2^{n+1-k} - 3 - (-1)^{n+k}}{6} \\
&= \frac{2^{n+2-k} - 3 - (-1)^{n+k+1}}{6}.
\end{aligned}
$$

De modo análogo obtemos

$$
\begin{aligned}
B_{n+1,k} &= A_{n,k} + C_{n,k} \\
&= \frac{2^{n+1-k} - 3 + (-1)^{n+k}}{6} + \frac{2^{n+1-k} + 3 + (-1)^{n+k}}{6} \\
&= \frac{2 \cdot 2^{n+1-k} + 2 \cdot (-1)^{n+k}}{6} \\
&= \frac{2^{n+1-k} + (-1)^{n+k}}{3}.
\end{aligned}
$$

E também

$$
\begin{aligned}
C_{n+1,k} &= B_{n,k} + C_{n,k} \\
&= \frac{2^{n-k} + (-1)^{n+k+1}}{3} + \frac{2^{n+1-k} + 3 + (-1)^{n+k}}{6} \\
&= \frac{2 \cdot 2^{n-k} + 2 \cdot (-1)^{n+k+1}}{6} + \frac{2^{n+1-k} + 3 + (-1)^{n+k}}{6} \\
&= \frac{2^{n+2-k} + 3 + (-1)^{n+k+1}}{6}.
\end{aligned}
$$

Para concluir, vamos verificar que $A_{n,k} + B_{n,k} + C_{n,k} = 2^{n-k}$, pois essa soma corresponde ao total de vezes que o disco k passou pelos pinos A, B e C, respectivamente, logo ela vale o total de movimentos do disco k, que é 2^{n-k}.

$$\begin{aligned} A_{n,k} + B_{n,k} + C_{n,k} &= \frac{2^{n+1-k} - 3 + 2^{n+1-k} + 2^{n+1-k} + 3 + 2(-1)^{n+k} + 2(-1)^{n+k+1}}{6} \\ &= \frac{3 \cdot 2^{n+1-k} + 2(-1)^{n+k} + 2(-1)^{n+k+1}}{6} \\ &= \frac{3 \cdot 2^{n+1-k}}{6} \\ &= \frac{2^{n+1-k}}{2} \\ &= 2^{n-k}. \end{aligned}$$

□

Exemplo 3.6. *Considerando o jogo das Torres de Hanói com* 10 *discos, quantas vezes o disco* 1 *foi movido para o pino* C*?*

Solução. Aplicando a fórmula (3.25) obtemos:

$$\begin{aligned} C_{10,1} &= \frac{2^{10+1-1} + 3 + (-1)^{10+1}}{6} \\ &= \frac{1024 + 3 - 1}{6} \\ &= \frac{1026}{6} \\ &= 171. \end{aligned}$$

Logo, o disco 1 foi movido para o pino C 171 vezes.

Exemplo 3.7. *Calcule quantas vezes o disco 4 foi movido para o pino* B *com um jogo de* 6 *discos.*

Solução. Aplicando a fórmula (3.26) obtemos:

$$\begin{aligned} B_{6,4} &= \frac{2^{6-4} + (-1)^{6+4+1}}{3} \\ &= \frac{4 - 1}{3} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Exemplo 3.8. *Calcule quantas vezes o disco 4 foi movido para o pino* A *com um jogo de* 6 *discos.*

Solução. Aplicando a fórmula (3.27) obtemos:

$$
\begin{aligned}
A_{6,4} &= \frac{2^{6+1-4} - 3 + (-1)^{6+4}}{6} \\
&= \frac{8 - 3 + 1}{6} \\
&= 1.
\end{aligned}
$$

4 A Matemática da Ordem de Movimentação das Peças

Qual disco moveremos no sexto movimento num jogo com 3 discos? Esse problema é relativamente elementar, mas e se fosse o centésimo? E o milésimo? Seria possível descobrir qual disco moveremos? Os desafios a seguir são sobre a ordem da movimentação dos discos.

4.1 Sequência de duas variáveis

Considere um jogo com 3 discos. Para vencer o jogo usando a quantidade mínima de movimentos, serão 7 movimentos cuja solução é:

$$S_3 = (1C, 2B, 1B, 3C, 1A, 2C, 1C).$$

A ordem de movimentação do disco menor é $(1^o, 3^o, 5^o, 7^o)$. Vamos chamar de $s_{3,1}$ a sequência da ordem dos movimentos do disco 1, $s_{3,2}$ a sequência da ordem dos movimentos do disco 2 e $s_{3,3}$ a sequência da ordem dos movimentos do disco 3. Assim $s_{3,1} = (1, 3, 5, 7)$, $s_{3,2} = (2, 6)$ e $s_{3,3} = (4)$. Desse modo, $s_{n,k}$ é a sequência da ordem de movimentação do disco k na solução do quebra-cabeça com n discos.

Percebemos que independentemente da quantidade de discos no jogo, o primeiro movimento sempre será do disco 1, em seguida o disco 2, e assim por diante.

Para quatro discos no total, a quantidade de termos da sequência $s_{4,1}$, $s_{4,2}$ e $s_{4,3}$ será dobrada, pois sabemos que pela relação da recorrência (Teorema 3.1) que a quantidade de jogadas sempre será o dobro da anterior, e a sequência $s_{4,4}$ terá apenas um termo, pois representa a maior peça. Veja a Tabela 8 da ordem dos movimentos com 4 discos, onde $d_{n,k}$ representa a quantidade de movimentos de cada disco k para n discos no total.

Observe que a soma de todos os $d_{n,k}$'s é a quantidade mínima de movimentos para vencer o jogo, ou seja, $8 + 4 + 2 + 1 = 15$. A sequência das jogadas do menor disco (disco

disco k	1	2	3	4	5	6	7	8	*total*
disco 1	1	3	5	7	9	11	13	15	8
disco 2	2	6	10	14					4
disco 3	4	12							2
disco 4	8								1

Tabela 8: Ordem de movimentação dos discos com 4 discos no total

1) é uma progressão aritmética de razão 2 com primeiro termo igual a 1 com oito termos; a sequência das jogadas do disco 2 é uma progressão aritmética de razão 4 com primeiro termo igual a 2 com quatro termos; a sequência das jogadas do disco 3 é uma progressão aritmética de razão 8 com primeiro termo 4 com dois termos; disco 4 só tem um termo. Organizando como sequências obtemos:

$$\begin{aligned} s_{4,1} &= (1,3,5,7,9,11,13,15) \\ s_{4,2} &= (2,6,10,14) \\ s_{4,3} &= (4,12) \\ s_{4,4} &= (8). \end{aligned}$$

Além disso, podemos observar outras características. O primeiro movimento de cada disco é em uma jogada de potência de base 2, ou seja, uma progressão geométrica de razão 2 e primeiro termo 1. Acontece o mesmo na segunda coluna da tabela, sendo o primeiro termo 3 e razão 2. De modo geral, se observarmos apenas as linhas, estaremos trabalhando com progressões aritméticas, e se for colunas, então estaremos trabalhando com progressões geométricas. Antes de generalizar sobre a ordem de movimentação dos discos, vamos provar uma propriedade referente ao primeiro movimento de qualquer disco k.

Proposição 4.1. *Seja k um número natural correspondente ao tamanho do disco, então seu primeiro movimento durante a solução do quebra-cabeça será na jogada 2^{k-1}.*

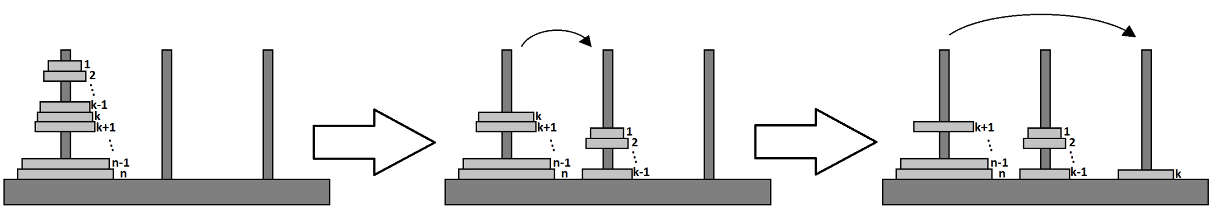


Figura 11: Jogada em que o disco k é movido pela primeira vez

Demonstração. Seja k o disco pertencente à pilha dos n discos, onde $1 \leq k \leq n$. Para mover o disco k, então devemos mover os $k-1$ discos para o pino do meio, o que daria

$2^{k-1}-1$ movimentos, em seguida movemos o disco k para o pino final com 1 movimento, totalizando $2^{k-1}-1+1=2^{k-1}$ movimentos. □

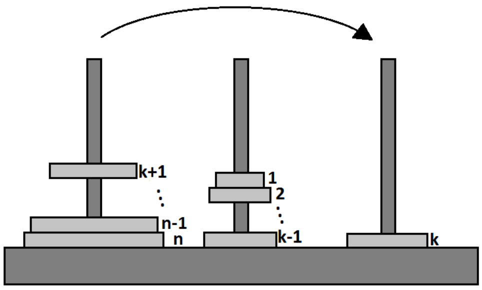


Figura 12: Primeira jogada do disco k

Exemplo 4.1. *Ordem de jogadas dos discos com um total de 5 peças:*

$s_{n,k}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	*total*
$s_{5,1}$	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	16
$s_{5,2}$	2	6	10	14	18	22	26	30									8
$s_{5,3}$	4	12	20	28													4
$s_{5,4}$	8	24															2
$s_{5,5}$	16																1

Tabela 9: Ordem de movimentação dos discos com 5 discos no total

Proposição 4.2. *Considere uma Torre de Hanói com n discos. Seja $o_{k,p}$ o número da jogada em que o disco k será movido pela p-ésima vez. Fixado $k \leq n$, $(o_{k,p})$ é uma progressão aritmética de razão 2^k e $o_{k,1}=2^{k-1}$.*

Demonstração. Vimos na Proposição 4.1 que o disco k será movido pela primeira vez na jogada 2^{k-1}, logo $o_{k,1}=2^{k-1}$. A configuração do jogo após o primeiro movimento do disco k está na terceira torre da Figura 13. Continuando a solução do quebra-cabeça, transferimos os $k-1$ discos menores que estão em B para o pino C, colocando-os em cima do disco k usando $2^{k-1}+2^{k-1}-1=2^k-1$ movimentos. Agora, o único movimento possível do jogo será mover o disco $k+1$ para o pino intermediário com um movimento, resultando em $2^k-1+1=2^k$ movimentos. Por fim, os $k-1$ discos devem ir para o pino inicial, pois o disco k precisará ir ao pino intermediário, com $2^k+2^{k-1}-1$ movimentos. Sendo assim, o disco k ficará livre para ir para o pino intermediário com um movimento, gerando um total de $2^k+2^{k-1}-1+1=2^k+2^{k-1}$ movimentos (o segundo movimento do disco k será na jogada 2^k+2^{k-1} e a última torre da Figura 13 representa o segundo movimento do disco k). Logo, $o_{k,1}=2^{k-1}$ e $o_{k,2}=2^k+2^{k-1}$.

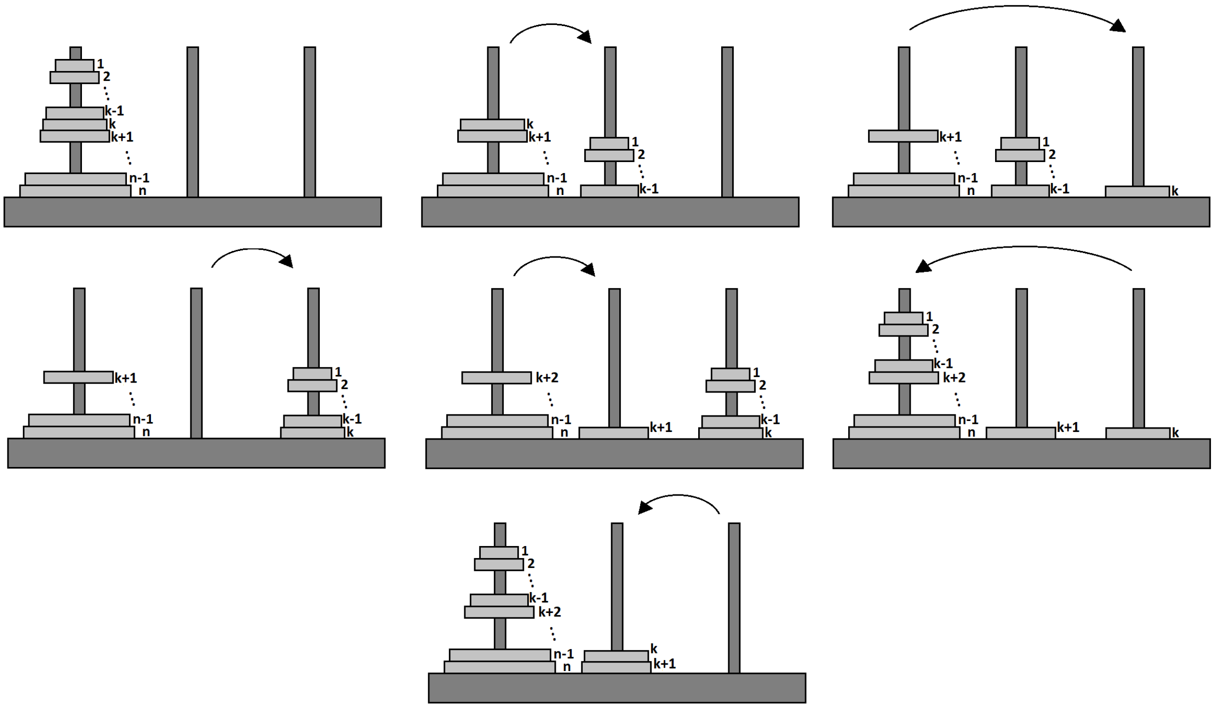


Figura 13: Ordem dos movimentos do disco k

O terceiro movimento do disco k ocorrerá após transferirmos os $k-1$ discos menores para cima do disco k, ou seja, para o pino B, o disco $k+2$ para o C (único movimento possível), para transferir os discos que estão em B para C, primeiro os $k-1$ discos menores vão para C e então o disco k será movido para A, totalizando $2^{k-1} - 1 + \underbrace{1}_{disco\ k+2} + 2^{k-1} - 1 + \underbrace{1}_{disco\ k} = 2^k$ movimentos, logo, $o_{k,3} = o_{k,2} + 2^k$, e $o_{k,3} - o_{k,2} = 2^k$.

Suponha que após certo movimento do disco k, este se encontra no pino A sobre discos maiores que ele. Segundo a Seção 3.3, se n e k tiverem a mesma paridade, então a ordem de movimentação do disco k nos pinos será (C, B, A). Caso tenham paridades distintas, então a ordem muda para (B, C, A). Suponha que n e k tenham a mesma paridade, então se o disco k foi movido para o pino A, ele necessariamente veio do pino B. Os $k-1$ discos menores estão em C sobre um certo disco $k+m$, caso contrário seria impossível mover o disco k de acordo com as regras do jogo. Vamos contar quantos movimentos serão necessários até o próximo movimento do disco k. Os próximos e únicos possíveis passos são transferir os $k-1$ menores discos do pino C para cima do disco k, usando $2^{k-1} - 1$ movimentos. Após esses movimentos, só haverá um único movimento possível no jogo usando os discos dos pinos B ou C, suponha que seja o disco $k+p$ a ser movido para o pino C, onde $0 < p, t, m \leq n-k$ e $p \leq m$. O disco k veio do pino B e está em A, logo seu próximo movimento deve ser para o pino C, para isso movemos novamente os $k-1$ menores discos para B, e o disco k para o pino C (únicos movimentos possíveis também). Totalizando $2^{k-1}-1+\underbrace{1}_{disco\ k+p}+2^{k-1}-1+\underbrace{1}_{disco\ k}=2^k$ movimentos.

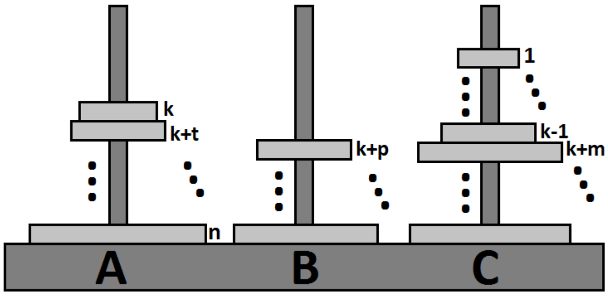


Figura 14: Configuração da Torre após mover o disco k

Outra hipótese é que após certo movimento do disco k, este se encontra no pino B sobre discos maiores que ele. Suponha que n e k têm mesma paridade, então o disco k veio do pino C, foi movido para B e seu próximo destino é o pino A. Desse modo, os $k-1$ discos menores estão em A, e o próximo movimento será transferi-los para B, em cima do disco k, usando $2^{k-1}-1$ movimentos. Após esse movimento, só haverá um único movimento possível no jogo usando os discos dos pinos A ou C, suponha que seja o disco $k+p$ a ser movido, onde $0<p\leq n-k$. Logo a seguir, para colocarmos o disco k no pino A, movemos novamente os $k-1$ menores discos para C, e então o disco k para o pino A. Como no caso anterior, temos 2^k movimentos necessários para o próximo movimento do disco k.

Para concluir a prova, após certo movimento do disco k, este se encontra no pino C. Se n e k têm mesma paridade, o disco k veio do pino A e os $k-1$ discos menores estão em B. O próximo movimento será transferir os $k-1$ menores discos do pino B, para o pino C. Após esse movimento, só haverá um único movimento possível no jogo usando um dos discos dos pinos A ou B, suponha que seja o disco $k+p$ a ser movido, onde $0<p\leq n-k$. Logo a seguir, movemos novamente os $k-1$ menores discos para A, e o disco k para o pino B. Analogamente aos casos mencionados, realizamos 2^k movimentos. O caso n e k com paridades distintas é semelhante a esses.

□

Teorema 4.1. *Considere uma torre com n discos. O disco movido na i-ésimo jogada será o disco k obtido ao reescrever i na forma $(2p-1)\cdot 2^{k-1}$, onde p será o número de vezes que o disco k foi movido.*

Demonstração. Como $(o_{k,p})$ é uma progressão aritmética de razão 2^k, temos que $o_{k,p}=$

$o_{k,1} + (p-1) \cdot 2^k$ é o seu termo geral. Logo,

$$\begin{aligned} o_{k,p} &= 2^{k-1} + (p-1) \cdot 2^k \\ \Rightarrow o_{k,p} &= (2p-2+1) \cdot 2^{k-1} \\ \Rightarrow o_{k,p} &= (2p-1) \cdot 2^{k-1} \end{aligned} \tag{4.1}$$

□

Acabamos de definir uma sequência numérica com duas variáveis, logo podemos associá-la a uma função de duas variáveis:

$$\begin{aligned} \mathbb{N} \times \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{N} \\ (k, p) &\longmapsto o_{k,p} \end{aligned}$$

Agora, estamos interessados em saber qual peça é movida no i-ésimo movimento. Para isso, temos que resolver a equação

$$(2p-1) \cdot 2^{k-1} = i,$$

isto é, encontrar k e p que a satisfazem. Observamos que $2p-1$ é um número ímpar, então basta fatorar i de modo que tenhamos um ímpar vezes uma potência de 2.

Como i é um número natural, então o Teorema Fundamental da Aritmética garante a unicidade de p e k (HEFEZ, 2016).

Exemplo 4.2. *Resolvendo as Torres de Hanói com 8 discos, qual disco é movido na 100ª jogada considerando a quantidade mínima de movimentos?*

Resolução: Aplicando na fórmula (4.1) temos:

$$(2p-1) \cdot 2^{k-1} = 100.$$

Como p e k são números naturais, então podemos fatorar 100 e retirar as potências de 2, sendo assim, resolvendo uma equação exponencial:

$$\begin{aligned} (2p-1) \cdot 2^{k-1} &= 100 \\ \Rightarrow (2p-1) \cdot 2^{k-1} &= 25 \cdot 2^2 \end{aligned}$$

Assim, $2p-1 = 25$ e $2^{k-1} = 2^2$, então $p = 13$ e $k = 3$.

Logo, o disco movido na centésima jogada é o disco 3 e o mesmo foi movido 13 vezes.

Exemplo 4.3. *Com 13 discos, qual disco é movido na 4997ª jogada considerando a quantidade mínima de movimentos? Quantas vezes esse discos foi movido?*

Resolução: Aplicando na fórmula (4.1) temos:

$$\begin{aligned}
(2p-1)\cdot 2^{k-1} &= 4997\\
\Rightarrow (2p-1)\cdot 2^{k-1} &= 4997\cdot 2^{0}\\
\Rightarrow 2^{k-1} &= 2^{0}\\
\Rightarrow k-1 &= 0\\
\Rightarrow k &= 1\\
\Rightarrow p &= 2499.
\end{aligned}$$

O disco movido na jogada 4997 foi o 1 e ele foi movido 2499 vezes.

Exemplo 4.4. *Com 10 discos, qual disco é movido na 480ª jogada considerando a quantidade mínima de movimentos? Quantas vezes esse discos foi movido?*

Resolução: Aplicando na fórmula (4.1), temos:

$$\begin{aligned}
(2p-1)\cdot 2^{k-1} &= 480\\
\Rightarrow (2p-1)\cdot 2^{k-1} &= 15\cdot 2^{5}\\
\Rightarrow 2^{k-1} &= 2^{5}\\
\Rightarrow k-1 &= 5\\
\Rightarrow k &= 6\\
\Rightarrow p &= 8.
\end{aligned}$$

O disco movido na jogada 480 foi o 6 e ele foi movido 8 vezes.

4.2 Números Binários

Segundo (PEREIRA; RODRIGUES, 2003) na revista Gazeta de Matemática, uma outra maneira de descobrir o disco que será movido na i-ésima jogada é a partir dos números binários.

Primeiramente devemos transformar o número da jogada na forma decimal em binário. Por exemplo, vamos tentar descobrir qual disco é movido na jogada 26: o número 26_{10}

em binário é 11010_2. Para identificar o disco movido, bastar olharmos o primeiro dígito 1 mais à direita:

$$11010.$$

Como o primeiro dígito 1 mais à direita aparece na segunda posição do número binário, de trás para frente, então de acordo com o Teorema 4.2, que vemos mais adiante, o disco 2 será movimentado na jogada 26.

Chamamos de S_n a sequência dos movimentos dos n discos, mas para facilitar a escrita não colocaremos as letras que representam os pinos. Para $n = 2$,

$$S_2 = (1 \quad 2 \quad 1).$$

A sequência acima nos diz que a primeira jogada é com o disco 1, a segunda com o disco 2 e a terceira com o disco 1. Transformando o número da jogada em binário teremos:

$$\begin{aligned} 1_{10} &= 1_2 \\ 2_{10} &= 10_2 \\ 3_{10} &= 11_2. \end{aligned}$$

Observando o número 1 mais à direta, vemos que ele aparece nas posições 1, 2 e 1, que são exatamente os discos movidos na sequência de jogadas. Para $n = 3$, teremos:

$$S_3 = (1 \quad 2 \quad 1 \quad 3 \quad 1 \quad 2 \quad 1).$$

Transformando todos os números das jogadas em binários teremos:

$$\begin{aligned} 1_{10} &= 1_2 \\ 2_{10} &= 10_2 \\ 3_{10} &= 11_2. \\ 4_{10} &= 100_2 \\ 5_{10} &= 101_2 \\ 6_{10} &= 110_2. \\ 7_{10} &= 111_2 \end{aligned}$$

Mais uma vez, observando a posição do número 1 mais à direita, vemos que ele ocupa as posições 1,2,1,3,1,2,1, em ordem da primeira jogada à sétima jogada, que é exatamente os discos movidos nas jogadas.

Definição 4.1. Chama-se *concatenação* das sequências $a = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$ e $b = (b_1, b_2, \cdots, b_m)$ à sequência $a \cdot b = (a_1, a_2, \cdots, a_n, b_1, b_2, \cdots, b_m)$.

Usando essa notação, podemos escrever $S_n = S_{n-1} \cdot (n) \cdot S_{n-1}$, pois primeiro movemos os $n-1$ discos para o pino do meio, em seguida movemos o disco n para o pino final e, por fim, movemos novamente os $n-1$ discos para o pino final. Pela Proposição 3.4, S_n tem $2^n - 1$ termos. Com base nisso, podemos anunciar o próximo resultado.

Teorema 4.2. *Seja S_n a sequência das jogadas da solução do quebra cabeças com n discos. O disco que será movido na i-ésima jogada será o número da posição do dígito 1 mais à direita na representação binária de i.*

Demonstração. Sabemos que o teorema vale para sequência S_2 e S_3, como mostrado anteriormente. Suponha, por indução, que o teorema valha para n discos, ou seja, para $1 \leq i \leq 2^n - 1$, a posição do 1 mais à direta na representação binária de i indicará o disco movido no $i-$ésimo movimento da solução do jogo com n discos.

Para $n+1$ discos, temos a concatenação

$$S_{n+1} = S_n \cdot (n+1) \cdot S_n. \tag{4.2}$$

Se $i \leq 2^n - 1$, estamos nos primeiros movimentos antes de movermos o disco $n+1$, isto é, na primeira parte da concatenação, e pela hipótese de indução o teorema vale.

Se $i = 2^n$, então estamos no movimento do disco $n+1$ e a representação binária

$$2^n = (1\underbrace{000\cdots0}_{n\ zeros})_2,$$

o número 1 ocupa a posição $n+1$, logo é o disco movido.

Se $2^n < i \leq 2^{n+1} - 1$, ou seja, $i = 2^n + k$, para $1 \leq k \leq 2^n - 1$, então estamos na última parte da concatenação e o primeiro 1 mais a direita na representação binária de i será determinado por k. Por hipótese de indução e por (4.2), a posição do 1 determinará a peça movida.

□

Exemplo 4.5. *Com 12 discos no total, qual disco é movido na jogada 2200?*

Resolução. O número $2200_{10} = 100010011000_2$, e primeiro dígito 1 mais a direita está na posição 4. Portanto, a jogada 2200 será movido pelo disco 4.

4.3 Resto de divisão

Já sabemos responder qual disco é movido numa jogada qualquer e quantas vezes esse mesmo disco foi movido, nesta seção exploramos em qual pino esse disco se encontra na p-ésima jogada, ou seja, se está no pino A, B ou C.

Fenômenos que envolvem períodos cíclicos, geralmente recorremos a funções trigonométricas, porém podemos utilizar ferramentas matemáticas mais simples, como por exemplo resto de divisão.

Quando dividimos um número natural por k, podemos obter k restos possíveis: $r(k) = \{0, 1, 2, \cdots, k-1\}$. No jogo Torres de Hanói, quando fixamos um certo disco, percebemos que os seus movimentos em relação aos pinos é cíclico. Primeiro vamos estudar o caso que o número total de discos é ímpar. Vejamos a solução com três discos:

$$S_3 = (1C, 2B, 1B, 3C, 1A, 2C, 1C).$$

Vimos na Seção 2.3 que a sequência de movimentos do menor disco em relação aos pinos no caso da quantidade total de discos ser ímpar é $(C, B, A, C, B, A, ..., C)$. Veja que a sequência apresenta três termos: C, B e A, sempre nessa ordem. Então para descobrir em qual pino um certo disco se encontra, devemos saber a quantidade de movimentos realizadas com esse disco, dividir por 3 e observar o seu resto. Na tabela a seguir temos um resumo para o disco k sendo ímpar ou par.

	n ímpar	e	k ímpar	n ímpar	e	k par
Pino	C	B	A	B	C	A
Resto	1	2	0	1	2	0

Exemplo 4.6. *Com 7 discos no total e ao realizarmos 13 movimentos com o menor disco, em qual pino esse disco se encontra?*

Resolução: Dividindo 13 por 3, temos:

$$13 = 3 \cdot 4 + 1.$$

Ou seja, o disco 1 se encontra no pino C.

Exemplo 4.7. *Com 13 discos no total e ao realizarmos 125 movimentos com o disco 3, em qual pino esse disco se encontra?*

Resolução: Dividindo 125 por 3, temos:

$$125 = 3 \cdot 41 + 2.$$

Portanto, o disco 3 se encontra no pino B

Exemplo 4.8. *Com 13 discos no total e ao realizarmos 221 movimentos com o disco 2, em qual pino esse disco se encontra?*

Resolução: Dividindo 221 por 3, temos:

$$221 = 3 \cdot 73 + 2.$$

Portanto, o disco 2 se encontra no pino C.

Agora vejamos os casos onde o total de discos é par. Observe a solução com 4 discos no total:

$$S_4 = (1B, 2C, 1C, 3B, 1A, 2B, 1B, 4C, 1C, 2A, 1A, 3C, 1B, 2C, 1C).$$

Nessa situação a tabela de restos inverte. Os discos de número ímpar seguem a sequência $(B, C, A, \cdots, C)$ e os discos de número par seguem a sequência $(C, B, A, \cdots, C)$.

De modo resumido, temos:

	n par	e	k ímpar	n par	e	k par
Pino	B	C	A	C	B	A
Resto	1	2	0	1	2	0

Exemplo 4.9. *Com 20 discos no total e ao realizarmos 201 movimentos com o disco 10, em qual pino esse disco se encontra?*

Resolução: Dividindo 201 por 3, temos:

$$201 = 3 \cdot 67 + 0.$$

Portanto, o disco 10 se encontra no pino A.

Exemplo 4.10. *Com 10 discos no total e ao realizarmos 358 movimentos com o disco 1, em qual pino esse disco se encontra?*

Resolução: Dividindo 221 por 3, temos:

$$358 = 3 \cdot 119 + 1.$$

Logo, o disco 1 se encontra no pino B.

4.4 Função Parte Inteira e Configuração geral da Torre após parar na i-ésima jogada

Definição 4.2. Chama-se função parte inteira de x, o maior inteiro menor ou igual a x, denota-se por $f(x) = \lfloor x \rfloor$.

Exemplo 4.11. *Alguns casos de função parte inteira.*

$$\begin{array}{lll} \lfloor 2,6 \rfloor = 2; & \lfloor \pi \rfloor = 3; & \lfloor e \rfloor = 2 \\ \left\lfloor \dfrac{4}{3} \right\rfloor = 1; & \lfloor -\pi \rfloor = -4; & \lfloor -e \rfloor = -3. \end{array}$$

Em outras palavras, a função parte inteira pode ser definida como:

$$\lfloor x \rfloor = max\{z \in \mathbb{Z} \mid z \leq x\}.$$

A partir da função parte inteira e da fórmula (4.1), podemos descobrir a configuração geral da Torre de Hanói após pararmos numa certa jogada, ou seja, podemos responder em quais pinos todos os discos estarão. Para isso, temos que descobrir quantas jogadas foram realizadas para cada disco k, o que podemos determinar a partir da expressão $i = (2p-1) \cdot 2^{k-1}$ e encontrar o valor de p. Vamos isolar p e colocá-lo em função de i e k.

$$\begin{array}{rcl} (2p-1) \cdot 2^{k-1} & = & i \\ \Rightarrow 2p - 1 & = & \dfrac{i}{2^{k-1}} \\ \Rightarrow 2p & = & \dfrac{i}{2^{k-1}} + 1 \\ \Rightarrow p & = & \dfrac{i + 2^{k-1}}{2^k}. \end{array}$$

Por exemplo, até a décima jogada de uma torre com 5 discos, quantas vezes o disco 1 foi movido?

$$p = \frac{10 + 2^{1-1}}{2^1} = 5,5.$$

Como p é um número natural, tomamos a sua parte inteira. Logo, para sabermos quantas jogadas foram realizadas com o disco k após pararmos na i-ésima jogada, calculamos a parte inteira de p, ou seja:

$$p = \left\lfloor \frac{i + 2^{k-1}}{2^k} \right\rfloor . \tag{4.3}$$

Uma vez encontrado o valor de p, em seguida determinamos em qual pino o disco k se encontra (como já discutido na Seção 4.3), dividimos p por 3 e encontramos o seu respectivo resto.

Exemplo 4.12. *Certa pessoa brincando com o jogo Torre de Hanói com 4 discos, realizou alguns movimentos e parou na 10ª jogada, qual a configuração da Torre de Hanói considerando a quantidade mínima de jogadas?*

Solução. $i = 10$ e $1 \leq k \leq 4$.

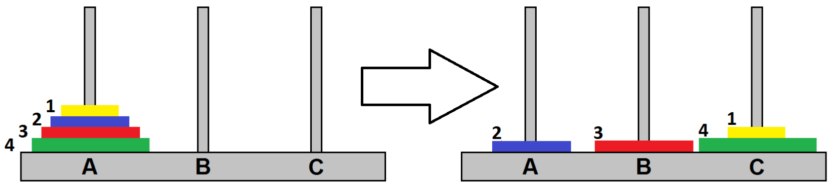


Figura 15: Configuração da Torre com 4 discos

Para o disco 1, temos a sequência (C, B, A), (n par, k ímpar):

$$\begin{aligned} p &= \left\lfloor \frac{10 + 2^{1-1}}{2^1} \right\rfloor = 5 \\ 5 &= 3 \cdot 1 + 2 \\ &\rightarrow \textit{pino}\, C. \end{aligned}$$

Para o disco 2, temos a sequência (B, C, A), (n par, k par):

$$\begin{aligned} p &= \left\lfloor \frac{10 + 2^{2-1}}{2^2} \right\rfloor = 3 \\ 3 &= 3 \cdot 1 + 0 \\ &\rightarrow \textit{pino}\, A. \end{aligned}$$

Para o disco 3, temos a sequência (C, B, A), (n par, k ímpar):

$$\begin{aligned} p &= \left\lfloor \frac{10+2^{3-1}}{2^3} \right\rfloor = 1 \\ 1 &= 3 \cdot 0 + 1 \\ &\rightarrow \textit{pino}\, B. \end{aligned}$$

Para o disco 4, temos a sequência (B, C, A), (n par, k par):

$$\begin{aligned} p &= \left\lfloor \frac{10+2^{4-1}}{2^4} \right\rfloor = 1 \\ 1 &= 3 \cdot 0 + 1 \\ &\rightarrow \textit{pino}\, C. \end{aligned}$$

5 Proposta de Atividade

As atividades a seguir podem ser aplicadas para professores do curso de licenciatura em matemática ou para alunos do ensino básico, desde que seja adaptado.

5.1 Atividade 1 - Quantidade mínima de movimentos

1. Você precisa ensinar esse jogo para outra pessoa que nunca o praticou. Descreva, de forma completa, todas as informações necessárias para se jogar "As Torres de Hanói".

2. Solucione "As Torres de Hanói" com diferentes quantidades de discos utilizando o **menor número possível de movimentos** e registre a solução em cada caso.

a) um disco.

b) dois discos.

c) três discos.

d) quatro discos.

e) cinco discos. **3.** Certa pessoa tentava vencer o jogo com quatro discos e desistiu em certo momento. A Figura 14, a seguir, mostra essa situação.

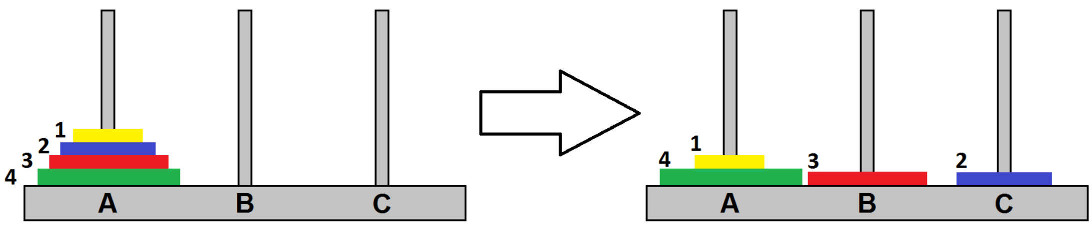


Figura 16: Início e configuração após alguns movimentos

Sabendo que a última peça movimentada foi o disco 1 (amarelo) e considerando a quantidade mínima de movimentos, responda:

a) Qual é a próxima peça a ser movida? Justifique.

b) Quantos movimentos foram realizados e quantos faltam para vencer o jogo?

4. Digamos agora que essa mesma pessoa esteja jogando com 5 discos. Sabe-se que o último disco movido foi o disco 3 (azul). Baseando-se nisso responda:

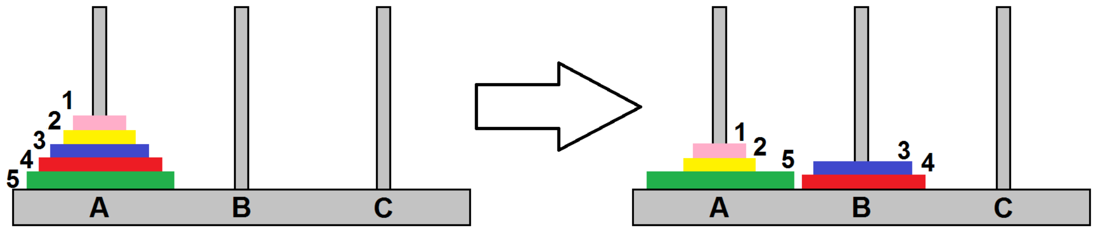


Figura 17: Início com 5 discos e configuração após alguns movimentos

a) Em qual pino o disco 3 estava?

b) Como o último movimento foi do disco 3, qual será o próximo movimento e em qual pino? Justifique.

c) Quantos movimentos foram realizados? Quantos faltam para vencer o jogo?

5. Quantos discos tem a torre cuja solução foi registrada por um aluno da seguinte forma:

$$S_n = (1C, 2B, 1B, 3C, 1A, 2C, 1C, 4B, 1B, 2A, 1A, 3B, 1C, 2B, 1B, 5C, 1A, 2A, 1C,$$

$$3A, 1B, 2A, 1A, 4C, 1C, 2B, 1B, 3C, 1A, 2C, 1C)?$$

Verifique se esse registro realmente representa a solução com o menor número de jogadas. Em caso contrário, identifique o erro.

6. Preencha a tabela abaixo informando qual será a quantidade mínima de jogadas para cada caso:

a)

Nº discos	Quant. mínima de jogadas
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	

b) O jogo teria solução para 8 discos? Em caso afirmativo, qual o número mínimo de jogadas para vencer o jogo? **7.** As grandezas *número de peças e quantidade mínima de movimentos* para resolver o jogo são proporcionais? Por exemplo: se o número de discos dobrar, a quantidade mínima de jogadas também dobrará? Por quê?

8. Na segunda coluna da tabela abaixo, escreva a quantidade mínima de movimentos em função do número t (resolver a equação), após isso, **faça a decomposição em fatores primos de t.**

Nº discos	Quant. mínima de movimentos
1	$1 = t - 1$
2	$3 = t - 1$
3	$7 = t - 1$
4	$15 = t - 1$

9. Das questões 6ª e 8ª, percebe-se que existe relação entre o menor número y possível de jogadas para "vencer o jogo" e o número n de peças ou discos existentes. Mas essas duas grandezas não são proporcionais. A fim de descobrir que relação é essa, pedimos ao grupo que crie uma equação que coloque o número de movimentos y como uma função do número n de discos.

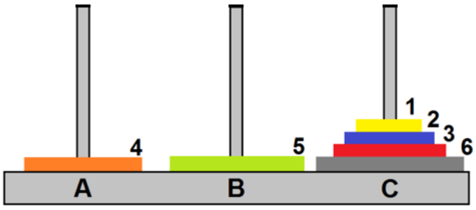
10. Se o jogo tivesse 11 discos, qual seria o primeiro movimento? E se tivesse 12?

11. Em que torre você iniciaria o jogo com um número n de discos?

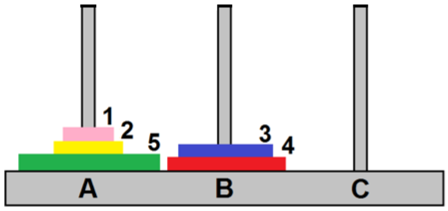
12. A função que relacionado o número de movimentos e o número de discos, é uma função crescente? ou seja, se o número de discos aumentar, o número de movimentos também aumenta?

13. Como seria o gráfico dessa função? A quantidade de discos pode ser representado por um número real? e a quantidade mínima de jogadas também pode ser um número real?

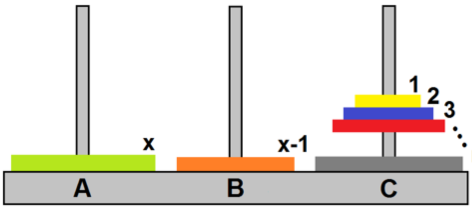
14. Observando os movimentos de um aluno que ganhou o jogo, percebemos que as jogadas onde ele demorava mais tempo para fazer eram aquelas onde a menor peça estava em cima da 2ª menor, a 2ª menor em cima da 3ª e assim por diante de forma que a pilha de discos ficassem consecutiva. Explique sua estratégia geral para mover esta menor peça nessa situação visto que tem sempre duas opções e você precisa escolher uma.



situação 1



situação 2



situação 3

5.2 Atividade 2 - Ordem de movimentação dos discos

1. Solucione "As Torres de Hanói" com 4 discos. Em seguida:

a) Registre a ordem de movimentação de cada disco.

b) Existe um padrão de movimentos para a menor peça? Que padrão é esse?

c) Qual é o padrão de movimentos para os discos 2 e 3? O 4 terá um padrão?

d) Os padrões observados em b) e c) possuem conexão? Qual?

2. Registre a ordem de movimentação de cada peça no jogo com 5 discos. O padrão observado se relaciona com o anterior? De que forma?

3. Na questão anterior, observe os números dos movimentos do 1º disco. Faça o mesmo para o 2º disco e assim por diante. Estes números podem ser associados a algum conteúdo de matemática? Qual?

4. Das tabelas geradas nas questões 1 e 2, faça uma tabela mostrando a quantidade de movimentos realizada com cada peça em cada caso.

5. Cada coluna dessa tabela da questão anterior forma progressões geométricas com razão 2 e primeiro termo 1. Se para a quantidade total de discos for atribuída a letra n e para o número de cada disco a variável k, podemos escrever a tabela anterior em função dessas variáveis. Reconstrua a tabela anterior colocando-a em função dessas variáveis n e k.

6. Como queremos saber a quantidade mínima total de movimentos gastos no jogo para mover n discos, basta somar os elementos de uma mesma coluna. Como se trata de uma progressão geométrica, use a fórmula da soma dos termos de uma progressão geométrica com razão 2, primeiro termo 1 e n termos para obter o valor dessa soma.

7. Observe que o 1º movimento de cada disco é uma potência de base 2. Faça, de 1 a 6 discos, uma tabela mostrando o número do disco e o primeiro movimento feito com tal disco.

8. A partir da tabela da questão anterior, qual será então uma estimativa para o 1º movimento do disco genérico k?

9. Observe que a razão de cada sequência é uma potência de base 2. Faça uma tabela mostrando o número do disco e a razão dos movimentos desse disco.

10. A partir da tabela da questão anterior, qual será a estimativa para a razão da sequência do disco genérico k?

11. Observe que a quantidade de termos de cada sequência é uma potência de base 2. Faça uma tabela mostrando o número do disco e a quantidade de movimentos desse disco.

12. A partir da tabela da questão anterior, qual será então uma estimativa da quantidade de termos da sequência do disco genérico k de uma quantidade total de n discos?

13. As sequências de cada disco da 3ª questão possuem uma fórmula de termo geral de uma progressão aritmética. Usando os resultados genéricos das questões 6, 8 e 10 que fornecem, respectivamente, o 1º termo, a razão e a quantidade de termos das sequências, podemos substituir essas informações na fórmula do termo geral da progressão aritmética. Escreva, para uma torre com 7 discos, os termos gerais das sequências do disco 2 e do 5.

14. Aumentando o grau de generalização, é possível encontrar o i-ésimo movimento de um disco qualquer k de uma torre com n discos! Encontre uma expressão matemática que expresse a relação entre um i-ésimo movimento geral dos discos da torre em função do p-ésimo movimento de um disco genérico k.

15. Usando novamente o registro feito na 3ª questão para o jogo com 6 discos, forme uma sequência com o 1º movimento de todos os discos, uma outra com o 2º movimento dos discos que o possuem até o quarto movimento. Estas sequências podem ser associados a algum conteúdo de matemática? Qual?

16. Considerando uma torre com cinco discos, qual disco será movido no movimento de número 20? **17.** Que movimento geral corresponde ao quarto movimento do disco 4 num total de 6 discos? E o quarto movimento do disco 4 num total de 5 discos também é possível? Por quê?

6 Considerações finais

Diante do trabalho apresentado, percebemos que as Torres de Hanói possuem uma alta conexão com a Matemática. Podemos explorar diversos assuntos como: Recorrência, Indução Matemática, sequências numéricas, funções, progressões geométricas, progressões aritméticas, números binários, resto de divisão e outros.

Há vários tipos de Torres de Hanói como a cíclica, a Dupla e com 4 ou mais pinos. Aqui, tratamos da Torre de Hanói com 3 pinos. Estudamos uma função que descrevesse explicitamente a menor quantidade de movimentos necessários para vencer o quebra-cabeça, quantas vezes cada disco ocupa um dos pinos e a configuração da torre após pararmos em certa jogada.

Outro ponto relevante é que o estudo do jogo proporcionou uma visão metódica e cativante no entendimento da Matemática, principalmente nos tópicos envolvendo as áreas de álgebra, que costuma afastar os alunos da disciplina logo nas séries iniciais por estranharem os objetos algébricos, tendo em vista a dificuldade em generalizar, conjecturar, justificar e encontrar fórmulas que expliquem determinados eventos.

Com base nisso, os alunos podem simplesmente usar palavras para descrever a relação de recorrência da quantidade mínima de movimentos ao invés de escrever uma expressão algébrica. Por isso, o Capítulo 3 trabalha uma modelagem matemática. Então, através dessa investigação, foi estudado e analisado todas as funções matemáticas do ensino básico para explicar o comportamento do jogo e firmar uma única fórmula, que neste trabalho foi a função exponencial. Após afirmar tal relação, tornou-se necessário argumentar através de indução matemática algumas propriedades.

Vale salientar que a teoria pura do jogo a todo momento pode obstruir o conhecimento matemático, por isso que é importante trabalhar também a praticidade, o contato visual e exploração do jogo de diferentes quantidades de peças. Sabemos que a busca e utilização de recursos em sala de aula costuma ser de difícil acesso aos professores do ensino básico. Entretanto, o professor e os alunos podem buscar meios alternativos para construção de Torres de Hanói para a sala de aula.

Ao final, espera-se que este trabalho seja uma das alternativas possíveis de atividades e trabalhos para professores e alunos do curso de licenciatura em Matemática. A partir desse material manipulável, professores podem investigar, analisar e criar situações problemas, de modo que os alunos se sintam instigados a fazerem novas descobertas e formulações, desde que os problemas sejam bem formulados e que o jogo não se transforme em apenas um passatempo.

6.1 Trabalhos futuros

Abaixo está listado algumas recomendações para trabalhos futuros, com foco em descobrir outras propriedades do jogo Torres de Hanói:

- Torre de Hanói com 4 pinos: apesar de apresentar uma solução simples, não há uma fórmula fechada matemática que expresse a quantidade de movimentos em função da quantidade de discos. Um estudo mais detalhado pode mostrar uma possível solução.
- Triângulo de Sierpinski: possui forte ligação com grafos e com as Torres de Hanói cíclica, com um estudo resolução de recorrências, pode-se buscar uma outra expressão matemática que associe ao jogo.
- Novas soluções: as Torres de Hanói podem ser resolvidas de outras maneiras, até mesmo se pensarmos em desperdícios de movimentos padronizados podem apresentar alguns padrões matemáticos interessantes.

Referências

BIEMBENGUT, M. S.; HEIN, N. *Modelagem Matemática no Ensino*. São Paulo: Editora Contexto, 2000.

DUDENEY, H. E. *The Canterbury Puzzles*. New York: New York: E. P. Dutton and co, 1908.

HEFEZ, A. *Aritmética - Coleção PROFMAT*. Rio de Janeiro: SBM, 2016.

LIMA, E. L. et al. *A Matemática do Ensino Médio - vol. 1*. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

LUCAS Édouard. *Récréations Mathématiques*. Paris: Albert Blanchard, 1892.

MORGADO, A. C.; CARVALHO, P. C. P. *Matemática Discreta - Coleção PROFMAT*. Rio de Janeiro: SBM, 2015.

PEREIRA, A.; RODRIGUES, R. O problema das torres de hanoi: a lenda, algoritmos e generalizações. *Gazeta de Matemática*, v. 1, n. 144, p. 10–11, 2003.

SILVA, C. A. D. Projeto de Diplomação, *A Torre de Hanói como Ferramenta Facilitadora do Processo de Ensino-Aprendizagem de Função Exponencial e Resolução de Problemas*. Mossoró, RN, Brasil: [s.n.], jan. 2015.

TORRES, J. M. de L.; ABREU, J. M. de L. A Torre de Hanói: Contexto e Aplicações. In: *Congresso Nacional de Pesquisa e Ensino em Ciências*. [S.l.]: CONAPESC, 2016. p. 2.

APÊNDICE A – Resoluções das atividades

A.1 Resolução - Atividade 1

1. O objetivo é transferir todos os discos de um pino para o outro, de tal forma que um disco maior não pode ficar em cima de um menor. Além disso, apenas um disco pode ser movido por vez.

2. O padrão de registro será o mesmo utilizado neste trabalho.

   a) $S_1 = (1C)$. b) $S_2 = (1B, 2C, 1C)$. c) $S_3 = (1C, 2B, 1B, 3C, 1A, 2C, 1C)$.

   d) $S_4 = (1B, 2C, 1C, 3B, 1A, 2B, 1B, 4C, 1C, 2A, 1A, 3C, 1B, 2C, 1C)$

   e) $S_5 = (1C, 2B, 1B, 3C, 1A, 2C, 1C, 4B, 1B, 2A, 1A, 3B, 1C, 2B, 1B, 5C,$
   $1A, 2C, 1C, 3A, 1B, 2A, 1A, 4C, 1C, 2B, 1B, 3C, 1A, 2C, 1C)$

3. a) Disco 2 (azul) para o pino do meio. b) 5 movimentos

4. a) Pino final. b) Disco 1 (amarelo) para o pino final. c) 12 movimentos foram realizados, $31 - 12 = 19$ movimentos faltam.

5. A solução está incorreta (O erro está na décima oitava jogada, 2A)

6. Resolução preenchida na segunda coluna da tabela abaixo:

Nº discos	Quant. mínima de jogadas
1	1
2	3
3	7
4	15
5	31
6	63
7	127

7. Não. Por exemplo, de 1 para 2 discos, a quantidade de movimentos triplica.

8. Encontrando o valor de t e decompondo-o em fatores primos, temos:

Nº discos	Quant. mínima de movimentos
1	$1 = 2^1 - 1$
2	$3 = 2^2 - 1$
3	$7 = 2^3 - 1$
4	$15 = 2^4 - 1$

9. $y = 2^n - 1$

10. Nos dois casos, queremos transferir todos os discos para o pino final C. Se for 11 discos, então o primeiro movimento será para o pino C. Caso for 12 discos, o primeiro movimento será para o pino B.

11. Se n for ímpar, o primeiro movimento será par ao pino C. Se n for par, o primeiro movimento vai para o pino B.

12. Sim.

13. Como as quantidades de movimentos e número de peças são pertencentes ao conjunto dos números naturais, então o seu gráfico será representado por pontos.

14. Tenho uma pilha com n discos consecutivos. Devo identificar em qual torre está o disco consecutivo ao maior disco dessa pilha de n discos. Ela será a torre destino desta pilha. Assim, se n for ímpar, o menor disco será movido para esta torre destino; caso seja par, o menor disco irá para a outra torre.

A.2 Resolução - Atividade 2

1. a) segue a tabela abaixo:

Nº discos	Número da jogada
1	$(1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15)$
2	$(2, 6, 10, 14)$
3	$(4, 12)$
4	(8)

b) É a primeira peça a ser movimentada e sempre o será de 2 em 2.

c) Para o 2, é a segunda peça a ser movimentada e sempre o será de 4 em 4. Para o 3, é a quarta peça a ser movimentada e sempre o será de 8 em 8.

d) Sim, em todas a frequência de movimentação de uma peça é o dobro da sua posição de movimentação. Admite outras respostas.

2. Segue a tabela abaixo

Nº discos	Número da jogada
1	$(1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 31)$
2	$(2, 6, 10, 14, 18, 22, 26, 30)$
3	$(4, 12, 20, 28)$
4	$(8, 24)$
5	(16)

3. Função polinomial do 1º grau ou progressão aritmética.

4. A resolução da tabela segue abaixo:

Nº Disco	Quantidade de Movimentos		
	6 discos	5 discos	4 discos
1	$32=2^5$	$16=2^4$	$8=2^3$
2	$16=2^4$	$8=2^3$	$4=2^2$
3	$8=2^3$	$4=2^2$	$2=2^1$
4	$4=2^2$	$2=2^1$	$1=2^0$
5	$2=2^1$	$1=2^0$	
6	$1=2^0$		

5. A resolução da tabela segue abaixo:

Nº Disco	Quantidade de Movimentos			
	n = 6 discos	n = 5 discos	n = 4 discos	n qualquer
1	$32=2^{6-1}$	$16=2^{5-1}$	$8=2^{4-1}$	2^{n-1}
2	$16=2^{6-2}$	$8=2^{5-2}$	$4=2^{4-2}$	2^{n-2}
3	$8=2^{6-3}$	$4=2^{5-3}$	$2=2^{4-3}$	2^{n-3}
4	$4=2^{6-4}$	$2=2^{5-4}$	$1=2^{4-4}$	2^{n-4}
5	$2=2^{6-5}$	$1=2^{5-5}$	-	2^{n-5}
6	$1=2^{6-6}$	-	-	2^{n-6}
k	2^{6-k}	2^{5-k}	2^{4-k}	2^{n-k}

6. Aplicando na fórmula de soma de termos de uma progressão geométrica temos:

$$a_n = \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1} = \frac{1 \cdot (2^n - 1)}{2 - 1} = 2^n - 1.$$

7.

Nº Disco	Posição do Primeiro Movimento					
	6 discos	5 discos	4 discos	3 discos	2 discos	1 disco
1	1º	1º	1º	1º	1º	1º
2	2º	2º	2º	2º	2º	-
3	4º	4º	4º	4º	-	-
4	8º	8º	8º	-	-	-
5	16º	16º	-	-	-	-
6	32º	-	-	-	-	-

8. 2^{k-1}

9.

Nº Disco	Razão da P.A.
1	2
2	4
3	8
4	16
5	32
6	64

10. 2^k

11.

Nº Disco	Quantidade de Movimentos		
	6 discos	5 discos	4 discos
1	$32=2^5$	$16=2^4$	$8=2^3$
2	$16=2^4$	$8=2^3$	$4=2^2$
3	$8=2^3$	$4=2^2$	$2=2^1$
4	$4=2^2$	$2=2^1$	$1=2^0$
5	$2=2^1$	$1=2^0$	
6	$1=2^0$		

12. 2^{n-k}

13.

Para o disco 2: $a_{2,p} = 2^{2-1} + (p-1)2^2 = 4p - 2,\ 1 \leq p \leq 32$

Para o disco 5: $a_{5,p} = 2^{5-1} + (p-1)2^5 = 32p - 16,\ 1 \leq p \leq 4$

14.

Para o disco k: $a_{k,p} = a_{k,1} + (p-1)r = 2^{k-1} + (p-1)2^k = (2p-1)2^{k-1}$,

$1 \leq p \leq 2^{n-k}$ e $1 \leq k \leq n$.

15.

1º movimento	1, 2, 4, 8, 16, 32
2º movimento	3, 6, 12, 24, 48
3º movimento	5, 10, 20, 40
4º movimento	7, 14, 28, 56

Sim, com progressões geométricas de razão 2.

16. A partir da fórmula obtida na questão 11, percebemos que ao efetuar a decomposição do número, o expoente da base 2 indicará o antecessor do disco, enquanto o número ímpar restante indicará o antecessor do dobro da frequência que esse disco será movido. Assim, o número $20 = 2^2 \cdot 5$. Como o expoente da base 2 é 2, concluímos se tratar do disco 3 e ele será movido pela terceira vez nesse movimento uma vez que 5 é o antecessor do dobro de 3.

17.

$(2 \cdot 4 - 1)2^{4-1} = 7 \cdot 8 = 56$.

Como a quantidade mínima de movimentos é dado por $2^5 - 1 = 31$, então não é possível determinar o quarto movimento do disco 4, pois este seria movimentado na jogada 56.