UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ - UTFPR
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL
PROFMAT

PAMELA JÉSSIKA BALOTIN RAMOS

MUDANÇA DE BASE E O ENSINO DAS OPERAÇÕES ELEMENTARES

CURITIBA

2019

PAMELA JÉSSIKA BALOTIN RAMOS

MUDANÇA DE BASE E O ENSINO DAS OPERAÇÕES ELEMENTARES

Dissertação apresentada ao Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Tecnológica Federal do Paraná em Curitiba - PROFMAT-UTCT como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre.
Orientador: Paula Olga Gneri
Coorientador: Rodolfo Gotardi Begiato

CURITIBA

2019

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação

R175m Ramos, Pamela Jéssika Balotin
Mudança de base e o ensino de operações elementares [recurso eletrônico] / Pamela Jéssika Balotin Ramos.-- 2019.
1 arquivo texto (108 f.) : PDF ; 7,70 MB.

Modo de acesso: World Wide Web.
Texto em português com resumo em inglês.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Curitiba, 2019.
Bibliografia: f. 105-107.

1. Matemática - Dissertações. 2. Sistema decimal. 3. Numeração. 4. Montessori, Método de educação. 5. Modelo Van Hiele. 6. Professores de matemática - Formação. 7. Prática de ensino. 8. Matemática - Estudo e ensino (Ensino fundamental). I. Gneri, Paula Olga, orient. II. Begiato, Rodolfo Gotardi, coorient. III. Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. IV. Título.

CDD: Ed. 23 -- 510

Biblioteca Central do Câmpus Curitiba – UTFPR
Bibliotecária: Luiza Aquemi Matsumoto CRB-9/794

Ministério da Educação
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Diretoria de Pesquisa e Pós-Graduação

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
CAMPUS CURITIBA

TERMO DE APROVAÇÃO DE DISSERTAÇÃO Nº 67

A Dissertação de Mestrado intitulada "Mudança de Base e o Ensino de Operações Elementares", defendida em sessão pública pela candidata **Pamela Jessika Balotin Ramos**, no dia 03 de maio de 2019, foi julgada para a obtenção do título de Mestre, área de concentração Matemática, e aprovada em sua forma final, pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT.

BANCA EXAMINADORA:

Profa. Dr. Rodolfo Gotardi Begiato - Presidente – UTFPR
Prof. Dra. Patrícia Massae Kitani – UTFPR
Prof. Dr. Humberto Assis Clímaco – UFG

A via original deste documento encontra-se arquivada na Secretaria do Programa, contendo a assinatura da Coordenação após a entrega da versão corrigida do trabalho.

Curitiba, 03 de maio de 2019.

Carimbo e Assinatura do(a) Coordenador(a) do Programa

AGRADECIMENTOS

Primeiramente a Deus por me dar força e perseverança.

A toda minha família, que sempre esteve ao meu lado, me apoiando nessa caminhada.

Aos meus orientadores Profª Dra. Paula e Profº Dr. Rodolfo, pela dedicação e orientação durante este processo.

Aos amigos que viveram esta jornada junto comigo em um programa tão incrível como o PROFMAT.

Aos professores que tive em toda minha caminhada acadêmica, em particular os que lecionaram as disciplinas do PROFMAT.

Aos meus colegas de trabalho que me deram forças para ingressar e continuar no programa de mestrado.

À Sociedade Brasileira de Matemática, pela idealização e pela manutenção do excelente programa de mestrado - PROFMAT.

E todas as outras pessoas que, de maneira indireta, contribuíram para a realização deste trabalho.

”Ninguém ignora tudo.
Ninguém sabe tudo.
Todos nós sabemos alguma coisa.
Todos nós ignoramos alguma coisa.
Por isso aprendemos sempre.”
(Paulo Freire)

RESUMO

RAMOS, Pamela Jéssika Balotin. **Mudança de Base e o Ensino das Operações Elementares**. 109 f. Dissertação - Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Curitiba, 2019.

O sistema de numeração atual passou por transformações em milhares de anos e teve a contribuição de vários povos para seu desenvolvimento. Automatizar o ensino dos algoritmos que utilizamos para resolver as operações neste sistema, sem levar em conta reflexões sobre a base decimal e princípio de posição, gera dificuldades no avanço para conteúdos mais complexos. Para o professor compreender o sistema de numeração decimal de maneira que consiga propiciar situações nas quais seus alunos estabeleçam relações, descobrindo e construindo seu conhecimento, é necessário que ele, o professor, entenda que o nosso sistema de numeração é decimal, posicional, multiplicativo e aditivo. Além disso, é importante que o professor tenha conhecimento sobre alternativas teórico-metodológicas para o ensino e a aprendizagem deste conceito, pois é necessário que o desenvolvimento do trabalho pedagógico seja pautado em metodologias e atividades que possibilitem a real compreensão do sistema. Neste sentido, este trabalho traz uma exposição do sistema de numeração posicional em qualquer base, com apontamentos para a exploração desse conteúdo com professores. Após isso, é exposto uma pesquisa bibliográfica feita a respeito da representação dos números no sistema de numeração posicional, as operações básicas, a conversão entre bases e métodos de ensino, abordando a Teoria de Van Hiele e o Método Montessori. Seu objetivo é reunir, em um único material, as informações relevantes para o professor que ensina sistemas de numeração e suas operações, possibilitando reflexões que visam melhorias nas metodologias de ensino.

Palavras-chave: sistema posicional; mudança de base; Maria Montessori; van Hiele.

ABSTRACT

RAMOS, Pamela Jéssika Balotin. **Base Convertion and Elementary Operations Teaching**. 109 pg. Dissertation - Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Curitiba, 2019.

Usual numbering system was modified over thousands of years in which we have a contribution of several people. Automated teaching through the use of algorithms to solve elementary operations without arouse reflexions about decimal basis utilized and positional numbering principle, leads us to difficulties within subsequent issues. The understanding of our numbering system features (decimal, positional, additive and multiplicative) is wanted for the teacher provides situations which your students make out necessary relations to discover and built mathematical concepts. Furthermore, the knowledge of alternative theoretical methodologies for teaching of mathematical concept is necessary because, in this case, we can point activities that make possible a consistent learning. In this sense, this work presents a review of numbering positional system (in every basis) pointing to initial basic education teachers. After this, we approach the Vah Hiele and Montessori theories for teaching and, this last, we foccus on basic operations (golden material). We aim reflections on teaching methodologies and, for this, we wished put together relevant informations of basic operations to primary teachers.

Keywords: Positional numbering system; bases convert; Maria Montessori; van Hiele.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

O desenvolvimento do sistema de numeração que utilizamos atualmente não ocorreu de forma rápida, pelo contrário, vários povos levaram milênios para poder desenvolvê-lo, uma vez que nem sempre os homens dominaram as regras que regem esse sistema, em especial, o princípio de posição. Contudo, esta não é sua única singularidade, esse sistema possui outras propriedades importantes, como ter a base 10 e os princípios aditivo e multiplicativo. O fato de termos automatizado os algoritmos que utilizamos para resolver as operações, sem nos atentarmos com o porquê de funcionarem, pode fazer parecer que o ensino deste sistema é algo natural e fácil. Porém, ao pensar dessa maneira, ignora-se o fato de que esse sistema só foi alcançado graças ao trabalho intelectual de muitos povos, por meio de muitos experimentos e tentativas. Há professores que abordam as operações de forma mecânica e decorada, favorecendo a reprodução de procedimentos em detrimento da compreensão das propriedades e suas relações. Isso ocorre porque, muitas vezes, o próprio educador não possui compreensão das propriedades do sistema de numeração decimal. Como um educador com conhecimento falho sobre o sistema de numeração decimal pode ter uma boa estratégia para a aprendizagem desse conhecimento que a humanidade levou milhares de ano para construir?

Um grande desafio atualmente é educar os alunos a relacionarem o sistema numérico decimal aos problemas do cotidiano, sendo esse sistema uma maneira eficiente de resolver os problemas propostos, favorecendo a interpretação e a compreensão dos fundamentos das quatro operações no sistema decimal. Ao analisar os resultados das avaliações oficiais é possível perceber que um número considerável de alunos completa o Ensino Fundamental Anos Iniciais [1] e ingressam no Ensino Fundamental Anos Finais apresentando dificuldades básicas e conceituais em relação à escrita de números do sistema decimal e a resolução das quatro operações básicas. Isso é preocupante, pois se o aluno não possuir uma boa fundamentação dos conhecimentos matemáticos, possivelmente apresentará dificuldades para avançar na aprendizagem de conteúdos mais complexos.

O objetivo deste trabalho é destacar o fato de que o professor é fundamental para que esse desafio seja cumprido. Faz-se necessário que o desenvolvimento do trabalho pedagógico do educador seja pautado por metodologias e atividades que possibilitem a real compreensão do sistema de numeração decimal. Para que haja um verdadeiro entendimento de qualquer sistema de numeração posicional, a estrutura de base deve estar clara para o professor no momento em que se trabalha as operações. Além disso, é preciso que o professor compreenda as propriedades do sistema numérico usual e conheça as melhores estratégias para o ensino delas. Mas isso não ocorre em nossa realidade escolar, pois muitas vezes a formação para a matemática dos

[1] A nomenclatura Ensino Fundamental Anos Iniciais (alunos 6 a 10 anos) e Ensino Fundamental Anos Finais (11 a 14 anos) foi definida pelo Conselho Nacional de Educação a partir da Resolução CNE/CEB Nº 3 de 03/08/2005.

professores das séries iniciais é negligenciada, o que interfere de forma negativa na continuidade do processo educativo. Por isso, esse trabalho foi elaborado trazendo uma exposição do sistema de numeração posicional, além de apontamentos para o ensino do sistema de numeração decimal com professores atuantes e em formação.

Este trabalho está organizado em cinco capítulos, nos quais é apresentado a complexidade do Sistema de Numeração Posicional, evidenciado que as relações são válidas para qualquer base, com objetivo de esclarecer e justificar os mecanismos usados nos algoritmos das operações básicas.

No primeiro capítulo é abordado a representação dos números em um sistema posicional, mostrando que qualquer número natural $b > 1$ pode servir de base numérica. Também são abordadas as operações de adição, subtração, multiplicação e divisão, focando nos princípios por trás dos algoritmos usuais. Então, são apresentadas as tábuas de adição e multiplicação dos sistemas: binário, ternário, quinário, octal e hexadecimal, pois ao elaborá-las é possível se familiarizar com a base trabalhada. Ainda, é apresentada as conversões entre bases numéricas. Para esse capítulo foram consultados trabalhos do PROFMAT, de Silva (2016), Sousa (2016), Santos (2014), Rodrigues (2013) e Ruis (2014) , além de outros materiais sobre sistema de numeração e cálculo numérico, Paterlini (2012) e Justo et al (2017).

No segundo capítulo é apresentada a Teoria de van Hiele, que é voltada para o ensino e aprendizagem da geometria, mas que serviu de base para alguns trabalhos em outras áreas do ensino da matemática, além de uma breve descrição de como surgiu a Teoria, e exposição dos conceitos de níveis de raciocínio, propriedades e as Fases de Aprendizagem.

No terceiro capítulo é retratado o Método Montessori. Inicialmente é feito uma breve biografia de Maria Montessori, em seguida são abordados os pontos-chave de seu método, no qual o adulto preparado, os materiais manipuláveis e a autonomia da criança têm grande importância. Em seguida é feita uma apresentação e explicação do Material Dourado, o qual foi criado para se trabalhar o sistema de numeração decimal, dando maior destaque para o agrupamento, favorecendo a autonomia da criança em perceber as relações do sistema. Por último é explorado o ábaco, que não é um material criado por Montessori, mas indicado por ela para o ensino do sistema de numeração.

O quarto capítulo é sobre a importância de encarar o erro como algo que pode contribuir para o sucesso escolar quando utilizado com estratégia didática. Conhecendo e usando a metodologia de análise de erros, ele não será um problema que deve ser eliminado, mas deve ser um auxiliar na superação das dificuldades apresentadas pelos alunos.

No quinto capítulo primeiramente é feita uma reflexão sobre qual o tipo de conhecimento é necessário que os professores dominem para trabalhar o sistema de numeração decimal. Então é apresentado um esboço de atividades que podem ser trabalhadas com professores (ou futuros professores) das séries iniciais, onde a ideia ”se não contássemos de 10 em 10” possa servir de mote para discussões, pois as sugestões são baseadas em bases diferentes da decimal, para que o professor possa compreender o sistema de numeração decimal e refletir sobre quais são as dificuldades comuns na compreensão desse sistema e suas operações básicas, além de investigar as origens dos erros mais frequentes, com a intenção de se evitar os erros didáticos e elaborar estratégias de ensino.

1 SISTEMA DE NUMERAÇÃO POSICIONAL

Um Sistema de Numeração é um conjunto de símbolos que junto a uma lei de formação nos permite representar qualquer quantidade. O conceito de número é abstrato, mas podemos dizer que sua ideia está associada a quantidade, ordem ou medida, ou seja, de forma simplista o número seria a quantidade que desejamos representar. O numeral é a representação gráfica (palavra ou símbolo) de um número. O algarismo é cada um dos caracteres com que se representam os números. Por exemplo, o número doze no sistema de numeração decimal é representado pelo numeral 12 e formado pelos algarismos 1 e 2, já no sistema de numeração romano é representado pelo numeral XII e formado pelos algarismos X e I.

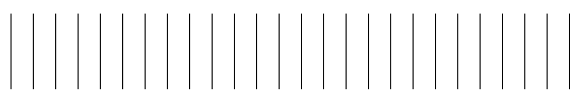
O costume de agrupar quantidades pequenas para auxiliar na contagem de uma quantidade maior e a necessidade de representar os números com uma quantidade finita de símbolos fomentaram a criação do conceito de base numérica. A quantidade adotada para efetuar cada agrupamento é o que denominamos base do sistema de numeração.

Os sistemas de numeração posicionais são caracterizados pelo princípio de posição, segundo o qual os algarismos assumem valores relativos à posição que ocupam no numeral. Para isso, é definida uma quantidade que será a base do sistema e trabalha-se de forma que ao se atingir essa quantidade se estabeleça uma unidade de ordem imediatamente superior, daí, se estabelece o conceito de ordem no numeral. Além disso, o zero possibilitou aos sistemas de numeração posicionais, que o utilizam, superar as limitações encontradas nos sistemas precedentes, pois ao demarcar as ordens de unidades vazias, ele torna possível a plena utilização do princípio de posição sem que corramos o risco de ter representações ambíguas, isto é, ele nos permite diferenciar 25 de 250, 205 ou 2005. A junção dos conceitos de base e de posição possibilita representar qualquer número, por maior que seja, com uma quantidade finita de símbolos. Além disso, os números representados por meio deles se prestam à realização das quatro operações aritméticas básicas.

Ao escolhermos como base o número cinco, para representar a posição vazia se utiliza o 0, uma unidade o 1, duas unidades o 2, três unidades o 3 e quatro unidades o 4, ou seja, nosso conjunto de símbolos é M=$\{0, 1, 2, 3, 4\}$. Para representar a base (que no sistema decimal é representado por 5) não podemos utilizar um novo símbolo, temos que usar o conceito de ordem do sistema posicional, então coloca-se o algarismo que representa o nada na primeira posição do numeral e o algarismo que representa a unidade na posição à sua esquerda, ou seja, 10, isso significa que temos um grupo com cinco elementos (1×5). Então para representar o próximo número (que no sistema decimal é representado por 6) é só adicionar uma unidade a representação na base 5, ou seja 11, e adicionando de unidade em unidade teremos 12, 13, 14, até que teremos que representar duas vezes a quantidade da base (2×5), ou seja, 2 grupos com cinco elementos cada, então colocamos o algarismo que representa o nada na primeira posição do numeral e o algarismo que representa a duas unidades na posição a sua esquerda, ou seja, 20. Seguindo esse processo teremos 21, 22, 23, 24, 30, 31, 32, 33, 34, 40, 41, 42, 43, 44, até precisarmos representar cinco vezes a base (que no sistema decimal é $5 \times 5 = 5^2 = 25$), isso significa que temos um grupo com cinco conjuntos de cinco elementos cada, então coloca-se o algarismo que representa o nada na primeira e na segunda posição do numeral e o algarismo que representa a unidade na terceira posição a esquerda, ou seja, 100. Então, adicionando de unidade em unidade e lembrando que sempre que precisamos representar a base (que no sistema decimal é representado por 5) não podemos utilizar um novo símbolo, temos que usar o conceito de ordem do sistema posicional, teremos 101, 102, 103, 104, 110, 112, 113, 114, 120, ..., 144, 200, 201, ..., 244, 300, 301, ..., 344, 400, 401, ..., 444, até precisarmos representar cinco vezes cinco vezes a base (que no sistema decimal é $5 \times 5 \times 5 = 5^3 = 125$), isso significa que temos um grupo com cinco conjuntos que possuem como elementos cinco conjuntos de cinco elementos cada. Para isso, coloca-se o algarismo que representa o nada na primeira, na segunda e terceira posição do numeral e o algarismo que representa a unidade na quarta posição a esquerda, ou seja, 1000, e assim sucessivamente, quanto mais a esquerda o algarismo estiver maior será o seu valor posicional.

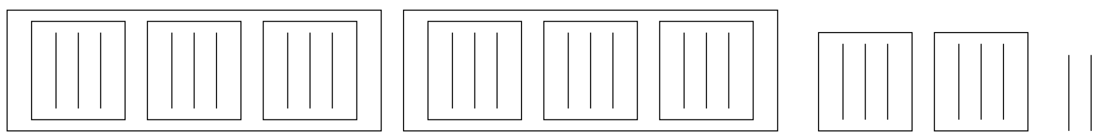
Percebe-se que neste sistema cada posição representa a quantidade de agrupamentos feitos a partir do número escolhido como base, por isso para se conhecer o valor posicional de um algarismo é necessário multiplicá-lo por uma potência da base, a qual depende da posição do algarismo no numeral, logo podemos dizer que este sistema é multiplicativo. Além disso, ele também é aditivo, pois para saber o valor que queremos representar temos que somar os valores posicionais que os símbolos adquirem nos respectivos lugares que ocupam.

Exemplo 1.1. Vamos representar a quantidade abaixo em bases diferentes:



- Base 3

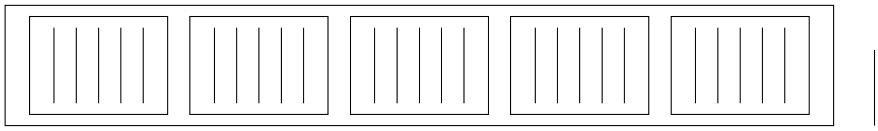
  Representamos como: $222 = 2 \times 3^2 + 2 \times 3 + 2$, pois

  É multiplicativo e aditivo: como $3 = (10)_3$, temos: $2 \times 10^2 + 2 \times 10 + 2 = 200 + 20 + 2 = 222$ (na base 3).

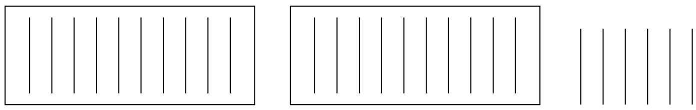
- Base 5

  Representamos como: $101 = 1 \times 5^2 + 0 \times 5 + 1$, pois



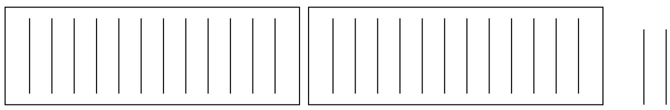
- Base 10

  Representamos como: $26 = 2 \times 10 + 6$, pois



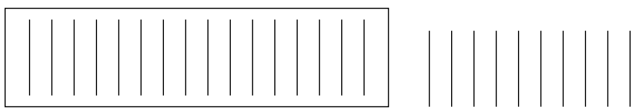
- Base 12

  Representamos como: $22 = 2 \times 12 + 2$, pois



- Base 16

  Representamos como: $1A = 1 \times 16 + A$ (sendo, A = 10 na base decimal), pois



1.1 REPRESENTAÇÃO NA BASE B

Para representar os números na base b precisamos de um conjunto M de b símbolos, sendo um símbolo para o nada e um símbolo para cada quantidade menor que b.

Quando a base é menor ou igual a dez, usamos os símbolos do sistema de numeração decimal na representação dos números. Por exemplo: para a base 2 usamos $M = \{0, 1\}$, para a base 7 usamos $M = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Caso a base seja maior que dez costuma-se acrescentar ao conjunto de símbolos as letras maiúsculas do nosso alfabeto. Por exemplo, para escrever os números usando um sistema de numeração de base 16, também chamado de sistema hexadecimal, usam-se normalmente os símbolos do conjunto $M = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F\}$.

Em um sistema de numeração posicional a posição ocupada por cada algarismo em um número determina seu valor, pois o princípio fundamental do sistema posicional é que se b é a base, então b unidades de uma ordem qualquer formam uma unidade de ordem imediatamente superior.

Por exemplo, no sistema posicional de base oito, temos apenas representações de um dígito para os números 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7. Assim, quando contamos mais de sete, ficamos sem espaço na coluna de unidades, pois não há um único dígito que pode representar oito na base oito. Em vez disso, colocamos um 0 na coluna de unidades e um 1 na coluna de ordem imediatamente superior. Assim, $(8)_{10} = (10)_8$ (8 na base 10 é igual a 10 na base 8). Continuando a adicionar um de cada vez, contando na base 8, teremos: 11, 12, 13, 14, 15, 16 e 17. Novamente, como não há um único dígito para representar 8, colocamos um 0 nas unidades e adicionamos outro 1 à coluna de ordem imediatamente superior e contamos 20, ou seja, dois grupos de oito. Então, contar na base oito se parece com: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 30, etc.

Para o sistema posicional de base doze, temos que as representações de um dígito são 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A e B. Assim, quando contamos mais de B (que para o sistema decimal seria o onze), ficamos sem espaço na coluna de unidades. Então, colocamos um 0 na coluna de unidades e um 1 na coluna de ordem imediatamente superior. Assim, $(12)_{10} = (10)_{12}$ (12 na base 10 é igual a 10 na base 12). Continuando a adicionar um de cada vez, contando na base doze, teremos: 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 1A, 1B. Novamente, como não há um único dígito para representar doze, colocamos um 0 nas unidades e adicionamos outro 1 à coluna de ordem imediatamente superior e contamos 20, ou seja, dois grupos de doze. Então, contar na base doze se parece com: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 1A, 1B, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 2A, 2B, 30, etc.

Como foi visto, cada posição representa a quantidade de agrupamentos feitos a partir do número escolhido como base, então se conhece o valor posicional de um algarismo, multiplicando-se por uma potência da base. Do exemplo 1.1, temos:

- Se 3 é base, então $(222)_3 = 2 \times 3^2 + 2 \times 3 + 2 = 2 \times 3^2 + 2 \times 3^1 + 2 \times 3^0$
- Se 5 é base, então $(101)_5 = 1 \times 5^2 + 0 \times 5 + 1 = 1 \times 5^2 + 0 \times 5^1 + 1 \times 5^0$
- Se 10 é base, então $26 = 2 \times 10 + 6 = 2 \times 10^1 + 6 \times 10^0$
- Se 12 é base, então $(22)_{12} = 2 \times 12 + 2 = 2 \times 12^1 + 2 \times 12^0$
- Se 16 é base, então $(1A)_{16} = 1 \times 16 + A = 1 \times 16^1 + A \times 16^0$

Em um sistema de numeração posicional, qualquer número natural $b > 1$ pode servir de base numérica. Isso se deve a uma aplicação do algoritmo da divisão euclidiana [1]. Então, se b é base do sistema, podemos concluir que qualquer número natural x pode ser representado da seguinte maneira:

$$x = a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + ... + a_1 b^1 + a_0 b^0$$

[1] Enunciado do Algoritmo da Divisão Euclidiana : Sejam $x \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ e $b \in \mathbb{N}$. Então, existem únicos $q \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ e $r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, tais que $x = bq + r$ e $0 \leq r < b$.

De fato, o Teorema a seguir garante que é sempre possível a representação de modo único de qualquer número inteiro, em uma base numérica qualquer.

Teorema 1.1. *Seja b um número natural e $M = \{0, 1, 2, \ldots, b-1\}$ com $b > 1$.*

Todo número inteiro x pode ser representado, de modo único, da seguinte maneira:

$$x = a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + ... + a_1 b^1 + a_0 b^0,$$

onde $n \geq 0$, $a_n \neq 0$ e para cada índice i de $a_i b^i$, com $(0 \leq i \leq n)$, tem-se que $a_i \in M$.

Demonstração. Primeiro iremos mostrar a existência da representação.

De acordo com o algoritmo da divisão euclidiana, dividindo x por b, temos:

$$x = bq_0 + a_0, \qquad e \qquad 0 \leq a_0 < b \quad e \quad q_0 < x.$$

sendo, q_0 o quociente e a_0 o resto da divisão.[2]

Agora, dividindo q_0 por b, e aplicando novamente o princípio da divisão euclidiana, obtemos q_1 como quociente e a_1 como resto, $q_0 = bq_1 + a_1$, além disso, temos que $0 \leq a_1 < b \quad e \quad q_1 < q_0$.

Repetindo indutivamente esse processo, obteremos quocientes cada vez menores. De acordo com a divisão euclidiana, um quociente nunca pode ser negativo, e consequentemente chegará um momento em que ele será nulo.

Supondo que quando tivermos o quociente nulo, o resto será a_n, teremos:

$$\begin{gathered}
x = bq_0 + a_0, \ com \ 0 \leq a_0 < b; \quad (1^{\text{a}} \ expressão) \\
q_0 = bq_1 + a_1, \ com \ 0 \leq a_1 < b; \quad (2^{\text{a}} \ expressão) \\
q_1 = bq_2 + a_2, \ com \ 0 \leq a_2 < b; \quad (3^{\text{a}} \ expressão) \\
\ldots \\
q_{n-2} = bq_{n-1} + a_{n-1}, \ com \ 0 \leq a_{n-1} < b; \quad (n^{\text{a}} \ expressão) \\
q_{n-1} = bq_n + a_n, \ com \ 0 \leq a_n < b; \quad ((n+1)^{\text{a}} \ expressão)
\end{gathered}$$

Substituindo o valor de q_0 na 1ª expressão, em seguida o valor de q_1 na 2ª e assim sucessivamente, teremos:

$$\begin{gathered}
x = bq_0 + a_0 = b(bq_1 + a_1) + a_0 = \\
b^2 q_1 + ba_1 + a_0 = b^2(bq_2 + a_2) + ba_1 + a_0 = \\
b^3 q_2 + b^2 a_2 + ba_1 + a_0 = b^3(bq_3 + a_3) + b^2 a_2 + ba_1 + a_0 = \\
\ldots \\
= b^{n-1}(bq_{n-1} + a_{n-1}) + b^{n-2} a_{n-2} + ... + b^2 a_2 + ba_1 + a_0 = \\
= a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + ... + a_1 b^1 + a_0.
\end{gathered}$$

2 Temos $q_0 < x$ pelo corolário: Sejam $x \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ e $b \in \mathbb{N}$, $b > 1$. Sejam, $r, q \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, tais que $x = bq + r$ e $0 \leq r < b$. Então, $q < x$ (demostração no apêndice).

O que conclui a existência da representação.

Agora, iremos provar a unicidade.

Supondo que existem duas representações diferentes para o número x, em uma mesma base b, com $b \neq 0$, $n \leq m$, $n, m \in \mathbb{N}$ e $a_n, c_m \neq 0$, temos:

$$x = a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + ... + a_1 b + a_0 = c_m b^m + \ldots + c_{m-1} b^{m-1} + ... + c_1 b + c_0;$$

Temos que a_0 e c_0 são os restos da divisão de x por b. Além disso,

$$a_n b^{n-1} + a_{n-1} b^{n-2} + ... + a_1 \quad \text{e} \quad c_m b^{m-1} + c_{m-1} b^{m-2} + ... + c_1$$

são os respectivos quocientes.

Como na divisão euclidiana o quociente e o resto são únicos, temos então que $a_0 = c_0$ e

$$a_n b^{n-1} + a_{n-1} b^{n-2} + ... + a_1 = c_m b^{m-1} + c_{m-1} b^{m-2} + ... + c_1.$$

Repetindo indutivamente o processo teremos $a_1 = c_1$, $a_2 = c_2$, ... , $a_n = c_n$ e $n = m$.

Temos dessa forma que a representação de um número em uma mesma base b é única.

□

A notação para se distinguir a base numérica de um número x escrito em uma base b será $(x)_b$, ou seja, a expressão do Teorema 1.1, pode ser representada de modo abreviado pela notação:

$$x = (a_n a_{n-1} a_{n-2} ... a_2 a_1 a_0)_b$$

onde a_i é o coeficiente de b^i e é colocado na mesma ordem em que aparece com o respectivo b^i, que aparecem em ordem decrescente.

Por exemplo, o número 123 na base numérica 5, ou seja, $1.5^2 + 2.5 + 3$, será denotado por: $(123)_5$. Se a base numérica não for especificada, considere a base numérica usual, ou seja, a decimal.

Aplicando o sinal $-$ à frente do numeral representamos os números negativos, dessa forma essa representação pode ser estendida para os números inteiros.

Lembrando que essa representação mostra quantos agrupamentos de potências de b temos. Por exemplo: 423 tem 4 agrupamentos de $100 = 10^2$, 2 agrupamentos de 10 e 3 unidades; $(423)_5$ tem 4 agrupamentos de $25 = 5^2$, 2 agrupamentos de 5 e 3 unidades. Mas, como representar os números racionais com dízima?

Primeiro vamos pensar nos números entre zero e um. Quando queremos representar parte de uma unidade podemos dividir a unidade por potências da base e teremos o valor posicional de cada algarismo. Quando o algarismo está na ordem imediatamente inferior a casa das unidades, deve representar uma quantidade b vezes menor, a segunda ordem à direita da unidade, deve representar uma quantidade b^2 vezes menor, assim sucessivamente, ou seja, podemos considerar que a cada ordem à direita da unidade o algarismo será multiplicado por potências negativas de b.

Exemplo 1.2. Para base 10:

- o primeiro algarismo inferior a casa da unidade é multiplicado por $10^{-1} = \frac{1}{10} = 0,1$ (décimo);
- o segundo algarismo inferior a casa da unidade é multiplicado por $10^{-2} = \frac{1}{100} = 0,01$ (centésimo);
- terceiro algarismo inferior a casa da unidade é multiplicado por $10^{-3} = \frac{1}{1000} = 0,001$ (milésimo);

  ...
- o p-ésimo algarismo inferior a casa da unidade é multiplicado por $10^{-p} = \dfrac{1}{\underbrace{10...0}_{p\ zeros}} =$ $0, \underbrace{00...00}_{p-1\ zeros}1$;

Então, para representar os números entre zero e um, devemos utilizar potências negativas da base:

$$x = a_{-1}b^{-1} + a_{-2}b^{-2} + ... + a_{-m}b^{-m},$$

que pode ser representado de modo abreviado, pela notação:

$$x = (0, a_{-1}a_{-2}a_{-3}...a_{-m})_b.$$

Para facilitar a compreensão do valor posicional de cada algarismo usamos a vírgula para separar a parte inteira da parte fracionária.

Exemplo 1.3.

- $0,4 = 4 \times 10^{-1}$
- $(0,4)_5 = 4 \times 5^{-1}$
- $(0,325)_8 = 3 \times 8^{-1} + 2 \times 8^{-2} + 5 \times 8^{-3}$
- $(0,10101)_2 = 1 \times 2^{-1} + 0 \times 2^{-2} + 1 \times 2^{-3} + 0 \times 2^{-4} + 1 \times 2^{-5}$

Como qualquer fração positiva pode ser considerada como um número misto, ou seja, um número inteiro mais uma fração entre zero e um, podemos estender a ideia para representar os números racionais utilizando potências positivas e negativas da base:

$$x = a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + ... + a_1 b^1 + a_0 b^0 + a_{-1} b^{-1} + ... + a_{-m} b^{-m}$$

que pode ser representado de modo abreviado, pela notação:

$$x = (a_n a_{n-1} ... a_1 a_0, a_{-1} a_{-2} ... a_{-m})_b.$$

Sendo que $n+1$ é a quantidade de dígitos inteiros; m a quantidade de dígitos fracionários; a_n o dígito com maior valor posicional; a_{-m} o menor valor posicional.

Exemplo 1.4.

- $7132 = 7 \times 10^3 + 1 \times 10^2 + 3 \times 10^1 + 2 \times 10^0$
- $71,32 = 7 \times 10^1 + 1 \times 10^0 + 3 \times 10^{-1} + 2 \times 10^{-2}$
- $(10101)_2 = 1 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0$
- $(4,2321)_5 = 4 \times 5^0 + 2 \times 5^{-1} + 3 \times 5^{-2} + 2 \times 5^{-3} + 1 \times 5^{-4}$
- $(7152)_8 = 7 \times 8^3 + 1 \times 8^2 + 5 \times 8^1 + 2 \times 8^0$
- $(FDE3)_{16} = F \times 16^3 + D \times 16^2 + E \times 16^1 + 3 \times 16^0 = 15 \times 16^3 + 13 \times 16^2 + 14 \times 16^1 + 3 \times 16^0$
- $(101,01)_2 = 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0 + 0 \times 2^{-1} + 1 \times 2^{-2}$
- $(10,22)_3 = 1 \times 3^1 + 0 \times 3^0 + 2 \times 3^{-1} + 2 \times 3^{-2}$
- $(42,3)_5 = 4 \times 5^1 + 4 \times 5^0 + 3 \times 5^{-1}$
- $(FD,E)_{16} = F \times 16^1 + D \times 16^0 + E \times 16^{-1} = 15 \times 16^1 + 13 \times 16^0 + 14 \times 16^{-1}$

1.2 OPERAÇÕES EM QUALQUER BASE

Escolhida a base b como sistema de numeração padrão, veremos como proceder com as operações com números racionais positivos [3].

Para isso, primeiro consideremos dois números naturais $x = (a_n a_{n-1} ... a_1 a_0)_b$ e $y = (c_m c_{m-1} ... c_1 c_0)_b$ escritos na base b. Pelo Teorema 1.1, x e y podem ser escritos, de forma única, como:

[3] No Ensino Fundamental Anos Iniciais os números negativos não são trabalhados, por isso optamos em restringir essa abordagem aos números positivos

$$x = a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + ... + a_1 b^1 + a_0 b^0$$
$$y = c_m b^m + c_{m-1} b^{m-1} + ... + c_1 b^1 + c_0 b^0$$

sendo, $a_n \neq 0$, $c_m \neq 0$ e $m \leq n$.

Então ampliaremos para dois números racionais positivos $x = (a_n a_{n-1} ... a_1 a_0, a_{-1} ... a_{-\ell})_b$ e $y = (c_m c_{m-1} ... c_1 c_0, c_{-1} ... c_{-k})_b$, que podem ser escritos de forma única:

$$x = a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + ... + a_1 b^1 + a_0 b^0 + a_{-1} b^{-1} + ... + a_{-\ell} b^{-\ell}$$
$$y = c_m b^m + c_{m-1} b^{m-1} + ... + c_1 b^1 + c_0 b^0 + c_{-1} b^{-1} + ... + c_{-k} b^{-k}$$

sendo, $a_n \neq 0$, $c_m \neq 0$ e $m \leq n$ e $\ell \leq k$.

Queremos saber como escrever de forma única $(x + y)_b$, $(x - y)_b$, $(x \times y)_b$ e $(x \div y)_b$.

1.2.1 ALGORITMO PARA A ADIÇÃO

Para somar dois números naturais em uma mesma base primeiramente somamos os coeficientes dos termos de mesmo índice.

Efetuando a adição de x + y temos:

$$x + y = (a_n b^n + ... + a_m b^m + ... + a_1 b^1 + a_0 b^0) + (c_m b^m + ... + c_1 b^1 + c_0 b^0).$$

Evidenciando os termos da base de mesmo índice, obtemos:

$$x + y = a_n b^n + ... + a_m b^m + c_m b^m + a_{m-1} b^{m-1} + ... + a_1 b^1 + c_1 b^1 + a_0 + c_0$$

$$= a_n b^n + ... + (a_m + c_m) b^m + (a_{m-1} + c_{m-1}) b^{m-1} + ... + (a_1 + c_1) b + (a_0 + c_0)$$

se $c_i + a_i \geq b$, para cada $i = 0, ..., n$, temos que $c_i + a_i = b + k_i$, com $0 \leq k_i < b$.

Dessa forma, se $c_0 + a_0 = b + k_0$ então:

$$x + y = a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + ... + (a_m + c_m) b^m + ... + (a_1 + c_1) b + b + k_0$$

$$= a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + ... + (a_m + c_m) b^m + ... + (a_1 + c_1 + 1) b + k_0$$

Se $c_1 + a_1 + 1 = b + k_1$, então:

$$= a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + ... + (a_m + c_m) b^m + ... + (a_2 + c_2) b^2 + (b + k_1) b + k_0$$

$$= a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + ... + (a_m + c_m) b^m + ... + (a_2 + c_2) b^2 + b^2 + (k_1) b + k_0$$

$$= a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + ... + (a_m + c_m) b^m + ... + (a_2 + c_2 + 1) b^2 + (k_1) b + k_0$$

Assim, sucessivamente para cada $c_i + a_i$.

Por este motivo, a soma deve ser iniciada pela unidade de 1ª ordem e ir subindo uma a uma.

Exemplo 1.5. Adição

- $257 + 37 = (2 \times 10^2 + 5 \times 10^1 + 7 \times 10^0) + (3 \times 10^1 + 7 \times 10^0)$
  $= (2 \times 10^2) + [(5+3) \times 10^1] + [(7+7) \times 10^0]$
  $= (2 \times 10^2) + (8 \times 10^1) + [(10+4) \times 10^0]$
  $= (2 \times 10^2) + [(8+1) \times 10^1] + (4 \times 10^0)$
  $= (2 \times 10^2) + (9 \times 10^1) + (4 \times 10^0) = 294$

- $26797 + 3888 = (2 \times 10^4 + 6 \times 10^3 + 7 \times 10^2 + 9 \times 10^1 + 7 \times 10^0) + (3 \times 10^3 + 8 \times 10^2 + 8 \times 10^1 + 8 \times 10^0)$
  $= (2 \times 10^4) + [(6+3) \times 10^3] + [(7+8) \times 10^2] + [(9+8) \times 10^1] + [(7+8) \times 10^0]$
  $= (2 \times 10^4) + (9 \times 10^3) + [(10+5) \times 10^2] + [(10+7) \times 10^1] + [(10+5) \times 10^0]$
  $= (2 \times 10^4) + (9 \times 10^3) + [(10+5) \times 10^2] + [(10+7) \times 10^1] + 10^1 + (5 \times 10^0)$
  $= (2 \times 10^4) + (9 \times 10^3) + [(10+5) \times 10^2] + [(10+7+1) \times 10^1] + (5 \times 10^0)$
  $= (2 \times 10^4) + (9 \times 10^3) + [(10+5) \times 10^2] + [(10+8) \times 10^1] + (5 \times 10^0)$
  $= (2 \times 10^4) + (9 \times 10^3) + [(10+5) \times 10^2] + 10^2 + (8 \times 10^1) + (5 \times 10^0)$
  $= (2 \times 10^4) + (9 \times 10^3) + [(10+5+1) \times 10^2] + (8 \times 10^1) + (5 \times 10^0)$
  $= (2 \times 10^4) + (9 \times 10^3) + [(10+6) \times 10^2] + (8 \times 10^1) + (5 \times 10^0)$
  $= (2 \times 10^4) + (9 \times 10^3) + 10^3 + (6 \times 10^2) + (8 \times 10^1) + (5 \times 10^0)$
  $= (2 \times 10^4) + [(9+1) \times 10^3] + (6 \times 10^2) + (8 \times 10^1) + (5 \times 10^0)$
  $= (2 \times 10^4) + (10 \times 10^3) + (6 \times 10^2) + (8 \times 10^1) + (5 \times 10^0)$
  $= (2 \times 10^4) + [(10+0) \times 10^3] + (6 \times 10^2) + (8 \times 10^1) + (5 \times 10^0)$
  $= (2 \times 10^4) + 10^4 + (0 \times 10^3) + (6 \times 10^2) + (8 \times 10^1) + (5 \times 10^0)$
  $= [(2+1) \times 10^4] + (0 \times 10^3) + (6 \times 10^2) + (8 \times 10^1) + (5 \times 10^0)$
  $= (3 \times 10^4) + (0 \times 10^3) + (6 \times 10^2) + (8 \times 10^1) + (5 \times 10^0) = 30685$

- $(212)_3 + (2)_3 = (2 \times 3^2 + 1 \times 3^1 + 2 \times 3^0) + (2 \times 3^0)$
  $= (2 \times 3^2) + (1 \times 3^1) + [(2+2) \times 3^0]$
  $= (2 \times 3^2) + (1 \times 3^1) + [(3+1) \times 3^0]$
  $= (2 \times 3^2) + (1 \times 3^1) + [(3 \times 3^0) + (1 \times 3^0)]$
  $= (2 \times 3^2) + (1 \times 3^1) + 3^1 + (1 \times 3^0)]$
  $= (2 \times 3^2) + [(1+1) \times 3^1] + (1 \times 3^0)$
  $= (2 \times 3^2) + (2 \times 3^1) + (1 \times 3^0) = (221)_3$

- $(362)_8 + (3457)_8 = (3 \times 8^2 + 6 \times 8^1 + 2 \times 8^0) + (3 \times 8^3 + 4 \times 8^2 + 5 \times 8^1 + 7 \times 8^0)$
  $= (3 \times 8^3) + [(3+4) \times 8^2] + [(6+5) \times 8^1] + [(2+7) \times 8^0]$

$= (3 \times 8^3) + (7 \times 8^2) + [(8+3) \times 8^1] + (8 + 1 \times 8^0)$
$= (3 \times 8^3) + (7 \times 8^2) + [(8+3) \times 8^1] + 8^1 + (1 \times 8^0)$
$= (3 \times 8^3) + (7 \times 8^2) + [(8+3+1) \times 8^1] + (1 \times 8^0)$
$= (3 \times 8^3) + (7 \times 8^2) + [(8+4) \times 8^1] + (1 \times 8^0)$
$= (3 \times 8^3) + (7 \times 8^2) + 8^2 + (4 \times 8^1) + (1 \times 8^0)$
$= (3 \times 8^3) + [(7+1) \times 8^2] + (4 \times 8^1) + (1 \times 8^0)$
$= (3 \times 8^3) + (8 \times 8^2) + (4 \times 8^1) + (1 \times 8^0)$
$= (3 \times 8^3) + [(8+0) \times 8^2] + (4 \times 8^1) + (1 \times 8^0)$
$= (3 \times 8^3) + 8^3 + (0 \times 8^2) + (4 \times 8^1) + (1 \times 8^0)$
$= [(3+1) \times 8^3] + (0 \times 8^2) + (4 \times 8^1) + (1 \times 8^0)$
$= (4 \times 8^3) + (0 \times 8^2) + (4 \times 8^1) + (1 \times 8^0) = (4041)_8$

- $(257)_{16} + (37)_{16} = (2 \times 16^2 + 5 \times 16^1 + 7 \times 16^0) + (3 \times 16^1 + 7 \times 16^0)$
$= (2 \times 16^2) + [(5+3) \times 16^1] + [(7+7) \times 16^0]$
$= (2 \times 16^2) + (8 \times 16^1) + (E \times 16^0) = (28E)_{16}$

Operando com o mesmo algoritmo, como os números estão representados na base b, podemos considerar $a_i + c_i = s_i$, com $s_i = d_p b^p + ... + d_0 b^0$. Se $s_i < b$, para todo $i = 0, ..., n$, teremos o resultado da operação na base b. Se para algum s_i temos $s_i \geq b$, devemos escrever $s_i = d_p b^p + ... + d_0 b^0$, aplicar a distributiva e somar os termos da base de mesmo índice.

Dessa forma, se $a_0 + c_0 = s_0 = d_1 b + d_0$ então:

$$x + y = a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + ... + (a_m + c_m) b^m + ... + (a_1 + c_1) b + (a_0 + c_0)$$

$$= a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + ... + s_m b^m + ... + s_1 b + s_0$$

$$= a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + ... + s_m b^m + ... + s_1 b + d_1 b + d_0 b^0$$

$$= a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + ... + s_m b^m + ... + (s_1 + d_1) b + d_0$$

Se $(s_1 + d_1) = s_1' = d_1' b + d_0'$, temos:

$$= a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + ... + s_m b^m + ... + s_2 b^2 + (d_1' b + d_0') b + d_0$$

$$= a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + ... + s_m b^m + ... + s_2 b^2 + d_1' b^2 + d_0' b + d_0$$

$$= a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + ... + s_m b^m + ... + (s_2 + d_1') b^2 + d_0' b + d_0$$

Assim, sucessivamente para cada $c_i + a_i = s_i$. Ao aplicarmos a distributiva e somarmos com os termos da base de mesmo índice é o mesmo que fazer o transporte para uma unidade de maior ordem. Por este motivo, a soma deve ser iniciada pela unidade de 1ª ordem e ir subindo uma a uma.

Exemplo 1.6. Adição

- $257 + 37 = (2 \times 10^2 + 5 \times 10^1 + 7 \times 10^0) + (3 \times 10^1 + 7 \times 10^0)$
$= (2 \times 10^2) + [(5 + 3) \times 10^1] + [(7 + 7) \times 10^0]$
$= (2 \times 10^2) + (8 \times 10^1) + (14 \times 10^0)$
$= (2 \times 10^2) + (8 \times 10^1) + [(1 \times 10^1 + 4) \times 10^0]$
$= (2 \times 10^2) + (8 \times 10^1) + (1 \times 10^1) + (4 \times 10^0)$
$= (2 \times 10^2) + [(8 + 1) \times 10^1] + (4 \times 10^0)$
$= (2 \times 10^2) + (9 \times 10^1) + (4 \times 10^0) = 294$

- $(212)_3 + (2)_3 = (2 \times 3^2 + 1 \times 3^1 + 2 \times 3^0) + (2 \times 3^0)$
$= (2 \times 3^2) + (1 \times 3^1) + [(2 + 2) \times 3^0]$, como $4 = (11)_3$, temos
$= (2 \times 3^2) + (1 \times 3^1) + (11 \times 3^0)$
$= (2 \times 3^2) + (1 \times 3^1) + [(1 \times 3^1 + 1) \times 3^0]$
$= (2 \times 3^2) + (1 \times 3^1) + (1 \times 3^1) + (1 \times 3^0)]$
$= (2 \times 3^2) + [(1 + 1) \times 3^1] + (1 \times 3^0)$
$= (2 \times 3^2) + (2 \times 3^1) + (1 \times 3^0) = (221)_3$

- $(362)_8 + (3457)_8 = (3 \times 8^2 + 6 \times 8^1 + 2 \times 8^0) + (3 \times 8^3 + 4 \times 8^2 + 5 \times 8^1 + 7 \times 8^0)$
$= (3 \times 8^3) + [(3+4) \times 8^2] + [(6+5) \times 8^1] + [(2+7) \times 8^0]$, como $11 = (13)_8$, $9 = (11)_8$, temos
$= (3 \times 8^3) + (7 \times 8^2) + (13 \times 8^1) + (11 \times 8^0)$
$= (3 \times 8^3) + (7 \times 8^2) + (13 \times 8^1) + [(1 \times 8^1 + 1) \times 8^0]$
$= (3 \times 8^3) + (7 \times 8^2) + (13 \times 8^1) + (1 \times 8^1) + (1 \times 8^0)$
$= (3 \times 8^3) + (7 \times 8^2) + [(13 + 1) \times 8^1] + (1 \times 8^0)$
$= (3 \times 8^3) + (7 \times 8^2) + (14 \times 8^1) + (1 \times 8^0)$
$= (3 \times 8^3) + (7 \times 8^2) + [(1 \times 8^1 + 4) \times 8^1] + (1 \times 8^0)$
$= (3 \times 8^3) + (7 \times 8^2) + (1 \times 8^2) + (4 \times 8^1) + (1 \times 8^0)$
$= (3 \times 8^3) + [(7 + 1) \times 8^2] + (4 \times 8^1) + (1 \times 8^0)$, como $8 = (10)_8$, temos
$= (3 \times 8^3) + (10 \times 8^2) + (1 \times 8^2) + (4 \times 8^1) + (1 \times 8^0)$
$= (3 \times 8^3) + [(1 \times 8^1 + 0) \times 8^2] + (1 \times 8^2) + (4 \times 8^1) + (1 \times 8^0)$
$= (3 \times 8^3) + (1 \times 8^3) + (0 \times 8^2) + (4 \times 8^1) + (1 \times 8^0)$
$= [(3 + 1) \times 8^3] + (0 \times 8^2) + (4 \times 8^1) + (1 \times 8^0)$
$= (4 \times 8^3) + (0 \times 8^2) + (4 \times 8^1) + (1 \times 8^0) = (4041)_8$

O uso constante da adição nas mais diversas aplicações exigiu o desenvolvimento de algoritmos compactos e rápidos. O algoritmo mais utilizado atualmente usa a representação reduzida dos números. Para efetuarmos a adição de dois ou mais números devemos colocar os algarismos de ordens iguais no mesmo alinhamento vertical e começar a somar coluna por coluna (casa por casa), da menor para a maior ordem (direita para esquerda). Quando o resultado da soma for maior ou igual a $(10)_b$, o algarismo à esquerda será transportado para a coluna imediatamente superior para que seja somado com os valores desta coluna.

Exemplo 1.7. Se quisermos somar $257 + 37$, basta colocar algarismos de ordens iguais um abaixo do outro. Tomamos o dígito 7 de 257 e somamos ao 7 de 37, $7 + 7 = 14 = 10 + 4$. Escrevemos 4 na primeira coluna e reservando o 1 (do 10) na coluna seguinte que é a casa de ordem imediatamente superior. Passamos para a próxima ordem. Tomamos o dígito 5 de 257 e somamos ao 3 de 37, o resultado somamos com o 1 que reservamos da ordem imediatamente inferior $5 + 3 + 1 = 9$. Escrevemos 9 na coluna dessa ordem (como esta nesta ordem, representa 90) e não há nada a reservar na coluna imediatamente superior. Passamos para a próxima ordem, tomamos $2 + 0 = 2$, assim obtemos:

$$\begin{array}{cccc} & 2 & {}^{1}5 & 7 \\ + & & 3 & 7 \\ \hline & 2 & 9 & 4 \end{array}$$

Analogamente temos:

$$\begin{array}{cccccc} & {}^{1}2 & {}^{1}6 & {}^{1}7 & {}^{1}9 & 7 \\ + & & 3 & 8 & 8 & 8 \\ \hline & 3 & 0 & 6 & 8 & 5 \end{array}$$

Exemplo 1.8. Adição em outras bases:

$$\begin{array}{cccc} & (2 & {}^{1}1 & 2)_3 \\ + & (& & 2)_3 \\ \hline & (2 & 2 & 1)_3 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} & (& {}^{1}3 & {}^{1}6 & 2)_8 \\ + & ({}^{1}3 & 4 & 5 & 7)_8 \\ \hline & (4 & 0 & 4 & 1)_8 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} & ({}^{1}2 & {}^{1}5 & 7)_8 \\ + & (& 3 & 7)_8 \\ \hline & (3 & 1 & 6)_8 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} & (2 & 5 & 7)_{16} \\ + & (& 3 & 7)_{16} \\ \hline & (2 & 8 & \mathrm{E})_{16} \end{array}$$

Esse mesmo algoritmo é válido para os números racionais com dízima finita na base em questão.

Exemplo 1.9. 33,5 + 5,54

$$33,5 + 5,54 = (3 \times 10^1 + 3 \times 10^0 + 5 \times 10^{-1}) + (5 \times 10^0 + 5 \times 10^{-1} + 4 \times 10^{-2})$$
$$= 3 \times 10^1 + (3+5) \times 10^0 + (5+5) \times 10^{-1} + 4 \times 10^{-2}$$
$$= 3 \times 10^1 + 8 \times 10^0 + 10 \times 10^{-1} + 4 \times 10^{-2}$$
$$= 3 \times 10^1 + 8 \times 10^0 + 10^{1-1} + 4 \times 10^{-2}$$
$$= 3 \times 10^1 + 8 \times 10^0 + 10^0 + 4 \times 10^{-2}$$
$$= 3 \times 10^1 + (8+1) \times 10^0 + 4 \times 10^{-2}$$
$$= 3 \times 10^1 + 9 \times 10^0 + 0 \times 10^{-1} + 4 \times 10^{-2} = 39,04$$

Para somar racionais com dízima finita, com a representação reduzida de um número, basta completar com zero as ordens após a vírgula para igualar a quantidade de casas e proceder como nos números naturais.

Exemplo 1.10.
$$\begin{array}{rcccc} & 3 & {}^{1}3, & 5 & 0 \\ + & & 5, & 5 & 4 \\ \hline & 3 & 9, & 0 & 4 \end{array}$$

Podemos perceber que colocar os números de mesma ordem na mesma coluna vertical e transportar para ordem superior quando necessário é o mesmo que somar os coeficientes dos termos de mesmo índice fazendo a conversão $c_i + a_i = b + k$ quando $c_i + a_i \geq b$.

1.2.2 ALGORITMO PARA A SUBTRAÇÃO

Para subtrair dois números em uma mesma base devemos primeiramente diminuir os coeficientes dos termos de mesmo índice.

Efetuando a subtração de x - y temos:

$$x - y = (a_n b^n + ... + a_1 b^1 + a_0 b^0) - (c_m b^m + ... + c_n b^n + ... + c_1 b^1 + c_0 b^0)$$

evidenciando os termos da base de mesmo índice, obtemos:

$$x - y = a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + ... + a_m b^m - c_m b^m + a_{m-1} b^{m-1} - c_{m-1} b^{m-1} + ... - a_1 b^1 - c_1 b + a_0 - c_0$$

$$= a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + ... + (a_m - c_m) b^m + (a_{m-1} - c_{m-1}) b^{m-1} + ... + (a_1 - c_1) b + (a_0 - c_0)$$

Todos os coeficientes devem ser positivos, e se isso não ocorrer, deve-se proceder uma mudança de unidade. Vamos supor sem perda de generalidade que somente $a_1 - c_1$ seja negativo e que $(a_i - c_i = s_i)$, assim:

$$x - y = a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + ... + s_m b^m + s_{m-1} b^{m-1} + ... + s_2 b^2 - s_1 b + s_0$$

Somando $(1 - 1)$ a s_2 não alteramos o resultado, pois $1 - 1 = 0$, e teremos:

$$\begin{aligned} x - y &= a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + ... + s_m b^m + s_{m-1} b^{m-1} + ... + (s_2 + 1 - 1) b^2 - s_1 b + s_0 \\ &= a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + ... + s_m b^m + s_{m-1} b^{m-1} + ... + (s_2 - 1) b^2 + b^2 - s_1 b + s_0 \\ &= a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + ... + s_m b^m + s_{m-1} b^{m-1} + ... + (s_2 - 1) b^2 + (b - s_1) b + s_0 \end{aligned}$$

Como $s_1 < b$, temos $(b - s_1) > 0$ e se $(s_2 - 1) > 0$ então todos os coeficientes serão positivos. Caso contrário, repete-se o processo até todos os coeficientes ficarem positivos.

Observação 1.11. *Caso tenhamos $y > x$ para calcular $x - y$, notando que $x - y = -(y - x)$ podemos proceder da seguinte maneira:*

1. *calculamos $y - x$, conforme procedimento anterior;*

2. *trocamos o sinal do valor encontrado anteriormente.*

Exemplo 1.12. Subtração

- $257 - 38 = (2 \times 10^2 + 5 \times 10^1 + 7 \times 10^0) - (3 \times 10^1 + 8 \times 10^0)$
  $= 2 \times 10^2 + (5 - 3) \times 10^1 + (7 - 8) \times 10^0$
  $= 2 \times 10^2 + 2 \times 10^1 + (-1) \times 10^0$
  $= 2 \times 10^2 + (1 + 1) \times 10^1 + (-1) \times 10^0$
  $= 2 \times 10^2 + 1 \times 10^1 + (10 - 1) \times 10^0$
  $= 2 \times 10^2 + 1 \times 10^1 + 9 \times 10^0 = 219$

- $38 - 257 = -(257 - 38) = -[(2 \times 10^2 + 5 \times 10^1 + 7 \times 10^0) - (3 \times 10^1 + 8 \times 10^0)]$
  $= -(2 \times 10^2 + (5 - 3) \times 10^1 + (7 - 8) \times 10^0)$
  $= -(2 \times 10^2 + 2 \times 10^1 + (-1) \times 10^0)$
  $= -(2 \times 10^2 + (1 + 1) \times 10^1 + (-1) \times 10^0)$
  $= -(2 \times 10^2 + 1 \times 10^1 + (10 - 1) \times 10^0)$
  $= -(2 \times 10^2 + 1 \times 10^1 + 9 \times 10^0) = -219$

- $(212)_3 - (22)_3 = (2 \times 3^2 + 1 \times 3^1 + 2 \times 3^0) - (2 \times 3^1 + 2 \times 3^0)$
  $= 2 \times 3^2 + (1 - 2) \times 3^1 + (2 - 2) \times 3^0$
  $= 2 \times 3^2 + (-1) \times 3^1 + 0 \times 3^0$
  $= (1 + 1) \times 3^2 - 1 \times 3^1 + 0 \times 3^0$
  $= 1 \times 3^2 + (3 - 1) \times 3^1 + 0 \times 3^0$
  $= 1 \times 3^2 + 2 \times 3^1 + 0 \times 3^0 = (120)_3$

- $26797 - 3888 = (2 \times 10^4 + 6 \times 10^3 + 7 \times 10^2 + 9 \times 10^1 + 7 \times 10^0) - (3 \times 10^3 + 8 \times 10^2 + 8 \times 10^1 + 8 \times 10^0)$
  $= (2 \times 10^4) + [(6-3) \times 10^3] + [(7-8) \times 10^2] + [(9-8) \times 10^1] + [(7-8) \times 10^0]$
  $= (2 \times 10^4) + (3 \times 10^3) + (-1 \times 10^2) + (1 \times 10^1) + (-1 \times 10^0)$
  $= (2 \times 10^4) + (3 \times 10^3) + (-1 \times 10^2) + [1 + (1-1) \times 10^1] + [(-1) \times 10^0]$
  $= (2 \times 10^4) + (3 \times 10^3) + (-1 \times 10^2) + [(1-1) \times 10^1] + 10^1 + [(-1) \times 10^0]$
  $= (2 \times 10^4) + (3 \times 10^3) + (-1 \times 10^2) + (0 \times 10^1) + [(10-1) \times 10^0]$
  $= (2 \times 10^4) + [(2+1) \times 10^3] + (-1 \times 10^2) + (0 \times 10^1) + (9 \times 10^0)$
  $= (2 \times 10^4) + (2 \times 10^3) + 10^3 + (-1 \times 10^2) + (0 \times 10^1) + (9 \times 10^0)$
  $= (2 \times 10^4) + (2 \times 10^3) + [(10-1) \times 10^2] + (0 \times 10^1) + (9 \times 10^0)$
  $= (2 \times 10^4) + (2 \times 10^3) + (9 \times 10^2) + (0 \times 10^1) + (9 \times 10^0) = 22909$

- $(362)_8 - (3457)_8 = -((3457)_8 - (362)_8)$
  $= -[(3 \times 8^3 + 4 \times 8^2 + 5 \times 8^1 + 7 \times 8^0) - (3 \times 8^2 + 6 \times 8^1 + 2 \times 8^0)]$
  $= -[(3 \times 8^3) + [(4-3) \times 8^2] + [(5-6) \times 8^1] + [(7-2) \times 8^0]$
  $= -[(3 \times 8^3) + (1 \times 8^2) + (-1 \times 8^1) + (5 \times 8^0)]$
  $= -[(3 \times 8^3) + [(1+1-1) \times 8^2] + (-1 \times 8^1) + (5 \times 8^0)]$
  $= -[(3 \times 8^3) + (0 \times 8^2) + (1 \times 8^2) + (-1 \times 8^1) + (5 \times 8^0)]$
  $= -[(3 \times 8^3) + (0 \times 8^2) + (8 - 1 \times 8^1) + (5 \times 8^0)]$
  $= -[(3 \times 8^3) + (0 \times 8^2) + (7 \times 8^1) + (5 \times 8^0)] = -(3075)_8$

- $(957)_{16} - (A9)_{16} = (9 \times 16^2 + 5 \times 16^1 + 7 \times 16^0) - (A \times 16^1 + 9 \times 16^0)$
  $= (9 \times 16^2) + [(5-A) \times 16^1] + [(7-9) \times 16^0]$ como $(A)_{16} = 10$, temos
  $= (9 \times 16^2) + [(-5) \times 16^1] + [(-2) \times 16^0]$
  $= (9 \times 16^2) + [(-5+1-1) \times 16^1] + [(-2) \times 16^0]$
  $= (9 \times 16^2) + [(-6) \times 16^1] + (1 \times 16^1) + [(-2) \times 16^0]$
  $= (9 \times 16^2) + [(-6) \times 16^1] + [(16-2) \times 16^0]$
  $= (9 \times 16^2) + [(-6) \times 16^1] + (14 \times 16^0)$, como $(E)_{16} = 14$, temos
  $= [(9+1-1) \times 16^2] + [(-6) \times 16^1] + (E \times 16^0)$
  $= [(9-1) \times 16^2] + (1 \times 16^2) + [(-6) \times 16^1] + (E \times 16^0)$
  $= (8 \times 16^2) + [(16-6) \times 16^1] + (E \times 16^0)$
  $= (8 \times 16^2) + (10 \times 16^1) + (E \times 16^0)$, como $(A)_{16} = 10$
  $= (8 \times 16^2) + (A \times 16^1) + (E \times 16^0) = (8AE)_{16}$

Como na adição, a subtração também exigiu o desenvolvimento de algoritmos mais compactos, por isso, o algoritmo mais usado atualmente utiliza a representação reduzida dos números.

Para efetuarmos a subtração de dois números devemos colocar os algarismos de ordens iguais no mesmo alinhamento vertical e começar a subtrair coluna por coluna, da menor para a maior ordem. Quando o valor a ser subtraído for maior que o valor disponível, deve-se ’emprestar’

1 da ordem imediatamente superior, que ficará com menos uma unidade, mas que ao passar para ordem imediatamente inferior, irá como $(10)_b$. Sempre que uma ordem precisar emprestar algo para outra ordem, ela não pode emprestar mais do que um, ou seja, as dezenas podem emprestar 1 dezena para as unidades, as centenas podem emprestar 1 centena para as dezenas e assim por diante.

Exemplo 1.13. Para fazer $257 - 38$, basta colocar algarismos de ordens iguais um abaixo do outro. Teríamos que começar subtraindo 8 (de 38) do 7 de (257), mas como 8 é maior que 7, temos que emprestar 1 do 5, ou seja, substituir 1 dezena por 10 unidades. Escrevemos 4 na coluna que estava o cinco e ficamos com $17 - 8 = 9$ na primeira coluna. Passamos para a próxima ordem. Tomamos $4 - 3 = 1$ e não há necessidade de emprestar da coluna imediatamente superior. Passamos para a próxima ordem, e teremos $2 - 0 = 2$, então obtemos:

$$\begin{array}{cccc} & 2 & {}^{4}\cancel{5} & {}^{1}7 \\ - & & 3 & 8 \\ \hline & 2 & 1 & 9 \end{array}$$

Analogamente para

$$\begin{array}{cccccc} & 2 & {}^{5}\cancel{6} & {}^{1}7 & {}^{8}\cancel{9} & {}^{1}7 \\ - & & 3 & 8 & 8 & 8 \\ \hline & 2 & 2 & 9 & 0 & 9 \end{array}$$

Exemplo 1.14. Subtração em outras bases:

$$\begin{array}{cccc} & ({}^{1}\cancel{2} & {}^{1}1 & 2)_3 \\ - & (& 2 & 2)_3 \\ \hline & (1 & 2 & 0)_3 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} & (3 & {}^{3}\cancel{4} & {}^{1}5 & 7)_8 \\ - & (& 3 & 6 & 2)_8 \\ \hline & (3 & 0 & 7 & 5)_8 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} & ({}^{8}\cancel{9} & {}^{14}\cancel{5} & {}^{1}7)_{16} \\ - & (& A & 9)_{16} \\ \hline & (8 & A & E)_{16} \end{array}$$

Como na adição, o algoritmo da subtração é válido para os números racionais.

Exemplo 1.15. 33,5 - 5,54

$$33,5 - 5,54 = (3 \times 10^1 + 3 \times 10^0 + 5 \times 10^{-1}) - (5 \times 10^0 + 5 \times 10^{-1} + 4 \times 10^{-2})$$
$$= 3 \times 10^1 + (3 - 5) \times 10^0 + (5 - 5) \times 10^{-1} + (-4) \times 10^{-2}$$
$$= 3 \times 10^1 + (-2) \times 10^0 + 0 \times 10^{-1} + (-4) \times 10^{-2}$$
$$= 3 \times 10^1 + (-2) \times 10^0 + (1 - 1) \times 10^{-1} + (-4) \times 10^{-2}$$
$$= 3 \times 10^1 + (-2) \times 10^0 + (-1) \times 10^{-1} + (10 - 4) \times 10^{-2}$$
$$= 3 \times 10^1 + (-2 + 1 - 1) \times 10^0 + (-1) \times 10^{-1} + 6 \times 10^{-2}$$
$$= 3 \times 10^1 + (-2 - 1) \times 10^0 + (10 - 1) \times 10^{-1} + 6 \times 10^{-2}$$
$$= 3 \times 10^1 + (-3) \times 10^0 + 9 \times 10^{-1} + 6 \times 10^{-2}$$
$$= (3 + 1 - 1) \times 10^1 + (-3) \times 10^0 + 9 \times 10^{-1} + 6 \times 10^{-2}$$
$$= 2 \times 10^1 + (10 - 3) \times 10^0 + 9 \times 10^{-1} + 6 \times 10^{-2}$$
$$= 2 \times 10^1 + 7 \times 10^0 + 9 \times 10^{-1} + 6 \times 10^{-2} = 27,96$$

No cálculo da representação reduzida, completamos com zero as ordens após a vírgula para igualar a quantidade de casas e proceder como nos números naturais.

Exemplo 1.16.
$$\begin{array}{cccc} & {}^{2}\cancel{3} & {}^{12}\cancel{3}, & {}^{14}\cancel{5} & {}^{1}0 \\ - & & 5, & 5 & 4 \\ \hline & 2 & 7, & 9 & 6 \end{array}$$

Na subtração, percebe-se que colocar os números de mesma ordem na mesma coluna vertical e emprestar para ordem inferior quando necessário é o mesmo que subtrair os coeficientes dos termos de mesmo índice, fazendo uma mudança de unidade se todos os coeficientes não possuírem o mesmo sinal.

1.2.3 ALGORITMO PARA A MULTIPLICAÇÃO

A multiplicação é um caso especial da adição, em que são somadas parcelas iguais. O método mais básico para multiplicar 257 por 3 é fazer a adição $257 + 257 + 257 = 771$. Mas, esse método não é prático para se usar com números maiores, por exemplo, 257×37. Por isso existem alguns algoritmos de multiplicação.

O produto de dois números na forma $x = a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + ... + a_1 b^1 + a_0 b^0$ e $y = c_m b^m + c_{m-1} b^{m-1} + ... + c_1 b^1 + c_0 b^0$ é uma adição de termos do tipo $a_i c_j b^{i+j}$.

$$x \times y = (a_n b^n + ... + a_0 b^0) \times (c_m b^m + ... + c_0 b^0)$$

Aplicando distributiva, temos:

$$= (a_n c_m b^{n+m}) + ... + (a_n c_0 b^{n+0}) + ... + (a_0 c_m b^{0+m}) + ... + (a_0 c_0 b^{0+0})$$

$$= (a_n c_m b^{n+m}) + ... + (a_n c_0 b^0) + ... + (a_0 c_m b^m) + ... + (a_0 c_0 b^0)$$

Caso o produto entre dois coeficientes seja maior que b, devemos fazer uma transformação de unidades imediatamente superior, conforme feito na adição.

Exemplo 1.17. Multiplicação

- $257 \times 37 = (2 \times 10^2 + 5 \times 10^1 + 7 \times 10^0) \times (3 \times 10^1 + 7 \times 10^0)$
  $= (2 \times 3 \times 10^{(2+1)}) + (2 \times 7 \times 10^{(2+0)}) + (5 \times 3 \times 10^{(1+1)}) + (5 \times 7 \times 10^{(1+0)}) + (7 \times 3 \times 10^{(0+1)}) + (7 \times 7 \times 10^{(0+0)})$
  $= (6 \times 10^3) + (14 \times 10^2) + (15 \times 10^2) + (35 \times 10^1) + (21 \times 10^1) + (49 \times 10^0)$
  $= (6 \times 10^3) + (29 \times 10^2) + (56 \times 10^1) + (49 \times 10^0)$
  $= (6 \times 10^3) + [(2 \times 10^1 + 9) \times 10^2] + [(5 \times 10^1 + 6) \times 10^1] + [(4 \times 10^1 + 9) \times 10^0]$
  $= (6 \times 10^3) + (2 \times 10^3) + (9 \times 10^2) + (5 \times 10^2) + (6 \times 10^1) + (4 \times 10^1) + (9 \times 10^0)$
  $= 8 \times 10^3 + 14 \times 10^2 + 10 \times 10^1 + 9 \times 10^0$
  $= 8 \times 10^3 + (10 + 4) \times 10^2 + (10 + 0) \times 10^1 + 9 \times 10^0$
  $= 8 \times 10^3 + 10^3 + 4 \times 10^2 + 10^2 + 0 \times 10^1 + 9 \times 10^0$
  $= (8 + 1) \times 10^3 + (4 + 1) \times 10^2 + 0 \times 10^1 + 9 \times 10^0$
  $= 9 \times 10^3 + 5 \times 10^2 + 0 \times 10^1 + 9 \times 10^0 = 9509$

- $(212)_3 \times (2)_3 = (2 \times 3^2 + 1 \times 3^1 + 2 \times 3^0) \times (2 \times 3^0)$
  $= (2 \times 2 \times 3^{(2+0)}) + (1 \times 2 \times 3^{(1+0)}) + (2 \times 2 \times 3^{(0+0)})$
  $= (11 \times 3^2) + (2 \times 3^1) + (11 \times 3^0)$
  $= [(1 \times 3^1 + 1) \times 3^2] + (2 \times 3^1) + [(1 \times 3^1 + 1) \times 3^0]$
  $= 1 \times 3^3 + 1 \times 3^2 + 2 \times 3^1 + 1 \times 3^1 + 1 \times 3^0$
  $= 1 \times 3^3 + 1 \times 3^2 + 10 \times 3^1 + 1 \times 3^0$
  $= 1 \times 3^3 + 1 \times 3^2 + [(1 \times 3^1 + 0) \times 3^1] + 1 \times 3^0$
  $= 1 \times 3^3 + (1 + 1) \times 3^2 + 0 \times 3^1 + 1 \times 3^0$
  $= 1 \times 3^3 + 2 \times 3^2 + 0 \times 3^1 + 1 \times 3^0 = (1201)_3$

- $212 \times 10 = (2 \times 10^2 + 1 \times 10^1 + 2 \times 10^0) \times (1 \times 10^1 + 0 \times 10^0)$
  $= (2 \times 1 \times 10^{(2+1)}) + (2 \times 0 \times 10^{(2+0)}) + (1 \times 1 \times 10^{(1+1)}) + (1 \times 0 \times 10^{(1+0)}) + (2 \times 1 \times 10^{(0+1)}) + (2 \times 0 \times 10^{(0+0)})$
  $= (2 \times 10^3) + (0 \times 10^2) + (1 \times 10^2) + (0 \times 10^1) + (2 \times 10^1) + (0 \times 10^0)$
  $= 2 \times 10^3 + [(0 + 1) \times 10^2] + [(0 + 2) \times 10^1] + 0 \times 10^0$
  $= 2 \times 10^3 + 1 \times 10^2 + 2 \times 10^1 + 0 \times 10^0 = 2120$

- $(212)_3 \times (10)_3 = (2 \times 3^2 + 1 \times 3^1 + 2 \times 3^0) \times (1 \times 3^1 + 0 \times 3^0)$
  $= (2 \times 1 \times 3^{(2+1)}) + (2 \times 0 \times 3^{(2+0)}) + (1 \times 1 \times 3^{(1+1)}) + (1 \times 0 \times 3^{(1+0)}) + (2 \times 1 \times 3^{(0+1)}) + (2 \times 0 \times 3^{(0+0)})$
  $= (2 \times 3^3) + (0 \times 3^2) + (1 \times 3^2) + (0 \times 3^1) + (2 \times 3^1) + (0 \times 3^0)$

$$= 2 \times 3^3 + [(0+1) \times 3^2] + [(0+2) \times 3^1] + 0 \times 3^0$$
$$= 2 \times 3^3 + 1 \times 3^2 + 2 \times 3^1 + 0 \times 3^0 = (2120)_3$$

Veremos, a seguir, o algoritmo da multiplicação na representação reduzida, que é mais utilizado atualmente.

Para multiplicar um número $x = (a_n...a_0)_b$ qualquer, por um número de um algarismo $y = (c_0)_b$, usa-se o fato da multiplicação ser a soma de parcelas iguais, mas observa-se que não há necessidade de escrever o número x y vezes, basta escrever x uma vez e abaixo dele colocar o número y. A seguir, começamos a multiplicar y por cada algarismos de x da menor para a maior ordem. Quando o resultado da multiplicação for maior ou igual a $(10)_b$, o algarismo à esquerda será transportado para a coluna imediatamente superior para que seja somado com o resultado da multiplicação de y pelo número da próxima ordem.

Exemplo 1.18. $257 \times 3 =$

Usando o fato da multiplicação ser a soma de parcelas iguais, observe que não há necessidade de escrever 257 três vezes. Basta escreve-lo uma vez e abaixo dele colocar o número 3. A seguir implementa-se o cálculo como se estivesse fazendo a soma. Tomamos o dígito 7 de 257 e calculando $3 \times 7 = 7 + 7 + 7 = 21$. Escrevemos 1 na primeira coluna e reservando o 2 na coluna seguinte que é a de ordem imediatamente superior. Tomamos o dígito 5 de 257 e calculando $3 \times 5 = 5 + 5 + 5 = 15$, o resultado somamos com o 2 que reservamos da ordem imediatamente inferior, $15 + 2 = 17$. Escrevemos 7 na coluna dessa ordem e reservando o 1 na coluna imediatamente superior. Tomamos o dígito 2 de 257 e calculando $3 \times 2 = 2 + 2 + 2 = 6$, o resultado somamos com o 1 que reservamos da ordem imediatamente inferior, $6 + 1 = 7$, então obtemos:

$$\begin{array}{rrrr} & {}^{1}2 & {}^{2}5 & 7 \\ \text{x} & & & 3 \\ \hline & 7 & 7 & 1 \end{array}$$

Ao realizarmos esse cálculo, percebemos como facilita termos na memória os produtos de dois algarismos quaisquer (tabuada da multiplicação).

No exemplo 1.17 vimos que $212 \times 10 = 2120$ e $(212)_3 \times (10)_3 = (2120)_3$, e a proposição abaixo garante que se continuássemos a fazer mais exemplos com potências de 10 teríamos: $212 \times 100 = 21200$, $(212)_3 \times (100)_3 = (21200)_3$.

Proposição 1.19. *Se multiplicamos $[(10)_b]^m$ por $x = a_n b^n + ... + a_1 b^1 + a_0$, cada dígito a_i é deslocado m casas para a esquerda, e as m primeiras casas a direita são ocupadas por zero.*

Demonstração.

Seja $[(10)_b]^m \times x_b = (1 \underbrace{0...0}_{m\ zeros})_b \times (a_n a_{n-1}...a_0)_b$

Pelo Teorema 1.1:

$[(10)_b]^m \times x_b = (1b^m + 0b^{m-1} + ... + 0b^0) \times (a_n b^n + a_{n-1}b^{n-1} + ... + a_0 b^0)$

Pelo algoritmo da multiplicação:

$[(10)_b]^m \times x_b = (1a_n b^{m+n}) + (1a_{n-1}b^{m+n-1}) + ... + (1a_0 b^{m+0}) + (0a_n b^{m-1+n}) + (0a_{n-1}b^{m-1+n-1}) + ... + (0a_0 b^{m-1+0}) + ... + (0a_n b^{0+n}) + (0a_{n-1}b^{0+n-1}) + ... + (0a_0 b^{0+0})$

$= (a_n b^{m+n}) + (a_{n-1}b^{m+n-1}) + ... + (a_0 b^m) + (0b^{m-1+n}) + (0b^{m+n-2}) + ... + (0b^{m-1}) + ... + (0b^n) + (0b^{n-1}) + ... + (0b^0)$

$= (a_n b^{m+n}) + (a_{n-1}b^{m+n-1}) + ... + (a_0 b^m) + (0b^{m+n-1}) + (0b^{m+n-2}) + ... + (0b^0)$

$= (\underbrace{a_n\ a_{n-1}\ ...\ a_0}_{algarismos\ de\ x}\underbrace{0\ 0\ ...\ 0\ 0}_{m\ zeros})_b$

□

Além disso, podemos representar x, como:

$$(a_n a_{n-1}...a_1 a_0)_b = a_n \times b^n + a_{n-1} \times b^{n-1} + ... + a_1 \times b^1 + a_0 \times b^0$$

$$= a_n \times {(10)_b}^n + a_{n-1} \times {(10)_b}^{n-1} + ... + a_1 \times {(10)_b}^1 + a_0 \times {(10)_b}^0$$

$$= (a_n \underbrace{0\ ...\ 0}_{n\ zeros})_b + (a_{n-1} \underbrace{0\ ...\ 0}_{n-1\ zeros})_b + ... + (a_1 0)_b + (a_0)_b$$

Exemplo 1.20.

- $9537 = 9000 + 500 + 30 + 7$
- $(6534)_8 = (6000)_8 + (500)_8 + (30)_8 + (4)_8$
- $(A5D4)_{16} = (A000)_{16} + (500)_{16} + (D0)_{16} + (4)_{16}$
- $(22121)_3 = (20000)_3 + (2000)_3 + (100)_3 + (20)_3 + (1)_3$

Agora, usando o cálculo para números de um dígito, a proposição e a representação acima, temos que para multiplicar dois números naturais $x = a_n b^n + a_{n-1}b^{n-1} + ... + a_1 b^1 + a_0 b^0$ e $y = c_m b^m + c_{m-1}b^{m-1} + ... + c_1 b^1 + c_0 b^0$, basta:

- Escrever x uma vez e abaixo dele colocar o número y;
- Começar a multiplicar o algarismo da menor ordem de y por cada algarismo de x - da menor para a maior ordem - procedendo como o cálculo para números de um dígito;
- Passar para o próximo algarismo de y, c_1, mas como ele está na ordem imediatamente superior, se multiplica cada algarismo de x por $c_1 0$, que pela proposição será o mesmo que $c_1 \times x$ mais um zero na última casa;

- Passar para o próximo algarismo de y, c_2, mas como ele está na ordem imediatamente superior, se multiplica cada algarismo de x por $a_2 00$, que pela proposição será do mesmo que $c_2 \times x$ mais dois zeros na últimas casas, assim sucessivamente;
- Cada resultado deve ser colocado um abaixo de outro, deixando os algarismos de ordens iguais no mesmo alinhamento vertical;
- Para terminar basta fazer a soma de todos os resultados obtidos.

Exemplo 1.21. $257 \times 33 =$

$$\begin{array}{cccc} & {}^{1}2 & {}^{2}5 & 7 \\ \text{x} & & 3 & 3 \\ \hline & 7 & 7 & 1 \\ {}^{1}7 & 7 & 1 & 0 \\ \hline 8 & 4 & 8 & 1 \end{array}$$

$$\begin{aligned} &= 257 \times (30 + 3) \\ &= (257 \times 30) + (257 \times 3) \\ &= 7710 + 771 \\ &= 8481 \end{aligned}$$

Exemplo 1.22. Multiplicação em outras bases:

$$\begin{array}{cccc} & ({}^{1}2 & {}^{1}1 & 2)_3 \\ \text{x} & (& & 2)_3 \\ \hline (1 & 2 & 0 & 1)_3 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} & & ({}^{2}2 & {}^{2}5 & 7)_8 \\ & \text{x} & (& 3 & 3)_8 \\ \hline (& 1 & 0 & 1 & 5)_8 \\ (1 & 0 & 1 & 5 & 0)_8 \\ \hline (1 & 1 & 1 & 6 & 5)_8 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} & (2 & {}^{1}2 & 7\,)_{16} \\ \text{x} & (& 3 & 3\,)_{16} \\ \hline (& 6 & 7 & 5\,)_{16} \\ (6 & 7 & 5 & 0)_{16} \\ \hline (\,6 & D & C & 5)_{16} \end{array}$$

Esse algoritmo é válido para os números racionais.

Exemplo 1.23. $33,5 \times 5,54$
$= (3 \times 10^1 + 3 \times 10^0 + 5 \times 10^{-1}) \times (5 \times 10^0 + 5 \times 10^{-1} + 4 \times 10^{-2})$
$= (3 \times 5 \times 10^{(1+0)}) + (3 \times 5 \times 10^{(1-1)}) + (3 \times 4 \times 10^{(1-2)}) + (3 \times 5 \times 10^{(0+0)}) + (3 \times 5 \times 10^{(0-1)}) + (3 \times 4 \times 10^{(0-2)}) + (5 \times 5 \times 10^{(-1+0)}) + (5 \times 5 \times 10^{(-1-1)}) + (5 \times 4 \times 10^{(-1-2)})$

$= (15 \times 10^1) + (15 \times 10^0) + (12 \times 10^{-1}) + (15 \times 10^0) + (15 \times 10^{-1}) + (12 \times 10^{-2}) + (25 \times 10^{-1}) + (25 \times 10^{-2}) + (20 \times 10^{-3})$
$= (15 \times 10^1) + [(15 + 15) \times 10^0] + [(12 + 15 + 25) \times 10^{-1}] + [(12 + 25) \times 10^{-2}] + (20 \times 10^{-3})$
$= (15 \times 10^1) + (30 \times 10^0) + (52 \times 10^{-1}) + (37 \times 10^{-2}) + (20 \times 10^{-3})$
$= [(1 \times 10^1 + 5) \times 10^1] + [(3 \times 10^1 + 0) \times 10^0] + [(5 \times 10^1 + 2) \times 10^{-1})] + [(3 \times 10^1 + 7) \times 10^{-2}] + [(2 \times 10^1 + 0) \times 10^{-3}]$
$= (1 \times 10^2) + (5 \times 10^1) + (3 \times 10^1) + (0 \times 10^0) + (5 \times 10^0) + (2 \times 10^{-1}) + (3 \times 10^{-1}) + (7 \times 10^{-2}) + (2 \times 10^{-2}) + (0 \times 10^{-3})$
$= (1 \times 10^2) + [(5 + 3) \times 10^1] + [(0 + 5) \times 10^0] + [(2 + 3) \times 10^{-1}] + [(7 + 2) \times 10^{-2}] + (0 \times 10^{-3})$
$= 1 \times 10^2 + 8 \times 10^1 + 5 \times 10^0 + 5 \times 10^{-1} + 9 \times 10^{-2} + 0 \times 10^{-3} = 185,590 = 185,59$

Para usarmos a representação reduzida dos números, multiplicamos os dois números com vírgula como se fossem naturais. Colocamos a vírgula no resultado de modo que o número de casas após a vírgula do produto (resultado da multiplicação) seja igual à soma dos números de casas após a vírgula do fatores (números que estão sendo multiplicados).

Exemplo 1.24.

$$\begin{array}{cccccc}
 & & & {}^{1}3 & {}^{2}3, & 5 \\
\text{x} & & & 5, & 5 & 4 \\
\hline
 & & {}^{1}1 & 3 & 4 & 0 \\
 & {}^{1}1 & 6 & 7 & 5 & 0 \\
1 & 6 & 7 & 5 & 0 & 0 \\
\hline
1 & 8 & 5, & 5 & 9 & 0
\end{array}$$

Para multiplicar números na forma reduzida, primeiro encontramos os termos do tipo $a_i c_0 b^{i+0}$ e escrevemos na primeira linha, depois os termos de $a_i c_1 b^{i+1}$ e escrevemos na próxima linha, e assim sucessivamente. Então, os números de mesma ordem estarão na mesma coluna vertical e somamos como é feito na adição. Logo, é o mesmo que fazer adição de termos do tipo $a_i c_j b^{i+j}$.

Para os números racionais somamos as casas após a vírgula para definirmos onde fica a vírgula no produto, pois é o que ocorre quando calculamos b^{i+j}.

De fato, suponha que vamos multiplicar $x = (a_n a_{n-1} ... a_1 a_0, a_{-1} a_{-2} ... a_{-\ell})_b$ e $y = (c_m c_{m-1} ... c_1 c_0, c_{-1} c_{-2} ... c_{-k})_b$. Temos:

$$x \times y = (a_n b^n + ... + a_0 b^0 + a_{-1} b^{-1} + ... + a_{-\ell} b^{-\ell}) \times (c_m b^m + ... + c_0 b^0 + c_{-1} b^{-1} + ... + c_{-k} b^{-k})$$

$$= a_n c_m b^{n+m} + ... + a_{-\ell} c_{-k} b^{-\ell-k},$$

de onde podemos concluir que o produto deverá ter $\ell + k$ casas decimais.

1.2.4 ALGORITMO PARA A DIVISÃO

Segundo Paterlini (2012), a divisão se baseia em dois conceitos: repartir e comparar. Assim, para dividir a por b, com $b \leq a$, podemos usar pelo menos duas maneiras.

Usando o conceito repartir temos que dividir igualmente a objetos para b grupos. Para isso, podemos fazer retiradas de b objetos e entregar um objeto para cada grupo, assim a cada retirada temos: $a - b$, $a - 2b$, $a - 3b$, ... , até não haver objetos para todos os grupos. Logo, quando o conceito é repartir usamos a ideia de subtrações sucessivas. Calculando $a - qb$, com $q = 1, 2, 3, ...$, sendo que os valores de $a - qb$ diminuem à medida que q cresce. Assim, devido ao algoritmo da divisão existe, o maior q tal que a subtração $a - qb \in \mathbb{N}$ e $a - (q + 1)b \notin \mathbb{N}$. Se existe q tal que $a = qb$, a divisão é exata. Caso contrário, chamando $r = a - qb$, teremos $a = qb + r$.

Quando o conceito é comparar queremos saber quantas vezes, no máximo, um número "cabe" no outro. Assim, a segunda maneira consiste em calcular $1b, 2b, 3b, ...$, até atingir o valor almejado ou ultrapassá-lo. Se o valor a for atingido, significa que encontramos q tal que $a = qb$, e a divisão é exata. Se o valor a não for atingido, teremos qb tal que $qb < a < (q + 1)b$. Chamando $r = a - qb$ teremos $a = qb + r$.

Para efetuarmos uma divisão, o processo é idêntico em qualquer base. Assim, podemos restringir a base 10 e enunciar o Algoritmo da Divisão Euclidiana.

Teorema 1.2 (ALGORITMO DA DIVISÃO EUCLIDIANA)**.** *Sejam a e b dois números naturais. Então, existem dois únicos números naturais q e r tais que $a = bq + r$, com $0 \leq r < b$.*

Demonstração. Primeiro verificaremos a existência de q e r.

Se $a < b$, basta tomar $q = 0$ e $r = a$, temos $a = bq + r$, com $r < b$.

Supondo $b \leq a$. Fazemos subtrações sucessivas $a - b$, $a - 2b$, $a - 3b$, ... , até encontramos q, tal que:

$$a - qb \geq 0 \qquad \text{e} \qquad a - (q + 1)b < 0.$$

Seja $r = a - qb$, como $a - qb \geq 0$, temos que r é um número natural.

Além disso,

$a - (q + 1)b < 0 \Longrightarrow a - qb - b < 0 \Longrightarrow a - qb < b \Longrightarrow r < b.$

Logo, temos a existência de q e r.

Agora proveremos a unicidade.

Sejam q, r, p e s naturais tais que: $a = bq + r$, com $r < b$ e $a = bp + s$, com $s < b$. Sem perda de generalidade podemos supor $q \geq p$.

Subtraindo a segunda da primeira equação, temos:

$a - a = bq + r - (bp + s) \quad \Longrightarrow \quad 0 = bq - bp + r - s \quad \Longrightarrow \quad s - r = b(q - p)$

Se $q > p$, teremos $q - p \geq 1$ e $s - r = b(q - p) \geq b$.

Mas $s \geq r$, portanto $s - r \leq s < b$, o que é uma contradição.

Segue que $q = p$.

De $s - r = b(q - p)$ obtemos $s - r = 0$, logo $s = r$.

Logo, temos a unicidade de q e r. □

Vimos na demostração do teorema 1.2 que a unicidade de q e r depende da condição $r < b$. Logo, é possível dividir a por b e obter números naturais q e r não necessariamente com $r < b$, mas neste caso a divisão não é denominada euclidiana.

Temos que o q é denominado quociente e o r é resto da divisão de a por b, além disso a é o dividendo e b o divisor.

Para fazer o estudo do algoritmo mais utilizado atualmente vamos considerar alguns exemplos.

Exemplo 1.25. Iremos calcular $33 \div 6$ utilizando duas ideias:

- Iniciaremos dividindo 33 por 6, utilizando do método de subtrações sucessivas:

$33 - 6 = 27$
$27 - 6 = 21$
$21 - 6 = 15$
$15 - 6 = 9$
$9 - 6 = 3.$
Como foram feitas 5 subtrações, então 5 é o quociente.
Como sobrou 3, então o resto é 3.
Assim, $33 = 5 \times 6 + 3$.

Representando com outro formato:

$$\begin{array}{r|l} 33 & 6 \\ \cline{2-2} -6 & \ \ 1 \\ \hline 27 & \\ -6 & \ \ 1 \\ \hline 21 & \\ -6 & +1 \\ \hline 15 & \\ -6 & \ \ 1 \\ \hline 9 & \\ -6 & \ \ 1 \\ \hline 3 & \overline{\ \ 5} \end{array}$$

Este método se utiliza de divisões não euclidianas.

- Usando além da ideia das subtrações sucessivas, a ideia de quantas vezes, no máximo, um número “cabe” no outro, podemos diminuir nossa contas. Então, temos que 6 cabe 5 vezes no 33, pois $5 \times 6 = 30$, e sobram 3. Esta é uma divisão euclidiana e que podemos representá-la:

$$\begin{array}{r|l} 33 & 6 \\ \cline{2-2} -\,30 & 5 \\ \cline{1-1} 3 & \end{array}$$

Podemos perceber que não seria nada conveniente dividir números maiores como foi feito na primeira maneira do exemplo anterior, por isso, existem algoritmos mais compactos. O algoritmo mais usado atualmente utiliza as tábuas de multiplicação, subtrações sucessivas, a ideia de quantas vezes um número "cabe" no outro e a multiplicação por múltiplos de 10. Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 1.26. Agora iremos calcular $771 \div 3$:

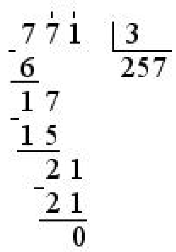
- Primeira forma que deixa em evidência a multiplicação por múltiplos de 10:
  - Primeiro analisamos que $100 \times 3 = 300$, $200 \times 3 = 600$, $300 \times 3 = 900$, então usamos o 200 no quociente e subtraímos 600 de 771, que é 171.
  - Então, analisamos $10 \times 3 = 30$, $20 \times 3 = 60$, $30 \times 3 = 90$, $40 \times 3 = 120$, $50 \times 3 = 150$, $60 \times 3 = 180$, e, usamos o 50 no quociente e subtraímos 150 de 171, que é 21.
  - Para o 21, podemos calcular até chegar nele ou usar a memorização da tabuada para encontrarmos que $7 \times 3 = 21$ então usamos o 7 no quociente e subtraímos 21 de 21, então o resto é 0.
  - Então, o quociente será a soma dos quocientes encontrados, ou seja, 257.

$$\begin{array}{r|r} 771 & 3 \\ \cline{2-2} -\,600 & 200 \\ \cline{1-1} 171 & +\;50 \\ -\,150 & 7 \\ \cline{1-2} 021 & 257 \\ -\,21 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

Observe que: $(200 \times 3) + (50 \times 3) + (7 \times 3) = (200 + 50 + 7) \times 3 = 257 \times 3 + 0 = 771$.

- A forma acima ajuda a compreender o algoritmo mais utilizado atualmente. Vamos resolver novamente a divisão acima, utilizando esse algoritmo:
  - Começamos com o algarismo mais à esquerda de 771, analisando quantas vezes 3 'cabe' no 7, ou seja, para que valor q, $q \times 3$ se aproxima mais do 7. Temos que $2 \times 3 = 6$, então colocamos o 2 como algarismo mais significativo no quociente e fazemos a subtração $7 - 6 = 1$.

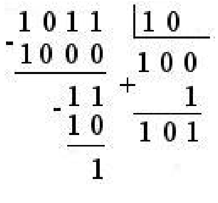
- Passamos para a ordem imediatamente inferior de 771, mas precisamos considerar o resto da etapa anterior, por isso ’baixamos’ esse segundo algarismo e consideramos 17 para a próxima etapa (pois o 1 está na unidade imediatamente anterior ao 7, logo temos $1 \times 10 + 7$).
- Agora analisamos para que valor q, $q \times 3$ se aproxima mais do 17. Temos $5 \times 3 = 15$, então colocamos o 5 como próximo algarismo no quociente e fazemos a subtração $17 - 15 = 2$.
- Passamos para a ordem imediatamente inferior de 771, considerando o resto da etapa anterior, por isso ’baixamos’ o 1 e consideramos 21 para a próxima etapa.
- Agora analisamos para qual valor q, $q \times 3$ se aproxima mais do 21. Temos $7 \times 3 = 21$, então colocamos o 7 como próximo algarismo no quociente e fazemos a subtração $21 - 21 = 0$.



Exemplo 1.27. Agora iremos calcular $1011 \div 10$:

- Primeira forma que deixa em evidência a multiplicação por múltiplos de 10:
  - Primeiro analisamos que $100 \times 10 = 1000$, então usamos o 100 no quociente e subtraímos 1000 de 1011, e temos o resto 11.
  - Então, analisamos $1 \times 10 = 10$, $2 \times 10 = 20$, então usamos 1 no quociente e subtraímos 10 de 11, que resulta em resto 1.
  - Então, o quociente será a soma dos quocientes encontrados, ou seja, 101.

    Observamos que: $(100 \times 10) + (1 \times 10) + 1 = (100 + 1) \times 10 + 1 = 101 \times 10 + 1 = 1011$.



- Vamos resolver novamente a divisão acima, utilizando o algoritmo habitual:

– Começaríamos com o algarismo mais à esquerda de 1011, analisando quantas vezes 10 "cabe"no 1, ou seja, para que valor q, $q \times 10$ se aproxima mais do 1. Temos que $0 \times 10 = 0$ e $1 \times 10 = 10$ então colocamos o 0 como algarismo mais significativo no quociente e fazemos a subtração $1 - 0 = 1$.

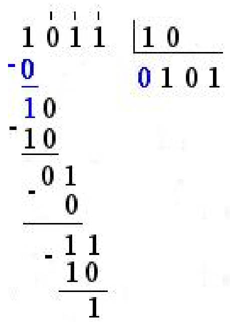
– Passamos para a ordem imediatamente inferior de 1011, considerando o resto 1 da etapa anterior, e consideramos 10 para a próxima etapa (pois o 1 está na unidade imediatamente anterior ao 0, logo temos $1 \times 10 + 0$).

– Agora analisamos para que valor q, $q \times 10$ se aproxima mais do 10. Temos que $1 \times 10 = 10$, então colocamos o 1 no quociente e fazemos a subtração $10 - 10 = 0$.

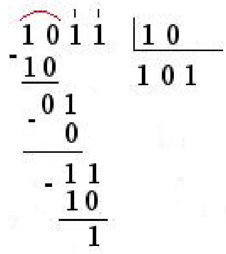
– Passamos para a ordem imediatamente inferior de 1011, 'baixamos' o 1. E, analisamos para que valor q, $q \times 10$ se aproxime mais do 1. Temos que $0 \times 10 = 0$ e $1 \times 10 = 10$, então colocamos o 0 como próximo algarismo no quociente e fazemos a subtração $1 - 0 = 1$.

– Passamos para a ordem imediatamente inferior de 1011, mas precisamos considerar o 1 do resto da etapa anterior, por isso 'baixamos' o 1, e teremos 11 para a próxima etapa (pois o 1 está na unidade imediatamente anterior ao 1, logo temos $1 \times 10 + 1$).

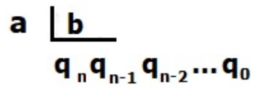
– Agora analisamos para que valor q, $q \times 10$ se aproxime mais do 11. Temos que $1 \times 10 = 10$, então colocamos o 1 como próximo algarismo no quociente e fazemos a subtração $11 - 10 = 1$.



Como nada muda com o 0 à esquerda do algarismo mais significativo do número, o primeiro passo pode ser ocultado. Quando esse primeiro algarismo é menor que o divisor vamos considerando os números formados pelo primeiro algarismo com os algarismos das unidades imediatamente inferiores até que esse número seja maior que o divisor. No caso, temos que $10 \times 1 = 10$, e temos:



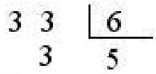
Assim, para calcular a dividido por b, com $b < a$:

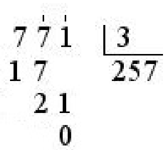


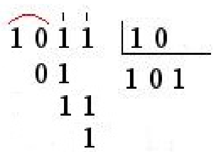
- Começamos com o algarismo mais à esquerda de a, analisando quantas vezes b 'cabe' nesse algarismo, ou seja, para qual valor de q_n temos $q_n \times b$ se aproxime mais do primeiro algarismos de a. Se esse primeiro algarismo é menor que b, consideramos o número formado pelo primeiro algarismo com os algarismos das unidades imediatamente inferiores de a, considerando quantos algarismo forem necessários para que esse número seja maior que b.
- Após analisarmos para que valor q_n, $q_n \times b$ se aproxima mais do primeiro algarismo de a ou do número formado, colocamos o q_n como primeiro algarismo do quociente e fazemos a subtração do primeiro algarismo de a ou número formado com $q_n \times b$.
- Passamos para a próxima ordem imediatamente inferior de a, 'baixando' esse próximo algarismo e consideramos o resto da etapa anterior e esse algarismo baixado um número. Então fazemos o mesmo processo de analisarmos para que valor q_{n-1}, $q_{n-1} \times b$ se aproxima mais do número formado, colocando o q_{n-1} como próximo algarismo do quociente e fazemos a subtração do primeiro algarismo de a ou número formado com $q_{n-1} \times b$. Assim sucessivamente, até que o resto seja menor que b ou igual a 0.

Podemos perceber que se memorizarmos algumas tábuas de multiplicação, facilitará nossos cálculos.

Além da forma longa do algoritmo da divisão que desmembra as operações de multiplicação e subtração, há a forma curta. Esta é a mais utilizada e as operações de multiplicação e subtração são realizadas simultaneamente. Abaixo estão os exemplos anteriores escritos na forma curta:







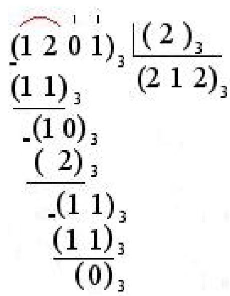
Exemplo 1.28. Divisão em outras bases:

- $(1201)_3 \div (2)_3 =$

  – Como $(1)_3$ é menor que $(2)_3$, iremos considerar $(12)_3$ para analisar quantas vezes $(2)_3$ 'cabe' no $(12)_3$. Como $(2)_3 \times (2)_3 = (11)_3$ e $(10)_3 \times (2)_3 = (20)_3$ então colocamos o $(2)_3$ como algarismo mais significativo no quociente e fazemos a subtração $(12)_3 - (11)_3 = (1)_3$.

  – Passamos para a ordem imediatamente inferior, considerando o resto da etapa anterior, e analisamos para que valor q, $q \times (2)_3$ se aproxima mais do $(10)_3$. Temos que $(1)_3 \times (2)_3 = (2)_3$ e $(2)_3 \times (2)_3 = (11)_3$, então colocamos o $(1)_3$ no quociente e fazemos a subtração $(10)_3 - (2)_3 = (1)_3$.

  – Passamos para a ordem imediatamente inferior, considerando o resto da etapa anterior, e analisamos para que valor q, $q \times (2)_3$ se aproxima mais do $(11)_3$. Temos que $(2)_3 \times (2)_3 = (11)_3$, então colocamos o $(2)_3$ no quociente e fazemos a subtração $(11)_3 - (11)_3 = (0)_3$.

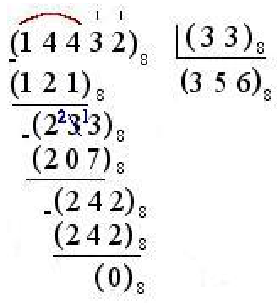


- $(14432)_8 \div (33)_8 =$

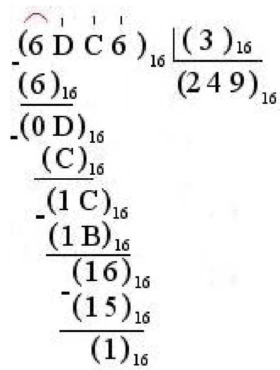
  – Como $(1)_8$ e $(14)_8$ são menores que $(33)_8$, iremos considerar $(144)_8$ para analisar quantas vezes $(33)_8$ 'cabe' no $(144)_8$. Como $(3)_8 \times (33)_8 = (121)_8$ e $(4)_8 \times (33)_8 = (154)_8$, colocamos o $(3)_8$ como algarismo mais significativo no quociente e fazemos a subtração $(144)_8 - (121)_8 = (23)_8$.

  – Passamos para a ordem imediatamente inferior, considerando o resto da etapa anterior, e analisamos para que valor q, $q \times (33)_8$ se aproxima mais do $(233)_8$. Temos que $(5)_8 \times (33)_8 = (207)_8$ e $(6)_8 \times (33)_8 = (242)_8$, então colocamos o $(5)_8$ no quociente e fazemos a subtração $(233)_8 - (207)_8 = (24)_8$.

  – Passamos para a ordem imediatamente inferior, considerando o resto da etapa anterior, e analisamos para que valor q, $q \times (33)_8$ se aproxima mais do $(242)_8$. Temos que $(6)_8 \times (33)_8 = (242)_8$, então colocamos o $(6)_8$ no quociente e fazemos a subtração $(242)_8 - (242)_8 = (0)_8$.



- $(6DC6)_{16} \div (3)_{16} =$
  - Como $(6)_{16}$ é maior que $(3)_{16}$ e $(2)_{16} \times (3)_{16} = (6)_{16}$, colocamos o $(2)_{16}$ como algarismo mais significativo no quociente e fazemos a subtração $(6)_{16} - (6)_{16} = (0)_{16}$.
  - Passamos para a ordem imediatamente inferior, e analisamos para que valor q, $q \times (3)_{16}$ se aproxima mais do $(D)_{16}$. Temos que $(4)_{16} \times (3)_{16} = (C)_{16}$ e $(5)_{16} \times (3)_{16} = (F)_{16}$, então colocamos o $(4)_{16}$ no quociente e fazemos a subtração $(D)_{16} - (C)_{16} = (1)_{16}$.
  - Passamos para a ordem imediatamente inferior, considerando o resto da etapa anterior, e analisamos para que valor q, $q \times (3)_{16}$ se aproxima mais do $(1C)_{16}$. Temos que $(9)_{16} \times (3)_{16} = (1B)_{16}$ e $(A)_{16} \times (3)_{16} = (1E)_{16}$, então colocamos o $(9)_{16}$ no quociente e fazemos a subtração $(1C)_{16} - (1B)_{16} = (1)_{16}$.
  - Passamos para a ordem imediatamente inferior, considerando o resto da etapa anterior, e analisamos para que valor q, $q \times (3)_{16}$ se aproxima mais do $(16)_{16}$. Temos que $(7)_{16} \times (3)_{16} = (15)_{16}$ e $(8)_{16} \times (3)_{16} = (18)_{16}$, então colocamos o $(7)_{16}$ no quociente e fazemos a subtração $(16)_{16} - (15)_{16} = (1)_{16}$.



Em uma divisão de números inteiros temos divisões exata quando o resto é 0 e divisão não exatas quando o resto é diferente de zero. Mas, se estivermos operando com o conjunto dos números racionais, podemos continuar a divisão, e, teremos um número exato ou uma dízima periódica. Sendo dízima periódica o resultado de uma divisão cujo quociente é um número racional que a partir de alguma casa, passa a repetir uma sequência de algarismos infinitamente. Essa sequência de algarismos repetidos é chamada de período.

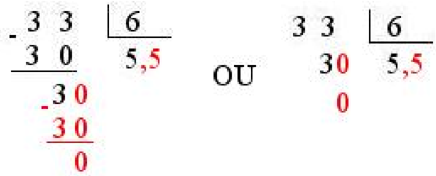
Para continuar a divisão quando o resto for diferente de zero e menor que o divisor, será necessário acrescentar uma vírgula ao quociente e um zero no fim do resto para continuar a divisão. A partir daí, basta realizar a divisão de cada resto que aparecer, acrescentando um zero no resto, até que não haja resto algum ou o resto e quociente se repitam num período. Quando for necessário acrescentar mais de um zero no resto para que ele seja maior que o divisor, será necessário acrescentar um zero para cada zero adicional no quociente.

Ao dividirmos a por b nos números racionais, quando $a < b$ devemos acrescentar 0 como primeiro algarismo no quociente e colocamos uma vírgula, caso contrário esse zero não será o algarismo mais significativo, e acrescentamos um zero ao final do dividendo. Se esse novo dividendo for maior que o divisor procedemos a divisão normalmente, caso contrário, acrescentamos outro zero no quociente e outro no dividendo, e assim sucessivamente até que o novo dividendo seja maior que o divisor e possamos realizar a divisão.

Exemplo 1.29. Divisão com quocientes racionais.

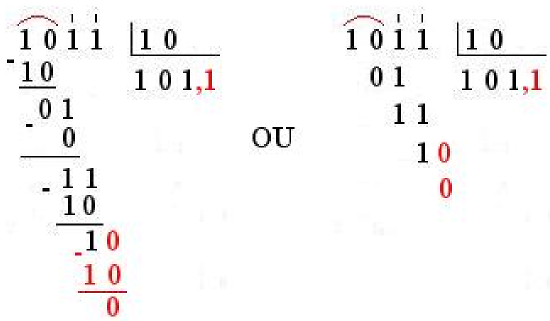
- Vamos realizar novamente a divisão de 33 por 6.

  Essa é uma divisão não exata e deixará resto 3. Nesse caso, acrescentamos uma vírgula ao quociente e um zero ao lado do resto 3, e teremos 30. Como $5 \times 6 = 30$, colocamos 5 no quociente e 0 como novo resto. Temos que $5,5 \times 6 = 33$.



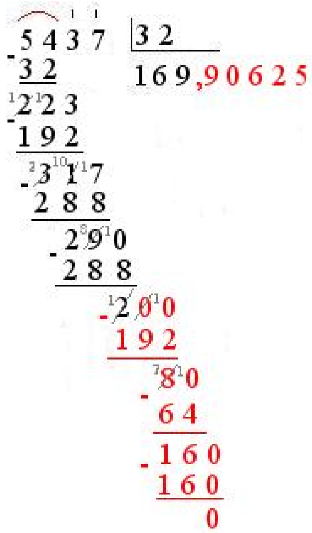
- Vamos realizar novamente a divisão de 1011 por 10.

  Essa é uma divisão não exata e deixará resto 1. Nesse caso, acrescentamos uma vírgula ao quociente e um zero ao lado do resto 1, e teremos 10. Como $1 \times 10 = 10$, colocamos 1 no quociente e 0 como novo resto. Temos que $101,1 \times 10 = 1011$.

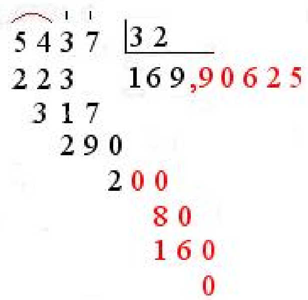


- Vamos realizar a divisão de 5437 por 32.

  Essa é uma divisão não exata e deixará resto 29. Nesse caso, acrescentamos uma vírgula ao quociente e um zero ao lado do resto 29, e teremos 290. Como $9 \times 32 = 288$, colocamos 9 no quociente e 2 como novo resto. Então continuaremos a divisão, pois o resto foi diferente de 0. Como já foi acrescentado uma vírgula no quociente, não colocamos nada nele e colocamos 0 no resto e ficamos com 20, mas 20 é menor que 32, então, precisamos acrescentar mais um 0 no resto para trabalharmos com 200, por isso temos que colocar um zero no quociente também. Como $6 \times 32 = 192$, colocamos 6 no quociente e 8 como novo resto, então continuaremos a divisão, pois o resto foi diferente de 0. Como já foi acrescentado uma vírgula no quociente não colocamos nada nele e colocamos 0 no resto e ficamos com 80. Como $2 \times 32 = 64$, colocamos 2 no quociente e 16 como novo resto. Continuaremos a divisão, pois o resto foi diferente de 0. Como já foi acrescentado uma vírgula no quociente, não colocamos nada nele e colocamos 0 no resto e ficamos com 160. Como $5 \times 32 = 160$, colocamos 5 no quociente e 0 como novo resto.

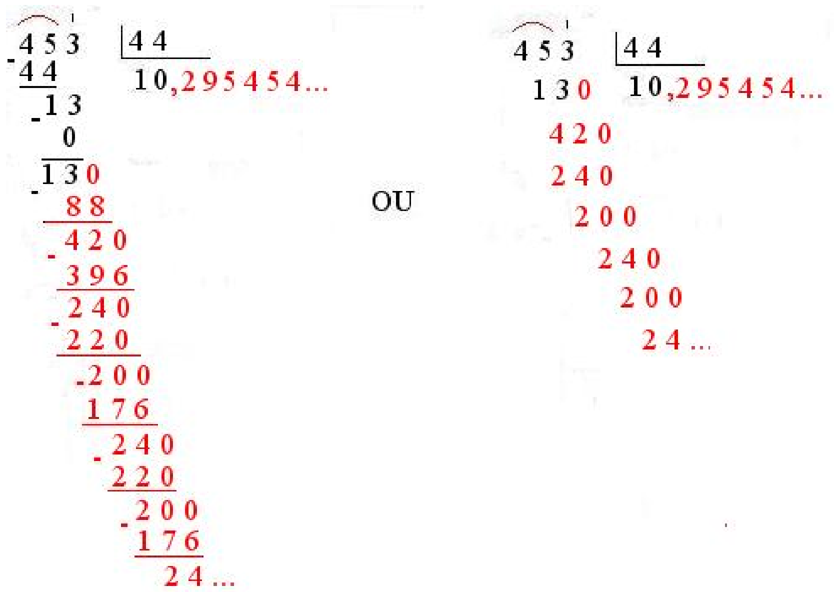


OU



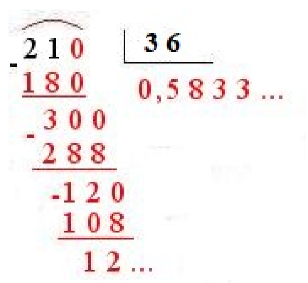
- Vamos realizar a divisão de 453 por 44.

  Como 4 é menor que 44, começamos com 45. Como $1 \times 44 = 44$ colocamos 1 no quociente e teremos 1 de resto. Passamos para a ordem imediatamente inferior 'baixando' o 3 e considerando o resto 1 da etapa anterior, teremos 13 para a próxima etapa, mas como $0 \times 44 = 0$ e $1 \times 44 = 44$, colocamos o 0 como próximo algarismo no quociente e fazemos a subtração $13 - 0 = 13$, e teríamos resto 13. Como estamos trabalhando com números racionais podemos continuar a divisão, nesse caso, acrescentamos uma vírgula ao quociente e um zero ao lado do resto 13, e teremos 130. Como $2 \times 44 = 88$ e $3 \times 44 = 132$, colocamos 2 no quociente e temos 42 como novo resto, então continuaremos a divisão, pois o resto foi diferente de 0. Como já foi acrescentado uma vírgula no quociente, não colocamos nada nele e colocamos 0 no resto e ficamos com 420. Como $9 \times 44 = 396$, colocamos 9 no quociente e 24 como novo resto, assim continuaremos a divisão, pois o resto foi diferente de 0. Como já foi acrescentado uma vírgula no quociente, não colocamos nada nele e colocamos 0 no resto e ficamos com 240. Como $5 \times 44 = 220$, colocamos 5 no quociente e 20 como novo resto, então continuaremos a divisão, pois o resto foi diferente de 0. Como já foi acrescentado uma vírgula no quociente, não colocamos nada nele e colocamos 0 no resto e ficamos com 200. Como $4 \times 32 = 176$, colocamos 4 no quociente e 24 como novo resto e continuaremos a divisão, pois o resto foi diferente de 0. Como já foi acrescentado uma vírgula no quociente, não colocamos nada nele e colocamos 0 no resto e ficamos com 240. Como $5 \times 44 = 220$, colocamos 5 no quociente e 20 como novo resto, então, continuaremos a divisão, pois o resto foi diferente de 0. Como já foi acrescentado uma vírgula no quociente, não colocamos nada nele e colocamos 0 no resto e ficamos com 200. Como $4 \times 32 = 176$, colocamos 4 no quociente e 24 como novo resto. Como podemos ver, temos uma repetição dos restos e consequentemente do quociente. Logo, temos dízima periódica, na qual o 54 se repete infinitamente.

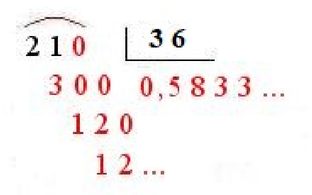


- Vamos realizar a divisão de 21 por 36.

  Como $0 \times 36 = 0$ e $1 \times 36 = 36$, colocamos o 0 como primeiro algarismo no quociente e colocamos a vírgula, caso contrário esse zero não será o algarismo mais significativo. Se fizemos a subtração $21 - 0 = 21$, e teríamos resto 21, o que não é necessário escrever. Então continuaremos a divisão. Como já foi acrescentado uma vírgula no quociente, não colocamos nada nele e colocamos 0 no 'resto' e ficamos com 210. Como $5 \times 36 = 180$, colocamos 5 no quociente e 30 como resto. Então continuaremos a divisão, pois o resto foi diferente de 0. Como já foi acrescentado uma vírgula no quociente, não colocamos nada nele e colocamos 0 no resto e ficamos com 300. Como $8 \times 36 = 288$, colocamos 8 no quociente e 12 como novo resto. Então continuaremos a divisão, pois o resto foi diferente de 0. Como já foi acrescentado uma vírgula no quociente, não colocamos nada nele e colocamos 0 no resto e ficamos com 120. Como $3 \times 36 = 108$, colocamos 3 no quociente e 12 como novo resto. Então continuaremos a divisão, podemos ver que temos uma repetição dos restos e consequentemente do quociente. Logo, temos dízima periódica, na qual o 3 no quociente se repete infinitamente.



OU



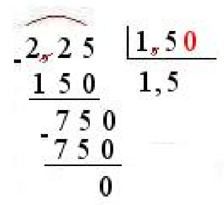
Para realizar a divisão de números com vírgulas devemos igualar a quantidade de casas após a vírgula e efetuar a divisão como se não houvesse vírgula, ou seja, basta multiplicar ambos os números por 10^n, sendo n o número de casas após a vírgula do número que possui a maior quantidade de casas decimais e proceder a divisão dois números encontrados. Isto funciona, pois se temos $x = (a_n...a_1a_0, a_{-1}...a_{-\ell})_b$ e $y = (c_m...c_1c_0, c_{-1}...c_{-k})_b$, com $\ell < k$, fazer o procedimento descrito acima é o mesmo que:

$$\frac{x}{y} = \frac{(a_n...a_0, a_{-1}...a_{-\ell})_b}{(c_m...c_0, c_{-1}...c_{-k})_b} = \frac{(a_n...a_0, a_{-1}...a_{-\ell})_b}{(c_m...c_0, c_{-1}...c_{-k})_b} \times \frac{10^k}{10^k} = \frac{(a_n...a_0a_{-1}...a_{-\ell}\overbrace{0...0}^{k-l\,zeros})_b}{(c_m...c_0c_{-1}...c_{-k})_b}.$$

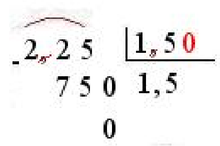
Exemplo 1.30.

- Vamos realizar a divisão de 2,25 por 1,5.

  O número 2,25 possui duas casas após a vírgula e o número 1,5 possui uma casa. Para igualar a quantidade de casas decimais devemos deixar os dois números com 2 casas após a vírgula, para isso basta colocar um zero após o 5 e desconsiderar a vírgula, ou seja, multiplicar 2,25 e 1,5 por 100, logo teremos 225 dividido por 150. Então é só realizar a divisão normalmente.

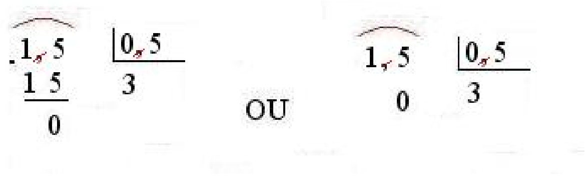


OU



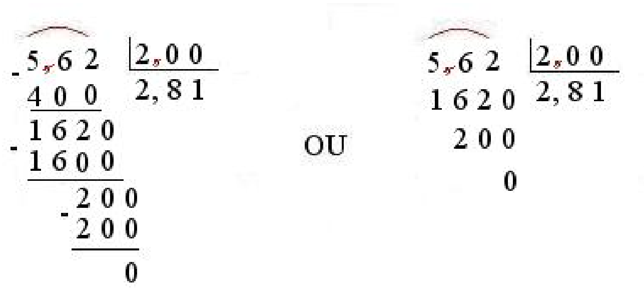
- Vamos realizar a divisão de 1,5 por 0,5.

  O número 1,5 possui uma casa após a vírgula e o número 0,5 possui uma casa. Já está igualada a quantidade de casas decimais, basta desconsiderar a vírgula, ou seja, multiplicar 1,5 e 0,5 por 10, logo teremos 15 dividido por 5. Então é só realizar a divisão normalmente.



- Vamos realizar a divisão de 5,62 por 2.

  O número 5,62 possui duas casas após a vírgula e o número 2 nenhuma. Para igualar a quantidade de casas decimais devemos deixar os dois números com 2 casas após a vírgula, para isso basta colocar a vírgula e dois zeros após o 2 e então desconsiderar as vírgulas, ou seja, multiplicar 5,62 e 2 por 100, logo teremos 562 dividido por 200. Então é só realizar a divisão normalmente.



1.2.5 TÁBUAS DE ADIÇÃO E MULTIPLICAÇÃO DE ALGUMAS BASES

Os algoritmos vistos aplicam-se a qualquer sistema de numeração posicional, desde que as conversões de uma ordem para a outra sejam realizadas empregando a base que está sendo utilizada e que as operações sejam feitas utilizando as tabuadas desta base. Lembrando que se o sistema tem base b, então precisamos de um conjunto com b símbolos para representar os números, digamos que $M = \{a_0, a_1, a_2, ..., a_{b-1}\}$ seja esse conjunto, então tábuas de adição e multiplicação podem ser construídas utilizando a regra a seguir:

Tábua de adição para esse sistema

+	a_0	a_1	...	a_{n-2}	a_{n-1}
a_0	$a_0 + a_0$	$a_0 + a_1$	...	$a_0 + a_{n-2}$	$a_0 + a_{n-1}$
a_1	$a_1 + a_0$	$a_1 + a_1$	...	$a_1 + a_{n-2}$	$a_1 + a_{n-1}$
...	...	...	...	...	...
a_{n-2}	$a_{n-2} + a_0$	$a_{n-2} + a_1$	...	$a_{n-2} + a_{n-2}$	$a_{n-2} + a_{n-1}$
a_{n-1}	$a_{n-1} + a_0$	$a_{n-1} + a_1$	...	$a_{n-1} + a_{n-2}$	$a_{n-1} + a_{n-1}$

Tábua de multiplicação para esse sistema:

$\times$	a_0	a_1	$\ldots$	a_{n-2}	a_{n-1}
a_0	$a_0 \times a_0$	$a_0 \times a_1$	$\ldots$	$a_0 \times a_{n-2}$	$a_0 \times a_{n-1}$
a_1	$a_1 \times a_0$	$a_1 \times a_1$	$\ldots$	$a_1 \times a_{n-2}$	$a_1 \times a_{n-1}$
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
a_{n-2}	$a_{n-2} \times a_0$	$a_{n-2} \times a_1$	$\ldots$	$a_{n-2} \times a_{n-2}$	$a_{n-2} \times a_{n-1}$
a_{n-1}	$a_{n-1} \times a_0$	$a_{n-1} \times a_1$	$\ldots$	$a_{n-1} \times a_{n-2}$	$a_{n-1} \times a_{n-1}$

Cada tabuada aumenta na medida em que aumenta a base do sistema de numeração. A seguir temos exemplos de tábuas de operações para algumas bases.

1.2.5.1 BINÁRIO

O sistema binário (base 2) é constituído apenas de dois símbolos $M = \{0, 1\}$ capazes de representar qualquer quantidade utilizando somente sequências de 0 e 1, neste caso os agrupamentos são feitos de 2 em 2 e a representação é da forma:

$N = a_n 2^n + a_{n-1} 2^{n-1} + ... + a_1 2^1 + a_0 2^0$, com $a_i \in M$.

Ou de modo geral teremos a seguinte representação:

$N = (a_n a_{n-1} ... a_1 a_0)_2$.

Tabela adição base 2

+	0	1
0	0	1
1	1	10

Tabela multiplicação base 2

$\times$	0	1
0	0	0
1	0	1

1.2.5.2 TERNÁRIO

Considerando que o sistema ternário (base 3) é constituído de três símbolos, $M = \{0, 1, 2\}$, neste caso os agrupamentos são feitos de 3 em 3 e a representação é da forma:

$N = a_n 3^n + a_{n-1} 3^{n-1} + ... + a_1 3^1 + a_0 3^0$, com $a_i \in M$.

Ou de modo geral teremos a seguinte representação:

$N = (a_n a_{n-1} ... a_1 a_0)_3$.

Tabela adição base 3

+	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	10
2	2	10	11

Tabela multiplicação base 3

$\times$	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	11

1.2.5.3 QUINÁRIO

Lembrando que o sistema quinário (base 5) é constituído de cinco símbolos, $M = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, os agrupamentos são feitos de 5 em 5 e a representação é da forma:

$N = a_n 5^n + a_{n-1} 5^{n-1} + ... + a_1 5^1 + a_0 5^0$, com $a_i \in M$.

Ou de modo geral teremos a seguinte representação:

$N = (a_n a_{n-1} ... a_1 a_0)_5$.

Tabela adição base 5

+	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	10
2	2	3	4	10	11
3	3	4	10	11	12
4	4	10	11	12	13

Tabela multiplicação base 5

$\times$	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	11	13
3	0	3	11	14	22
4	0	4	13	22	31

1.2.5.4 OCTAL

Como já vimos, o sistema octal (base 8) é constituído de oito símbolos, $M = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, os agrupamentos são feitos de 8 em 8 e a representação é da forma:

$N = a_n 8^n + a_{n-1} 8^{n-1} + ... + a_1 8^1 + a_0 8^0$, com $a_i \in M$.

Ou de modo geral teremos a seguinte representação:

$N = (a_n a_{n-1} ... a_1 a_0)_8$.

Tabela adição base 8

+	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	1	2	3	4	5	6	7
1	1	2	3	4	5	6	7	10
2	2	3	4	5	6	7	10	11
3	3	4	5	6	7	10	11	12
4	4	5	6	7	10	11	12	13
5	5	6	7	10	11	12	13	14
6	6	7	10	11	12	13	14	15
7	7	10	11	12	13	14	15	16

Tabela multiplicação base 8

$\times$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7
2	0	2	4	6	10	12	14	16
3	0	3	6	11	14	17	22	25
4	0	4	10	14	20	24	30	34
5	0	5	12	17	24	31	36	43
6	0	6	14	22	30	36	44	52
7	0	7	16	25	34	43	52	61

1.2.5.5 HEXADECIMAL

Lembramos que o sistema hexadecimal (base 16) é constituído de 16 símbolos, $M = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,A,B,C,D,E,F\}$, neste caso os agrupamentos são feitos de 16 em 16 e a representação é da forma:

$N = a_n 16^n + a_{n-1} 16^{n-1} + ... + a_1 16^1 + a_0 16^0$, com $a_i \in M$.

Ou de modo geral teremos a seguinte representação:

$N = (a_n a_{n-1} ... a_1 a_0)_{16}$.

Tabela adição base 16

+	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10
2	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10	11
3	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10	11	12
4	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10	11	12	13
5	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10	11	12	13	14
6	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10	11	12	13	14	15
7	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10	11	12	13	14	15	16
8	8	9	A	B	C	D	E	F	10	11	12	13	14	15	16	17
9	9	A	B	C	D	E	F	10	11	12	13	14	15	16	17	18
A	A	B	C	D	E	F	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
B	B	C	D	E	F	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A
C	C	D	E	F	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A	1B
D	D	E	F	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A	1B	1C
E	E	F	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A	1B	1C	1D
F	F	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A	1B	1C	1D	1E

Tabela multiplicação base 16

×	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F
2	0	2	4	6	9	A	C	E	10	12	14	16	18	1A	1C	1E
3	0	3	6	9	C	F	12	15	18	1B	1E	21	24	27	2A	2D
4	0	4	8	C	10	14	18	1C	20	24	28	2C	30	34	38	3C
5	0	5	A	F	14	19	1E	23	28	2D	32	37	3C	41	46	4B
6	0	6	C	12	18	1E	24	2A	30	36	3C	42	48	4E	54	5A
7	0	7	E	15	1C	23	2A	31	38	3F	46	4D	54	5B	62	69
8	0	8	10	18	20	28	30	38	40	48	50	58	60	68	70	78
9	0	9	12	1B	24	2D	36	3F	48	51	5A	63	6C	75	7E	87
A	0	A	14	1E	28	32	3C	46	50	5A	64	6E	78	82	8C	96
B	0	B	16	21	2C	37	42	4E	58	63	6E	79	84	8F	9A	A5
C	0	C	18	24	30	3C	48	54	60	6C	78	84	90	9C	A8	B4
D	0	D	1A	27	34	41	4E	5B	68	75	82	8F	9C	A9	B6	C3
E	0	E	1C	2A	38	46	54	62	70	7E	8C	9A	A8	B6	C4	D2
F	0	F	1E	2D	3C	4B	5A	69	78	87	96	A5	B4	C3	D2	E1

1.3 CONVERSÃO DE BASE

1.3.1 OUTRAS BASES PARA BASE DECIMAL

Para fazer a conversão de um escrito na base b para a base decimal, ou seja base 10, basta desenvolver o número na forma polinomial de potências de b e fazer os cálculos habituais.

Exemplos:

- $(10101)_2 = 1 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0 = 21$
- $(1022)_3 = 1 \times 3^3 + 0 \times 3^2 + 2 \times 3^1 + 2 \times 3^0 = 35$
- $(42321)_5 = 4 \times 5^4 + 2 \times 5^3 + 3 \times 5^2 + 2 \times 5^1 + 1 \times 5^0 = 2836$
- $(7152)_8 = 7 \times 8^3 + 1 \times 8^2 + 5 \times 8^1 + 2 \times 8^0 = 3690$
- $(FDE3)_{16} = F \times 16^3 + D \times 16^2 + E \times 16^1 + 3 \times 16^0$
  $= 15 \times 16^3 + 13 \times 16^2 + 14 \times 16^1 + 3 \times 16^0 = 64995$
- $(101,01)_2 = 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0 + 0 \times 2^{-1} + 1 \times 2^{-2} = 5,25$
- $(10,22)_3 = 1 \times 3^1 + 0 \times 3^0 + 2 \times 3^{-1} + 2 \times 3^{-2} = 3,888...$
- $(42,3)_5 = 4 \times 5^1 + 2 \times 5^0 + 3 \times 5^{-1} = 22,6$
- $(FD,E)_{16} = F \times 16^1 + D \times 16^0 + E \times 16^{-1}$
  $= 15 \times 16^1 + 13 \times 16^0 + 14 \times 16^{-1} = 253,875$

1.3.2 BASE DECIMAL PARA OUTRAS BASES

Na conversão de um número decimal para base b devemos aplicar um método para os números inteiros e outro para os fracionários, sendo necessário fazer a conversão separadamente se o número tem parte inteira e parte decimal.

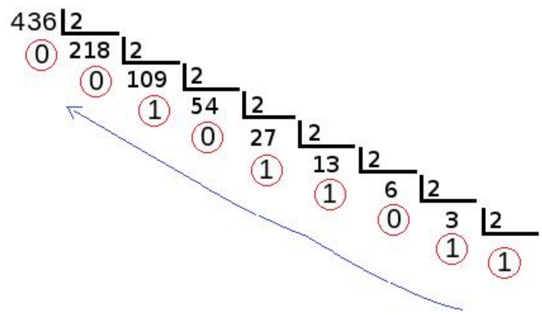
1.3.2.1 PARTE INTEIRA

A conversão de número inteiro escrito na base decimal para outras bases será feita pelo chamado método das divisões sucessivas. Esse método consiste em utilizar divisões sucessivas cujo dividendo seja exatamente o número que representa a base para a qual desejamos converter, ou seja, efetua-se a divisão inteira do número dado na base dez por b; toma-se o quociente da divisão e dividi-o também por b, repetindo este processo até que o quociente obtido torne-se menor do que b; feito isto, toma-se o último quociente e os restos obtidos em cada uma das divisões, escrevendo-os da esquerda para a direita, na ordem inversa de seu aparecimento ao longo do processo.

Esse processo decorre da aplicação do algoritmo da divisão euclidiana, como visto na demonstração do Teorema 1.1.

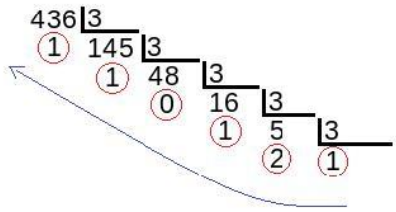
Exemplos:

- 436 para base 2:



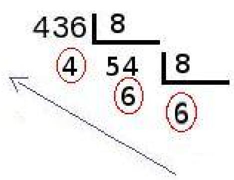
Logo, $436 = (110110100)_2$.

- 436 para base 3:



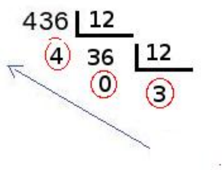
Logo, $436 = (121011)_3$.

- 436 para base 8:



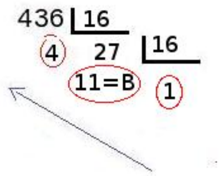
Logo, $436 = (664)_8$.

- 436 para base 12:



Logo, $436 = (304)_{12}$.

- 436 para base 16:



Logo, $436 = (1B4)_{16}$.

1.3.2.2 PARTE FRACIONÁRIA

Ao contrário do que ocorre no procedimento para a mudança de base na parte inteira, a mudança de base para a parte fracionária envolve operações de multiplicação.

O método consiste em aplicar multiplicações sucessivas pelo número que representa a base para a qual deseja-se converter o número decimal.

Neste contexto deve-se multiplicar o número dado na base dez por b, do produto obtido anota-se a parte inteira e multiplica-se por b a parte decimal, então, novamente do produto obtido anota-se a parte inteira e multiplica-se por b a parte decimal, repetindo este processo até a parte decimal ser igual a zero. Feito isto, tomam-se as partes inteiras obtidas em cada uma das multiplicações (mesmo se for 0), escrevendo-as na ordem do seu aparecimento ao longo do processo.

Podem ocorrer repetições dos produtos, o que indica que o número no novo sistema de numeração tem representação infinita, que em algum momento será necessário alguma aproximação ou arredondamento, pois a parte fracionária não irá zerar.

Assim como ocorre na base 10, no caso de interrupção por chegar ao número de dígitos especificado sem encontrar resultado zero, o resultado encontrado é aproximado. Quanto maior o número de algarismos considerados, melhor será a aproximação.

Exemplos:

- 0,375 para base 2:

$0,375 \times 2 = 0,75 \longrightarrow a_{-1} = 0$
$0,75 \times 2 = 1,5 \longrightarrow a_{-2} = 1$
$0,5 \times 2 = 1,0 \longrightarrow a_{-3} = 1$

Temos a casa decimal igual a 0, logo, $0,375 = (0,011)_2$.

- 0,5 para base 2:

  $0,5 \times 2 = 1,0 \longrightarrow a_{-1} = 1$

  Temos a casa decimal igual a 0, logo, $0,5 = (0,1)_2$.

- 0,5 para base 3:

  $0,5 \times 3 = 1,5 \longrightarrow a_{-1} = 1$
  $0,5 \times 3 = 1,5 \longrightarrow a_{-2} = 1$
  ...

  Temos repetições dos produtos, o que indica que o número no sistema ternário tem representação infinita, logo, $0,5 = (0,111...)_3$ que representamos por $(0,\overline{1})_3$.

- 0,5 para base 16:

  $0,5 \times 16 = 8,0 \longrightarrow a_{-1} = 8$

  Temos a casa decimal igual a 0. Logo, $0,5 = (0,8)_{16}$.

- 0,8 para base 16:

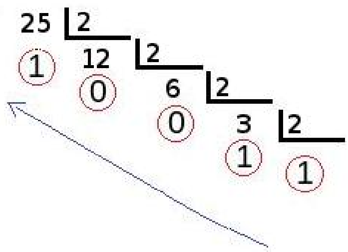
  $0,8 \times 16 = 12,8 \longrightarrow a_{-1} = 12 = C$
  $0,8 \times 16 = 12,8 \longrightarrow a_{-2} = 12 = C$
  ...

  Temos repetições dos produtos, o que indica que o número no sistema hexadecimal tem representação infinita, logo, $0,8 = (0,CCC...)$ que representamos por $(0,\overline{C})_{16}$.

Nos próximos exemplos temos números com parte inteira e decimal, então as conversões devem ser feitas separadamente.

- 25,8 para base 2:

Parte inteira:



Logo, $25 = (11001)_2$.

Parte decimal:

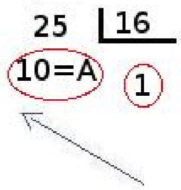
$0,8 \times 2 = 1,6 \longrightarrow a_{-1} = 1$
$0,6 \times 2 = 1,2 \longrightarrow a_{-2} = 1$
$0,2 \times 2 = 0,4 \longrightarrow a_{-3} = 0$
$0,4 \times 2 = 0,8 \longrightarrow a_{-4} = 0$
$0,8 \times 2 = 1,6 \longrightarrow a_{-5} = 1$

Temos repetições dos produtos.
Logo, $0,8 = (0,\overline{1100})_2$.

Então, $25,8 = (11001,\overline{1100})_2$

- 25,35 para base 16:

Parte inteira:



Logo, $25 = (1A)_{16}$.

Parte decimal:

$0,35 \times 16 = 5,6 \longrightarrow a_{-1} = 5$
$0,6 \times 16 = 9,6 \longrightarrow a_{-2} = 9$
$0,6 \times 16 = 9,6 \longrightarrow a_{-3} = 9$

Temos repetições dos produtos.
Logo, $0,35 = (0,5\overline{9})_{16}$.

Então, $25,35 = (1A,5\overline{9})_{16}$

1.3.3 CONVERSÃO ENTRE BASES QUAISQUER

Para conversão entre bases é desejável que uma delas seja a 10, então, o método mais utilizado para conversão entre bases quaisquer é primeiro converter o número representado na base original para a base 10, e, então converter essa representação para a base desejada, usando os métodos já vistos.

1.3.4 CONVERSÃO DE BASES POTÊNCIAS ENTRE SI

Ao analisarmos as bases que são potências entre si percebemos que existe uma relação entre elas, como por exemplo, a base 8 é potência da base 2, pois temos $8^1 = 2^3$, então para cada dígito na base 8 podemos escrever 3 dígitos na base 2. A base 9 é potência da base 3, pois temos $9^1 = 3^2$, então para cada dígito na base 9 podemos escrever 2 dígitos na base 3. Temos que, se $b = a^k$, então para cada dígito de N_b podemos escrever k dígitos em N_a. Usando essa relação encontramos um método mais rápido para resolver as conversões entre essas bases. Para exemplificação, trabalharemos a seguir com a conversão para bases que são potências de 2.

1.3.4.1 BASE 2 PARA BASE 2^k

Para converter um número N na base 2 para a base 2^k, basta agrupar os algarismos de N em grupos com k algarismos (completando com zero, se necessário) e converter cada grupo de algarismos para seu equivalente em 2^k.

Tabela de conversão para algumas potências de 2

Base 16 = 2^4	Base 8 = 2^3	Base 4 = 2^2	Base 2
0	00	000	0000
1	01	001	0001
2	02	002	0010
3	03	003	0011
4	04	010	0100
5	05	011	0101
6	06	012	0110
7	07	013	0111
8	10	020	1000
9	11	021	1001
A	12	022	1010
B	13	023	1011
C	14	030	1100
D	15	031	1101
E	16	032	1110
F	17	033	1111
10	20	300	10000

Para realizar o agrupamento deve-se iniciar sempre da direita para a esquerda para a representação da parte inteira, e da esquerda para a direita para a representação da parte fracionária, não esquecendo de completar com zeros, quando necessário, ou seja, o número $(1010011, 111)_2$ será agrupado: $(01 \quad 01 \quad 00 \quad 11 \quad\quad ,11 \quad 10)_2$, se for para converter para base $4 = 2^2$; $(001 \quad 010 \quad 011 \quad , \quad 111)_2$, se for para converter para base $8 = 2^3$; $(0101 \quad 0011 \quad , \quad 1110)_2$, se for para converter para base $16 = 2^4$.

Exemplos:

- $(111010111)_2 = (?)_8 \quad \overset{8=2^3}{\longrightarrow} \quad (\underbrace{111}_{7}\underbrace{010}_{2}\underbrace{111}_{7})_2 = (727)_8$

  De fato: $(111010111)_2 =$
  $1 \times 2^8 + 1 \times 2^7 + 1 \times 2^6 + 0 \times 2^5 + 1 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0 =$
  $(2^2 + 2^1 + 1) \times 2^6 + (0 + 2^1 + 0) \times 2^3 + 4 + 2 + 1 =$
  $7 \times (2^3)^2 + 2 \times 2^3 + 7 =$
  $7 \times 8^2 + 2 \times 8^1 + 7 \times 8^0 = (727)_8$

  Atuando de maneira análoga, temos:

- $(1010011, 111)_2 = (?)_8 \quad \overset{8=2^3}{\longrightarrow} \quad (\underbrace{001}_{1}\underbrace{010}_{2}\underbrace{011}_{3}, \underbrace{111}_{7})_2 = (123, 7)_8$

- $(1011011011)_2 = (?)_{16} \quad \overset{16=2^4}{\longrightarrow} \quad (\underbrace{0010}_{2}\underbrace{1101}_{D}\underbrace{1011}_{B})_2 = (2DB)_{16}$

- $(100111, 11011)_2 = (?)_{16} \quad \overset{16=2^4}{\longrightarrow} \quad (\underbrace{0010}_{2}\underbrace{0111}_{7}, \underbrace{1101}_{D}\underbrace{1000}_{8})_2 = (27, D8)_{16}$

1.3.4.2 BASE 2^k PARA BASE 2

Para o caso em que desejamos fazer a conversão de um número N na base 2^k para a base 2, basta converter cada algarismo de N em um número de k algarismos na base 2 da direita para a esquerda para a parte inteira e da esquerda para a direita para a parte fracionária.

Deve-se observar que para se obter a devida precisão para um número 2^k é necessário considerar pelo menos k dígitos depois do ponto da base.

Exemplos:

- $(273)_8 = (?)_2 \quad \overset{8=2^3}{\longrightarrow} \quad (\underbrace{2}_{010}\underbrace{7}_{111}\underbrace{3}_{011})_8 = (10111011)_2$

  De fato: $(273)_8 =$
  $2 \times 8^2 + 7 \times 8^1 + 3 \times 8^0 =$
  $2 \times (2^3)^2 + 7 \times (2^3)^1 + 3 \times (2^3)^0 =$
  $2 \times 2^6 + (2^2 + 2^1 + 2^0) \times 2^3 + (2 + 1) \times 2^0 =$
  $2^7 + 2^5 + 2^4 + 2^3 + 2^1 + 2^0 =$
  $1 \times 2^7 + 0 \times 2^6 + 1 \times 2^5 + 1 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0 = (10111011)_2$

  De maneira análoga, tem-se:

- $(306)_{16} = (?)_2 \quad \overset{16=2^4}{\longrightarrow} \quad (\underbrace{3}_{0011}\underbrace{0}_{0000}\underbrace{6}_{0110})_{16} = (1100000110)_2$

- $(F5, 1)_{16} = (?)_2 \quad \overset{16=2^4}{\longrightarrow} \quad (\underbrace{F}_{1111}\underbrace{5}_{0101}\underbrace{1}_{0001})_{16} = (11110101, 0001)_2$

1.3.4.3 BASE 2^k PARA 2^l

Para converter da base 2^k para 2^l, podemos converter primeiro para a base 2 e depois para base desejada.

Exemplos:

- $(242)_8 = (?)_{16} \quad \xrightarrow{8=2^3} \quad (\underbrace{2}_{010}\underbrace{5}_{101}\underbrace{4}_{100})_8 = (10101100)_2 \quad \xrightarrow{16=2^4}$
  $(\underbrace{1010}_{A}\underbrace{1100}_{C})_2 = (AC)_{16}$

- $(2E7A)_{16} = (?)_8 \quad \xrightarrow{16=2^4} \quad (\underbrace{2}_{0010}\underbrace{E}_{1110}\underbrace{7}_{0111}\underbrace{A}_{1010})_{16} = (10111001111010)_2$
  $\xrightarrow{8=2^3} \quad (\underbrace{010}_{2}\underbrace{111}_{7}\underbrace{001}_{1}\underbrace{111}_{7}\underbrace{010}_{2})_2 = (27172)_8$

2 TEORIA DE VAN HIELE

A Teoria de van Hiele, elaborada pelos professores Dina van Hiele Geldof e Pierre Marie van Hiele, surgiu a partir da preocupação com as dificuldades na aprendizagem de geometria apresentadas por seus alunos do curso secundário na Holanda. Essa preocupação motivou o casal a desenvolver a pesquisa sobre o pensamento geométrico com o objetivo de encontrar uma possível estratégia para o ensino da geometria. Os resultados dessas pesquisas foram publicados em suas teses de doutorado na Universidade de Utrecht, em 04 de julho de 1957. Pierre defendeu a tese "*De Problematiek van het inzicht. Gedemonstreerd aan het inzicht van schoolkinderen in meetkunde-leerstof*" (O problema do *insight*. Uma conexão com a compreensão dos estudantes na aprendizagem da geometria), sob a orientação do educador matemático Hans Freudenthal, e, Dina defendeu a tese "*De didaktick van de Meetkunde in de eerste klass van het V.H.M.O*" (A didática da geometria na classe inicial do ensino secundário)[1].

De acordo com Passos (2015), Dina coletou e analisou os dados de sua pesquisa a partir de situações reais com duas turmas de alunos com cerca de doze anos. Essa análise ocorreu em cima de sua prática pedagógica, de maneira descritiva, focando no processo como um todo e não somente no resultado atingindo. O objetivo dela era compreender como o pensamento visual do aluno progride para um pensamento abstrato e se esse pensamento abstrato é condição para que se chegue ao pensamento lógico em geometria. Além disso, ela buscou compreender o papel da linguagem nesse processo. Dina faleceu um ano após terminar a tese, então Pierre deu sequência ao trabalho do casal.

> A descrição do trabalho desenvolvido por ela mostra a reflexão da autora com relação ao papel do professor na transição dos alunos de um nível de pensamento para o subsequente, que posteriormente resultou na proposição por van Hiele (1986) das fases do processo de aprendizagem e da teoria dos níveis (Modelo de van Hiele). Nessa descrição também encontram-se indícios de aspectos relevantes da Educação Matemática Realística: o papel dos contextos na elaboração do conhecimento matemático; o processo de aprendizagem do professor com relação ao ato de ensinar, que Freudenthal posteriormente define como didatização; a descontinuidade no processo de aprendizagem; o papel da linguagem para a elaboração do conhecimento; a relevância dos contextos para a elaboração de conceitos; a unidade dos processos de ensino e de aprendizagem (PASSOS, 2015, p.47).

Segundo Passos (2015), Pierre trata em sua tese do papel da linguagem para a formação do conhecimento, da descontinuidade do processo de aprendizagem, da didatização e da necessidade de adaptação dos meios de avaliação escolar. Todo o trabalho é feito analisando o "*insight*" em um contexto didático enfatizando o papel do professor. Em cima da reflexão sobre a formação de "*insight*" em geometria, tem-se que:

---
[1] Na Holanda os alunos começam no ensino secundário com 12 anos.

> Segundo van Hiele (1957, p. 1), ‘diz-se que uma criança tem *insight* em um determinado campo da geometria quando, a partir dos dados e relações geométricas que são fornecidos, é capaz de chegar a uma conclusão em uma situação que nunca tinha enfrentado antes’ (tradução nossa). Para o autor, de modo geral, o *insight* ’‘é reconhecido como tal quando o sujeito atua correta e intencionalmente frente a uma situação nova” (tradução nossa) (PASSOS, 2015, p.48).

Conforme Passos (2015), Pierre concluiu que os resultados sugerem que não há diferenças efetivas entre o “*insight* em geometria” e o “*insight* na matemática em geral”, pois de maneira geral há muitos pontos em comum entre esses dois ’*insight*’. Em seu trabalho, Pierre usou os dados coletados por sua esposa, por isso ao longo dele há várias referências ao trabalho dela. Para ele, o estudo que ela realizou pode ser considerado uma forma de colocar em prática suas ideias. Ainda de acordo com Passos (2015), "as duas teses se complementam, de modo que a tese de Dina van Hiele-Geldof (1957) tem um caráter mais prático e a de Pierre van Hiele (1957) um caráter mais teórico".

> Pierre preocupava-se pelo *insight* geométrico, mecanismo chave que permite aos alunos visualizar diferentes campos, e Dina desenvolvia uma abordagem didática da Geometria recorrendo à manipulação das figuras, ao uso do geoplano e aos desenhos feitos pelos alunos com régua e compasso, os alunos desenhavam, dobravam, argumentavam, comparavam e observavam, desenvolvendo atividades que estão no centro das recomendações de hoje para as atividades geométricas (MATOS, 1999 apud PINTO, 2011, p. 15).

Segundo Santos (2015), a União Soviética reformulou o currículo de geometria em suas escolas na década de 60 e adotou a Teoria de van Hiele, mas mesmo assim o Modelo de van Hiele demorou a receber reconhecimento em outros países. Na década de 1970 surgiram diversos projetos de pesquisa nos Estados Unidos motivados a encontrar soluções para os problemas com o ensino de geometria, então vários artigos publicados por van Hiele começaram a ser traduzidos para o inglês, fazendo com que o modelo fosse conhecido em outros países. Pierre van Hiele publicou em 1986 o livro “*Sructure and insight: a theory of Mathematics Education*” que contém uma síntese dos seus trabalhos a respeito dos níveis de pensamento e do papel do professor na transição entre os níveis.

2.1 DESCRIÇÃO DA TEORIA DE VAN HIELE

A Teoria de van Hiele sugere que a construção do pensamento geométrico é dividida em cinco níveis. Segundo Santos (2015), o modelo auxilia a reconhecer o nível de maturidade geométrica dos alunos e indica caminhos para ajudá-los a avançar de um nível para outro. E, apesar da estruturação desses níveis possuírem grande influência da Teoria Piagetiana – com as ideias de maturação, experiência com o mundo físico, experiências sociais e equilibração – é importante destacar que para os van Hiele o processo do ensino-aprendizagem é mais decisivo para o avanço para o nível superior do que a idade ou a maturação do aluno.

> É evidente que o alcance de um nível é resultado de um processo de aprendizagem. (...) De qualquer modo, seria um deplorável erro supor que um nível é alcançado como resultado de uma maturação biológica que o professor ajuda a influenciar (HIELE, 1986 apud SANTOS, 2015, p. 35).

Para o casal van Hiele, o aluno só alcança um nível superior após passar pelos níveis anteriores, logo existe uma relação hierárquica entre os cinco níveis. De acordo com Santos (2015), “a passagem de um nível para o seguinte se dá pela vivência de atividades adequadas e ordenadas, passando por cinco fases de aprendizagem”.

A seguir são apresentados os níveis, as propriedades e as fases de aprendizagem com base na Teoria de van Hiele, conforme os trabalhos de Santos (2015), Santos e Santos (2016), Passos (2015), Pértile (2011), Pinto (2011) e Oliveira (2012).

2.1.1 OS NÍVEIS DE RACIOCÍNIO

Os cinco níveis de compreensão da teoria de van Hiele são: visualização (reconhecimento), análise, dedução informal ou ordenação (síntese), dedução formal e rigor. Em cada nível há uma maneira de compreender e utilizar os conceitos geométricos, isso é refletido na forma que o aluno interpreta, defini, classifica e faz demonstrações com esses conceitos.

Nível 1 - Visualização - Neste nível, os alunos descrevem as figuras de acordo com a sua aparência e de maneira imprecisa. Eles reconhecem as figuras pelo formato, relacionando-as a objetos do cotidiano (porta, janela, mesa), mas as suas propriedades geométricas não são entendidas, ou seja, reconhecem triângulos, quadrados, paralelogramos, entre outros, por sua forma, não conseguindo identificar suas partes ou propriedades. São capazes de reproduzir figuras dadas, identificar formas específicas e aprender um vocabulário geométrico básico.

> O estudante opera em figuras geométricas, tais como triângulos e linhas paralelas através da identificação e atribuição de nomes e compará-los de acordo com sua aparência. A percepção é apenas visual. Um aluno que possui um raciocínio no nível 1 reconhece certas formas diferenciadas sem prestar atenção às suas partes componentes. Por exemplo, pode ser um retângulo reconhecido, porque parece ’como uma porta’ e não porque tem quatro lados retos e quatro ângulos retos como não há nenhuma apreciação dessas propriedades. Forma é importante e figuras podem ser identificadas pelo nome (HIELE, 1986 apud SANTOS; SANTOS, 2016, p. 2).

De acordo com Pértile (2011), no nível visual, o aluno apenas percebe e relaciona objetos, por isso é importante o trabalho com material concreto, de forma a estimular a percepção de figuras. Segundo Crowley (1994 apud Pértile, 2011, p.35), nesse nível o professor deve possibilitar ao aluno oportunidade de: manipular, colorir, fazer dobraduras e construir figuras geométricas; identificar figuras ou uma relação geométrica em desenhos, conjunto de recortes, blocos de modelos, outros objetos classificáveis e objetos físicos do ambiente; fazer cópia de figuras em papel pontilhado ou quadriculado; fazer recortes usando geoplanos; criar figuras desenhando à mão livre; construir figuras com o auxílio de material concreto, como varetas, canudos, blocos; descrever figuras e construções geométricas utilizando a linguagem adequada; trabalhar com problemas que possam ser resolvidos manejando figuras, medindo e contando.

Nível 2 – Análise – Passando pelo nível de reconhecimento o aluno começa a comparar e analisar as figuras por meio das propriedades. Neste nível, os alunos compreendem as características e propriedades das figuras, porém não conseguem estabelecer relações entre essas propriedades e nem entre as figuras. O aluno é capaz de distinguir as figuras em termos de seus componentes (ângulos, lados, medidas), reconhecimento de suas propriedades e uso dessas propriedades para resolver problemas, porém ainda pode ter dificuldade de compreender que haja nomes diferentes para figuras iguais, ou seja, que todo quadrado é um retângulo, que todo retângulo é um paralelogramo.

> O estudante descobre propriedades/regras de uma classe de forma empiricamente, tais como dobramento, medição, analisa figuras em termos de seus componentes e relacionamentos entre os componentes. A este nível, os componentes e seus atributos são usados para descrever e caracterizar as figuras. Por exemplo, um estudante que está raciocinando analiticamente diria que um quadrado tem quatro lados iguais e quatro cantos 'quadrados'. O mesmo estudante, no entanto, não pode acreditar que uma figura pode pertencer a diversas classes gerais e tem vários nomes, por exemplo, o aluno não pode aceitar que um retângulo é um paralelogramo. A figura a este nível se apresenta como uma totalidade de suas propriedades. Um estudante pode ser capaz de afirmar uma definição, mas não terá entendimento (HIELE, 1986 apud SANTOS; SANTOS, 2016, p. 2).

Segundo Crowley (1994 apud Pértile, 2011, p.36), nesse nível, o professor deve proporcionar ao aluno oportunidades para: medição, dobraduras, coloração e modelagem, com o intuito de identificar propriedades de figuras e outras relações geométricas; descrição e comparação de figuras por suas propriedades; classificação e reclassificação de figuras por atributos isolados, tais como número de lados paralelos ou ângulos retos; identificação e desenho de figuras, dadas uma descrição ou escrita de suas propriedades; identificação de figuras a partir de pistas visuais; dedução empírica de regras e generalizações a partir do estudo de muitos exemplos; identificação de propriedades que possam ser usadas para caracterizar ou comparar diferentes classes de figuras; descoberta de propriedades de classes de objetos não familiares, a partir de exemplos e contra-exemplos; uso de vocabulário e símbolos apropriados; resolução de problemas geométricos que requeiram o conhecimento das propriedades das figuras, relações geométricas ou abordagens perspicazes.

Nível 3 – Dedução Informal ou Ordenação (síntese) - Nesse nível, o aluno começa a perceber as correlações das propriedades das figuras e entre as figuras, compreendendo que essas propriedades podem caracterizar as figuras e reconhecendo as classes. Dessa forma, o aluno consegue produzir justificativas para o processo de desenvolvimento do raciocínio geométrico que está utilizando para realizar a resolução de um problema. Além disso, nesse nível os alunos passam a compreender demonstrações feitas pelo professor, repeti-las e adaptá-las para situações parecidas. As definições começam a ter significado, mas ainda não têm a visão global da demonstração, não conseguindo ainda desenvolver uma demonstração formal completa.

> O estudante opera realizando as relações entre a representação figural com o que há dentro de uma figura e entre figuras relacionadas. Existem dois tipos de pensamento neste nível. Em primeiro lugar o aluno compreende as relações abstratas entre figuras, por exemplo, verifica as relações entre um retângulo e um paralelogramo, em segundo lugar o estudante pode usar dedução para justificar observações feitas no nível 2. O papel da definição das propriedades e da capacidade de construir provas formais não são compreendidas, embora nesse nível não é uma compreensão da essência da geometria (HIELE, 1986 apud SANTOS; SANTOS, 2016, p. 3).

Segundo Crowley (1994 apud Pértile, 2011, p.37), nesse nível o docente deve disponibilizar atividades em que o aluno possa: estudar as relações desenvolvidas no nível anterior, buscando inclusões e implicações; identificar conjuntos mínimos de propriedades para descrever uma figura; desenvolver e usar definições; apresentar argumentos informais, usando, por exemplo, diagramas, recorte de figuras, diagramas de árvores; ter acompanhamento de argumentos dedutivos, eventualmente fornecendo algumas etapas omitidas; tentar fornecer mais do que uma explicação ou abordagem para definições; trabalhar e discutir acerca de situações que focalizem afirmações e suas recíprocas; resolver problemas em que as propriedades das figuras e as inter-relações são importantes.

Nível 4 - Dedução formal – Nesse nível os alunos conseguem construir provas geométricas, com resoluções de figuras a partir das construções geométricas, assim como resolver matematicamente utilizando suas propriedades. Além disso, os alunos também conseguem compreender o papel dos axiomas. A geometria é entendida como um processo dedutivo. Os alunos analisam e compreendem o processo dedutivo, por isso são capazes de reformular teoremas, compreender e desenvolver demonstrações formais, servindo-se de axiomas.

> O estudante prova teoremas deduzindo e estabelecendo inter-relações entre redes de teoremas. O aluno pode manipular as relações desenvolvidas no nível 3. A necessidade de justificar os relacionamentos é compreendida e usada definições suficientes que podem ser desenvolvidas. O raciocínio neste nível inclui o estudo da geometria como uma forma de sistema matemático ao invés de uma coleção de formas (HIELE, 1986 apud SANTOS; SANTOS, 2016, p. 3).

Segundo Crowley (1994 apud Pértile, 2011, p.38), para auxiliar o aluno a entender a ideia de dedução, o professor pode proporcionar atividades de: identificação do que é dado e do que deve ser provado; identificação de dados implícitos numa figura ou numa informação; demonstração de ter compreendido o significado de conceito primitivo, postulado, teorema, definição; prova rigorosa das relações desenvolvidas informalmente do nível anterior; prova de relações não familiares; comparação de demonstrações diferentes de um mesmo teorema; uso de várias técnicas de demonstração; identificação de estratégias gerais de demonstração; reflexão sobre o raciocínio geométrico.

Nível 5 - Rigor - Nesse nível, a geometria é vista de uma forma abstrata. O aluno domina as propriedades, consegue fazer demonstrações das propriedades com rigor, é capaz de trabalhar em diferentes sistemas axiomáticos e compreende a utilização de outras geometrias, além da Euclidiana. Segundo Santos e Santos (2016), "os alunos neste nível entendem os aspectos formais da dedução geométrica e matemática, pois relacionam constantemente para poder obter o melhor resultado do processo de construção, o aluno ainda consegue realizar a comparação dentre sistemas".

> Van Hiele menciona que: O aluno estabelece teoremas em diferentes sistemas de postulados e análises e compara estes sistemas. O estudo da geometria no nível 5 é altamente abstrato e não envolve necessariamente modelos concretos ou pictóricos. A este nível, os postulados ou axiomas tornam-se objeto de intenso escrutínio rigoroso. A abstração é primordial (HIELE, 1986 apud SANTOS; SANTOS, 2016, p. 4).

O quinto nível não tem sido muito explorado pelos pesquisadores, pois a Teoria de Van Hiele foi desenvolvida com alunos do ensino secundário e os alunos que se encontram neste nível, provavelmente estão em disciplinas de Geometria de um curso de nível superior.

2.1.2 PROPRIEDADES DA TEORIA DE VAN HIELE

Além de apresentar as características de cada nível, o modelo desenvolvido por van Hiele apresenta algumas propriedades que são de fundamental importância para o aprendizado da geometria, são elas: sequencial, avanço, intrínseco e extrínseco, linguística e combinação inadequada. Segundo Crowley (1994 apud Santos, 2015, p. 36), "essas propriedades são particularmente significativas para educadores, pois podem orientar a tomada de decisões quanto ao ensino". Abaixo temos uma breve descrição de cada propriedade:

1. Sequencial - Os níveis seguem uma hierarquia, ou seja, para o aluno atingir certo nível é necessário que ele tenha passado pelos níveis inferiores. "Por exemplo, o aluno só consegue perceber a inclusão de classes de quadriláteros (nível de abstração) se distinguirem as propriedades de cada uma dessas classes (nível de análise)" (SANTOS; SANTOS, 2016, p. 5).

2. Avanço - A progressão de um nível para outro depende mais do conteúdo e da maneira que este é trabalhado do que da idade ou maturação biológica, ou seja, o aluno só avança para o nível seguinte após passar por atividades específicas, que o preparem para esse avanço. Para os van Hiele, a simples memorização de fórmulas ou relações não garante que a aprendizagem aconteça. Além disso, não há como pular nenhum nível, apenas acelerar o avanço conforme a metodologia utilizada.

3. Intrínseco e Extrínseco - Os objetivos implícitos num nível tornam-se explícitos no nível seguinte, ou seja, em um nível o aluno possui certo conhecimento, mas não consegue explicar, então no próximo nível esse conhecimento será explicado. "Por exemplo, no nível visual, o aluno visualiza um quadrado e o reconhece. No nível seguinte, ele analisa a figura

e, além de reconhecer o quadrado, indica algumas de suas propriedades, como, por exemplo, possuir quatro ângulos retos” (PERTILE, 2011, p. 40).

4. Linguística - Cada nível possui sua própria simbologia, linguagem e um conjunto de relações interligando-as. Assim, não adianta falar em propriedade com os alunos que estão no nível visual, pois eles não compreendem ainda. Além disso, uma relação que é apropriada em certo nível, pode ser vista como incorreta em outro nível. “Por exemplo, classificar quadrados e retângulos como figuras diferentes em certo nível é correto, enquanto em outro nível há a necessidade de o aluno identificar que o quadrado é, na verdade, um retângulo” (PERTILE, 2011, p. 40).

5. Combinação inadequada - O professor e o aluno devem raciocinar em um mesmo nível para que realmente ocorra o aprendizado. O material didático, conteúdo e vocabulário devem estar compatíveis com o nível do aluno para que haja condições dele passar para o próximo nível, do contrário, o aluno não conseguirá acompanhar os processos de pensamentos que estão sendo aplicados. Por exemplo: não é pertinente pedir a um aluno que se encontra no nível de análise para fazer deduções, pois neste nível ele não compreende o processo dedutivo.

2.1.3 FASES DE APRENDIZAGEM

Van Hiele afirma que o avanço de um nível para o nível superior depende mais da instrução recebida do que da maturidade do aluno. Dessa forma, van Hiele propõe uma sequência didática de cinco fases de aprendizagem: informação (interrogação informada), orientação dirigida, explicação, orientação livre e integração. Para Pierre, ao passar por essas cinco fases de aprendizagem o estudante desenvolveria cada nível, alcançando o próximo. Segundo Santos (2015), as fases não são atreladas a um determinado nível, em vez disso, deve-se começar cada nível com atividades da primeira fase, passando para atividades da segunda fase, até chegar nas atividades da quinta fase, então, ao final da quinta fase, os alunos devem ter atingido o próximo nível de raciocínio. As principais características dessas fases são:

Fase 1 – Informação - Nesta fase, professor e aluno dialogam sobre o conteúdo a ser estudado. Para que esse diálogo seja produtivo, o professor disponibiliza materiais e informações introduzindo o vocabulário de acordo com o nível. Então, os alunos experimentam um contato inicial com os objetos de estudo, sabendo em que direção os estudos avançarão, enquanto o professor procura saber qual é o conhecimento prévio do aluno.

Fase 2 - Orientação dirigida - Nesta fase os alunos exploram o conteúdo por meio de materiais selecionados e ordenados cuidadosamente pelo professor. Esses materiais devem ser apresentados de forma que o grau de dificuldade seja crescente. Além disso, as atividades devem proporcionar respostas específicas e objetivas, com a finalidade de fazer os alunos perceberem as propriedades, conceitos e definições que se quer estudar.

Fase 3 – Explicitação – Nessa fase o professor deve passar atividades que estimulem os alunos a expressarem e debaterem o que compreenderam nas fases anteriores. A partir da troca de experiências ocorre a defesa ou contestação de ideias, o que favorece o desenvolvimento do raciocínio. O principal papel do professor é direcionar a linguagem utilizada para que esta seja específica ao nível em que os alunos se encontram. A utilização de uma linguagem e uma simbologia adequada possibilita a consolidação dos conceitos obtidos na fase anterior. Nesta fase não se introduzem conceitos novos, há somente a troca de experiências.

Fase 4 – Orientação livre – Nesta fase, os conteúdos trabalhados anteriormente deverão ser colocados em prática em atividades com dificuldade maior do que as oferecidas na fase anterior. Essas atividades não devem ser questões objetivas, mas sim problemas que contenham várias etapas para sua resolução, possuindo mais de uma maneira de resolver ou diversas respostas possíveis. Além disso, o professor deve intervir o mínimo possível, deixando aos alunos a tarefa de formalizar os conceitos, assim, o aluno deverá procurar suas próprias soluções, possibilitando ganho de experiência e autonomia.

Fase 5 – Integração - Nessa fase o objetivo é que o aluno tenha uma visão geral do conteúdo que foi trabalhado nas fases anteriores. O professor deve auxiliar no processo de síntese, sem apresentar novas ideias. Os alunos reveem e resumem o que foi visto com o objetivo de formar uma visão geral da nova rede de objetos e relações, as quais servirão de base para o próximo nível.

Segundo Crowley (1994 apud Pértile, 2011, p. 42), “no final da quinta fase os alunos alcançam um novo nível de pensamento. O novo domínio de raciocínio substitui o antigo, e os alunos estão prontos para repetir as fases de aprendizado no nível seguinte”. No entanto, essa mudança de nível não acontece de modo brusco, o que ocorre é um momento de transição entre um nível e outro:

> Apesar de evidências de pesquisas atestarem o caráter hierárquico dos níveis de van Hiele, há dúvidas quanto à discretização (descontinuidade) dos mesmos, conforme a proposta de P.M. van Hiele. (USISKIN, 1982; BURGER SHAUGHNESSY, 1986; FUYS, GEDDES, TISCHLER, 1988). Burger e Shaughnessy (1986), por exemplo, observam que, embora os van Hiele tenham apresentado os níveis como estruturas discretas, o seu estudo não detectou essa característica. Alguns alunos chegaram, inclusive, a oscilar de um nível para outro na mesma tarefa. Jaime e Gutiérrez (1990) também contestam essa proposição e destacam o processo contínuo vivenciado por eles em suas pesquisas usando o modelo citado, onde as fases 4 e 5 de um nível se confundem com as fases 1 e 2 do nível seguinte (OLIVEIRA, 2012, p. 11).

3 MONTESSORI E MATERIAL DOURADO

3.1 MARIA MONTESSORI

Maria Montessori foi uma educadora, médica e pedagoga italiana, conhecida por ter criado o Método Montessori (nomeado por ela de Pedagogia Científica). Nasceu em 1870 e sempre se interessou por matemática e biologia. Tornou-se uma das primeiras mulheres a concluir medicina na Universidade de Roma, mesmo enfrentando a oposição do pai, que esperava que ela se tornasse professora.

Inicialmente, dedicou seus as doenças do sistema nervoso central e trabalhou na área da psiquiatria. Foi convidada a dar assistência a uma turma de crianças com deficiências intelectuais, na clínica de psiquiatria da universidade, e percebendo o tratamento desumano dado às crianças, iniciou pesquisas a procura de compreender o desenvolvimento delas. Analisou os escritos de Ittard, que educou um menino de oito anos descoberto na selva convivendo entre os lobos, que ficou conhecido por Menino Selvagem. Considerava seus escritos os primeiros passos no caminho da pedagogia experimental. Também estudou a obra de Séguin, traduzindo para o italiano.

Edouard Séguin foi professor e médico, que durante dez anos fez experiências pedagógicas com crianças internadas em uma casa de saúde e fundou a primeira escola para deficientes intelectuais. Ele persistia na necessidade de uma observação atenta do aluno, em que não fosse feito nada que pudesse configurar uma violência às suas capacidades psíquicas. O professor não deveria ser um modelador, mas um espírito atento, pronto a aproveitar oportunidades, provendo apoio para que o aluno desenvolvesse ao menor indício de um despertar psicológico.

Montessori defendeu no Congresso Médico Nacional, em Turim, a tese de que as crianças deficientes precisavam muito mais de um bom método pedagógico do que da medicina. Não se opunha, evidentemente, ao tratamento do sistema nervoso, reconstituintes e tônicos, mas acreditava que o principal motivo do atraso no aprendizado de crianças especiais era a falta de materiais de estímulo para o desenvolvimento apropriado. Afirmava que as esperanças de qualquer desenvolvimento estavam no professor, não no clínico. Para ela eram necessárias escolas onde se aprimorassem, pela observação, os métodos de Séguin e onde, ao mesmo tempo, se pudessem formar os professores porque, sem bons professores, nada se poderia fazer.

Em 1899, aos 29 anos, foi convidada junto com o Dr. Giuseppe Montesano a assumir a direção de uma nova escola para crianças deficientes intelectuais em Roma. Os dois tiveram um relacionamento que gerou um filho, chamado Mario, mas Montesano casou-se com outra mulher. Como a mãe de Montessori tinha medo de que o escândalo acabasse com a carreira da filha, o nascimento da criança permaneceu em segredo, sendo ele criado com os primos e por quase quinze anos Montessori o visitava sem revelar ser sua mãe. Montessori canalizou sua angústia em um novo propósito: melhorar a educação. Matriculou-se na Universidade de Roma e estudou psicologia, antropologia, higiene e pedagogia para que pudesse compreender melhor como as crianças aprendem. Após a morte da mãe de Maria, em 1912, seu filho passou a viver com ela.

Ela observou que as crianças excluídas da sociedade por serem vistas como ineducáveis, aprendiam com rapidez e entusiasmo ao realizar tarefas domésticas, praticando as habilidades motoras e a autonomia. Então, empregou o material criado por Séguin para lecionar os alunos deficientes intelectuais, obtendo um ótimo resultado, sendo que eles se tornaram capazes de cursar as escolas comuns. Nos exames nacionais de educação da Itália os alunos de Montessori, que encaravam diversas dificuldades para aprender, obtiveram melhores resultados do que boa parte dos estudantes das escolas ditas normais.

> Eu, porém, sabia que se esses deficientes haviam alcançado os escolares normais nos exames públicos era, unicamente, por haverem sido conduzidos por uma via diferente: tinham sido auxiliados no seu desenvolvimento psíquico, enquanto as crianças normais haviam sido, pelo contrário, sufocadas e deprimidas. [...] Enquanto todos admiravam o progresso dos meus deficientes, eu meditava sobre as razões que faziam permanecer em tão baixo nível os escolares sãos e felizes, a ponto de poderem ser alcançados pelos meus infelizes alunos nas provas de inteligência (MONTESSORI, 1965, p. 33).

Ela passou então a investigar se esse material e sua forma de lidar com a aprendizagem auxiliariam as outras crianças. Em 1907 criou a primeira 'Casa dei Bambini' (Casas das Crianças), projeto social que não visava somente à instrução, mas à educação de vida, ou seja, a educação completa da criança. Nessa casa, Montessori teve a oportunidade de trabalhar com crianças ditas normais de baixa renda. Modificou alguns materiais que tinha empregado com as crianças deficientes e criou outros. As crianças aprenderam a ler e a escrever rapidamente. Isso foi o ponto de partida para Maria Montessori criar seu próprio método. Em 1909, Maria Montessori escreveu “La Scoperta del Bambino”, que se eternizou com o título “Método Montessori”, sendo traduzido para o português em 1954 como “Pedagogia Científica: a descoberta da criança”.

Continuou com suas atividades até que Mussolini tomou o poder. Ele tentou aproveitar do método para fazer com que as crianças se encaixassem ao fascismo, o que seria completamente contraditório para Montessori. Ela decidiu não colaborar e se mudou para Barcelona, levando seu filho, até o momento desconhecido, e que mais tarde seria seu principal assistente e segundo Moraes (2009) ele “fez da obra de sua mãe sua própria história de vida”.

Na Espanha criou uma escola que novamente foi modelo de sua pedagogia. Viajou pelo mundo expandindo o Sistema Montessoriano. Após a guerra foi para a Holanda, onde fundou a AMI - Association Montessori Internationale. Em 1947, com setenta e seis anos, Montessori fez discurso para a UNESCO sobre “Educação e Paz”. Em 1949 recebeu a primeira de três indicações ao Prêmio Nobel da Paz. Sua última atividade registrada foi em 1951, com oitenta e um anos, quando participou do 9º Congresso Montessori Internacional. Morreu em 1952 de hemorragia cerebral na Holanda.

3.2 O MÉTODO MONTESSORI

Montessori partia do princípio de que a criança tem uma individualidade, e que os propósitos fundamentais da aprendizagem devem ser o autocontrole e a capacidade de decisão. Nas suas turmas a ordem era mantida sem recompensas ou punições. Montessori dava ampla liberdade aos seus alunos, mas não significava que maus comportamentos eram permitidos. Ela persistia em fazer com que os comportamentos fossem adequados e principalmente que todos se tratassem com respeito. Para ela, liberdade e disciplina se equilibram, não sendo possível alcançar uma sem a outra.

> Quando falamos da "liberdade" da criança pequena, não nos referimos aos atos externos desordenados que as crianças, abandonadas a si mesmas, realizaram como evasão de uma atividade qualquer, mas damos a esta palavra "liberdade" um sentido profundo: trata-se de "libertar" a criança de obstáculos que impedem o desenvolvimento normal de sua vida (MONTESSORI, 1965, p. 57).

Ela observou que as crianças se envolvem mais facilmente com coisas reais – o mundo dos adultos – que com os brinquedos tradicionais, e que progridem melhor em um ambiente de dignidade, respeito e liberdade. Para ela, as crianças têm um anseio em aprender e adquirir autonomia, o que ocorre espontaneamente quando existe liberdade suficiente para se focar em afazeres que elas escolhem por si.

> Elas não são compreendidas porque o adulto as julga segundo sua própria realidade evoluída: nós pensamos que a criança se preocupa com objetivos exteriores, auxiliamo-la amorosamente a atingi-los, sendo que sua finalidade inconsciente e verdadeira é a de desenvolver-se. Eis porque ela prefere a dinâmica de vestir-se à estática de ser vestida, muito embora este último ato se realize com perfeição. Prefere antes a ação de lavar-se que o bem-estar de se sentir limpa; gosta mais de construir uma casa que possuí-la. Não deverá, pois, gozar a vida, mas construí-la (MONTESSORI, 1965, p. 289).

Os princípios que sustentam a Metodologia Montessori são:

A autoeducação: consiste na interferência mínima dos professores, pois a aprendizagem teria como base o espaço escolar e o material didático. A criança recebe uma educação autônoma, possuindo total liberdade para repetir quantas vezes desejar as atividades.

> Importa deixar a natureza agir o mais livremente possível, e assim, mais a criança será livre no seu desenvolvimento, mais rapidamente e mais perfeitamente atingirá suas formas e suas funções superiores (MONTESSORI, apud RÖHRS, 2010, p. 16).

A educação como ciência: é a forma com a qual o professor entende a criança e seu processo de aprendizagem. Por meio da constante observação o educador emprega o método científico de observações, teorias e hipóteses para achar maneira mais eficaz de ensinar e mostrar a evolução em seu trabalho diário.

A educação cósmica: é a relação entre o que é atual e o que é passado, observando que todas as coisas estão interligadas e dependem umas das outras. Segundo este princípio, o professor apresenta o conhecimento ao aluno de maneira organizada, provocando sua criatividade e possibilitando à criança compreender o seu papel no universo de forma a contribuir com o mundo sem prejudicar a natureza.

O adulto preparado: o educador deve ser um observador que procura nas ações da criança os indícios de suas necessidades, fazendo com que a configuração do ambiente e as interações com ele, ofereçam os meios para que a criança se desenvolva. É essencial que ele tenha uma sólida formação e conhecimento, ou seja, conheça as fases da criança, saiba estruturar o ambiente, conhecer os materiais, reconhecer as atividades que mais envolvem aquela criança e quais as que ela não se interessa e consiga identificar os sinais apresentados por ela na realização das atividades que funcionam como indicadores para perceber em qual estágio essa criança se encontra.

> Portanto, a professora que opta em trabalhar com o Método Montessori precisa reavaliar alguns conceitos e ter uma formação especial, pois não está lidando com uma turma, onde todos fazem a mesma coisa ao mesmo tempo; não está apenas transmitindo conhecimentos, mas conduzindo cada um para aprender através de seu próprio esforço e ação, pois seu objetivo não é ministrar ensinamentos, mas sim despertar as potencialidades de cada aluno (MORAES, 2009, p. 76).

Para Montessori o educador deve auxiliar apenas no que realmente for preciso, evitando ajudar quando o aluno acredita que pode realizar a tarefa sozinho, mas deve assegurar que sua presença possa ser sentida caso a criança necessite.

A criança equilibrada: para Montessori há algo inato na criança pequena, que aponta qual o tipo de esforço necessário em cada fase (andar, pular, correr, falar, aprender isso ou aquilo) e é preciso aproveitar isso, oferecendo os meios adequados para o desenvolvimento para a criança alcançar o equilíbrio interior e torna-se mais concentrada, generosa, esforçada, cheia de iniciativa e independente.

> Maria Montessori ressaltou que o desenvolvimento humano tendia em direção ao equilíbrio, passando ao longo da vida por várias etapas no processo de seu desenvolvimento mental, ou seja, passava por uma sucessão de nascimentos, onde ocorriam perdas e ganhos. Porém, não se pode desconsiderar que cada período destes seria o desenvolvimento de algo que já havia sido iniciado na etapa anterior (MORAES, 2009, p. 62).

Partindo da ideia de que o exemplo dos alunos maiores colabora no processo da aprendizagem dos menores, as crianças são divididas em classes que não obedecem aos critérios de seriação, favorecendo uma troca de experiência entre elas.

O ambiente preparado: para Montessori tanto o ambiente, quanto o material são muito relevantes para o aprendizado. O ambiente preparado é construído para a criança, atendendo às suas necessidades biológicas e psicológicas, devendo ser organizado para possibilitar a aprendizagem por meio da absorção.

> A ordem das coisas significa conhecer a posição dos objetos no ambiente, lembrar-se do lugar onde cada um deles se encontra, ou seja, orientar-se no ambiente e dominá-lo em todos os detalhes. O ambiente pertencente ou dominado pelo espírito é aquele que se conhece, aquele onde é possível movimentar-se de olhos fechados e ter à mão tudo o que nos cerca: é um local necessário à tranquilidade e felicidade da vida. [. . .] Tal ambiente, conhecido em seu todo, possibilita a orientação para movimentar-se e alcançar objetivos (MONTESSORI, s.d., p. 67-69).

Um dos fatores mais importantes no ambiente Montessoriano é a organização, pois a criança é atraída pela ordem, o que facilita a criança introduzir, por si própria, a organização em sua rotina. Os materiais de desenvolvimento devem estar disponíveis para a livre utilização e a mobília deve ser de tamanho adequado a criança.

> A diferença profunda que existe entre este método e as "lições objetivas" dos métodos antigos é não constituírem "os objetos" um auxílio para a mesma que os deverá explicar, mas são, eles próprios, "meios didáticos". Este conjunto estabelece um auxílio para a criança que escolhe os objetos, pega-os, serve-se deles e exercita-se com eles segundo suas próprias tendências e necessidades, conforme o impulso do seu interesse. Os objetos, assim, tornam-se "meios de desenvolvimento (MONTESSORI, 1965, p. 143).

Os materiais apresentam sentido Montessoriano apenas quando elaborados e utilizados dentro dos princípios filosóficos: educação como ciência, autoeducação e educação cósmica. Há materiais pensados para auxiliar todo tipo de aprendizado, do sistema decimal à estrutura da linguagem. Entre os materiais usados por Montessori estão: molduras de tecido para botões, fivela, e outros; placas com texturas diferentes; cartões com graus de aspereza e maciez; caixa de tecidos; garrafas de temperatura; placas de materiais com temperaturas diferentes; tábuas do bárico; sólidos geométricos; séries de cilindros de madeira; mudando em altura; mudando em diâmetro; mudando em altura e diâmetro igualmente; mudando em altura e diâmetro inversamente; barras vermelhas; prismas marrons; cubos cor-de-rosa; duas caixas grandes de cores ou uma caixa com três pares de cores; uma caixa com doze pares de cores; uma caixa com sessenta e três tons de cores; planos geométricos de madeira acompanhada por cartões de pareamento com as formas preenchidas, cartões de pareamento com o contorno grosso das formas e cartões de pareamento com o contorno fino das formas; caixas de cilindros sonoros; os sinos; planos geométricos de metal com prateleiras inclinadas; letras de lixa; alfabeto móvel; barras vermelhas e azuis; os fusos; botões para contar; números de lixa; tábuas de números/ tábuas de Séguin; material de contas dourado; cubo do binômio; cubo do trinômio. Esses materiais são instrumentos mediadores e organizadores do pensamento permitindo a formação de uma estrutura de alta aprendizagem. Para Montessori, o material concreto não precisa ser sofisticado, mas deve ser manipulável, já que para ela a operação sensorial é a essência do aprendizado. Ela enfatiza que o material quando eficaz permite que a criança tenha liberdade de manipulá-lo, provocando-lhe a concentração, possibilitando novas conquistas e aprendizagens.

> Quando a criança se encontra ante o material, empenha-se num trabalho concentrado, sério, que parece extraído do melhor de sua consciência. Dir-se-ia na verdade que as crianças se colocam em condições de atingir a mais elevada conquista de que seu espírito é capaz (MONTESSORI, 1965, p. 170).

No Método Montessori prevalece a importância da liberdade, da atividade e do estímulo para o desenvolvimento físico e mental dos alunos, partindo do concreto para o abstrato, considerando que as crianças absorvem melhor pela experiência direta de busca e descoberta do que pela obrigação e imposição, por tanto é a criança que escolhe os materiais que irá trabalhar, daí a importância de desenvolver os melhores recursos didáticos que chamem atenção do aluno e provoquem o desenvolvimento do conhecimento, enriquecendo, assim, o processo educativo. Isso permite que o educador atenda seus alunos de forma individual ou em grupos, observando as necessidades de cada um.

> O método de observação há de fundamentar-se sobre uma só base: a liberdade de expressão que permite às crianças revelar-nos suas qualidades e necessidades, que permaneceriam ocultas ou recalcadas num ambiente propenso à atividade espontânea (MONTESSORI, 1965, p. 42).

Para Maria Montessori a metodologia que leva seu nome não estava finalizada e sua estrutura possibilitaria a qualquer momento adaptações as culturas e as sociedades diversas.

3.3 MATERIAL DOURADO

O Material Dourado é um dos materiais elaborados por Montessori para o trabalho com matemática. A princípio, ele era conhecido como "Material das Contas Douradas", e foi elaborado para auxiliar o ensino e a aprendizagem do sistema de numeração (decimal - posicional) e dos algoritmos das operações fundamentais.

> Preparei também, para os maiorzinhos do curso elementar, um material destinado a representar os números sob forma geométrica. Trata-se do excelente material denominado material das contas. As unidades são representadas por pequenas contas amarelas; a dezena (ou número 10) é formada por uma barra de dez contas enfiadas num arame bem duro. Esta barra é repetida 10 vezes

> em dez outras barras ligadas entre si, formando um quadrado, "o quadrado de dez", somando o total de cem. Finalmente, dez quadrados sobrepostos e ligados formando um cubo, "o cubo de 10", isto é, 1000” (MONTESSORI, apud SANTANA, 2010, p. 30).

O material usado por Montessori possibilitava que as crianças formassem, elas mesmas, as dezenas e centenas, mas a falta de precisão das dimensões dos quadrados e cubos poderia ser uma complicação nas atividades com números decimais. Por essa razão, ocorreu a mudança das contas douradas para os cubos de madeira na forma que vemos hoje. Atualmente, o Material Dourado é composto por: cubos, placas, barras e cubinhos. O cubo é formado por dez placas, a placa por dez barras e a barra por dez cubinhos.

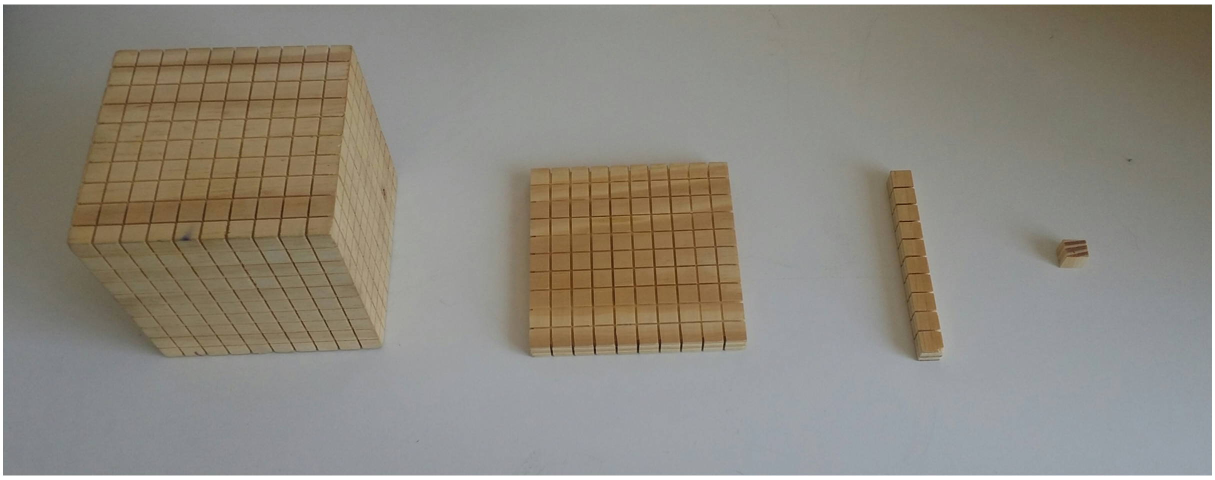
Figura 1 – Material Dourado

Fonte: Autor

Na elaboração dos materiais, a educadora seguiu o princípio da educação sensorial, por esta razão, segundo Daltoé e Strelow (s.d.), os materiais têm como objetivo: desenvolver no aluno a independência, a autoconfiança, a concentração, a coordenação e a ordem; criar e aperfeiçoar experiências concretas com a finalidade de direcionar, progressivamente, para as abstrações; fazer a criança perceber sozinha os erros que acaba cometendo ao fazer alguma atividade com o material; operar com os sentidos da criança.

Montessori percebeu que esse material pode ser empregado, também, com crianças de até seis anos de idade, para ampliar a criatividade, motricidade e o raciocínio lógico-matemático. Como a criança está sempre predisposta ao jogo, ele ajuda a provocar o interesse, a concentração e a criatividade, oportunizando a compreensão de relações de graduação e de proporções, e enfim, ajudando a contar e a calcular.

Figura 2 – Peças do Material Dourado



Fonte: Autor

> Aconteceu de crianças de quatro anos de idade ficarem atraídas por esses objetos brilhantes e facilmente manejáveis. Para surpresa nossa, puseram-se a combiná-los, imitando as crianças maiores. Surgiu assim um tal entusiasmo pelo trabalho com os números, particularmente com o sistema decimal, que se pôde afirmar que os exercícios de aritmética tinham se tornado apaixonantes. As crianças foram compondo números até 1000. O desenvolvimento foi maravilhoso, a tal ponto que houve crianças de cinco anos que fizeram as quatro operações com números de milhares de unidades (MONTESSORI, apud SANTANA, 2010, p. 30).

Tradicionalmente, os alunos acabam fazendo exercícios repetitivos para tentar aprender as operações fundamentais, e acabam sem entender o que fazem. Com o Material Dourado as operações são apresentadas de forma concreta, ajudando a compreensão das abstrações. É possível, também, trabalhar representação dos números de forma eficaz na aula de matemática propondo que o aluno elabore notações e expressões que empregará nas estratégias de uso dos materiais. Assim, o aluno poderá entender que a notação é uma das maneiras válidas para expressar sua forma de raciocínio, ou seja, deve formular sua própria linguagem enquanto trabalha com o material e resolve o que foi proposto, percebendo a necessidade de uma uniformização, e progressivamente, assimile a convenção da linguagem matemática.

Inicialmente a criança deve ter acesso ao Material Dourado fazendo construções livres, com objetivo de perceber a forma, a composição e os tipos de peças. Neste primeiro momento, elas mesmas podem atribuir nomes aos diferentes tipos de peças e criarem uma forma própria de registro. O educador pode trabalhar por um período com a linguagem elaborada pelos alunos para depois apresentar os nomes convencionais: cubinho, barra, placa e cubo (bloco). O próximo passo é trabalhar com as representações de números, agrupamentos e desagrupamentos. O entendimento dos agrupamentos na base 10 é essencial para a compreensão dos algoritmos das operações fundamentais, por isso o Material Dourado é construído de maneira a representar um sistema de agrupamento. Sendo assim, muitas vezes as crianças percebem sozinhas as relações entre as peças, as quais são: 1 cubinho representa 1 unidade; 1 barra equivale a 10 cubinhos que equivalem a 1 dezena ou 10 unidades; 1 placa equivale a 10 barras ou 100 cubinhos, ou seja, 1 centena, 10 dezenas ou 100 unidades; 1 cubo equivale a 10 placas ou 100 barras ou 1000 cubinhos (1 unidade de milhar,10 centenas, 100 dezenas ou 1000 unidades).

Isso não quer dizer que toda criança fará as relações sozinha, por isso, as atividades sistematizadas com o Material Dourado devem ter como objetivos fazer com que o aluno perceba as relações entre as peças e compreenda as substituições no Sistema de Numeração Decimal. Assim sendo, gradativamente, elas vão compreendendo a representação dos números. Por exemplo, que 23 pode ser representado por 23 cubinhos, mas também por 2 barras mais 3 cubinhos. Como é a partir da compreensão dessas transformações de unidades em dezenas, dezenas em centenas e assim sucessivamente, que os alunos vão dar significados a frases como “vai um”, “pega emprestado”, esse processo não deve ser decorado, e o educador deve observar atentamente se o aluno está compreendendo o que acontece nessas transformações.

Após a criança compreender essas relações é necessário que ela comece a representa-las graficamente, pois não é possível garantir que elas compreenderam essas relações no papel se não ocorre uma transição do material para o papel. Primeiro pode pedir para criança trabalhar com material dourado plano ou que desenhe e escreva abaixo os números que representam aquelas peças desenhadas. Para só depois ela começar a representar apenas o número graficamente. Toda vez que se trabalhe com o material concreto é necessário ter atenção a tranposição desse conceito para a representação gráfica.

3.3.1 ADIÇÃO COM MATERIAL DOURADO

Para se adicionar números, primeiro se representa cada número separadamente usando o Material Dourado. Então se adiciona ordem por ordem: cubinho com cubinho (unidade com unidade), barra com barra (dezena com dezena), placa com placa (centena com centena) e cubo com cubo (milhar com milhar), começando pela menor ordem, ou seja, pelos cubinhos (unidade). A cada ordem que passar de 10 troca-se pela ordem imediatamente superior, ou seja, se ao somar tivermos 10 ou mais cubinhos trocamos os 10 cubinhos por uma barra, se tivermos 10 ou mais barras trocamos por 1 placa, e assim por diante em cada uma das ordens. Então o resultado será o que permaneceu.

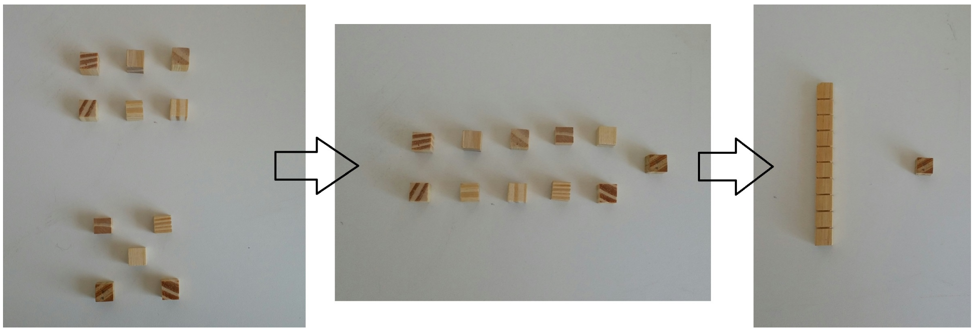
Exemplo 3.1. Fazendo adição com Material Dourado:

- $6 + 5$

    1. Primeiro representamos cada número separadamente.
    2. Então, começa a adição pelos cubinhos. Ou seja, 6 cubinhos mais 5 cubinhos é igual a 11 cubinhos.

3. Então, a cada 10 cubinhos trocamos por 1 barra. Assim 11 cubinhos é o mesmo que 1 barra e 1 cubinho.

Figura 3 – Material Dourado - Adição 6 + 5

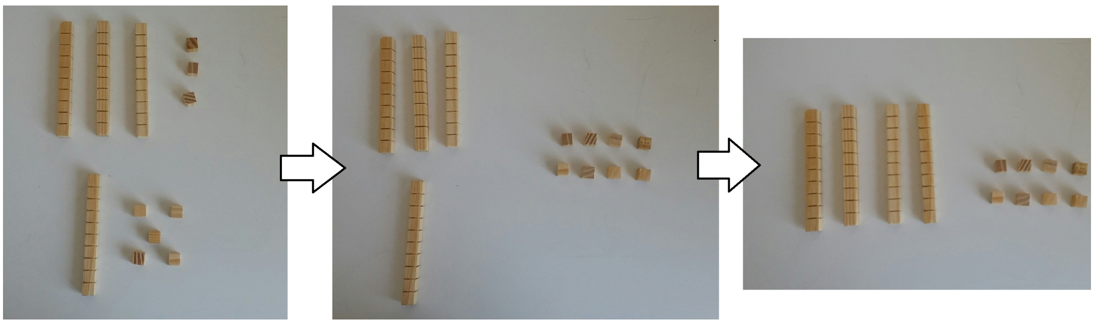


Fonte: Autor

- $33 + 15$

1. Primeiro representamos cada número separadamente: 3 barras e 3 cubinhos para representar o 33 e, 1 barra e 5 cubinhos para representar o 15.
2. Então, adicionamos ordem por ordem começando pela menor ordem: 5 cubinhos + 3 cubinhos = 8 cubinhos.
3. Passando para próxima ordem, temos 3 barras + 1 barra = 4 barras. Logo, teremos 4 barras e 8 cubinhos que é igual a 48.

Figura 4 – Material Dourado - Adição 33 + 15



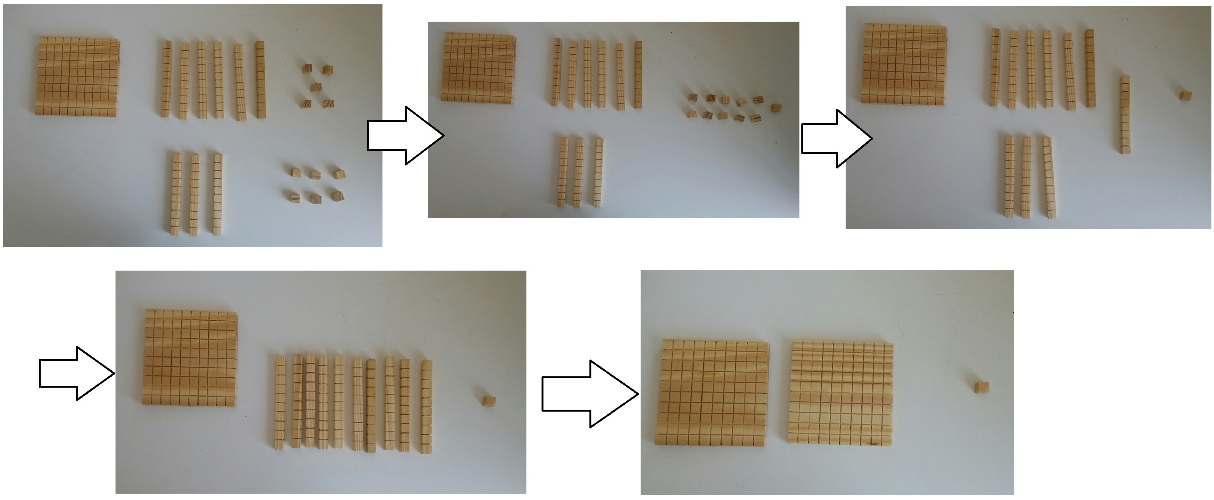
Fonte: Autor

- $165 + 36$

1. Primeiro representamos cada número separadamente. Para representar 165 teremos 1 placa, 6 barras e 5 cubinhos. Para representarmos o 36, teremos 3 barras e 6 cubinhos.
2. Então, começamos adicionando 5 cubinhos mais 6 cubinhos que são 11 cubinhos.

3. Como 11 cubinhos é o mesmo que 1 barra e 1 cubinho, então a barra vai ser somada às barras que já temos.
4. Logo, teremos 6 + 3 + 1 barras = 10 barras.
5. Como a cada 10 barras trocamos por 1 placa, podemos representar por 1 placa. Logo, teremos 0 barras e 1 placa, sendo que está será somada às placas que já temos. Teremos, 1 placa + 1 placa = 2 placas. No final teremos 2 placas 0, barras e 1 cubinho que é igual a 201.

Figura 5 – Material Dourado - Adição 165 + 36

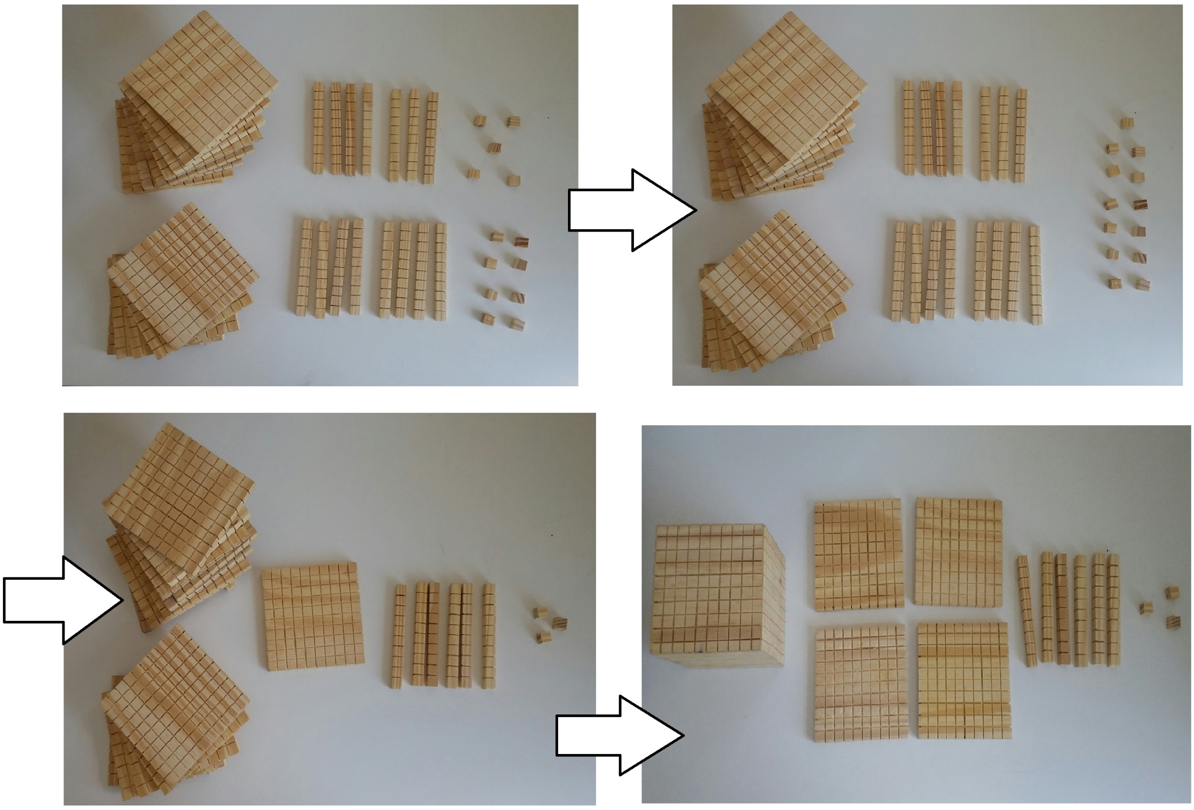


Fonte: Autor

- $875 + 588$

1. Primeiro representamos cada número separadamente. Representamos 835 com 8 placas, 3 barras e 5 cubinhos e, 588 é representado com 5 placas, 8 barras e 8 cubinhos.
2. Então, começamos adicionando 5 + 8 cubinhos = 13 cubinhos.
3. Os 13 cubinhos podem ser representado por uma barra e 3 cubinhos e essa barra será adicionada com as que já temos. Então, teremos 8 + 3 + 1 barras = 12 barras, que podem ser representada por 1 placa + 2 barras e essa placa será adicionada com as placas que nós já temos.
4. Então, teremos 1 + 8 + 5 placas = 14 placas, que pode ser representada por 1 cubo + 4 placas. Logo, teremos 1 cubo, 4 placas, 2 barras e 3 cubinhos que é igual 1423.

Figura 6 – Material Dourado - Adição 875 + 588



Fonte: Autor

3.3.2 SUBTRAÇÃO COM MATERIAL DOURADO

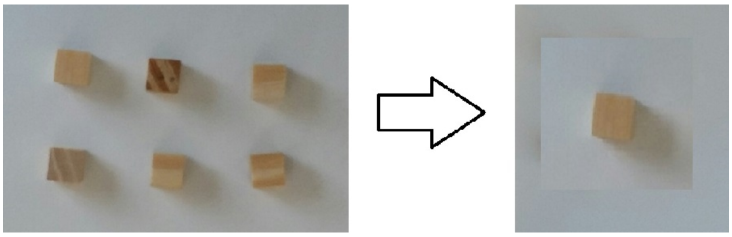
Para a subtração com o Material Dourado inicialmente representamos o primeiro valor e vamos fazendo a retirada do segundo valor ordem por ordem, começando pela ordem menor, ou seja, a unidade. Se a quantidade que precisarmos retirar for maior que o valor que consta naquela ordem, temos que emprestar da ordem imediatamente superior, ou seja, se tivermos que retirar mais cubinhos do que temos, 'emprestamos' uma barra e trocamos por 10 cubinhos e então retiramos o que precisamos, passamos para a próxima ordem e se precisarmos trocamos 1 placa por 10 barras e retiramos quantas barras precisamos, e assim por diante em cada uma das ordens. Então o resultado vai ser o que ficou.

Exemplo 3.2.

- $6 - 5$

  1. Primeiro representamos 6 com 6 cubinhos.
  2. Retiramos 5 cubinhos e a resposta é 1.

Figura 7 – Material Dourado - Subtração 6 - 5

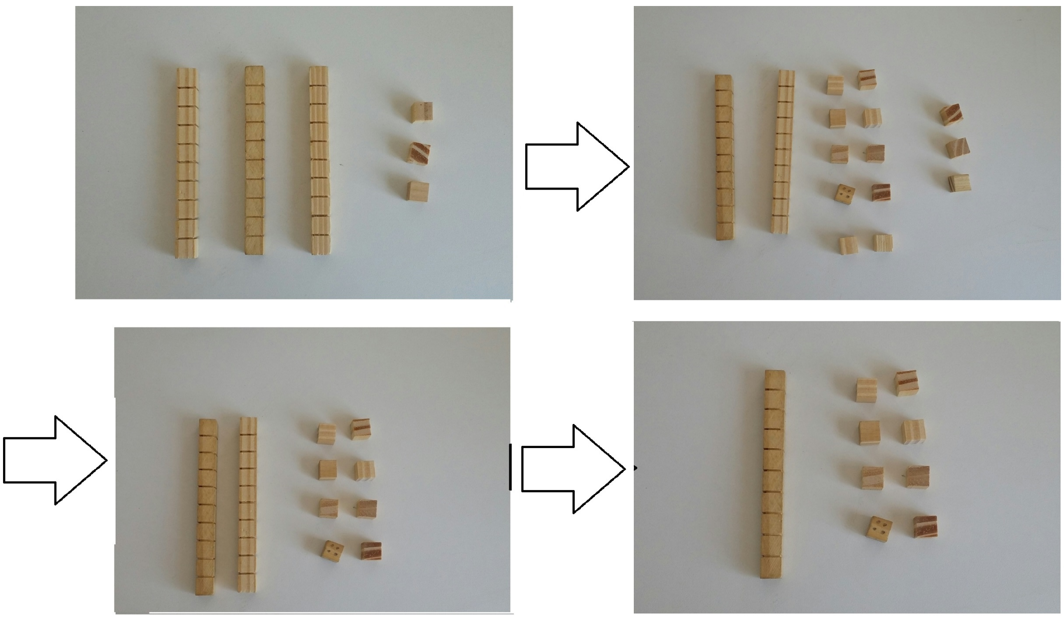


Fonte: Autor

- $33 - 15$

  1. Primeiro representamos o 33 com 3 cubinhos e 3 barras.
  2. Então, vamos fazendo a retirada do 15 ordem por ordem, começando pela ordem menor, ou seja, temos que tirar 5 de 3. Como 5 é maior que 3 , temos que emprestar da ordem imediatamente superior, ou seja, 'emprestamos' 1 barra e trocamos por 10 cubinhos e então teremos 13 cubinhos.
  3. Então, retiramos 5 cubinhos e ficaremos com 8 cubinhos. E, como 'emprestamos' 1 barra, temos agora 2 barras.
  4. Então, subtraímos 1 barra, o que resultará em 1 barra. Logo, o resultado é 1 barra e 8 cubinhos, ou seja, 18.

Figura 8 – Material Dourado - Subtração 33 - 15

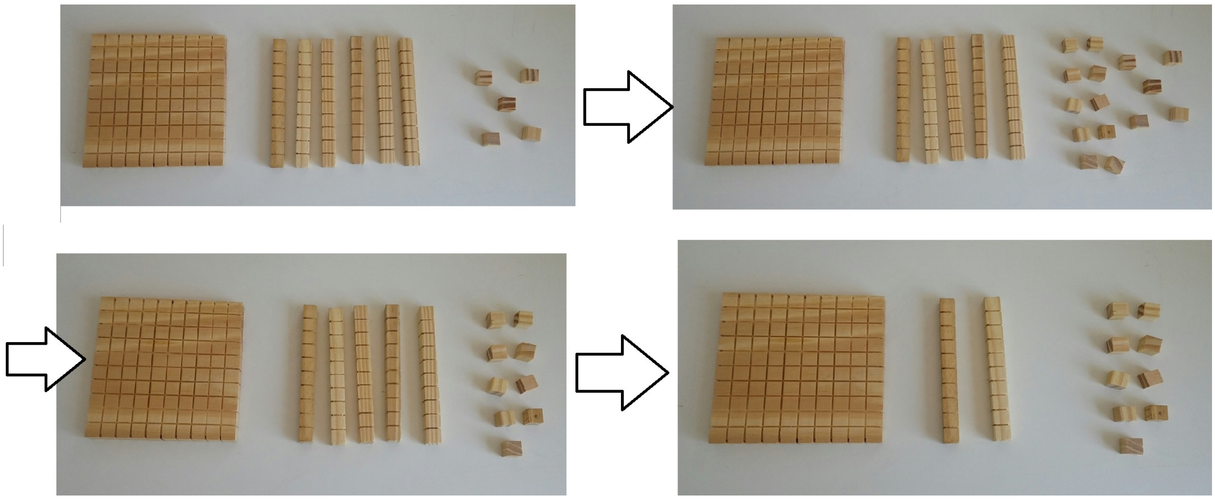


Fonte: Autor

- $165 - 36$

1. Primeiro representamos o 165 com 1 placa, 6 barras e 5 cubinhos.
2. Então, vamos fazendo a retirada do 36 ordem por ordem, começando pela ordem menor, ou seja, temos que tirar 6 de 5. Como 6 é maior que 5, temos que emprestar da ordem imediatamente superior, ou seja, 'emprestamos' 1 barra e trocamos por 10 cubinhos, resultando 15 cubinhos.
3. Então, retiramos 6 dos 15 cubinhos e ficamos com 9 cubinhos. Como 'emprestamos' 1 barra, temos agora 5 barras.
4. Então, subtraímos 3 barras e teremos 2 barras. Como não precisamos diminuir nenhuma placa temos que a resposta é 1 placa, 2 barras e 9 cubinhos, ou seja, 129.

Figura 9 – Material Dourado - Subtração 165 - 36

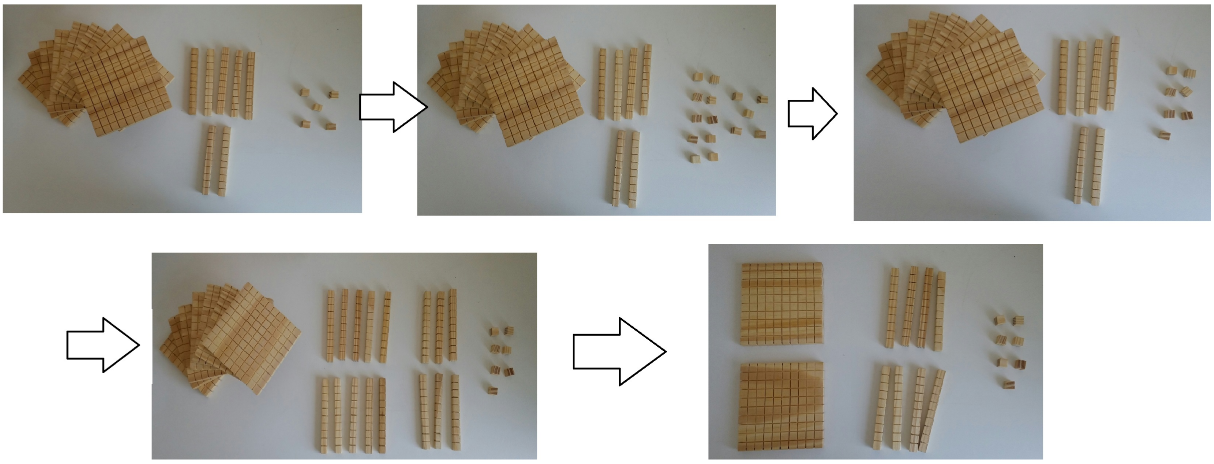


Fonte: Autor

- $875 - 588$

1. Primeiro representamos 875 com 8 placa, 7 barras e 5 cubinhos.
2. Então, vamos fazendo a retirada de 588 ordem por ordem, começando pela menor ordem. Como 8 é maior que 5, temos que emprestar uma barra e teremos 15 cubinhos.
3. Como 15 – 8 = 7, ficaremos com 7 cubinhos. Como 'emprestamos' 1 barra, temos agora 6 barras e temos que retirar 8 barras.
4. Como 6 é menor que 8, temos que emprestar uma placa e trocar por 10 barras. Logo, teremos 16 barras.
5. Retirando 8 barras das 16 barras resultará em 8 barras. Como 'emprestamos' 1 placa, teremos 7 placas e temos que retirar 5 placas, temos 2 placas. Então o resultado é 2 placas, 8 barras e 7 cubinhos, ou seja, 287.

Figura 10 – Material Dourado - Subtração 875 - 588



Fonte: Autor

3.3.3 MULTIPLICAÇÃO COM MATERIAL DOURADO

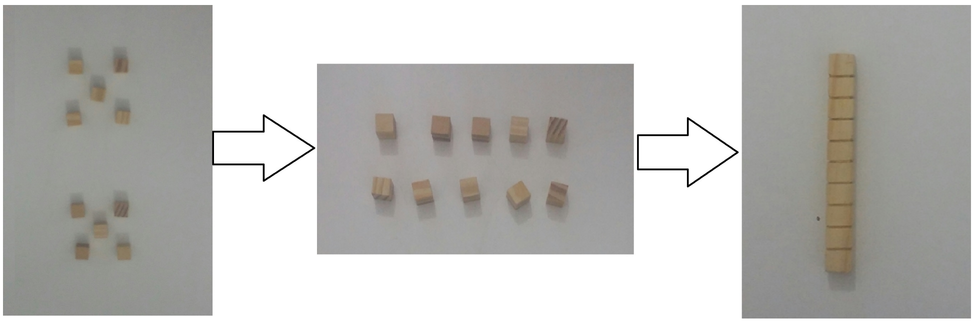
Para trabalharmos a multiplicação com o Material Dourado usa-se a ideia de soma de parcelas iguais. Primeiramente, representa-se o número a quantidade de vezes que iremos multiplicar, então se procede uma adição normalmente, somando ordem por ordem, começando pela menor ordem, fazendo trocas pela ordem imediatamente superior quando necessário.

Exemplo 3.3.

- 5×2

  1. Para multiplicar 5 por 2 primeiro representamos os 5 duas vezes.
  2. Então somamos: 5 + 5 = 10 cubinhos
  3. Que é o mesmo que 1 barra e 0 cubinhos, ou seja, 10.

Figura 11 – Material Dourado - Multiplicação 5×2

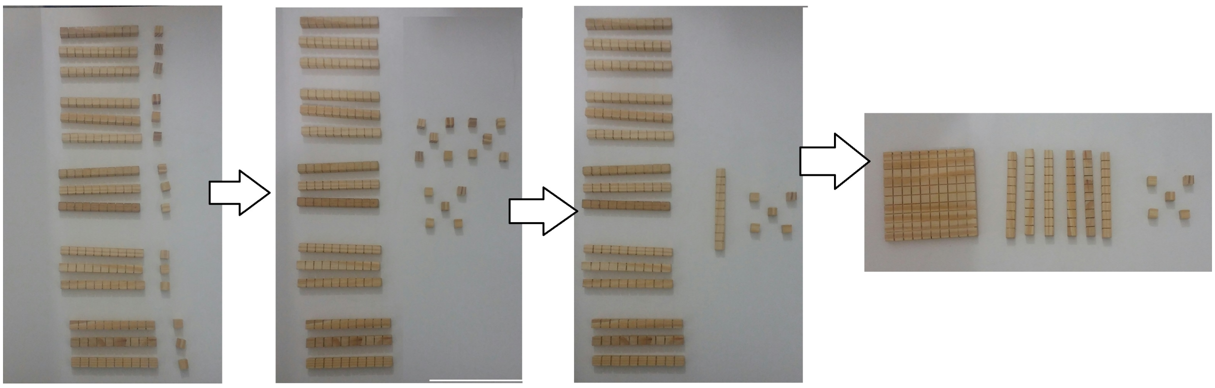


Fonte: Autor

- 33×5

  1. Primeiro representamos o 33 cinco vezes.
  2. Então, faremos uma adição. Começando pela menor ordem temos 3+3+3+3+3 cubinhos = 15 cubinhos.
  3. Esses 15 cubinhos podem ser representados por 1 barra e 5 cubinhos, e essa barra será adicionada com as que já temos. Passando para ordem imediatamente superior, 3+3+3+3+3+1 barras = 16 barras
  4. Essas 16 barras são representadas por 1 placa e 6 barras. Logo, o resultado será 1 placa, 6 barras e 5 cubinhos, ou seja, 165.

Figura 12 – Material Dourado - Multiplicação 33×5



Fonte: Autor

3.3.4 DIVISÃO COM MATERIAL DOURADO

Para a divisão com o Material Dourado, primeiro é necessário representar o número que pretende dividir, e diferentemente das outras operações, começamos a trabalhar com a ordem maior. Então, se quisermos dividir um número por n, comece distribuindo a mesma quantidade de peças da maior ordem em n grupos. Se sobrar peças que não podem ser distribuídas, sem perder a igualdade em cada grupo, então deve trocar essas peças por peças da ordem imediatamente inferior (por exemplo, um cubo será trocado por 10 placas), então passe para a distribuição dessa ordem menor, e se sobrar peças troca-se essas peças em peças da ordem imediatamente inferior, e assim sucessivamente, até não sobrar peças ou só sobrar cubinhos que não poderão ser distribuir. Se não sobrar peças é uma divisão exata e se sobrar, então a divisão possui resto.

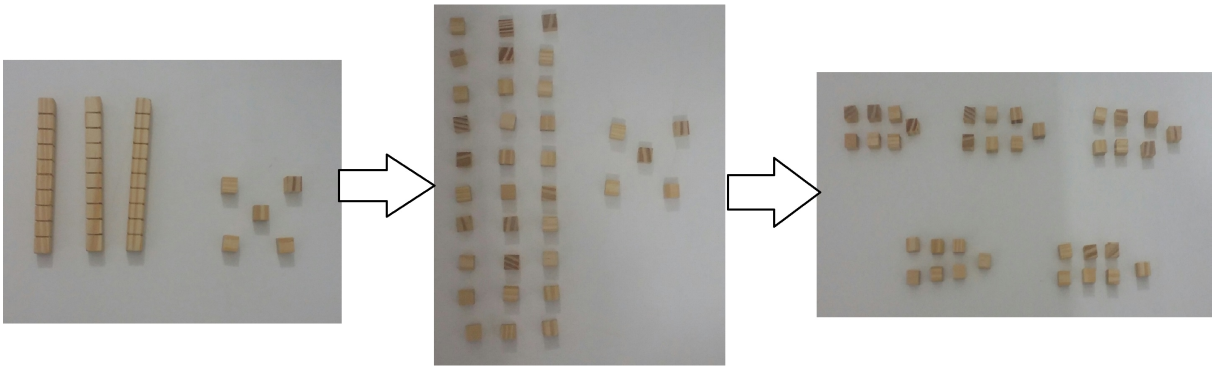
Exemplo 3.4.

- $35 \div 5$

  1. Primeiro representamos o 35 com 3 barras e 5 cubinhos.

2. Começamos distribuindo as peças da maior ordem. Como não conseguimos distribuir as 3 barras igualmente em 5 grupos, trocamos cada barra por 10 cubinhos e somamos com os cubinhos que já temos. Logo, teremos 35 cubinhos.
3. Distribuindo os cubinhos em cinco grupos, cada grupo ficará com 7 cubinhos e não sobrará nada. Então, o resultado de 35 dividido por 5 é 7.

Figura 13 – Material Dourado - Divisão $35 \div 5$

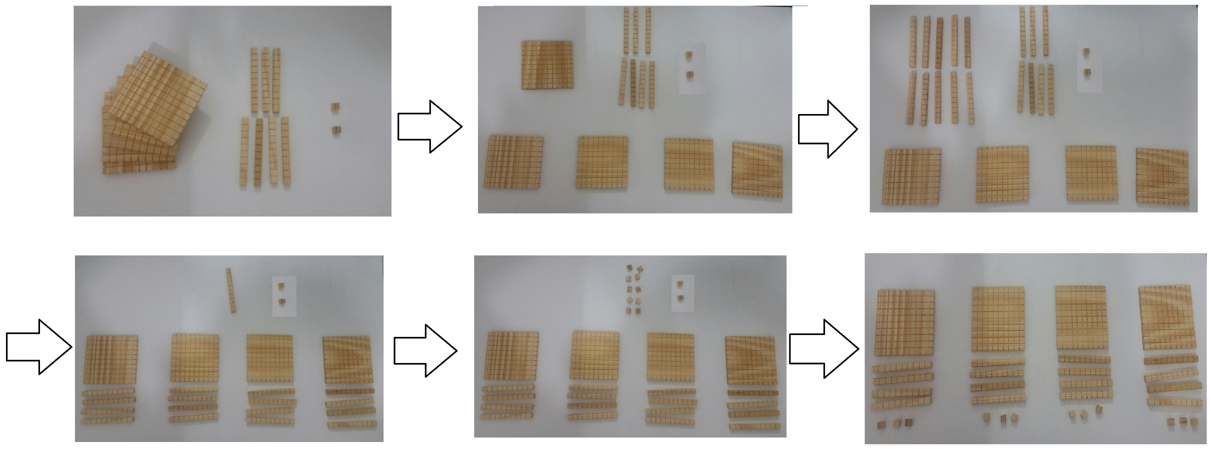


Fonte: Autor

- $572 \div 4$

1. Primeiro representamos 572 com 5 placas, 7 barras e 2 cubinhos.
2. Começamos distribuindo as peças da maior ordem; distribuindo as 5 placas em 4 grupos teremos 1 placa para cada grupo e sobrará 1.
3. Trocando essa placa que sobrou por 10 barras e somando com as barras que já possuíamos, teremos 17 barras.
4. Distribuindo as 17 barras em 4 grupos, teremos 4 barras para cada grupo e sobrará 1 barra.
5. Representamos essa barra como 10 cubinhos e somando com os que já possuíamos, teremos 12 cubinhos.
6. Distribuindo esses 12 cubinhos em 4 grupos, cada um ficará com 3 cubinhos e não sobrará nenhum, logo, cada grupo será composto por 1 placa, 4 barras e 3 cubinhos, logo $572 \div 4 = 143$.

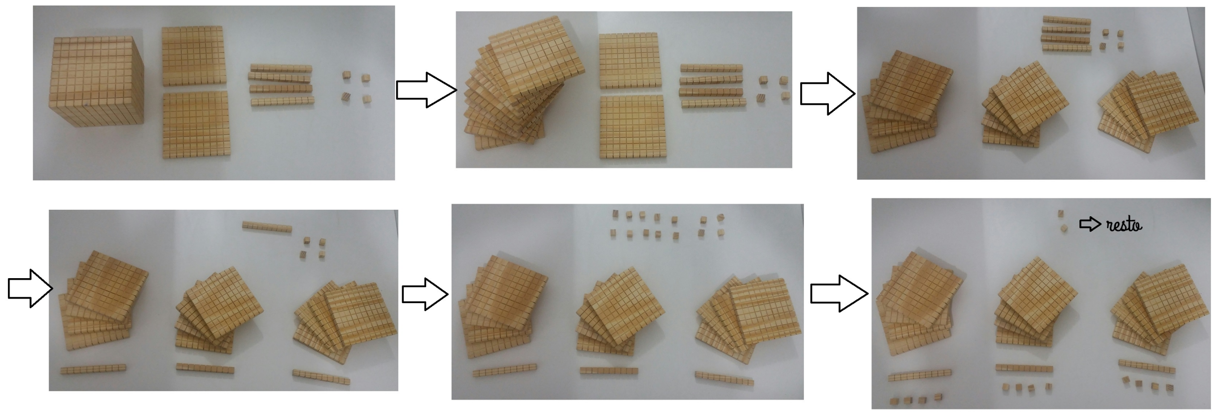
Figura 14 – Material Dourado - Divisão $572 \div 4$



Fonte: Autor

- $1244 \div 3$

Figura 15 – Material Dourado - Divisão $1244 \div 3$



Fonte: Autor

1. Primeiro representamos 1244 com 1 cubo, 2 placas, 4 barras e 4 cubinhos.
2. Começamos distribuindo as peças da maior ordem. Como não conseguimos distribuir 1 cubo igualmente em 3 grupos, trocamos o cubo por 10 placas e somamos com as placas que já temos. Logo, teremos 12 placas.
3. Então, distribuindo as 12 placas em 3 grupos teremos 4 placas para cada grupo e não sobrará nada nesta ordem. Passamos para a próxima ordem imediatamente inferior.
4. Temos 4 barras, distribuindo as 4 barras em 3 grupos teremos 1 barra para cada grupo e sobrará 1 barra.
5. Representamos essa barra com 10 cubinhos e somando com os que já possuíamos, teremos 14 cubinhos.

6. Distribuindo esses 14 cubinhos em 3 grupos, cada um ficará com 4 cubinhos e sobrará 2 cubinhos. Logo, esta divisão tem resto. Então, cada grupo será composto por 4 placa, 1 barra e 4 cubinhos e sobrará 2 cubinhos sem grupo, logo $1244 \div 3 = 414 + 2$.

3.3.5 DECIMAIS E O MATERIAL DOURADO

O Material Dourado pode ser utilizado para trabalhar com números decimais com representação finita, e para isso cada peça irá representar outro valor. Por exemplo, podemos colocar a placa como nossa unidade, então a barra será o décimo, pois precisamos de 10 barras para formar a nossa unidade, e o cubinho será nosso centésimo, porque precisamos de 100 cubinhos para formar a unidade. Neste caso, para representar o número 24,35 usaremos 2 cubos, 4 placas, 3 barras e 5 cubinhos. Mas, se definirmos nossa unidade como a barra, então o cubinho será o décimo, pois precisamos de 10 cubinhos para formar a nossa unidade. Neste caso, para representar o número 24,3 usaremos 2 placas, 4 barras e 3 cubinhos.

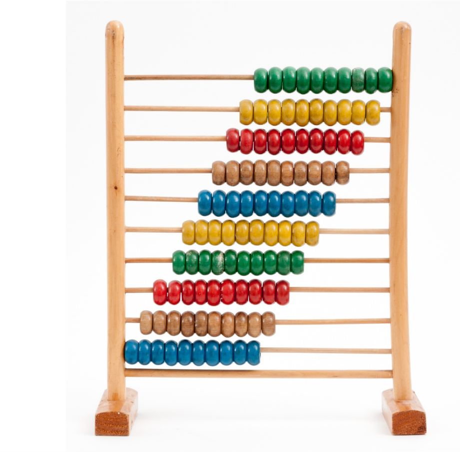
Para ensinar os números decimais utilizando o Material Dourado devemos inicialmente trabalhar as representações dos números decimais, e só depois explorar as operações destes números, sendo que a forma de realizar essas operações de adição e subtração com esse material é a mesma que foi utilizada para os números naturais.

3.4 ÁBACO

Como já foi dito, Montessori acreditava que os materiais manipuláveis eram de grande importância para a aprendizagem das crianças, por isso além de ter criado alguns materiais para a educação em matemática, citou vários outros já conhecidos, entre eles o ábaco.

O ábaco é um instrumento muito antigo usado para contar. Sua origem é incerta, já que diversos povos da antiguidade o utilizaram e possivelmente seu surgimento ocorreu de maneira independente em diversos locais. Acredita-se que ele surgiu para auxiliar a resolução de cálculos, principalmente em números de grandezas elevadas, muito antes de existir a calculadora. Atualmente, pode ser considerado um recurso para o ensino da matemática, pois o seu procedimento de cálculo está relacionado ao sistema de numeração decimal. Há vários tipos diferentes de ábacos, mas todos obedecem basicamente os mesmos princípios. Abaixo serão apresentados dois tipos: o ábaco fechado ou horizontal e o ábaco aberto (de pinos) ou vertical.

Figura 16 – Exemplo de ábaco fechado



Fonte: (JARVIS, sd)

Figura 17 – Exemplo de ábaco aberto

Fonte: (DORNELLAS, 2014)

Ábaco fechado: Na maioria das vezes possui uma moldura que serve de base para as hastes (arames) organizadas na horizontal paralelamente entre si, nas quais estão os elementos de contagem (fichas, bolas, contas) que podem deslizar livremente. Cada uma dessas hastes representa um dígito do número (unidades, dezenas, centenas, e assim sucessivamente). A quantidade de hastes - e consequentemente o número de dígitos - depende do tamanho do instrumento. Neste ábaco a primeira haste representa a unidade, a haste logo abaixo a dezena, e quanto mais para baixo se caminha, maior fica a ordem. Inicia-se a representação do número, zerando o ábaco, ou seja, deixando todas as peças para o lado esquerdo, então se representa a quantidade arrastando as peças para a direita. Cada vez que se agrupam dez peças em uma haste, deve-se passar as peças para a esquerda e arrastar para direita uma peça na haste imediatamente abaixo, representando a unidade da ordem seguinte. É importante que os alunos percebam que o número máximo de peças que podem ficar à direita é nove, pois quando chegar a dez limpamos esta haste e acrescentamos mais uma bolinha na classe superior a ela. Além disso, é preciso notar que o zero é representado pela ausência de peças no lado direito.

Ábaco aberto: Numa base de madeira ou outro material consistente são fixadas algumas hastes (bastões ou pinos), nas quais devem ser colocados até nove. Cada uma das hastes está relacionada com os múltiplos de 10, representando uma ordem do Sistema de Numeração Decimal. E, a quantidade de bastões é a quantidade de dígitos máxima que a representação do número poderá ter. Neste ábaco o bastão mais à direita representa a unidade, o próximo bastão para a esquerda a dezena, e quanto mais para a esquerda se anda, maior fica a ordem. Inicia-se a representação do número deixando os bastões vazios e vai acrescentando peças para representar a quantidade desejada. Cada vez que se agrupam dez peças em um bastão deve-se trocá-las por uma peça no bastão imediatamente à esquerda, representando a unidade da ordem seguinte. É interessante que os alunos compreendam que este ábaco admite no máximo nove peças por bastão e que o zero é representado pelo bastão vazio.

Exemplo 3.5. Operações com ábacos:

1. Representação de números no Ábaco fechado: como se escreve os números 436 e 3207 no ábaco?

    - O primeiro passo é limpar o ábaco, isto é, deixar todas as bolinhas à esquerda. Então, deslocamos 6 bolinhas para a direita na primeira haste (unidades), 3 na segunda haste (dezenas) e 4 na terceira haste (centenas).
    - Para 3207, primeiro deslocamos à direita 7 nas unidades, 2 nas centenas e 3 nas unidades de milhar.

2. Adição simples ou sem reservas: 2345 + 243 = ?

    - Inicialmente representamos uma das parcelas, no caso 2345. Em seguida deslocamos as unidades, depois as dezenas, as centenas de 243.
    - Deslocamos à direita: 3 peças nas unidades, 4 nas dezenas, 2 nas centenas: 5 + 3 = 8, 4 + 4 = 8, 3 + 2 = 5, obtendo 2588.

3. Adição com transporte ou reserva (neste tipo de adição é necessário uma mudança de unidade): 9358 + 3596 = ?

    - Inicialmente representamos uma das parcelas, no caso 9358. Em seguida adicionamos 6 peças às 8 da primeira haste e ficaríamos com 14 peças (unidades). Mas, isso não é possível, então temos que perceber que no ábaco representamos o 14 com 1 peça na segunda haste e 4 peças na primeira haste. Então limpamos a primeira haste (casa das unidades), em seguida deslocamos 4 peças à direita desta haste e acrescentamos mais uma peça na haste logo abaixo (casa das dezenas), 5 + 1 = 6, e obtemos 9364.
    - Então, somamos as 6 peças (dezenas de 9364) com as 9 peças (dezenas de 3596) na segunda haste, e teríamos 15 peças. Mas, isso não é possível, então temos que perceber que no ábaco representamos as 15 dezenas com 1 peça na terceira haste e 5 peças na segunda haste. Então limpamos a segunda haste (casa das dezenas), em seguida deslocamos 5 peças à direita desta haste e acrescentamos mais uma peça na haste logo abaixo (casa das centenas), 3 + 1 = 4, e obtemos 9454.
    - Então, somamos 4 (centenas de 9454) com 5 (centenas de 3596) na terceira haste, e teremos 9 peças nesta haste e obtemos 9954.
    - Então, somamos as 9 peças (unidade de milhar de 9954) com as 3 peças (unidade de milhar de 3596) na quarta haste, e teríamos 12 unidades de milhar. Mas isso não é

possível, então teremos que representar 1 peça na quinta haste e 2 peças na quarta haste (1 nas dezenas de milhar e 2 na classe das unidades de milhar). Então limpamos a quinta haste, em seguida deslocamos 2 peças à direita desta haste e acrescentamos mais uma peça na haste logo abaixo e obtemos 12954.

4. Subtração simples ou sem recurso : 646 – 321 = ?

   - Inicialmente representamos o número 646 no ábaco. Em seguida deslocamos 1 peça da primeira haste (unidades), da direita para a esquerda, ficando com 5 unidades e obtendo 645.
   - Depois deslocamos 2 peças das 4 peças da segunda haste (dezenas), ficando com 2 dezenas e obtendo 625.
   - Depois deslocamos 3 peças das 6 peças da terceira haste (centenas), ficando com 3 centenas e obtendo 325.

5. Subtração com recurso (neste tipo de subtração é necessário uma mudança de unidade): 934 – 387 = ?

   - Inicialmente representamos o número 934 no ábaco. Para se subtrair, começamos pela primeira haste. Não podemos tirar 7 peças na primeira haste, pois só temos 4 peças nela (unidades). Então, devemos deslocar uma peça da segunda haste (dezenas) para a esquerda (que ficará com 2 peças) e 10 peças para a direita na primeira haste (unidades). Como isso não é possível, pois não há 14 peças, deixamos 10 peças a direita e anotamos que temos 4 em haver. Subtraímos as 7 unidades, ou seja, deslocamos para a esquerda as 7 peças e acrescentamos as 4 peças que temos em haver, deslocando as 4 peças para a direita. Então, 10 – 7 = 3 e 3 + 4 = 7, obtendo 927.
   - Então passamos para a próxima casa. Não podemos tirar 8 peças das 2 peças que temos agora na segunda haste (dezenas). Então, devemos deslocar uma peça da terceira haste (centenas) para a esquerda (que ficará com 8 peças) e 10 peças para a direita na segunda haste (dezenas). Como isso não é possível, pois não há 12 peças, deixamos 10 peças a direita e anotamos que temos 2 em haver. Deslocamos as 8 peças para a esquerda e acrescentamos as 2 peças que temos em haver, deslocando as 2 peças para a direita. Então, 10 – 8 = 2 e 2 + 2 = 4, obtendo 847.
   - Finalmente, podemos deslocar as 3 peças das 8 peças da terceira haste (centenas), 8 – 3 = 5 e tendo como resposta final 547.

4 O ERRO COMO ESTRATÉGIA DIDÁTICA

O erro não deve ser encarado por aspectos negativos, pois ele pode auxiliar na superação das dificuldades apresentadas. Para isso é preciso deixar de enxergar o erro pelo ponto de vista do resultado, onde este tem atribuição de culpa e penalidade, pois esta visão prejudica o processo que poderia favorecer a construção do conhecimento. Essa ênfase na verificação e valorização apenas dos resultados contribui para uma característica que a Matemática escolar apresenta: a mecanização, onde os alunos devem apenas memorizar o conhecimento transmitido e gravar as fórmulas para resolução dos exercícios. Segundo Pinto (2000, p. 142), isto ocorre, pois "em geral, o professor tende a agir sobre os erros a partir de perspectiva empirista, isto é, corretiva, aliando a institucionalização primitiva à remediação". Quando o professor corrige as atividades dos alunos apenas verificando o resultado, e a devolve sem discutir o motivo que levou ao erro, não ajuda o aluno a enfrentar esse erro e construir o conceito que não foi reestruturado.

> Numa concepção de matemática excessivamente voltada para a transmissão de um conhecimento feito e estabelecido, com todo aparato de rigor e exatidão de um conhecimento pronto para ser utilizado, o erro constitui algo que deve ser eliminado e punido: jamais analisado e tratado, pois representam a falha, o déficit, a negação, a inconsciência, a contradição, o engano, a dúvida, a incerteza, a incompletude; enfim, tudo o que uma ciência exata e rigorosa abomina em seu produto final (PINTO, 2000, p.18).

Quando há acertos, o professor deve buscar entender quais foram os meios utilizados pelo seu aluno, já que o aluno pode utilizar diferentes maneiras para produzir uma resposta correta. Já, quanto aos erros, a necessidade de analisá-los é ainda mais evidente, pois somente esta análise permitirá que o professor conheça as dificuldades enfrentadas por seus alunos e os meios para remediar a situação. O professor deve buscar conhecer o grau de desenvolvimento dos seus alunos para que possa decidir se é necessária a interversão na reformulação dos conceitos e métodos que o aluno utiliza, pois na compreensão deles estão envolvidos os conhecimentos prévios do aluno.

O erro deve ser usado como uma estratégia de aprendizagem para retomada de conceitos que não foram bem estruturados. Ele é uma projeção dos mecanismos com os quais a mente age, podendo ser um instrumento para compreender melhor os processos cognitivos e o próprio desenvolvimento. Além de poder ser usado como instrumento para identificar dificuldades comuns na aprendizagem e metodologia de ensino ineficiente, pois tem uma capacidade de ajudar no processo de ensino-aprendizagem, e precisa ser melhor explorado, tanto pelos professores, como também pelos próprios alunos. Segundo Plaza e Curi (2013, p. 2) "a análise das produções escritas dos alunos a partir dos conhecimentos por eles já construídos, equivocados ou não, pode favorecer significativamente a prática pedagógica".

> Sobre a questão do erro, Vergnaud (1982) entende que ele é parte integrante do processo de aprendizagem podendo ser visto como revelador dos significados com os quais as crianças trabalham; da defasagem entre o significado e significante e da explicitação das invariantes que constroem a respeito de um conjunto de situações. Para ensinar conceitos matemáticos e até mesmo para transformar os conceitos prévios dos alunos em conceitos mais elaborados, os professores precisam estar conscientes da importância do papel que a experiência cotidiana tem na formação de conceitos; precisam ter clareza das dificuldades que os alunos têm em compreender novas relações, em fazer novas associações; precisam conhecer os tipos de erros que eles cometem e, então, promover situações que propiciem o agregamento de novas informações e novos conhecimentos aos já previamente adquiridos, e com isso a ampliação dos conceitos já existentes (SOUZA, 2002, p. 34).

Na metodologia de análise de erros, o erro deixa de ser sinônimo de falta de conhecimento, e passa a ser visto como facilitador do processo de ensino e aprendizagem, pois a análise do mesmo auxilia ao aluno ser capaz de refletir e aprender com ele, contribuindo para a reconstrução de conceitos mal estruturados. Mas isso não é uma tarefa fácil, requer esforço e paciência por parte do professor para identificar qual é o erro que o aluno comete e porque ele o comete. Segundo Pinto (2000, p.147), para se ter uma estratégia didática inovadora em que o erro contribuía para uma aprendizagem significativa, "o erro precisa ser um 'observável' para o aluno, mas só será um 'observável' para o aluno se o for para o professor".

Segundo Pinto (2000, p.37-65), há três "bases teóricas, capazes de elucidar a concepção construtivista do erro no processo da aprendizagem da matemática desenvolvido pela criança em sua escolarização básica." São eles: perspectiva psicogenética, a perspectiva epistemológica e a perspectiva sociológica.

Na perspectiva psicogenética (baseada nos estudos que Piaget realizou durante 70 anos com objetivo de investigar o desenvolvimento das estruturas do pensamento humano e sua relação com o "amadurecimento" genético) o que importa é que o erro seja "um observável" para o aluno. Nesta visão, as respostas dos alunos são classificadas em três níveis: no primeiro nível, o aluno é indiferente ao erro, pois ainda não consegue resolver ou compreender o problema ou exercício sugerido, ou seja, não se incomoda com respostas sem sentido; no segundo nível, o da tentativa, o erro surge como um problema a ser resolvido, o aluno reconhece que há algo errado e a ajuda do professor pode contribuir para superá-lo; no terceiro nível, o erro passa a ter um sentido ao aluno, é um observável, pois ele sabe onde ou porque errou e consegue superá-lo sozinho, por meio de uma pré-correção ou uma correção no quadro, por exemplo. De acordo com Pinto (2000), na visão construtivista, o erro deixa de ser um indício de fracasso escolar e passa a ser um elemento que pode ajudar na construção do conhecimento, por isso é necessário que o professor reveja sua prática pedagógica:

> [...] o erro, concebido numa dimensão construtivista, configura-se como uma oportunidade didática para o professor. Em primeiro lugar, por ser um guia para um planejamento de ensino mais eficaz, oferecendo indícios importantes para a identificação dos processos subjacentes à construção conceitual – condição

> relevante na organização do ensino. Em segundo lugar, porque, se observado com maior rigor, poderá oferecer novos elementos para o professor refletir sobre suas ações didáticas e, com isso, imprimir novos direcionamentos as suas práticas pedagógicas (PINTO, 2000, p. 139).

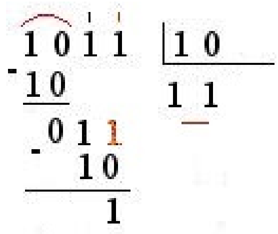
A perspectiva epistemológica é abordada por Pinto (2000) a partir do trabalho sobre ensino da matemática de Brousseau, inspirado pelas ideias de Bachelard sobre o desenvolvimento da ciência. Segundo Pinto (2000), o estudo revela que no caminho do processo de apropriação de um novo conhecimento, as novas informações se tornam discordantes das já existentes, colaborando para o aparecimento do erro, em termos didáticos. E aponta três origens fundamentais dos erros: os erros de origem ontogenética são referentes ao desenvolvimento do sujeito, que estão ligados as habilidades cognitivas, onde ainda falta ao sujeito informações para compreender o conceito estudado; os erros de origem didática referem-se às metodologias adotadas pelo professor que acaba criando obstáculo didático, quando tenta dar significações aos conteúdos escolares, sem uma análise de como o aluno aprende, este erro aparece na "transposição didática"; os erros de origem epistemológico referem-se aos obstáculos epistemológicos que são próprios do objeto de conhecimento e deles não há como o professor fugir, pois o obstáculo está ligado ao conhecimento e as suas representações historicamente, esses erros existem independentemente do sujeito, mas está conectado ao desenvolvimento do conhecimento cultural em sua raiz. Não pode ser ignorado, eliminado ou menosprezado pelo professor, por ser intrínseco à produção do conhecimento.

> A partir de Brousseau, Artigue (1990) ressalta a importância de uma análise epistemológica no campo da didática dos conteúdos, como forma de controle das "representações epistemológicas". Segundo ela, a noção de obstáculo epistemológico tem possibilitando ao professor perceber a coerência interna de sua disciplina e, assim, formular novos quadros teóricos em sua área. A autora afirma, ainda que uma análise epistemológica contribui para a superação das representações epistemológicas errôneas presentes nas práticas pedagógicas, pois permite ao professor, por exemplo, perceber a distância existente entre o "saber científico" e o "saber ensinado" (PINTO, 2000, p.55).

Na perspectiva sociológica, ainda segundo Pinto (2000), o erro deve ser visto como algo que pode contribuir para o sucesso escolar, e não como motivo do fracasso escolar, pois o aluno deve ter a oportunidade de errar mais sem ter punição, para que possa acertar mais. O aluno deve perder o medo do erro, e sentir que este é o caminho que deve seguir para que possa acertar mais.

Existem vários tipos de erros e vários motivos do porquê eles são cometidos e a superação deles dependerá da forma que forem trabalhados, por isso o professor necessita conhecer os tipos de erros que podem ocorrer e reconhecer qual o aluno possui. Na matemática há diferentes tipos de erros, entre eles estão: linguagem, simbólicos, conceituais (anterior ou atual), algébricos, de interpretação e aquele ocasionado por falta de atenção. Ou seja, podemos classificar alguns dos erros mais cometidos pelas causas: linguagem mal interpretada ou problemas com a simbologia matemática, domínio deficiente de conteúdos, associações incorretas entre conteúdos, aplicação de regras ou estratégias irrelevantes na resolução, compreensão do que é solicitado no problema, uso errado dos dados do problema, erros de contagem ou cálculo ou erros lógico (conclusões absurdas). Identificar o erro facilita o professor analisar qual é a maneira de ajudar o aluno a compreender o que não foi entendido. É imprescindível que o professor saiba quais são os conhecimentos prévios do aluno, distinga o erro e o motivo dele para que consiga interferir com pertinência e adequação na necessidade ou não de reformular os pensamentos, conceitos e métodos do aluno.

Tabela 1 – Exemplos de erros

$\begin{array}{rrr} & {}^{3}4 & 5 \\ + & 2 & 8 \\ \hline & 9 & 1 \end{array}$	Nesta situação o aluno sabe que a soma de 5 unidades mais 8 unidades é 13, mas ao registrar coloca 1 no lugar da unidade e leva o 3 para as dezenas. É preciso investigar se esse erro ocorreu por falta de atenção ou por o aluno desconsiderar a estrutura do número.
$\begin{array}{rrrr} & {}^{8}\cancel{9} & {}^{1}0 & {}^{1}0 \\ - & & 4 & 8 \\ \hline & 8 & 6 & 2 \end{array}$	Este erro ocorreu no ‘’empréstimo” do zero. É preciso investigar se o não sabe que ao desagrupar da centena é necessário desagrupar a dezena para o “empréstimo” a unidade ou se houve apenas falta de atenção por parte do aluno.
	O erro foi desconsiderar que ao dividir a ordem da dezena por 10, deveria-se ter colocado o 0 no quociente e então baixando a unidade. É preciso investigar se esse erro ocorreu por falta de atenção ou por o aluno desconsiderar a estrutura do número ou deficiência na compreensão do algoritmo.

O erro indica o motivo da dificuldade do aluno e é necessário entender e trabalhar o que está por trás do erro. O primeiro passo para compreender o erro é procurar interpretar a produção do aluno. É necessário que o professor saiba identificar os erros nas atividades escritas e nas manifestações orais, para ajudar o aluno a buscar alternativas e reverter o erro em acerto. Não é uma tarefa fácil compreender o raciocínio utilizado por ele, mas esse exercício de leitura e interpretação auxilia a descoberta de novas de opções de intervenção pedagógica. Para isso, é necessário verificar se interpretação feita pelo professor coincide ou não com o que efetivamente o aluno pensou. É preciso incentivar o aluno a enfrentar o medo de expor o erro, pois em uma que conversa permita o treino da argumentação e a organização do pensamento, a análise acontece por todos. O professor deve discutir com os alunos as resoluções errôneas, e não apenas deixar que os erros prossigam da mesma forma, com o discurso que o erro faz parte do processo para a aprendizagem, pois benefício de se trabalhar com ele ocorre quando o usamos na reestruturação do conhecimento.

Ao trabalharmos usando a metodologia de análise de erros, este não é um problema que deve ser eliminado, e sim, um “trampolim” para a aprendizagem de novos conceitos. Alunos e professores devem entender que o erro pode ser um artifício para a obtenção do conhecimento, o que o torna um ótimo recurso didático, pois o erro envolve processos de pensamento que quando trabalhado com os alunos, com a intenção de descobrir o caminho até chegar ao erro, oportuniza aos alunos refazerem seu processo de construção do conhecimento.

5 UMA ATIVIDADE PARA FORMAÇÃO DE PROFESSORES

Os alunos das séries iniciais ingressam na escola com conhecimento prévio de número, e na escola ele deve transformar esse conhecimento do cotidiano em conteúdo científico. “Apesar de ser um conteúdo de uso cotidiano, o trabalho escolar com o Sistema de Numeração Decimal, não é fácil. Tal dificuldade origina-se na própria gênese de sua criação, processo que a humanidade levou milhares de anos” (AMARAL, 2015, p.62). A construção do conceito de sistema de numeração posicional necessita ser bem estruturada, pois a não compreensão deste conceito provoca dificuldades nas operações matemáticas e no raciocínio lógico-matemático.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) para o Ensino Fundamental de Matemática (anos iniciais), se divide em 1º ciclo (1º, 2º e 3º anos) e 2º ciclo (4º e 5º anos). Segundo esse documento os objetivos que os alunos devem alcançar em relação ao bloco de conteúdo dos números e operações no 1º ciclo são:

> • Ler e escrever números (naturais), utilizando conhecimentos sobre a escrita posicional: Espera-se que o aluno seja capaz de utilizar o número como um instrumento para representar e resolver situações quantitativas presentes no cotidiano, evidenciando a compreensão das regras do sistema de numeração decimal.
>
> • Comparar e ordenar quantidades que expressem grandezas familiares aos alunos, interpretar e expressar os resultados da comparação e da ordenação: Espera-se que o aluno tenha noção de quantidade e utilize procedimentos para identificar e comparar quantidades, em função da ordem de grandeza envolvida, e seja capaz de ordenar quantidades, localizar números em intervalos, numa sequência numérica (o “limite” da sequência numérica é estabelecido em função do que for possível avançar, considerando-se as experiências numéricas da classe).
>
> • Resolver situações-problema que envolvam contagem e medida, significados das operações e seleção de procedimentos de cálculo: Espera-se que o aluno resolva problemas expressos por situações orais, textos ou representações matemáticas e utilize conhecimentos relacionados aos números, às medidas, aos significados das operações, selecionando um procedimento de cálculo pessoal ou convencional e produzindo sua expressão gráfica. Ao finalizar este ciclo, os diferentes significados das operações não estão consolidados; por isso, os problemas devem abordar os significados que já foram apropriados pelos alunos, priorizando as situações de adição e subtração. (BRASIL, 1997, p. 49).

Os alunos do 2º ciclo devem:

> • Ler, escrever números naturais e racionais, ordenar números naturais e racionais na forma decimal, pela interpretação do valor posicional de cada uma das ordens: Espera-se que o aluno saiba ler, escrever, ordenar, identificar sequências e localizar, em intervalos, números naturais e números racionais na forma decimal, pela identificação das principais características do sistema de numeração decimal.
>
> • Realizar cálculos, mentalmente e por escrito, envolvendo números naturais e racionais (apenas na representação decimal) e comprovar os resultados, por

> meio de estratégias de verificação: Espera-se que o aluno saiba calcular com agilidade, utilizando-se de estratégias pessoais e convencionais, distinguindo as situações que requerem resultados exatos ou aproximados. É importante também avaliar a utilização de estratégias de verificação de resultados, inclusive as que fazem uso de calculadoras.
>
> • Resolver situações-problema que envolvam contagem, medidas, os significados das operações, utilizando estratégias pessoais de resolução e selecionando procedimentos de cálculo: Espera-se que o aluno resolva problemas utilizando conhecimentos relacionados aos números naturais e racionais (na forma fracionária e decimal), às medidas e aos significados das operações, produzindo estratégias pessoais de solução, selecionando procedimentos de cálculo, justificando tanto os processos de solução quanto os procedimentos de cálculo em função da situação proposta. (BRASIL, 1997, p. 59).

Ainda de acordo com os PCNs, as atividades de leitura, escrita, comparação e ordenação das representações dos números devem ser feitas a partir dos números que o aluno conhece, e

> As escritas numéricas podem ser apresentadas, num primeiro momento, sem que seja necessário compreendê-las e analisá-las pela explicitação de sua decomposição em ordens e classes (unidades, dezenas e centenas). Ou seja, as características do sistema de numeração são observadas, principalmente por meio da análise das representações numéricas e dos procedimentos de cálculo, em situações-problema. (BRASIL, 1997, p. 48).

Porém, de acordo com Amaral (2015), o ensino do sistema de numeração, muitas vezes, é enfatizado nos nomes das unidades de ordem e no fato de que a cada dez unidades tem uma dezena, sem aprofundar a generalização. Após analisar várias pesquisas sobre o ensino do sistema de numeração posicional Amaral (2015) concluiu que grande parte dos professores não tem total conhecimento sobre sistema de numeração decimal, a dificuldade pode ocorrer quando os algoritmos convencionais com reserva são trabalhados de forma automática, sem que o professor perceba a relação existente entre as técnicas, os princípios e as propriedades do sistema de numeração.

Frequentemente encontram-se alunos que utilizam o algoritmo mecanicamente, sem analisar se o resultado obtido é coerente com a situação. Esses alunos acertam o resultado de uma operação por meio de algoritmos, mas sem compreender a relação destes com o valor posicional dos números, pois ele reproduz mecanicamente o que vê outros fazendo com facilidade. Isso ocorre com mais frequência se as operações aritméticas são vistas por meio de algoritmos convencionais de forma mecânica, destacando o procedimento de "encaixar" os algarismos nas "casas" iguais (unidade com unidade, dezena com dezena e assim sucessivamente) e focando nas expressões de "tomar emprestado" e "subir" o algarismo para a ordem imediatamente superior, sem que sejam problematizadas as "características e propriedades do sistema de numeração decimal (base dez, posicionalidade, princípio multiplicativo e aditivo, conceito zero), ocultas na resolução das operações" (AMARAL, 2015).

> Geralmente, quando a criança inicia o processo de contagem deduzimos que elas compreendem o que são números, porém saber "recitar" os números oralmente

> não significa que elas entendam o processo de formação dos números, pois, de acordo com Kamii (1995), para que as crianças consigam abstrair reflexivamente esse conceito é necessário que tenham construído as relações de ordem e inclusão hierárquica (TRACANELLA, 2016, p.3).

Devido à importância de mudar a forma mecanizada e desprovida de significado do ensino e aprendizagem do Sistema de Numeração Decimal, existem alguns estudos que tratam de possíveis alternativas teórico-metodológicas para o ensino e a aprendizagem deste conceito essencial. Segundo Amaral (2015), alguns desses estudos mostraram que bons resultados ocorrem no ensino construtivista, pois no sistema posicional existem algumas relações que os alunos não descobrem fácil e espontaneamente. "É necessário que o desenvolvimento da atividade seja associado de um processo reflexivo sobre os padrões que ocorrem na estrutura do sistema de numeração decimal. Em outras palavras, não é o tipo de conhecimento que pode ser transmitido por simples informação de outro" (AMARAL, 2015).

Entre as alternativas teórico-metodológicas que podem ser exploradas está o uso de material concreto. Segundo essa metodologia o material concreto possibilita ao aluno construir o conhecimento lógico-matemático por meio da manipulação, pois conforme o aluno ordena, junta, separa e classifica os objetos, passa a compreender os conceitos. O uso do material concreto é um ponto importante no Método Montessori. Ela utiliza no seu método muitos materiais que preparam a criança para a aquisição de conhecimentos matemáticos como a torre rosa, a escada marrom, os cilindros de encaixe, as formas planas, entre outros. Segundo Machado (1986), os materiais são usados para que o conteúdo seja compreendido "segundo a linha do desenvolvimento da estrutura lógico-matemática da mente: primeiro a construção do conceito, intuído por ocasião da atividade, depois o cálculo com todas as implicações", no qual a criança aprende os conceitos matemáticos na prática a partir de objetos e experiências concretas. O Material Dourado é um dos materiais criado por Montessori, e seu maior objetivo é familiarizar os alunos com os conceitos do sistema de numeração decimal, sendo um caminho a compreensão dos agrupamentos de dez em dez característicos deste sistema, para depois se trabalhar a compreensão das operações aritméticas.

> O primeiro contato do aluno com o material deve ocorrer de forma lúdica para que ele possa explorá-lo livremente. É nesse momento que a criança percebe a forma, a constituição e os tipos de peça do material. Ao desenvolver as atividades o professor pode pedir às crianças que elas mesmas atribuam nomes aos diferentes tipos de peças do material e criem uma forma própria de registrar o que vão fazendo. Seria conveniente que o professor trabalhasse durante algum tempo com a linguagem das crianças para depois adotar os nomes convencionais: cubinho, barra, placa e bloco. O Material Dourado destina-se a atividades que auxiliam o ensino e a aprendizagem do sistema de numeração decimal-posicional e dos métodos para efetuar as operações fundamentais (ou seja, os algoritmos) (DALTOÉ; STRELOW, s.d., p. 3).

Geralmente, o Material Dourado é confeccionado em madeira, mas pode ser adaptado e construído de outros materiais. A compreensão dos agrupamentos na base 10 pode favorecer a compreensão das operações fundamentais, por isso uma estratégia é proporcionar um tempo na familiarização com o sistema de numeração decimal antes de iniciar o estudo dos algoritmos das operações.

Após as atividades com Material Dourado, pode-se trabalhar com outros materiais como canudos, palitos, tampas de garrafa, caixas de fósforo, entre outros. O importante é que eles possam ser manipulados com mais facilidade para formar e desmanchar os grupos de maneira a auxiliar na assimilação de relações para que os alunos construam o conceito por meio da abstração reflexiva. O ábaco também é outro material no qual é possível trabalhar o conceito de ordem posicional dos números, a representação de quantidades e resolução das operações. Ao usar o material concreto é preciso ter atenção na tranposição para a representação gráfica. Após a exploração do conteúdo com os materiais deve-se incentivar que o aluno represente graficamente, pois não é possível garantir que eles realizarão essas relações no papel se não ocorrer uma transição do material para o papel.

Para planejar e organizar atividades que permitam ao aluno compreender os conceitos do sistema de numeração decimal, o professor deve possuir conhecimento pedagógico que o possibilite propiciar situações nas quais os alunos estabeleçam relações, descobrindo e construindo seu conhecimento, além de dominar os conceitos envolvidos, ou seja, para ensinar, o educador também precisa compreender o conteúdo. Para o professor compreender o sistema de numeração utilizado atualmente, de maneira que consiga propiciar situações nas quais os alunos estabeleçam relações, descobrindo e construindo seu conhecimento, é necessário que ele entenda que o sistema é decimal, posicional, multiplicativo e aditivo. Decimal, pois os agrupamentos de uma ordem formam uma unidade de ordem imediatamente superior de dez em dez, logo possui base dez. Sendo assim, qualquer número pode ser escrito em termos de potência de 10. Além disso, necessita de dez algarismos para poder representar todos os números. Posicional, pois a posição ocupada por cada algarismo em um número altera seu valor. Multiplicativo porque um algarismo escrito à esquerda de outro vale dez vezes o valor que teria se estivesse ocupando a posição à direita dele. Aditivo, pois o valor do número é o resultado da adição dos valores posicionais que os símbolos adquirem nos respectivos lugares que ocupam. Além disso, é preciso compreender a importância do zero, que marca uma ordem vazia, mas representa a presença de uma posição, facilitando na representação da diferenciação de números.

As pesquisas analisadas por Amaral (2015, p. 78), "apontam indícios de que as características e propriedades do sistema de numeração decimal, como a base dez, o valor posicional, a composição aditiva e multiplicativa de um número, não são adequadamente compreendidas por alunos e professores do Ensino Fundamental".

> As lacunas na formação profissional inicial do seu curso de Pedagogia, sinalizadas pela professora Leci, não se configuram um caso isolado. Essa mesma realidade é apontada em pesquisas realizadas por Barreto e Gatti (2009), Curi (2005), Nacarato, Mengali e Passos (2011) entre outros, indicando que os futuros professores não vivenciam, de maneira consistente, no curso de Pedagogia,

> estudos sobre os fundamentos da Matemática e as práticas de ensino e de pesquisa em Educação Matemática (AMARAL, 2015, p. 105).

Estudos como os de Amaral (2015), Plaza e Curi (2013) e Milan (2017), nos mostram que ao final do primeiro ciclo do Ensino Fundamental, os alunos possuem pouco domínio no uso do sistema de numeração, o que demonstra a necessidade de mudanças nas práticas de sala de aula, e provavelmente a necessidade em ações para a formação de professores que atuam nas séries iniciais, especificamente no ensino da Matemática. Por isso a formação de professores, inicial ou continuada, deve ser tema de pesquisa.

As dificuldades que os professores possuem podem provocar obstáculos à aprendizagem dos alunos. Por isso é preciso que professores e futuros professores possam participar de atividades que os façam refletir sobre suas dificuldades, em um ambiente em que sejam desafiados a questionar suas certezas, para que ocorra a construção de conceitos sólidos e uma melhor formação.

A partir de análise dos seus erros e das suas dificuldades, ele poderá compreender a dificuldade de seus alunos e refletir sobre como ajudar a superá-las. O professor pode auxiliar a construção do conhecimento quando além de perceber o erro, identifica a origem dos erros que os alunos cometem com frequência, organiza intervenções didáticas que desestabilizem as certezas, fazendo-os refletir sobre suas respostas, para que ao compreender o erro possam superá-lo. Uma estratégia que deve ser utilizada é a seleção dos erros recorrentes dos alunos, com a posterior exposição para discussão, identificando os pontos em que existiram erros: qual foi o erro e o porquê ele foi cometido.

Abaixo há um breve roteiro com ideias para a elaboração de atividades para se trabalhar na formação de professores. Ele tem como base as fases de aprendizagem de van Hiele que ajudam a organizar as atividades de acordo com os conteúdos e os objetivos de aprendizagem e considera apenas os objetivos de conteúdo dos números e operações do 1º ciclo. O objeto desse roteiro é colocar o professor em um ambiente que o faça questionar suas certezas, ao trabalhar o conceito de sistema posicional em bases diferentes da decimal, afim de suprir as deficiências apresentadas neste conteúdo. A partir disso, fazer uma análise sobre os erros cometidos, e então relacione com os erros cometidos pelos alunos, buscando opções para auxiliar na superação dos mesmos.

- A primeira fase é a da informação. Nesta fase o objetivo é introduzir o vocabulário do nível, enquanto o tutor procura saber qual é o conhecimento prévio. Oferecer à turma materiais e problemas para clarificar o contexto. Exemplo:
  - Perguntas como: o que é sistema de numeração? O que significa o sistema ser: Decimal? Posicional? Aditivo? Multiplicativo?

  - Explorar alguns erros comuns em representação de números e operações perguntando o motivo do erro ter ocorrido.
  - Reflexões sobre outros sistemas posicionais a partir de perguntas abertas, como: Se tivéssemos apenas 5 algarismos, como ficaria a representação de alguns números? E se precisássemos usar 12?

- A segunda fase é a orientação guiada. Nesta fase o assunto é explorado com o uso de materiais selecionados e ordenados pelo tutor, apresentados de forma que o grau de dificuldade seja crescente. É o momento que visualizam as principais ligações no campo de pensamento e os problemas são utilizados para descobrir as relações. Exemplo:

  - Usar materiais concretos para atividades de representação de números em alguma base diferentes de 10: como contar muitos objetos e representar em alguma base, com o objetivo de perceber que envolvam agrupamentos diferente de 10.
  - Construir ou idealizar um Material Dourado para uma base diferente de 10, realizar a representação de números e operações simples com o material ou desenho do material e fazer atividades de ordenação, comparação, operação com esses materiais.
  - Fazer atividades individuais e em grupos que explorem a ordenação, comparação dos números na base diferente de 10 com materiais, problemas e os conceitos: posicional, aditivo e multiplicativo dos sistemas (ex: 423 na base 5 ser 4x25 +2x5+3).
  - Fazer atividades que destaquem o fato de o número ser o mesmo, o que muda é a representação.
  - Atividades e problemas que explorem a importância do zero.
  - Explorar a construção da tábua da adição e da tábua da multiplicação (tabuada) de uma base diferente de 10.

- A terceira fase é a explicitação, é o momento de oportunizar discussões em classe que irão resultar no uso correto da linguagem. Os problemas ajudam a encontrar o caminho no sistema de relações. Exemplo:

  - Discussão da turma sobre as atividades anteriores, comparando as respostas e refletindo sobre as dificuldades e erros comuns.
  - Responder as perguntas da primeira fase refletindo sobre as resposta e revendo os conceitos.
  - Analisar os de erros cometidos refletindo o porquê eles ocorram, como eles podem ser classificados e como seria possível superá-los.
  - Pedir para que façam a relação dos erros que cometeram nas atividades anteriores com os erros que os alunos cometem.

- A quarta fase é a da orientação livre a partir da oferta de materiais, com diferentes possibilidades de uso e de instruções que favoreçam várias performances, os problemas também podem ser utilizados para testar se a integração ocorreu. Exemplo:
  - Mostrar vários exemplos de erros diferentes de alunos na representação dos números e pedir para eles encontrarem os erros e discorrerem sobre eles. Então devem discutir e escrever qual o erro, o porquê ele aconteceu e como pode ser corrigido.
  - Pedir para eles mostrarem exemplos de outros erros para fazer discutir qual o erro, o porquê ele aconteceu e como pode ser corrigido.
  - Mostrar sequências didáticas para se trabalhar o sistema de numeração decimal com os alunos e pedir para discorrerem sobre os erros e acertos, fazendo então uma discussão com a turma, sobre opções melhores e que evitem o erro didático.
- Na quinta fase é a integração, essa é da síntese. O professor convida os alunos a refletirem a respeito de suas ações, a partir de regras compostas e memorizadas. Exemplo:
  - Fazer uma síntese dos principais pontos do sistema de numeração decimal.
  - Pedir para que elaborarem um plano de aula ou uma sequencia didática com sistema de numeração decimal.

6 CONCLUSÃO

O empenho para registrar quantidades foi o que permitiu que a humanidade criasse o sistema de numeração posicional, que se comparado aos sistemas não posicionais, possui maior facilidade na realização de cálculos. Mas essa facilidade em comparação aos outros sistemas não deve ser confundida com uma simplificação de suas propriedades. Pelo contrário, a praticidade nos algoritmos ocorre exatamente por possuir muitos conceitos implícitos, e o não discernimento deste fato pelo professor pode ocasionar falhas no ensino deste conteúdo.

É importante que o professor tenha conhecimento dos elementos fundamentais para o trabalho docente, que são o domínio do conteúdo e o domínio pedagógico. Partindo do princípio de que o professor deve conhecer mais do que deseja ensinar, este trabalho trouxe uma generalização do conceito de sistemas de numeração posicional, demonstrando que qualquer número natural $b > 1$ pode servir de base para o sistema e como é a representação dos números nesta base b. As operações de adição, subtração, multiplicação e divisão foram trabalhadas focando nos conceitos que fazem os algoritmos funcionarem, para que o professor possa tentar perceber o porquê de cada procedimento. As tábuas de adição e multiplicação dos sistemas: binário, ternário, quinário, octal e hexadecimal foram apresentadas, pois quando precisamos construí-las conseguimos nos familiarizar com a base trabalhada e compreender melhor suas propriedades, e quando precisamos efetuar os cálculos, facilita ter elas construídas. Além disso, para facilitar a compreensão das propriedades do sistema de numeração decimal por meio de atividades com sistemas de outras bases, é desejável que se saiba converter a representação dos números de uma base para a outra, por isso na última parte do primeiro capítulo foram apresentadas as conversões entre bases numéricas.

Os professores que mediam a relação de ensino-aprendizagem das quatro operações básicas devem conhecer metodologias diferentes que decorar, que pouco efeito faz para uma aprendizagem significativa. O educador precisa estar preparado para organizar uma sequência didática que leve em consideração os conhecimentos prévios dos alunos, e a partir destes elaborar atividades em que o novo conhecimento tenha sentido. Montessori destaca que o uso de material concreto, por meio de atividades bem elaboradas e estratégias bem definidas, é um bom caminho para se alcançar a aprendizagem desejada. O Material Dourado e o ábaco são materiais nos quais é possível explorar o conceito de base e de transformação de unidades, de modo que a criança perceba de forma autônoma as relações, por isso são considerados opções para a aprendizagem significativa do sistema de numeração decimal.

É preciso ter consciência que a aprendizagem não ocorre de maneira rápida, pois a compreensão de qualquer conhecimento leva tempo para se consolidar. Refletindo que o sistema de numeração decimal levou milhares de anos para que fosse construído da maneira que usamos hoje, não convém exigir que a aprendizagem do mesmo ocorra logo após uma exposição do conteúdo e reprodução de exercícios. Para que a aprendizagem dos conceitos seja significativa é necessário tempo e estratégias adequadas em que o aluno adquira autonomia para construir seu conhecimento. Neste tipo de ambiente de ensino o erro pode ocorrer por diversos fatores, e o professor deve estar preparado para lidar da melhor maneira possível com eles. Não se deve observar os erros e nada fazer. Isto é, o professor deve tomar cuidado para não adotar uma postura passiva diante do erro do aluno, e, explorá-los de maneira adequada por meio de intervenções necessárias, e assim contribuir para que os alunos possam desenvolver habilidades e competências para a aprendizagem do conteúdo.

Ao tentar entender as relações entre a forma como o Sistema de Numeração Decimal é ensinado e o conhecimento que os professores possuem sobre este conteúdo, fica claro que o trabalha docente não é simples. É imprescindível que o professor dos anos iniciais possua conhecimento pedagógico do conteúdo, conhecimento curricular e principalmente conhecimento do conteúdo específico, pois a deficiência em algum destes pontos interferem no modo como ensinam e, consequentemente, na aprendizagem dos alunos. É preciso que o professor entenda os conceitos por trás dos processos do algoritmo, para que consiga elaborar estratégias que façam os alunos compreenderem de maneira implícita o conceito de base, as propriedades do sistema de numeração decimal e consigam resolver as operações e os problemas que as envolvem utilizando várias estratégias. É interessante que o aluno chegue à conclusão que a utilização dos algoritmos é uma ferramenta para agilizar os cálculos e não a única maneira de resolver uma operação.

Esse trabalho se apresenta como um material de apoio que contém sugestões iniciais para a área de educação matemática. As sugestões apresentadas têm como objetivo que os docentes explorem sistemas de numeração que possuem as mesmas propriedades do decimal, mas tenham outra base, para que a partir do desafio de certezas ocorram novas descobertas que complementem o seu conhecimento. Mas, o conhecimento do conteúdo é apenas uma parte do que deve ser explorado para o ensino ocorra de forma eficiente. Por isso é importante oportunizar aos educadores momentos em que revejam suas práticas em ambientes que possam desafiar suas certezas, sanar suas dúvidas, se colocar na visão do aluno, refletir sobre o conteúdo e metodologias de ensino. Cabe ressaltar que este trabalho não é conclusivo, porém, evidencia a importância de pesquisas que possam apontar direções para a formação e prática de professores que atuam nos anos iniciais do Ensino Fundamental.

REFERÊNCIAS

AMARAL, E. H. d. **Sistema de Numeração Decimal: Conhecimentos Profissionais e Práticas Escolares de Professores do 2º e 3º Ano do 1º Ciclo do Ensino Fundamental.** Dissertação (Mestrado em Educação) — Universidade Federal de Mato Grosso, Instituto de Educação, Cuiabá, 2015. Disponível em: <http://ri.ufmt.br/handle/1/151>.

BRASIL, S. d. E. F. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática.** Brasília MEC/SEF, 1997. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro03.pdf>. Acesso em: 20 fev. 2019.

DALTOÉ, K.; STRELOW, S. Trabalhando com material dourado e blocos lógicos nas séries iniciais. s.d. Disponível em: <http://atividadeparaeducacaoespecial.com/wp-content/uploads/2015/08/MATERIAL-DOURADO-E-BLOCOS-LOGICOS-NAS-SERES-INICIAIS.pdf>. Acesso em: 10 set. 2018.

DORNELLAS, V. C. **O uso do Ábaco de Pinos nas operações aditivas**. Uberlândia: [s.n.], 2014. Disponível em: <http://portaldoprofessor.mec.gov.br/fichaTecnicaAula.html?aula=55753>. Acesso em: 22 jan. 2019.

JARVIS, C. Unsplash, Photos for Everyone: [s.n.], sd. Disponível em: <https://unsplash.com/photos/cHhbULJbPwM>. Acesso em: 22 jan. 2019.

JUSTO, D. A. R. et al. **Cálculo Numérico. Um Livro Colaborativo.** 2017. Disponível em: <https://www.ufrgs.br/reamat/CalculoNumerico/livro-py/main.html>.

MACHADO, I. L. **Educação Montessori: De um Homem Novo para um Mundo Novo.** São Paulo: Pioneira, 1986. (A pré-escola brasileira - Cadernos de Educação).

MILAN, I. d. S. **O Ensino do Sistema de Numeração Decimal nas Séries Iniciais do Ensino Fundamental: As Relações com a Aprendizagem do Sistema Posicional.** Dissertação (Mestrado em Educação) — Pontifícia Universidade Católica (PUC), São Paulo, 2017.

MONTESSORI, M. **Pedagogia científica: a descoberta da criança. Tradução de Aury Azélio Brunetti.** São Paulo: Flamboyant, 1965.

MONTESSORI, M. **A criança. Tradução de Luiz Horácio da Mata.** São Paulo: Nórdica, s.d.

MORAES, M. S. L. **Escola Montessori: um espaço de conquistas e redescobertas.** Dissertação (Mestrado em Educação) — Centro Universitário La Salle, Canoas, 2009. Disponível em: <http://hdl.handle.net/11690/575>. Acesso em: 20 set. 2018.

OLIVEIRA, M. d. C. e. **Ressignificando a Geometria Plana no Ensino Médio, com o auxílio de van Hiele.** Belo Horizonte: [s.n.], 2012. Disponível em: <https://www.laboratoriosustentaveldematematica.com/2014/07/modelo-desenvolvimento-geometrico-van-hiele.html>. Acesso em: 20 jan. 2019.

PASSOS, A. Q. **Van Hiele, Educação Matemática Realística e Gepema: Algumas Aproximações.** Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática — Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2015.

PATERLINI, R. R. **Aritmética dos números inteiros. Um texto para licenciandos e professores de Matemática.** Departamento de Matemática, UFSCar, São Carlos, 2012. Disponível em: <http://www.dm.ufscar.br/profs/ptlini/>. Acesso em: 15 jul. 2018.

PERTILE, K. **O Modelo van Hiele de Desenvolvimento do Pensamento Geométrico: Uma Análise de Obras do Programa Nacional do Livro Didático para o Ensino Médio.** Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática) — Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2011.

PINTO, N. B. **O Erro Como Estratégia Didática: Estudo doEerro no Ensino da Matemática Elementar**. Campinas: Papirus, 2000.

PINTO, S. R. **Desenvolvimento do Pensamento Geométrico: Uma Proposta Para o Ensino das Isometrias.** Dissertação (Mestrado em Educação) — Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Viana do Castelo, Viana do Castelo, Portugal, 2011.

PLAZA, E. M.; CURI, E. Sistema de numeração decimal: saberes revelados por alunos do 5º ano. **Revemat: Revista Eletrônica de Educação Matemática**, v. 8, n. 1, p. 104–118, 2013. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.5007/1981-1322.2013v8n1p104>. Acesso em: 22 fev. 2019.

RODRIGUES, A. E. A. **Sistemas De Numeração: Evolução Histórica, Fundamentos e Sugestões para o Ensino.** Dissertação (Mestrado em Matemática) — Universidade Federal do Oeste do Pará (UFOPA), Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), Santarém, 2013. Disponível em: <http://repositorio.unesc.net/bitstream/1/1457/1/Gisele_Mezzari_Silveira.pdf>.

RUIS, A. V. **Sistemas de Numeração e Grandezas Incomensuráveis.** Dissertação (Mestrado em Matemática) — Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, São José do Rio Preto, 2014. Disponível em: <https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=136>.

RÖHRS, H. **Maria Montessori. Tradução de Danilo Di Manno de Almeida, Maria Leila Alves.** Recife: Fundação Joaquim Nabuco, Editora Massangana, 2010. (Coleção Educadores).

SANTANA, C. A. **Formação De Docentes: Aprender Para Ensinar Matemática. Um Olhar Para O Ensino Aprendizagem Das Operações Fundamentais.** Caderno Pedagógico - PDE – Programa de Desenvolvimento Educacional — Secretaria Estadual de Educação do Paraná. Universidade Estadual de Ponta Grossa, Ponta Grossa, 2010.

SANTOS, A. F. d. **Sistemas de Numeração Posicionais e não Posicionais.** Dissertação (Mestrado em Matemática) — Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, São José do Rio Preto., 2014. Disponível em: <https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=150110167>.

SANTOS, J. M. S. R. D. **A Teoria de Van Hiele no Estudo de Áreas de Polígonos e Poliedros.** Dissertação (Mestrado em Matemática) — Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, Campos dos Goytacazes, 2015.

SANTOS, M. C. D.; SANTOS, F. T. M. D. Níveis do pensamento geométrico de van-hiele com alunos do 6º ano do ensino fundamental. In: **Encontro Paraibano de Educação Matemática**. João Pessoa, Brasil: [s.n.], 2016. Disponível em: <https://editorarealize.com.br/revistas/epbem/

trabalhos/TRABALHO_EV065_MD1_SA12_ID341_05102016165043.pdf>. Acesso em: 20 dez. 2018.

SILVA, R. G. **Sistemas de Numeração: Das Talhas Numéricas aos Primórdios da Computação Artificial.** Dissertação (Mestrado em Matemática) — Universidade Federal de Juiz de Fora, Instituto de Ciências Exatas. PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Juiz de Fora, 2016. Disponível em: <https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=95206>. Acesso em: 15 maio 2018.

SOUSA, L. O. D. **Sistema de Numeração e Aplicações..** Dissertação (Mestrado em Matemática) — Universidade Estadual de Santa Cruz. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Ilhéus, 2016.

SOUZA, S. S. S. d. **Erros em matemática. Um Estudo Diagnóstico com Alunos de 6ª Série do Ensino Fundamental.** Dissertação (Mestrado em Educação) — Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho" (UNESP), Marília, 2002.

TRACANELLA, A. T. A construção do conceito de número e suas implicações na aprendizagem das operações matemáticas. In: **Encontro Nacional de Educação Matemática**. São Paulo, Brasil: [s.n.], 2016. Disponível em: <http://www.sbembrasil.org.br/enem2016/anais/pdf/5122_3136_ID.pdf>. Acesso em: 15 fev. 2019.

A APÊNDICE

Proposição A.1. *Sejam* $x \in \mathbb{N}$ *e* $b \in \mathbb{N}$, $b > 1$. *Sejam,* $r, q \in \mathbb{N}$, *tais que* $x = bq + r$ *e* $0 \leq r < b$. *Então,* $q < x$.

Demonstração. Seja $x = bq + r$, então $bq = x - r$.

Como, $x \geq 0$, temos $bq \leq x$.

Como, $b > 0$ temos $q \leq \dfrac{x}{b}$ e como $b > 1$ temos $q < x$. $\square$