Universidade Federal de Mato Grosso

Instituto de Ciências Exatas e da Terra

Departamento de Matemática

“Advinha número”: Número é uma questão de simbologia

Wilson Luís Rockenbach

Mestrado Profissional em Matemática: PROFMAT/SBM

Orientador: **Prof. Dr. Martinho da Costa Araújo**

Trabalho financiado pela Capes

Cuiabá - MT

Março de 2013

“Advinha número”: Número é uma questão de simbologia

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação devidamente corrigida e defendida por Wilson Luís Rockenbach e aprovada pela comissão julgadora.

Cuiabá, 16 de março de 2013.

Prof. Dr. Martinho da Costa Araújo
Orientador

Banca examinadora:

Prof. Dr. Martinho da Costa Araújo (UFMT)
Prof. Dr. Geraldo Lucio Diniz (UFMT)
Prof. Dr. Jefferson Cruz dos Santos Leite (UFPI)

Dissertação apresentada ao curso de Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT da Universidade Federal de Mato Grosso, como requisito parcial para obtenção do título **de Mestre em Matemática**.

Dados Internacionais de Catalogação na Fonte.

R682a Rockenbach, Wilson Luís.
"ADVINHA NÚMERO": : NÚMERO É UMA QUESTÃO DE SIMBOLOGIA / Wilson Luís Rockenbach. -- 2013
39 f. ; 30 cm.

Orientador: Dr. Martinho da Costa Araújo.
Dissertação (mestrado profissional) - Universidade Federal de Mato Grosso, Instituto de Ciências Exatas e da Terra, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Cuiabá, 2013.
Inclui bibliografia.

1. binários. 2. base 2. 3. jogos. 4. mudança de base. I. Título.

Ficha catalográfica elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Dissertação de Mestrado defendida em 16 de março de 2013 e aprovada pela banca examinadora composta pelos Professores Doutores

---

Prof. Dr. Martinho da Costa Araújo

Prof. Dr. Geraldo Lucio Diniz

Prof. Dr. Jefferson Cruz dos Santos Leite

Dedico este trabalho à Deus, à minha família e aos meus amigos que muito me apoiaram.

Resumo

Este jogo de cartões "Adivinha Número", seguido da análise de suas propriedades permite introduzir os números binários a partir dos números decimais. Os números são símbolos, representam quantidades de uma grandeza, são abstratos. Há vários sistemas de representar os números naturais. O tema escolhido neste trabalho é a representação dos números naturais, pois os "Números são entes abstratos, desenvolvidos pelo homem como modelos que permitem contar, medir e, portanto, avaliar as diferentes quantidades de uma grandeza".

Palavras chave: Ensino e aprendizagem; sistema binário; jogos.

Abstract

This card game “Guess Number”, along with analysis of their properties, which allows introducing the binary numbers from decimal numbers. Numbers are symbols that represent quantities of a magnitude. There are several systems for representation of natural numbers. This work was chosen as theme representation of numbers, because “Numbers are abstract entities, developed by man as models that allow to count, measure and therefore assesses the different quantities of a magnitude”.

Keywords: Teaching and learning; binary system; games.

Sumário

Introdução

Este trabalho tem como objetivo apresentar algumas propriedades matemáticas, que deve existir no jogo de tabelas que denominamos "Adivinha número", e demonstrar de maneira didática, como o estudo de suas propriedades permite introduzir os números binários em relação aos números decimais.

Devemos ressaltar a necessidade de que o professor de matemática tenha um domínio da matemática, o conhecimento que possibilite estabelecer com naturalidade as relações entre a matemática e as outras coisas aplicadas fortalecendo a matemática pela matemática. Utilizar o tempo de aula entre o contexto (aplicações) e a parte algébrica.

Spinelli [2012] diz, que contextualizar matemática, significa: falar sobre a história da matemática, sobre os matemáticos; é abstrair e, assim, fortalecer a matemática pela matemática; e é saber aplicá-la em suas atividades do cotidiano. Assim, ao determinar qual assunto abordar, irá propor "o problema", que o aluno resolverá, pensando por si mesmo. Proporcionando ao aprendiz identificar as relações entre a matemática que esta estudando e as outras coisas. Como fazer isso? Estabelecer "O problema" que proporcione o exercício de sistematização matemática por indução para qualquer coisa. Para o professor é ousar, com o propósito de ensinar a matemática pela matemática em situações mais diversas.

Exposto isto, o nosso problema enquanto professor é "chamar a atenção do aluno para a matemática pela matemática". Isso não é ensinar somente o que os alunos gostam, é estabelecer as relações entre as situações nas quais a matemática serve de algo. Mas sempre tendo em vista a seguinte observação:

"Provar o óbvio transmite a falsa impressão de que a matemática é inútil [. . .]. As demonstrações, quando objetivas e bem apresentadas, contribuem para desenvolver o raciocínio, o espírito crítico, a maturidade e ajudam a entender o encadeamento lógico das proposições matemáticas" Lima [2006].

Na matemática o sistema da representação dos números naturais, não é simples emissão de sons. O nome, as palavras, tem um significado, e sua lógica de funcionamento. No sistema decimal posicional cada símbolo representa uma função dentro de um sistema (como um todo). A mesma coisa o sistema binário posicional, a sua representação simbólica tem o mesmo significado, com um funcionamento diferenciado.

Familiarizar o aprendiz através de um problema, um meio matemático que permite lidar com diferentes sistemas de símbolos numéricos, faz com que a automatização seja suprida, e a apropriação do funcionamento dos diferentes sistemas alcance seu objetivo e seja apreendido. Sendo o sistema decimal posicional automatizado, decorado pelos aprendizes, ao proporcionar tal problema e no decorrer da resolução, faz com que desperte nos alunos a percepção para o funcionamento dos sistemas numéricos.

A representação do número natural mais comum é a do sistema decimal posicional. Conforme Hefez [2011], sobre a História do sistema decimal posicional, comenta que os números decimais têm origem indiana e quem trouxe para o Ocidente foram os árabes e foi altamente descriminado na Europa, condenavam seu uso. Há registros no século XIII de um banqueiro ameaçando um funcionário de demissão caso utilizasse o sistema decimal. No decorrer dos tempos, perceberam a facilidade na sua utilização e hoje é um sistema utilizado pelos leigos em matemática pelo mundo todo.

O sistema binário posicional é outro sistema, desconhecido no cotidiano, mas muito utilizado nos computadores. Uma característica comum a esses sistemas de numeração é o fato de serem todos sistemas posicionais com base constante.

A Historia do sistema binário posicional é composta por matemáticos que propõem um modelo diferenciado de medir e contar. O sistema binário é posicional semelhante ao sistema decimal, porém em vez de dez símbolos temos apenas o 0 (zero) e o 1 (um). Boole fundamentou tal sistema que já tinha sido estudado anteriormente pelo matemático indiano Pingala no século III a.C. e apresentado de forma abrangente por Leibniz no século XVIII d.C.

Atualmente este sistema binário de numeração é utilizado em equipamentos eletrônicos. Estão presentes desde os sistemas de programação (software) como nos próprios computadores (hardware), nos celulares, televisores e em outros tantos eletrônicos que fazem parte do cotidiano dos jovens, e presente de alguma maneira nas atividades de todas as pessoas.

No primeiro capitulo apresentamos o jogo “Advinha número” e em seguida, fazemos uma introdução aos elementos históricos que compõem as simbologias de representação do sistema binário e do sistema decimal.

No segundo capítulo fazemos uma análise dos elementos que fazem parte do jogo, ou seja, das suas tabelas. Demonstramos as ferramentas matemáticas e as propriedades que regem a confecção do jogo. Com especial atenção aos seguintes conteúdos: sequência, progressão aritmética, progressão geométrica.

No terceiro capítulo apresentamos de maneira didática como devem ser construídas as “tabelas que compõem o jogo, neste caso, usamos o sistema decimal (base 10) e suas relações com o sistema binário (base 2), como também utilizamos a mudança de uma base para outra.

No quarto capitulo faremos as considerações finais analisando os estudos das ferramentas matemáticas e suas aplicações em sala de aula.

Capítulo 1

Apresentação do jogo "Adivinha número"

Este jogo não tem autor ou nome definido, é vendido em algumas bancas de revistas em Cuiabá/MT, é comum entre os jovens de nossa cidade e faz parte do cotidiano, ou seja, é popularmente conhecido. Mexe com o imaginário e ao mesmo tempo desperta a curiosidade dos alunos. A seguir apresentaremos as tabelas e as regras contidas no jogo "Adivinha número".

1.1 Tabelas

(a) Tabela 1

1	3	5	7
9	11	13	15
17	19	21	23
25	27	29	31
33	35	37	39
41	43	45	47
49	51	53	55
57	59	61	63

(b) Tabela 2

2	3	6	7
10	11	14	15
17	19	21	23
25	27	29	31
33	35	37	39
41	43	45	47
49	51	53	55
57	59	61	63

(c) Tabela 3

4	5	6	7
12	13	14	15
20	21	22	23
28	29	30	31
36	37	38	39
44	45	46	47
52	53	54	55
60	61	62	63

(d) Tabela 4

8	9	10	11
12	13	14	15
24	25	26	27
28	29	30	31
40	41	42	43
44	45	46	47
56	57	58	59
60	61	62	63

(e) Tabela 5

16	17	18	19
20	21	22	23
24	25	26	27
28	29	30	31
48	49	50	51
52	53	54	55
56	57	58	59
60	61	62	63

(f) Tabela 6

32	33	34	35
36	37	38	39
40	41	42	43
44	45	46	47
48	49	50	51
52	53	54	55
56	57	58	59
60	61	62	63

Tabela 1.1: Tabelas do jogo

1.2 Regras

1) Peça para uma pessoa pensar em um número de 1 a 63.

2) Depois, com o intuito de adivinhar o número, mostre a ela uma das 6 tabelas e pergunte se tem o numero pensado por ela, caso tenha o numero separe o cartão, faça isso com todas as 6 tabelas.

3) Feito isso, pegue os cartões que contém o número pensado pela pessoa e some todos os primeiros números do canto superior esquerdo e diga o resultado, adivinhando assim o número pensado por ela.

Exemplo: nas tabelas abaixo vemos que o número pensado foi o número 10 que existe nos dois cartões e é a soma de $8 + 2$ (números do canto superior esquerdo).

(a)

2	3	6	7
10	11	14	15
18	19	22	23

(b)

8	9	10	11
12	13	14	15
24	25	26	27

Tabela 1.2: Exemplo do jogo.

$$2 + 8 = 10$$

Definida as tabelas e as regras deste jogo, vamos fazer as análises para verificar as fermentas matemáticas usadas na confecção das tabelas.

As primeiras análises das características do jogo com 6 tabelas são: Quais são os primeiros números do canto superior esquerdo de cada cartão ou tabela? Qual o motivo que leva o acerto do numero escolhido somando os números do canto superior esquerdo de cada tabela? Qual o motivo do numero de elementos de cada tabela ser iguais? Como confeccionar as tabelas de uma forma didática? Como é possível adivinhar o número que a pessoa escolheu, entre os números contidos nas tabelas, matematicamente? Como é possível estabelecer, através da matemática, qual o número escolhido? Como montar um jogo com diferentes números de tabelas?

Capítulo 2

Estabelecendo as propriedades

A metodologia utilizada para estabelecer as propriedades matemáticas existentes nas tabelas do "Adivinha Número" inicia com analise de cada uma das tabelas e identificando as ferramentas matemáticas que podemos usar para responder a algumas perguntas características apresentadas no jogo, tendo como referência de estudo as obras dos autores, Avila [2003], Contador [2006], Gersting [2004], Hefez [2011], Iezzi [2004], Lima [2006], Menezes [2005] e Santos [2011].

Primeiro, observamos que cada uma das tabelas em seu canto superior esquerdo apresenta os números $1, 2, 4, 8, 16$ e 32, e estes números estão diretamente relacionados às potências de base 2, teremos $2^0, 2^1, 2^2, 2^3, 2^4$ e 2^5. Portanto, chegamos a seguinte conclusão:

2.1 Propriedade 1

Os primeiros números do canto superior esquerdo de cada cartão ou tabela são resultados de potências de base 2 com expoentes naturais.

Sabemos que todo numero natural se escreve de modo único como soma de potências distintas de base 2, ver corolário Hefez [2011].

Todo numero natural se escreve de modo único como soma de potências distintas de 2.

A seguir vamos fazer uma analise para verificar que acontece com os termos subsequentes de cada tabela. No caso da Tabela 1.1(a) temos, $1, 3, 5, 7, 9, ..., 63$, ou seja, são números impares. Pelo COROLÁRIO de Hefez [2011] podemos estabelecer na seguinte forma:

$1 \Longrightarrow 2^0$

$3 \Longrightarrow 2^1 + 2^0$

$5 \Longrightarrow 2^2 + 2^0$

$\ldots$

$63 \Longrightarrow 2^5 + 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2^1 + 2^0$

Logo, verificamos que qualquer número que pertence a Tabela 1.1(a) tem a potência 2^0 quando decompostos como soma, de potências de base 2 distintas. Analisando a Tabela 1.1(b), temos que

$2 \Longrightarrow 2^1$

$3 \Longrightarrow 2^1 + 2^0$

$6 \Longrightarrow 2^2 + 2^1$

$7 \Longrightarrow 2^2 + 2^1 + 2^0$

$\ldots$

$63 \Longrightarrow 2^5 + 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2^1 + 2^0$

Novamente, verificamos que todos os elementos desta tabela têm a potência 2^1 quando decompostos com potência de base 2.

O mesmo acontece com os elementos das tabelas 3, 4, 5 e 6, logo escrevemos:

Tabela 1.1(c)

$4 \Longrightarrow 2^2$

$5 \Longrightarrow 2^2 + 2^0$

$6 \Longrightarrow 2^2 + 2^1$

$7 \Longrightarrow 2^2 + 2^1 + 2^0$

$12 \Longrightarrow 2^3 + 2^2$

$13 \Longrightarrow 2^3 + 2^2 + 2^0$

$\ldots$

$63 \Longrightarrow 2^5 + 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2^1 + 2^0$

Tabela 1.1(d)

$8 \Longrightarrow 2^3$

$9 \Longrightarrow 2^3 + 2^0$

$10 \Longrightarrow 2^3 + 2^1$

$11 \Longrightarrow 2^3 + 2^1 + 2^0$

$12 \Longrightarrow 2^3 + 2^2$

$13 \Longrightarrow 2^3 + 2^2 + 2^0$

$\ldots$

$63 \Longrightarrow 2^5 + 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2^1 + 2^0$

Tabela 1.1(e)

$16 \Longrightarrow 2^4$

$17 \Longrightarrow 2^4 + 2^0$

$18 \Longrightarrow 2^4 + 2^1$

$19 \Longrightarrow 2^4 + 2^1 + 2^0$

$20 \Longrightarrow 2^4 + 2^2$

$21 \Longrightarrow 2^4 + 2^2 + 2^0$

$\ldots$

$63 \Longrightarrow 2^5 + 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2^1 + 2^0$

Tabela 1.1(f)

$32 \Longrightarrow 2^5$

$33 \Longrightarrow 2^5 + 2^0$

$34 \Longrightarrow 2^5 + 2^1$

$35 \Longrightarrow 2^5 + 2^1 + 2^0$

$36 \Longrightarrow 2^5 + 2^2$

$37 \Longrightarrow 2^5 + 2^2 + 2^0$

$\ldots$

$63 \Longrightarrow 2^5 + 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2^1 + 2^0$

2.2 Propriedade 2

Os números naturais do sistema decimal da tabela n quando decompostos como soma de potências distintas de 2, terá 2n-1 comum em todas as somas.

Agora vamos analisar a relação ente a quantidade de tabelas e o maior número existente nas mesmas.

Se em cada tabela todos os números do sistema decimal são resultado da soma de potências de base 2 distintas e, ainda, como verificado, todos os números da primeira tabela usam na soma 2^0, como na segunda usam 2^1, na terceira 2^2 até a enésima que usará

2^{n-1}, podemos concluir que a soma dos primeiros números do canto superior esquerdo de cada tabela nada mais é do que fazer a soma dos resultados dessas potências de base 2 distintas para chegarmos ao valor deste número decimal escolhido de forma aleatória dentre os números que compõem de alguma forma uma ou mais tabelas.

Tendo em vista que todo numero destas tabelas usam ou não determinada potência distinta de 2, podemos analisar que esta determinada potência, caso utilizada, pode ser multiplicada por 1, que é o elemento neutro na multiplicação, e no caso de não usar essa potência poderemos multiplicar por 0.

Vamos tomar como exemplo os números do sistema decimal que são representados por uma sequência de algarismos,

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,$$

que acrescentamos o símbolo 0 (zero).

Esse sistema tem seu valor posicional intrínseco, e seu peso é atribuído em função da posição que ocupa no número. Esse peso, sempre é relacionado a uma potência de 10. Portanto, este algarismo da direita para esquerda tem peso de 10^0, ou seja, peso 1, o segundo, sempre da direita para esquerda tem peso 10^1 e o próximo 10^2, o seguinte 10^3, e o enésimo termo tem o peso 10^{n-1}, sendo n pertencente aos números naturais.

Assim, poderemos expressar o número decimal

$$235098$$

da seguinte forma

$$2 \times 10^5 + 3 \times 10^4 + 5 \times 10^3 + 0 \times 10^2 + 9 \times 10^1 + 8 \times 10^0.$$

Usando como base o sistema decimal, podemos determinar os números que compõem nossas tabelas usando apenas o algarismo 1 acrescido de 0 (zero), que representa a ausência de algarismo, assim estaremos trabalhando com apenas dois símbolos.

Esta maneira de representar os números pode ser chamado de sistema binário ou de base 2 que também é um sistema de numeração posicional, onde o peso é atribuído em função da posição que o algarismo ocupa no numero. Agora este peso passa a ser sempre uma potência de 2. Como demonstraremos transformando os decimais em binários. Neste exemplo do Tabela 2.1, utilizaremos os números da Tabela 1.1(a).

Número decimal	Representações na base 10	Representações na base 2	Número binário
1	$0\times10^1+1\times10^0$	$0\times2^5+0\times2^4+0\times2^3+0\times2^2+0\times2^1+1\times2^0$	000001
3	$0\times10^1+3\times10^0$	$0\times2^5+0\times2^4+0\times2^3+0\times2^2+1\times2^1+1\times2^0$	000011
5	$0\times10^1+5\times10^0$	$0\times2^5+0\times2^4+0\times2^3+1\times2^2+0\times2^1+1\times2^0$	000101
7	$0\times10^1+7\times10^0$	$0\times2^5+0\times2^4+0\times2^3+1\times2^2+1\times2^1+1\times2^0$	000111
...	...	...	...
63	$6\times10^1+3\times10^0$	$1\times2^5+1\times2^4+1\times2^3+1\times2^2+1\times2^1+1\times2^0$	111111

Tabela 2.1: Representação dos números

Podemos verificar que todos os números da Tabela 1.1(a) obrigatoriamente terminam em 1, quando transformados de decimais para binários, por serem números impares, a única forma de termos números impares com a soma de potência de base dois distintas é utilizando o 2^0, isso reforça nossas conclusões anteriores.

Se na Tabela 1.1(a) transformando os números decimais para binários todos os elementos necessariamente terminam em 1, pois como já demonstramos, na Tabela 2.1, que todos os números são formados com a soma de potência de base 2 distintas, e no caso particular da primeira tabela se usa o 2^0 que é representado pelo 1 como algarismo da extremidade direita.

Portanto, se temos seis tabelas, necessariamente o maior expoente da base 2 utilizado segundo a propriedade 2 é o 5, portanto teremos,

$$d_6 \times 2^5 + d_5 \times 2^4 + d_4 \times 2^3 + d_3 \times 2^2 + d_2 \times 2^1 + d_1 \times 2^0$$

Onde, d_1 é necessariamente 1 na Tabela 1.1(a) e os termos d_2 ao d_6 podem variar como 1 ou 0 (zero), consequentemente, se temos seis algarismos onde um deles é fixo e cinco variam como 1 ou 0, então teremos 2^5 possibilidades de combinações.

Analogamente a segunda tabela terá o segundo algarismo da extrema direita, no caso d_2 fixo como 1, e o restante dos algarismos se alterna entre 1 e 0 (zero). Novamente os números de possibilidades é de 2^5.

De uma forma genérica, novamente demonstramos que se tivermos n tabelas, o número de elementos de cada tabela será de 2^{n-1}. Assim se o primeiro termo da enésima tabela é 2^{n-1} e o número de elementos consecutivos desta tabela também é 2^{n-1}.

Se os números são consecutivos então se trata de uma Progressão Aritmética de razão 1 onde o primeiro termo é 2^{n-1} e o número de termo é 2^{n-1}. Assim podemos chegar ao valor do último termo da seguinte forma:

$$a_n = a_1 + (n-1)r$$

$$a_{2^{n-1}} = a_1 + (2^{n-1} - 1)1$$

$$a_{2^{n-1}} = 2^{n-1} + (2^{n-1} - 1)1$$

$$a_{2^{n-1}} = 2^{n-1} + (2^{n-1} - 1)$$

$$a_{2^{n-1}} = 2 \times 2^{n-1} - 1$$

$$a_{2^{n-1}} = 2^{n-1+1} - 1$$

$$a_{2^{n-1}} = 2^n - 1$$

Desta análise, temos a seguinte propriedade:

2.3 Propriedade 3

Se tivermos n tabelas então todas terão como maior numero $2^n - 1$.

Outra análise que podemos fazer refere-se às características das sequências numéricas presentes em cada tabela. Definindo como bloco de consecutivos os conjuntos de números consecutivos inseridos em uma tabela, temos que:

i) A Tabela 1.1(a), começa com o número 1 e aumentam duas unidades a cada termo posterior.

ii) A Tabela 1.1(b), começa com o numero 2, tendo sempre dois números consecutivos, depois aumenta três unidades para termos novamente 2 números consecutivos, mantendo este padrão posteriormente.

iii) A Tabela 1.1(c), começa com o número 4, tendo 4 números consecutivos, pulando 5 unidades para novamente termos 4 consecutivos, mantendo este padrão posteriormente.

iv) A Tabela 1.1(d) tem como primeiro número o 8, na sequência teremos 8 números consecutivos e depois pula 9, para novamente termos 8 números consecutivos, mantendo, assim, este padrão.

Pela propriedade 2 temos 2^{n-1} pertence a tabela n, tornando $n-1=p$ temos os seguintes blocos consecutivos:

a) bloco 1 de consecutivos $\Longrightarrow (2^p, 2^p+1, 2^p+2, ..., 2\times 2^p-1)$

b) bloco 2 de consecutivos $\Longrightarrow (3\times 2^p, 3\times 2^p+1, ..., 4\times 2^p-1)$

c) bloco 3 de consecutivos $\Longrightarrow (5\times 2^p, 5\times 2^p+1, ..., 6\times 2^p-1)$

Verificando a diferença entre o primeiro elemento de qualquer bloco, a partir do segundo, com o último elemento de cada bloco anterior, teremos:

a) A diferença do primeiro elemento do segundo bloco de consecutivos para o último elemento do primeiro bloco;

$$3\times 2^p-(2\times 2^p-1)$$

$$3\times 2^p-2\times 2^p+1$$

$$2^p+1$$

b) A diferença do primeiro elemento do terceiro bloco de consecutivos para o ultimo elemento do segundo bloco:

$$5\times 2^p-(4\times 2^p-1)$$

$$5\times 2^p-4\times 2^p+1$$

$$2^p+1$$

Logo temos a seguir a propriedade:

2.4 Propriedade 4

Se tivermos uma tabela começando pelo número 2^p, com p pertencendo aos naturais, teremos blocos de 2^p números naturais do sistema decimal consecutivos. O último número de cada bloco de consecutivos somado a 2^{p+1} determinará o primeiro número do próximo bloco de consecutivos, mantendo este padrão posteriormente.

A seguir, vamos analisar as diferenças das somas de todos os elementos de cada bloco de números naturais consecutivos. Começando pela Tabela 1.1(a) onde não temos mais que um número consecutivo.

$$1$$

$$3$$

$$5$$

$$\dots$$

$$63$$

Podemos perceber que a diferença é sempre 2. Na Tabela 1.1(b) temos números consecutivos para fazer a soma, da seguinte forma:

$$2 + 3 = 5$$

$$6 + 7 = 13$$

$$10 + 11 = 21$$

$$\dots$$

$$62 + 63 = 125$$

Podemos notar aqui que a diferença entre a soma de todos elementos de cada bloco consecutivo é 8.

Na Tabela 1.1(c) temos quatro números consecutivos em cada bloco que somado chegamos aos seguintes resultados:

$$4 + 5 + 6 + 7 = 22$$

$$12 + 13 + 14 + 15 = 54$$

$$20 + 21 + 22 + 23 = 86$$

$$\cdots$$

$$60 + 61 + 62 + 63 = 246$$

Verificamos que a diferença entre a soma dos elementos de cada bloco consecutivo é 32.

Novamente generalizando para tabela n, o primeiro termo 2^p teremos os seguintes blocos de consecutivos:

a) bloco 1 de consecutivos $\Longrightarrow (2^p, 2^p + 1, 2^p + 2, ..., 2 \times 2^p - 1)$

b) bloco 2 de consecutivos $\Longrightarrow (3 \times 2^p, 3 \times 2^p + 1, ..., 4 \times 2^p - 1)$

c) bloco 3 de consecutivos $\Longrightarrow (5 \times 2^p, 5 \times 2^p + 1, ..., 6 \times 2^p - 1)$

Os elementos de cada bloco, números consecutivos, então se trata de uma Progressão Aritmética de razão 1, logo podemos fazer as somatórias dos elementos de cada um dos blocos, ou seja,

Somatória do primeiro bloco.

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$$

$$S_1 = \frac{(2 \times 2^p - 1 + 2^p)2^p}{2}$$
$$S_1 = \frac{(3 \times 2^p - 1)2^p}{2}$$
$$S_1 = \frac{3 \times 2^{2p} - 2^p}{2}$$

Somatória do Segundo bloco.

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$$

$$S_2 = \frac{(4 \times 2^p - 1 + 3 \times 2^p)2^p}{2}$$
$$S_2 = \frac{(7 \times 2^p - 1)2^p}{2}$$

$$S_2 = \frac{3 \times 2^{2p} - 2^p}{2}$$

Fazendo a diferença da somatória do segundo bloco pelo primeiro, temos:

$$\frac{3 \times 2^{2p} - 2^p}{2} - \frac{3 \times 2^{2p} - 2^p}{2}$$

$$\frac{7 \times 2^{2p} - 2^p - 3 \times 2^{2p} + 2^p}{2}$$

$$\frac{4 \times 2^{2p}}{2}$$

$$2^{2p+1}$$

Portanto temos a seguinte propriedade:

2.5 Propriedade 5

A diferença entre a somatória de cada bloco de elementos consecutivos pela somatória do bloco de consecutivos anterior será igual a 2^{2p+1}, sendo p o expoente de 2 do primeiro número do canto superior esquerdo de cada tabela.

Observando as Propriedades 4 e 5 verificamos que existe uma regularidade no primeiro termo de cada bloco de consecutivos, ou seja,

Na Tabela 1.1(a) temos os seguintes números iniciando cada bloco:

$$1$$

$$3$$

$$5$$

$$\ldots$$

$$63$$

Na Tabela 1.1(b) temos os seguintes números iniciando cada bloco:

$$2$$

$$6$$

$$10$$

$$\cdots$$

$$62$$

Na Tabela 1.1(c) temos os seguintes números iniciando cada bloco:

$$4$$

$$12$$

$$20$$

$$\cdots$$

$$60$$

Podemos observar que estes primeiros termos de cada bloco de consecutivos são o 2^p, primeiro número do canto superior esquerdo da tabela, multiplicado pela sequência dos números ímpares.

$$1 \times 2^p$$

$$3 \times 2^p$$

$$5 \times 2^p$$

$$\cdots$$

$$(2q+1)2^p,$$

com q pertencendo aos naturais. Logo, temos a seguinte propriedade

2.6 Propriedade 6

Sendo 2^p o primeiro número do canto superior esquerdo da tabela, então, os primeiros números de cada bloco de consecutivos forma uma sequência de 2^p multiplicado pelos ímpares.

Capítulo 3

Confecção didática das tabelas

Com todas as análises feitas anteriormente, podemos confeccionar jogos de "Adivinha Numero" com qualquer n tabelas, sendo n natural. De forma didática, vamos determinar os números naturais do sistema decimal de 1 a 127 decompostos como soma de potência de base 2 distintas (Tabela 3.1). Cada potência de base 2 distinta denominaremos de indicador de cada tabela do jogo, em seguida vamos construir o jogo "Adivinha Número" com uma, duas, três, quatro, cinco, seis e sete tabelas, direcionando o número natural do sistema decimal a compor a tabela com o indicador que foi utilizado na soma de base 2 distinta.

$1 = 2^0$	$65 = 2^6 + 2^0$
$2 = 2^1$	$66 = 2^6 + 2^1$
$3 = 2^1 + 2^0$	$67 = 2^6 + 2^1 + 2^0$
$4 = 2^2$	$68 = 2^6 + 2^2$
$5 = 2^2 + 2^0$	$69 = 2^6 + 2^2 + 2^0$
$6 = 2^2 + 2^1$	$70 = 2^6 + 2^2 + 2^1$
$7 = 2^2 + 2^1 + 2^0$	$71 = 2^6 + 2^2 + 2^1 + 2^0$
$8 = 2^3$	$72 = 2^6 + 2^3$
$9 = 2^3 + 2^0$	$73 = 2^6 + 2^3 + 2^0$
$10 = 2^3 + 2^1$	$74 = 2^6 + 2^3 + 2^1$
$11 = 2^3 + 2^1 + 2^0$	$75 = 2^6 + 2^3 + 2^1 + 2^0$
$12 = 2^3 + 2^2$	$76 = 2^6 + 2^3 + 2^2$
$13 = 2^3 + 2^2 + 2^0$	$77 = 2^6 + 2^3 + 2^2 + 2^0$

$14 = 2^3 + 2^2 + 2^1$	$78 = 2^6 + 2^3 + 2^2 + 2^1$
$15 = 2^3 + 2^2 + 2^1 + 2^0$	$79 = 2^6 + 2^3 + 2^2 + 2^1 + 2^0$
$16 = 2^4$	$80 = 2^6 + 2^4$
$17 = 2^4 + 2^0$	$81 = 2^6 + 2^4 + 2^0$
$18 = 2^4 + 2^1$	$82 = 2^6 + 2^4 + 2^1$
$19 = 2^4 + 2^1 + 2^0$	$83 = 2^6 + 2^4 + 2^1 + 2^0$
$20 = 2^4 + 2^2$	$84 = 2^6 + 2^4 + 2^2$
$21 = 2^4 + 2^2 + 2^0$	$85 = 2^6 + 2^4 + 2^2 + 2^0$
$22 = 2^4 + 2^2 + 2^1$	$86 = 2^6 + 2^4 + 2^2 + 2^1$
$23 = 2^4 + 2^2 + 2^1 + 2^0$	$87 = 2^6 + 2^4 + 2^2 + 2^1 + 2^0$
$24 = 2^4 + 2^3$	$88 = 2^6 + 2^4 + 2^3$
$25 = 2^4 + 2^3 + 2^0$	$89 = 2^6 + 2^4 + 2^3 + 2^0$
$26 = 2^4 + 2^3 + 2^1$	$90 = 2^6 + 2^4 + 2^3 + 2^1$
$27 = 2^4 + 2^3 + 2^1 + 2^0$	$91 = 2^6 + 2^4 + 2^3 + 2^1 + 2^0$
$28 = 2^4 + 2^3 + 2^2$	$92 = 2^6 + 2^4 + 2^3 + 2^2$
$29 = 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2^0$	$93 = 2^6 + 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2^0$
$30 = 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2^1$	$94 = 2^6 + 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2^1$
$31 = 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2^1 + 2^0$	$95 = 2^6 + 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2^1 + 2^0$
$32 = 2^5$	$96 = 2^6 + 2^5$
$33 = 2^5 + 2^0$	$97 = 2^6 + 2^5 + 2^0$
$34 = 2^5 + 2^1$	$98 = 2^6 + 2^5 + 2^1$
$35 = 2^5 + 2^1 + 2^0$	$99 = 2^6 + 2^5 + 2^1 + 2^0$
$36 = 2^5 + 2^2$	$100 = 2^6 + 2^5 + 2^2$
$37 = 2^5 + 2^2 + 2^0$	$101 = 2^6 + 2^5 + 2^2 + 2^0$
$38 = 2^5 + 2^2 + 2^1$	$102 = 2^6 + 2^5 + 2^2 + 2^1$
$39 = 2^5 + 2^2 + 2^1 + 2^0$	$103 = 2^6 + 2^5 + 2^2 + 2^1 + 2^0$
$40 = 2^5 + 2^3$	$104 = 2^6 + 2^5 + 2^3$
$41 = 2^5 + 2^3 + 2^0$	$105 = 2^6 + 2^5 + 2^3 + 2^0$
$42 = 2^5 + 2^3 + 2^1$	$106 = 2^6 + 2^5 + 2^3 + 2^1$
$43 = 2^5 + 2^3 + 2^1 + 2^0$	$107 = 2^6 + 2^5 + 2^3 + 2^1 + 2^0$
$44 = 2^5 + 2^3 + 2^2$	$108 = 2^6 + 2^5 + 2^3 + 2^2$

$45 = 2^5 + 2^3 + 2^2 + 2^0$	$109 = 2^6 + 2^5 + 2^3 + 2^2 + 2^0$
$46 = 2^5 + 2^3 + 2^2 + 2^1$	$110 = 2^6 + 2^5 + 2^3 + 2^2 + 2^1$
$47 = 2^5 + 2^3 + 2^2 + 2^1 + 2^0$	$111 = 2^6 + 2^5 + 2^3 + 2^2 + 2^1 + 2^0$
$48 = 2^5 + 2^4$	$112 = 2^6 + 2^5 + 2^4$
$49 = 2^5 + 2^4 + 2^0$	$113 = 2^6 + 2^5 + 2^4 + 2^0$
$50 = 2^5 + 2^4 + 2^1$	$114 = 2^6 + 2^5 + 2^4 + 2^1$
$51 = 2^5 + 2^4 + 2^1 + 2^0$	$115 = 2^6 + 2^5 + 2^4 + 2^1 + 2^0$
$52 = 2^5 + 2^4 + 2^2$	$116 = 2^6 + 2^5 + 2^4 + 2^2$
$53 = 2^5 + 2^4 + 2^2 + 2^0$	$117 = 2^6 + 2^5 + 2^4 + 2^2 + 2^0$
$54 = 2^5 + 2^4 + 2^2 + 2^1$	$118 = 2^6 + 2^5 + 2^4 + 2^2 + 2^1$
$55 = 2^5 + 2^4 + 2^2 + 2^1 + 2^0$	$119 = 2^6 + 2^5 + 2^4 + 2^2 + 2^1 + 2^0$
$56 = 2^5 + 2^4 + 2^3$	$120 = 2^6 + 2^5 + 2^4 + 2^3$
$57 = 2^5 + 2^4 + 2^3 + 2^0$	$121 = 2^6 + 2^5 + 2^4 + 2^3 + 2^0$
$58 = 2^5 + 2^4 + 2^3 + 2^1$	$122 = 2^6 + 2^5 + 2^4 + 2^3 + 2^1$
$59 = 2^5 + 2^4 + 2^3 + 2^1 + 2^0$	$123 = 2^6 + 2^5 + 2^4 + 2^3 + 2^1 + 2^0$
$60 = 2^5 + 2^4 + 2^3 + 2^2$	$124 = 2^6 + 2^5 + 2^4 + 2^3 + 2^2$
$61 = 2^5 + 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2^0$	$125 = 2^6 + 2^5 + 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2^0$
$62 = 2^5 + 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2^1$	$126 = 2^6 + 2^5 + 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2^1$
$63 = 2^5 + 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2^1 + 2^0$	$127 = 2^6 + 2^5 + 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2^1 + 2^0$
$64 = 2^6$	

Tabela 3.1: Decomposição dos números na base 2

Em cada tabela abaixo teremos como indicador uma potência de 2 e dentro das tabelas estarão todos os números do sistema decimal que utilizaram esta potência quando decompostos como soma de potências de 2 distintas.

3.1 Jogo com uma tabela

(a) 2^0

1

Tabela 3.2:

3.2 Jogo com duas tabelas

(a) 2^0

1	3

(b) 2^1

2	3

Tabela 3.3:

3.3 Jogo com três tabelas

(a) 2^0

1	3	5	7

(b) 2^1

2	3	6	7

(c) 2^2

4	5	6	7

Tabela 3.4:

3.4 Jogo com quatro tabelas

(a) 2^0

1	3	5	7
9	11	13	15

(b) 2^1

2	3	6	7
10	11	14	15

(c) 2^2

4	5	6	7
12	13	14	15

(d) 2^3

8	9	10	11
12	13	14	15

Tabela 3.5:

3.5 Jogo com cinco tabelas

(a) 2^0

1	3	5	7
9	11	13	15
17	19	21	23
25	27	29	31

(b) 2^1

2	3	6	7
10	11	14	15
18	19	22	23
26	27	30	31

(c) 2^2

4	5	6	7
12	13	14	15
20	21	22	23
28	29	30	31

(d) 2^3

8	9	10	11
12	13	14	15
24	25	26	27
28	29	30	31

(e) 2^4

16	17	18	19
20	21	22	23
24	25	26	27
28	29	30	31

Tabela 3.6:

3.6 Jogo com seis tabelas

(a) 2^0

1	3	5	7
9	11	13	15
17	19	21	23
25	27	29	31
33	35	37	39
41	43	45	47
49	51	53	55
57	59	61	63

(b) 2^1

2	3	6	7
10	11	14	15
18	19	22	23
26	27	30	31
34	35	38	39
42	43	46	47
50	51	54	55
58	59	62	63

(c) 2^2

4	5	6	7
12	13	14	15
20	21	22	23
28	29	30	31
36	37	38	39
44	45	46	47
52	53	54	55
60	61	62	63

(d) 2^3

8	9	10	11
12	13	14	15
24	25	26	27
28	29	30	31
40	41	42	43
44	45	46	47
56	57	58	59
60	61	62	63

(e) 2^4

16	17	18	19
20	21	22	23
24	25	26	27
28	29	30	31
48	49	50	51
52	53	54	55
56	57	58	59
60	61	62	63

(f) 2^5

32	33	34	35
36	37	38	39
40	41	42	43
44	45	46	47
48	49	50	51
52	53	54	55
56	57	58	59
60	61	62	63

Tabela 3.7:

3.7 Jogo com sete tabelas

(a) 2^0

1	3	5	7
9	11	13	15
17	19	21	23
25	27	29	31
33	35	37	39
41	43	45	47
49	51	53	55
57	59	61	63
65	67	69	71
73	75	77	79
81	83	85	87
89	91	93	95
97	99	101	103
105	107	109	111
113	115	117	119
121	123	125	127

(b) 2^1

2	3	6	7
10	11	14	15
18	19	22	23
26	27	30	31
34	35	38	39
42	43	46	47
50	51	54	55
58	59	62	63
66	67	70	71
74	75	78	79
82	83	86	87
90	91	94	95
98	99	102	103
106	107	110	111
114	115	118	119
122	123	126	127

(c) 2^2

4	5	6	7
12	13	14	15
20	21	22	23
28	29	30	31
36	37	38	39
44	45	46	47
52	53	54	55
60	61	62	63
68	69	70	71
76	77	78	79
84	85	86	87
92	93	94	95
100	101	102	103
108	109	110	111
116	117	118	119
124	125	126	127

(d) 2^3

8	9	10	11
12	13	14	15
24	25	26	27
28	29	30	31
40	41	42	43
44	45	46	47
56	57	58	59
60	61	62	63
72	73	74	75
76	77	78	79
88	89	90	91
92	93	94	95
104	105	106	107
108	109	110	111
120	121	122	123
124	125	126	127

(e) 2^4

16	17	18	19
20	21	22	23
24	25	26	27
28	29	30	31
48	49	50	51
52	53	54	55
56	57	58	59
60	61	62	63
96	97	98	99
100	101	102	103
104	105	106	107
108	109	110	111
112	113	114	115
116	117	118	119
120	121	122	123
124	125	126	127

(f) 2^5

32	33	34	35
36	37	38	39
40	41	42	43
44	45	46	47
48	49	50	51
52	53	54	55
56	57	58	59
60	61	62	63
80	81	82	83
84	85	86	87
88	89	90	91
92	93	94	95
112	113	114	115
116	117	118	119
120	121	122	123
124	125	126	127

(g) 2^6

64	65	66	67
68	69	70	71
72	73	74	75
76	77	78	79
80	81	82	83
84	85	86	87
88	89	90	91
92	93	94	95
96	97	98	99
100	101	102	103
104	105	106	107
108	109	110	111
112	113	114	115
116	117	118	119
120	121	122	123
124	125	126	127

Tabela 3.8:

A Tabela 3.9 apresenta a relação dos números naturais com os indicadores . Quando o indicador tem relação com o número natural é uma afirmação que será representada pelo número 1, no caso da relação for negativa usa o 0 (zero). Lembrando que os indicadores representam a soma de base 2 distintas, utilizadas na decomposição dos números do sistema decimal.

	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
1	0	0	0	0	0	0	1
2	0	0	0	0	0	1	0
3	0	0	0	0	0	1	1
4	0	0	0	0	1	0	0
5	0	0	0	0	1	0	1
6	0	0	0	0	1	1	0
7	0	0	0	0	1	1	1
8	0	0	0	1	0	0	0
9	0	0	0	1	0	0	1
10	0	0	0	1	0	1	0
...	...	...	...	...	...	...	...
126	1	1	1	1	1	1	0
127	1	1	1	1	1	1	1

Tabela 3.9: Representação decimal dos números 1 até 127

Podemos, assim, concluir que estas relações implicam na mudança de base do sistema decimal ou base 10 para o sistema binário ou base 2, demonstrando a relação entre os dois sistemas.

Na sequência, exemplificamos utilizando o jogo “Adivinha Número” com vinte tabelas, onde teremos do 1 ao $2^{20}-1$ (1048575) como opção de escolha. Transformando as informações positivas ou negativas de um número do sistema decimal escolhido ao acaso em um número do sistema binário da seguinte forma: se o número estiver nas tabelas 1, 5, 6, 8, 15 e 20, escrevemos:

$$10000100000010110001$$

Como este número também é uma representação de sistema de numeração posicional, onde o peso é atribuído em função da posição que o algarismo ocupa no número, e este peso sendo uma potência de 2, podemos reescrever da seguinte forma:

$$1\times 2^{19}+0\times 2^{18}+0\times 2^{17}+0\times 2^{16}+0\times 2^{15}+1\times 2^{14}+0\times 2^{13}+0\times 2^{12}+$$
$$+0\times 2^{11}+0\times 2^{10}+0\times 2^{9}+0\times 2^{8}+1\times 2^{7}+0\times 2^{6}+1\times 2^{5}+1\times 2^{4}+$$
$$+0\times 2^{3}+0\times 2^{2}+0\times 2^{1}+1\times 2^{0}=$$

$$=1\times 2^{19}+1\times 2^{14}+1\times 2^{7}+1\times 2^{5}+1\times 2^{4}+1\times 2^{0}=$$

$$=524288+16384+128+32+16+1=$$

$$=540849.$$

O número escolhido foi 540849.

Vamos também confeccionar a tabela 18 das vinte tabelas deste jogo usando as propriedades estudadas.

Sendo a tabela 18 das vinte tabelas, então pelas Propriedades 1 e 2 o primeiro número do canto superior esquerdo dessa tabela será $2^{18-1}=131072$, pela PROPRIEDADE 3 o maior número dessa tabela será $2^{20}-1=1048575$, pela Propriedade 4 cada bloco terá 2^{17} números consecutivos e a diferença do primeiro elemento de cada bloco para o último elemento do bloco anterior será $2^{17}+1$. Vamos confeccionar um esboço de como ficaria esta tabela, sendo as propriedades:

Propriedade 1

Os primeiros números do canto superior esquerdo de cada cartão ou tabela são resultados de potências de base 2 com expoentes naturais.

Propriedade 2

Os números naturais do sistema decimal da tabela n quando decompostos como soma de potências distintas de 2, terá 2n-1 comum em todas as somas.

Propriedade 3

Se tivermos n tabelas então todas terão como maior numero $2^n - 1$.

Propriedade 4

Se tivermos uma tabela começando pelo numero 2^p, com p pertencendo aos naturais, teremos blocos de 2^p números naturais do sistema decimal consecutivos. O último número de cada bloco de consecutivos somado a 2^{p+1} determinará o primeiro número do próximo bloco de consecutivos, mantendo este padrão posteriormente.

Propriedade 5

A diferença entre a somatória de cada bloco de elementos consecutivos pela somatória do bloco de consecutivos anterior será igual a 2^{2p+1}, sendo p o expoente de 2 do primeiro número do canto superior esquerdo de cada tabela.

Propriedade 6

Sendo 2^p o primeiro número do canto superior esquerdo da tabela, então, os primeiros números de cada bloco de consecutivos forma uma sequência de 2^p multiplicado pelos ímpares.

Vamos ilustrar parte da confecção da tabela 18 de um jogo com vinte tabelas de acordo com as propriedades estudadas.

131072	131073	131074	$\cdots$	262141	262142	262143
393216	393217	393218	$\cdots$	524285	524286	524287
655360	655357	655358	$\cdots$	786429	786430	786431
917504	917503	917502	$\cdots$	1048574	1048575	1048575

Tabela 3.10: 2^{17}

Verificaremos através da Propriedade 5 se a diferença entre as somatórias dos blocos de consecutivos é igual a $2^{2\times 17} + 1$. Fazendo a somatória do primeiro e segundo blocos, teremos: (iii) Primeiro bloco:

$$S_1 = \frac{(131072 + 262143)131072)}{2}$$

$$S_1 = \frac{(2^{17} + 2^{17} + 2^{17} - 1)2^{17}}{2}$$

$$S_1 = \big(3 \times 2^{17} - 1\big)\, 2^{16}$$

$$S_1 = 3 \times 2^{17+16} - 2^{16}$$

(iv) Segundo bloco

$$S_2 = \frac{(393216 + 524.287)131072}{2}$$

$$S_2 = \frac{(3 \times 2^{17} + 3 \times 2^{17} + 2^{17} - 1)\, 2^{17}}{2}$$

$$S_2 = \big(7 \times 2^{17} - 1\big)\, 2^{16}$$

$$S_2 = 7 \times 2^{17+16} - 2^{16}$$

$$S_2 = 7 \times 2^{33} - 2^{16}$$

Agora faremos a diferença entre os dois bloco:

$$D_1 = S_2 - S_1$$

$$D_1 = 7 \times 2^{33} - 2^{16} - \big(3 \times 2^{33} - 2^{16}\big)$$

$$D_1 = 7 \times 2^{33} - 2^{16} - 3 \times 2^{33} + 2^{16}$$

$$D_1 = 4 \times 2^{33}$$

$$D_1 = 2^{35}$$

Como estamos trabalhando com a tabela 18, temos 2^{17} como primeiro número do canto superior esquerdo desta tabela, portanto, pela propriedade 5 a diferença entre as somatórias de qualquer bloco pelo anterior, no caso particular dessa tabela será $2^{2p+1} \Longrightarrow 2^{2\times17+1} \Longrightarrow 2^{35}$, como queríamos demonstrar.

Os primeiros números de cada bloco de consecutivos da tabela 18 temos: 131072, 393216, 655360 e 917504, que pode ser escrito, 1×2^{17}, 3×2^{17}, 5×2^{17} e 7×2^{17}, que confirma a construção da tabela através da Propriedade 6.

Considerações finais

O professor, com domínio sobre o conhecimento que pretende ensinar, problematiza qualquer situação propondo atividades que envolvem o contexto do aluno, antes mesmo de qualquer exposição conceitual da matemática. Este aspecto faz a diferença entre quem ensina e quem aprende. Isto se deve à capacidade e competência que implica em segurança, tranquilidade ao professor no ato de ensinar e ao aluno a apropriação da matemática pela matemática.

> *"Se queremos iniciar os jovens na matemática, é necessário que os familiarizemos com os rudimentos da linguagem matemática.[...] Procure sempre que possível, ilustrar seus conceitos com exemplos de conjuntos dentro da Matemática."* Lima [2006].

O professor precisa estar em um nível de conhecimento mais elevado em relação ao conhecimento do aprendiz. Esclarecemos que nível de conhecimento elevado, não se confunde com soberba ou arrogância, mas sim a compreensão de teorias nos seus níveis mais elevados, comparados com os conceitos primitivos e os axiomas . Caso contrario, fica prejudicado em muito o processo de aprendizagem do aluno. Não se avança no conhecimento se professor e aluno se encontram próximos em níveis de apropriação do conteúdo. Ao perceber na ciência matemática que os sistemas decimal posicional e o sistema binário posicional são símbolos diferentes de representação dos números naturais, isso faz com que a mente do aluno fique aberta e possibilite a investigação e resolução de outros problemas. A ciência matemática como um meio para fornecer e fortalecer a capacidade dos aprendizes na sua relação com as coisas do mundo.

> *"A importância social da matemática provém de que ela fornece modelos para analisar situações da vida real.[...] a matemática fornece modelos abstratos para serem utilizados em situações concretas, do dia-a-dia e das Ciências."* Lima [2006]

A transferência do símbolo ou representação decimal posicional para o símbolo ou representação binária, ao ser aplicado nas aulas ministradas nas escolas Marcelina de Campos e Adalgisa de Barros, com o jogo "Adivinha Número" atingiu seu objetivo. Os alunos resolveram e compreenderam o funcionamento do sistema decimal posicional e sistema binário posicional.

A partir desta fundamentação alguns alunos questionaram a possibilidade de aumentar o número de tabelas, conseguiram analisar e verificar que os primeiros números do canto superior esquerdo eram potencias de dois e que os números das tabelas tinham um padrão de crescimento, lançando assim novos desafios, gerando interesse e curiosidade pelas ferramentas matemáticas utilizadas demonstrando que se apropriaram tanto da simbologia como das ferramentas matemáticas.

Referências Bibliográficas

Geraldo Severo de Souza Avila. *Introdução a análise matemática.* 2. Editora Edgard Blächer Ltda, São Paulo, 2003.

Paulo Roberto Martins Contador. *Matemática, uma breve história.* Editora Livraria da Física, São Paulo, 2006.

Judith L. Gersting. *Fundamentos matemáticos para a ciência da computaçãoo: um tratamento discreta.* 5. Editora Segmento, Rio de Janeiro, 2004.

Abramo Hefez. *Elementos de aritmética.* 2. SBM, Rio de Janeiro, 2011.

Samuel Iezzi, Gelson end Hazzann. *Fundamentos da matemática elementar*, volume 4 of *7*. Atual, São Paulo, 2004.

Paulo Cezar Pinto end Vagner Eduardo end Morgado Augusto César Lima, Elon end Carvalho. *A matemática do ensino médio*, volume 1 of *9*. SBM, Rio de Janeiro, 2006.

Paulo Blauth Menezes. *Matemática Discreta para Computação e Informática.* Instituto de Informática da UFRGS, Porto Alegre, 2005.

José Plínio de Oliveira Santos. *Introdução a teoria dos números*, volume 3. IMPA, Rio de Janeiro, 2011.

Walter Spinelli. *Revista CÁLCULO*, volume 14. Segmento, São Paulo, 2012.