UNIVERSIDADE ESTADUAL DE SANTA CRUZ
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS - DCET
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

NORISLEI AVELINO DO NASCIMENTO

GRAFOS E POSSIBILIDADES DE APLICAÇÃO NO ENSINO FUNDAMENTAL

ILHÉUS-BA
2019

NORISLEI AVELINO DO NASCIMENTO

GRAFOS E POSSIBILIDADES DE APLICAÇÃO NO ENSINO FUNDAMENTAL

Dissertação apresentada ao Departamento de Ciências Exatas e Tecnológicas da Universidade Estadual de Santa Cruz, para obtenção de Título de Mestre em Matemática, através do PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional.

Área de concentração: Matemática Básica.

Orientador: Prof. Dr. Vinicius A. T. Arakawa

ILHÉUS - BA

2019

N244 Nascimento, Norislei Avelino do.

Grafos e possibilidades de aplicação no ensino fundamental / Norislei Avelino Nascimento. – Ilhéus, BA: UESC, 2019.

82f. : il.

Orientador: Vinícius A. T. Arakawa.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual de Santa Cruz. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional.

Inclui referências.

1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Teoria dos grafos. 3. Solução de problemas. I. Título.

CDD 510.7

NORISLEI AVELINO DO NASCIMENTO

GRAFOS E POSSIBILIDADES DE APLICAÇÃO NO ENSINO FUNDAMENTAL

Dissertação apresentada ao Departamento de Ciências Exatas e Tecnológicas da Universidade Estadual de Santa Cruz, para obtenção de Título de Mestre em Matemática, através do PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional.

Trabalho aprovado. Ilhéus, 05 de abril de 2019.

Prof. Dr. Vinicius A. T. Arakawa
Orientador – UESC

Prof. Me. André Malvezzi Lopes
UESC

Grasiele C. Jorge

Profa. Dra. Grasiele Cristiane Jorge
UNIFESP - Universidade Federal de São Paulo

ILHÉUS - BA
2019

A Deus pelo dom da vida e pela oportunidade de compartilhar saberes e aprendizados durante toda essa caminhada, pois sem a Sua maravilhosa e misericordiosa mão eu não chegaria a lugar algum.

Agradecimentos

Aos meus pais, Tertuliano e Sirlene, às minhas irmãs, Norma e Norielza, e aos demais familiares pela coragem e incentivo que a mim sempre dedicaram.

Aos meus filhos, Guilherme, Gabriel, Thales e Sophia pela compreensão da distância que por vezes esteve entre nós durante o curso.

À Laudiceia por cuidar sozinha dos nossos filhos nos períodos de ausência.

À todos os meus professores da Educação Básica que contribuíram com a minha formação de base.

À Coordenação e a todos os professores do PROFMAT – UESC.

Ao professor e orientador Dr. Vinícius Augusto Takahashi Arakawa pelo apoio, pela paciência, e acima de tudo, pela compreensão durante todo o curso.

Aos amigos e demais pessoas que contribuíram com essa luta.

Aos colegas de curso Adenilson, Edmilson, Lucas, Marivaldo, Robson, Tamiri, Watila, Eliel e Joelson pelo compartilhamento de aprendizados durante o curso.

À CAPES pela concessão de bolsa contribuindo para a realização do curso.

Enfim, a todos aqueles que mesmo distantes sempre transmitiram boas energias para que pudéssemos concluir com êxito essa grande batalha.

"A principal meta da educação é criar homens que sejam capazes de fazer coisas novas, não simplesmente repetir o que outras gerações já fizeram. Homens que sejam criadores, inventores, descobridores...".

(Jean Piaget)

Resumo

O ensino de Matemática da maneira tradicional, apesar de outrora ter trazido resultados positivos, hoje não é suficiente para atrair crianças e jovens que se encontram nas salas de aula sob nossas responsabilidades. Na perspectiva de trazer uma contribuição para esse desafio diário dos professores da Educação Básica, esse trabalho apresenta possibilidades de inserção da teoria dos grafos no Ensino Fundamental, através da utilização da Resolução de Problemas no ensino de Matemática. São apresentadas atividades na forma de problemas conhecidos do contexto em que os alunos estão inseridos. A proposta apresenta possibilidades a serem aplicadas sempre respeitando os limites e complexidades de cada etapa/modalidade do Ensino Fundamental. Uma das grandes estratégias é incentivar a criatividade, a autonomia, a criticidade na busca de solucionar os problemas apresentados, e por conseguinte, apostar no aprender a fazer, que é um dos pilares da educação. É uma oportunidade de utilizar a teoria dos grafos como ferramenta para estimular os alunos na aprendizagem de Matemática na Educação Básica.

Palavras-chave: Ensino de Matemática. Teoria dos Grafos. Resolução de Problemas.

Abstract

The teaching of mathematics in the traditional way, while once having brought positive results, today is not enough to attract children and young people in classrooms under our responsibilities. In the perspective of contributing to this daily challenge of Basic Education teachers, this work presents possibilities for insertion of Graph Theory in Elementary School through the use of Problem Solving in Mathematics teaching. Activities are presented in the form of known problems of the context in which the students are inserted. The proposal presents possibilities to be applied always respecting the limits and complexities of each stage / modality of Elementary School. One of the great strategies is to encourage creativity, autonomy, criticality in the search to solve the problems presented, and therefore, to bet on learning to do, which is one of the pillars of education. It is an opportunity to use Graph Theory as a tool to stimulate students in learning Mathematics in Basic Education.

Keywords: Mathematics Teaching. Graph Theory. Problem Solving.

Lista de Figuras

Lista de Abreviaturas e Siglas

BNCC	Base Nacional Comum Curricular
CNE	Conselho Nacional de Educação
PCN’s	Parâmetros Curriculares Nacionais
PNATE	Programa Nacional de Apoio ao Transporte do Escolar
PNLD	Programa Nacional do Livro Didático
SAEB	Sistema de Avaliação da Educação Básica

Sumário

Introdução

Na seção que se inicia utilizamos as seguintes referências: [14], [15], [18], [19], [29], [32], [36] e [43].

O ensino de Matemática na Educação Básica tem suscitado grandes preocupações em professores e alunos. Parte delas deve-se ao fato das conotações negativas apresentadas pelos alunos a respeito da disciplina. Essa desmotivação se reflete nos baixos resultados divulgados nos exames de avaliação externa do Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB). Ao se deparar com técnicas e metodologias conservadoras utilizadas no contexto da sala de aula, mesmo que tenham trazido resultados favoráveis em um outro momento, grande parcela dos alunos não simpatizam com a disciplina e isso compromete ainda mais os resultados em avaliações sobre o nível de aprendizado desenvolvido em nossas escolas públicas. A velha técnica conservadora, que segundo Skovsmose (2007) se baseia no paradigma do exercício, visualiza a posição de superioridade do professor como o sujeito que detém o poder do saber em sala de aula e tem no livro didático um dos grandes instrumentos como aliado que potencializa esse monopólio do saber. Essa metodologia baseada nas explicações orais, na cópia do conteúdo no quadro, na repetição exaustiva de exemplos sem considerar o contexto dos alunos, e por fim, numa infinidade dos chamados exercícios de fixação, é uma das maiores responsáveis pelo fracasso dos alunos no aprendizado de Matemática. É preciso, conforme Vygotsky (1996), que o educador tenha metodologias de ensino diferenciadas para atender os estudantes, visto que estes não detêm os mesmos conhecimentos nem aprendem da mesma forma e no mesmo espaço de tempo.

Obviamente que há outras questões que comprometem toda essa discussão. Isso vai desde a valorização dos profissionais de educação até a infraestrutura carente que nossos espaços escolares oferecem, perpassando por outras dificuldades e obstáculos, que nesse momento não se incorporam às nossas discussões. Portanto, voltando efetivamente para a dificuldade encontrada na metodologia aplicada pelos professores de Matemática em sala de aula, a teoria dos grafos oferece boas possibilidades, desde que sejam respeitados os níveis de complexidade das atividades aplicadas, bem como o grau de desenvolvimento em que se encontram os alunos de cada etapa/modalidade do Ensino Fundamental da Educação Básica. É preciso observar ainda o grande movimento que a sociedade brasileira e a comunidade acadêmica vêm fazendo para a readequação dos currículos, que obviamente traz importantes avanços para a Educação Básica. Falando efetivamente da área de Matemática na Base Nacional Comum Curricular (BNCC), uma das grandes propostas diz respeito ao desenvolvimento das habilidades relativas aos processos de investigação, de construção de modelos e de resolução de problemas. Para que esse processo ocorra em sala de aula, é necessário que os atores diretos, alunos e professores, estabeleçam suas relações na dialogicidade. Esse termo consagrado pelo grande educador Paulo Freire, é o princípio da educação libertadora e emancipadora, fundamentado no conceito de educação como prática da liberdade. O diálogo segundo Freire (2005, p.89) “se nos revela como algo que já poderemos dizer ser ele mesmo: a palavra. Mas, ao encontrarmos a palavra, na análise do diálogo, como algo mais que um meio para que ele se faça, se nos impõe buscar, também seus elementos constitutivos.”

O processo de investigação como metodologia de ensino da Matemática, permite estabelecer o diálogo como elemento norteador para o levantamento de questões, a elaboração de estratégias, é o ouvir, fazer-se ouvir, saber ouvir, defender posições, argumentar sempre tendo como base o respeito mútuo e a força dos argumentos, assim

> [...] um professor e um estudante podem ser diferentes, mas podem de qualquer modo entrar em uma situação de diálogo como iguais. Aqui igualdade, entre outras coisas, refere-se a ideia de que discussões, afirmações e boas razões não têm um poder especial apenas porque são estabelecidos por alguém que está em uma posição mais poderosa. Quaisquer discussão ou afirmação pode obter força apenas a partir de seu próprio conteúdo e não a partir das pessoas (ou das posições) que a apresentem. (SKOVSMOSE, 2007, p. 231-232).

É também fundamental que se estabeleça um ambiente propício à prática da investigação no contexto matemático, esse cenário se caracteriza como:

> Um cenário para investigação é aquele que convida os alunos a formular questões e a procurar explicações. O convite é simbolizado por seus “Sim, o que acontece se...?”. Dessa forma os alunos se envolvem no processo de exploração e explicação. O “Por que isto?” do professor representa um desafio, e os “Sim, por que isto...? dos alunos indicam que eles estão encarando o desafio e estão em busca de explicações, o cenário de investigação passa a constituir um novo ambiente de aprendizagem. No cenário de investigação os alunos são responsáveis pelo processo. (SKOVSMOSE, 2007, p. 21).

Há ainda que se compreender a possibilidade de uma visão integrada da Matemática, na perspectiva de sua aplicabilidade nas questões que envolvem o cotidiano das pessoas e até mesmo sua utilidade nas outras áreas do conhecimento. Uma análise mais apurada das competências específicas da área de Matemática e suas Tecnologias para a Educação Básica nos permite compreender o quanto podemos contribuir com o ensino dos conceitos, definições e aplicações da teoria dos grafos. Ainda que a BNCC não apresente de forma direta a utilização da teoria dos grafos em nenhuma etapa da Educação Básica, muitas habilidades trazidas por ela como essenciais para os alunos, podem ser desenvolvidas aplicando conceitos básicos sobre grafos. O contexto de surgimento e desenvolvimento da teoria dos grafos nos remete sempre à necessidade de resolver problemas de ordem prática e comum do cotidiano das pessoas, em todos os setores, ainda que alguns apresentem grande complexidade.

Para Polya (1995), uma pessoa está diante de um problema quando ela se depara com uma questão que não pode responder ou resolver usando os conhecimentos que detém. Dante (1991) afirma que problema “é qualquer situação que exija o pensar do indivíduo para solucioná-la”. No caso da teoria dos grafos podemos citar alguns clássicos como os problemas, das pontes de Kögnisberg, do Caixeiro Viajante, do Carteiro Chinês, do Caminho Mínimo, da Coloração de Mapas, enfim, o seu estudo e desenvolvimento sempre esteve ligado à resolução de problemas. Em se tratando do ensino através da resolução de problemas é fundamental que haja a compreensão, conforme Onuchic e Allevato (2011), que trabalhar com a resolução de problemas exige que professores e alunos tenham novas posturas e atitudes com relação ao trabalho desenvolvido no processo de aprendizagem. O professor precisa selecionar os problemas adequados ao conceito que vai ser construído. Por outro lado, os alunos passam a ter maior participação e responsabilidade no processo de aprendizagem, pois necessitam se envolver e desenvolver a habilidade de elaborar raciocínios lógicos e utilizar de forma inteligente e eficaz os recursos de que dispõem, conforme Dante (2011). A validade da metodologia da resolução de problemas aplicada ao ensino de Matemática é ainda mais reforçada se compreendermos, através do que é proposto pelas ciências cognitivas, que a aprendizagem é um processo de construção de conhecimentos e não apenas da aquisição e reprodução dos mesmos.

Repensar o ensino de Matemática exige uma libertação dos métodos tradicionais, que comprovadamente já não promovem resultados positivos, e apostar numa guinada metodológica, na perspectiva de que o aluno deixe de ser passivo, mas participe da construção do conhecimento matemático, com criatividade, criticidade, primando pela busca ativa no processo do seu aprendizado. A proposição pelo professor de situações-problemas para os alunos cria uma situação envolvente e provocadora na medida que desafia e ao mesmo tempo estimula a busca de soluções. Portanto, uma das premissas que devemos compreender é que para o aluno ser estimulado ao aprendizado em Matemática se faz necessário que esse conhecimento tenha significação para ele. É fato também que nesse processo o professor se coloca como mediador, mas não um mero transmissor de conhecimentos prontos e acabados, tal como na dita “educação bancária”.

Imbuído na proposta da metodologia da resolução de problemas aliada à teoria dos grafos, o presente trabalho visa apresentar ao professor possibilidades de inserção na Educação Básica desse conhecimento, de forma a estimular os alunos a traçar estratégias, aprender a aprender, confrontar métodos e trazer significado ao conhecimento matemático, pois a teoria dos grafos se desenvolveu muito em consequência de problemas e desafios que foram surgindo e precisavam de uma solução. Ainda hoje, muitos dos problemas encontrados em nosso cotidiano são semelhantes àqueles que provocaram o desenvolvimento da teoria dos grafos. Dentro das possibilidades de utilização dos grafos no ensino de Matemática na Educação Básica, são apresentados problemas sobre ciclos eulerianos e ciclos hamiltonianos, caminho mínimo e coloração de vértices e mapas que podem ser adaptados e utilizados nos anos iniciais e finais do Ensino Fundamental. A aplicação dos conceitos através da solução dos problemas permite trabalhar que os alunos desenvolvam sua criticidade, o raciocínio lógico e a capacidade de investigação estimulando assim, o aprendizado em Matemática

No primeiro capítulo do trabalho apresentamos o contexto histórico trazendo o problema das pontes de Kögnisberg como possivelmente o passo inicial para o desenvolvimento da teoria dos grafos. É também apresentada a formatação usada por Leonhard Euler na solução do enigma que, conforme (Ferreira & Borges, 2015) construiu possivelmente o que seria a primeira representação de um grafo para substituir o mapa da cidade de Kögnisberg e facilitar a solução do problema. O segundo capítulo traz os conceitos básicos, definições da teoria dos grafos, alguns teoremas, demonstrações, corolários, classificações de grafos bem como outros problemas clássicos que ampararam os estudos no desenvolvimento da teoria. O terceiro capítulo apresenta as possibilidades de aplicações na Educação Básica, sugerindo a metodologia da resolução de problemas como metodologia na formulação das atividades. O capítulo traz atividades utilizando a definição de ciclos euleriano e semieuleriano, com o jogo icosiano e o ciclo hamiltoniano, temos atividades baseadas no problema do caminho mínimo e, por fim, a coloração de mapas e vértices. Finalizamos o trabalho no quarto capítulo com a conclusão, apresentando a conectividade do ensino dos grafos com as mudanças propostas através da adequação e reconstrução das matrizes curriculares das redes de ensino, propostas pela resolução do Conselho Nacional de Educação (CNE) na homologação do texto da Base Nacional Comum Curricular (BNCC).

1 Teoria dos Grafos

1.1 As Pontes de Kögnisberg

Na seção que se inicia utilizamos as seguintes referências: [18], [21], [37] e [42].

A cidade de Kögnisberg na antiga Prússia, atualmente conhecida por Kaliningrado na Rússia, tem uma importância significativa no nascimento da teoria dos grafos. O território local apresentava duas ilhas e outras duas regiões que eram cortadas pelo rio Preguel. Para ligar essas partes umas às outras, a cidade contava com sete pontes. Desse detalhe geográfico, surge o conhecido, em Matemática, como “O Problema das Sete Pontes”. Durante muito tempo os moradores da cidade questionavam se era possível visitar todas as regiões da cidade passando uma única vez por cada uma das sete pontes. Está representado através da Figura 1 um mapa da cidade de Kögnisberg, com suas pontes interligando todas as suas regiões.

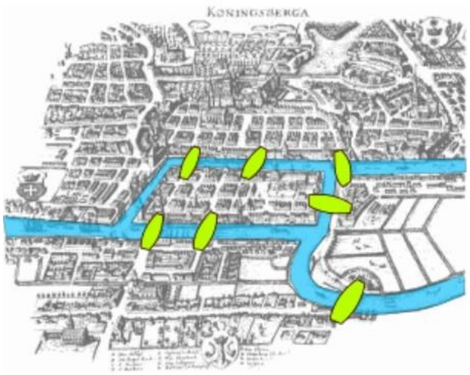


Figura 1: Mapa representativo da cidade de Kögnisberg com suas pontes.

Sentindo-se desafiado, o famoso matemático suíço Leonhard Euler, tratou de resolver o enigma verificando que não havia possibilidade de solução para o problema. Euler utilizou um raciocínio simples, mas primeiramente tratou de excluir do problema aquilo que não trazia significância, como casas, regiões, enfim, informações desnecessárias para a solução. Com essa estratégia tratou de representar o mapa da cidade através de pontos e segmentos, que se ligavam uns aos outros. Os pontos representavam as regiões da cidade e os segmentos que uniam esses pontos, correspondiam às sete pontes de Kögnisberg. É possível verificar na Figura 2 o grafo pensado por Euler.

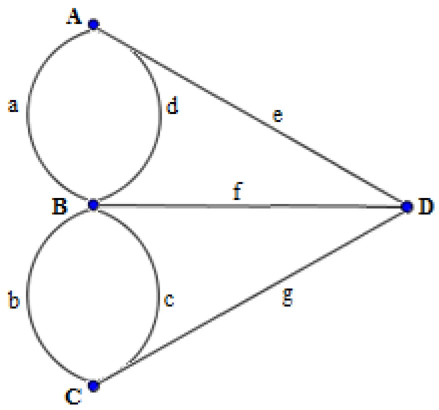


Figura 2: Grafo representativo de Kögnisberg com suas pontes e regiões.

Podemos fazer a representação da Figura 2, como o grafo *G = {V,A}*, onde *V*, representa os pontos(vértices) *{A, B, C, D}*; e *A*, as linhas(arestas) *{a, b, c, d, e, f, g}.* Podemos ainda tabular a representação do grafo, relacionando pontos e linhas *G = {(A, B, a); (A, B, d); (A, D, e); (B, D, f); (B, C, b); (B, C, c); (C, D, g)}.* A solução do problema consistia em sair de um ponto qualquer, passar uma única vez por todas as arestas, e assim visitar todos os pontos. Euler se dedicou a princípio em procurar quais seriam as características necessárias para permitir que esse caminho fosse possível. Logo percebeu que se todos os pontos tivessem um número par de arestas, pois é necessário sempre uma aresta para se chegar ao vértice e outra para sair, esse problema teria solução. Verificou ainda, que poderia haver dois pontos com número ímpar de arestas, esses deveriam se referir ao início e ao final do caminho, pois eles não precisam de uma aresta para entrar ou sair, respectivamente de um ponto. De maneira simples, ao olharmos a Figura 2 representada por Euller, verificamos que todos os pontos possuem número ímpar de arestas, portanto o problema não apresentava solução. É interessante notar também, que caso o grafo apresente número par de arestas para cada vértice, o caminho não só é possível, como podemos partir de qualquer um dos vértices e passar em todas as arestas e vértices, tornando ao ponto de partida. Aí se encontra uma grande estratégia para tornar o aprendizado matemático prazeroso aos alunos, pois a possibilidade de encontrar uma estratégia para solucionar problemas de Matemática que nos desafiam, se constitui uma metodologia favorável e positiva ao ensino da disciplina.

1.2 Conceitos Básicos

A seção que se inicia apresentará definições, teoremas e classificações acerca de grafos, nela serão utilizadas as seguintes referências: [4], [11], [16], [17], [21], [22] e [42].

O conceito de grafos suscita interesse ao estudo pela importância de sua utilização nos mais diversos segmentos da indústria. Seja na logística de transportes e serviços públicos, na indústria eletrônica, na química, biologia, enfim, é fundamental a sua aplicabilidade, das questões simples até os problemas mais complexos, a teoria dos grafos pode estar presente. O referido capítulo apresenta definições fundamentais para contemplação das atividades propostas, além de alguns teoremas, corolários e suas demonstrações.

Definição 1.2.1 *Um grafo G = {V, A} é um conjunto não-vazio V de vértices, e um conjunto A de arestas. Cada aresta é um par (vi, vj), sendo vi e vj elementos de V.*

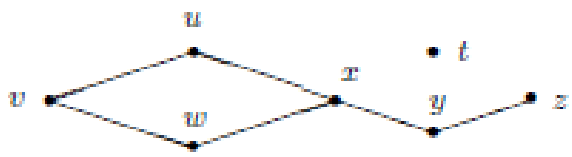


Figura 3: Exemplo de grafo G = {V,A}, onde V = (v, u, w, x, y, t, z) e A = ((v,u); (v,w); (u,x); (w,x); (x,y); (y,z)).

Definição 1.2.2 *O grau $d(V_i)$ de um vértice v_i corresponde ao número de arestas que incidem sobre ele. Caso haja laços, esses serão contados duas vezes.*

Se *A*, é um conjunto finito de arestas, então a soma total dos graus dos vértices $d(V_i)$ é o dobro do número de arestas. Isso é fácil verificar lembrando que cada aresta é incidente a dois vértices, logo contribui para dois graus. Portanto, dado um grafo $G = \{V,A\}$, onde $\{V_1, V_2, V_3, ..., V_n\}$ é o conjunto de vértices e *A* o conjunto de arestas, temos que:

$$\sum_{i=1}^{n} d(V_i) = 2 \times \# A .//$$

Teorema 1.2.3 (Vulcani, 2015) O número de vértices de grau ímpar de um grafo é sempre par.

Demonstração: Separando os somatórios dos vértices *(V_k)* de graus pares dos vértices *(V_l)* de graus ímpares, temos:

$$\sum_{i=1}^{n} d(V_i) = \sum_{d(V_k)par} d(V_k) + \sum_{d(V_l)ímpar} d(V_l) .//$$

Lembrando que o somatório da esquerda na equação é sempre par *(2 x#A)*, sabendo que o primeiro somatório da direita também é par, por ser uma soma de números pares, logo o segundo somatório da direita também tem que ser par, então:

$$\sum_{(V_l)} d(V_l) \text{ é } um\ número\ par.//$$

Como todos os vértices *$d(V_l)$* possuem grau ímpar, para que o somatório seja par, a quantidade de itens tem que ser par, logo, confirmamos que o número de vértices de grau ímpar em um grafo sempre será par. □

1.3 Classificação dos Grafos

Definição 1.3.1 *Classificamos como grafo trivial aquele que possui um único vértice e nenhuma aresta.*

Definição 1.3.2 *Um laço, ou auto-loop em inglês, é uma aresta que conecta um vértice a ele mesmo.*

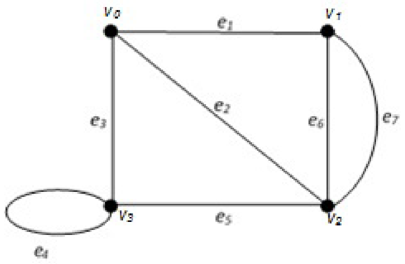


Figura 4:Exemplo de grafo com laço ou auto-loop.

Definição 1.3.3 *Arestas múltiplas ou arestas paralelas são arestas que possuem os mesmos vértices como extremidade.*

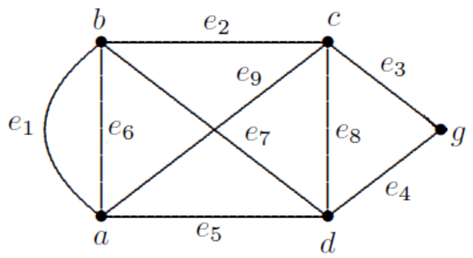


Figura 5:Exemplo de grafo com arestas paralelas e_1 e e_6.

Definição 1.3.4 *Dados um grafo G = {V,A}, onde V é o conjunto finito dos vértices {v_1, v_2,...,v_n} e A é o conjunto finito de arestas, cujos elementos são pares, não ordenados, de V, {(v_1, v_2); (v_2, v_3);...;(v_i, v_j)} com elementos distintos dois a dois, definimos como grafo simples a estrutura que não possui laços e nem arestas múltiplas.*

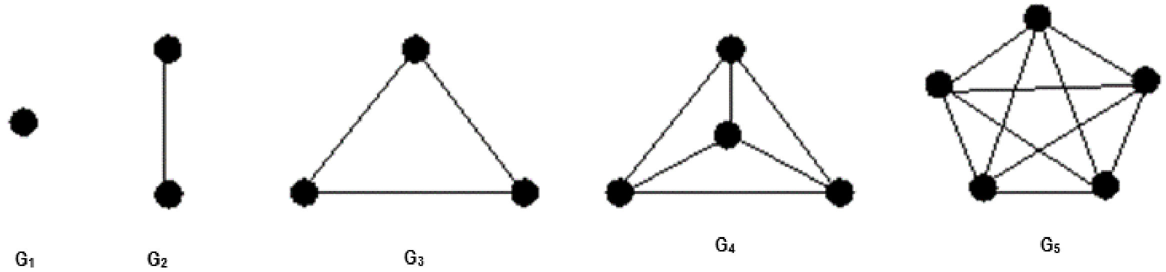


Figura 6: Exemplos de grafos simples.

Definição 1.3.5 *Um grafo completo é um grafo simples onde cada vértice é adjacente a todos os outros vértices.*

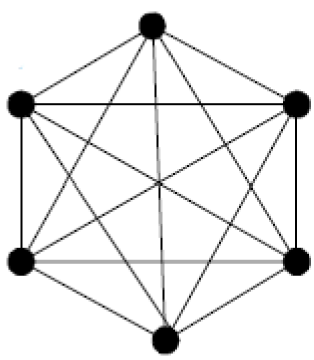


Figura 7: Exemplo de grafo completo.

Teorema 1.3.6 (Guedes, 2011) Seja um grafo completo $G_n = \{V,A\}$, onde *n é* o número de vértices de *G*. Temos que o número de arestas em *G* é $\frac{n(n-1)}{2}$.

Demonstração: Chamemos G_n um grafo que contém n vértices. No caso trivial temos o grafo G_1. Nesse caso, como existe somente um vértice, a única aresta possível seria um laço. Como em um grafo trivial não existe nenhuma aresta, verificamos que $\frac{n(n-1)}{2} = 0$.

Supondo que a hipótese é verdadeira para G_n, onde $n \geq 1$, verifiquemos agora a questão do grafo G_{n+1}. É preciso provar que o número de vértices nesse grafo é $\frac{n(n+1)}{2}$. Seja V_{n+1} o vértice adicional que se encontra em G_{n+1} e não em G_n. O número de arestas no grafo G_{n+1} é igual ao número no grafo G_n mais todas as ligações possíveis entre V_{n+1} e cada vértice de G_n. Como esse número de ligações é igual ao número de vértices em G_n, temos:

$$Número\ de\ arestas = \frac{n(n-1)}{2} + n = \frac{n(n-1)+2n}{2} = \frac{n^2+n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}.//$$

Uma outra maneira de chegar a esse resultado é considerar o fato que o número de arestas em um grafo completo de *n* vértices corresponde a todos os pares possíveis *(uv)*, onde *u* e *v* são vértices. Assim, o número de vértices é:

$$\binom{n}{2} = \frac{n!}{(n-2)!\,2!} = \frac{n(n-1)(n-2)!}{(n-2)!\,2} = \frac{n(n-1)}{2}.//$$

Definição 1.3.7 *grafo regular é aquele onde todos os vértices possuem o mesmo número de adjacências, ou o mesmo grau.*

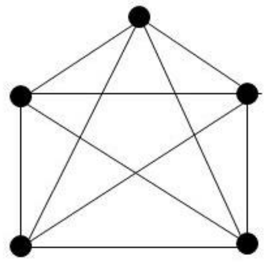


Figura 8: Exemplo de grafo regular.

Definição 1.3.8 *Dado um grafo G'= {V', A'}, o chamamos de subgrafo de G = {V, A} se V' ⊂ V e A'⊂ A.*

Podemos dizer que o grafo G' está contido em G.

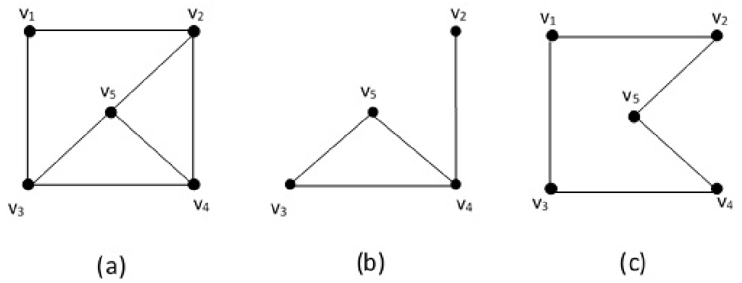


Figura 9: Grafo (a) e seus subgrafos (b) e (c).

Definição 1.3.9 *Chamamos um grafo de multigrafo quando existirem arestas múltiplas entre pares de vértices do grafo.*

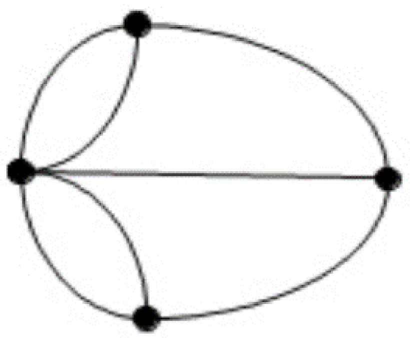


Figura 10: Exemplo de multigrafo.

Definição 1.3.10 *Grafo bipartido é um grafo em que os vértices podem ser divididos em dois conjuntos X e Y. As arestas ligam os vértices que pertencem a conjuntos diferentes, nunca ligando vértices do mesmo conjunto.*

A Figura 11 exibe três exemplos de grafos bipartidos, onde *X* contém os vértices pretos e *Y*, os vértices brancos.

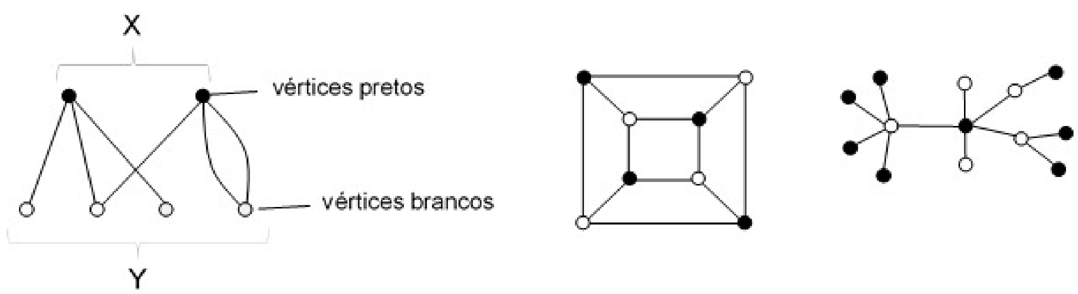


Figura 11: Exemplo de grafo bipartido $K_{2,3}$.

Definição 1.3.11 *Dados um grafo completo G, com conjunto de vértices definido por V(G) e conjunto de arestas definido por A(G). Sejam seus subgrafos H e U, cujos conjuntos de vértices e conjuntos de arestas são definidos por V(H), A(H) e V(U), A(U), respectivamente, afirmamos que H é complementar de U se V(G) = V(H) = V(U) e A(H) ∪ A(U) = A(G), com A(H) ∩ A(U) = ∅.*

Exemplo: A Figura 12 representa os grafos G, H e U, respectivamente. Ambos representam um momento qualquer de um torneio de futebol realizado entre as seleções de Brasil, Iraque, África do Sul e Dinamarca. Nomeando os vértices por B, I, S e D, Temos:

No grafo G, V = {B, I, S, D} e A = {{B, S}, {B,D}, {B,I}, {I,S}, {I,D}, {S,D}};

No grafo H, V = {B,I,S,D} e A = {{B,I}, {S,D}};

No grafo U, V = {B,I,S,D} e A = {{B,S}, {B,D}, {I,S}, {I,D}}.

Podemos notar que *A(U) ∪ A(H) = A(G)*

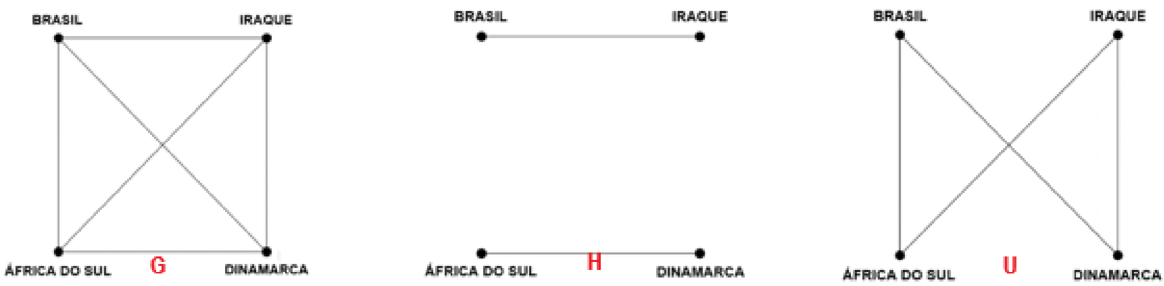


Figura 12: Grafos G, H e U representando um torneio entre seleções.

Definição 1.3.12 *Um grafo orientado é um grafo em que suas arestas apresentam uma orientação com seta, indicando a incidência no vértice e por conseguinte a sua origem e extremidade.*

A Figura 13 mostra um grafo orientado. Nele podemos identificar o conjunto de vértices V = {1,2,3,4,5,6} e o conjunto de arestas A = {{1,6}, {6,1}, {4,1}, {4,5}, {3,4}, {5,4}, {6,4}, {5,6}, {3,6}, {3,2}, {2,6}, {2,3}}.

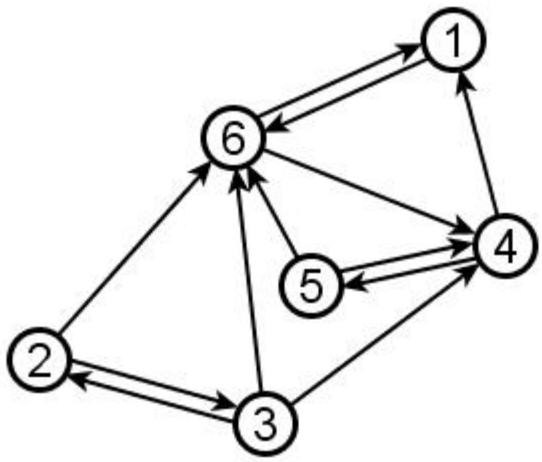


Figura 13: Exemplo de grafo orientado.

Nos casos de grafos orientados, para se calcular o somatório dos graus, deve-se distinguir o grau de saída (número de arestas que saem do vértice) do grau de entrada (número de arestas que chegam ao vértice). A soma dos graus de saída e de entrada em um vértice, caracteriza o grau do referido vértice.

Definição 1.3.13 *Um grafo ponderado G = {V,A} é um grafo que apresenta em cada uma de suas arestas um valor k, também chamado de peso.*

Um grafo ponderado pode ser orientado ou não.

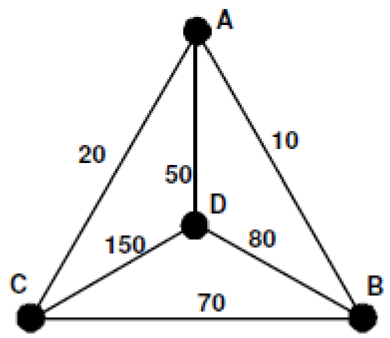


Figura 14: Exemplo de grafo ponderado.

1.4 Percursos, Caminhos e Ciclos

Nesta seção apresentaremos basicamente os conceitos de percursos, caminhos, ciclos e utilizaremos as referências [1], [42], e [43].

Definição 1.4.1 *Dado um grafo G = {V, A} em que V é o conjunto de vértices e A é o conjunto de arestas, um percurso em G pode ser definido como uma sequência alternada de vértices e arestas que começa e termina com vértices.*

A sequência $v_1, \dots, v_k$ com $v_1, \dots, v_k \in V$, é considerada como um percurso de v_1 a v_k, se $(v_j, v_{j+1}) \in A, 1 \leq j \leq k$.

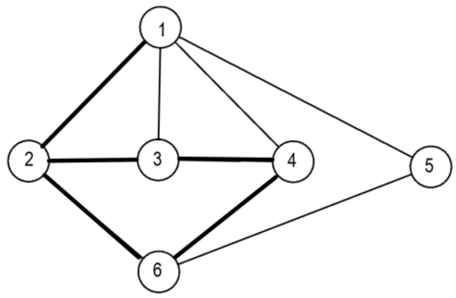


Figura 15: Exemplo de percurso

A Figura 15 apresenta o percurso {1-2-3-4-6-2-3-4}. É possível observar que o vértice (1) de origem do percurso não é o mesmo vértice (4) do final do percurso. Quando o vértice inicial é diferente do vértice final temos um percurso aberto. Quando ocorre o contrário, o vértice de início e final é o mesmo, temos um percurso fechado.

Na Figura 16 temos o percurso fechado {1-5-4-3-6-4-1}.

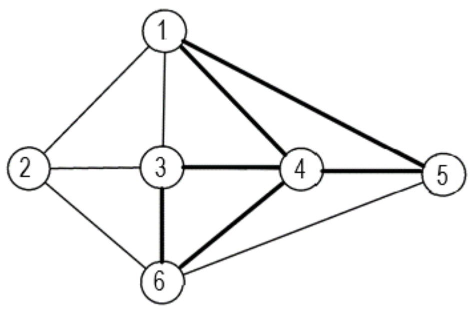


Figura 16: Exemplo de percurso fechado.

Definição 1.4.2 *Dado um grafo G = {V, A}, em que V é o conjunto de vértices e A, o conjunto de arestas, um caminho em G consiste de uma sequência finita alternada de vértices e arestas, começando e terminando por vértices, tal que cada aresta aparece apenas uma vez e é incidente ao vértice que a precede e ao que a sucede.*

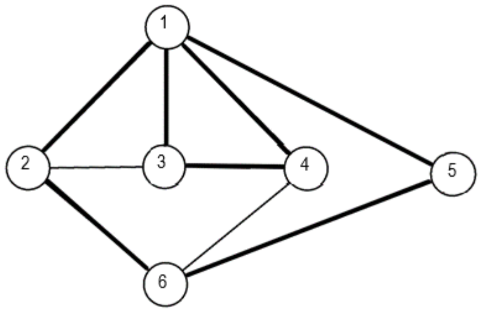


Figura 17: Exemplo de caminho em um grafo G.

A Figura 17 apresenta um grafo G, onde a sequência {1-5-6-2-1-3-4-1} representa um exemplo de caminho em um grafo. Quando não há vértices repetidos na sequência temos um caminho simples.

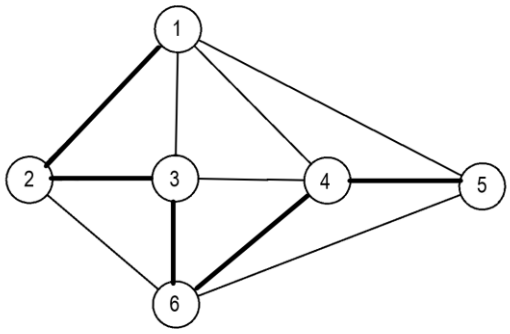


Figura 18: Exemplo de um caminho simples em um grafo G.

A Figura 18 apresenta um grafo G, onde a sequência {1-2-3-6-4-5} representa um caminho simples.

Definição 1.4.3 *Dado um grafo G = {V, A}, em que V é o conjunto de vértices e A é o conjunto de arestas, se os vértices inicial e final são coincidentes, dizemos que o caminho é fechado e forma um ciclo que é chamado de circuito se o grafo for orientado.*

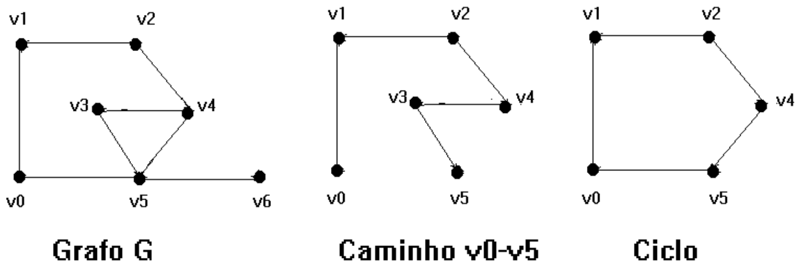


Figura 19: Representação em um grafo de um caminho e um ciclo.

Definição 1.4.4 *O comprimento de um percurso num grafo ponderado é a soma dos custos de percorrer cada aresta e num grafo não ponderado é igual ao número de arestas que o compõe.*

Definição 1.4.5 *Dado um grafo $G = \{V,A\}$, em que V é o conjunto de vértices e A é o conjunto de arestas, dizemos que ele é conexo, se para quaisquer vértices v_i, v_j, sendo $v_i \neq v_j$, existe um percurso em G que une v_i a v_j, caso contrário dizemos que o grafo é desconexo.*

A Figura 20 apresenta um grafo conexo e outro desconexo, respectivamente.

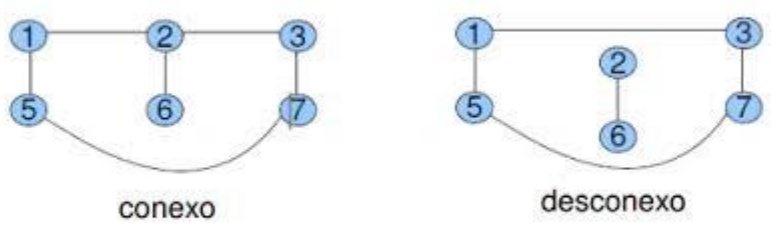


Figura 20: Exemplos de grafo conexo e grafo desconexo.

1.5 Ciclos Eulerianos, Grafos Eulerianos, Ciclos Hamiltonianos e Grafos Hamiltonianos

Nesta seção utilizaremos as seguintes referências: [1], [11], [25], [28], [33] e [42].

Definição 1.5.1 *Um grafo G é dito ser euleriano se há um ciclo em G que contém todas as suas arestas. Este ciclo é dito ser um ciclo euleriano.*

Definição 1.5.2 *Um grafo G não euleriano é dito ser semieuleriano se possui um caminho euleriano.*

Na Figura 21 temos um grafo euleriano e podemos traçar o ciclo (a, b, e, g, f, e, d, c, f, d, b, c, a), um grafo semieuleriano e podemos traçar o ciclo (c, b, e, g, f, e, d, c, f, d, b) e um grafo não euleriano.

Podemos diferenciá-los observando que na Figura 21, no primeiro grafo iniciamos e terminamos o ciclo no vértice (a), passando uma única vez em cada aresta do grafo. No segundo grafo iniciamos no vértice (c), passamos uma única vez em cada aresta, mas terminamos o caminho em (b). Já no último grafo não é possível passar por todos os vértices sem passar mais de uma vez por uma ou mais arestas. De maneira geral, em um grafo euleriano é possível passar por todos os vértices, passando uma única vez em cada aresta, iniciando e terminando o caminho no mesmo vértice. No grafo semieuleriano passamos por todos os vértices, passando uma única vez em cada aresta, porém iniciamos e terminamos o caminho em vértices diferentes. E, por fim, em um grafo não euleriano, para passar por todos os vértices é necessário passar mais de uma vez em uma ou mais arestas.

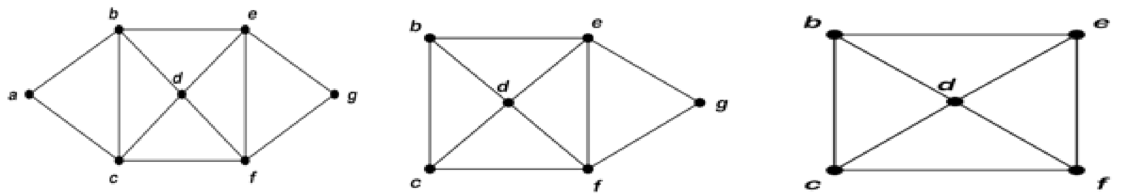


Figura 21: Grafo euleriano, semieuleriano e não euleriano.

Lema 1.5.3 (Rangel, 2013) Se $G = \{V, A\}$ é um grafo tal que o grau $d(v) \geq 2$ para todo $v \in V$, então G contém um ciclo.

Demonstração 1.5.4 Se G possui laços ou arestas paralelas, não há o que provar. Vamos supor que G é um grafo simples. Seja $v_0 \in V$ um vértice arbitrário de G. Como $d(v) \geq 2$ para todo $v \in V$, podemos construir um passeio $v_0 \rightarrow v_1 \rightarrow v_2 \ldots$ indutivamente escolhendo v_{i+1} como sendo qualquer vértice adjacente a v_i exceto v_{i-1}. Como G possui uma quantidade finita de vértices, em algum momento escolheremos algum vértice, digamos v_k, pela segunda vez. A parte do percurso entre e primeira e a segunda ocorrência de v_k constitui um ciclo. □

Teorema 1.5.5 (Rangel, 2013) Um grafo conexo G é um grafo euleriano se, e somente se, todos os seus vértices possuem grau par.

Demonstração 1.5.6 Seja T um caminho euleriano fechado de G. Cada vez que um vértice v ocorre no caminho T, há uma contribuição de duas unidades para o grau de v (uma aresta para chegar a v e outra para sair). Isto vale não só para os vértices intermediários mas também para o vértice final, pois "saímos" e "entramos" no mesmo vértice no início e no final do caminho T. Como cada aresta ocorre exatamente uma vez em T, cada vértice possui grau par.

Agora, suponhamos que o grau de cada vértice de G é par, a prova é por indução no número de arestas de G. Como G é conexo, $d(v) \geq 2$ para todo $v \in V$. Segue então do lema anterior que G contém um ciclo C. Se C contém todas as arestas de G, o teorema está provado. Se não, removemos de G as arestas de C, resultando num grafo H, possivelmente desconexo, com menos arestas do que G.

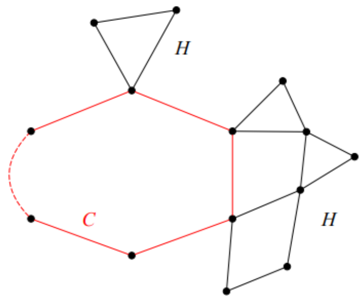


Figura 22:Grafo G com arestas de C removidas formando o Grafo H.

É fácil ver que todos os vértices de H possuem grau par. Logo, pela hipótese de indução, cada componente de H possui um caminho euleriano fechado. Além disso, pela conexidade de G, cada componente de H possui ao menos um vértice em comum com C. Portanto, concatenando os caminhos eulerianos fechados de cada componente de H com o ciclo C obtemos um caminho euleriano fechado em G, ou seja, G é um grafo euleriano. $\square$

Corolário 1.5.7 (Rangel, 2013) Um grafo conexo é semieuleriano se, e somente se, possui exatamente dois vértices de grau ímpar.

Demonstração 1.5.8 Seja G um grafo semieuleriano, ou seja, G é um caminho aberto que inicia no vértice v_i e termina em um vértice v_j sem repetir nenhuma aresta, pois é um caminho. Como o caminho é aberto, os vértices v_i e v_j são distintos. Logo, tanto v_i como v_j têm grau ímpar, pois o caminho não termina onde começou.

Por outro lado, seja G um grafo conexo com um par de vértices de grau ímpar e sejam v_i e v_j esses vértices com grau ímpar, como todos os demais vértices do grafo G possuem grau par, se acrescentarmos uma aresta ligando v_i e v_j que possuem grau ímpar, teremos então todos os vértices com grau par. $\square$

Na Figura 23, temos dois grafos, sendo um euleriano e outro semieuleriano, respectivamente. É possível observar que o primeiro grafo apresenta todos os vértices com grau par. Podemos representar o seu ciclo por: {{a,b}, {b,e}, {e,g}, {g,f}, {f,e}, {e,d}, {d,c}, {c,f}, {f,d}, {d,b}, {b,c}, {c,a}}. Verificamos ainda que o vértice inicial é também o vértice final do ciclo e cada aresta é visitada apenas uma vez, sem que haja repetição das mesmas. No caso do outro grafo da Figura 23, temos dois vértices de grau ímpar (b e c), sendo assim também é possível passar por cada aresta uma única vez, começando por b ou c e terminando em c ou b. Isso classifica o grafo como semieuleriano. É válido perceber que qualquer um dos dois grafos, euleriano ou semieuleriano, podem ser traçados sem a necessidade de tirar o lápis do papel. Podemos representar o ciclo semieuleriano da Figura 23 pela sequência: {{c,b}, {b,e}, {e,g}, {g,f}, {f,e}, {e,d}, {d,c}, {c,f}, {f,d}, {d,b}}. A diferença entre os dois tipos de grafos é o fato de que o grafo euleriano inicia e termina o ciclo no mesmo vértice.

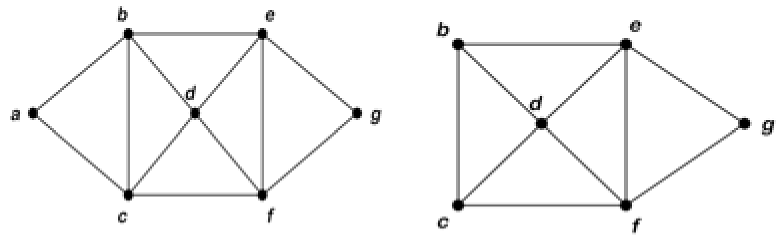


Figura 23: Grafo euleriano e semieuleriano

Definição 1.5.9 *Um grafo G é dito ser hamiltoniano se existe um ciclo em G que contenha todos os seus vértices, sendo que cada vértice só aparece uma vez no ciclo. Este ciclo é chamado de ciclo hamiltoniano. Sendo assim, um grafo é hamiltoniano se ele conter um ciclo hamiltoniano.*

Em homenagem ao matemático irlandês Sir William Rowan Hamilton (1805-1865), utilizamos o adjetivo hamiltoniano. Sir Hamilton inventou um jogo que envolvia um dodecaedro (sólido regular com 20 vértices, 30 arestas e 12 faces). Cada vértice ele rotulou com o nome de uma cidade conhecida. O objetivo do jogo era que o jogador viajasse, a cada cidade rotulada, uma única vez, com a restrição de que só seria possível viajar de uma cidade a outra se existisse uma aresta entre os vértices correspondentes.

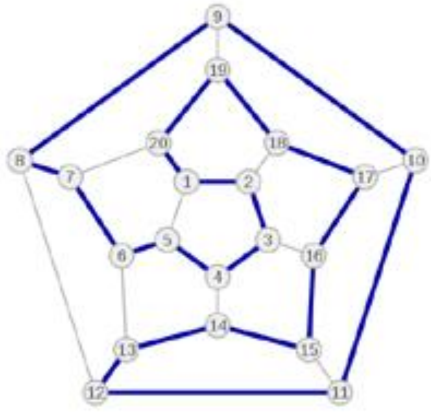


Figura 24: Exemplo de representação de um ciclo hamiltoniano.

2 Problemas Clássicos em Teoria dos Grafos

Esta seção apresenta problemas clássicos da teoria dos grafos e utilizaremos as seguintes referências: [30], [35], [37] e [40].

2.1 Algoritmos

Definição 2.1.1 *Algoritmo é uma sequência ordenada de passos, regras, operações ou raciocínios que são executados para obter a solução de um dado problema ou para a realização de uma determinada tarefa.*

Dizemos que um determinado algoritmo resolve um dado problema se, ao receber qualquer amostra do problema, devolve uma solução da amostra ou indica que a amostra não tem solução. Para escolher o algoritmo mais adequado para resolver um problema devemos observar duas questões fundamentais:

- Tempo de execução do algoritmo
- Espaço em disco ocupado

Nessa condição é sempre necessário analisar o custo de execução do algoritmo escolhido. Para medir esse custo é comum definirmos uma função de complexidade f. A função de complexidade $f(n)$ calcula o tempo necessário para que o algoritmo seja executado em um problema de tamanho n. Ainda assim, em um problema de tamanho n é importante verificar a função de complexidade $f(n)$, responsável por calcular a memória necessária para execução de um determinado algoritmo. Apesar de tratarmos de função de complexidade de tempo, esta, na realidade, não representa o tempo diretamente, mas sim o número de vezes que uma operação considerada relevante é executada. É preciso compreender ainda, que a medida do custo de execução de um algoritmo, depende da quantidade de dados a serem analisados que um problema apresenta. Em alguns algoritmos, o custo de execução é uma função da entrada particular de dados e não apenas do tamanho da entrada.

Considerando essas colocações podemos dividir os seguintes casos:

- Melhor Caso: menor tempo de execução sobre todas as entradas de tamanho *n.*
- Pior Caso: maior tempo de execução sobre todas as entradas de tamanho *n.*
- Caso Médio: média dos tempos de execução de todas as entradas de tamanho *n.*

Durante o procedimento de verificação do caso médio, supõe-se uma distribuição de probabilidades sobre o conjunto de entradas de tamanho *n* e o custo médio é obtido com base nessa distribuição. A verificação do caso médio, normalmente, se torna bem mais difícil do que a análise do melhor e do pior caso. É comum, durante a distribuição de probabilidades, a suposição de que todas as entradas são igualmente prováveis. Obviamente que na prática, isso nem sempre é verdade.

Para escolher o algoritmo mais adequado para uma determinada tarefa, precisamos compará-los. Para isso é preciso verificar o comportamento assintótico das funções de custo, pois ele que certifica o comportamento de suas funções para valores grandes de *n.*

Definição 2.1.2 *O comportamento assintótico de f(n) representa o limite do comportamento do custo quando n cresce.*

A medida de custo ou medida de complexidade relata o crescimento assintótico da operação considerada.

Definição 2.1.3 *Uma função f(n) domina assintoticamente outra função g(n) se existem duas constantes positivas c e m tais que, para n ≥ m, temos* |*g(n)*| ≤ c|*f(n)*|.

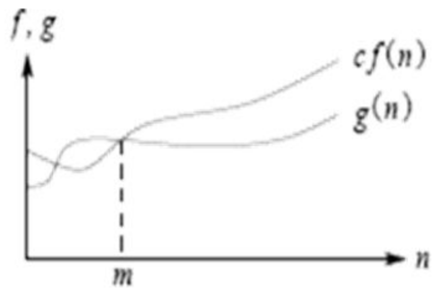


Figura 25: Gráfico de domínio assintótico de *f(n)* sobre *g(n)*.

Na Figura 25, o valor da constante *m* é o menor valor possível, mas qualquer valor maior também é válido.

Escrevemos *g(n) = O(f(n))* para expressar que *f(n)* domina assintoticamente *g(n)*. Lê-se g(n) é da ordem no máximo *f(n).*

Exemplo: *Quando dizemos que o tempo de execução T(n) de um programa é O(n²), significa que existem constantes c e m tais que, para valores de n ≥ m, T(n) ≤ cn².*

Definição 2.1.4 *Uma função g(n) é O(f(n)) se existem duas constantes positivas c e m tais que g(n) ≤ c f(n), para todo n ≥ m.*

Exemplo: $g(n) = (n + 1)^2$, pois $g(n)$ *é* $O(n)^2$*, quando m = 1 e c = 4. Isto porque* $(n + 1)^2 \leq 4n^2$ *para* $n \geq 1$.

Portanto, devemos verificar que se *f* é uma função de complexidade para um determinado algoritmo *F*, então *O(f)* é considerada a complexidade assintótica ou o comportamento assintótico do algoritmo *F*. A relação de dominação assintótica permite comparar funções de complexidade, entretanto, se as funções *f* e *g* dominam assintoticamente uma a outra, então os algoritmos associados são equivalentes e nestes casos, o comportamento assintótico não serve para comparar os algoritmos. Consideremos, por exemplo, dois algoritmos quaisquer *F* e *G* aplicados à mesma classe de problemas, sendo que *F* leva três vezes o tempo de *G* ao serem executados, isto é, *f(n) = 3g(n)*, sendo que *O(f(n)) = O(g(n)).* Verificamos então, que o comportamento assintótico não serve para comparar os algoritmos F e G, pois eles diferem, um do outro, apenas por uma constante. Podemos avaliar algoritmos comparando as funções de complexidade e negligenciando as constantes de proporcionalidade.

2.2 Complexidade de Algoritmos

f(n) = O(1)

- *Algoritmos de complexidade O(1) são ditos de complexidade constante, o uso do algoritmo independe do valor de n e as instruções são executadas um número fixo de vezes.*

f(n) = O(log n)

- *Um algoritmo de complexidade O(log n) é dito ter complexidade logarítmica. Esses algoritmos transformam um problema em outros menores. O seu tempo de execução é menor do que uma constante grande. Quando n vale 1000,* $log_2 n = 10$*, quando n vale 1.000.000,* $log_2 n = 20$*. Para dobrar o valor de log n temos de considerar o quadrado de n. A base do logaritmo varia muito pouco estes valores, vejamos que quando n é 1.000.000, o* $log_2 n = 20$ *e o* $log_{10} n = 6$*.*

f(n) = O(n)

- *Um algoritmo de complexidade O(n) é possui complexidade linear. É a melhor situação possível para um algoritmo que tem de processar/produzir n elementos de entrada/saída. Cada vez que n dobra de tamanho, o tempo de execução dobra.*

f(n) = O(n^2)

- *Um algoritmo de complexidade O(n^2) é possui complexidade quadrática. É típico quando os itens dos dados são processados aos pares. Quando n é mil, o número de operações é da ordem de 1 milhão. Sempre que n dobra, o tempo de execução é quadriplicado. Esses algoritmos se mostram eficientes para resolver problemas de tamanhos relativamente pequenos.*

f(n) = O(2^n)

- *Um algoritmo de complexidade O(2^n) é possui complexidade exponencial. Geralmente não são úteis sob o ponto de vista prático.*

Quando n é 20, o tempo de execução é cerca de 1 milhão. Quando n dobra, o tempo fica elevado ao quadrado.

f(n) = O(n!)

- *Um algoritmo de complexidade O(n!) também possui complexidade exponencial, mas devemos observer que O(n!) tem comportamento muito pior do que O(2^n). Quando temos o valor de n = 20 o tempo de execução equivale a 20! = 2432902008176640000, ou seja, um número com 19 dígitos. Se n = 40 teremos como resultado um número com 48 dígitos.*

Função de custo	Tamanho n					
	10	20	30	40	50	60
n	0,00001 s	0,00002 s	0,00003 s	0,00004 s	0,00005 s	0,00006 s
n^2	0,0001 s	0,0004 s	0,0009 s	0,0016 s	0,0.35 s	0,0036 s
n^3	0,001 s	0,008 s	0,027 s	0,64 s	0,125 s	0.316 s
n^5	0,1 s	3,2 s	24,3 s	1,7 min	5,2 min	13 min
2^n	0,001 s	1 s	17,9 min	12,7 dias	35,7 anos	366 séc.
3^n	0,059 s	58 min	6,5 anos	3855 séc.	10^8 séc.	10^{13} séc.

Figura 26: Quadro da função custo dos algoritmos.

Função de custo de tempo	Computador atual	Computador 100 vezes mais rápido	Computador 1.000 vezes mais rápido
n	t_1	$100\ t_1$	$1000\ t_1$
n^2	t_2	$10\ t_2$	$31,6\ t_2$
n^3	t_3	$4,6\ t_3$	$10\ t_3$
2^n	t_4	$t_4 + 6,6$	$t_4 + 10$

Figura 27: Quadro da função custo de tempo.

As Figuras 26 e 27 fazem comparações entre as funções de complexidade, o valor *n* que compreende o tamanho do problema e o tempo *t* de execução dos algoritmos.

2.3 Algoritmos Polinomiais e Algoritmos Exponenciais

Definição 2.3.1 *Um determinado algoritmo que resolve um dado problema é polinomial se o consumo de tempo, na pior das hipóteses, é limitado por um polinômio no tamanho das amostras do problema. Dizemos ainda que um determinado algoritmo é polinomial se existe um número i tal que o consumo de tempo do algoritmo é aproximadamente* N^i*, e denotamos por* $O\left(N^i\right)$*, sendo N o tamanho da amostra.*

Algoritmos polinomiais são considerados rápidos, embora seja difícil compreender como rápido um algoritmo que consome tempo proporcional a N^{500}, por exemplo. Num algoritmo polinomial o tempo de execução tem função de complexidade $O\big(p(n)\big)$, onde $p(n)$ é um polinômio.

Algoritmos exponenciais se apresentam geralmente como simples variações de pesquisa exaustiva na busca de um espaço de soluções para determinados problemas. Num algoritmo exponencial o tempo de execução tem função de complexidade $O(c^n)$ para $c > 1$. A grande distinção entre algoritmos polinomiais e algoritmos exponenciais torna-se significativa quando o tamanho do problema a ser resolvido cresce. Isso na prática torna os algoritmos polinomiais bem mais úteis que os algoritmos exponenciais. Ainda assim, a distinção de eficiência entre algoritmos polinomiais e algoritmos exponenciais possui muitas exceções. Consideremos como exemplo um algoritmo com função de complexidade $f(n) = 2^n$ e um outro algoritmo com função de complexidade $g(n) = n^5$, é fácil verificar que $f(n)$ é um algoritmo exponencial e $g(n)$ é um algoritmo polinomial. No entanto, $f(n)$ é bem mais rápido do que $g(n)$ para valores de *n* menores ou iguais a 20. Pensemos no exemplo de um problema que envolve 04 cidades, nomeadas por A, B, C e D, ligadas entre si por estradas cujos pesos, que representam as distâncias em km entre as cidades, estão representados no grafo ponderado da Figura 28. O problema consiste em se deslocar da cidade A, passando por todas as outras e retornando à mesma cidade A, usando o percurso de menor distância.

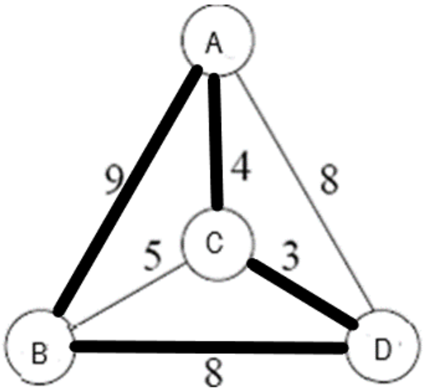


Figura 28: Grafo com caminho mínimo traçado.

Uma das possibilidades seria realizar o percurso < A-B-D-C > cuja distância total seria 24 km. Um algoritmo simples para utilização nesse problema precisaria verificar todos os percursos possíveis e escolher o menor deles para resolver o problema. Como há *n* cidades, haveriam então $(n-1)$ percursos possíveis e a distância percorrida em cada percurso envolve *n* adições, portanto o número total de adições é $n!$. No caso da Figura 28 teríamos 24 adições. Porém, se tivéssemos 50 cidades o número de adições seria $50! \approx 10^{64}$. Utilizando um computador que executa 10^9 adições por segundo, o tempo total necessário para resolver o problema seria maior do que 10^{45}séculos só para executar as adições.

2.4 Problema do Caixeiro Viajante

O problema do caixeiro viajante, representado pela Figura 29, consiste na busca de um circuito que possua a menor distância, começando numa cidade qualquer, entre várias, visitando cada cidade uma única vez e retornando à cidade de partida. O problema do caixeiro viajante é um clássico problema de otimização combinatória. A primeira análise que precisamos é a de procurar reduzi-lo a um problema de enumeração, isto é, primeiro encontramos todas as rotas possíveis e de posse de um computador, calculamos o comprimento de cada uma delas, verificando assim qual a menor. Obviamente que ao encontrar todas as rotas possíveis contando-as, estaremos reduzindo o problema de otimização a um problema de enumeração.

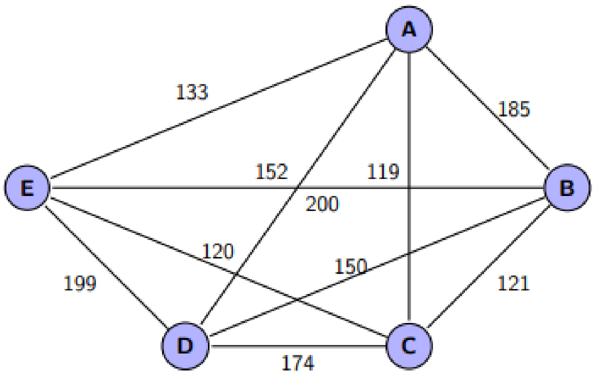


Figura 29: Exemplo de grafo representando o problema do caixeiro viajante.

Para encontramos a quantidade *D(n)* de percursos possíveis para n cidades, basta utilizar uma noção combinatória simples e teremos *D (n) = (n-1)!*. Sendo assim, a estratégia consiste em determinar cada uma dessas *(n-1)!* rotas, calcular as distâncias totais de cada uma dessas rotas e verificar qual delas apresenta o menor valor possível. Aparentemente, analisar isso é algo bem fácil para qualquer computador. Mas não é bem assim. Vejamos o porquê.

Imaginemos que temos um computador velocíssimo que é capaz de processar um bilhão de adições por segundo. Essa velocidade nos parece fora do comum e capaz de resolver qualquer problema no menor tempo possível. Imaginemos agora um problema que apresenta 20 cidades para encontrar a menor rota possível. Conforme verificamos acima, nesse caso o computador necessitaria apenas realizar 19 adições para dizer qual o comprimento de uma rota e então será capaz de calcular $10^9 / 19 = 53$ milhões de rotas por segundo. Porém, ao compararmos com a imensidão de rotas possíveis para esse caso, mais precisamente *19! = 121.645.100.408.832.000* este necessitaria de, o que equivale a aproximadamente, 73 anos.

Acontece que a quantidade *(n-1)!* cresce explosivamente à medida que n aumenta, sendo que até mesmo um computador, se torna incapaz para executar o que solicitamos. Abaixo apresentamos um quadro com algumas comparações:

n	***Rotas por segundo***	***(n-1)!***	***Tempo***
5	***250 milhões***	***24***	***insignificante***

10	***110 milhões***	***362.880***	***0,003 segundos***
15	***71 milhões***	***87 bilhões***	***20 minutos***
20	***53 milhões***	$\mathbf{1,2\ x\ 10^{17}}$	***73 anos***
25	***42 milhões***	$\mathbf{6,2\ x\ 10^{23}}$	***470 milhões de anos***

Figura 30: Quadro com comparações de tempo.

É possível verificar que cada aumento em n, permite que *(n-1)!*, que corresponde ao número de rotas possíveis, cresça explosivamente e, por conseguinte, aumenta demasiadamente no tempo total de cálculo. Isso reproduz uma inviabilidade computacional devida à presença do fatorial na medida do esforço computacional pelo método de redução. Se essa complexidade fosse expressa em termos polinomiais em n, o computador teria totais condições de suportar os aumentos de *n*. No quadro abaixo podemos conferir a correspondência a um esforço computacional polinomial $D\ (n) = n^5$:

n	***Rotas por segundo***	$\mathbf{n^5}$	***Tempo***
5	***250 milhões***	***3125***	***insignificante***
10	***110 milhões***	***100.000***	***insignificante***
15	***71 milhões***	***759.375***	***0,01 segundos***
20	***53 milhões***	***3.200.000***	***0,06 segundos***
25	***42 milhões***	***9.765.625***	***0,23 segundos***

Figura 31: Quadro com comparações de tempo.

A existência ou não de um método polinomial para solucionar o problema do caixeiro viajante é um dos grandes problemas em aberto da Matemática, na medida em que mostrou-se que muitos problemas importantes podem ser reduzidos, em tempo polinomial, ao problema do caixeiro viajante. Caso consigamos resolver, em tempo polinomial, o problema do caixeiro, uma grande quantidade de outros problemas matemáticos importantes serão possíveis de resolver. No entanto, se alguém conseguir comprovar a impossibilidade de solução do referido problema, ficará também definido que muitos desses outros problemas importantes da Matemática, não possuem solução prática. As propriedades que o problema do caixeiro viajante apresenta o coloca em uma categoria de problemas chamados NP – completos.

2.5 Problema do Caminho Mínimo

Definição 2.5.1 *Um caminho C, em um grafo G, é considerado mínimo se não existir outro caminho que tenha a mesma origem e o mesmo término, mas com comprimento menor do que o caminho C.*

Exemplo: Uma construtora precisa construir uma estrada para ligar duas cidades aqui nomeadas de A e K. O grafo da Figura 32 apresenta os possíveis trechos com os respectivos custos para execução e o grafo da Figura 33 apresenta o percurso ótimo cujo custo seja o mínimo para a execução da referida obra.

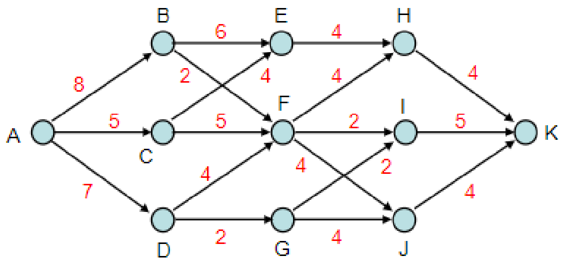


Figura 32: Grafo ponderado para encontrar caminho mínimo.

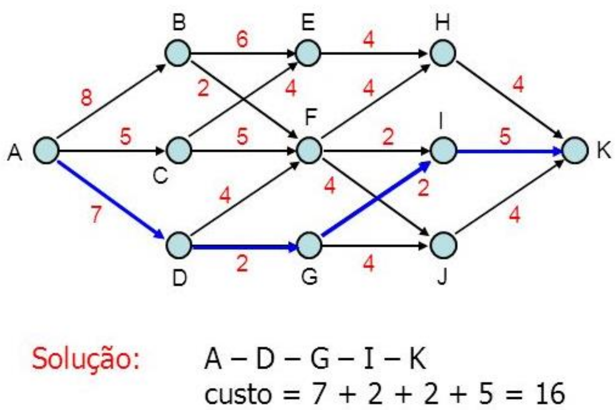


Figura 33: Grafo com caminho mínimo traçado.

Diante da apresentação da Definição 2.5.1 podemos perceber a importância da aplicação desse conceito nas diversas atividades que envolvem a sociedade moderna. A busca cada vez mais constante por otimização nos leva a compreender a aplicabilidade da teoria dos grafos. O problema do caminho mínimo é intensamente estudado pela sua utilização nas diversas áreas como, na engenharia de transportes, pesquisa operacional, ciência da computação e inteligência artificial. Vários problemas práticos que ocorrem em logística, redes e telecomunicações podem utilizar-se dos estudos da teoria dos grafos. Listamos abaixo alguns dos algoritmos especializados e mais conhecidos em solucionar problemas de caminhos mínimos, estes costumam ser chamados de algoritmos de busca de caminhos.

1. Algoritmo de Dijkstra - Resolve o problema com um vértice-fonte em grafos cujas arestas tenham peso maior ou igual a zero. Sem reduzir o desempenho, este algoritmo é capaz de determinar o caminho mínimo, partindo de um vértice de início v_i para *todos* os outros vértices do grafo.
2. Algoritmo de Bellman-Ford - Resolve o problema para grafos com um vértice-fonte e arestas que podem ter pesos negativos.
3. Algoritmo A* - um algoritmo heurístico que calcula o caminho mínimo com um vértice-fonte.
4. Algoritmo de Floyd - Warshall - Determina a distância entre todos os pares de vértices de um grafo.
5. Algoritmo de Johnson - Determina a distância entre todos os pares de vértices de um grafo, pode ser mais veloz que o algoritmo de Floyd - Warshall em grafos esparsos.

2.6 Algoritmo de Dijkstra

O algoritmo de Dijkstra resolve o problema de caminhos mais curtos de única origem de um grafo ponderado, orientado ou não, $G = \{V,A\}$, para os casos em que o grafo apresenta arestas com pesos não negativos. O algoritmo utiliza o princípio da otimalidade de Bellman: “Um caminho mínimo é constituído de subcaminhos mínimos.” O algoritmo consiste em rotular valores temporários até que possam ser rotulados definitivamente. A cada iteração, alguns dos valores rotulados podem ser alterados temporariamente e somente um nó terá o rótulo definitivo. Ao ser atingido o rótulo definitivo de um nó, este representa a menor distância entre o nó de origem e este nó. O procedimento é finalizado quando o nó destino é rotulado definitivamente. As Figuras 34, 35 e 36 apresentam um grafo ponderado, uma representação do algoritmo de Dijkstra utilizando o vértice A como origem e o vértice F como destino e, por fim, o grafo com o caminho mínimo demarcado.

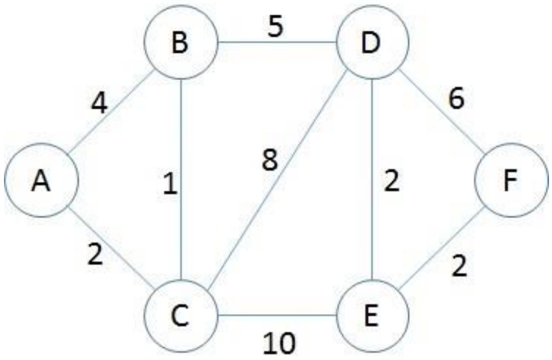


Figura 34: Grafo ponderado para aplicação do algoritmo de Dijkstra.

	Passo 1	Passo 2	Passo 3	Passo 4	Passo 5	Passo 6
A	**(0,A)**					
B	**(4,A)**	**(3,C)**	**(3,C)**			
C	**(2,A)**	**(2,A)**				
D		**(10,C)**	**(8,B)**	**(8,B)**		
E		**(12,C)**		**(10,D)**	**(10,D)**	
F				**(14,D)**	**(12,E)**	**(12,E)**

Figura 35: Quadro com os passos do algoritmo de Dijkstra.

Através do quadro podemos verificar que partindo de A, encontramos duas possibilidades, sendo uma de A para B e outra de A para C. De A para B temos peso 4 e de A para C temos peso 2. Logo, definimos o passo 1 de A para C. No passo 2, saindo de C temos três possibilidades, sendo uma de C para B, com peso 3, uma de C para D com peso 10 e outra de C para E com peso 12. Assim, no passo 2 definimos o percurso de C para B. No passo 3 partimos de B para D com peso 8, pois essa é a única possibilidade nesse caso. No passo 4 podemos ir de D para E com peso 10 e de D para F com peso 14. Definimos então, o percurso D para E. No passo 5 temos o percurso de E para F com peso 12 e assim finalizamos o algoritmo e verificamos o menor caminho no grafo da Figura 36.

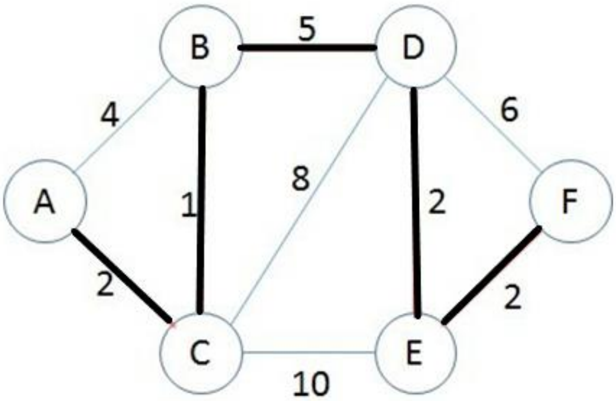


Figura 36: Grafo ponderado com o caminho mínimo demarcado.

2.7 Problema das Quatro Cores

Definição 2.7.1 *Seja G = {V,A} um grafo, onde V é o conjunto de vértices e A o conjunto de arestas. Uma coloração para o grafo G é a atribuição de cores para cada um dos vértices do grafo de forma que vértices adjacentes possuam cores diferentes.*

Toda a história do problema das quatro cores começa em 1852, quando Francis Guthrie tentava colorir o mapa da Inglaterra com cores diferentes, de maneira que não houvessem regiões vizinhas coloridas com cores iguais. Nessa tentativa ele conjecturou que apenas quatro cores seriam suficientes para que todas as regiões vizinhas apresentassem cores diferentes. Seu irmão mais novo, Frederick Guthrie apresentou a conjectura ao seu professor Augustus de Morgan. Somente em 1879 Alfred Bray Kempe publicou uma demonstração completa do teorema das quatro cores. Muitos renomados matemáticos estudaram a demonstração feita por Kempe e apresentaram sugestões para que ela fosse aprimorada. Portanto, em 1879, todos consideravam o problema resolvido, comprovada a conjectura de Guthrie e estabelecido o teorema das quatro cores. No entanto, em 1890, Percy John Heawood provou que a demonstração de Kempe apresentava um erro. Ele se desculpou por não ter encontrado uma alternativa ao problema. Porém, o passo positivo dado por ele foi provar o teorema das cinco cores. Isto é, demonstrou que não é necessário mais do que cinco cores para colorir qualquer mapa, respeitando o princípio de que regiões fronteiriças apresentem sempre cores diferentes. Somente em 1976, Kenneth Appel e Wolfgang Haken apresentaram uma demonstração do teorema das quatro cores. Ainda hoje, apesar da aceitação da comunidade Matemática, a sua validade continua sendo polêmica. Isso porque a prova é demasiadamente longa para ser verificada pelos métodos tradicionais. Para se ter uma ideia, à época, um computador processou as linhas de código por mais de mil horas. Apesar de trazer uma aparente simplicidade em seu enunciado, somente após mais de cem anos, em 1976, se conseguiu provar que a conjectura de Guthrie estava certa, obtendo-se então o chamado teorema das quatro cores.

Na elaboração de cores em um mapa, utiliza-se a ideia de conversão do mapa em um grafo, que servirá de base para a demonstração das cores. Em cada região do mapa é colocado um nó e as arestas unem os nós que representam regiões fronteiriças. É preciso observar que não deve haver cruzamento entre as arestas do grafo. A Figura 37 apresenta um mapa representado por um grafo e utilizando apenas quatro cores em sua coloração.

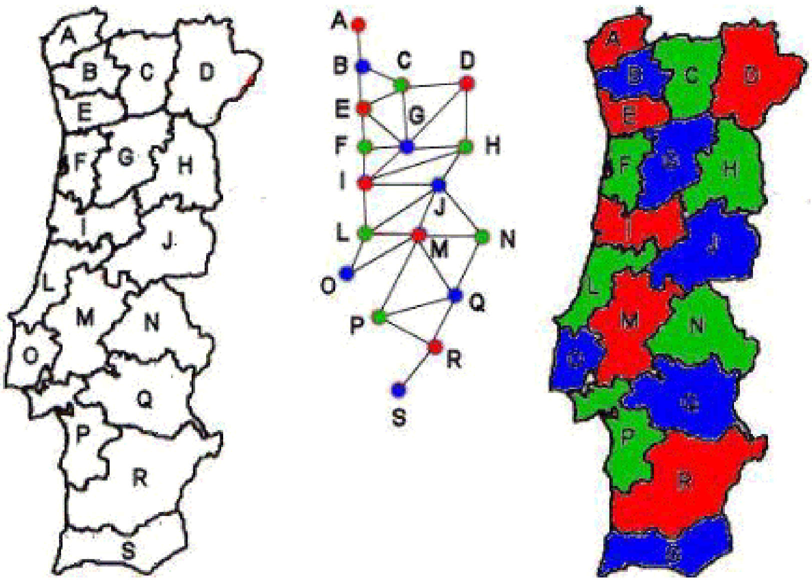


Figura 37: Mapa com representação do problema das quatro cores.

3 Possibilidades de Aplicação da Teoria dos Grafos no Ensino Fundamental

Esta seção apresenta as atividades a serem aplicadas aos alunos e nela utilizamos as seguintes referências: [2], [3], [6], [7], [8], [12], [13], [20], [23], [24], [26], [27], [28], [31], [34], [38], [39] e [44].

3.1 Competências e Objetivos Envolvidos

Público Alvo:

- Alunos dos anos iniciais e finais do Ensino Fundamental da Educação Básica.

Competências envolvidas nas atividades:

- Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas.

- Reconhecer que a Matemática é uma ciência humana, fruto das necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos, e é uma ciência viva, que contribui para solucionar problemas científicos e tecnológicos e para alicerçar descobertas e construções, inclusive com impactos no mundo do trabalho.

- Desenvolver as habilidades de raciocinar, representar, comunicar e argumentar matematicamente, de modo a favorecer o estabelecimento de conjecturas, a formulação e a resolução de problemas em uma variedade de contextos percebendo o caráter de jogo intelectual da Matemática, como aspecto que favorece o desenvolvimento do raciocínio lógico e crítico, estimula a investigação e pode ser prazeroso (fruição).

- Desenvolver o raciocínio lógico, o espírito de investigação e a capacidade de produzir argumentos convincentes, recorrendo aos conhecimentos matemáticos para compreender e atuar no mundo.

- Enfrentar situações-problema em múltiplos contextos, incluindo-se situações imaginadas, não diretamente relacionadas com o aspecto prático-utilitário, expressar suas respostas e sintetizar conclusões, utilizando diferentes registros e linguagens (gráficos, tabelas, esquemas, além de texto escrito na língua materna e outras linguagens para descrever algoritmos, como fluxogramas, e dados).

Objetivos das atividades aplicadas:

- Conceituar e resolver problemas matemáticos.
- Selecionar, organizar, relacionar e interpretar dados e informações para tomada de decisões e resolução de situação problema.
- Elaborar raciocínios lógicos e fazer uso inteligente e eficaz dos recursos disponíveis, propondo boas soluções aos problemas apresentados.
- Dotar os alunos do instrumental necessário no estudo das outras ciências e capacitá-lo no trato das atividades práticas que envolvem aspectos quantitativos da realidade.
- Implementar novas metodologias baseadas na resolução de problemas com os alunos do Ensino Fundamental.
- Estimular os alunos a realizarem aplicações interdisciplinares como forma da construção do conhecimento em situações cotidianas.

Tempo estimado para as atividades:

- Aulas de 50 minutos.

3.2 Atividade 01[1]

Metodologia:

- Apresentar aos alunos o problema base: “É possível contornar as figuras dadas sem tirar o lápis do papel, partindo de um ponto e retornando a ele mesmo no final, passando todas as linhas uma única vez, sem repetição?”

- Distribuir as Figuras 38, 39 e 40 aos alunos.

- Fornecer aos alunos 15 minutos para que resolvam o problema.

- Durante o tempo para resolução acompanhar as diversas estratégias utilizadas pelos alunos para solucionar o problema, sem manifestar-se ou auxiliá-los.

- Após concluído o tempo, abrir espaço para apresentação dos alunos que solucionaram o problema no tempo estabelecido. Caso muitos alunos não tenham conseguido, permitir por mais 5 minutos a interação.

- Com os resultados apresentados questionar junto aos alunos as dificuldades encontradas no processo, bem como o que perceberam na como semelhança ou diferença nas figuras.

- Após apresentação dos alunos, colocar no quadro a solução do problema e apresentar os conceitos básicos envolvidos, apresentar o problema das sete pontes, bem como os casos em que será possível contornar a figura passando por todos os pontos uma única vez e retornando ao ponto de partida.

- Indagar sobre como utilizar a técnica apresentada para solucionar problemas do dia-a-dia, como por exemplo, traçar a melhor rota para o

[1] Atividade elaborada pelo próprio autor da dissertação. Obs: As figuras utilizadas estão todas na lista de referências.

caminhão coletor de lixo nas vias urbanas, uma vez que é importante que ele passe em todos os pontos da cidade e uma única vez em cada via pública, retornando ao final ao ponto de partida.

- Apresentar novas figuras para que os alunos possam definir se as mesmas possuem ciclos eulerianos, e em caso positivo, que eles estabeleçam uma sequência que represente um ciclo euleriano.

Atividade 01-A

Com relação aos grafos A e B da Figura 38, os alunos devem encontrar uma maneira de contorná-las, sem tirar o lápis do papel. Nessa atividade eles irão observar que no caso do Grafo A, será possível passar por todos os pontos e linhas sem tirar o lápis do papel e retornar ao vértice de partida. No caso do Grafo B, apesar de conseguir passar por todos os pontos e linhas, uma única vez, sem tirar o lápis do papel, eles não conseguirão retornar ao ponto de partida.

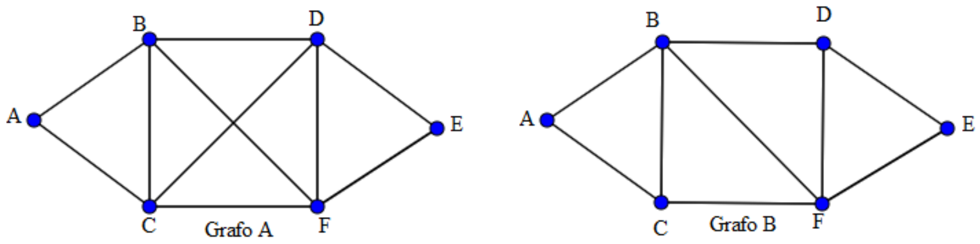


Figura 38: Grafo euleriano e Grafo semieuleriano.

Atividade 01-B

No caso da Figura 39 temos um grafo que representa o percurso em uma minimaratona que será realizada em uma cidade. O grafo apresenta 10 pontos marcados por $\{V_0, V_1, V_2, V_3, V_4, V_5, V_6, V_7, V_8, V_9\}$, onde V_4 representa o local de largada e a chegada da minimaratona e nos demais pontos os atletas devem tocar em bip´s eletrônicos instalados nesses locais. Visualizamos ainda na Figura 39 as vias que interligam todos os pontos. O aluno deve encontrar um percurso que obedeça as orientações, partindo de V_4, tocando os bip´s nos demais pontos e concluindo a prova no mesmo ponto V_4.

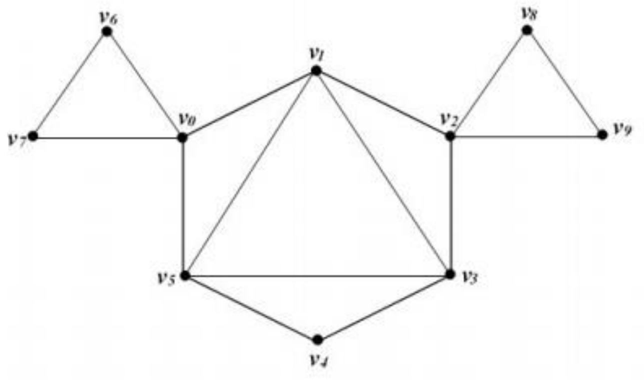


Figura 39: Grafo para atividade 01-B.

Atividade 01-C

O grafo da Figura 40 apresenta um game de computador. O jogo consiste em partir de um ponto qualquer escolhido, passar por todos os demais pontos utilizando todas as arestas do grafo e retornar ao ponto de origem. Os alunos devem encontrar um caminho possível obedecendo todas as regras.

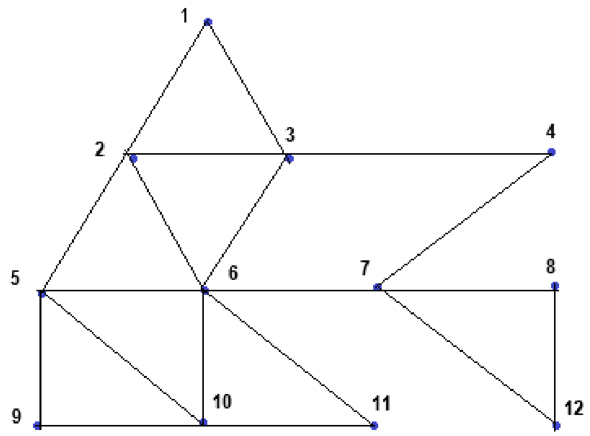


Figura 40: Grafo para atividade 01-C

Solução

Atividade 01-A

Uma sequência que pode ser descrita no Grafo A da Figura 38 e representa um ciclo euleriano seria {{A,B}; {B,D}; {D,E}; {E,F}; {F,D}; {D,C}; {C,F}; {F,B}; {B,C}; {C,A}}. No caso do Grafo B da Figura 38, a sequência seria {{C,A}; {A,B}; {B,C}; {C,F}; {F,E}; {E,D}; {D,F}; {F,B}; {B,D}}.

Atividade 01-B

No caso da minimaratona um percurso possível seria {{V_4,V_3}; {V_3,V_2}; {V_2,V_9}; {V_9,V_8}; {V_8,V_2}; {V_2,V_1}; {V_1,V_0}; {V_0,V_6}; {V_6,V_7}; {V_7,V_0}; {V_0,V_5}; {V_5,V_1}; {V_1,V_3}; {V_3,V_5}; {V_5,V_4}}.

Atividade 01-C

No caso do Grafo da Figura 40, uma possível sequência para o jogo seria {{1,2}; {2,5}; {5,9}; {9,10}; {10,11}; {11,6}; {6,7}; {7,12}; {12,8}; {8,7}; {7,4}; {4,3}; {3,2}; {2,6}; {6,5}; {5,10}; {10,6}; {6,3}; {3,1}}.

Observamos que nas atividades propostas estão sendo utilizadas as ideias de percursos, caminhos e ciclos. Ainda também notamos que devido a diferença na quantidade de vértices e arestas dos grafos apresentados pelas figuras, podemos aplicar a atividade utilizando os grafos de menores vértices e arestas para os anos iniciais e os grafos com maior número de vértices e arestas para os alunos dos anos finais, atendendo assim todos os anos do Ensino Fundamental.

3.3 Atividade 02[2]

Metodologia:

- Apresentar aos alunos a situação problema: “O assassinato do bilionário Count Van Diamond”

[2] Atividade retirada da página http://marathoncode.blogspot.com/2012/11/problemas-em-grafos.html

- Separar a turma em grupos para que possa ser analisada a capacidade de executar tarefas no coletivo e para valorizar a integração e socialização entre os alunos.

- Entregar a atividade impressa e realizar a leitura para os alunos.

- Durante o tempo para resolução acompanhar as diversas estratégias utilizadas pelos alunos para solucionar o problema, sem manifestar-se ou auxiliá-los.

- Após concluído o tempo, abrir espaço para apresentação dos alunos que solucionaram o problema no tempo estabelecido.

- Com os resultados apresentados questionar junto aos alunos as dificuldades encontradas no processo, bem como, sobre o que perceberam de semelhança na solução do problema atual com a Atividade 01.

- Após apresentação dos alunos, colocar no quadro a solução do problema e apresentar os conceitos básicos envolvidos.

Situação-Problema

O bilionário Count Van Diamond, acaba de ser assassinado. Um detetive internacionalmente famoso por utilizar a metodologia da teoria dos grafos foi convidado para solucionar o caso e apontar o assassino. Ao chegar a residência houve a alegação do mordomo de que o assassino fora o jardineiro, pois o viu entrar e sair da sala da piscina, onde o corpo do bilionário fora encontrado. Ao indagar o jardineiro, o mesmo afirmou não ser o assassino, pois havia entrado na casa e passado por todas as portas uma única vez e, em seguida, saído da casa. O detetive analisou a planta dos aposentos da casa e imediatamente apontou o culpado e solucionou o caso. Descubra você também quem é o assassino do bilionário.

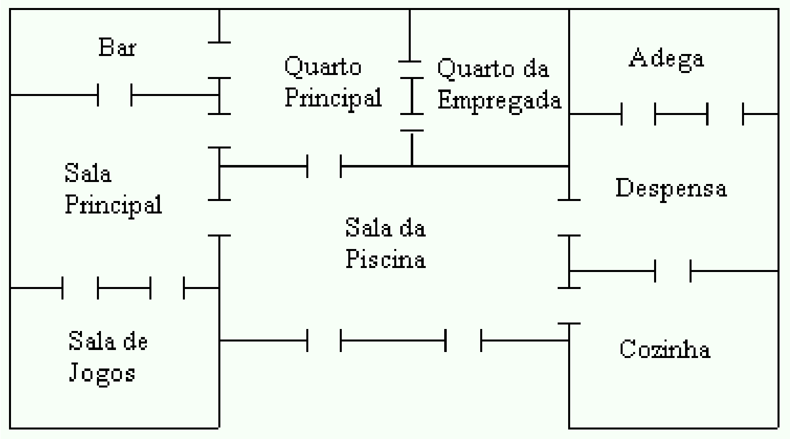


Figura 41: Planta da casa do bilionário.

Solução:

Esse é basicamente um problema de percurso, onde deve-se verificar a possibilidade de atravessar todas as portas da residência uma única vez. Para tanto, modelar-se-á o problema visando a aplicação do Teorema 1.5.5, que trata especificamente desse tipo de problema. Para solucionar o problema, os alunos devem primeiramente traçar um grafo que represente a planta da casa do bilionário Count Van Diamond. Na Figura 42 apresentamos um grafo que representa a referida planta da Figura 41.

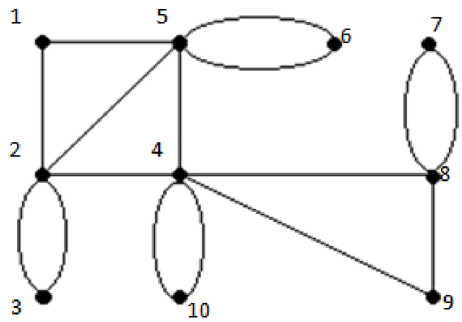


Figura 42: Grafo representativo da planta da casa do bilionário.

De acordo ao Teorema 1.5.5, o grafo não admite um ciclo euleriano, pois, apesar de ser conexo, apresenta três vértice de grau ímpar. Logo, não é possível passar por todas as portas da residência uma única vez, sendo assim, fica claro que o jardineiro é o assassino do bilionário Count Van Diamond.

3.4 Atividade 03[3]

A atividade proposta com caminhos hamiltonianos é baseada no Jogo Icosiano. O mapa icosiano é uma representação planificada do dodecaedro regular.

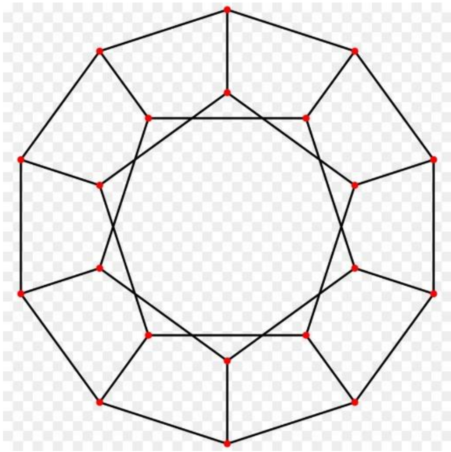


Figura 43: Dodecaedro regular.

O dodecaedro é um poliedro regular formado por 12 faces pentagonais e 20 vértices. Todos os vértices possuem grau 3 e o termo icosiano se refere aos 20 vértices presentes no grafo. O jogo foi criado pelo famoso matemático inglês Sir William Rowan Hamilton (1805-1865). O jogo consiste de um tabuleiro que propõe diversos desafios, alguns simples, outros nem tanto e alguns impossíveis. O tabuleiro é representado pelo mapa icosiano, este consiste em um grafo com 20 vértices e suas arestas, representando de forma planificada a figura do dodecaedro regular. Cada um dos vértices representa uma casa que receberá uma peça numerada com rótulos de 1 a 20. As peças demarcam a escolha de cada posição no tabuleiro do jogo.

[3] Atividade elaborada pelo próprio autor da dissertação. Obs: As figuras utilizadas estão todas na lista de referências.

Figura 44: Tabuleiro para jogo icosiano.

As arestas presentes no mapa representam o caminhos possíveis. O objetivo do jogo consiste nas definições do caminho hamiltoniano. Para vencer, deve-se descobrir um ciclo hamiltoniano e para isso algumas condições tem de ser respeitadas, como:

- O aluno deve escolher iniciar de uma casa qualquer;
- Cada casa pode ser escolhida apenas uma única vez;
- Nenhum caminho pode ser percorrido mais de uma vez;
- A casa final de chegada deve ser a mesma do início do jogo.

A Figura 45 apresenta um grafo representando o tabuleiro do jogo icosiano.

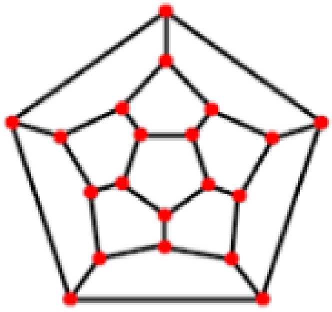


Figura 45: Grafo representando um dodecaedro.

Na Figura 45, os pontos do grafo representam as cidades de uma determinada região, onde um carteiro precisa percorrê-las através das estradas que as interligam para entregar correspondências aos moradores dessas localidades. Cada ponto será rotulado com um número e cada número deverá representar uma cidade. O carteiro deve partir da cidade onde reside e percorrer uma única vez todas as outras, retornando ao final à cidade de sua residência. Cada aluno terá uma representação como na Figura 45 e os rótulos representando as cidades para que encontrem uma solução possível para o carteiro.

Assim, os alunos ao final do jogo encontrarão um ciclo hamiltoniano. Na Figura 46 apresentamos uma planificação do dodecaedro e uma representação de um ciclo possível de um percurso para o carteiro.

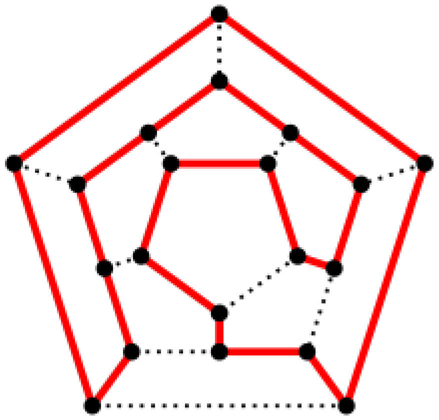


Figura 46: Grafo com ciclo hamiltoniano traçado.

3.5 Atividade 04[4]

O clássico problema do caminho mínimo é intensamente utilizado nas mais diversas áreas. Basicamente, dado um grafo rotulado ponderado, deve-se encontrar o menor caminho entre dois pontos quaisquer.

- **Breve apresentação do contexto da situação-problema a ser analisada:**

Gabriel é aluno do 1º ano do Ensino Médio do Colégio Estadual José Moreira Cordeiro. Ele é morador do Povoado de Alvorada, uma localidade rural do município de Cordeiros-BA e sempre vai à escola, que fica na área urbana do município, de moto com seu tio Geremias. Os dois vivem discutindo sobre qual o melhor caminho que poderiam utilizar de modo a diminuírem o consumo de combustível da moto utilizada. A Figura 47 representa um mapa das

[4] Atividade elaborada pelo próprio autor da dissertação. Obs: As figuras utilizadas estão todas na lista de referências.

possibilidades que eles têm de chegarem até a escola. Encontre o menor caminho entre a casa de Gabriel e a escola em que estuda.

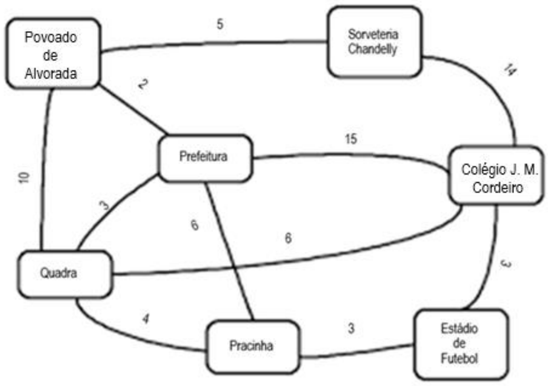


Figura 47: Grafo representando localidades da cidade de Cordeiros-BA.

Solução:

A princípio os alunos devem partir para a investigação acerca das possibilidades de deslocamento entre a casa de Gabriel e a escola. Obviamente, que por se tratar de uma atividade de pequeno grau de complexidade, entende-se que boa parte dos alunos conseguirão encontrar o caminho mínimo.

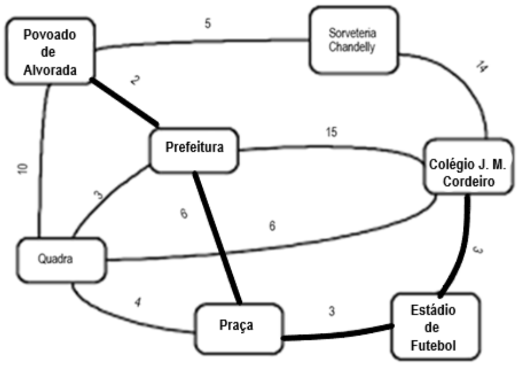


Figura 48: Grafo com caminho mínimo traçado.

A partir dessa motivação, apresentaremos outra atividade com grau maior de complexidade e que é comum em diversas áreas da indústria. Sendo assim, nos aproximamos de um dos objetivos da educação que é preparar os alunos para o mundo do trabalho.

3.6 Atividade 05[5]

- **Breve apresentação do contexto da situação-problema a ser analisada:**

O município de Cordeiros faz divisa com os municípios de São João do Paraíso-MG, Condeúba-BA, Piripá-BA, Presidente Jânio Quadros-BA. Especificamente, sua divisa com o município de São João do Paraíso é feita pela Serra Geral do Espinhaço. Essa região é rica em jazigos minerais, sendo o granito um dos maiores objetos de exploração de empresas que atuam na retirada e exportação da respectiva rocha. Qualquer tipo de exploração causa impactos ao meio ambiente, esses impactos devem ser estudados para que sejam reduzidos ao máximo e causem os menores danos possíveis à fauna e flora local.

- **Apresentação de conceitos interdisciplinares envolvidos no problema:**

1. CHAVES et al. (2018, p. 226) A Serra do Espinhaço se estende por mais que 1.200 km de extensão, na direção norte-sul, desde Belo Horizonte (região central de Minas Gerais) até o norte da Bahia. Nesse contexto, alguns domínios geográficos-geotectônicos se destacam, conhecidos como Meridional, Central, Setentrional e Chapada Diamantina. A principal sequência litoestratigráfica que sustenta o espigão serrano é o Supergupo Espinhaço, composto por metassedimentos (quartzitos predominantes, filitos e metaconglomerados), e localmente por rochas metaplutônicas e metavulcânicas.

[5] Atividade elaborada pelo próprio autor da dissertação. Obs: As figuras utilizadas estão todas na lista de referências.

2. De acordo com Raguin (1961, p.1, apud TADEU, 2006, p. 5) diz: "minérios são as substâncias minerais naturais susceptíveis de exploração e venda com lucro para serem utilizadas, em geral, depois de uma elaboração industrial física ou química".

3. De acordo com Blondel (1950, p.19, apud TADEU, 2006, p. 7) Jazigo Mineral é uma massa mineral bastante rara e bastante anormal para que a sua pesquisa necessite de métodos especiais.

4. MAURO (2011, p. 13) granitos são associações de muitas variáveis de quartzo, feldspato, micas, anfibólios, piroxênios e olivina. Alguns destes minerais podem estar ausentes, porem quartzo, feldspato, micas e anfibólios estão sempre presentes.

5. O conceito de impacto ambiental pode ser buscado na terminologia da palavra, a qual se origina do latim: impactu e significa choque ou colisão de substâncias nos três estados físicos da matéria (sólido, líquido e gasoso) de radiações ou formas variadas de energia, vindas de obras ou atividades realizadas com danosas alterações do ambiente natural, artificial, cultural ou social. Estas mudanças podem ser provocadas por diversas formas de energia ou matéria resultante de atividades antrópicas que afetam direta ou indiretamente a saúde, segurança da população, atividades econômicas e sociais, a biota e a disposição dos recursos do ambiente. (PLANTENBERG, 2002).

6. ZANZINI (2001, p. 7) A fauna silvestre compreende todas as espécies animais que vivem no ambiente livres de quaisquer normas de domesticação. Tal definição, evidentemente, inclui todos os organismos que exercem o papel de consumidores na cadeia trófica, sejam eles vertebrados ou invertebrados, sobre os quais não incidem regras pecuárias capazes de impedir seu processo de seleção natural.

7. MILARE (2001, p. 162) A flora é entendida como a totalidade das espécies que compreende a vegetação de uma determinada região, sem qualquer expressão de importância individual dos elementos que a

compõem. Elas podem pertencer a grupos botânicos os mais diversos, desde que estes tenham exigências semelhantes quanto aos fatores ambientais, entre eles os biológicos, os do solo e do clima. Também pertencem à Flora as bactérias, fungos e fitoplânctons.

- **Apresentação do problema:**

Uma indústria de exploração de rochas encontrou 5 jazigos de minérios, dispersos na região da Serra Geral, nos limites do município de Cordeiros-BA. Os jazigos foram encontrados nas comunidades de Palmeira, Coqueiro I, Araçás I Mucambo e Junco, a Figura 49 apresenta um grafo com as localizações dos jazigos e as respectivas distâncias entre eles.

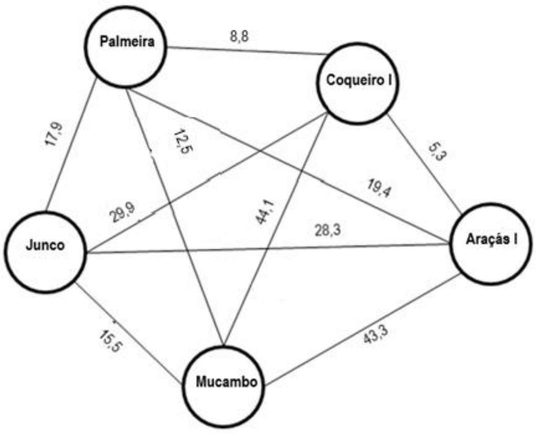


Figura 49: Grafo representando os jazigos minerais.

Esta indústria exploradora de minérios necessita construir estradas entre os jazigos de modo a minimizar o impacto ambiental, com a menor distância entre eles. Como definir as estradas a serem construídas de modo a minimizar a distância entre os jazigos, reduzindo assim os impactos ambientais na localidade?

Solução:

Passo 1: Os alunos devem escolher um jazigo qualquer para iniciar a resolução do problema, no caso da solução apresentada escolheu-se o jazigo localizado na comunidade de Palmeira.

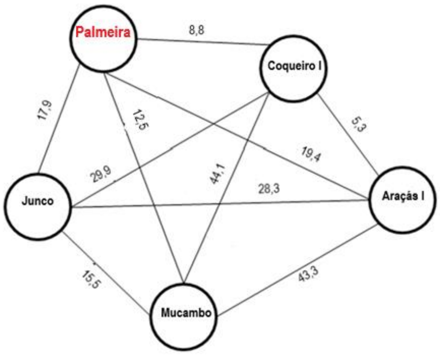


Figura 50: Grafo representando passo 1 da solução.

Passo 2: Escolher o menor caminho até o jazigo mais próximo e definir a localidade. A solução apresenta o jazigo localizado na comunidade do Coqueiro I, distante a 8,8 Km, do jazigo da comunidade de Palmeira.

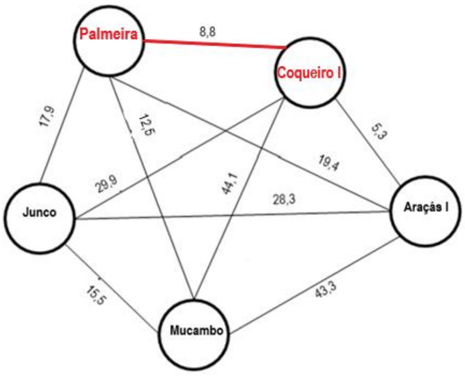


Figura 51: Grafo com o representando passo 2 da solução.

Todos os jazigos estão definidos? Se sim, o problema está concluído. Se não, seguir para o passo 3.

Passo 3: Identificar o menor caminho que parte dos jazigos já definidos. A solução apresentada define o jazigo da comunidade de Araçás I como o mais próximo entre os já definidos.

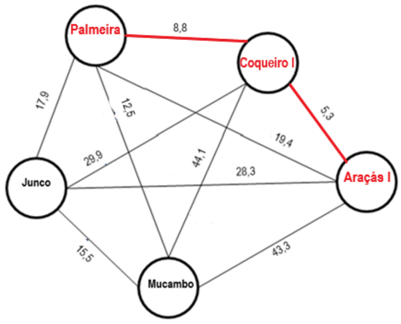


Figura 52: Grafo representando passo 3 da solução.

Todos os jazigos estão definidos? Se sim, o problema está concluído. Se não, seguir para o passo 4.

Passo 4: Identificar o menor caminho que parte dos jazigos já definidos. A solução apresentada define o jazigo da comunidade do Mucambo como o mais próximo entre os já definidos.

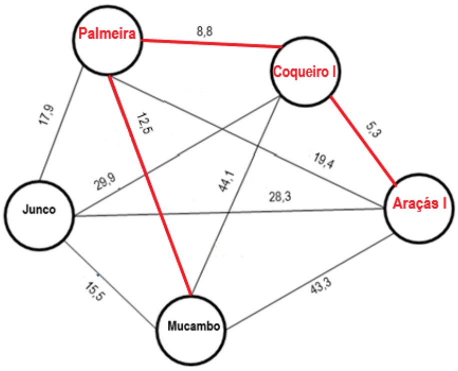


Figura 53: Grafo representando passo 4 da solução.

Todos os jazigos estão definidos? Se sim, o problema está concluído. Se não, seguir para o passo 5.

Passo 5: Identificar o menor caminho que parte dos jazigos já definidos. A solução apresentada define o jazigo da comunidade do Junco como o mais próximo entre os já definidos.

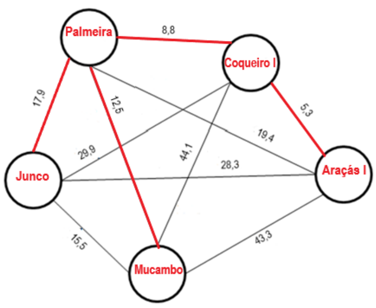


Figura 54: Grafo representando passo 5 da solução.

Todos os jazigos estão definidos? Se sim, o problema está concluído. Se não, seguir para o passo 6.

No caso específico da atividade a ser realizada, todos os jazigos estão definidos e para que sejam reduzidos os impactos ambientais, devem ser construídas as estradas Palmeira – Coqueiro I (8,8 km); Coqueiro I – Araçás I (5,3 km); Palmeira – Mucambo (12,5 km) e Palmeira – Junco (17,9 km), totalizando 44,5 km.

3.7 Atividade 06[6]

Metodologia:

- **Breve apresentação do contexto da situação-problema a ser analisada:**

Um dos grandes problemas das gestões dos sistemas municipais de educação consiste no custo do transporte escolar. Sendo uma das obrigações dos municípios, conforme Art. 11, inciso VI, da Lei 9.394 de 20/12/1996, incluído pela Lei Nº. 10.709 de 31/07/2003, assegurar o transporte público escolar da rede municipal torna-se um dos grandes desafios das secretarias municipais de educação. Diversos são os fatores que tratam da complexidade do tema, estradas em mau estado de conservação, topografia local formada por muitas serras, comunidades distantes da área urbana, falta de núcleos escolares gerando a necessidade das chamadas escolas isoladas, que agregam um pequeno número de alunos, baixo repasse de recurso aos entes municipais por parte do Programa Nacional de Apoio ao Transporte do Escolar (PNATE). Enfim, são inúmeras as dificuldades e para reduzi-las é necessário uma gestão otimizada de todo processo. Dentre as ações positivas para atenuar os custos se encontra a otimização das rotas do transporte escolar.

- **Apresentação de conceitos interdisciplinares envolvidos no problema:**

[6] Atividade elaborada pelo próprio autor da dissertação.

1. HORA (2010, p. 566) Entendemos por gestão de sistemas educacionais o processo político-administrativo contextualizado e historicamente situado, através do qual a prática social da educação é organizada, orientada e viabilizada. Assim, analisar a gestão de sistemas de ensino implica refletir sobre as políticas de educação. Isto acontece porque há uma ligação muito forte entre elas, pois a gestão transforma metas e objetivos educacionais em ações, dando concretude às direções traçadas pelas políticas.

2. O transporte escolar é serviço de utilidade pública e direito público subjetivo, ficando evidente que o Poder Público deve oferecê-lo gratuitamente para crianças e adolescentes que não tenham escola perto de casa" (BRASIL, 2006, p. 9).

3. O Programa Nacional de Apoio ao Transporte do Escolar (PNATE), instituído pela Lei nº 10.880/04, tem "o objetivo de garantir o acesso e a permanência nos estabelecimentos escolares dos alunos do ensino fundamental público residentes em área rural que utilizem transporte escolar" (BRASIL, 2011, p. 1).

- **Apresentação do problema:**

A área urbana da cidade de Cordeiros possui uma escola de Educação Infantil, três escolas de Ensino Fundamental e uma escola de Ensino Médio. Os ônibus que transportam esses alunos até as escolas citadas parte da praça da prefeitura, localizada no centro da cidade. O mapa da área urbana do município é apresentado pela Figura 55. O nosso desafio é utilizar o mapa da cidade, pontuar a localização das escolas, utilizar o aplicativo Google Earth para medir as distâncias entre as escolas, traçar um grafo orientado, conforme o sentido de deslocamento que a malha viária urbana da cidade permite, se baseando na Figura 56. De posse desse grafo é preciso que os alunos, com a informação dos veículos que realizam o transporte de estudantes dentro da área urbana, roteirizem de maneira otimizada o percurso a ser traçado pelos motoristas.

Figura 55: Mapa aéreo da área urbana de Cordeiros-BA.

Figura 56: Mapa com o traçado das vias urbanas de Cordeiros-BA.

Solução:

A Figura 57 apresenta o grafo representando as vias urbanas do município de Cordeiros, bem como o percurso otimizado a ser realizado pelos motoristas do transporte escolar como forma de racionalizar custos nessa prestação de serviço público.

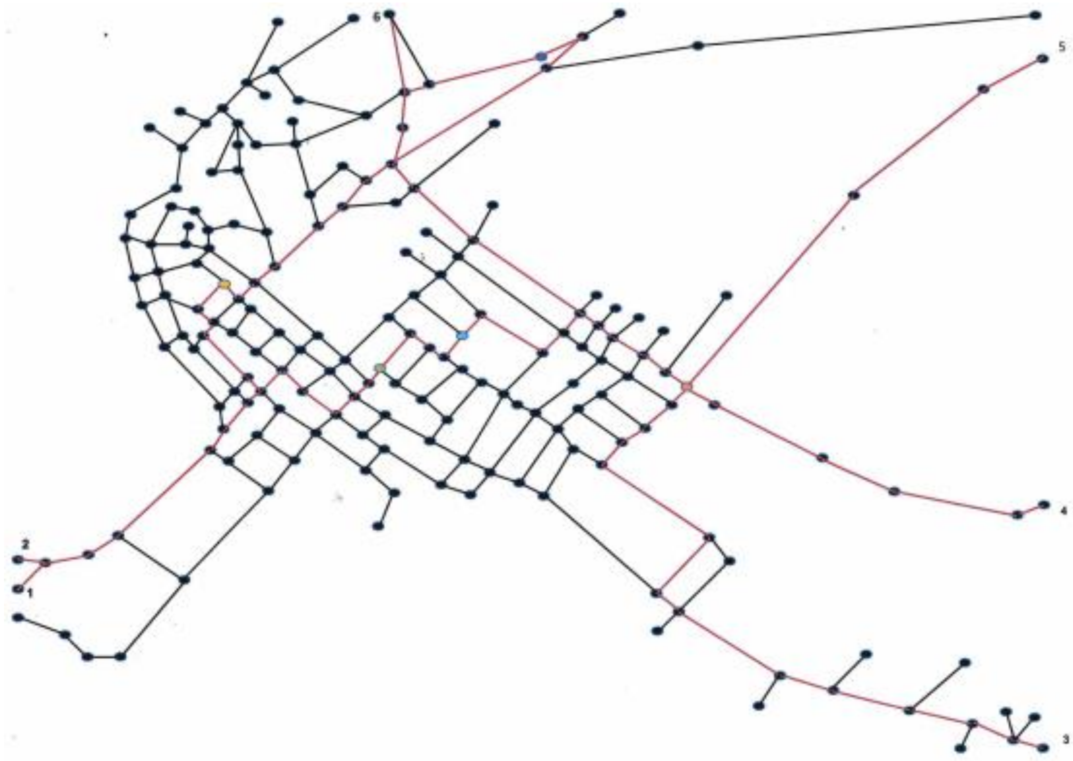


Figura 57: Grafo representando as vias da área urbana de Cordeiros.

A Legenda abaixo identifica os pontos que correspondem às escolas localizadas na área urbana da cidade de Cordeiros, conforme o grafo da Figura 57.

- Grupo Escolar Joaquim Gonçalves
- Grupo Escolar Lindolfo Landi
- Centro de Educação Municipal Lindolfo Cordeiro Landi
- CEMEI Profa. Yolanda Jardim Soares Salomão
- Colégio Estadual José Moreira Cordeiro

A Legenda abaixo enumera as linhas dos ônibus que transportam alunos na área urbana de Cordeiros, conforme se apresentam no grafo da Figura 57.

1. Linha 1: Campo Grande, Arrenegada, Coqueiro II, Coqueiro I, Araçás I, Peri-peri I, Água Branca, Quatis, Riacho da Lapa, Terra Vermelha, Malhadinha, Mirante, Alvorada, Peixe, Sobradinho, Sede.

2. Linha 2: Tesoura, Salinas, Barreiro Grande, Judeu, São J. Velho, Sede.

3. Linha 3: Assentamento Maria Zilda, Inhaúmas, Roberta Figueiredo, Sede.

4. Linha 4: São José, Pedra Branca, Mucambo, Olho D´água, Roberta Figueiredo, Sede.

5. Linha 5: Araçás II, Lagoa do Tanque, Melado, Bandarra, Pau D´água, Algodão, Floresta, Sumidouro, Lagoas, Corrégos, Roberta Figueiredo, Sede.

6. Linha 6: Divisa Condeúba, Santo Antônio, Barreiro Grande, Riacho Seco, Judeu, Peri-peri II, Barrinha, Florindo Ribeiro, Sede.

3.8 Atividade 07[7]

Metodologia:

- **Breve apresentação do contexto da situação-problema a ser analisada:**

O território de identidade do Sudoeste Baiano é uma região formada por vinte e quatro municípios, sendo que Vitória da Conquista se coloca como um centro importante para todos os demais municípios, seja no comércio, nas oportunidades de emprego, na oferta de vagas em cursos, na área da saúde, enfim ela se destaca como centro regional para esses municípios. Devido a essa versatilidade, a cidade de Vitória da Conquista acaba sendo responsável por grande parcela das empresas distribuidoras de produtos para toda a região do território. Uma determinada empresa, localizada em Vitória da Conquista, possui vendedores que se deslocam semanalmente com a responsabilidade de mapear os pedidos dos supermercados e

[7] Atividade elaborada pelo próprio autor da dissertação. Obs: As figuras utilizadas estão citadas na lista de referências.

comércios dos municípios do território do Sudoeste, a fim de que na semana seguinte a empresa envie os caminhões para realizarem as entregas.

- **Apresentação de conceitos interdisciplinares envolvidos no problema:**

1. Território de Identidade é o agrupamento identitário municipal formado de acordo com critérios sociais, culturais, econômicos e geográficos, e reconhecido pela sua população como o espaço historicamente construído ao qual pertence, com identidade que amplia as possibilidades de coesão social e territorial. (BAHIA, Dec. 12354, 2010).

- **Apresentação do problema:**

De posse das distâncias entre os municípios do Território de Identidade do Sudoeste Baiano e Vitória da Conquista e do mapa da Figura 58, os alunos devem resolver o problema de ajudar o vendedor Valdomiro a encontrar a melhor maneira de realizar o seu deslocamento. Basicamente os alunos devem elaborar um grafo para auxiliá-lo na tarefa de se deslocar para realizar os pedidos dos supermercados e dos comércios das cidades do território.

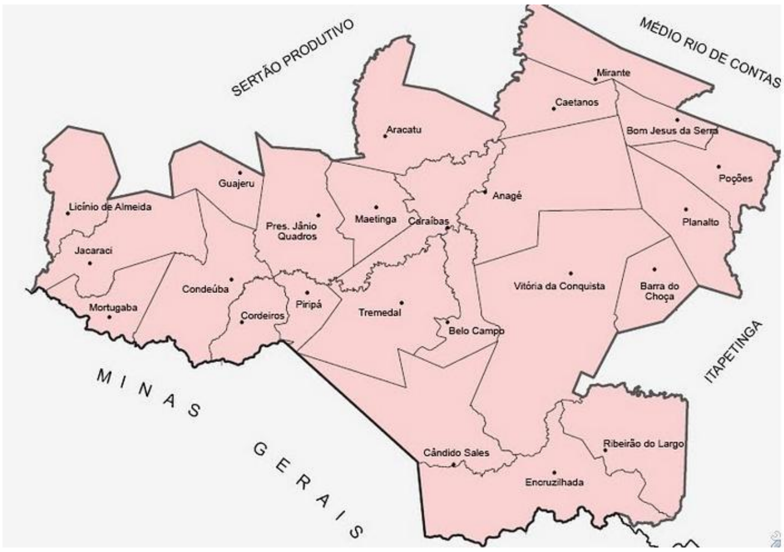


Figura 58: Mapa do Território de Identidade do Sudoeste Baiano.

Solução:

Os alunos após divididos em grupo deverão traçar um grafo que represente os municípios do território e as estradas que interligam as cidades, conforme o grafo da Figura 59.

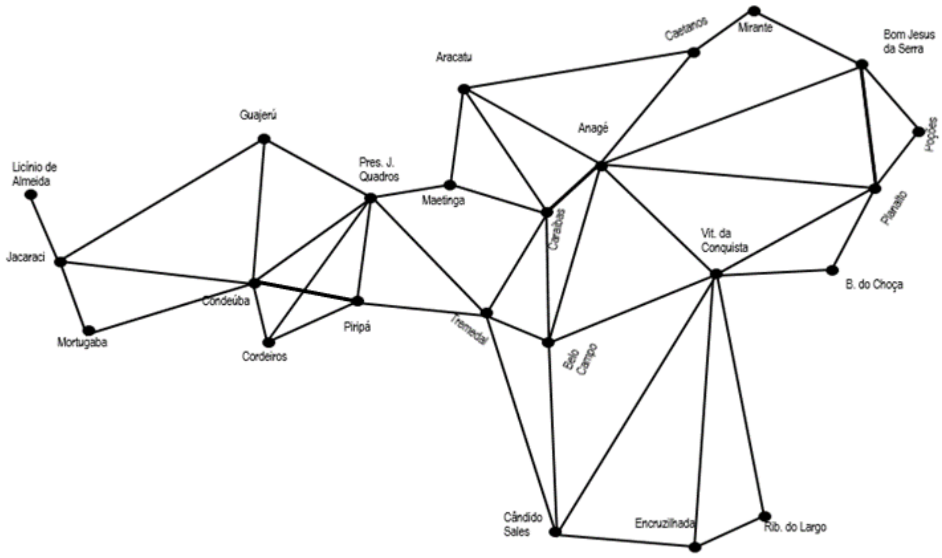


Figura 59: Grafo representativo do mapa do Território de Identidade do Sudoeste Baiano.

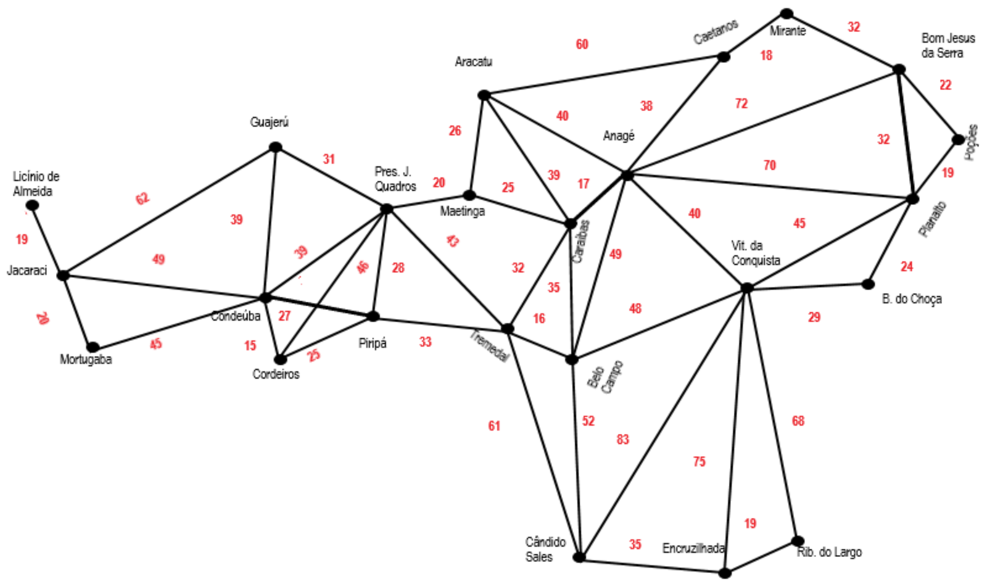


Figura 60: Grafo do Território com as distâncias entre as cidades.

Após a construção do grafo da Figura 60, os alunos devem dividi-lo em blocos para facilitar o traçado do percurso que deve ser realizado pelo vendedor, conforme exemplo nas Figuras 61, 62, 63 e 64 a seguir.

Bloco 1

Cidades: Barra do Choça, Vitória da Conquista, Ribeirão do Largo, Encruzilhada e Cândido Sales.

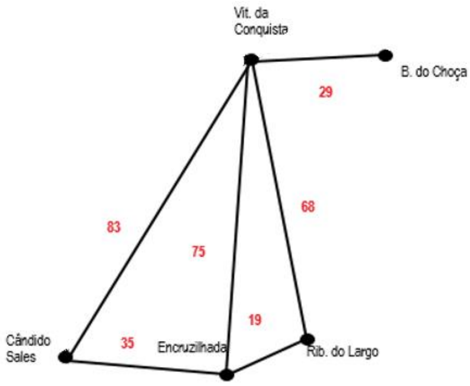


Figura 61:Grafo das cidades do bloco 1.

Bloco 2

Cidades: Anagé, Caetanos, Mirante, Bom Jesus da Serra, Poções e Planalto.

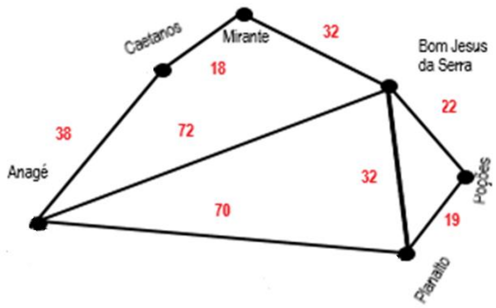


Figura 62: Grafo das cidades do bloco 2.

Bloco 3

Cidades: Aracatu, Caraíbas, Belo Campo, Tremedal, Presidente Jânio Quadros e Maetinga.

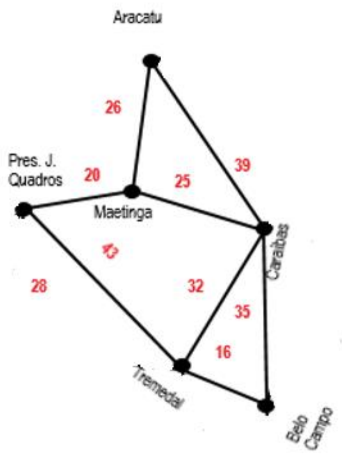


Figura 63: Grafo das cidades do bloco 3.

Bloco 4

Cidades: Guajerú, Piripá, Cordeiros, Condeúba, Mortugaba, Jacaraci e Licínio de Almeida.

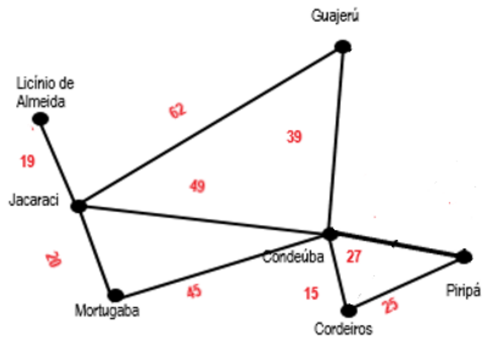


Figura 64: Grafo das cidades do bloco 4.

3.9 Atividade 08[8]

- **Breve apresentação do contexto da situação-problema a ser analisada:**

Um artista recebeu um desafio de colorir o mapa da divisão dos territórios de identidade do estado da Bahia, utilizando um número mínimo de cores e respeitando a regra de atribuir cores diferentes a territórios que se divisam. Apesar de ser um

[8] Atividade elaborada pelo próprio autor da dissertação. Obs: As figuras utilizadas estão todas na lista de referências.

artista famoso, ele nunca teve muita afinidade com a Matemática, mas foi informado por um amigo que a teoria dos grafos estuda essa possibilidade.

- **Apresentação do problema:**

O problema consiste em distribuir entre os alunos o mapa do estado da Bahia com a sua divisão por território de identidade e, juntamente com ele, distribuir caixas de lápis de cor para que os mesmos possam construir um grafo, colorir os vértices com a menor quantidade de cores possíveis e, ao fim, colorir o mapa, utilizando as restrições já apresentadas.

Figura 65: Mapa dos Territórios de Identidade da Bahia.

Os alunos devem primeiramente, construir uma grafo para facilitar os trabalhos. Cada território de identidade deve ser representado por um vértice e territórios que se divisam devem ser ligados por arestas conforme a Figura 66.

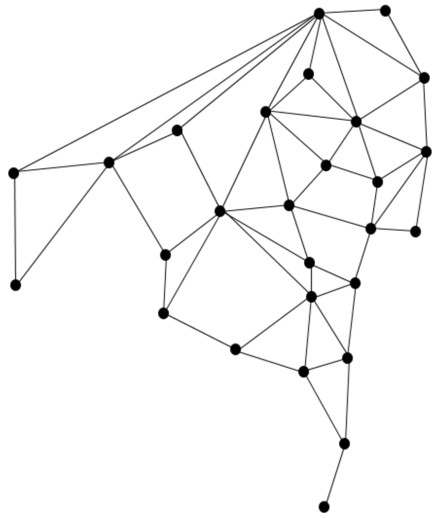
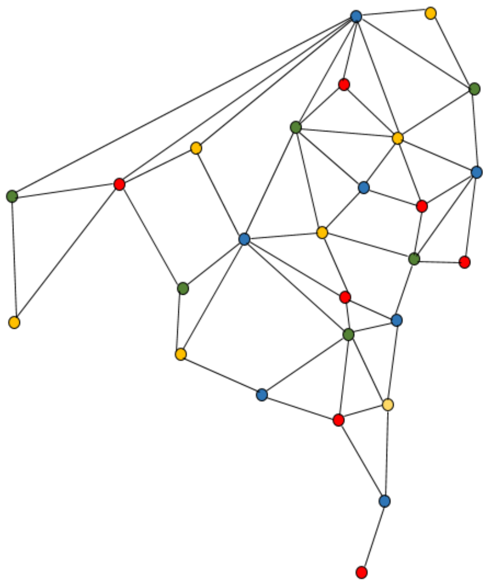


Figura 66: Grafo representativo do mapa dos Territórios de Identidade da Bahia.

Ainda como parte da atividade os alunos devem colorir os vértices do grafo criado, utilizando a menor quantidade de cores possíveis, conforme a Figura 67.



.

Figura 67: Grafo com vértices coloridos por apenas 4 cores.

Por fim, os alunos devem colorir o mapa com a menor quantidade de cores, conforme exemplo da Figura 68.

Figura 68: Mapa dos Territórios de Identidade da Bahia pintado com 4 cores.

A atividade ainda pode ser adaptada para alunos dos anos iniciais do Ensino Fundamental, diminuindo os mapas e utilizando regiões menores. É importante compreender a atividade apresenta o diferencial de aproximar a Matemática de situações que os alunos gostam em sala de aula, no caso o trabalho de colorir figuras. Essa interação, além de dinâmica e divertida, estimula o interesse dos alunos no estudo de Matemática. Após a atividade é fundamental apresentar o contexto matemático que se apresenta nessa atividade. Falar de maneira sucinta sobre o teorema das quatro cores, de suas aplicações e de sua história. Ainda assim, é fundamental que o professor sempre utilize o momento final da atividade para indagar sobre as impressões e aprendizados adquiridos pelos alunos com a atividade apresentada. Isso desperta o interesse para demais atividades que envolvam conhecimentos matemáticos.

4 Considerações Finais

Durante o estudo da teoria dos grafos pudemos observar que grande parte do desenvolvimento da mesma se deu na perspectiva de resolver problemas. Como exemplos, podemos citar o problema das pontes de Kögnisberg, o problema do caixeiro viajante, o problema do carteiro chinês, o problema da coloração de mapas. É também fato que o conteúdo grafos não é abordado nos anos da Educação Básica, ao menos nos livros didáticos que o Programa Nacional do livro Didático (PNLD) apresenta. No entanto, com a homologação da (BNCC), todas as redes de educação devem reelaborar os seus currículos e matrizes curriculares. A consolidação da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) nos traz uma mudança fundamental, pois saímos da antiga metodologia de partir de conteúdos para se alcançar as habilidades e objetivos e migramos, de forma que agora, na reelaboração dos currículos e matrizes curriculares, devemos partir das habilidades mínimas exigidas para a modalidade/ano e chegar aos conteúdos que potencializam ao estudante a aquisição e desenvolvimento dessas habilidades e competências. Isso por si só é um grande passo porque permite maior autonomia na definição dos conteúdos e na estratégia de utilização dos mesmos para alcançar as habilidades. Com efeito, verificando o texto original da base, observamos algumas colocações que nos aproximam do que observamos no estudo sobre os grafos, principalmente na afirmação que é de fundamental importância considerar o papel heurístico das experimentações no aprendizado de Matemática. Ainda se amparando no contexto das competências específicas da área para a etapa, segundo a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), é necessário

> Utilizar processos e ferramentas matemáticas, inclusive tecnologias digitais disponíveis, para modelar e resolver problemas cotidianos, sociais e de outras áreas de conhecimento, validando estratégias e resultados.

Essa afirmação vai de encontro àquilo que apresentamos no trabalho desenvolvido. Pois a teoria dos grafos nos oferece um conjunto de ferramentas que viabilizam a aplicação da metodologia da resolução de problemas. É fundamental observar que a resolução de problemas estimula a criatividade, o senso crítico, tudo isso tornando a aprendizagem mais significativa e prazerosa, pois os alunos com essa proposta são estimulados a produzir estratégias para a resolução das atividades, contribuindo assim com um dos pilares da educação que é o aprender a fazer. Além de que, a resolução de problemas é capaz de criar mecanismos que permitam ao aluno um ambiente de descobertas propício ao aprendizado de Matemática. Ainda podemos citar que segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN's),

> O fato de o aluno ser estimulado a questionar sua própria resposta, a questionar o problema, a transformar um dado problema numa fonte de novos problemas, evidencia uma concepção de ensino e aprendizagem não pela mera reprodução de conhecimentos, mas pela via da ação refletida que constrói conhecimentos. (ibid., p. 33).

Por fim, consideramos que a nova proposição que apresenta a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) permite a reelaboração dos currículos à luz da autonomia do professor da área, permitindo que o mesmo parta das habilidades específicas exigidas para a etapa/modalidade e utilize os conteúdos da área para se alcançar as mesmas. Nessa perspectiva, a teoria dos grafos nos apresenta inúmeras possibilidades que adequadas à cada etapa/modalidade permitem a sua aplicação, na metodologia da resolução de problemas, incentivando a criatividade e o desenvolvimento do senso crítico na criação de estímulo e incentivo à aprendizagem em Matemática.

Referências

[1] ASSIS, J. S. M. Grafos eulerianos no Ensino Médio. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática). Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 2016.

[2] BAHIA, Decreto Nº. 12.354 de 25 de agosto de 2010. Institui o programa Territórios de Identidade e dá outras providências. Disponível em: < http:// www.demacamp.com.br/svo/assets/decreto_2010_12354_institui-o-programa-territórios -de-identidade-e-dá-outras-providências.pdf>. Acesso em 11/02/2019.

[3] BEZERRA, C. A. Aplicações de grafos: Exemplos em engenharia de produção. Disponível em https://acervodigital.ufpr.br/bitstream/handle/1884/55872/aplicacoesGrafos .pdf?sequence=1&isAllowed=y. Acesso em 11/02/19.

[4] BOAVENTURA NETTO, P. O. Grafos: Teoria, Modelos Algoritmos, 3ª.ed. São Paulo: Edgard Blücher, 2003.

[5] BRASIL. Base Nacional Comum Curricular: Educação Infantil e Ensino Fundamental. Brasília: MEC/Secretaria de Educação Básica, 2017.

[6] ———. Lei 9.394, de 20 de dezembro de 1996. Estabelece as Diretrizes e Bases da Educação Nacional. Diário Oficial da União, Brasília, DF, v. 11, 2015.

[7] ———. Lei nº 10.709, de 31 de julho de 2003. Acrescenta incisos aos artigos 10 e 11 da Lei no 9.394, de 20 de dezembro de 1996, que estabelece as diretrizes e bases da educação nacional e dá outras providências. 2003. Disponível em:<http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/leis/2003/110.709.htm>. Acesso em: 11/02/19.

[8] ———. Lei nº 10.880, de 9 de Junho de 2004. Institui o Programa Nacional de Apoio ao Transporte do Escolar - PNATE e o Programa de Apoio aos Sistemas de Ensino para Atendimento à Educação de Jovens e Adultos, dispõe sobre o repasse de recursos financeiros do Programa Brasil Alfabetizado, altera o art. 4o da Lei 9.424, de 24 de dezembro de 1996, e dá outras providências. Disponível em:< http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/_Ato2004-2006/2004/Lei/L10.880.htm>. Acesso em: 11/02/19.

[9] ———. Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática / Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC / SEF, 1997.

[10] BRITO, A. P. Grafos, a fórmula de Euler e os poliedros regulares. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática). Universidade Federal Rural do Pernambuco, Recife, 2014.

[11] CARDOSO, B. N. Grafos eulerianos na Educação Básica. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática). Pontifícia Universidade Católica, Rio de Janeiro, 2017.

[12] CHAVES, Mário Luiz de Sá Carneiro et al. Idades U-Pb em Xenotímio-(Y) de um veio de Quartzo com Almeidaíta e Parisita-(La), novos minerais encontrados na serra do espinhaço (Novo Horizonte, Bahia). Disponível em:< https://www.revistageociencias.com.br/geocienciasarquivos/37/volume37_2_files/37-2-artigo-01.pdf>. Acesso em: 11/02/19.

[13] CORAL, L. N,et al. O uso da teoria dos grafos no jogo icosiano. Disponível em <http://periodicos.unesc.net/sulcomp/article/view/2072/1963>. Acesso em 11/01/19.

[14] DANTE, L. R. Didática da resolução de problemas de Matemática. 2. ed. São Paulo: Ática, 1991.

[15] ———. Formulação e resolução de problemas de matemática: teoria e prática. São Paulo: Ática, 2011.

[16] FEOFILOFF, P. Ciclos e digrafos acíclicos. Disponível em:<https://www.ime.usp.br/~pf/analise_de_algoritmos/aulas/cycles-and-dags.html>. Acesso em 11/02/19.

[17] FEOFILOFF, P.; KOHAYAKAWA, Y.; WAKABAYASHI Y. Uma Introdução Sucinta à Teoria dos Grafos. Disponível em: < https://www.ime.usp.br/~pf/teoriadosgrafos/> Acesso em: 04/01/19.

[18] FERREIRA, A. F. BORGES, L. M. As pontes de Kögnisberg. Disponível em:<https://www.fc.unesp.br/Home/Departamentos/Matematica/revistacqd2228/v5a06-as-pontes-de-konigsberg.pdf>. Acesso em 11/02/19.

[19] FREIRE, Paulo. Pedagogia do Oprimido. Rio de Janeiro. Paz e terra, 42 ed. 2005.

[20] FREITAS, A. R. R. Resolvendo o problema do Caixeiro Viajante via procedimento de busca adaptativa aleatória gulosa com construção baseada em redes neurais auto-organizáveis. Disponível em: <http://www.decom.ufop.br/alan/papers/UFOP2009A5.pdf>. Acesso em 11/02/19.

[21] GONÇALVES, M. C. O programa de enriquecimento instrumental de Reuven Feuerstein como requisito para o estudo de Teoria dos Grafos. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática).Universidade Estadual de Santa Cruz, Ilhéus, 2018.

[22] GUEDES, André Luiz Pires. Teoria dos Grafos. Disponível em: <http://www.inf.ufpr.br/andre/>. Acesso em 11/02/19.

[23] HORA, D. L. Gestão dos sistemas educacionais: modelos e práticas exercidas na Baixada Fluminense. Disponível em:< https://seer.ufrgs.br/rbpae/article/viewFile/19799/11537>. Acesso em: 11/02/2019.

[24] JURKIEWICZ, S. Grafos: Uma Introdução. Apostila Estilo OBMEP, Sociedade Brasileira de Matemática, 2009.

[25] LUÍS, A. B. J. Grafos Eulerianos y Hamiltonianos. Disponível em:<https://sites.google.com/site/mdisc11211217/unidad-vi---grafos/grafos-eulerianos-y-hamiltonianoss>. Acesso em: 11/02/19.

[26] MAURO, Giovanna Callegari. Estudo do processo produtivo dos granitos no estado do espírito santo objetivando a aplicação destes na construção civil. Disponível em:< http://pos.demc.ufmg.br/novocecc/trabalhos/pg2/74.pdf>. Acesso em 11/02/2019.

[27] MILARÉ, É. Direito do Ambiente. 2. Edição, revisada, atualizada e ampliada. São Paulo: Revista dos Tribunais, 2001, p.162. http://www.ibilce.unesp.br/Home/Departamentos/MatematicaAplicada/socorro4029/geuleriano_2014_3.pdf>. Acesso em 11/02/19.

[28] OLIVEIRA, V. A. et al. Grafos Eulerianos. Disponível em <http://www.ibilce.unesp.br/Home/Departamentos/MatematicaAplicada/docentes/socorro/grafoseulerianos.pdf>. Acesso em 11/02/19.

[29] ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G. Pesquisa Em Resolução de Problemas: Caminhos, Avanços e Novas Perspectivas. Bolema, Rio Claro, v. 25, n. 41, p. 73-98. 2011.

[30] PINA, J. C. Algoritmos em grafos. Disponível em: <https://www.ime.usp.br/~coelho/mac0328-2011/aulas/aula15.pdf>. Acesso em: 11/02/19.

[31] PLANTENBERG, C. M.; AB'SABER, A. N. Previsão de Impactos O Estudo de Impacto Ambiental no Leste, Oeste e Sul. Experiências no Brasil, na Rússia e Alemanha. 2 ed. Universidade de São Paulo, 2002.

[32] POLYA, G. A arte de resolver problemas: um novo aspecto do método matemático. Tradução e adaptação de Heitor Lisboa de Araújo. 2. reimpr. Rio de Janeiro: Interciências, 1995.

[33] RANGEL, Maria do Socorro N; OLIVEIRA, Valeriano Antunes de; Araújo, Sílvio, A, de. Teoria dos Grafos-Notas de Aula. Disponível em: < https://www.ibilce.unesp.br /#!/departamentos /matematica-aplicada/docentes/socorro /disciplinas/teoria-dos-grafos/>. Acesso em 11/02/19.

[34] SANTOS, L. C. B. Teoria de Grafos na educação secundária: uma proposta. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática). Pontifícia Universidade Católica, Rio de Janeiro, 2017.

[35] SILVEIRA, J. F. P. Problema do Caixeiro Viajante. Disponível em: <http://www.mat.ufrgs.br/~portosil/caixeiro.html>. Acesso em: 11/02/19.

[36] SKOVSMOSE, Ole. Educação crítica: incerteza, matemática e responsabilidade. Tradução de Maria Aparecida Viggiani Bicudo. São Paulo: Cortez, 2007.

[37] SOUZA, R. F. Resolução de problemas via teoria dos grafos. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática). Universidade de São Paulo, São Carlos, 2014.

[38] TADEU, Décio. Conceitos técnicos e classificação dos jazigos minerais. Disponível em: < https://fenix.tecnico.ulisboa.pt/downloadFile/3779571271361/Conceitos%20base%20e%20Classifica>. Acesso em 11/02/19.

[39] TAVARES, Wladimir Araújo de. Problemas em Grafos. Disponível em: <http://marathoncode.blogspot.com/2012/11/problemas-em-grafos.html>. Acesso em 11/02/19.

[40] TOFFOLO, Túlio. Análise de Algoritmos – Parte 06. Disponível em: < https://slideplayer.com.br/slide/1814081/>. Acesso em 02/05/19.

[41] VIEIRA, A. J. T. Teoria dos grafos e aplicações. Disponível em:< http://www.joinville.udesc.br/portal/professores/adalberto/materiais/AULA_05__TEORIA_DOS_GRAFOS_E_APLICA__ES.pdf>. Acesso em 11/02/19.

[42] VULCANI, R. L. M. Grafos eulerianos e aplicações. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática). Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2015.

[43] VYGOTSKY, L. S. A Formação Social da Mente: O Desenvolvimento dos Processos Psicológicos Superiores. 5.ed. São Paulo (Brasil): Martins Fontes, 1996.

[44] ZANZINI, Antônio Carlos da Silva. *Fauna silvestre*. Lavras: UFLA/FAEPE, 2000, p.7.