Universidade Estadual de Santa Cruz - UESC
Sociedade Brasileira de Matematica - SBM
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT
Dissertação de Mestrado

Geometria Espacial: Volume de Cilindros, Cones e Esferas através de Resolução de Problemas

Jucelio Aguiar da Silva

Ilhéus - Bahia

2019

Geometria Espacial: Volume de Cilindros, Cones e Esferas através de Resolução de Problemas

Jucelio Aguiar da Silva

Dissertação de Mestrado apresentada à Comissão Acadêmica Institucional do PROFMAT-UESC como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Profa. Dra. Flaviana dos Santos Silva.
Co–Orientador: Prof. Dr. Vinícius A.T. Arakawa

Ilhéus - Bahia
2019

S586 Silva, Jucelio Aguiar da.

Geometria espacial: volume de cilindros, cones e esferas através de resolução de problemas / Jucelio Aguiar da Silva. – Ilhéus, BA: UESC, 2019.

70 f. : il.

Orientadora: Flaviana dos Santos Silva.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual de Santa Cruz. Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional.

Inclui referências e apêndices.

1. Geometria – Estudo e ensino. 2. Geometria espacial. 3. Geometria espacial – Problemas, questões, exercícios. 4. GeoGebra (Programa de computador). 5. Resolução de problemas. I. Título.

CDD 516

Geometria Espacial: Volume de Cilindros, Cones e Esferas através de Resolução de Problemas

Jucelio Aguiar da Silva

Dissertação de Mestrado apresentada à Comissão Acadêmica Institucional do PROFMAT-UESC como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, aprovada em 05 de abril de 2019.

Banca Examinadora:

Flaviana dos Santos Silva

Profa. Dra. Flaviana dos Santos Silva (Orientadora)
UESC

Prof. Dr. Vinícius Augusto Takahashi Arakawa (Co–orientador)
UESC

Claudemir Mota da Cruz

Prof. Me. Claudemir Mota da Cruz
UESC

Prof. Dr. Cleber Fernando Colle
Universidade Federal de São Paulo - UNIFESP

Dedico a meu pai Adeltino (in memoriam), a minha mãe Júlia (in memoriam), e a minha esposa Luciene

Agradecimentos

Agradeço a todos aqueles que participaram de forma direta ou indireta nessa minha conquista de um sonho.

Agradeço em especial a minha esposa Luciene por estar sempre presente nos momentos mais difíceis dessa trajetória e por ser a minha principal motivadora a nunca desistir de lutar para atingir meus objetivos.

Agradeço ao meu grande amigo Jovane Clarindo que, como chefe de setor, não mediu esforços para me auxiliar dentro da medida do possível, nessa jornada tão difícil.

Agradeço aos colegas de turma pelo companheirismo e dedicação nos momentos de estudo.

Agradeço a minha Professora Orientadora Flaviana Santos e ao meu professor co-orientador Vinícius A.T. Arakawa

Agradeço aos professores que participaram e contribuíram para minha formação nesse programa, em especial aos professores Nestor Felipe Castaneda Centrurión e Vinícius A.T. Arakawa por estarem durante todo o curso me apoiando e incentivando, principalmente nos momentos mais difíceis.

Obrigada a CAPES pelo apoio financeiro.

"A Geometria existe, como já disse o filósofo, por toda a parte. É preciso, porém, olhos para vê-la, inteligência para compreendê-la e alma para admirá-la".

Beremiz Samir (O Homem que Calculava)

Resumo

O conteúdo de Geometria Espacial relacionado a volume de cilindros, cones e esferas, são lecionados na 3^a série do Ensino Médio e traz como um obstáculo para aprendizagem a visualização dos mesmos e a aplicabilidade das respectivas fórmulas na resolução de problemas. Diante de tais dificuldades é fundamental que o professor consiga elaborar uma proposta pedagógica que venha facilitar o processo ensino-aprendizagem. Pensando nisso, o objetivo desse trabalho foi desenvolver uma atividade exploratória de ensino a partir de uma situação problema com auxílio do software Geogebra. O embasamento teórico foi articulado usando o conceito de volume, demonstração das respectivas fórmulas para volume de cilindros, cones e esferas, o conhecimento do software Geogebra e atividade exploratória por meio de resolução de problemas. A atividade exploratória foi realizada durante o mês de junho de 2018 em uma escola da Rede Estadual de ensino contando com duas turmas de 3º ano do Ensino Médio com média de 21 alunos cada uma. Os resultados obtidos mostraram que os alunos participaram mais das aulas ao tentarem solucionar o problema proposto interagindo com o software Geogebra, facilitando assim a visualização de cada um dos sólidos e a assimilação de suas respectivas fórmulas para cálculo de volume. Foi perceptível melhoras nos resultados dos testes e das atividades realizados posteriormente.

Palavras-chave: Volume de sólidos Geométricos, Geogebra, Resolução de Problemas.

Abstract

The Space Geometry content, related to the volume of cylinders, cones and spheres are taught in the 3rd series of high school and brings as an obstacle to learning the visualization of them and the applicability of the respective formulas in problem solving. Faced with such difficulties, it is essential that the teacher can prepare a pedagogical proposal that facilitates the teaching-learning process. Thinking about it, the goal of this paper was to develop an exploratory teaching activity from a problem situation with the help of Geogebra software. The theoretical basis was articulated using the concept of volume, demonstrating the respective formulas for volumes of cylinders, cones and spheres, knowledge of Geogebra Software and exploratory activity through problem solving. The exploratory activity was performed during June of 2018 in a state education network school with two classes of 3rd series of high school with average of 21 students. The results showed that the students were more interested in participating in classes, trying to solve the problem with Geogebra Software facilitating the visualization of each of the solids and assimilating with their respective formula for calculating volume. Improvements in tests results and subsequent activities were noticeable.

Keywords: Volume of geometric solids. Geogebra. Problem solving.

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Lista de Siglas

CAED	Centro de Apoio à Educação a Distância
ENEM	Exame Nacional do Ensino Médio
PAEBES	Programa de Avaliação da Educação Básica do Espírito Santo
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais

Sumário

Introdução

O estudo da Matemática em si é visto por boa parte dos alunos como difícil e com pouca aplicabilidade no cotidiano, o que é de fato um grande equívoco por parte destes. Sendo assim, tornar as aulas de Matemática mais atrativas aos alunos é um grande desafio ao professor moderno. Neste trabalho, abordaremos o conteúdo de Geometria Espacial que é lecionado no 3º ano do Ensino Médio, especificamente volume de cilindros, cones e esferas. Este conteúdo é de suma importância e de comum presença nas avaliações externas (PAEBES e ENEM) além de uma frequente abordagem contextualizada em sua aplicação.

O PCN (2000, p.44) afirma que:

> *...as habilidades de visualização, desenho, argumentação lógica e de aplicação na busca de soluções para problemas podem ser desenvolvidas com um trabalho adequado de Geometria, para que o aluno possa usar as formas e propriedades geométricas na representação e visualização de partes do mundo que o cerca.*

Tendo em vista a importância de se desenvolver nos alunos habilidades em geometria mencionadas acima, iniciei os estudos com volume de cilindros, cones e esferas levando em consideração minha experiência de sala de aula, no ensino médio, desde o ano de 2000 até os dias atuais. Deparei-me com situações diversas em que pude perceber as dificuldades dos alunos nas atividades de sala de aula em associar cada sólido a sua respectiva fórmula para cálculo de seu volume. Erros comuns como confundir a fórmula para volume de cilindro com a de cone (esquecendo nesta última de dividir por 3) e em muitos casos, quando não se tem as figuras nos enunciados das questões, não saber nem ao menos que esboço de desenho se fazer ou fórmula a aplicar.

Pensando nisso, o trabalho aborda o conteúdo de uma forma lúdica e contextualizada em que utilizando-se da resolução de problemas o professor poderá ofertar ao seu aluno condições de compreender os conceitos matemáticos e desenvolver habilidades e competências necessárias ao cidadão com objetivo de compreender e aplicar melhor os conceitos relacionados a espaço e forma.

Sendo assim, o objetivo geral desse trabalho é:

Desenvolver uma atividade exploratória tendo como base a aplicação da resolução de problemas e o uso do software Geogebra para promover a aprendizagem envolvendo volume de cilindros, cones e esferas.

Podemos definir como objetivos específicos do trabalho os seguintes itens:

- Facilitar a visualização e identificação de cada um dos sólidos geométricos (cilindro, cone e esfera);
- Aplicar para cada sólido geométrico sua respectiva fórmula na resolução de problemas;
- Ao fim do processo ensino-aprendizagem os alunos serem capazes de resolver questões de anos anteriores do PAEBES e do ENEM relacionadas com o conteúdo.

Para tanto, foi proposta uma atividade exploratória em que a partir de uma situação problema (questão do ENEM) os alunos da 3ª série do Ensino Médio devem analisar os possíveis caminhos para sua resolução tendo como uma das ferramenta de construção do conhecimento o software Geogebra.

A partir da visualização de cada sólido, seja ele cilindro, cone ou esfera, munidos de conhecimentos prévios envolvendo Princípio de Cavalieri e volume de prismas e pirâmides, o professor, juntamente com os alunos, deverá conceituar as fórmulas necessárias para o cálculo do volume de cada sólido geométrico.

Por fim, a dissertação foi organizada da seguinte forma: o primeiro capítulo apresenta o objeto matemático com as principais definições e conceitos para formalização das fórmulas para volume de cilindro, cone e esfera.

No segundo capítulo é apresentada a fundamentação teórica desse trabalho, bem como uma breve explanação do software Geogebra. O terceiro capítulo mostra os procedimentos metodológicos adotados para a realização do trabalho e no quarto e último capítulo é mostrada a análise e discussão dos dados coletados seguida das considerações finais.

Capítulo 1

Volume de Cilindros, Cones e Esferas: Contexto Matemático

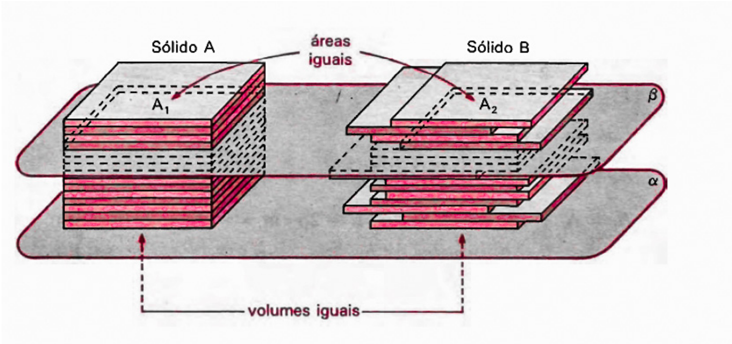
Neste capítulo são abordados os principais conceitos matemáticos envolvendo cilindros, cones e esferas, bem como suas respectivas fórmulas para determinação de seus respectivos volumes tendo como pré-requisitos o conhecimento do Princípio de Cavalieri que veremos na seção a seguir.

1.1 Princípio de Cavalieri

Intuitivamente suponhamos a existência de uma coleção finita de chapas retangulares (paralelepípedos retângulos) de mesmas dimensões e, consequentemente, de mesmo volume. Tal coleção de chapas pode ser usada para formar dois sólidos A e B de mesmo volume.

Considerando esses sólidos com base num mesmo plano α e situados num mesmo semi-espaço dos determinados por α e seja qualquer plano β, secante aos sólidos A e B, paralelo a α, determina em A e B de áreas iguais (superfícies equivalentes), como vimos na figura a seguir:

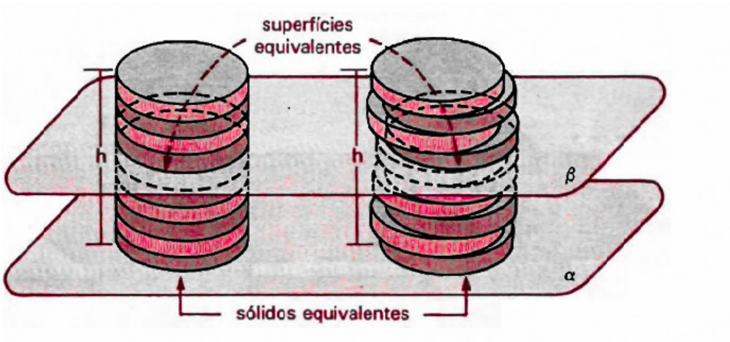
Figura 1.1: Sólidos A e B



Fonte: Dolce e Pompeo (2005, p.164)

A mesma ideia pode ser estendida para duas pilhas com igual número de moedas congruentes.

Figura 1.2: Sólidos e superfícies equivalentes

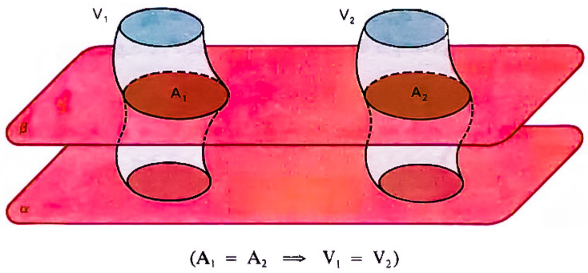


Fonte: Dolce e Pompeo (2005, p.165)

O fato que acabamos de caracterizar intuitivamente é formalizado pelo Princípio de Cavalieri (Francisco Bonaventura Cavalieri, 1598-1647).

Teorema 1.1 (Princípio de Cavalieri)**.** *Dois sólidos nos quais todo plano secante, paralelo a um dado plano, determina superfícies de áreas iguais (superfícies equivalentes), são sólido de volumes iguais (sólidos equivalentes).*

Figura 1.3: Sólidos com volumes iguais



Fonte: Dolce e Pompeo (2005, p.165)

O Teorema acima também pode ser enunciado da seguinte forma:

Teorema 1.2. *(Princípio de Cavalieri para Volumes, [8]. Teorama 2, Capítulo III, pag 3) Consideremos um sistemas de coordenadas cartesianas $Oxyz$, e seja P um sólido finito delimitado por z=0, $z = c > 0$ e por uma quantidade finita de gráficos de funções contínuas do tipo $y = f(x, z)$ e $x = g(y, z)$. Para cada t tal que $0 \leq t \leq c$, seja P_t a interseção de P com o plano $z = t$. Seja Q outro sólido delimitado por z = 0, z = $c > 0$ e por uma quantidade finita de gráficos de funções contínuas do tipo $y = f(x, z)$ e $x = g(y, z)$. Para cada t tal que $0 \leq t \leq c$, seja Q_t a interseção de Q com o plano $z = t$. Suponhamos que exista $K > 0$ tal que $a(P_t)$=$ka(Q_t)$ para todo t, em que $a(P_t)$ representa a área de P_t e $a(Q_t)$ representa a área de (Q_t). Então $v(P)$=$kv(Q)$.*

Demonstração: Da teoria de integração de funções reais temos:

$$\begin{aligned} v(P) &= \int\int_P\int dxdydz = \int_0^c [\int_{P_z}\int dxdy]dz \\ &= \int_0^c a(P_z)dz \\ &= \int_0^c ka(Q_z)dz = k\int_0^c a(Q_z)dz \\ &= k\int_0^c a(Q_z)dz = \ldots = kv(Q). \end{aligned}$$

O que demonstra o teorema.

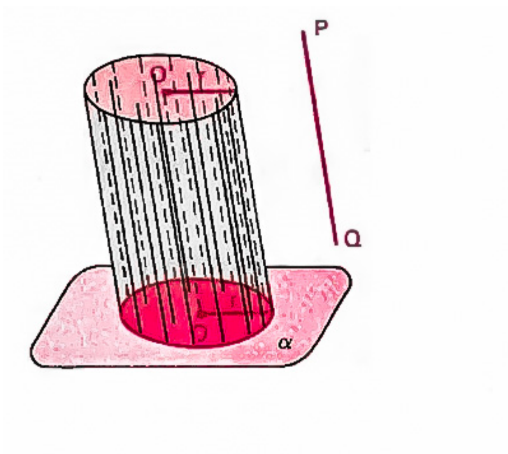
1.2 Cilindro

O estudo do cilindro é de suma importância para o aluno do Ensino Médio, uma vez que tal sólido geométrico se faz presente em vários objetos do nosso cotidiano como por exemplo em latas de leite condensado, latas de óleos lubrificantes, parte da caneta esferográfica em que se encontra a tinta, etc.

Definição 1.1. *Consideremos um círculo (região circular) de Centro O e raio r, situado num plano α e um segmento de reta PQ não nulo, não paralelo e não contido em α. Chama-se cilindro circular ou cilindro à reunião dos segmentos congruentes e paralelos a*

PQ, com uma extremidade nos pontos dos círculo e situados num mesmo semi-espaço dos determinados por α.

Figura 1.4: Cilindro



Fonte: Dolce e Pompeo (2005, p.217)

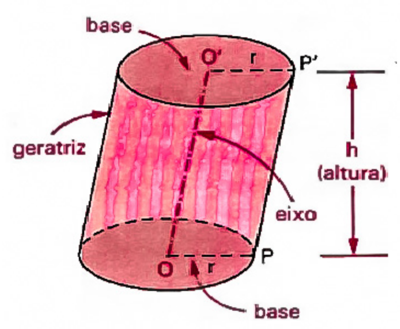
1.2.1 Elementos do Cilindro

O cilindro possui:

• *Duas bases*: círculos congruentes situados em planos paralelos;

• *Geratrizes*: são os segmentos com uma extremidade em uma ponta da circunferência de centro O e raio r e a outra no ponto correspondente da circunferência de centro O' e raio r.

Figura 1.5: Elementos de um cilindro



Fonte: Dolce e Pompeo (2005, p.218)

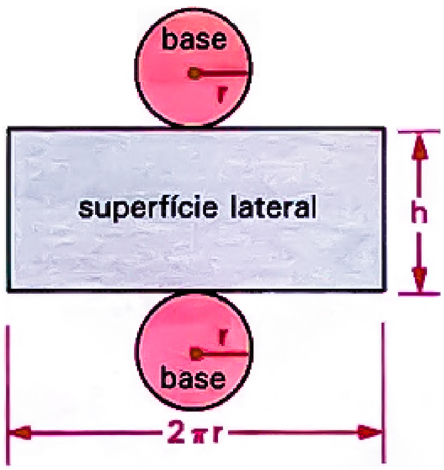
Onde r é o raio da base e a altura do cilindro é a distância h entre os planos da base.

1.2.2 Superfícies Lateral e Total

Superfície lateral é a reunião das geratrizes do cilindro. Área dessa superfície é chamada área lateral e indicada por A_l.

Para calcularmos a área lateral de um cilindro, devemos observar que sua planificação é composta por um retângulo (face lateral) e dois círculos (bases), como visto na figura abaixo:

Figura 1.6: Planificação do cilindro



Fonte: Dolce e Pompeo (2005, p.220)

Basta agora calcular a área do retângulo correspondente a superfície lateral considerando que área deste é obtida pelo produto da área da base pela altura. Segue daí que:

$A_l = 2.\pi.r.h$

Superfície total é a reunião da superfície lateral com os círculos das bases. Área dessa superfície é chamada área total e indicada por A_t.

Para calcularmos a área total de um cilindro devemos calcular a área de cada base (círculo) e somarmos com a área lateral obtida acima.

Calculando-se a área do círculo temos:

$A_c = \pi.r^2$.

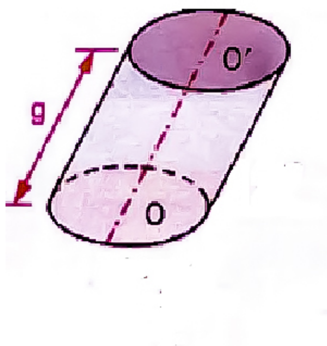
Logo, temos que:

$A_t = 2.\pi.r.h{+}2.\pi.r^2$

1.2.3 Classificação

Se as geratrizes são oblíquas (não formam um ângulo de 90 graus com o diâmetro da base) aos planos das bases, temos um *cilindro circular oblíquo*.

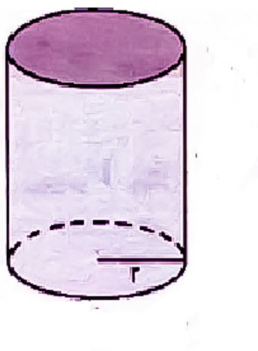
Figura 1.7: Cilindro oblíquo



Fonte: Dolce e Pompeo (2005, p.222)

Se as geratrizes são perpendiculares (formam um ângulo de 90 graus com o diâmetro da base) aos planos das bases, temos um *cilindro circular reto*.

Figura 1.8: Cilindro circular reto



Fonte: Dolce e Pompeo (2005, p.222)

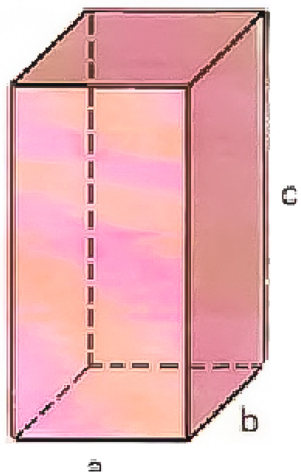
O cilindro circular reto é também chamado cilindro de revolução, pois é gerado pela rotação de um retângulo em torno de um eixo que contém um de seus lados.

1.2.4 Volume do Cilindro

Objetivando-se encontrar a fórmula para calcular o volume de um cilindro, tomaremos como referência inicial volume de paralelepípedos e de prismas.

Definição 1.2. *Um paralelepípedo é um sólido limitado por 6 paralelogramos: suas faces. Estas faces agrupam-se em 3 pares; em cada par as 2 faces são paralelas, congruentes, e* *dizem-se oposta. Quando se toma uma das faces do paralelepípedo como base, a altura correspondente é a distância entre esta face e sua oposta, ou seja é o comprimento da perpendicular baixada de um ponto da face oposta sobre o plano da base.*

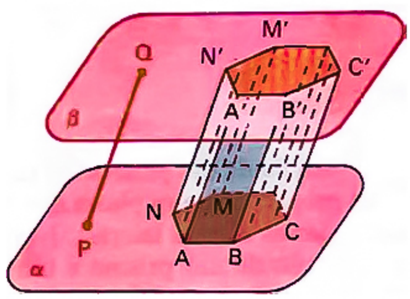
Figura 1.9: Paralelepípedo



Fonte: Dolce e Pompeo (2005, p.153)

Definição 1.3. *Consideremos um polígono convexo (região poligonal convexa) ABC...MN situado num plano α e uma segmento de reta PQ, cuja reta suporte intercepta o plano α. Chama-se prisma a reunião de todos os segmentos congruentes e paralelos a PQ, com extremidade nos pontos do polígono e situados num mesmo semi-espaço dos determinados por α.*

Figura 1.10: Prisma

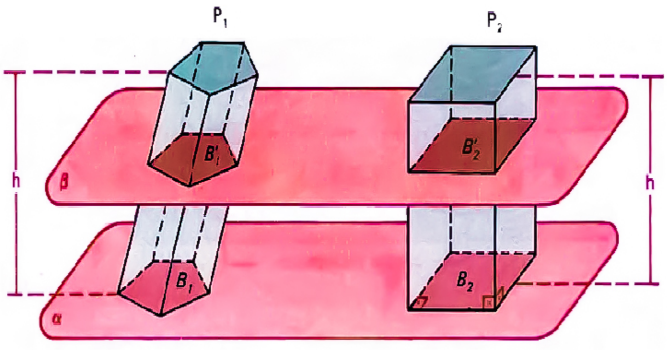


Fonte: Dolce e Pompeo (2005, p.139)

Veremos a seguir como se obter a fórmula necessária para o cálculo do volume de um prisma.

Proposição 1.1. *O volume de um prisma é o produto da área da base pela altura.*

Figura 1.11: Paralelepípedo e prisma



Fonte: Dolce e Pompeo (2005, p.166)

Demonstração:

Suponhamos, sem perda de generalidade, que os dois sólidos acima possuem as bases num mesmo plano α e estão num dos semi-espaços determinados por α.

Qualquer plano β paralelo a α, que secciona P_1, secciona também P_2, e as secções (B_1' e B_2', respectivamente) têm áreas iguais, pois são congruentes às respectivas bases.

$(B_1' = B_1, B_2' = B_2, B_1 = B_2 = B) \Longrightarrow B_1' = B_2'$

Então, pelo Princípio de Cavalieri, o prisma P_1 e o paralelepípedo P_2 possuem o mesmo volume. Segue daí, que:

$$V_{P_1} = V_{P_2}$$

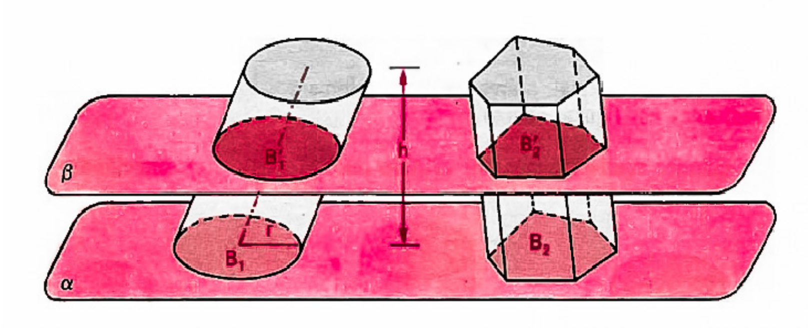
Como $V_{P_2} = B_2h$, ou seja, $V_{P_2} = B.h$ e segue-se que $V_{P_1} = B.h$. Logo temos que:

$$V = B.h$$

Usando-se novamente Princípio de Cavalieri e o volume de prismas obtido acima, podemos determinar o volume de um cilindro.

Proposição 1.2. *O volume de um cilindro é o produto da área da base pela altura.*

Figura 1.12: Cilindro e Prisma



Fonte: Dolce e Pompeo (2005, p.221)

Demonstração

Consideremos um cilindro de altura h e área da base $B_1 = B$ e um prisma de altura h e área da base $B_2 = B$ (o cilindro e o prisma têm alturas congruentes e bases equivalentes).

Suponhamos que os dois sólidos têm as mesmas base num mesmo plano α e estão num dos semi-espaços determinados por α .

Qualquer plano β paralelo a α, que secciona o cilindro, também secciona o prisma e as secções ($B_1^{'}$ e $B_2^{'}$, respectivamente) têm áreas iguais, pois são congruentes às respectivas bases.

$$(B_1^{'} = B_1, B_2^{'} = B_2, B_1 = B_2 = B) \Longrightarrow B_1^{'} = B_2^{'}$$

Então, pelo Princípio de Cavalieri, o cilindro e o prisma têm volumes iguais.

$$V_{cilindro} = V_{prisma}$$

Como $V_{prisma} = B_2 h$, ou seja, $V_{prisma} = B.h$, vem que $V_{cilindro} = B.h$. Segue daí que:

$$V = B.h$$

Como $B = \pi r^2$, temos:

$$V_{cilindro} = \pi r^2 h.$$

Exemplo de Aplicação: Um tanque de combustível no formato cilíndrico cujo raio da base mede 2m e cuja altura mede 6m tem sua capacidade ocupada pela metade. Determine quantos litros de combustível são necessários para encher o tanque.

Dado: $\pi = 3$ e $1m^3 = 1000\ litros$

Resolução:

$V_{cil} = \pi.r^2.h$

$V_{cil} = \pi.2^2.6$

$V_{cil} = 3.4.6$

$V_{cil} = 72m^3$

$V_{cil} = 72000 \quad litros$

Logo a metade que falta para encher o tanque é 36 000 litros.

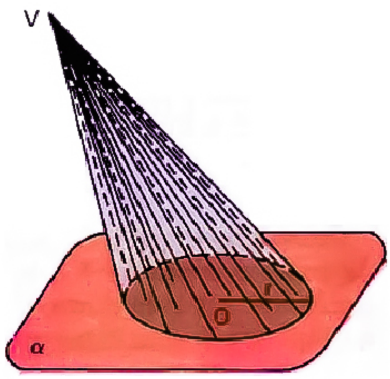
1.3 Cone

Assim como os cilindros, os cones também são sólidos geométricos de muita aplicabilidade no nosso cotidiano uma vez podem ser exemplificados por meio de casquinhas de sorvete, gurda-chuvas, etc.

Tal aplicabilidade nos motiva a dedicar a seus estudos no Ensino Médio de forma contextualizada.

Definição 1.4. *Consideremos um círculo (região circular) de centro O e raio r situado num plano α e um ponto V fora de α. Chama-se cone circular ou cone à reunião dos segmentos de reta com uma extremidade em V e a outra nos pontos do círculo.*

Figura 1.13: Cone



Fonte: Dolce e Pompeo (2005, p.236)

1.3.1 Elementos

O cone possui:

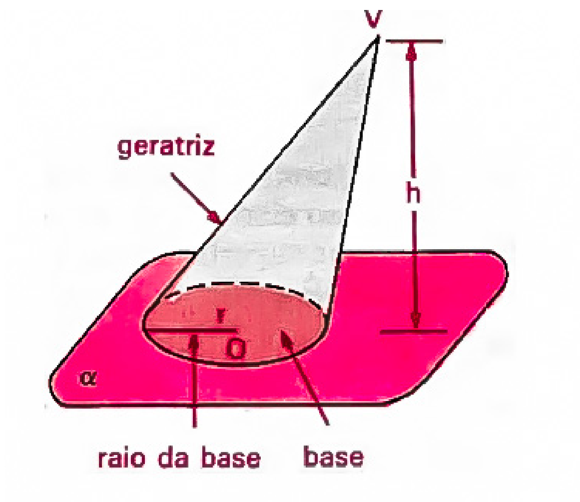
- *Uma base*: o círculo de centro O e raio r .

• *Geratrizes*: são os segmentos com uma extremidade em V e a outra nos pontos da circunferência da base.

• *Vértice*: o ponto V.

A *altura* de um cone é a distância entre o vértice e o plano da base.

Figura 1.14: Cone



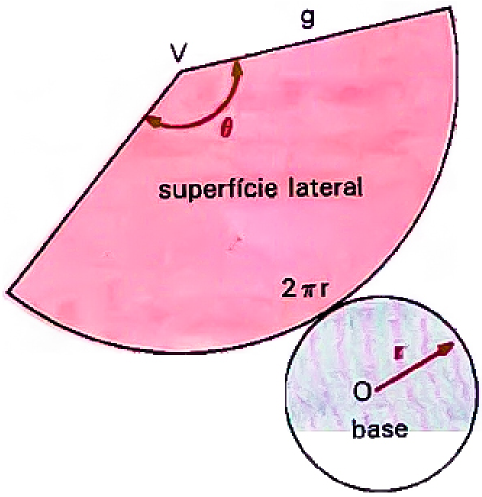
Fonte: Dolce e Pompeo (2005, p.236)

1.3.2 Superfícies

Superfície lateral é a reunião das geratrizes. A área dessa superfície é chamada área lateral e indicada por A_l.

Para calcularmos a área lateral de um cone, devemos observar que sua planificação é composta por um setor circular (face lateral) e um círculo (base), como visto na figura a seguir:

Figura 1.15: Cone planificado



Fonte: Dolce e Pompeo (2005, p.239)

Calculemos a área do setor circular usando conceitos de proporcionalidade da seguinte forma:

Comprimento do arco	área do setor
$2\pi g$	πg^2
$2\pi r$	A_l.

O que resulta em:

$$A_l = \frac{2\pi r.\pi g^2}{2\pi g} \Longrightarrow A_l = \pi r g$$

Superfície total é a reunião da superfície lateral com o círculo da base. A área dessa superfície é chamada área total e indicada por A_t.

Para calcularmos a área total devemos calcular a área da base (círculo) e somarmos com a área lateral obtida acima.

Calculando-se a área do círculo temos:

$A_c = \pi.r^2$

Logo, temos que:

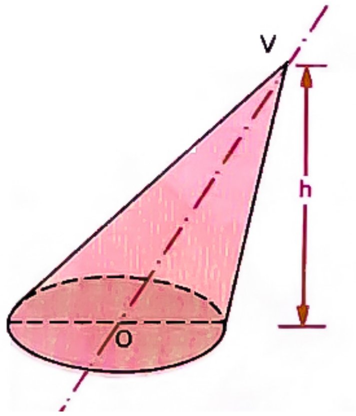
$A_t = \pi r g + \pi.r^2$

1.3.3 Classificação

Os cones podem ser classificados pela posição da reta VO em relação ao plano da base;

Se a reta VO é oblíqua ao plano da base, temos um *cone circular oblíquo*.

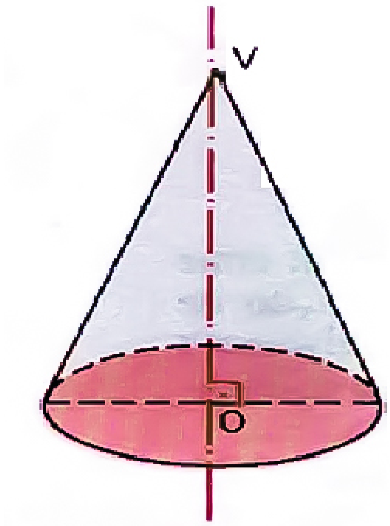
Figura 1.16: Cone oblíquo



Fonte: Dolce e Pompeo (2005, p.237)

Se a reta VO é perpendicular ao plano da base, temos um *cone circular reto*.

Figura 1.17: Cone reto



Fonte: Dolce e Pompeo (2005, p.237)

O cone circular reto é também chamado de cone de revolução, pois é gerado pela rotação de um triângulo retângulo em torno de um eixo que contém um de seus catetos.

O eixo de um cone é a reta determinada pelo vértice e pelo centro da base.

A geratriz de um cone circular reto é também dita apótema da base.

1.3.4 Volume do Cone

Inicialmente obteremos o volume de um tetraedro e, posteriormente com auxílio do Princípio de Cavalieri, encontraremos a fórmula para o cálculo do volume do cone.

Definição 1.5. *Um tetraedro é uma pirâmide de base triangular.*

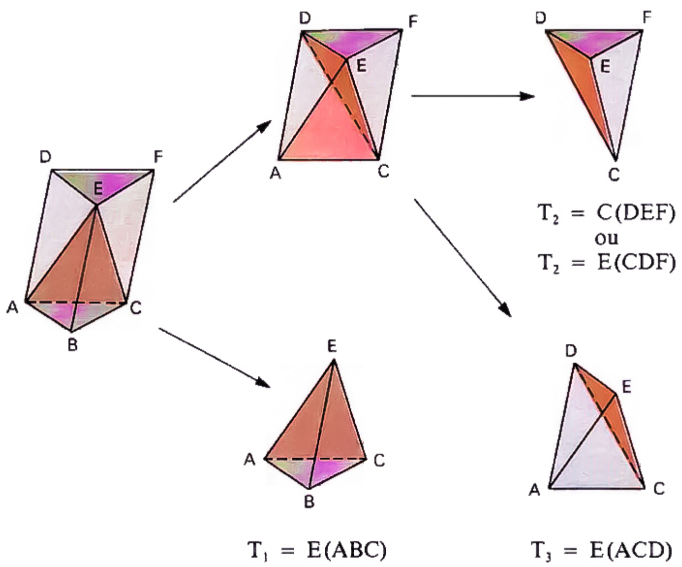
Usaremos o teorema abaixo com finalidade de se encontrar a fórmula para calcular o volume de um tetraedro.

Teorema 1.3. *Todo prisma triangular é a soma de três pirâmides triangulares (tetraedros) equivalentes entre si (de volumes iguais).*

Demonstração:

Seja o prisma triangular **ABCDEF** indicado na figura abaixo:

Figura 1.18: Prisma triangular



Fonte: Dolce e Pompeo (2005, p.192)

Cortando o prisma acima pelo plano (A, C, E), obtemos o tetraedro $T_1 = \text{E(ABC)}$ e a pirâmide quadrangular E(ACFD).

Cortando a pirâmide E(ACFD) pelo plano (C, D, E), obtemos o tetraedro $T_2 = \text{C(DEF)}$ [ou $T_2 = \text{E(DEF)}$] e $T_3 = \text{E(ACD)}$.

Temos então que:

Prisma ABCDEF $= T_1 + T_2 + T_3$.

Assim podemos afirmar que:

$V_{prisma} = V_{T_1}+V_{T_2}+V_{T_3}$

Temos agora que:

As pirâmides T_1 = E(ABC) e T_2 = C(DEF), têm o mesmo volume pois possuem as bases congruentes e a mesma altura.

Temos daí que:

$V_{T_1} = V_{T_2}$.

Analisando as pirâmides T_2 = C(DEF) e T_3 = E(ACD) observamos que estas possuem mesmo volume pois suas bases são congruentes e possuem mesma altura. Segue-se daí que:

$V_{T_2} = V_{T_3}$.

Como $V_{T_1} = V_{T_2}$ e $V_{T_2} = V_{T_3}$, temos que:

$V_{T_1} = V_{T_2} = V_{T_3}$.

Proposição 1.3. *O volume do tetraedro é um terço do volume de um prisma.*

Demonstração:

Seja B área da base e h a altura do prisma abordado no teorema acima.

Temos pelo mesmo teorema que B área da base e h altura do tetraedro T_1 e que:

$V_{T_1} = V_{T_2} = V_{T_3} = V_T$

Mas temos que:

$V_{prisma}=V_{T_1}+V_{T_2}+V_{T_3} \Longrightarrow 3V_T=B.h \Longrightarrow V_T = \frac{1}{3}.B.h$

Munidos do conhecimento do volume de um tetraedro, usaremos o tal para chegarmos ao volume do cone.

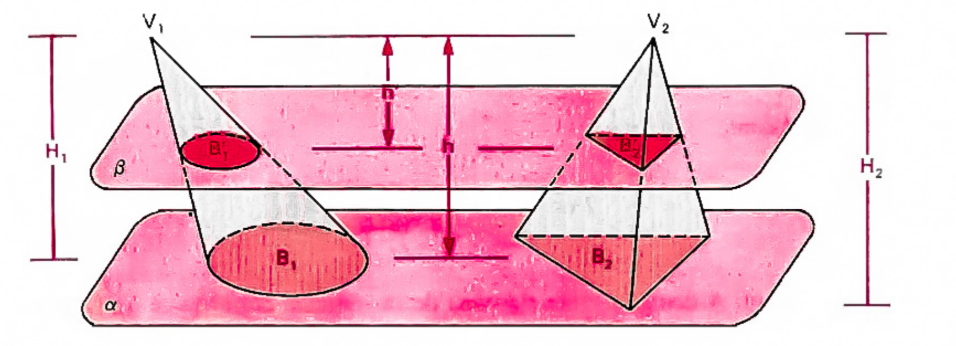
Proposição 1.4. *O volume de um cone é um terço do produto da área da base pela medida da altura.*

Demonstração:

Consideremos um cone de altura $H_1 = h$ e área da base $B_1 = B$ e um tetraedro de altura $H_2 = h$ e área da base $B_2 = B$ (o cone a pirâmide têm alturas congruentes e bases equivalentes).

Suponhamos que os dois sólidos têm as bases num mesmo plano α e que os vértices estão num mesmo semi-espaço dos determinados por α.

Figura 1.19: Cone e Tetraedro



Fonte: Dolce e Pompeo (2005, p.240)

Qualquer plano secante β paralelo a α, distando h' dos vértices que seccionam o cone, também secciona o tetraedro, e sendo as áreas das secções B_1' e B_2'

$$(\frac{B_{1'}}{B_1} = (\frac{h'}{h})^2, \frac{B_{2'}}{B_2} = (\frac{h'}{h})^2) \Longrightarrow \frac{B_1'}{B_1} = \frac{B_2'}{B_2}$$

Como $B_1 = B_2 = B$, vem que $B_1' = B_2'$.

Então, pelo Princípio de Cavalieri, o cone e o tetraedro têm volumes iguais.

$$V_{cone} = V_{tetraedro}$$

Como $V_{tetraedro} = \frac{1}{3}B_2h$, ou seja, $V_{tetraedro} = \frac{1}{3}B.h$, temos que $V_{cone} = \frac{1}{3}Bh$.

Assim podemos concluir que:

$$V_{cone} = \frac{1}{3}Bh.$$

Como $B = \pi r^2$, temos:

$$V_{cone} = \frac{1}{3}\pi r^2 h.$$

Exemplo de Aplicação: Uma criança deseja comprar em sorvete cujo recipiente tem o formato cônico com 8cm de raio e altura de 15cm. Determine a sua capacidade em mililitros

Dado: $\pi = 3$ e $1cm^3 = 1mililitro$

Resolução:

$V_{cone} = \frac{1}{3}\pi r^2 h.$

$V_{cone} = \frac{1}{3}.\pi.8^2.15.$

$V_{cone} = \frac{1}{3}.3.64.15.$

$V_{cone} = 960cm^3.$

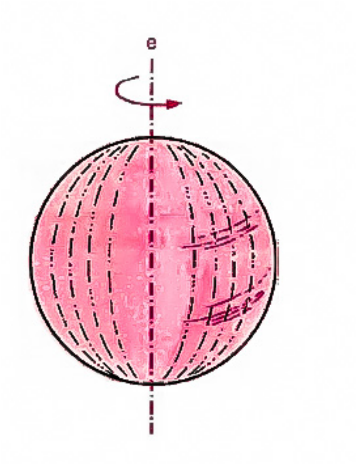
Logo a capacidade do recipiente é 960 ml.

1.4 Esfera

As esferas também são sólidos geométricos que estão bastante presentes no nosso dia-a-dia e são comumente percebidas em objetos como bolas de futebol, bolinhas de gude, etc.

Definição 1.6. *Consideremos um ponto* O *e um segmento de medida* r*. Chama-se* esfera *de centro* O *e raio* r *ao conjunto dos pontos* P *do espaço tais que a distância* $\overline{OP}$ *seja menor ou igual a* r*.*

Figura 1.20: Esfera



Fonte: Dolce e Pompeo (2005, p.250)

1.4.1 Superfície

Chama-se *superfície* da esfera de centro O e raio r ao conjunto dos pontos P do espaço, tais que a distância OP seja igual a r.

A superfície de uma esfera é também a superfície de revolução gerada pela rotação de uma semicircunferência com extremidades no eixo.

1.4.2 Elementos da Esfera

Considerando a superfície de uma esfera de eixo e, temos:

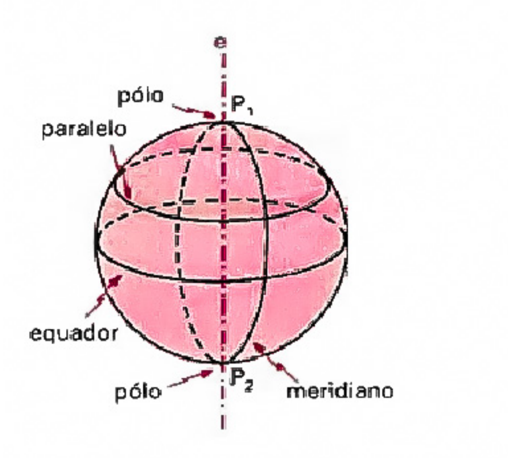
Pólos: são as interseções da superfície com o eixo.

Equador: é a secção (circunferência) perpendicular ao eixo, pelo centro da superfície.

Paralelo: é uma secção (circunferência) perpendicular ao eixo.

Meridiano: é uma secção (circunferência) cujo plano passa pelo eixo.

Figura 1.21: Elementos de uma esfera



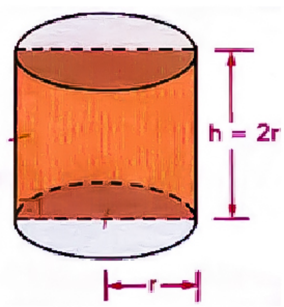
Fonte: Dolce e Pompeo (2005, p.251)

1.4.3 Volume da Esfera

Inicialmente veremos a definição de cilindro equilátero para usarmos este na obtenção da fórmula para o cálculo do volume de uma esfera.

Definição 1.7. *Cilindro equilátero é um cilindro cuja secção meridiana é um quadrado, fazendo com que a altura e o diâmetro da base sejam iguais.*

Figura 1.22: Cilindro equilátero



Fonte: Dolce e Pompeo (2005, p.219)

Proposição 1.5. *O volume de uma esfera de raio r é dado por $\frac{4}{3}\pi r^3$.*

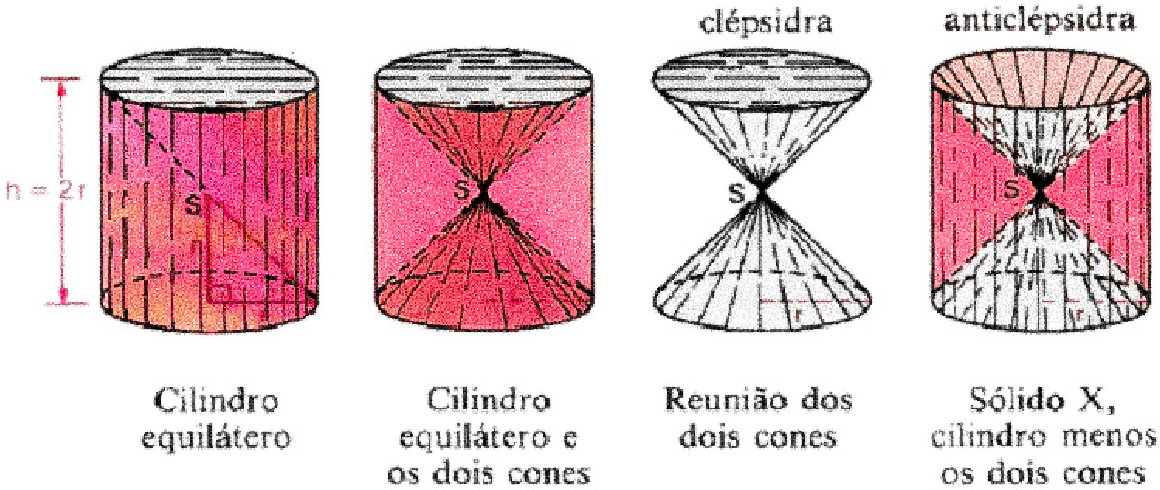
Demonstração

Consideremos um cilindro equilátero de raio da base r (a altura é $2r$) e seja S o ponto médio do eixo do cilindro.

Tomemos dois cones tendo como bases as do cilindro e S como vértice comum (a reunião desses dois cones é um sólido chamado *clépsidra*).

Ao sólido que está dentro do cilindro e fora dos dois cones vamos chamar de sólido X (este sólido é chamado *anticlépsidra*).

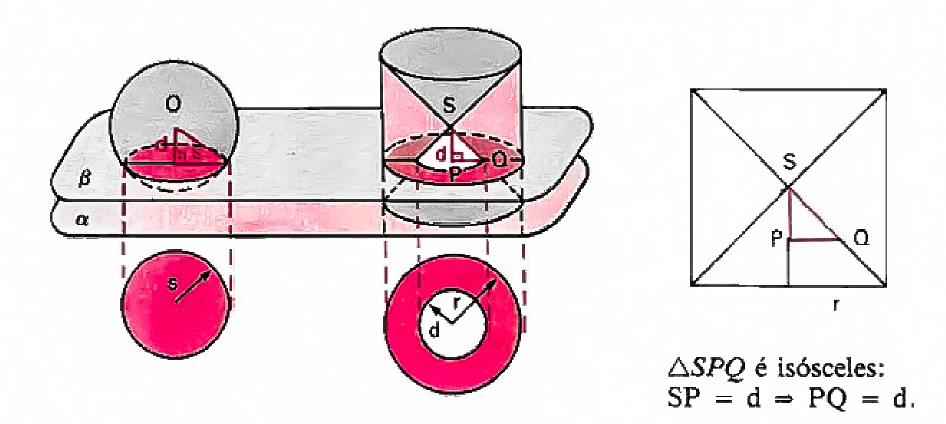
Figura 1.23: Cilindro e dois cones



Fonte: Dolce e Pompeo (2005, p.253)

Consideremos agora uma esfera de raio r e o sólido X descrito acima.

Figura 1.24: Esfera, cilindro e cones



Fonte: Dolce e Pompeo (2005, p.253)

Suponhamos que esfera seja tangente a um plano α, que o cilindro (que originou o sólido X) tenha base em α e que os dois sólidos, esfera e sólido X, estejam num mesmo semi-espaço dos determinados por α.

Qualquer plano secante β, paralelo a α distando d do centro da esfera(e do vértice do sólido X), também secciona o sólido X. Temos:

Área da secção na esfera $= \pi s^2 = \pi(r^2 - d^2)$

(Círculo)

Para determinarmos a área da secção do sólido X, usamos a área de uma coroa circular que é:

$A_{cc} = \pi r^2 - \pi r'^2$.

Mostraremos através do triângulo SPQ que $r' = d$.

Como o cilindro usado inicialmente é equilátero, temos que a altura de cada um dos cones da anticlépsidra é igual ao raio da base. Isto significa que o triângulo SPQ é semelhante a um triângulo isósceles e, consequentemente, aplicando-se a proporcionalidade temos que SP = PQ = r' = d.

Daí, temos que:

Área da secção no sólido $X = \pi r^2 - \pi d^2 = \pi(r^2 - d^2)$

(Coroa circular)

As áreas das secções na esfera e no sólido X são iguais; então, pelo Princípio de Cavalieri, a esfera e o sólido X têm volumes iguais.

$V_{esfera} = V_{sólido\ X}$

Mas:

$V_{sólido\ X}$=$V_{cilindro}$ - $2V_{cone}$=$\pi r^2.2r - 2.(\frac{1}{3}\pi r^2.r)$= $\pi r^2.2r - \frac{2}{3}\pi r^3$=$\frac{4}{3}\pi r^3$

Ou seja, V_{esfera}=$\frac{4}{3}\pi r^3$.

Exemplo de Aplicação: Uma laranja no formato perfeitamente esférico foi dividida em quatro partes iguais. Sabendo que o raio da esfera é 6cm, determine a sua capacidade de cada parte da laranja em mililitros

Dado: $\pi = 3$ e $1cm^3 = 1mililitro$

Resolução: $V_{esfera}=\frac{4}{3}\pi r^3$.

$V_{esfera}=\frac{4}{3}\pi 6^3$.

$V_{esfera}=\frac{4}{3}.216$.

$V_{esfera}=288cm^3$.

Logo a capacidade de cada parte da laranja é $\frac{288}{4}$=72 cm^3, que corresponde 72 ml.

Capítulo 2

Fundamentação Teórica

2.1 Resolução de Problemas

É muito comum aos professores de Matemática quando iniciado um determinado conteúdo ouvir de seus alunos as seguintes perguntas:

Professor. **Para que serve isto**?

Onde eu vou usar isto na minha vida?

Pensando em como atender às expectativas e responder aos questionamentos dos alunos, cabe ao docente trabalhar com uma metodologia que seja adequada. Uma das mais eficazes neste sentido é a Resolução de Problemas.

De acordo com Lupinacci e Botin, (2004, p.1)

> *A Resolução de Problemas é um método eficaz para desenvolver o raciocínio e para motivar os alunos para o estudo da Matemática. O processo ensino e aprendizagem pode ser desenvolvido através de desafios, problemas interessantes que possam ser explorados e não apenas resolvidos.*

Resolver problemas fará com que o aluno aguce sua curiosidade e desperte o seu interesse pela Matemática. Fará com que ele conecte os conceitos matemáticos ao seu cotidiano e ao mundo.

O PCN (2000, p.40) afirma que:

> *Em seu papel formativo, a Matemática contribui para o desenvolvimento de processos de pensamento e a aquisição de atitudes, cuja realidade e alcance transcendem o âmbito da própria Matemática, podendo formar no aluno a capacidade de resolver problemas genuínos, gerando hábitos de investigação, proporcionando confiança e desprendimento para analisar e enfrentar situações novas, propiciando a formação de uma visão ampla e científica da realidade, a percepção da beleza e da harmonia, o desenvolvimento da criatividade e de outras capacidades pessoais.*

Orientar o currículo para solução de problemas significa procurar e planejar situações suficientemente abertas para induzir nos alunos a busca e apropriação de estratégias adequadas não somente para darem respostas escolares como também as da realidade cotidiana (POZO e ECHEVERRIA, 1998).

Neste sentido, fazer o uso de Resolução de Problemas como ferramenta pedagógica é formar no aluno a capacidade de aprender a aprender, sendo este um sujeito com hábitos educacionais investigativos e críticos e o professor assumindo o papel de professor-mediador. Cabe agora ao professor saber diferenciar problema de exercício.

Uma situação somente pode ser concebida como um problema na medida em que exista um relacionamento dela como tal, e na medida em que não disponhamos de procedimentos automáticos que nos permitem solucioná-la de forma mais ou menos imediatas, sem exigir, de alguma forma, um processo de reflexão ou uma tomada de decisões sobre a sequência de passos a serem seguidos (POZO e ECHEVERRIA, 1998).

Mesmo considerando que cada problema possui suas particularidades, é fundamental que saibamos que existe uma série de procedimentos e habilidades que são comuns a todos os problemas. Para resolução de um problema é necessário compreender o problema, elaborar um plano que nos conduza a uma meta, realizar a execução desse plano e analisar a eficácia desse plano.

O esquema de Polya (POZO e ECHEVERRIA, 1998) aponta as quatro etapas para resolução de um problema, como descritas abaixo :

Compreender o Problema

Consiste em interpretar com clareza o que envolve o problema e fazer questionamentos como: qual é a incógnita? Quais são as informações contidas no problema? Quais são as condições para resolvê-lo?

Conceber um plano

Consiste em buscar a relação entre os dados e a incógnita. Se possível, estabelecer uma relação com outro problema semelhante e encontrar soluções para perguntas como: Você já viu este problema proposto de forma um pouco semelhante? Este problema lhe faz lembrar algum outro? Você tem alguma ideia para chegar a sua solução? O que será necessário para resolvê-lo?

Execucão do plano

Este é o momento de executar o plano, verificando posteriormente o desenvolvimento de cada passo. Ao executar o plano, verifica-se se houve aprendizagem, percebendo-se e corrigindo os possíveis erros cometidos e se as outras duas etapas foram bem desenvolvidas.

Visão retrospectiva

Nesta etapa deve-se verificar se o resultado obtido é realmente a solução do problema. É também o momento de perceber se é possível resolver o problema de outra forma ou se o método utilizado pode servir para resolver outros problemas.

Os alunos do Ensino Médio devem desenvolver competências e habilidades de compreensão e investigação em que eles se tornem sujeitos capazes de identificar o problema, procurar, selecionar e interpretar informações relativas ao problema, formular hipóteses e prever resultados. Que sejam capazes de criticar e interpretar resultados (PCN, 2000).

Neste sentido, abordaremos no referido trabalho uma atividade experimental em que, por meio do uso do software Geogebra, pretendemos desenvolver o uso da resolução de problemas como ferramenta didática.

2.2 Geogebra em Smartphones

Tomando como fundamental a construção de desenhos no estudo de Geometria Espacial e tendo em vista a grande dificuldade dos alunos em visualizá-los, faz-se necessário o uso de ferramentas pedagógicas para sanar tais dificuldades e uma destas é o Geogebra. Nesta linha de raciocínio, considerando a precariedade dos laboratórios de informática das escolas públicas brasileiras, o uso do geogebra no smartphone é uma ferramenta pedagógica complementar e essencial.

Conforme a definição dada pelo próprio aplicativo em seu site, o Geogebra é um software gratuito de matemática dinâmica para todos os níveis de ensino que reúne geometria, álgebra, folhas de cálculo, gráficos, estatística e cálculo 3D numa aplicação fácil de utilizar (GEOGEBRA, 2017).

Foi criado por Markus Hohenwarter para ser utilizado em ambiente de sala de aula. O projeto foi iniciado em 2001, na Universität Salzburg, e tem prosseguido em desenvolvimento na Florida Atlantic University.

Sendo assim, a opção de se usar o Geogebra 3D (aplicativo do smartphone) no ensino de Geometria Espacial por meio de uma atividade explorativa tem como finalidade fazer com que o aluno, por meio de suas construções e com auxílio das intervenções do professor na função de mediador, possa construir o seu saber de forma significativa e dinamizada.

Capítulo 3

Metodologia

Neste capítulo abordaremos o passo a passo de como foi desenvolvida uma atividade exploratória através da Resolução de Problemas envolvendo o conteúdo de Geometria Espacial, especificamente volume de cilindros, cones e esferas, com auxílio do geogebra 3D no smartphone.

A pesquisa quantitativa foi feita com os alunos de duas turmas de 3º ano do Ensino Médio da Escola Estadual de Ensino Médio Professor Joaquim Fonseca, localizada a rua Sete de Dezembro, nº 31, Centro, Conceição da Barra - ES. Atualmente a escola conta com 546 alunos distribuídos nos turnos matutino, verspertino e noturno.

Nos turnos matutino e vespertino funciona a modalidade de Ensino Regular e no turno noturno além desta modalidade funciona também o EJA (Educação de jovens e Adultos), como mostra a tabela a seguir:

Tabela 3.1: Alunos por Gênero

Gênero	Quantidade	Faixa Etária
Masculino	247	Entre 14 e 71 anos
Feminino	299	Entre 14 e 71 anos

Fonte: Dados coletados pelo autor junto a escola

A pesquisa foi realizada com 42 alunos do 3º ano do turno matutino cujas características poderão ser observadas na tabela a seguir:

Tabela 3.2: Alunos Participantes

Gênero	3º M01	3º M02	Faixa Etária
Masculino	10	10	Entre 16 e 20 anos
Feminino	12	10	Entre 16 e 20 anos

Fonte: Dados coletados pelo autor junto a escola

Os seguintes passos abaixo e que veremos nas próximas subseções de forma detalhada são o suporte da metodologia pedagógica aplicada.

• Divisão da sala em quatro grupos e aplicação de um problema envolvendo Geometria Espacial retirado do banco de questões do ENEM;

• Orientação do professor aos alunos quanto a utilização do Geogebra 3D do smartphone na construção de cilindros, cones e esferas;

• Apresentação e demonstração das respectivas fórmulas para o cálculo de volume de cilindro, cone e esferas usando conceitos do Princípio de Cavalieri.

• Análise das respostas obtidas no problema proposto inicialmente;

• Aplicação de lista de exercícios para avaliação da aprendizagem;

3.1 Divisão dos Grupos e Aplicação da Situação-Problema

Levando-se em consideração o fato de que cerca de 20% dos alunos não possuíam smartphones e objetivando enriquecer o debate em relação às atividades propostas no referido trabalho, o professor da turma, neste caso, o autor deste trabalho, optou por dividir cada uma das salas de 3º ano do Ensino Médio em quatro grupos, contendo, em média, seis alunos cada.

Após a divisão dos grupos foi levantada uma situação problema para análise e discussão. Tal situação problema possui característica de ser contextualizada uma vez que o Município de Conceição da Barra - ES tem como uma das principais fontes de emprego e renda uma usina de álcool, onde é comum o uso de silos.

Segundo PCN (2000, p.45)

Dentre esses valores e atitudes, podemos destacar que ter iniciativa na busca de informações, demonstrar responsabilidade, ter confiança em suas formas de pensar, fundamentar suas ideias e argumentações são essenciais para que o aluno possa aprender, se comunicar, perceber o valor da Matemática como bem cultural de leitura e interpretação da realidade e possa estar melhor preparado para sua inserção no mundo do conhecimento e do trabalho.

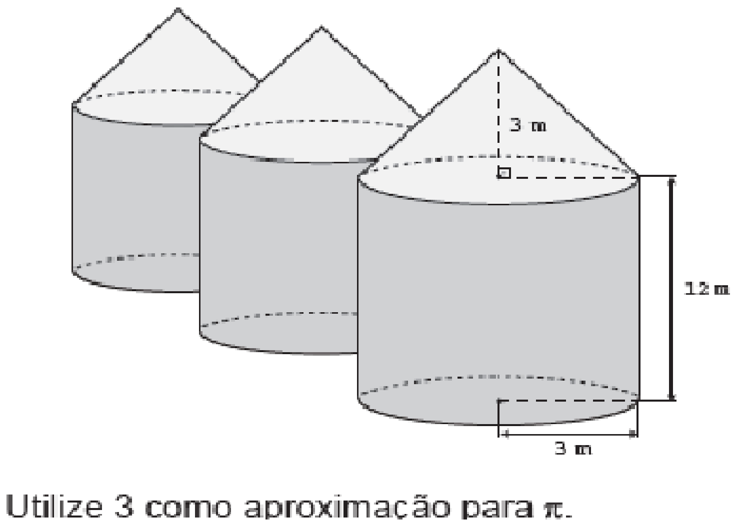
É fundamental ao aluno do Ensino Médio desenvolver competências e habilidades que possam ser usadas como métodos matemáticos em situações reais (PCN, 2000).

Nessa perspectiva enunciamos a problema abaixo:

(**QUESTÃO 136** : **ENEM 2016**, **CADERNO DE PROVAS AZUL**)

Em regiões agrícolas, é comum a presença de silos para armazenamento e secagem da produção de grãos, no formato de um cilindro reto, sobreposto por um cone, e dimensões indicadas na figura. O silo fica cheio e o transporte dos grãos é feito em caminhões de carga cuja capacidade é de 20 m^3. Uma região possui um silo cheio e apenas um caminhão para transportar os grãos para a usina de beneficiamento.

Figura 3.1: Figura do Silo



Fonte: Caderno de questões do ENEM (2016, p.17)

O número mínimo de viagens que o caminhão precisará fazer para transportar todo o volume de grãos armazenados no Silo é:

A) 6. B) 16. C) 17. D) 18. E) 21.

Em seguida o professor orientou a cada grupo que não resolvesse, ou tentasse resolver a questão imediatamente e sim, ficar atento e responder os seguintes questionamentos:

a) Quais sólidos geométricos podemos identificar no problema?

b) Após a identificação dos sólidos, descreva os caminhos possíveis para resolução do problema.

Observa-se que o item a) foi resolvido com ótima desenvoltura por todos os grupos envolvidos. Quanto ao item b) seguem as transcrições das respostas apresentadas pelos grupos:

Grupo 1:

Capacidade = 20 m^3

$A_b = \pi.r^2$

a) Cone e um cilindro.

b) Calcular o volume do cilindro e do cone.

Grupo 2:

a) Cone e um cilindro.

b) Calcular o volume do cilindro e do cone.

Grupo 3:

a) Cone e um cilindro.

b) Para calcular o volume do silo, primeiro calcularemos o volume do cilindro e depois o volume do cone.

Para o volume do cilindro, faremos a área do círculo e multiplicaremos pela altura do círculo, obtendo o volume.

Para o volume do cone, faremos a área do círculo e a altura do triângulo e dividimos por 3. No fim somaremos os dois volumes.

Grupo 4:

a) Cone e um cilindro.

b) Calcular o volume do cilindro e depois somar com o volume do cone. Antes tem que calcular a área do círculo e do cone.

Grupo 5:

a) Cone e um cilindro.

b) Calcular o volume de grãos que cabem no silo e dividir pelo volume do caminhão. Descobrir em partes a área da base do cone, descobrir o volume, depois do cilindro e somar.

Grupo 6:

a) Cone e um cilindro.

b) Primeiramente calcula-se as áreas do cone e do cilindro, depois calcula-se o volume do dois, soma-se o resultado encontrado e depois divide por 20 para saber quantas viagens seriam necessárias.

Grupo 7:

a) Cone e um cilindro.

b) A_b tirar a área de cada sólido geométrico e no final somar tudo.

Grupo 8:

a) Cone e cilindro.

b) Primeiramente temos que calcular o volume da figura geométrica e depois dividir pela quantidade de metros cúbicos suportado pelo caminhão e assim achar o valor de viagens que serão dadas.

Observa-se que os grupos 1, 2, 3 e 4 identificaram a necessidade de calcular o volume de cada sólido (cilindro e cone) separadamente e posteriormente efetuar a soma para obtenção do volume do silo, esquecendo-se de calcular a quantidade de viagens necessárias para o caminhão realizar o transporte dos grãos. Percebe-se ainda que os grupos 5 e 7 raciocinaram de forma adequada compreendendo a necessidade de calcular os volumes de cada sólido separadamente (cilindro e cone), porém confundiram os conceitos de volume e área e os grupos 6 e 8 apresentaram um raciocínio completo contemplando o cálculo do volume de cada sólido contido na figura separadamente, somando-se os volumes posteriormente e, em seguida, relacionando o volume obtido com o volume que cada caminhão pode transportar, obtendo-se assim, a quantidade de viagens necessárias para resolver o problema.

A partir das observações feitas acima, verificou-se a necessidade de uma melhor visualização dos sólidos geométricos por parte dos alunos para que pudessem identificar seus elementos e melhor conceituar as noções de volume.

Para garantir a melhor qualidade na construção do conhecimento e visualização dos sólidos geométricos presentes na situação problema, abordaremos na próxima seção como construir cilindros e cones (para auxiliar na resolução do problema proposto na página 29 deste trabalho), bem como esferas.

3.2 Construção dos Sólidos no Geogebra 3D

Objetivando-se uma melhor visualização dos sólidos geométricos (cilindros, cones e esferas) o professor orientou com uma aula de antecedência que o máximo possível de alunos instalassem em seus respectivos smartphones o aplicativo Geogedra 3D para android que encontra-se facilmente de forma gratuita na loja do *play store*.

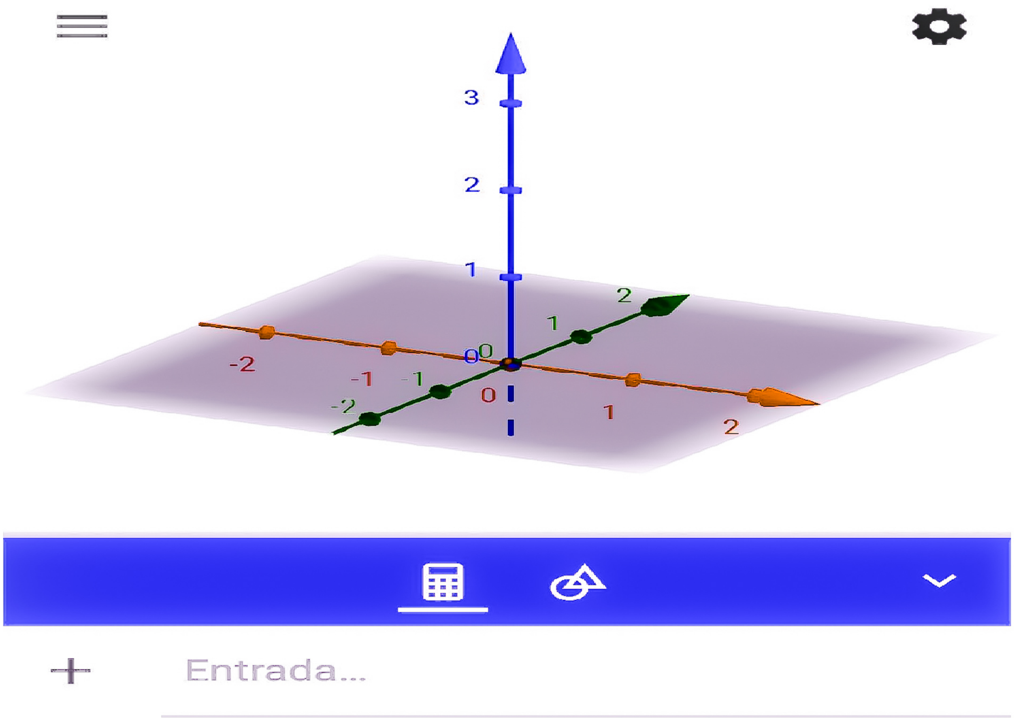
Munido das ferramentas acima listadas, de forma que em cada grupo pelo menos um aluno tenha o material desejado, o professor orientou os alunos como utilizar o Geogebra 3D como listado em cada item abaixo .

- **Apresentação do Geogebra 3D no smartphone**

Os alunos foram orientados a abrir o aplicativo para conhecerem a interface do Geogebra 3D no smartphone onde abordaremos os comandos necessários para construção dos sólidos (cilindros, cones e esferas).

Veremos inicialmente, a interface com a tela inicial.

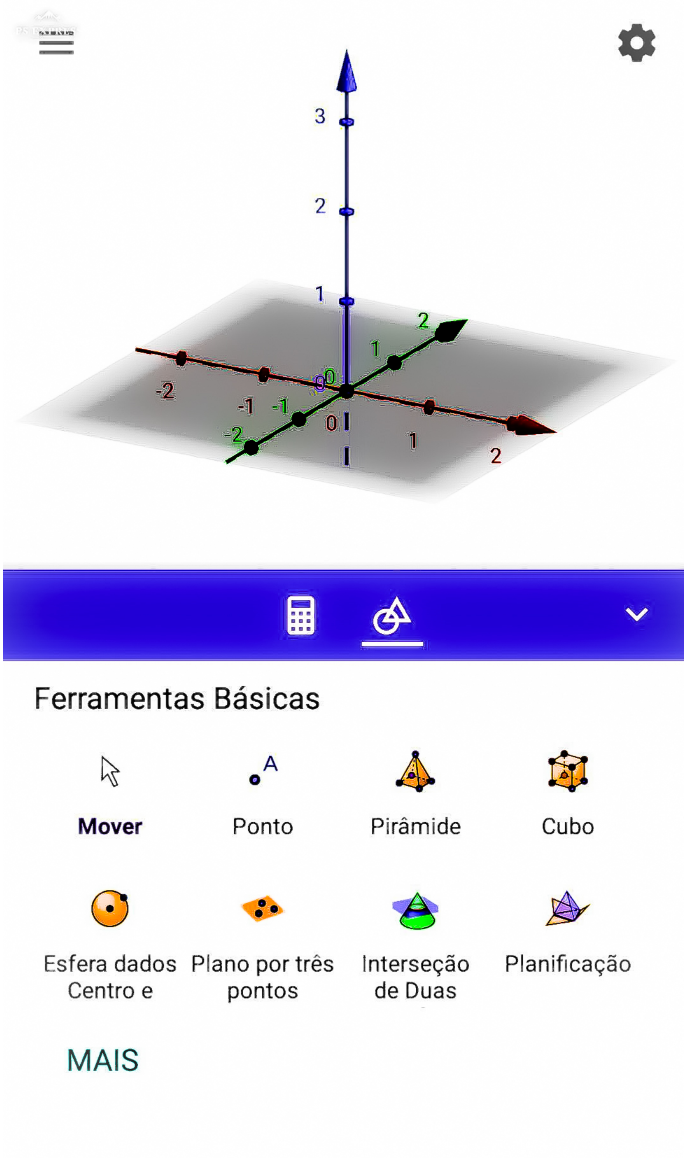
Figura 3.2: Tela inicial Geogebra 3D



Fonte: Autor

Toque no ícone que possui os símbolos da circunferência com o triângulo (usados para fins geométricos) e em seguida, na seta que está no canto esquerdo na parte debaixo. Posteriormente, deslizando o dedo para cima e para baixo sobre a tela do smartphone, pode-se ter acesso aos ícones de ferramentas básicas, editar, pontos, retas e polígonos, sólidos, planos, círculos, curvas, transformar, medições, outras e retas especiais, como ilustrado nas figuras abaixo:

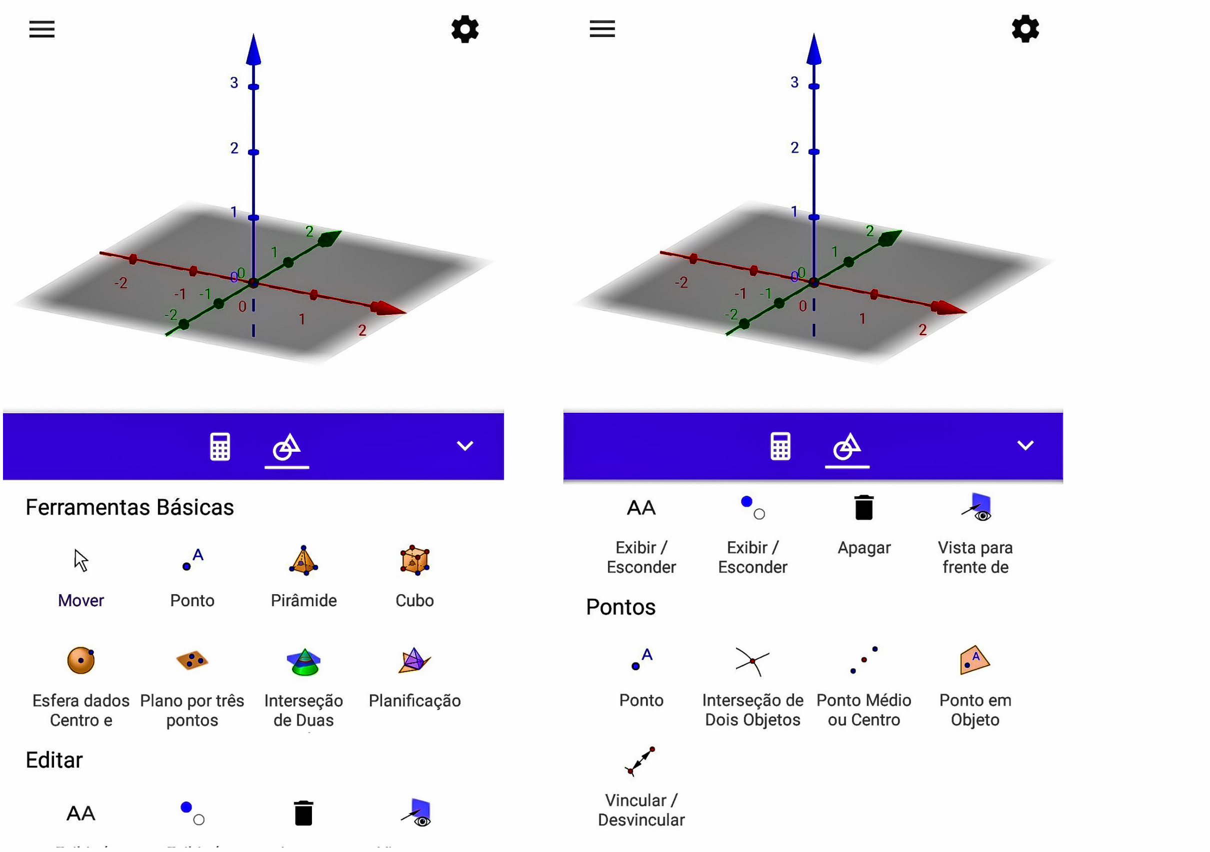
Figura 3.3: Entrada do Geogebra 3D



Fonte: Autor

Ferramentas básicas, editar e pontos

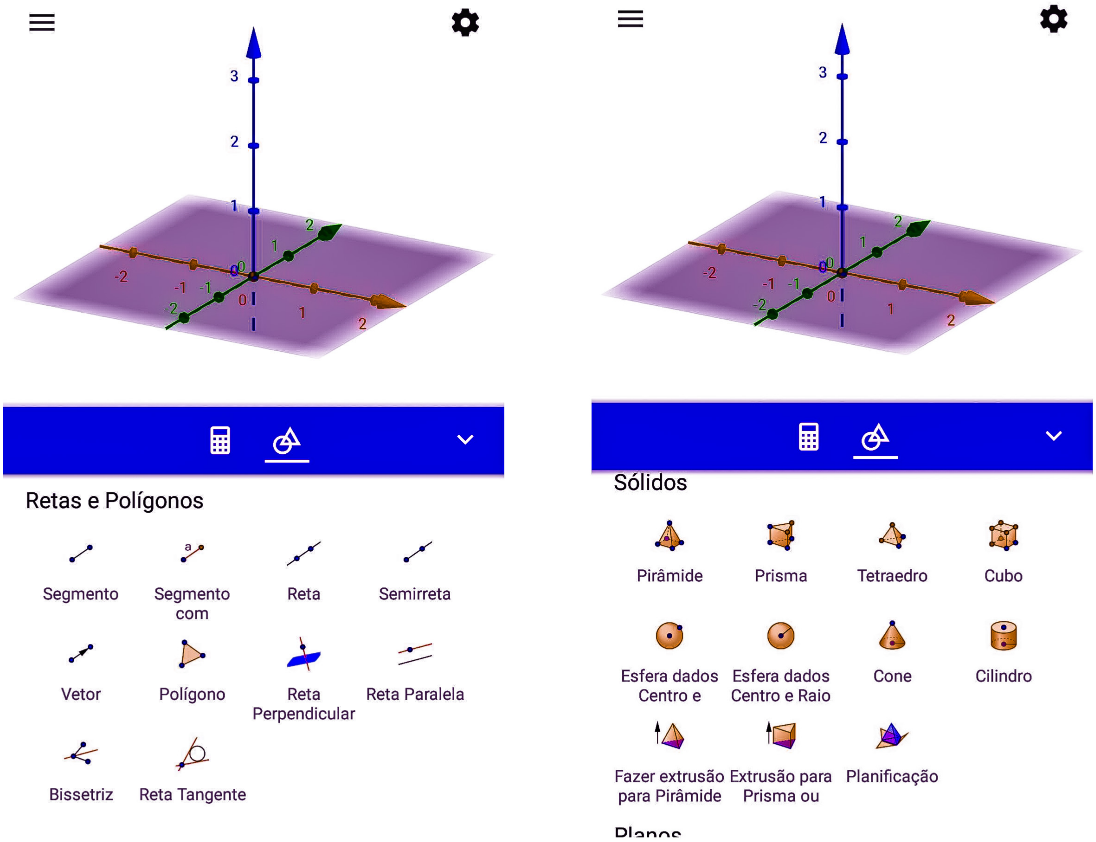
Figura 3.4: Ferramentas básicas, editar e pontos



Fonte: Autor

Retas, polígonos e sólidos

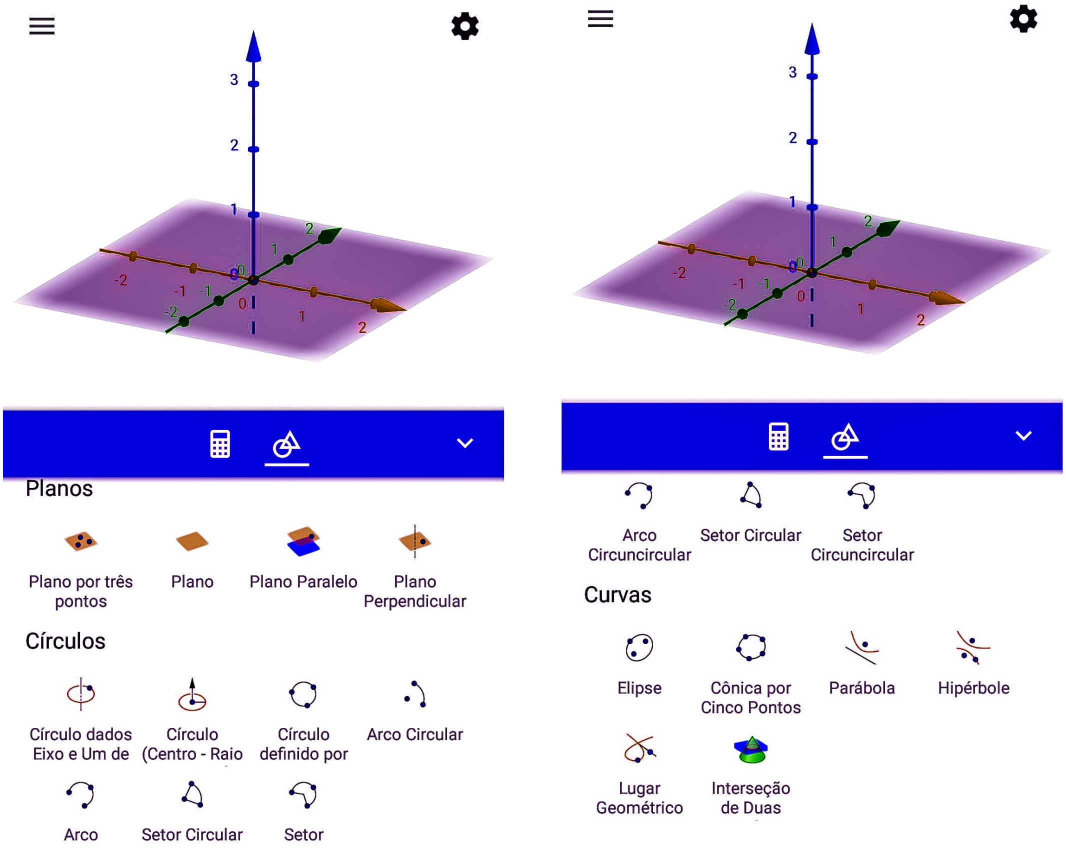
Figura 3.5: Retas, polígonos e sólidos



Fonte: Autor

Planos, círculos e curvas

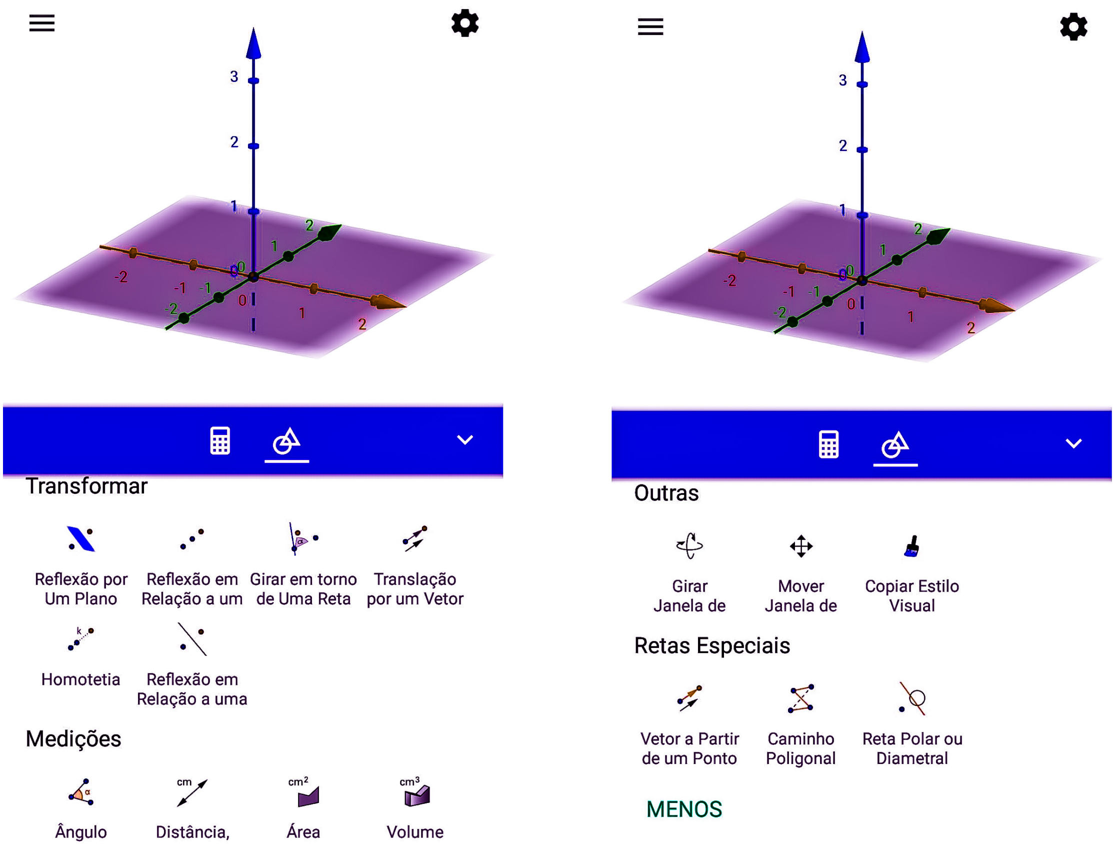
Figura 3.6: Planos, círculos e curvas



Fonte: Autor

Transformar, medições, outras e retas especiais

Figura 3.7: Transformar, medições, outras e retas especiais



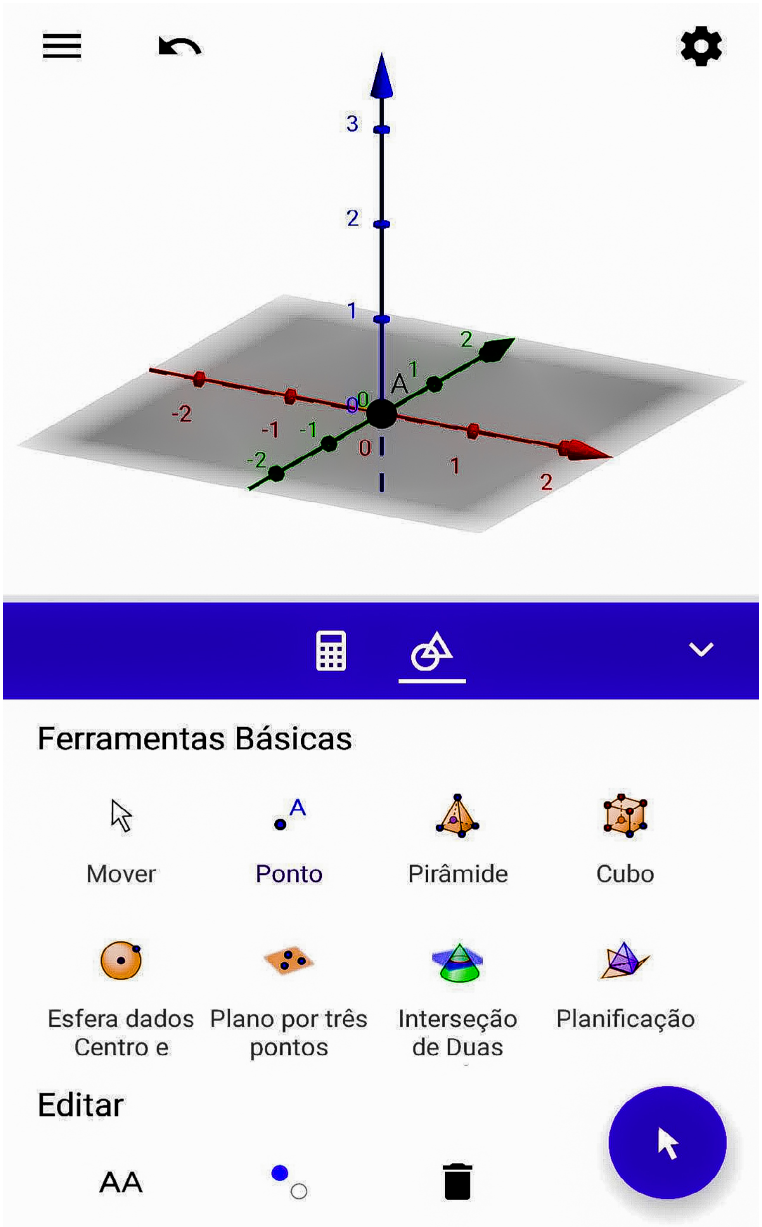
Fonte: Autor

• **Construção do Cilindro no Geogebra 3D em smartphone**

Para construção de um cilindro no Geogebra 3D do smartphone a orientação passada pelo professor aos alunos segue os seguintes comandos:

1- Ao tocar na tela inicial e no comando referente à geometria, usando seu respectivo ícone, marque um ponto no centro do plano tridimensional como ilustrado na figura abaixo:

Figura 3.8: Construção do Cilindro: Passo 1



Fonte: Autor

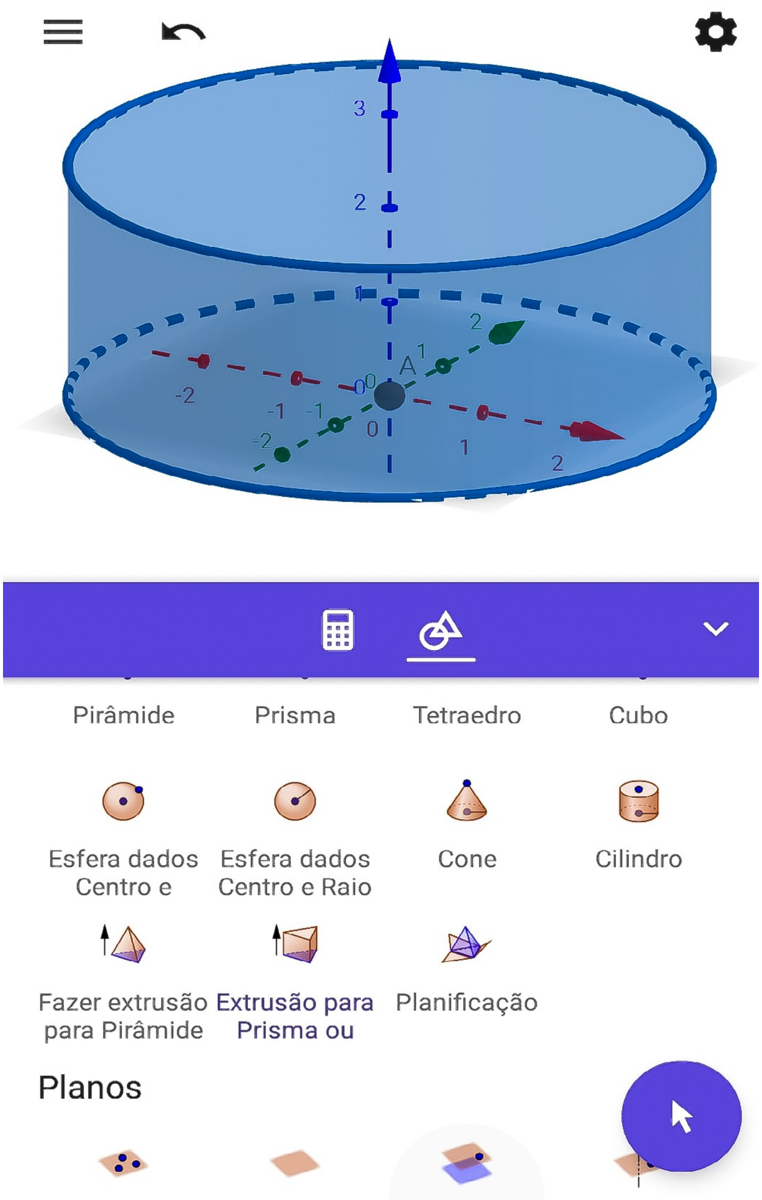
2- Agora, vamos construir a base do cilindro, que é uma circunferência, tocando o ícone círculo (centro e raio) e determinando uma medida para o raio (pode ser 3 unidades). Vide figura abaixo:

Figura 3.9: Construção do Cilindro: Passo 2

Fonte: Autor

3- Para finalizar, toque no ícone extrusão para prisma ou cilindro e deslize o dedo para cima até atingir a altura desejada (pode ser 3 unidades). Segue abaixo o cilindro obtido.

Figura 3.10: Construção do Cilindro: Passo 3



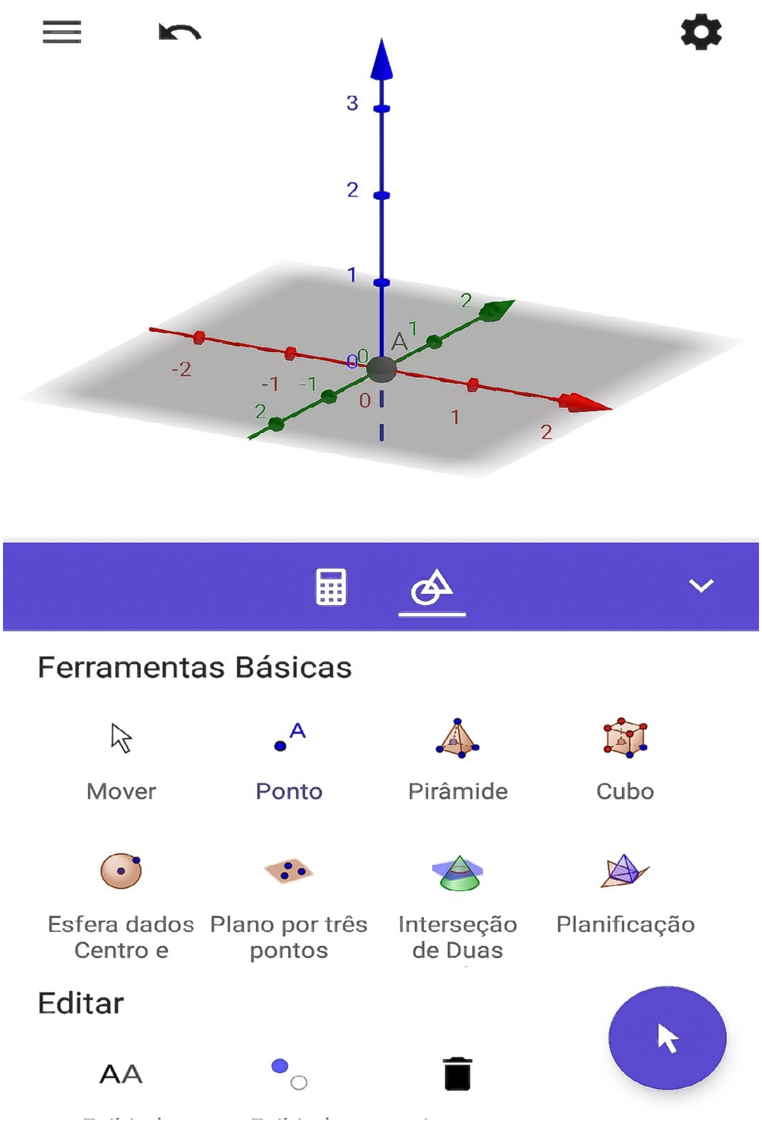
Fonte: Autor

• **Construção do Cone no Geogebra 3D em smartphone**

Para construção de um cone no Geogebra 3D com auxílio do smartphone as orientações são semelhantes às da construção de um cilindro como veremos a seguir:

1- Ao tocar na tela inicial e no comando referente à geometria, usando seu respectivo ícone, marque um ponto no centro do plano tridimensional como ilustrado na figura abaixo:

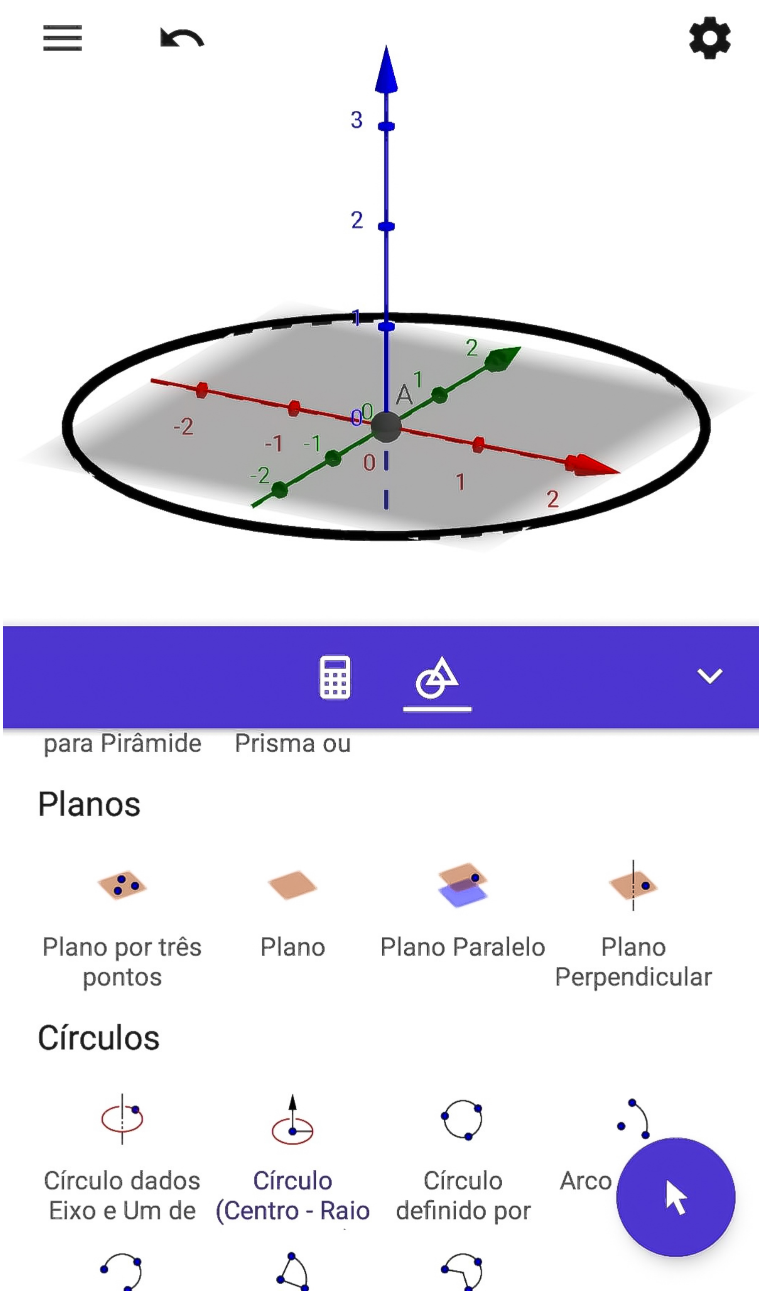
Figura 3.11: Construção do Cone: Passo 1



Fonte: Autor

2- Agora, vamos construir a base do cone, que é uma circunferência, tocando o ícone círculo (centro e raio) e determinando uma medida para o raio (pode ser 3 unidades). Vide figura abaixo:

Figura 3.12: Construção do Cone: Passo 2



Fonte: Autor

3- Para finalizar, toque no ícone extrusão para pirâmide ou cone e deslize o dedo para cima até atingir a altura desejada (pode ser 3 unidades). Segue abaixo o cone obtido.

Figura 3.13: Construção do Cone: Passo 3

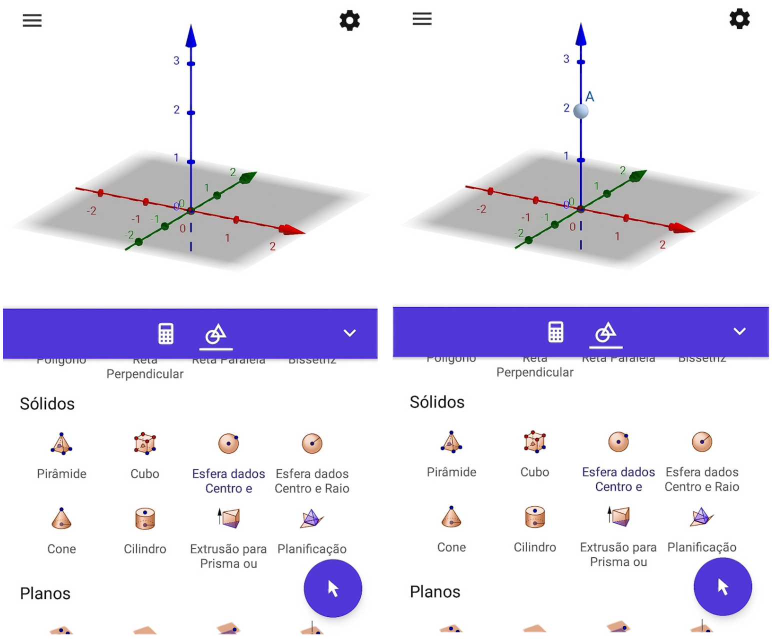
Fonte: Autor

• **Construção da Esfera no Geogebra 3D em smartphone**

O procedimento pra construção de uma esfera no Geogebra 3D em smartphone possui algumas diferenças em relação aos passos necessários para construção do cilindro e do cone. Não é necessária a construção de uma base circular, é necessária e suficiente apenas a construção do centro e do raio usando-se o ícone sólidos. Os passos detalhados veremos a seguir.

1- Ao tocar na tela inicial e no comando referente à geometria, usando seu respetivo ícone, em seguida toque no ícone esfera dando centro e raio (pode ser 2 unidades) e posteriormente o eixo z (em azul) , obtendo a imagem abaixo:

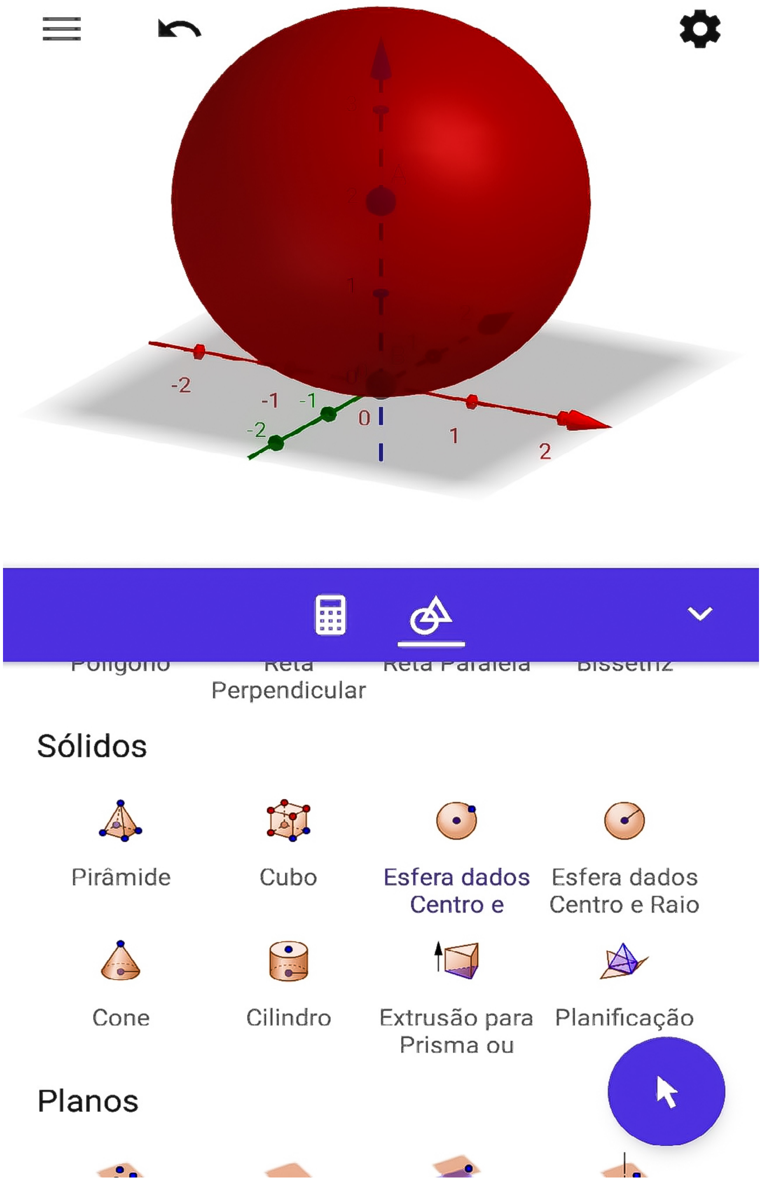
Figura 3.14: Construção da Esfera: Passo 1



Fonte: Autor

2- Finalmente, para obtenção da esfera, toque no centro do eixo tridimensional, como indicado na figura abaixo:

Figura 3.15: Construção da Esfera: Passo 2



Fonte: Autor

Caso haja inversão de comando, em relação a tocar primeiro o centro do eixo tridimensional e posteriormente o eixo z, a esfera será com uma parte abaixo dos eixos xy, como veremos posteriormente em algumas produções dos alunos.

3.3 Conceitos Matemáticos Necessários para o Cálculo do Volume do Cilindro, Cone e Esfera

Nesta seção abordaremos como o professor, na função de mediador, poderá orientar os alunos em relação a alguns conceitos envolvendo sólidos geométricos (cilindros, cones e esferas), seus elementos e as respectivas fórmulas para o cálculo de volumes.

Munido de conhecimento prévio dos alunos em relação aos conceitos de prismas e pirâmides (conteúdo estudado anteriormente pela turma com proposta pedagógica tradicional), coube ao professor enunciar (e relembrar) o Princípio de Cavalieri em que:

Dois sólidos nos quais todo plano secante, paralelo a um dado plano, determina superfícies de áreas iguais (superfícies equivalentes), são sólido de volumes iguais (sólidos equivalentes).

Em seguida, comparando-se as características do cilindro e do prisma, o professor enunciou a seguinte fórmula para o cálculo do volume de cilindro:

$$V = \pi r^2 h$$

Seguindo a mesma linha de raciocínio, comparando as características do cone com as do tetraedro, enunciou-se a fórmula necessária para o cálculo do volume do cone :

$$V_{cone} = \frac{1}{3}\pi r^2 h.$$

Por fim, para obtenção da fórmula necessária ao cálculo do volume de uma esfera, o professor utilizou os conceitos abordados no Capítulo 1 deste trabalho, Seção 1.4.3, como segue abaixo:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

Posteriormente às orientações do professor, foi solicitado aos grupos de alunos que respondessem aos seguintes itens:

a) De posse dos conhecimentos adquiridos com o Geogebra 3D, construa o silo indicado no problema inicial;

b) Resolva o problema proposto inicialmente.

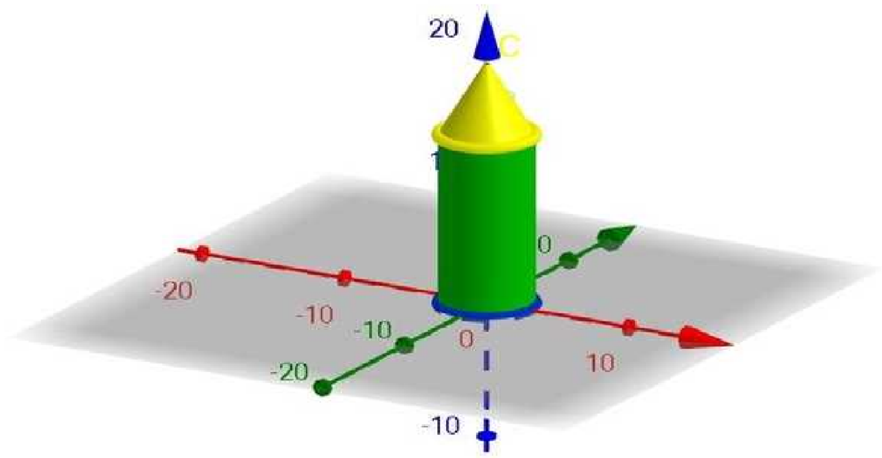
3.4 Resultados Obtidos em Relação ao Problema Inicial (ENEM 2016 - Questão 136)

Apresentaremos nesta seção, o que foi produzido pelos alunos das duas turmas de 3º ano os quais foram submetidos ao problema enunciado na Seção 1, deste Capítulo.

Inicialmente podemos observar por meio de algumas figuras abaixo, que quando bem orientado, o aluno é capaz de deixar sua criatividade fluir, pois além de construir, com auxílio do Geogebra 3D no smartphone, alguns produziram silos bastantes interessantes.

Na figura abaixo, em alusão ao período de copa do mundo, os alunos usaram as cores verde a amarelo para ilustrar o silo.

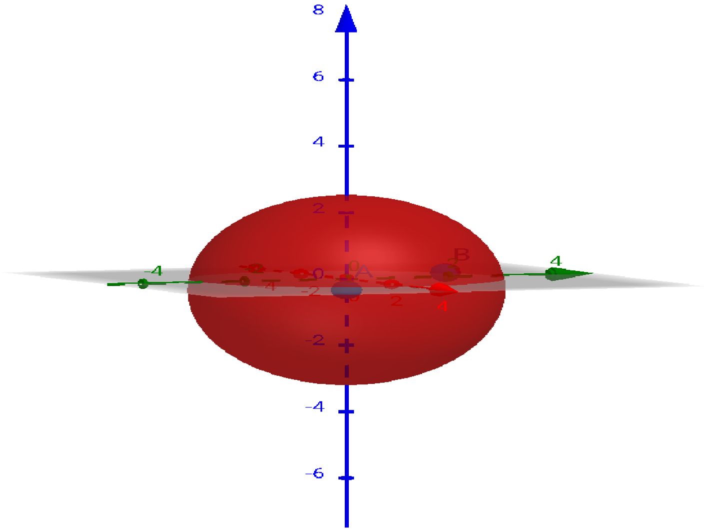
Figura 3.16: Silo 1



Fonte: Autor

Outro grupo de alunos construiu uma esfera cortada ao meio pelos planos xy.

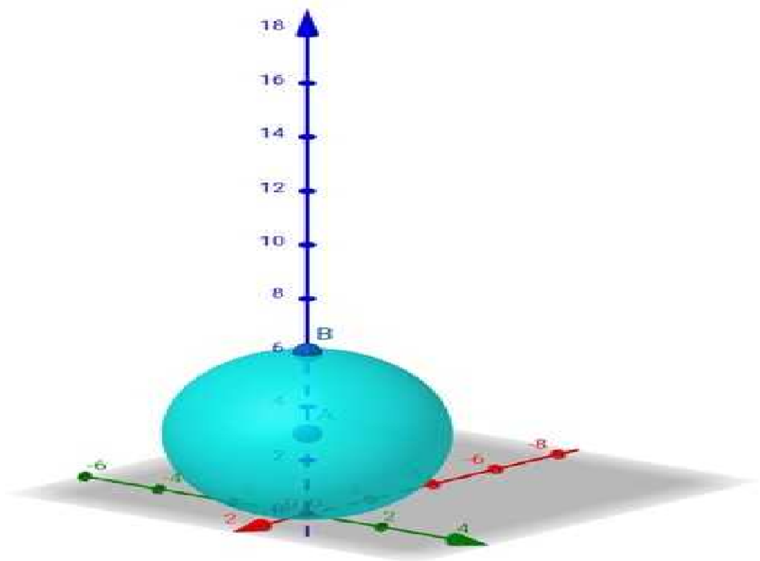
Figura 3.17: Esfera 1



Fonte: Autor

Por fim, outro trabalho que chamou a atenção traz a esfera se posicionando acima dos eixos xy.

Figura 3.18: Esfera 2



Fonte: Autor

Em relação à resolução do problema 136, com as orientações feitas pelo professor em relação às características de cada sólido e como obter o volume de cada um, acrescido de um debate entre os grupos de como chegar ao resultado final da questão, os grupos atingiram o objetivo de resolvê-lo corretamente, como veremos a seguir.

Grupo 1:

Resolução:

$A_c = 3.3^2$

$A_c = 3.9$

$A_c = 27m^3$

$V_{cil} = A_b.h$

$V_{cil} = 27.12$

$V_{cil} = 324m^3$

$V_{cone} = \frac{A_b.h}{3}$

$V_{cone} = \frac{27.3}{3}$

$V_{con} = 27m^3$

$V_{cone} + V_{cilindro} = 27{+}324 = 351$

$\frac{V_{total}}{V_{caminhão}}{=}\frac{351}{20}{=}$17,55 ou ≈ 18

Pode-se observar em seguida que o nível de entendimento dos alunos em relação a resolução do problema proposto atingiu um estágio tão satisfatório que alguns foram bastante detalhistas em seus cálculos.

Grupo 2:

Resolução:

Base do cilindro = círculo

$A_c = \pi.r^2$

$V_{cone} = \frac{A_b.h}{3}$

valor = 20m^3

h = 12

$V_{cone} + V_{cilindro}$

$A_c = \pi.r^2$

$A_c = 3.3^2$

$A_c = 3.9$

$A_c = 27$

$V_{cil} = A_b.h$

$V_{cil} = 27.12$

$V_{cil} = 324m^3$

$V_{cone} = \frac{A_b.h}{3}$

$V_{cone} = \frac{27.3}{3}$

$V_{cone} = \frac{81}{3}$

$V_{cone} = 27$

$V_{cone} + V_{cilindro}$

$324 + 27$

$V_{caminhão} = 20m^3$

Número de viagens $= \frac{351}{20}$

Número de viagens $= 17,5m^3$

Número de viagens $= 18m^3$

Grupo 3:
Resolução:

$V = \frac{\pi.r^2.h}{3}$

$V = \frac{3.3^2.3}{3}$

$V = \frac{81}{3} = 27$

$V = h.\pi.r^2$

$V = 12.3.3^2$

$V = 12.3.9$

$V = 12.27$

$V = 324m^3$

$324 + 27 = 351$ m^3

351 : 20 = 17,55
Aproximadamente 18 caminhões serão usados para transportar a carga.

É notório por meio dos trabalhos expostos que houve uma participação efetiva dos alunos com produtividade e aprendizagem significativa no caminho percorrido pela busca do saber. Percebe-se o aluno como ator principal no processo ensino-aprendizagem e que a figura do professor assume o papel de mediador do conhecimento.

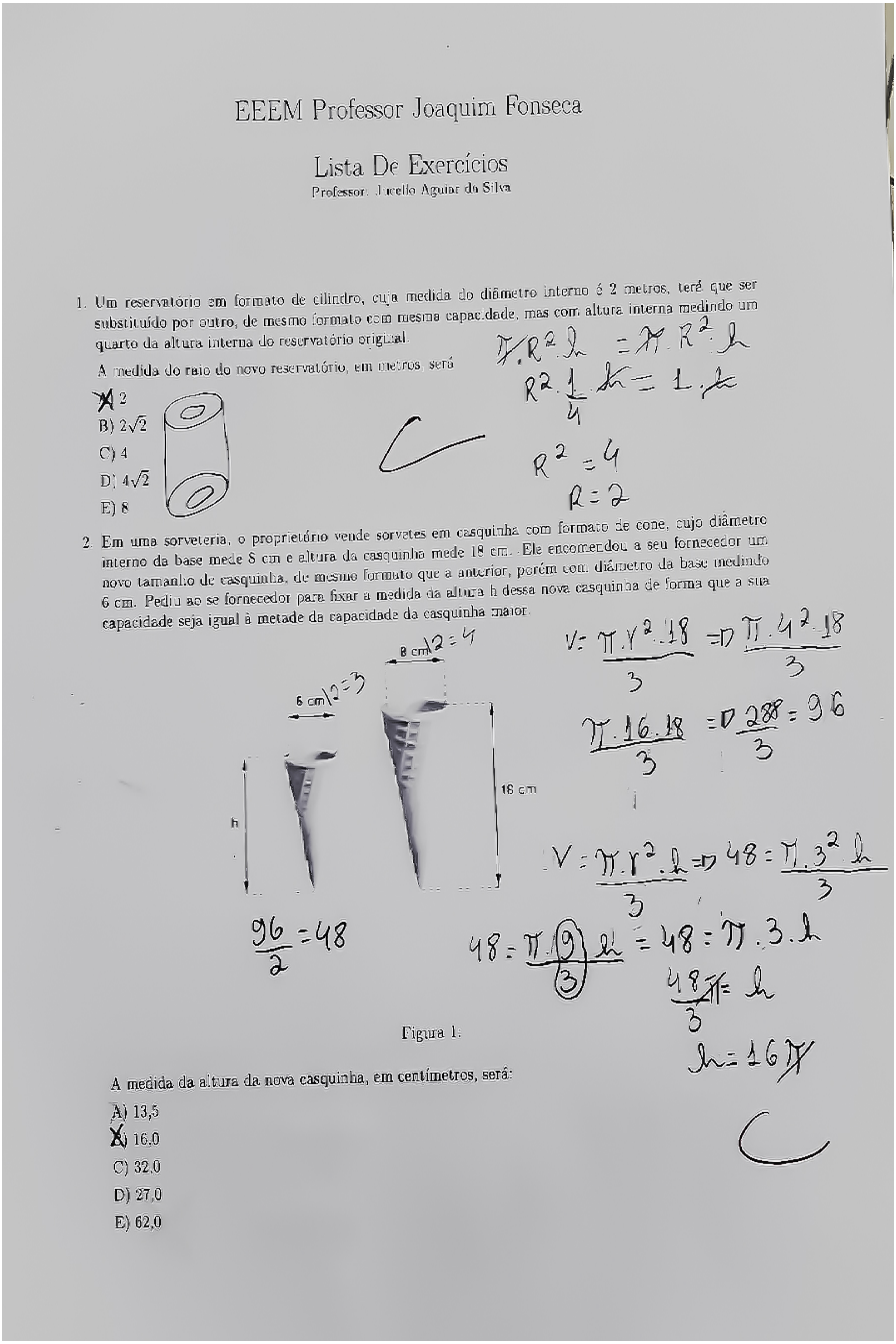
3.5 Lista de Exercício para Avaliar a Aprendizagem

Objetivando verificar se com a atividade exploratória, com auxílio do Geogebra 3D e a teoria de Resolução de Problemas, os alunos das duas turmas atingiram as expectativas de saber identificar um sólido geométrico (neste caso, cilindro, cone e esfera), identificar seus respectivos elementos e aplicar suas respectivas fórmulas para os cálculos dos volumes, foi aplicada uma lista de exercícios extraída do banco de questões do PAEBES TRI com objetivo de comparar com a aprendizagem de volumes de prismas e pirâmides que foram abordados em aulas anteriores de forma tradicional.

Segundo site do CAED (Centro de Apoio à Educação a Distância), PAEBES TRI é uma avaliação diagnóstica cujo objetivo é dar suporte pedagógico ao professor de modo a identificar as individualidades na aprendizagem de cada aluno, fazendo com que este busque estratégias para melhoria da aprendizagem (CAED, 2015).

A atividade foi aplicada de modo que as quatro primeiras questões abordem volume de cilindros, cones e esferas e as quatro últimas, volume de prismas e pirâmides.

Figura 3.19: Foto 12



EEEM Professor Joaquim Fonseca

Lista De Exercícios

Professor: Jucelio Aguiar da Silva

1. Um reservatório em formato de cilindro, cuja medida do diâmetro interno é 2 metros, terá que ser substituído por outro, de mesmo formato com mesma capacidade, mas com altura interna medindo um quarto da altura interna do reservatório original.

A medida do raio do novo reservatório, em metros, será

~~A)~~ 2

B) $2\sqrt{2}$

C) 4

D) $4\sqrt{2}$

E) 8

$\cancel{\pi}.R^2.h = \cancel{\pi}.R^2.h$

$R^2.\frac{1}{4}.\cancel{h} = 1.\cancel{h}$

$R^2 = 4$

$R = 2$

2. Em uma sorveteria, o proprietário vende sorvetes em casquinha com formato de cone, cujo diâmetro interno da base mede 8 cm e altura da casquinha mede 18 cm. Ele encomendou a seu fornecedor um novo tamanho de casquinha, de mesmo formato que a anterior, porém com diâmetro da base medindo 6 cm. Pediu ao se fornecedor para fixar a medida da altura h dessa nova casquinha de forma que a sua capacidade seja igual à metade da capacidade da casquinha maior.

$V = \frac{\pi.r^2.18}{3} \Rightarrow \frac{\pi.4^2.18}{3}$

$\frac{\pi.16.18}{3} \Rightarrow \frac{288}{3} = 96$

$V = \frac{\pi.r^2.h}{3} \Rightarrow 48 = \frac{\pi.3^2.h}{3}$

$\frac{96}{2} = 48$

$48 = \frac{\pi.9.h}{3} = 48 = \pi.3.h$

$\frac{48}{3}\cancel{\pi} = h$

$h = 16\cancel{\pi}$

Figura 1:

A medida da altura da nova casquinha, em centímetros, será:

A) 13,5

~~B)~~ 16,0

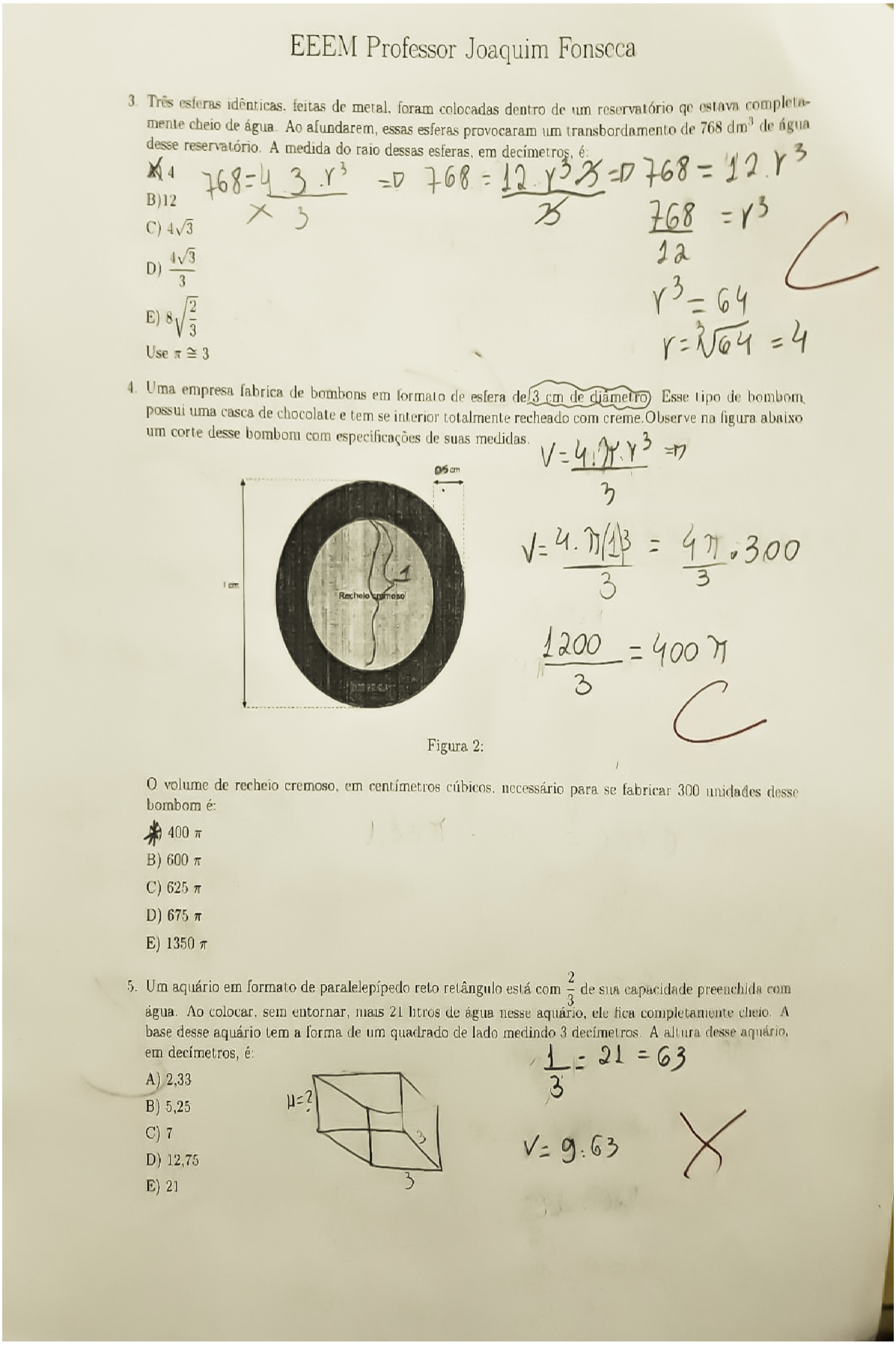
C) 32,0

D) 27,0

E) 62,0

Fonte: Autor

Figura 3.20: Foto 13



EEEM Professor Joaquim Fonseca

3. Três esferas idênticas, feitas de metal, foram colocadas dentro de um reservatório qe estava completamente cheio de água. Ao afundarem, essas esferas provocaram um transbordamento de 768 dm^3 de água desse reservatório. A medida do raio dessas esferas, em decímetros, é:

A) 4

B) 12

C) $4\sqrt{3}$

D) $\frac{4\sqrt{3}}{3}$

E) $8\sqrt{\frac{2}{3}}$

Use $\pi \cong 3$

$768 = \frac{4 \cdot 3 \cdot r^3}{3} \Rightarrow 768 = \frac{12 \cdot r^3 \cdot \cancel{3}}{\cancel{3}} \Rightarrow 768 = 12 \cdot r^3$

$\frac{768}{12} = r^3$

$r^3 = 64$

$r = \sqrt[3]{64} = 4$

C

4. Uma empresa fabrica de bombons em formato de esfera de 3 cm de diâmetro. Esse tipo de bombom possui uma casca de chocolate e tem se interior totalmente recheado com creme. Observe na figura abaixo um corte desse bombom com especificações de suas medidas.

0,5 cm

1 cm

Recheio cremoso

1

Figura 2:

$V = \frac{4 \cdot \pi \cdot r^3}{3} \Rightarrow$

$V = \frac{4 \cdot \pi (1)^3}{3} = \frac{4\pi}{3} \cdot 300$

$\frac{1200}{3} = 400\pi$

C

O volume de recheio cremoso, em centímetros cúbicos, necessário para se fabricar 300 unidades desse bombom é:

A) 400 π

B) 600 π

C) 625 π

D) 675 π

E) 1350 π

5. Um aquário em formato de paralelepípedo reto retângulo está com $\frac{2}{3}$ de sua capacidade preenchida com água. Ao colocar, sem entornar, mais 21 litros de água nesse aquário, ele fica completamente cheio. A base desse aquário tem a forma de um quadrado de lado medindo 3 decímetros. A altura desse aquário, em decímetros, é:

A) 2,33

B) 5,25

C) 7

D) 12,75

E) 21

$h = ?$

3

3

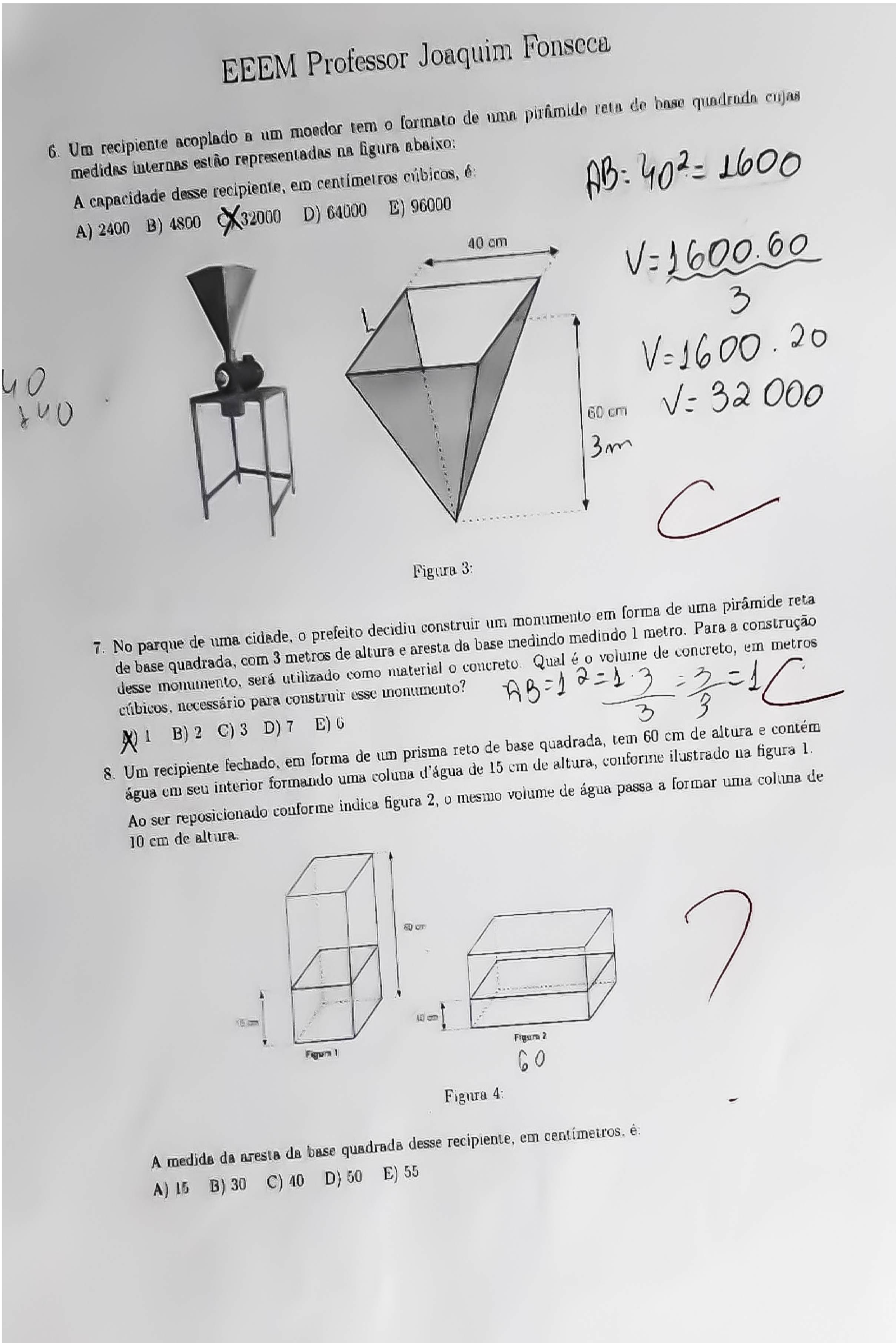
$\frac{1}{3} = 21 = 63$

$V = 9 : 63$

X

Fonte: Autor

Figura 3.21: Foto 14



EEEM Professor Joaquim Fonseca

6. Um recipiente acoplado a um moedor tem o formato de uma pirâmide reta de base quadrada cujas medidas internas estão representadas na figura abaixo:

A capacidade desse recipiente, em centímetros cúbicos, é:

A) 2400 B) 4800 C) 32000 D) 64000 E) 96000

AB: $40^2 = 1600$

$V = \frac{1600 \cdot 60}{3}$

$V = 1600 \cdot 20$

$V = 32\,000$

C

Figura 3:

7. No parque de uma cidade, o prefeito decidiu construir um monumento em forma de uma pirâmide reta de base quadrada, com 3 metros de altura e aresta da base medindo medindo 1 metro. Para a construção desse monumento, será utilizado como material o concreto. Qual é o volume de concreto, em metros cúbicos, necessário para construir esse monumento?

$AB = 1^2 = \frac{1 \cdot 3}{3} = \frac{3}{3} = 1$ C

A) 1 B) 2 C) 3 D) 7 E) 6

8. Um recipiente fechado, em forma de um prisma reto de base quadrada, tem 60 cm de altura e contém água em seu interior formando uma coluna d'água de 15 cm de altura, conforme ilustrado na figura 1. Ao ser reposicionado conforme indica figura 2, o mesmo volume de água passa a formar uma coluna de 10 cm de altura.

Figura 4:

A medida da aresta da base quadrada desse recipiente, em centímetros, é:

A) 15 B) 30 C) 40 D) 50 E) 55

Fonte: Autor

Capítulo 4

ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS DADOS

Iremos nesta seção analisar os resultados obtidos nas atividades que foram aplicadas com objetivo de avaliar o processo de ensino-aprendizagem em relação ao estudo de Geometria Espacial por meio de Resolução de Problemas com auxílio do Geogebra. É fundamental fazer tal análise para que possamos verificar a eficácia da metodologia aplicada, bem como, traçar estratégias para correção dos erros cometidos e melhoria dos resultados alcançados.

Sob a ótica de Sant'Anna (1998, p.29,30) avaliação é:

> *Um processo pelo qual se procura identificar, aferir, investigar e analisar as modificações do comportamento e rendimento do aluno, do educador, do sistema, confirmando se a construção do conhecimento se processou, seja este teórico (mental) ou prático.*

Na última seção da metodologia aplicada, temos uma lista de oito problemas dos quais os quatro primeiros estão relacionados a volume de cilindros, cones e esferas em que são necessárias habilidades com cálculos de volumes e que tenham a competência de associar tais habilidades aos conceitos teóricos e as característica dos mesmos.

Nos quatro últimos exercícios da lista de problemas, os conceitos e conhecimentos estão relacionados a volume de prismas e pirâmides que foram estudados pelos alunos de forma tradicional no mês de junho de 2018 com as mesmas turmas. Tal conteúdo já havia sido abordado de maneira que haviam sido aplicadas listas de exercícios em atividades diárias.

O objetivo deste trabalho é comparar como se procedeu a aprendizagem, mesmo que um conteúdo esteja em fase inicial de aprendizagem (volume de Cilindros, Cones e

Esferas) e o outro já esteja em fase final de formação de conceitos e aprendizagem (volume de Prismas e Pirâmides).

Veremos nas tabelas abaixo, os resultados obtidos pela turma do 3º M01 da E.E.E.M. Professor Joaquim Fonseca em Conceição da Barra - ES.

Tabela 4.1: Desempenho do 3º M01: questões 1,2,3,4

Volume de Cilindro, Cone e Esfera		
3ºM01		
	Número de Acertos	Número de Erros
Questão 1	0	22
Questão 2	7	15
Questão 3	13	9
Questão 4	16	6

Fonte: Autor

Tabela 4.2: Desempenho do 3º M01: questões 5,6,7,8

Volume de Primas e Pirâmides		
3ºM01		
	Número de Acertos	Número de Erros
Questão 5	2	20
Questão 6	18	4
Questão 7	14	8
Questão 8	0	22

Fonte: Autor

Percebe-se que mesmo com um alto índice de erros na resolução dos problemas, relacionados tanto ao volume de prismas e pirâmides como ao volume de cilindros, cones e esferas, a quantidade de erros cometida nos exercícios (problemas propostos) teve melhor desempenho, mesmo que ainda pequeno, no conteúdo abordado de forma lúdica, sendo que ainda este ainda estava em fase inicial de aprendizagem. Nota-se no total, duas questões a menos com erros.

Faremos o mesmo tipo de análise em relação a outra turma de 3º ano do Ensino Médio da mesma escola Professor Joaquim Fonseca em Conceição da Barra - ES.

Tabela 4.3: Desempenho do 3^o M02: questões 1,2,3,4

Volume de Cilindro, Cone e Esfera		
3ºM02		
	Número de Acertos	Número de Erros
Questão 1	3	7
Questão 2	11	9
Questão 3	17	3
Questão 4	17	3

Fonte: Autor

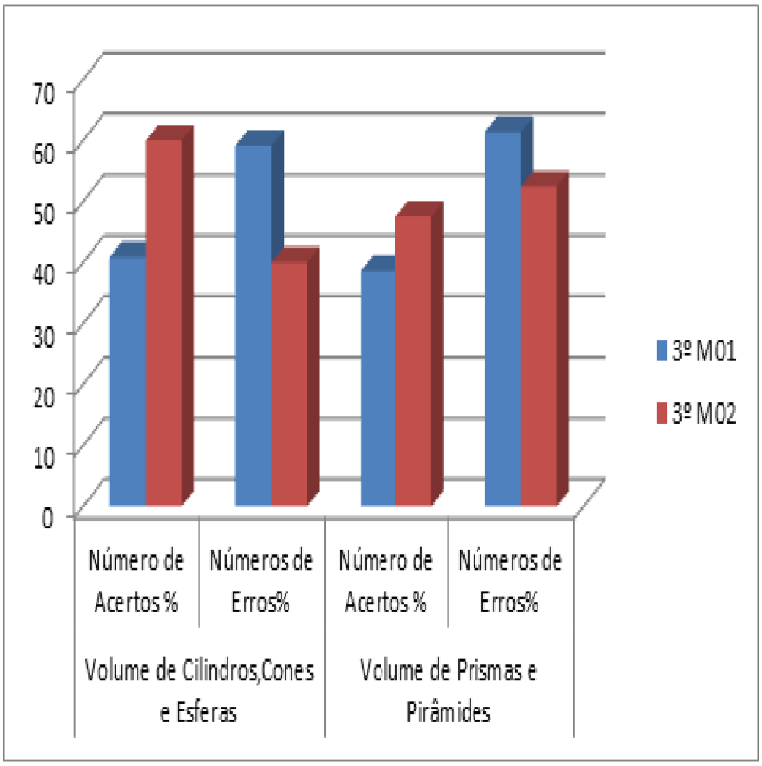
Tabela 4.4: Desempenho do 3^o M01: questões 5,6,7,8

Volume de Primas e Pirâmides		
3ºM02		
	Número de Acertos	Número de Erros
Questão 5	10	10
Questão 6	13	7
Questão 7	13	7
Questão 8	2	18

Fonte: Autor

Como podemos observar pelos dados tabulados, a segunda turma, neste caso, 3^o M02 assimilou com maior facilidade os conceitos e teve maior produtividade em relação aos resultados obtidos, sendo que, a quantidade de erros quando se faz uma comparação das questões de volume de prismas e pirâmides para volume de cilindros, cones e esferas, sofre uma redução significativa de 10 questões.

Figura 4.1: Gráfico de Desempenho



Fonte: Autor

É fundamental observarmos, por meio do gráfico acima, em termos percentuais um comparativo entre as duas turmas de modo a evidenciar de forma significativa a evolução de ambas em relação ao conteúdo abordado (volume de Cilindros, Cones e Esferas) comparando com o conteúdo anterior (volume de Prismas e Pirâmides) de modo a provar a eficácia do método adotado.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Um desafio do professor moderno é buscar estratégias pedagógicas que possibilitem ao aluno o desejo pelo conhecimento. Uma das alternativas para atingir tal desejo é ministrar aulas mais atrativas em que o aluno constrói o seu próprio saber e o professor apenas o orienta, fazendo assim, a função de professor mediador.

Num mundo em que a tecnologia está cada mais avançada e que os celulares (*smartphones*) fazem-se cada vez mais presentes na vida do homem, cabe ao professor, se possível, fazer deste, uma ferramenta pedagógica atrativa.

Neste trabalho, abordamos conceitos de Geometria Espacial, especificamente volume de sólidos geométricos (Cilindros, Cones e Esferas), conteúdo frequente nas avaliações externas (PAEBES, PAEBES TRI e ENEM) e fundamentais para formação escolar capaz de tornar o aluno competente para utilizar as construções gráficas para representar modelos e resolver problemas do cotidiano.

Nessa perspectiva, tomando-se em consideração as características regionais de onde foi aplicado o trabalho, usamos como referência um problema envolvendo volume de silos, objeto muito presente em usinas de álcool, principais fontes de emprego e renda no município onde se aplicou o referido trabalho.

Foi perceptível um alto índice de participação dos alunos nas atividades propostas, o interesse em explorar o Geogebra 3D, a curiosidade em analisar as figuras obtidas e o entusiasmo para resolver o problema proposto.

Nas atividades para avaliar a eficácia da metodologia aplicada, fazendo uma comparação da aprendizagem entre volume de cilindros, cones e esferas e volume de prismas e pirâmides, houve uma pequena vantagem de aprendizagem de 2,3% em relação ao 3º M01 e 12,5% em relação 3º M02, mesmo estando ambas as turmas em fase inicial de aprendizagem.

Por fim, percebe-se que os resultados quantitativos alcançados foram até satisfatórios, mesmo estando distantes do ideal. Analisando de forma qualitativa o objetivo de despertar no aluno o desejo de aprender, também foram alcançados, pois proporcionou ao aluno a construção dos conceitos matemáticos de forma lúdica, o que reforça o quanto trabalhar com resolução de problemas e o Geogebra 3D pode ser útil na aprendizagem.

Referências Bibliográficas

[1] BRASIL - Parâmetros Curriculares Nacionais (Ensino Médio): Matemática/ Secretaria de Educação. Educação Fundamental. Brasília: MEC/ SEM, 2000.Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf . Acesso dia 14 de Janeiro de 2019.

[2] BRASIL - Exame Nacional do Ensino Medio (ENEM): Prova de Matemática e suas Tecnologias.Disponível em: http://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/provas/2016/CAD_ENEM_2016_DIA_2_07_AZUL.pdf . Acesso dia 14 de Janeiro de 2019.

[3] CAED. Disponível em http://paebestri.caedufjf.net/avaliacao-educacional/o-paebes-tri/. Acesso dia 18 de fevereiro de 2019.

[4] LIMA, E.L.- Medida e Forma em Geometria.4ª ed Rio de Janeiro; SBM 2006. Anais do Curso para Profesores de Matemática do 2º grau, Rio de Janeiro, 1991 p. 1-21. Disponível em: https://www.ime.usp.br/ pleite/pub/artigos/elon/Volumes-Elon.pdf. Acesso dia 28 de abril de 2019.

[5] DOLCE, O ;POMEPO ,J N. - Geometria Espacia. Coleção Fundamentos da Matemática Elementar, volume 10, São Paulo: Atual, 2005.

[6] GEOGEBRA. Disponível em: https://www.geogebra.org/about. Acesso dia 11 de fevereiro de 2019.

[7] LUPINACCI, M. L. V. e BOTIN, M. L. M. Resolução de problemas no ensino de matemática. Anais do VIII Encontro Nacional de Educação Matemática, Recife, 2004 p. 1–5. Disponível em:http://www.sbembrasil.org.br/files/viii/pdf/02/MC18361331034.pdf. Acesso dia 28 de abril de 2019.

[8] Paterlini, R.R. - Os Teoremas de Cavalieri.Revista Professor de Matemática, nº 72, 2º quadrimestre de 2010, págs. 43 - 47. Versão ampliada com demonstrações dos

teoremas. Disponível em: https://www.dm.ufscar.br/ ptlini/paterlini_cavalieri.pdf. Acesso dia 28 de abril de 2019.

[9] POZO, J.I. e ECHEVERRÍA, M.D.P.P. - Aprender a resolver problemas e resolver problemas para aprender. Porto Alegre 1998. Disponível em:https://edisciplinas.usp.br/pluginfile.php/6831/mod_resource/content/4/pozo-cap%201%20.pdf. Acesso dia 20 de janeiro de 2019.

[10] SANT'ANNA, Ilza Martins. Por que avaliar?: Como avaliar?: Critérios e instrumentos.3ª Edição, Petrópolis, RJ: Vozes, 1995. Disponível em : http://educere.bruc.com.br/arquivo/pdf2008/510_223.pdf. Acesso dia 24 de fevereiro de 2019.

Apêndice A

APÊNDICE A

DIÁRIO DE CAMPO

PLANO DE AÇÃO: Período - 25/06/2018 a 28/06/2018

- 25/06/2018 - 07:55 as 08:50 (3º M01)

Divisão dos grupos e distribuição da situação problema e orientação para descrever como resolvê - lo. Em seguida foi feita apresentação do geogebra 3D no smartphone.

- 25/06/2018 - 08:50 as 09:45 (3º M02)

Divisão dos grupos e distribuição da situação problema e orientação para descrever como resolvê - lo. Em seguida foi feita apresentação do geogebra 3D no smartphone.

- 26/06/2018 - 11:05 as 12:00 (3º M01)

Os alunos foram orientados em como construir cilindros, cones e esferas no geogebra 3D no smartphone. Posteriormente cada grupo construiu o silo apresentado na situação problema.

- 26/06/2018 - 07:55 as 08:50 (3º M02)

Os alunos foram orientados em como construir cilindros, cones e esferas no geogebra 3D no smartphone. Posteriormente cada grupo construiu o silo apresentado na situação problema.

- 28/06/2018 - 07:55 as 08:50 (3^{o} M01)

Apresentação das fórmulas necessárias para o cálculo de volume de cilindros, cones e esferas e posteriormente cada grupo apresentou a resolução da situação problemas proposta.

- 26/06/2018 - 08:50 as 09:45 (3^{o} M02)

Apresentação das fórmulas necessárias para o cálculo de volume de cilindros, cones e esferas e posteriormente cada grupo apresentou a resolução da situação problemas proposta.

- 27/06/2018 - 11:05 as 12:00 (3^{o} M02)

Aplicação da atividade para avaliar a aprendizagem.

- 28/06/2018 - 11:05 as 12:00 (3^{o} M01)

Aplicação da atividade para avaliar a aprendizagem.

Apêndice B

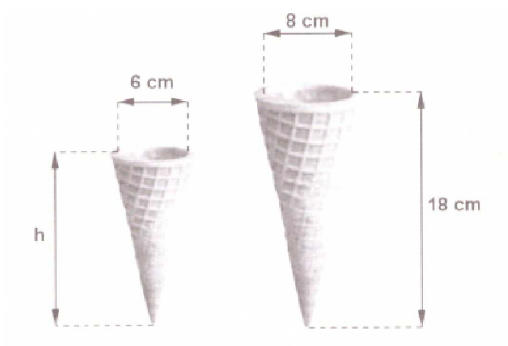
APÊNDICE B

1) Um reservatório em formato de cilindro, cuja medida do diâmetro interno é 2 metros, terá que ser substituído por outro, de mesmo formato com mesma capacidade, mas com altura interna medindo um quarto da altura interna do reservatório original. A medida do raio do novo reservatório, em metros, será;

A) 2 B) $2\sqrt{2}$ C) 4 D) $4\sqrt{2}$ E) 8

2) Em uma sorveteria, o proprietário vende sorvetes em casquinha com formato de cone, cujo diâmetro interno da base mede 8 cm e altura da casquinha mede 18 cm. Ele encomendou a seu fornecedor um novo tamanho de casquinha, de mesmo formato que a anterior, porém com diâmetro da base medindo 6 cm. Pediu ao se fornecedor para fixar a medida da altura h dessa nova casquinha de forma que a sua capacidade seja igual à metade da capacidade da casquinha maior.

Figura B.1: Figura do exercício 2, apêndice B



Fonte: CAED

A medida da nova casquinha, em centímetros, será:

A) 13,5 B) 16,0 C) 32,0 D) 27,0 E) 62,0

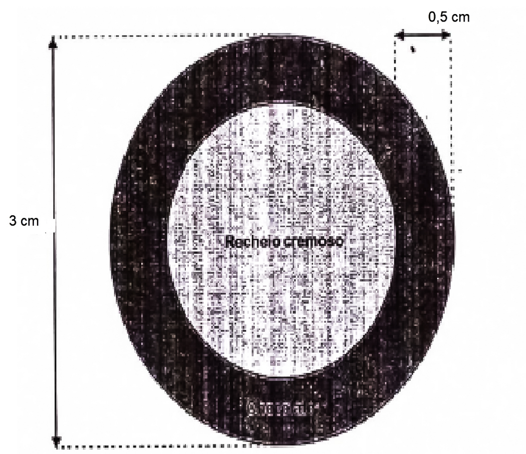
3) Três esferas idênticas, feitas de metal, foram colocadas dentro de um reservatório que estava completamente cheio de água. Ao afundarem essas esferas provocaram um transbordamento de 768 dm^3 de água desse reservatório. a medida do raio dessas esferas ,em decímetros, é:

A) 4 B) 12 C) $4\sqrt{3}$ D) $\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$ E) $8\sqrt{\dfrac{2}{3}}$

Use $\pi = 3$

4) Uma empresa fabrica bombons em formato de esfera de 3 cm de diâmetro. Esse tipo de bombom possui uma casca de chocolate e tem seu interior totalmente recheado com creme. Observe na figura abaixo um corte desse bombom com especificações de suas medidas.

Figura B.2: Figura do exercício 4, apêndice B



Fonte: CAED

O volume de recheio cremoso, em centímetros cúbicos, necessário para se fabricar 300 unidades desse bombom é:

A) 400 π B) 600 π C) 625 π D) 675 π E) 1350 π

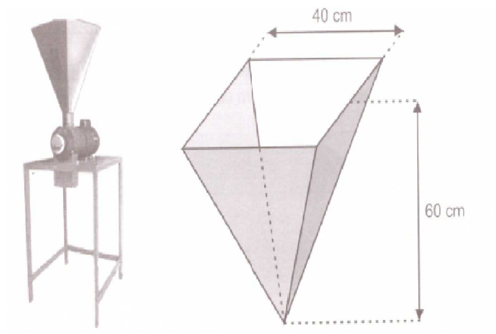
5) Um aquário em formato de paralelepípedo reto retângulo está com $\frac{2}{3}$ de sua capacidade preenchida com água. Ao colocar, sem entornar, mais 21 litros de água nesse aquário, ele fica completamente cheio. A base desse aquário tem a forma de um quadrado de lado medindo 3 decímetros. A altura desse aquário, em decímetros, é:

A) 2,33 B) 5,25 C) 7 D) 12,75 E) 21

6) Um recipiente acoplado a um moedor tem o formato de uma pirâmide reta de base quadrada cujas medidas internas estão representadas na figura abaixo: A capacidade desse recipiente, em centímetros cúbicos, é:

A) 2400 B) 4800 C) 32000 D) 64000 E) 96000

Figura B.3: Figura do exercício 6, apêndice B



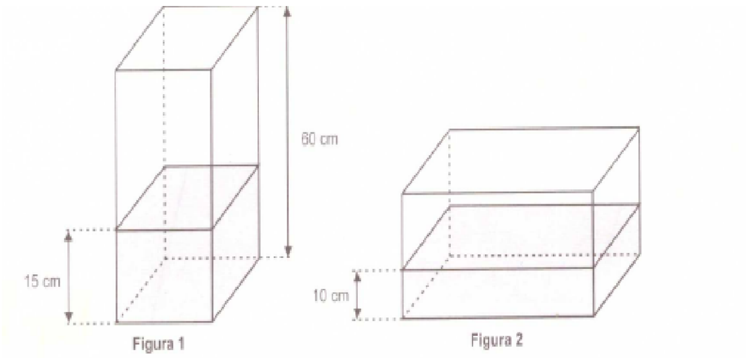
Fonte: CAED

7) No parque de uma cidade, o prefeito decidiu construir um monumento em forma de uma pirâmide reta de base quadrada, com 3 metros de altura e aresta da base medindo 1 metro. Para a construção desse monumento, será utilizado como material o concreto. Qual é o volume de concreto, em metros cúbicos, necessário para construir esse monumento?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 7 E) 6

8) Um recipiente fechado, em forma de um prisma reto de base quadrada, tem 60 cm de altura e contém água em seu interior formando uma coluna d'água de 15 cm de altura, conforme ilustrado na figura 1. Ao ser reposicionado conforme indica figura 2, o mesmo volume de água passa a formar uma coluna de 10 cm de altura.

Figura B.4: Figura do exercício 8, apêndice B



Fonte: CAED

A medida da aresta da base quadrada desse recipiente, em centímetros, é:
A) 15 B) 30 C) 40 D) 50 E) 55

Apêndice C

APÊNDICE C

Gabarito dos Exercícios para Avaliar a Aprendizagem

1- A

2- B

3- A

4- A

5- C

6- C

7- A

8- C