Universidade do Estado do Rio de Janeiro
Centro de Educação e Humanidades
Faculdade de Formação de Professores

Bruno de Souza Moura

Método Alternativo para o desenvolvimento do Binômio de Newton

Rio de Janeiro
2018

Bruno de Souza Moura

Método Alternativo para o desenvolvimento do Binômio de Newton

Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Pós-Graduação do Mestrado profissional em Matemática em Rede Nacional do Departamento de Matemática da Faculdade de Formação de Professores, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Orientador: Profª. Dra. Priscila Cardoso Petito

Coorientador: Profª. Dra. Raquel de Souza Francisco Bravo

Rio de Janeiro

2018

CATALOGAÇÃO NA FONTE

UERJ / REDE SIRIUS / BIBLIOTECA CTC/A

M929 Moura, Bruno de Souza;
Método Alternativo Para o desenvolvimento do Binômio de Newton / Bruno de Souza Moura – Rio de Janeiro - 2018;
29 f. : il.

Orientador: Priscila Cardoso Petito
Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional- PROFMAT) - Universidade do Estado do Rio de Janeiro , Faculdade de Formação de Professores.

1.Análise Combinatória – Teses. 2. Matemática – Estudo e Ensino – Teses. I. Petito, Priscila Cardoso. II. Universidade do Estado do Rio de Janeiro , Faculdade de Formação de Professores. III. Título.

CDU 519.1

Rinaldo Magallon CRB - 7 / 5016 . Bibliotecário responsável pela elaboração da ficha catalográfica

Bruno de Souza Moura

Método Alternativo para o desenvolvimento do Binômio de Newton

Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Pós-Graduação do Mestrado profissional em Matemática em Rede Nacional do Departamento de Matemática da Faculdade de Formação de Professores, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Aprovada em 14 de dezembro de 2018.

Banca Examinadora:

Prof^a^. Dra. Priscila Cardoso Petito (Orientador)
Faculdade de Formação de Professores–UERJ

Prof^a^. Dra. Raquel de Souza Francisco Bravo (Coorientador)
Universidade Federal Fluminense

Prof^a^. Dra. Marcele Câmara de Souza
Faculdade de Formação de Professores–UERJ

Rio de Janeiro

2018

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus e a Geraldo! Agradeço também, as minhas orientadoras Priscila Cardoso Petito e Raquel de Souza Francisco Bravo, pela paciência e dedicação. Ao grande amigo e professor Luérbio Faria, pelas boas dicas e ideias, bem como ao ex aluno Victor Eduardo Leite A. Duca, pelo socorro nas digitações. A professora Mirian Abdón, pelas palavras de incentivo nos momentos de dificuldade nas disciplinas iniciais do curso. A professora e coordenadora Jane Castro, pela parceria e amizade de sempre. A professora de Português-Literatura Michelle Ismael, pelos esclarecimentos sobre o poema de Fernando Pessoa, bem como a todo corpo docente do Profmat FFP-UERJ e ao IMPA (Instituto de Matemática Pura e Aplicada), por coordenarem um curso de mestrado com qualidade reconhecida, tanto no Brasil quanto no exterior. Agradeço também a aluna Ana Clara Rachid, pela ajuda nas traduções. Termino agradecendo novamente a Deus, a Geraldo e a meus Pais, por tudo que fizeram e têm feito por mim.

O binómio de Newton é tão belo como a Vénus de Milo.
O que há é pouca gente para dar por isso.
óóóó — óóóóóóóóó — óóóóóóóóóóóóóóó
Álvaro de Campos (heterônimo de Fernando Pessoa) (PESSOA, 1944)

RESUMO

MOURA, BSM *Método Alternativo para o desenvolvimento do Binômio de Newton.* 2018. 29 f. Dissertação (Mestrado profissional em Matemática em Rede Nacional do Departamento de Matemática da Faculdade de Formação de Professores) – Faculdade de Formação de Professores, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2018.

A disciplina Matemática no contexto escolar desperta grande aversão em muitos alunos e, por outro lado, os indicadores são consideravelmente negativos quando são avaliados os desempenhos dos alunos concluintes do Ensino Fundamental e Médio. Como consequência, observamos dificuldades no desenvolvimento do raciocínio lógico e na competência matemática, necessários a inúmeras profissões. Nesta dissertação, será apresentado o Método Alternativo para o desenvolvimento do Binômio de Newton utilizando operações básicas e a decomposição em fatores primos, decomposição esta que traz o elemento central e primordial do método proposto: o Fator Multiplicador Constante. Em um contexto que supervaloriza o imediatismo da utilização da matemática no cotidiano, propõe-se que seja incentivada a elaboração de conjecturas, a construção de algoritmos e a verificação de sua validade, a fim de que os alunos percebam a Matemática como ciência em construção e sintam-se capazes de interferir neste processo.

Palavras-chave: Binômio de Newton. Método Alternativo. Fator Multiplicador Constante. Ensino de Matemática.

ABSTRACT

MOURA, BSM *Alternative Method for Binomial development from Newton.* 2018. 29 f. Dissertação (Mestrado profissional em Matemática em Rede Nacional do Departamento de Matemática da Faculdade de Formação de Professores) – Faculdade de Formação de Professores, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2018.

The mathematics discipline in the school context arouses great disliked by many students in schools and, on the other hand, the indicators are considerably negative when the performance of the students in middle and high school are evaluated. Consequently, difficulties are seen in the development of logical reasoning and mathematical competence required by many professions. In this dissertation, the Alternative Method for the development of Newton's binomial will be presented, using basic operations and the decomposition of prime factors. This decomposition brings the central and primordial element of the proposed method: the Constant Multiplying Factor. In a context in which the immediacy of the use of mathematics in everyday life is overvalued, it is proposed that the elaboration of conjectures, the construction of algorithms and the verification of their validity is to be encouraged, so that students perceive mathematics as a science under construction and feel capable of interfering in this process.

Keywords: Newton's binomial. Alternative Method. Constant Multiplying Factor. Mathematics Teaching.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

A matemática nunca foi, não é e nem nunca será o simples ato de calcular. Essa ciência que avança concomitantemente com o avanço da humanidade e das tecnologias vem principalmente como ferramenta para resolução de problemas nas mais variadas áreas do conhecimento. Nos dias de hoje, o aluno faz uma busca na internet pelo celular e percebe em alguns segundos que o assunto proposto não o interessa em hipótese alguma e é a partir desse momento que começa a nossa missão de ensinar o conteúdo programático de maneira mais interessante para um público que em sua maioria, se pudesse escolher, escolheria não ter que aprender o conteúdo proposto, com a argumentação quase sempre sustentada na hipótese de não precisarem utilizar o conteúdo em questão em nada nas suas vidas. São justamente esses fatos que me motivaram a procurar uma maneira alternativa e mais simples para desenvolvermos o Binômio de Newton, já que o assunto quase sempre exige uma quantidade considerável de cálculos e bastante habilidade algébrica com uma participação discreta em alguns problemas de combinatória, que são resolvidos pela aplicação do triângulo de Pascal, que também será citado nesse trabalho.

Na verdade, a proposta é mostrar a beleza da Matemática por suas técnicas e procedimentos, não tendo como foco a resposta aos anseios imediatistas dos alunos sobre a aplicabilidade do assunto no cotidiano deles e sim na visualização dos algoritmos como ferramentas para o desenvolvimento de uma ciência que o aluno ainda não tem como dimensionar. Esta dissertação está dividida da forma descrita a seguir.

A parte inicial é a introdução, que justifica de forma genérica o motivo pelo qual escolhemos este tema para desenvolvermos na dissertação.

O Capítulo 1 descreve o Método Tradicional e o Método Alternativo proposto nesse trabalho para desenvolver o Binômio de Newton, fazendo uma comparação entre eles e mostrando que o Método Tradicional utiliza uma quantidade considerável de operações com binomiais, fatoriais e simplificações que, quase sempre, exigem uma significativa habilidade algébrica, que faz com que esse método não seja bem recebido pelos alunos.

No Capítulo 2 provamos que o Método Alternativo proposto está correto e pode ser utilizado para desenvolver o Binômio de Newton de forma bem mais prática que o Método Tradicional aplicado hoje no Ensino Médio.

No capítulo 3 analisamos a proposta e a viabilidade de inserção deste conteúdo no cotidiano escolar em turmas do Ensino Médio. No final, a conclusão resume as propostas desta dissertação e aponta para pesquisas futuras.

1 MÉTODO TRADICIONAL X MÉTODO ALTERNATIVO

Neste capítulo, apresentamos o desenvolvimento do binômio através do Método Tradicional (Método de Newton) e, em seguida, apresentamos a proposta do Método Alternativo. Vamos apresentar como o Binômio de Newton é explorado no Ensino Médio e qual a sugestão de abordagem do tema. As definições foram extraídas de (MILIES; COEHO, 2003).

O leitor certamente está familiarizado, desde o Ensino Fundamental, com as potências de um binômio. Assim, por exemplo, temos que:

$$\begin{aligned}(a+b)^1 &= a+b\\(a+b)^2 &= a^2+2ab+b^2\\(a+b)^3 &= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3\end{aligned}$$

No Ensino Médio, mostramos os desenvolvimentos acima como produto de polinômios e, a seguir, generalizamos obtendo a expressão $(a+b)^n$, para qualquer inteiro positivo n. O que na escola costuma se ensinar sob o nome de Binômio de Newton não foi o verdadeiro objeto de seus estudos, segundo (GARBI, 2007), em "O Romance das Equações Algébricas", o que ele descobriu foram as regras para se elevar o binômio $(a+b)$ a uma potência $\frac{1}{2}$ ou a qualquer outro expoente racional fracionário ou inteiro negativo, o que conduz a séries infinitas. Antes dele, Cardano, Tartaglia e Pascal (GARBI, 2006) já conheciam relativamente as potências inteiras e positivas. O Teorema do Binômio, junto com as preocupações com o problema da determinação de tangentes, podem, assim, ser considerados percursores do cálculo diferencial. Pelo fato dos *números binomiais* desempenharem um papel fundamental no Teorema do Binônio de Newton, faremos uma abordagem inicial desse assunto para depois tratarmos da distribuição binomial tradicional, assim como é apresentada no Ensino Médio.

Com a preocupação em saber de quantas maneiras se pode combinar um determinado número de letras, por exemplo, no *sefer Yetzirá* - Um livro que data dos primeiros séculos da era cristã e que, segundo a tradição oral, teria sido composto pelo patriarca Abraão milhares de anos antes -lemos:

Aleph com todas e todas com Aleph.

Beth com todos e todas com Beth.

Se repentem num círculo e existem em 231 portas.

Aleph e Beth são as duas primeiras letras do alfabeto Hebraico que é formado por 22 letras. E o problema propõe que se determine quantos grupos de 2 letras podem ser formados com elas. Como veremos adiante, esse resultado será: 231.

Teorema 1. *(MACMAHON, 1915-1916) Dado $A \in \{a_1, \cdots, a_n\}$ um conjunto não vazio com n elementos e k um inteiro $0 \leq k \leq n$. Então, o número de subconjuntos de A com k elementos é $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$, que se lê: Combinações de n elementos tomados k a k.*

Demonstração. A prova será feita por indução em n. Se $n = 1$, os únicos valores possíveis para k são $k = 0$ e $k = 1$. Pode se observar facilmente que um conjunto com um elemento contém um único subconjunto com 0 elementos (o conjunto vazio) e um único subconjunto com um elemento (ele próprio), donde

$$\binom{1}{0} = \binom{1}{1} = 1 \quad \text{temos: } \frac{1!}{0!\,(1-0)!} = 1 \quad \text{e} \quad \frac{1!}{1!\,(1-1)!} = 1$$

De modo que o enunciado é válido para $n = 1$.

Suponhamos, agora, como hipótese de indução, que a proposição é válida para conjuntos com $n - 1$ elementos, onde $(n \geq 2)$. Seja k um inteiro, tal que $0 \leq k \leq n - 1$ e seja A um conjunto com n elementos.

Vamos denotar por r o número de subconjuntos de A que têm k elementos e que contém, entre eles, o elemento a_n. Então, claramente, temos que

$$\binom{n}{k} = r + s$$

Note que r nada mais é do que o número de subconjuntos de $A' = \{a_1, a_2 \cdots, a_n\}$ que tem k elementos. Logo,

$$r = \binom{n-1}{k} = \frac{(n-1)!}{k!\,(n-1-k)!}$$

E os subconjuntos de k elementos de A que contém a_n estão formados pela união de a_n com subconjuntos de A' que têm $k - 1$ elementos. Portanto,

$$s = \binom{n-1}{k-1}$$

Segue então, que

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

Essa relação entre os números combinatórios é conhecida como *Fórmula de Stifel.*

Vamos calcular os números do segundo membro a partir da nossa hipótese de indução. Temos assim, que:

$$\binom{n}{k} = \frac{(n-1)!}{k!\,(n-1-k)!} + \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!}$$

Como:

$$k! = k(k-1)! \quad \text{ e } (n-k)! = (n-k)(n-k-1)!$$

Multiplicando-se o denominador e o numerador do primeiro termo da adição por $(n-k)!$ teremos:

$$\frac{(n-1)!(n-k)!}{k!\,(n-k-1)!(n-k)!} + \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!}$$

No segundo termo, multiplicaremos numerador e denominador por k,

$$= \frac{(n-1)!(n-k)(n-k-1)!}{k!\,(n-k-1)!\,(n-k)!} + \frac{(n-1)!k}{k\,(k-1)!\,(n-k)!}$$

Podemos escrever as frações acima com denominador comun:

$$= \frac{(n-1)!(n-k)}{k!\,(n-k)!} + \frac{(n-1)!k}{k!\,(n-k)!}$$

$$= \frac{(n-1)!(n-k+k)}{k!\,(n-k)!} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \binom{n}{k}$$

O que demonstra a fórmula para $0 \leq k \leq n-1$. $\square$

Note que para $k = n$, tem-se:

$$\binom{n}{n} = 1 \quad \text{e} \quad \frac{n!}{n!\,(n-n)!} = 1$$

E mais, os fatores de $(n-k)!$ também são fatores de $n!$. Sendo assim: $\binom{n}{k}$, com a qual é mais fácil calcular:

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1).(n-k)!}{(n-k)!k!} = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}$$

No numerador, temos k fatores decrescentes começando por n e no denominador, k fatores crescentes começando por 1.

$$\binom{7}{3} = \frac{7.6.5}{1.2.3} = 35$$

No caso particular das "portas" mencionadas no *Sefer Yetzirá,* temos que

$$\binom{22}{2} = \frac{22.21}{1.2} = 231$$

Também vale a pena observar que, pelo fato de $\binom{n}{k}$ indicar um número de subconjuntos, ele é sempre um inteiro, apesar de a expressão obtida ter denominadores. Agora, estamos em condições de estabelecer a fórmula do binômio.

Teorema 2. *(BOYER, 2010) Sejam a e b inteiros positivos. então,*

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + ... + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$$

ou ainda:

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}a^{n-i}b^i.$$

Demonstração. Faremos a demonstração por indução em n.

Para n=1, a fórmula obtida é $(a+b)^1 = \binom{1}{0}a + \binom{1}{1}b = a+b$; logo, a afirmação é verdadeira nesse caso.

Suponhamos, então, que a fórmula é válida para $n = k \geq 1$. Logo, temos que:

$$(a+b)^{k+1} = (a+b)(a+b)^k = a(a+b)^k + b(a+b)^k$$

Usando a hipótese de indução (HI), temos que:

$$\begin{aligned} a\underbrace{(a+b)^k}_{HI} &= a\left[\binom{k}{0}a^k + \binom{k}{1}a^{k-1}b + \binom{k}{2}a^{k-2}b^2 + ... + \binom{k}{k-1}ab^{k-1} + \binom{k}{k}b^k\right] \\ &= \binom{k}{0}a^{k+1} + \binom{k}{1}a^k b + \binom{k}{2}a^{k-1}b^2 + \ldots + \binom{k}{k-1}a^2b^{k-1} + \binom{k}{k}ab^k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b\underbrace{(a+b)^k}_{HI} &= b\left[\binom{k}{0}a^k + \binom{k}{1}a^{k-1}b + \binom{k}{2}a^{k-2}b^2 + ... + \binom{k}{k-1}ab^{k-1} + \binom{k}{k}b^k\right] \\ &= \binom{k}{0}a^k b + \binom{k}{1}a^{k-1}b^2 + \binom{k}{2}a^{k-2}b^3 + \ldots + \binom{k}{k-1}ab^k + \binom{k}{k}b^{k+1} \end{aligned}$$

Somando ambas as expressões, temos que:

$$(a+b)^{k+1} = \binom{k}{0}a^{k+1} + \left[\binom{k}{1} + \binom{k}{0}\right]a^k b +$$

$$\left[\binom{k}{2} + \binom{k}{1}\right]a^{k-1}b^2 + \ldots + \left[\binom{k}{k} + \binom{k}{k-1}\right]ab^k + \binom{k}{k}b^{k+1}$$

E, usando repetidamente a Fómula de *Stifel*, obtemos

$$(a+b)^{k+1} = \binom{k}{0}a^{k+1} + \binom{k+1}{1}a^k b + \ldots + \binom{k+1}{k}ab^k + \binom{k}{k}b^{k+1}$$

Como ainda

$$\binom{k}{0} = \binom{k+1}{0} \quad \text{e} \quad \binom{k}{k} = \binom{k+1}{k+1}$$

Temos finalmente:

$$\begin{aligned}
(a+b)^0 &= 1 \\
(a+b)^1 &= a+b \\
(a+b)^2 &= \tbinom{2}{0}a^2b^0 + \tbinom{2}{1}a^1b^1 + \tbinom{2}{2}a^0b^2 \\
(a+b)^3 &= \tbinom{3}{0}a^3b^0 + \tbinom{3}{1}a^2b^1 + \tbinom{3}{2}a^1b^2 + \tbinom{3}{3}a^0b^3 \\
(a+b)^4 &= \tbinom{4}{0}a^4b^0 + \tbinom{4}{1}a^3b^1 + \tbinom{4}{2}a^2b^2 + \tbinom{4}{3}a^1b^3 + \tbinom{4}{4}a^0b^4 \\
&\vdots \\
(a+b)^{k+1} &= \tbinom{k+1}{0}a^{k+1} + \tbinom{k+1}{1}a^kb + \tbinom{k+1}{2}a^{k-1}b^2 + \ldots + \tbinom{k+1}{k}ab^k + \tbinom{k+1}{k+1}b^{k+1}
\end{aligned}$$

$\square$

Pela propriedade dos números binomiais complementares, temos:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Ou seja, podemos afirmar que os coeficientes equidistantes dos extremos são iguais no desenvolvimento de $(a+b)^n$. E mais, se dispusermos os coeficientes binomiais por filas, correspondentes a cada potência, obteremos o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{lccccccccccc}
n=0: & & & & & & 1 & & & & & \\
n=1: & & & & & 1 & & 1 & & & & \\
n=2: & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
n=3: & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
n=4: & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
n=5: & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}$$

Essa disposição de números é conhecida como *triângulo de Pascal ou triângulo aritmético*, como citado em (PAIVA, 2002). Blaise Pascal foi um matemático Francês que dentre várias contribuições em várias áreas deixou seu nome associado a tabela acima. Observe que cada elemento da linha n é, na verdade, a soma dos dois elementos imediatamente acima e mais próximos dele na linha (n-1), para $n \geq 1$. Fato esse, que pode ser verificado observando a demonstração do Teorema 1.

Como dissemos na seção anterior, Pascal explicou pela primeira vez o princípio da indução no seu trabalho sobre o triângulo. Porém, o conhecimento do teorema do triângulo é bem anterior; aparece numa obra de *Chu Shih-Chieh, o Ssu-yuan yu-Chien (Espelho preciso dos quatro elementos)*, publicado em 1303, que inclui os coeficientes binomiais até a oitava potência. A *Chu Shih-Chieh* não se atribui o mérito da descoberta e, em seu trabalho, ele refere-se ao triângulo como o "diagrama do método para achar potências menores que oitavas". O triângulo aritmético também aparece numa obra árabe, do século XV.

Quando esse tema é abordado na escola, pelo método tradicional, como conteúdo programático obrigatório para turmas do segundo ano do Ensino Médio, nos deparamos com uma grande resistência por partes dos alunos em relação ao processo do desenvolvimento que, segundo eles, é *chato* e *cansativo*.

Na intenção de tentar facilitar o desenvolvimento através de operações mais simples que as usadas tradicionalmente, é perceptível que há uma relação entre cada termo e seu antecessor, intimamente ligada as operações básicas envolvendo os coeficientes e expoentes do termo anterior que, quando submetidas ao produto de um fator multiplicador constante, dão origem ao coeficiente pretendido. Tal método é apresentado a seguir e sua corretude é demonstrada mais adiante.

MÉTODO ALTERNATIVO

O método alternativo proposto está baseado em, a partir do termo anterior do desenvolvimento, encontrar o termo seguinte através de operações simples. A seguir, são apresentados exemplos de abordagem na escola do desenvolvimento do binômio usando o método de Newton, como sugere (IEZZI, 2001), em seu livro Matemática - Ciência e Aplicações. Tomemos como exemplo o binômio: $(2x + 3y)^0$.

Vamos usar o teorema da expansão binomial para encontrar cada termo. O teorema binomial afirma que:

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} . (a^{n-k} b^k)$$

Sendo assim, substituindo a por $2x$, b por $3y$ e n por 0 temos:

$$\begin{aligned}
(2x+3y)^0 &= \textstyle\sum_{k=0}^{0}\binom{0}{k}.(2x)^{0-k}(3y)^k &=\\
&= \binom{0}{0}.(2x)^{0-0}(3y)^0 &=\\
&= 1.1.1 &=\\
&= 1
\end{aligned}$$

Agora, vamos analisar $(2x+3y)^1$:

$$\begin{aligned}
(2x+3y)^1 &= \textstyle\sum_{k=0}^{1}\binom{1}{k}.(2x)^{1-k}(3y)^k &=\\
&= \binom{1}{0}.(2x)^{1-0}(3y)^0+\binom{1}{1}.(2x)^{1-1}(3y)^1 &=\\
&= \tfrac{1!}{(1-0)!0!}((2x)^{1-0}(3y)^0)+\tfrac{1!}{(1-1)!1!}((2x)^{1-1}(3y)^1) &=\\
&= 2x^1+3y^1
\end{aligned}$$

Para o desenvolvimento de: $(2x+3y)^2$, teremos:

$$\begin{aligned}
(2x+3y)^2 &= \textstyle\sum_{k=0}^{2}\binom{2}{k}.(2x)^{2-k}(3y)^k &=\\
&= \binom{2}{0}.(2x)^{2-0}(3y)^0+\binom{2}{1}.(2x)^{2-1}(3y)^1+\binom{2}{2}.(2x)^{2-2}(3y)^2 &=\\
&= \tfrac{2!}{(2-0)!0!}((2x)^{2-0}(3y)^0)+\tfrac{2!}{(2-1)!1!}((2x)^{2-1}(3y)^1)+\tfrac{2!}{(2-2)!2!}((2x)^{2-2}(3y)^2) &=\\
&= 1.((2x)^2(3y)^0)+2.((2x)^4(3y)^1)+1.((2x)^0(3y)^2) &=\\
&= 4x^2+12xy+9y^2
\end{aligned}$$

Prosseguimos com a mesma estratégia para encontrar: $(2x+3y)^3$

$$
\begin{aligned}
(2x+3y)^3 &= \textstyle\sum_{k=0}^{3}\binom{3}{k}.(2x)^{3-k}(3y)^k = \binom{3}{0}.(2x)^{3-0}(3y)^0 + \binom{3}{1}.(2x)^{3-1}(3y)^1 \\
&\quad + \binom{3}{2}.(2x)^{3-2}(3y)^2 + \binom{3}{3}.(2x)^{3-3}(3y)^3 = \\
&= \tfrac{3!}{(3-0)!0!}(2x)^{3-0}(3y)^0 + \tfrac{3!}{(3-1)!1!}(2x)^{3-1}(3y)^1 + \tfrac{3!}{(3-2)!2!}(2x)^{3-2}(3y)^2 \\
&\quad + \tfrac{3!}{(3-3)!3!}(2x)^{3-3}(3y)^3 = \\
&= 1.((2x)^3(3y)^0) + 3.((2x)^2(3y)^1) + 3.((2x)^1(3y)^2) + 1.((2x)^0(3y)^3) = \\
&= 8x^3 + 36x^2y + 54xy^2 + 27y^3
\end{aligned}
$$

Propomos agora que um outro método seja apresentado, após o método tradicional, como alternativa para o desenvolvimento do Binômio de Newton. A este método damos o nome de ***MÉTODO ALTERNATIVO***. Este método aparece em materiais divulgados na internet como ferramenta para desenvolver mais rapidamente o Binômio de Newton e resolver algumas questões específicas, como feito em (CAJU, 2016).

Para este Método precisamos de uma definição adicional, a de fator multiplicador constante. No desenvolvimento de $(ax+by)^n$, chamamos de *fator multiplicador constante* o número f definido como $f = \frac{b}{a}$.

Por exemplo, no desenvolvimento de $(ax + by)^n$ tomando $a = 2$, $b = 3$ e $n = 5$. Teremos como fator multiplicador constante de $(2x + 3y)^5$, a fração:

$$f = \frac{b}{a} = \frac{3}{2}$$

A partir disso, para exemplificar o Método Alternativo, abordaremos o desenvolvimento de:

$$(2x + 3y)^5$$

Denotaremos por: $\mathbf{T_i, i \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}}$. Cada termo do binômio já desenvolvido em:

$$(2x + 3y)^5$$

Vamos utilizar o teorema da expansão binomial citado no início desse trabalho somente para encontrar o primeiro termo (i=0) do desenvolvimento e vamos obter os demais termos utilizando o Método Alternativo para encontrar cada $\mathbf{T_i}$. Observe:

$$\frac{5!}{(5-0)!0!}((2x)^{5-0}(3y)^{0})+\mathbf{T_1x^4y^1}+\mathbf{T_2x^3y^2}+\mathbf{T_3x^2y^3}+\mathbf{T_4x^1y^4}+\mathbf{T_5x^0y^5}$$

Removendo os parênteses e aplicando as propriedades das potências para encontrar o primeiro coeficiente, teremos:

$$1.((2x)^{5}(3y)^{0})+\mathbf{T_1x^4y^1}+\mathbf{T_2x^3y^2}+\mathbf{T_3x^2y^3}+\mathbf{T_4x^1y^4}+\mathbf{T_5x^0y^5}$$

$$32x^5y^0+\mathbf{T_1x^4y^1}+\mathbf{T_2x^3y^2}+\mathbf{T_3x^2y^3}+\mathbf{T_4x^1y^4}+\mathbf{T_5x^0y^5}$$

Observe que preferimos manter os elementos de expoente zero, porque serão utilizados no método proposto. Agora, a partir do primeiro termo e aplicando operações básicas, vamos encontrar os demais coeficientes do desenvolvimento do binômio.

Lembrando que o fator multiplicador constante será dado pela fração:

$$f=\frac{b}{a}=\frac{3}{2}$$

Nesse momento gostaríamos de fazer um breve comentário a respeito do processo de descoberta desse fator multiplicador constante, representado acima. O detalhamento desta ideia é importante porque fundamenta o modo como a inserção do método é sugerida aos alunos.

Após termos feito a expansão binomial pelo método tradicional e obtido os valores de cada coeficiente, experimentamos o processo de multiplicar cada expoente do primeiro termo pelo coeficiente obtido através do desenvolvimento pelo método tradicional e dividir o resultado pelo sucessor do expoente do segundo termo, que também tenha sido obtido através do mesmo desenvolvimento. Com isso, obtivemos alguns resultados que funcionavam para o desenvolvimento simples, ou seja: $(x+y)^n$, mas não funcionavam para os casos do tipo $(ax+by)^n$, com $(a \text{ e } b)\neq 1$. Desta forma, resolvemos então comparar os resultados obtidos com os resultados desejados. Utilizando a decomposição em fatores primos, percebemos que, na comparação das fatorações correspondentes, os elementos a e b do binômio apareciam sempre como fatores excedentes na fatoração do termo obtido e no termo desejado para todos os casos do desenvolvimento. Assim surgiu a ideia de multiplicarmos os resultados obtidos inicialmente pelo fator multiplicador constante, representado pela fração:

$$f=\frac{b}{a}$$

A demonstração de que esse era, de fato, o fator que buscávamos será apresentada nesse texto após a explicação do Método Alternativo, de forma didática.

A seguir, utilizaremos o Método Alternativo para encontrar $\mathbf{T_1}, \mathbf{T_2}, \mathbf{T_3}, \mathbf{T_4}$ e $\mathbf{T_5}$ no desenvolvimento de $(2x+3y)^5$. Uma vez que já sabemos que $\mathbf{T_0} = \mathbf{32}$ e que o primeiro termo do desenvolvimento é $32x^5y^0$, podemos encontrar $\mathbf{T_1}$, que é o segundo termo do desenvolvimento, calculado pela multiplicação de $\mathbf{T_0}$ pelo expoente do x e dividido pelo expoente do y adicionado de 1. Multiplicamos, ainda, este valor pelo fator multiplicador constante $f = \frac{3}{2}$. Sendo assim, teremos:

$$\mathbf{T_1} = (\frac{\mathbf{T_0.5}}{\mathbf{0+1}})(\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}) = (\frac{\mathbf{32.5}}{\mathbf{1}})(\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}) = (\mathbf{160})(\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}) = \mathbf{240}$$

O cálculo para $\mathbf{T_2}$ é semelhante ao que foi feito para $\mathbf{T_1}$. O segundo termo do desenvolvimento é: $\mathbf{T_1} = \mathbf{240x^4y^1}$. A partir de $\mathbf{T_1}$, encontramos $\mathbf{T_2}$ que é o terceiro termo do desenvolvimento e será o resultado do $\mathbf{T_1}$ multiplicado pelo expoente de x e dividido pelo expoente de y adicionado a 1. Multiplicamos também pelo fator multiplicador constante $f = \frac{3}{2}$.

$$\mathbf{T_2} = (\frac{\mathbf{T_1.4}}{\mathbf{1+1}})(\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}) = (\frac{\mathbf{240.4}}{\mathbf{2}})(\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}) = (\mathbf{480})(\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}) = \mathbf{720}$$

Prosseguindo para $\mathbf{T_3}$

$$\mathbf{T_3} = (\frac{\mathbf{T_2.3}}{\mathbf{2+1}})(\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}) = (\frac{\mathbf{720.3}}{\mathbf{3}})(\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}) = (\mathbf{720})(\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}) = \mathbf{1080}$$

Continuando para $\mathbf{T_4}$

$$\mathbf{T_4} = (\frac{\mathbf{T_3.2}}{\mathbf{3+1}})(\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}) = (\frac{\mathbf{1080.2}}{\mathbf{4}})(\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}) = (\mathbf{540})(\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}) = \mathbf{810}$$

Finalizando com $\mathbf{T_5}$

$$\mathbf{T_5} = (\frac{\mathbf{T_4.1}}{\mathbf{4+1}})(\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}) = (\frac{\mathbf{810.1}}{\mathbf{5}})(\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}) = (\mathbf{162})(\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}) = \mathbf{243}$$

Pelo exposto na página anterior, com esse método conseguiremos encontrar todos os coeficientes e desenvolver o Binômio $(2x+3y)^5$ utilizando somente as operações básicas que envolvem o coeficiente anterior, a partir do primeiro $\mathbf{T_0}$, obtendo assim o seguinte resultado:

$$32x^5y^0 + 240x^4y^1 + 720x^3y^2 + 1080x^2y^3 + 810x^1y^4 + 243x^0y^5 =$$

$$32x^5 + 240x^4y + 720x^3y^2 + 1080x^2y^3 + 810xy^4 + 243y^5$$

Para ilustrar a utilização mais claramente, repetiremos o processo para desenvolver o binômio: $(2x+3y)^4$. O fator multiplicador constante será dado pela fração:

$$f = \frac{b}{a} = \frac{3}{2}$$

Vamos utilizar o teorema da expansão binomial somente para encontrar o primeiro termo $\mathbf{T_0}$ do desenvolvimento. Sendo assim,

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}.(x^{n-k}y^k)$$

$$\begin{aligned}(2x+3y)^4 &= \tfrac{4!}{(4-0)!0!}((2x)^{4-0}(3y)^0) + \mathbf{T_1x^3y^1} + \mathbf{T_2x^2y^2} + \mathbf{T_3x^1y^3} + \mathbf{T_4x^0y^4} \quad = \\ &= 16x^4y^0 + \mathbf{T_1x^3y^1} + \mathbf{T_2x^2y^2} + \mathbf{T_3x^1y^3} + \mathbf{T_4x^0y^4}\end{aligned}$$

Após encontrarmos $\mathbf{T_0 = 16}$, aplicaremos o Método Alternativo, que é o principal motivador dessa dissertação, para encontrar os termos posteriores da seguinte forma:

$$\mathbf{T_1 = (\frac{T_0.4}{0+1})(\frac{3}{2}) = (\frac{16.4}{1})(\frac{3}{2}) = (64)(\frac{3}{2}) = 96}$$

Agora para $\mathbf{T_2}$:

$$\mathbf{T_2 = (\frac{T_1.3}{1+1})(\frac{3}{2}) = (\frac{96.3}{2})(\frac{3}{2}) = (144)(\frac{3}{2}) = 216}$$

Prosseguindo para $\mathbf{T_3}$:

$$\mathbf{T_3 = (\frac{T_2.2}{2+1})(\frac{3}{2}) = (\frac{216.2}{3})(\frac{3}{2}) = (144)(\frac{3}{2}) = 216}$$

Finalizando com $\mathbf{T_4}$:

$$\mathbf{T_4 = (\frac{T_3.1}{3+1})(\frac{3}{2}) = (\frac{216.1}{4})(\frac{3}{2}) = (54)(\frac{3}{2}) = 81}$$

Com esse método chegamos ao desenvolvimento do Binômio utilizando somente as operações básicas entre os coeficientes anteriores, a partir do primeiro, obtendo como resultado o desenvolvimento:

$$16x^4y^0 + 96x^3y^1 + 216x^2y^2 + 216x^1y^3 + 81x^0y^4$$

2 A CORRETUDE DO MÉTODO ALTERNATIVO

Neste capítulo, a partir da exemplificação do Método, mostraremos que o processo está correto. Para o desenvolvimento do raciocínio, usaremos a *fórmula de Stifel*, já mencionada no capítulo anterior, indicada e descrita abaixo:

$$\binom{n+1}{i} = \binom{n}{i} + \binom{n}{i-1}, \text{com } i \in \{1, \cdots, n\}$$

Lema 1. *Se* $i \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$ *e* $n \in \mathbb{N}$*, então* $\binom{n}{i} = \frac{(n-i+1)}{i}\binom{n}{i-1}$.

Demonstração. Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $i \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$.

$$\binom{n}{i} = \frac{n!}{(n-i)!i!}$$

Multiplicando numerador e denominador por $(n-i+1)$ teremos:

$$\binom{n}{i} = \frac{n!(n-i+1)}{(n-i)!(n-i+1).i!}$$

Sabemos que:

$$(n-i+1)(n-i)! = (n-i+1)! \ e \ i! = i.(i-1)!$$

Utilizando as igualdades para substituir na expressão ficaremos com:

$$\binom{n}{i} = \frac{n!(n-i+1)}{(n-i+1)! \ . \ (i-1)! \ . \ i}$$

Separando o produto das frações, teremos:

$$\binom{n}{i} = \frac{n!}{(n-i+1)!(i-1)!} \cdot \frac{(n-i+1)}{i}$$

Como:

$$\binom{n}{i-1} = \frac{n!}{(n-i+1)!(i-1)!}$$

Segue que:

$$\binom{n}{i} = \binom{n}{i-1} \cdot \frac{(n-i+1)}{i}$$

□

Teorema 3. *Dados* $a, b \in \mathbb{R}$*,* $i \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$*, e o coeficiente* $T_i = \binom{n}{i} a^{n-i} b^i$ *do desenvolvimento binomial de* $(ax + by)^n$*, então:*

$$\begin{aligned} T_i &= \left[\tfrac{(n-i+1)}{i} . \tfrac{b}{a}\right] . \tbinom{n}{i-1} a^{n-i+1} b^{i-1} = \\ &= \left[\tfrac{(n-i+1)}{i} . \tfrac{b}{a}\right] . T_{i-1} \end{aligned}$$

Demonstração. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$, e $i \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$.

Note que se substituirmos T_{i-1} por: $\binom{n}{i-1} a^{n-i+1} b^{i-1}$ no:

$$\begin{aligned} &\left[\tfrac{(n-i+1)}{i} . \tfrac{b}{a}\right] . T_{i-1} = \\ &= \left[\tfrac{(n-i+1)}{i} . \tfrac{b}{a}\right] . \tbinom{n}{i-1} a^{n-i+1} b^{i-1} = \\ &= \tfrac{\binom{n}{i-1}(n-i+1)}{i} . \tfrac{b}{a} . a^{n-i+1} b^{i-1} \end{aligned}$$

Mas, pelo Lema 1 temos:

$$\frac{\binom{n}{i-1}(n-i+1)}{i} \frac{b}{a} . a^{n-i+1} b^{i-1} = \binom{n}{i} a^{n-i} b^i = T_i.$$

□

Observe, por exemplo, $\mathbf{T_2}$ no desenvolvimento de $(2x + 3y)^5$.

Como:

$$T_i = \left[\frac{(n-i+1)}{i} . \frac{b}{a}\right] . T_{i-1}$$

Temos que:

$$T_2 = \left[\frac{(5-2+1)}{2} . \frac{3}{2}\right] . T_1 = \left[\frac{4}{2} . \frac{3}{2}\right] .240 = 720$$

Note que este é exatamente o mesmo valor que encontramos anteriormente.

No Teorema seguinte, estabeleceremos a fórmula fechada correspondente a relação de recorrência, construida a partir do teorema para encontrar cada termo do desenvolvimento do Binômio através do Método Alternativo. Antes do referido teorema, vamos analisar a recorrência mencionada e descrita abaixo. Referências para este conteúdo podem ser encontradas em (LIMA et al., 1996)

A recorrência é:

$$T_i = \begin{cases} \binom{n}{i} \cdot a^{n-i}b^i = a^n, & \text{se} \quad i = 0 \\ \left[\frac{n-i+1}{i}\frac{b}{a}\right] T_{i-1}, & \text{se} \quad i \geq 1 \end{cases}$$

Resolvendo a relação de recorrência:

$$\begin{aligned}
T_i &= \left[\tfrac{n-i+1}{i}\tfrac{b}{a}\right] T_{i-1} & = \\
&= \left[\tfrac{n-i+1}{i}\tfrac{b}{a}\right]\left[\tfrac{n-(i-1)+1}{i-1}\tfrac{b}{a}\right] T_{i-2} & = \\
&= \left[\tfrac{n-i+1}{i}\tfrac{b}{a}\right]\left[\tfrac{n-i+1+1}{i-1}\tfrac{b}{a}\right] T_{i-2} & = \\
&= \left[\tfrac{n-i+1}{i}\tfrac{b}{a}\right]\left[\tfrac{n-i+1+1}{i-1}\tfrac{b}{a}\right] T_{i-2} & = \\
&= \left[\tfrac{n-i+1}{i}\right]\left[\tfrac{n-i+2}{i-1}\right]\left(\tfrac{b}{a}\right)\left(\tfrac{b}{a}\right) T_{i-2} & = \\
&= \left[\tfrac{n-i+1}{i}\right]\left[\tfrac{n-i+2}{i-1}\right]\left(\tfrac{b}{a}\right)^2 T_{i-2} & = \\
&= \left[\tfrac{n-i+1}{i}\right]\left[\tfrac{n-i+2}{i-1}\right]\left(\tfrac{b}{a}\right)^2\left[\tfrac{n-(i-2)+1}{i}\tfrac{b}{a}\right] T_{i-3} & = \\
&= \left[\tfrac{n-i+1}{i}\right]\left[\tfrac{n-i+2}{i-1}\right]\left[\tfrac{n-i+2+1}{i-2}\right]\left(\tfrac{b}{a}\right)^2\left(\tfrac{b}{a}\right) T_{i-3} & = \\
&= \left[\tfrac{n-i+1}{i}\right]\left[\tfrac{n-i+2}{i-1}\right]\left[\tfrac{n-i+3}{i-2}\right]\left(\tfrac{b}{a}\right)^3 T_{i-3} & = \\
&\vdots \\
&= \left[\tfrac{n-i+1}{i}\right]\left[\tfrac{n-i+2}{i-1}\right]\cdots\left[\tfrac{n-i+k}{i-(k-1)}\right]\left(\tfrac{b}{a}\right)^k T_{i-k}
\end{aligned}$$

Se $i - k = 0$ temos $i = k$. Fazendo as substituições correspondentes, obtemos:

$$\begin{aligned}
T_i &= \left[\tfrac{n-i+1}{i}\right]\left[\tfrac{n-i+2}{i-1}\right]\ldots\left[\tfrac{n-i+k}{i-(i-1)}\right]\left(\tfrac{b}{a}\right)^i T_0 &= \\
&= \left[\tfrac{n-i+1}{i}\right]\left[\tfrac{n-i+2}{i-1}\right]\ldots\left[\tfrac{n}{1}\right]\left(\tfrac{b}{a}\right)^i T_0 &= \\
&= \left[\prod_{j=1}^{i} \tfrac{n-i+1}{i}\right]\left(\tfrac{b}{a}\right)^i T_0
\end{aligned}$$

Como $T_0 = a^n$, temos que a fórmula fechada da relação de recorrência é dada por:

$$T_i = \left[\prod_{j=1}^{i} \frac{n-j+1}{j}\right]\left(\frac{b}{a}\right)^i a^n.$$

A seguir, demonstraremos a fórmula fechada por indução.

Teorema 4. *Dado $i \in \mathbb{N}$, então o coeficiente $T_i = \binom{n}{i}a^{n-i}b^i$ do desenvolvimento binomial de $(ax+by)^n$ é dado por: $T_i = a^n\left(\frac{b}{a}\right)^i \prod_{j=1}^{i}\left[\frac{(n-j+1)}{j}\right]$.*

Demonstração. Suponha que $i \in \mathbb{N}$. Vamos provar por indução em $i, 1 \leq i \leq n$, que o coeficiente $T_i = \binom{n}{i}a^{n-i}b^i$ do desenvolvimento binomial de $(ax+by)^n$ é:

$$T_i = a^n\left(\frac{b}{a}\right)^i \prod_{j=1}^{i}\left[\frac{(n-j+1)}{j}\right]$$

Como $T_0 = \binom{n}{0}a^{n-0}.b^0 = a^n$ e utilizando o Teorema 3, temos:

$$\begin{aligned}
T_1 &= \left[\tfrac{(n-i+1)}{i}.\tfrac{b}{a}\right].T_0 &= \\
&= \tfrac{(n-1+1)}{1}.\tfrac{b}{a}.T_0 &= \\
&= \tfrac{n}{1}.\tfrac{b}{a}.a^n &= \\
&= a^n.n\left(\tfrac{b}{a}\right) &= \\
&= a^n\left(\tfrac{b}{a}\right)^1 \prod_{j=1}^{1}\left[\tfrac{(n-j+1)}{j}\right]
\end{aligned}$$

O coeficiente T_1 será a nossa base de indução. Faremos os casos T_2 e T_3 para a conveniência do leitor.

Pelo Teorema 3 temos que:

$$\begin{aligned}
T_2 &= \left(\tfrac{n-1}{2}\right).\left(\tfrac{b}{a}\right)T_1 &= \\
&= \left(\tfrac{n-1}{2}\right).\left(\tfrac{b}{a}\right).a^n.n.\left(\tfrac{b}{a}\right) &= \\
&= a^n\left(\tfrac{b}{a}\right)^2\textstyle\prod_{j=1}^{2}\left[\tfrac{(n-j+1)}{j}\right]
\end{aligned}$$

Da mesma forma:

$$\begin{aligned}
T_3 &= \left(\tfrac{n-2}{3}\right)\left(\tfrac{b}{a}\right)T_2 &= \\
&= \left(\tfrac{n-2}{3}\right)\left(\tfrac{b}{a}\right)a^n\left(\tfrac{b}{a}\right)^2 &= \\
&= \textstyle\prod_{j=1}^{2}\left[\tfrac{(n-j+1)}{j}\right] &= \\
&= a^n\left(\tfrac{b}{a}\right)^3\textstyle\prod_{j=1}^{3}\left[\tfrac{(n-j+1)}{j}\right]
\end{aligned}$$

Suponha, por hipótese de indução, que para $i, 1 \leq i < n$,.Temos:

$$T_i = a^n\left(\frac{b}{a}\right)^i\prod_{j=1}^{i}\left[\frac{(n-j+1)}{j}\right]$$

Pelo Teorema 3 temos que:

$$T_{i+1} = \left(\frac{n-i}{i+1}\right)\left(\frac{b}{a}\right)T_i.$$

Utilizando a hipótese de indução, segue que:

$$\begin{aligned}
T_{i+1} &= \left(\tfrac{n-i}{i+1}\right)\left(\tfrac{b}{a}\right)a^n\left(\tfrac{b}{a}\right)^i\textstyle\prod_{j=1}^{i}\left[\tfrac{(n-j+1)}{j}\right] &= \\
&= \textstyle\prod_{j=1}^{i}\left[\tfrac{(n-(i+1)+1)}{i+1}\right].a^n.\left(\tfrac{b}{a}\right)^{(i+1)} &= \\
&= a^n\left(\tfrac{b}{a}\right)^{i+1}\textstyle\prod_{j=1}^{i+1}\left[\tfrac{(n-j+1)}{j}\right]
\end{aligned}$$

Dessa forma, obtemos a expressão para encontrar T_i, com $i \in \{1, \cdots, n\}$

$$T_i = a^n\left[\frac{b}{a}\right]^i\prod_{j=1}^{i}\left[\frac{(n-j+1)}{j}\right]$$

$\square$

Usando novamente como exemplo o T_2 no desenvolvimento de $(2x+3y)^5$, temos:

$$T_2 = 2^5.\left(\frac{3}{2}\right)^2.\left(\frac{5-1+1}{1}\right).\left(\frac{5-2+1}{2}\right) = 32.\left(\frac{3}{2}\right)^2.5.2 = 720.$$

Para ajudar o leitor a familiarizar-se com as notações, encontraremos também o T_3:

$$T_3 = 2^5.\left(\frac{3}{2}\right)^3.\left(\frac{5-1+1}{1}\right).\left(\frac{5-2+1}{2}\right).\left(\frac{5-3+1}{3}\right) = 32.\left(\frac{3}{2}\right)^3.5.2.1 = 4.27.10 = 1080.$$

3 APLICABILIDADE E VIABILIDADE DO MÉTODO ALTERNATIVO

O desenvolvimento do Binômio de Newton pelo método tradicional, do modo como é feito nas escolas, não é aprazível aos alunos do Ensino Médio. Os principais motivos alegados são a pouca aplicabilidade em questões cotidianas; a grande quantidade de cálculos envolvendo número binomiais; o fatorial de um número e frações com simplificações; operações com desenvolvimento demorado e com grande chances de erro em contas; e grande necessidade de habilidades algébricas.

Já o Método Alternativo, por usar operações bem mais simples e diretas, facilita tanto da expansão do Binômio quanto a verificação de um único termo escolhido. A expansão do Binômio, neste método, pode ser feita de forma recursiva ou usando a fórmula fechada. A determinação de um termo específico de forma mais ágil é feita através da fórmula fechada.

É importante ressaltar que esta é uma escolha possível e compatível com as propostas que já apareciam no PCN (BRASIL, 2000) e no PCN+(BRASIL, 2002), colocando a matemática como ciência com caracteristicas próprias de investigação e linguagem, tendo também como um de seus atributos o papel investigador junto a outras ciências. Segundo Fábio Nascimento (NASCIMENTO, 2015), a distribuição binomial possui algumas aplicações nas áreas de ciências biológicas e ciências médicas, reiterando este papel.

Já na proposta da BNCC (BRASIL, 2018), uma competência específica, a Competência 5 da matemática no Ensino Médio, sugere que sejam investigadas e estabelecidas conjecturas a respeito das propriedades matemáticas, observando padrões e experimentações, além da necessidade de demonstração formal na validação das conjecturas. Na habilidade EM13MAT315 fica clara a proposta de estimular o reconhecimeento de um problema algorítmico com a busca da solução e construção de um algoritmo correspondente.

O Método Alternativo vem sendo usado em materiais de divulgação na internet e em muitas salas de aula sem o conhecimento sobre sua corretude. O fato de utilizar este método sem comprovação motivou a busca pela demonstração com o rigor matemático a ela inerente e deu origem a esta dessertação.

Segundo os argumentos citados acima, a sugestão deste trabalho culmina com a sequência didática proposta a seguir para ensinar o aluno a desenvolver o Binômio de Newton.

1º Momento: Após ensinarmos números binomiais e fatorial de um número natural, fazemos a expansão do Binômio utilizando o produto de polinômios aplicando a propriedade distributiva para $(x + y)^1$, $(x + y)^2$, $(x + y)^3$. Quando o fazemos para $(x + y)^4$, começamos a ter problemas com a quantidade de cálculos a serem feitos pelos alunos. Desta forma, há a clara necessidade de uma fórmula que generalize todos os casos.

2º Momento: A partir daí, iniciamos a aplicação do método tradicional utilizando a expanção do binômio através da fórmula de Newton. Por enquanto, utilizamos em todos os exemplos os binômios do tipo: $(x + y)^n$, ou seja, com os coeficientes de x e y iguais a 1. Em poucos instantes, o aluno começa a perceber que o método de Newton também demanda grande quantidade de cálculos e simplificações. Por esses motivos, somos conduzidos a tentar estabelecer uma maneira alternativa. É nesse momento que temos a oportunidade de apresentar uma maneira mais simples, rápida e com menos chances de erro: o Método Alternativo.

3º Momento: O Método Alternativo quando aplicado nos desenvolvimentos dos binômios com coeficientes iguais a 1, Tem relação direta com os números resultantes das linhas correpondentes do triângulo de Pascal, citado no capítulo 1. Rapidamente os alunos identificam-se com o método e sentem-se estimulados a usá-lo. Resolvemos mais alguns exemplos para a familiarização com o Método Alternativo proposto. Sugerimos, neste momento, a apresentação de um esboço da demonstração do Lema 1, já que aplicamos propriedades e operações bem conhecidas no Ensino Médio. Em seguida, inserimos a proposta de desenvolver $(2x + 3y)^5$ pelo Método Tradicional e também pelo Método Alternativo proposto.

Quando fazemos a comparação dos resultados dos coeficientes encontrados nos dois métodos, percebemos que há diferença nos resultados mas que, na verdade, se torna um grande motivador para que investiguemos se há alguma relação entre eles. Fazemos esta investigação comparando a decomposição em fatores primos dos resultados dos T_is correspondentes encontrados através do Método Tradicional e do Método Alternativo. Percebemos assim, junto com os alunos, que essa diferença pode ser compensada em todos os casos, pela multiplicação do resultado obtido no Método Alternativo pelo fator multiplicador constante: $f = \frac{b}{a} = \frac{3}{2}$. Aplicamos esse fator em cada termo T_i e chegamos ao resultado correto desejado.

Quando o aluno tem o primeiro contato com o Método, mostra uma reação diferente da que teve com o desenvolvimento tradicional, chegando a questionar o motivo de não ter visto este método antes. É perceptível o envolvimento dos alunos com o algorítmo proposto para desenvolver o binômio e, a medida que descobrem juntos cada passo, apropriam-se do método.

CONCLUSÃO

Esperamos que esse trabalho possa contribuir e incentivar, tanto docentes quanto discentes do Ensino Médio, a estabelecer uma nova relação com a expansão do Binômio de Newton. Geralmente, a nossa experiência com turmas do segundo ano do Ensino Médio, que é o ano de escolaridade escolhido para abordagem do assunto enquanto conteúdo programático obrigatório, nos mostra um grande desinteresse por parte dos discentes, como já citado no inicio desse trabalho. Nesse sentido, propomos o uso do Método Alternativo que vem trazer uma nova abordagem para esse assunto. Porém resaltamos a importância de que todo algoritmo seja verificado matematicamente e sua corretude seja tratada como cunjectura antes disso.

Inicialmente, fizemos uma comparação do Método Tradicional com o Método Alternativo, introduzindo como geralmente o Binônio é ensinado pela abordagem do método tradicional. Após essa introdução mostramos, através de exemplos, como a distribuição/expanção do Binômio de Newton pode ser feita de maneira muito mais prática utilizando o Método Alternativo proposto nessa dissertação. Em seguida, provamos a sua corretude fazendo uso do rigor e formalidade da linguagem matemática, apresentando e demonstrando os resultados necessários para tal. Vale destacar que, com a fórmula fechada apresentada, também poderemos encontrar cada termo individualmente, sem precisar dos seus anteriores. Concluimos as etapas descritas com a proposta da viabilidade e aplicação do Método Alternativo proposto, confiando fortemente que este método pode ser aplicado para melhorar a abordagem do assunto no Ensino Médio de maneira geral.

O desenvolvimento desta dissertação foi fundamental para minha atuação docente, uma vez que já aplicava o método em sala de aula usando apenas exemplos numéricos para conjecturar que funcionava. Outro incômodo diz respeito à inserção do Método Alternativo na introdução do Binômio de Newton e os algoritmos referentes ao seu desenvolvimento, que resolvemos com a proposta de uma sequencia didática com esta finalidade descrita no Capítulo 3.

Como trabalhos futuros, existe a possibilidade de estender os resultados desta dissertação para expressões do tipo $(x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_m)^n$, o que ainda permanece em aberto até o presente momento.

REFERÊNCIAS

BOYER, C.B. *História da Matemática*. 3. ed. São Paulo: Blusher, 2010.

BRASIL. Ministério da Educação. *Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio - PCN*. [s.n.], 2000. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf>. Acesso em: 03 set. 2018.

_____. Ministério da Educação. *Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio - PCN+*. [s.n.], 2002. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf>. Acesso em: 03 set. 2018.

_____. Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular - BNCC*. [s.n.], 2018. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/#/site/inicio>. Acesso em: 10 dez. 2018.

CAJU. *Binômio de Newton*. [s.n.], 2016. Disponível em: <https://www.tutorbrasil.com.br/questoes-resolvidas/exercicios-resolvidos/binomio-de-newton-2/>. Acesso em: 12 out. 2018.

GARBI, G.G. *A Rainha das Ciências*. 3. ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2006.

_____. *O Romance das Equações Algébricas*. 2. ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2007.

IEZZI, G. *Matemática Ciência e Aplicações*. v. 2. São Paulo: Atual Editora, 2001.

LIMA, E.L. et al. *A Matematica do Ensino Médio*. v. 2. Rio de Janeiro: SBM, 1996.

MACMAHON, P.A. *Combinatory Analysis*. Cambridge University Press, 1915–1916. Disponível em: <https://archive.org/details/combinatoryanal01macmuoft/page/n7>. Acesso em: 10 fev. 2018.

MILIES, F.C.P.; COEHO, S. P. *Números: Uma Introdução à Matemática*. 3. ed. São Paulo: Edusp, 2003.

NASCIMENTO, F. Mestrado - PROFMAT UFF, *Algumas Aplicações da Distribuição Binomial*. Niterói: [s.n.], 2015.

PAIVA, M. *Matemática: Conceitos, linguagem e aplicações*. v. 2. São Paulo: Editora Moderna, 2002.

PESSOA, F. *Poesias de Álvaro de Campos*. Lisboa: Ática, 1944.