Universidade Federal do Piauí
Departamento de Matemática
Programa de Mestrado Profissional em
Matemática em Rede Nacional

PROFMAT

O método criativo de Arquimedes

Francisco Ronny Carvalho Barbosa

Teresina

2018

Francisco Ronny Carvalho Barbosa

O método criativo de Arquimedes

Dissertação submetida à Coordenação do Programa de Pós Graduação em Matemática da Universidade Federal do Piauí, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática

Área de Concentração: Matemática do Ensino Básico

Orientador: Prof. Dr. Newton Luis Santos

Teresina

2018

FICHA CATALOGRÁFICA
Universidade Federal do Piauí
Biblioteca Comunitária Jornalista Carlos Castello Branco
Serviço de Processamento Técnico

C331m Barbosa, Francisco Ronny Carvalho
O Método criativo de Arquimedes. / Francisco Ronny Carvalho Barbosa. - 2018.
59 f.: il.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Piauí, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Teresina, 2018.
"Orientação: Prof. Dr. Newton Luis Santos".

1. Matemática - História. 2. Arquimedes - Inventos. 3. Pi. (π). I. Título.

CDD: 510.9

PROFMAT

SBM

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PIAUÍ
CENTRO DE CIÊNCIAS DA NATUREZA
CENTRO DE EDUCAÇÃO ABERTA E À DISTÂNCIA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

Dissertação de Mestrado submetida à coordenação Acadêmica Institucional, na Universidade Federal do Piauí, do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional para obtenção do grau de **mestre em matemática** intitulada: **O método criativo de Arquimedes**, defendida por Francisco Ronny Carvalho Barbosa em 30 / 10 / 2018 e aprovada pela banca constituída pelos professores:

Presidente da Banca Examinadora

Examinador Interno

Examinador Externo ao Programa

Francisco Ronny Carvalho Barbosa graduou-se em Bacharelado em Matemática pela Universidade Federal do Piauí em 2003 e em Licenciatura Plena em Matemática em 2009 na mesma instituição. Foi professor da Secretaria da Educação do Estado do Piauí e desde 2017 é professor efetivo do Instituto Federal do Maranhão.

Dedico este trabalho ao grande Professor de Matemática

João Benício de Melo Neto

Agradecimentos

Agradeço aos meus familiares, pois sem eles aqui eu não estaria. Agradeço em especial ao meu sobrinho João, a quem considero como um verdadeiro filho, e a meu filho Alexandre, que me veio como um presente durante esse curso e que me custou longas e prazerosas noites de divisão entre fraldas e livros.

Agradeço a todos os colegas e amigos que, hoje estando aqui perto ou não, saibam que me lembro de cada palavra de apoio que me deram.

Agradeço à maravilhosa turma, que nesses pouco mais de dois anos veio a tornar-se quase que uma família, e a nossos grandes professores, objetos de nossa profunda admiração e portos seguros de conhecimento.

Por fim, um agradecimento super especial ao grande professor João Benício, um verdadeiro mestre em vida e que tanto me incentivou e cobrou a continuar os meus estudos. Com uma imensa tristeza durante o curso sofremos sua perda, mas acredito que de um bom lugar ele continua a nos felicitar com sua grande alegria.

Resumo

O presente trabalho visa mostrar a grandiosidade de Arquimedes, por muitos considerado o maior gênio da antiguidade. De uma vida voltada às descobertas, muito lhe é creditado, sejam inventos mecânicos, ou sejam, sua grande paixão, a matemática pura. Do pioneirismo do cálculo de áreas de figuras curvilíneas até o cálculo de volumes de sólidos dessa natureza, traz-se aqui uma mostra de sua extensa obra, a nível de compreensão de um estudante de ensino básico. A simplicidade dos argumentos e as contruções de profunda imaginação mostram que muito pode ser feito com uma matemática que hoje é considerada a esse nível de ensino, mas com resultados que refletem problemas atualmente estudados a nível superior. Da capacidade mental para cálculos de grande ordem à imaginação de utilizar-se de comparar "pesos"de segmentos e figuras planas para o cálculo de áreas e volumes, traz-se aqui algumas aplicações suas dessas técnicas que, mesmo em sua simplicidade, de tão inovadoras e originais, tiveram que esperar mais de mil e seiscentos anos para que voltassem a serem aperfeiçoadas.

Palavras-chave

Arquimedes, História da Matemática, Pi, Áreas, Volumes

Abstract

The present work aims to show the grandeur of this one who is, by many, considered the greatest genius of antiquity. Of a life turned to the discoveries, much is credited to him, they are mechanical inventions, or, its great passion, the mathematics pure. From the pioneering of the calculation of areas of curvilinear figures to the calculation of volumes of solids of this nature, here is a sample of his extensive work, at the level of understanding of a student of basic education. The simplicity of the arguments and the constructions of deep imagination show that much can be done with a mathematics that is now considered at this level of education, but with results that reflect problems currently studied at a higher level. From mental capacity to calculations of great order to the imagination of comparing "weights"of segments and flat figures for the calculation of areas and volumes, here are some applications of these techniques that, even in their simplicity, are so innovative and had to wait more than one thousand six hundred years for them to be perfected again.

Keywords

Archimedes, History of Mathematics, Pi, Areas, Volumes

Lista de Figuras

Sumário

Introdução

Quando um estudante, especialmente de nível fundamental e médio, depara-se com uma demonstração, vê-se como se transplantado para uma terra estranha. Mesmo na matemática, não há uma cultura escolar de buscar compreender o caminho das grandes descobertas, mesmo quando é consistida de argumentos e elementos corriqueiros. Em muitos livros as demonstrações são até suprimidas. Ganhar familiaridade com os métodos de demonstração só vem a aumentar o prazer da busca e da descoberta, e a matemática, mais que qualquer outra ciência, traz em seu espírito essas duas qualidades.

Como bem falam, conhecer sua história é buscar não repetir os erros, ou mesmo reconhecer os acertos, e isso não é diferente com a história da matemática. O que hoje podemos chamar de trivial pode ter sido fruto de centenas de anos de trabalho árduo de inúmeras gerações de solitários amantes dos números, ou também pode ser fruto de mentes brilhantes que, como se num passe de mágica, vieram ao nosso mundo e condensaram essas prováveis centenas de anos de trabalho em poucos anos de profunda produção, inovação e descobertas. Podemos citar as três maiores mentes da história da matemática: Arquimedes, Newton e Gauss. Este trabalho concentra-se no primeiro, mas pode-se ver que naturalmente os outros dois de apresentam.

Arquimedes foi inovador, uma figura ímpar em seu tempo, e, sem muito exagero, foi praticamente inalcançável por quase dois milênios. Em suas mãos a matemática deu um salto gigantesco, feito esse que só se viu repetir com o surgimento de Newton e, após, Gauss. Em tempos onde a geometria ainda engatinhava sob triângulos e figuras retilíneas, Arquimedes partiu dessas bases, por inovadores métodos mecânicos ou geométricos, para chegar a áreas e volumes de figuras curvilíneas, algo quase impensável para seu tempo. Ou seja, com muito pouco em mãos construiu um verdadeiro novo universo matemático.

Aqui traz-se uma pequena mostra de seu processo criativo, partindo de um problema comum, mas nem por isso fácil, da grécia antiga, em que Arquimedes apresentou uma solução: a trissecção do ângulo. Na realidade ele apresentou várias outras mas, pela complexidade (não significa dificuldade), foram deixadas fora dessa pesquisa. Recomenda-se a leitura dessas outras soluções. Em sequência, mostra-se uma construção do heptágono regular, o cálculo do valor de π, em que, não pela inovação, mas pela capacidade computacional deve-se ser reconhecido e seu inovador trabalho com centros de gravidade, conceito inovador seu e embora um ente físico foi brilhantemente utilizado na geomeria sendo a base para os capítulos posteriores sobre parábolas e esferas.

Tudo isso foi construido com argumentos simples, muitos quase triviais, mas de consequências profundas. Tais construções são perfeitamente compreensíveis por um estudante de ensino médio, até por isso estão aqui, e estimula-se esse estudante a continuar a conhecer o trabalho desse grande homem. Sua metodologia de descoberta por processos mecânicos e seu grande rigor e organização para o registro e boa compreensão do método matemático o torna leitura praticamente obrigatória para aqueles que desejam enveredar pelos caminhos das descobertas matemáticas.

Capítulo 1

Breve histórico sobre a vida de Arquimedes

Em importância dos assuntos e elegância de estilo, nenhum trabalho de matemática clássica supera os trabalhos de Arquimedes. Isso já era reconhecido na antiguidade. Conforme Asger Aaboe [1], Plutarco, que viveu na segunda metade do século primeiro d.C., em seu livro *Vidas Ilustres*, ao falar sobre a vida do general Marcelo, comandante do exército romano, escreveu sobre Arquimedes:

> "Não é possível encontrar em toda a geometria problemas mais difíceis e complicados, ou explicações mais simples e lúcidas. Alguns atribuem isso a sua genialidade; enquanto outros acham que foram produzidos por esforço e trabalho incríveis, embora aparentemente sejam resultados fáceis e obtidos sem esforço."

Há também referências esparsas na literatura clássica, e desta maneira ele se torna o matemático grego sobre quem temos mais informações biográficas, embora ainda muito poucas. Para maiores informações, veja [3], [4] ou [6].

Arquimedes , natural da cidade de Siracusa, figura entre os maiores matemáticos de todos os tempos e certamente é o maior da antiguidade. Filho de um astrônomo, Feidias, do qual não sabemos mais nada, nasceu por volta de 287 a.C. e morreu em 212 a.C. Há registros segundo os quais ele esteve algum tempo no Egito, provavelmente na Universidade de Alexandria, pois contavam, entre seus amigos, Cônon, Dositeo e

Eratóstenes. Arquimedes comunicou muitas de suas descobertas matemáticas a esses homens.

Figura 1.1: Arquimedes na medalha Fields

FONTE: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:FieldsMedalFront.jpg

Os historiadores romanos deixaram relatos de muitas histórias pitorescas sobre Arquimedes. Dentre essas figuram as descrições dos engenhos criativos inventados por ele para ajudar na defesa de siracusa quando sítio imposto à cidade pelos romanos sob o comando do general Marcelo. Haviam catapultas móveis de alcance ajustável para arremessar peso por sobre os navios inimigos que se aproximassem muitos dos muros da cidade e grandes guindastes que içavam da superfície do mar esses navios. Plutarco tem uma descrição extremamente dramática da eficiência dessas máquinas quer à pequena, quer à grande distância. Por fim, os romanos estavariam tão aterrorizados que, conforme Plutarco, *"era suficiente verem uma pequena corda ou um pedaço de madeira sobre a muralha, gritavam imediatamente que Arquimedes estava pronto para lançar alguma máquina contra eles, faziam meia volta e fugiam"*. A história segundo o qual ele utilizou de grandes espelhos para incendiar navios de guerra do inimigo também tem origem posterior, mas pode ser verdadeira, embora muitos duvidem pela dificuldade da confecção de tais instrumentos. Há também a história de como ele fez por justificar sua afirmação "Dê-me uma alavanca que moverei a Terra", conseguindo mover, sozinho e sem esforço, apenas com a ajuda de um sistema de polias compostas, um navio pesadamente carregado que não podia ser retirado do cais sem muito esforço e muitos homens.

Arquimedes explorou muito sua geometria em figuras desenhadas em cinzas de lareiras ou no óleo com que besunava seu corpo após os banhos, para estes muitas vezes levados à força, de tanto que se tornava absorto em seus raciocínios. Segundo parece, era capaz de concentrações mentais intensas e há relatos sobre sua distração quando se enfronhava na resolução de algum problema, e, conforme Plutarco, *"em um estado de preocupação total e de possessão divina, no sentido mais verdadeiro, por seu amor e deleite pela ciência"*. De fato, diz-se que encontrou a morte quando mergulhado em seus raciocínios preocupava-se com um diagrama traçado num tabuleiro de areia. De acordo com uma versão, isso ocorreu durante a pilhagem de Siracusa, quando ele ordenou a um soldado romano para se afastar de seu diagrama. O saqueador incontinente teria atravessado o corpo do ancião com uma lança desobedecendo assim ordes estritas do general Marcelo que nenhum mal fosse feito a tão ilustre matemático.

Marcelo desenvolveu um profundo respeito por seu engenhoso adversário e quando finalmente conseguiu abrir brechas nos muros da cidade, ao saber de sua morte, ficou muito consternado e com as honras e o respeito devidos fez enterrar o corpo do intelectual ilustre no cemitério da cidade cuidando para que o pedido de Arquimedes de que gravassem em seu túmulo a figura de uma esfera inscrita num cilindo circular reto fosse atendido. Muitos anos mais tarde, quando Cícero servia como questor romano na Sicília, indagou a cerco do túmulo de Arquimedes e ninguém sabia. Examinou todos os monumentos do cemitério e o localizou, resgatando após tanto tempo negligenciado e esquecido, mas, infelizmente, este voltou a desaparecer.

Os trabalhos de Arquimedes são obras primas de exposição matemática e lembram bastante artigos de revistas especializadas modernas. Além de exibirem grande originalidade, habilidade computacional e rigor nas demonstrações, são escritas numa linguagem altamente acabada e objetiva. O próprio em prefácio de um de seus trabalhos conta-nos que tinha costume de enviar alguns de seus teoremas a amigos em Alexandria, mas sem demonstações a fim de que eles próprios pudessem ter o prazer de descobrí-las. No entanto, se aborrecera com o fato de que alguns tinham adotado seus teoremas, talvez como se fossem deles próprios, sem se preocupar em demonstrá-los, de maneira que ele conta como inclui neste último conjunto de teoremas dois que eram falsos, uma amostra de como *"os que afirmam descobrir tudo, mas não mostram demonstrações disso, podem ser confundidos por terem em verdade pretendido demonstrar o impossível"*. Cerca de dez trabalhos de Arquimedes se preservaram até nossos dias e há vestigios de outros extraviados. Talvez a mais notável das contribuições feitas à matemática por esses tratados se traduzam no desenvolvimento inicial de alguns dos métodos do cálculo integral.

Três dos trabalhos remanescentes de Arquimedes se dedicam à geometria plana. São eles, *A Medida do Círculo* , *A Quadratura da Parábola* e *Sobre as Espirais.* Foi no primeiro deles que Arquimedes inaugurou o método clássico para o cálculo de π. No segundo trabalho, mostra-se que a área de um segmento parabólico é quatro terços da área de um triângulo que possui a mesma base e de vértice no ponto onde a tangente é paralela à base. O terceiro trabalho dedica-se às propriedades de uma curva hoje conhecida por Espiral de Arquimedes. Há alusões a muitos outros trabalhos perdidos de Arquimedes em geometria plana e há razões para acreditar que alguns desses trabalhos estejam preservados no Liber Assumptorum, uma coleção que chegou até nós através dos árabes. Em Eves [6], encontramos que o erudito árabe Al-Biruni reinvidicou para Arquimedes a paternidade da célebre fórmula

$$K = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

que fornece a área do triângulo em função de seus lados. Até então essa fórmula era atribuida a Herão de Alexandria. Acredita-se até que a famosa fórmula $v - a + f = 2$, hoje referida como fórmula de Euler-Descartes, já seria de conhecimento de Arquimedes.

Dois dos trabalhos remanescentes de Arquimedes dizem respeito à geometria espacial. São eles, *Sobre a Esfera e o Cilindro* e *Sobre os Cones e os Esferóides.* No primeiro deles figura o teorema que fornece as áreas de uma esfera e de uma calota esférica e no segundo uma investigação dos volumes das quádricas de revolução. Papus atribui a Arquimedes 30 polidros semiregulares mas, infelizmente, a descrição original feita desses sólidos se perdeu.

Arquimedes escreveu dois opúsculos sobre aritmética, relacionados entre si, um dos quais se perdeu. O que se preservou, introduz um novo sistema de numeração, objetivando representar números muito grandes. É nesse trabalho entre observações relacinadas com a astronomia que tomamos conhecimento de que Aristarco antecipou a teoria heliocêntrica de Copérnico.

Há dois trabalhos remanescentes de Arquimedes sobre matemática aplicada: *Sobre o Equilíbrio de Figuras Planas* e *Sobre os Corpos Flutuantes.* No primeiro eles (dois livros), obtem-se as propriedades elementares dos centróides e se determinam centróides de várias figuras planas. Quanto ao segundo (também dois livros), representa a primeira aplicação da matemática à hidrostática. Outros trabalhos de física-matemática escritos por Arquimedes de perderam. Só no século XVI, com o trabalho de Simon Stevin, a ciência da estática e a teoria da hidrostática avançaram além do ponto a que Arquimedes chegara.

O livro de Netz e Noel [11] traz a história de uma das descobertas mais emocionantes da história da matemática que ocorreu há relativamente bem pouco tempo, em 1906: foi achado em Constantiopla por J. L. Heiberg o tratado de Arquimedes *O Método*, de longa data perdido. O texto estava escrito sobre pergaminho por um copista do século dez e tinha sido lavado a fim de apagar o manuscrito e tornar o precioso pergaminho disponível para um livro de orações e de ritual. Um tal texto, apagado e reescrito, é chamado *palimpsesto* (de um termo grego que significa raspar) e é naturalmente de leitura extremamente difícil. Felizmente, ou mesmo incrivelmente, Heiberg consegiu compreender bastante suas mais de cem páginas fim de nos dar uma boa edição de quase todo este notável livro, trabalho esse continuado apenas após 1998, quando, após um novo sumiço, o escrito reapareceu em um leilão realizado na Christie's de Nova York, arrematado por 2 milhões de dólares.

Esse tratado é importante devido às informações que fornece a cerca do método que Arquimedes usava para descobrir muitos de seus teoremas. Embora o "método"seja suscetível de se tornar rigoroso pelos métodos de integração modernos Arquimedes o usava de maneira meramente heurística para descobrir resultados que ele então tratava de colocar em termos rigorosos mediante o método da exaustão.

Embora a ele sejam atribuidas muitas invnções, seu real prazer para registros era a matemática pura. A invenção mecânica de Arquimedes mais conhecida é a bomba de água em parafuso, idealizada por ele para irrigar campos, drenar charcos e retirar água de porões de navios. Esse engenho é usado ainda hoje tanto para transporte de líquidos como de grãos.

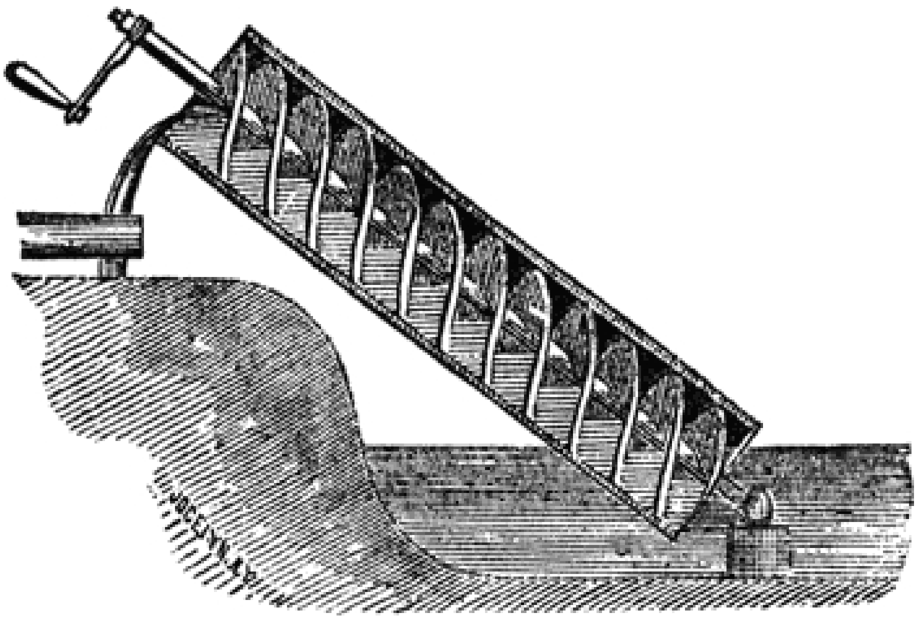

Figura 1.2: Parafuso de Arquimedes

FONTE: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Archimedes_screw.JPG

Capítulo 2

Trisecção do ângulo e construção do heptágono regular

Na história da matemática existem três problemas que persistiram com espantoso vigor por mais de dois mil anos. São eles: *a trissecção do ângulo, a duplicação do cubo e a quadratura do círculo* (resolvidos por Gauss, em sua obra *Disquisitiones Arithmeticae*, de 1801). Devido a sua resistente existência, foram denominados *Famosos Problemas*, e, incrivelmente, até hoje muita energia é dispensada em busca de suas soluções. Yates [12] fala bem sobre essas tentativas e até possui um capítulo inteiro sobre os "Don Quixotes"dos famosos problemas. Esse estímulo em muito contribuiu para o crescimento de nossa presente estrutura algébrica e geométrica, inclusive mesmo para a demonstração da impossibilidade de suas resoluções com o uso de apenas régua (não graduada) e compasso que, conforme Pappus atribuiu a Platão, são permitidos:

1. Desenhar uma linha reta de comprimento indefinido através de dois pontos distintos dados;

2. Construir um círculo com o centro em um ponto dado e que passa por um segundo ponto dado.

Arquimedes deu sua versão para a trissecção do ângulo. Aqui, é mostrada conforme apresentada em Aaboe [1].

2.1 A trissecção do ângulo

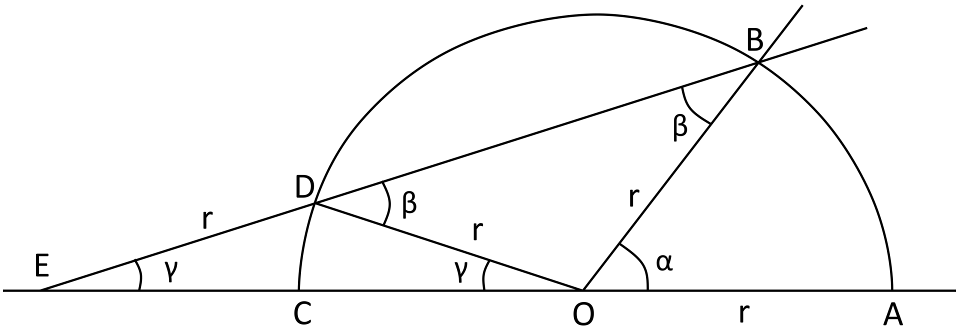

Figura 2.1: Trissecção

Na figura, seja α um ângulo qualquer, de vértice O. Em um de seus lados escolha um ponto A e, com centro em O e raio $r = OA$, trace um círculo; seja B sua interseção com o outro lado de α e seja C o ponto diametralmente oposto de A. Prolongue OC além de C. Agora, façamos duas marcas sobre a régua de maneira que a distância entre elas seja r; seja L a marca da esquerda e R a marca da direita.

Note que essa marcação na régua é uma violação das regras usuais de construções por régua e compasso, chamada *construção por neusis*, do verbo grego *neuien*, que significa apontar ou acenar.

Colocamos agora a régua de maneira que ela passe por B e que a marca R esteja sobre o arco CB do círculo. Movemos então a régua de tal maneira que a marca R se desloque sobre o círculo e a régua sempre passe por B até que a marca L esteja sobre a extensão OC. Seja E esse ponto de OC e D o ponto do círculo onde a reta BE o intersecta. Sejam $O\hat{D}B = O\hat{B}D = \beta$ e $C\hat{O}D = C\hat{E}D = \gamma$. Observemos que $\beta = 2\gamma$ pois β é suplementar ao ângulo D no triângulo isósceles ODE e como α é suplementar ao ângulo O no triângulo EOB, é portanto igual à soma $\beta + \gamma$ dos dois ângulos restantes.

Assim,

$$\alpha = \beta + \gamma = 2\gamma + \gamma = 3\gamma$$

de maneira que γ é um terço de α, e conseguimos trisectar o ângulo.

$\square$

É um erro comum supor que os gregos se limitavam inteiramente a contruções com régua e compasso. É verdade que virtualmente todas as construções de Euclides podem ser efetuadas com estes meios, mas de maneira geral os geômetras gregos não reconheciam tais restrições em seus trabalhos. Arquimedes e seus contemporâneos sabiam, é claro, que essa não era uma trissecção canônica no sentido platônico. Esse tipo de processo, a *construção por neusis*, não era novo na matemática grega na época de Arquimedes, mas é uma adição poderosa às operações permissíveis nas construções ordinárias, e torna possível resolver vários problemas novos, por exemplo, o que acabamos de ver e a construção do heptágono regular, que veremos mais adiante. Uma leitura mais extensa sobre sobre esse tipo de constução pode ser encontrada em Heath [10].

Se por um lado a construção por *neusis* oferece um pouco mais de liberdade para o uso da régua e do compasso, Lorenzo Mascheroni, em sua obra *La Geometria del Compasso* [5], ainda no prefácio, refletiu sobre que a régua, sozinha, serve apenas para a construção de uma linha reta, sendo assim possível o emprego apenas do compasso, não apenas determinando circunferências e arcos, mas também variados centros e com diferentes aberturas por meio das interseções dessas circunferências encontrar os pontos que servirão para resolver um problema geomético qualquer. Acreditava que tinha feito algo inédito mas Goerg Mohr, em seu livro *Euclide Danicus* de 1672, já continha uma demonstração deste fato, 125 anos antes de Mascheroni.

2.2 A construção do heptágono regular

Aaboe [1] também traz em si essa belíssima construção devida a Arquimedes. Iniciamos conforme figura, com um segmento de reta dado AB.

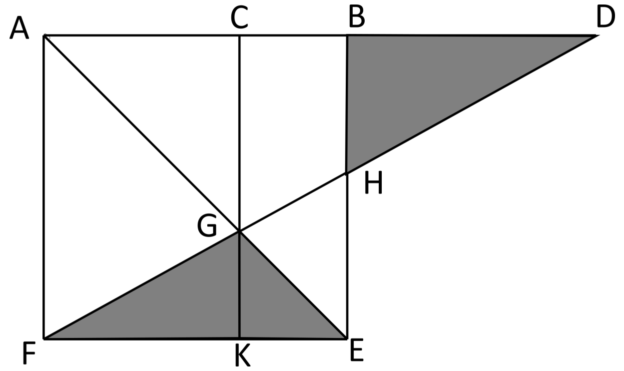

Figura 2.2: Início da consrução do heptágono

Sobre ele construimos um quadrado $AFEB$, traçamos sua diagonal AE,e prolongamos o segmento de reta dado AB além de B. Efetuamos agora uma construção *neusis*: fazemos uma reta variar, de maneira que ela passe sempre por F, e até qua a área entre a reta, a diagonal AE, e o lado FE seja igual à área entre a reta, o lado BE e o prolongamento de AB além de B. FD representa esta posição da reta e as partes iguais estão hachuradas na figura. FD intersecta a diagonal em G. o lado BE em H e o prolongamento de AB em D. Por G traçamos uma reta paralela a BE intersectando AB em C e FE em K. Da igualdade das áreas dos dois triângulos hachurados, obtemos

$$GK \cdot FE = BH \cdot BD$$

ou seja,

$$\frac{BH}{GK} = \frac{FE}{BD}.$$

Por os triângulos HBD e GKF serem retângulos e semelhantes, pois os ângulos em F e D são iguais, temos

$$\frac{BH}{GK} = \frac{BD}{FK}$$

Dessas relações, obtemos

$$FE \cdot FK = BD^2$$

e substituindo FE por AB e FK por AC, obtemos

$$AB \cdot AC = BD^2$$

Observamos agora que o triângulo FKG é semelhante ao triângulo DCG, e obtemos

$$\frac{GK}{FK} = \frac{GC}{CD}$$

ou seja,

$$GK \cdot CD = FK \cdot GC$$

Como AE é a diagonal de um quadrado, $GC = AC$ e $GK = KE$. Além disso, $FK = AC$ e $KE = GK = CB$. Substituindo GK por CB e FK por AC obtemos

$$CB \cdot CD = AC^2.$$

Tomemos agora apenas a reta AD, dividida por C e B conforme acima. Agora, construímos um ponto E (outro ponto E, esquecemos o do esquema anterior) tal que $BE = BD$ e $CE = CA$. Construímos agora o círculo circunscrito a $\triangle ADE$ e demonstraremos que AE é o lado do heptágono regular inscrito neste círculo.

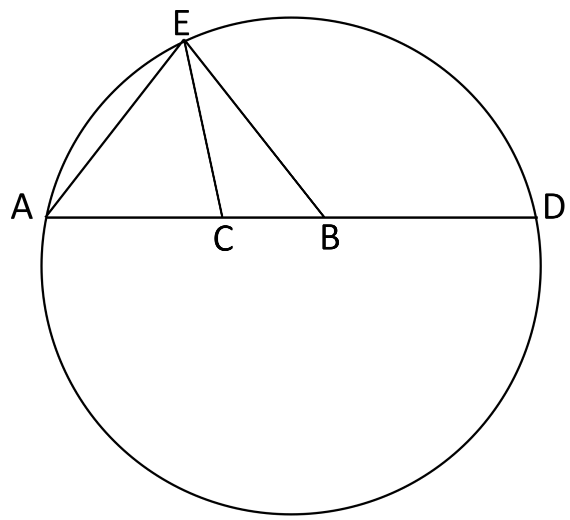

Figura 2.3: Circunferência para construção do heptágono

Como o triângulo EBD é isósceles, os ângulos α em sua base são iguais e, pelo mesmo motivo, os ângulos da base do triângulo ACE serão designados por β. Prolongamos EB e EC até que cortem o círculo em F e G, respectivamente. Traçamos AF e seja H sua interseção com EG. Unimos H a B. Cada um dos arcos menores AE e DF medem 2α (ângulos com vértices sobre a circunferência de um círculo são iguais á metade do arco por eles subentendido); assim, $F\hat{A}D = \alpha$ e $A\hat{F}E = \alpha$. Observemos que $E\hat{B}A$ é suplementar ao ângulo B no triângulo EBD. É, portanto, igual à soma 2α dos dois outros ângulos. Sabendo que

$$\frac{CD}{AC} = \frac{AC}{CB}$$

e, como $AC = EC$, segue que

$$\frac{CD}{EC} = \frac{EC}{CB}$$

Logo, os triângulos BEC e EDC são semelhantes, pois têm o ângulo em C comum e um par de lados correspondentes proporcionais. Portanto $B\hat{E}C = \alpha$ e o arco menor GF é, então 2α, igual aos arcos AE e DF. Observe que os arcos ED e AG são iguais a 2β. O segmento HB subtende o ângulo α em A e em E, portanto devem ambos estar sobre um arco circular que tem HB como corda, ou seja, o quadrilátero $AHBE$ é inscritível. Nesse círculo que contém $AHBE$, os ângulos periféricos β subtendem as cordas EB e AH, de maneira que essa cordas são iguais. Além disso, o ângulo em H que subtende a corda AE é igual ao ângulo marcado 2α em B subtendendo a mesma corda; $A\hat{H}E$ é, portanto, igual a 2α.

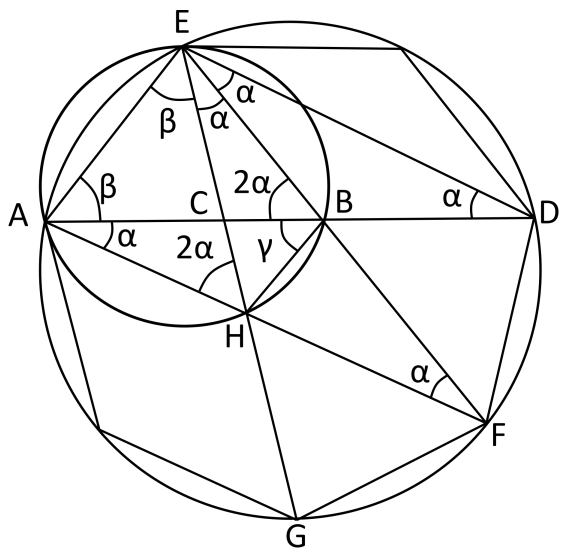

Figura 2.4: O heptágono construído

Agora, lembrando que

$$\frac{AB}{BD} = \frac{BD}{AC}$$

e que $EB = BD = AH$, temos que

$$\frac{AB}{AH} = \frac{EB}{EC}.$$

Isso implica que os triângulos EBC e ABH são semelhantes pois, além disso, $B\hat{A}H = B\hat{E}C = \alpha$. Assim, o ângulo $A\hat{B}H$ é igual a 2α e, sendo $A\hat{B}H = \beta$, concluímos que $\beta = 2\alpha$ e o arco ED, juntamente com o arco AG, são iguais a 4α. A circunferência total do círculo maior é, então, 14α, e o arco AE é um sétimo da circunferência circunscrita ao triângulo AED.

$\square$

Na investigação sobre construções possíveis e impossíveis sob régua e compasso, muitos resultados relevantes foram descobertos, sendo um dos principais devido a Gauss. Em Gonçalves [7] encontra-se esse citado resultado:

> Um polígono regular de n lados é construtível $\leftrightarrow n = 2^r \cdot p_1 \ldots p_k$, onde $r \in \mathbb{N}$ e $p_1, \ldots, p_k$ são distintos primos ímpares na forma $p_i = 2^{2^{s_i}} + 1$, $1 \leq i \leq k$, $s_i \in \mathbb{N}$

Figura 2.5: Carl Friedrich Gauss - (1777 - 1855)

FONTE: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Carl_Friedrich_Gauss.jpg

Note que o número 7 não se encaixa no teorema, mas o número 17, sim. Gauss encontrou uma construção para um polígono regular de 17 lados e essa construção que lhe deu a pista para a confecção do teorema acima. Uma consequência deste teorema é a impossibilidade da trissecção de um ângulo com régua e compasso. Realmente, se a trissecção fosse possível, poderíamos construir um polígono de 9 lados a partir do triângulo equilátero ($180 - 60 = 120$ e $120 + \frac{60}{3} = 140$, que é o ângulo interno de um polígono de 9 lados).

Capítulo 3

O valor de π

O Professor Djairo Guedes de Figueiredo, em seu livro *Números Irracionais e Transcendentes* [8], faz um pequena introdução ao falar sobre o número π:

No primeiro Livro dos Reis, capítulo 7, que trata da construção do palácio de Salomão, está dito:

> Versículos 13 e 14: O rei Salomão convocou Hirão de Tiro; ele era filho de uma viúva da tribo Naftali, mas seu pai era artesão de trabalhos em bronze, na cidade de Tiro. Hirão era um artesão muito inteligente, especialista em todos os tipos de trabalhos em bronze.

Atendendo ao chamado de Salomão, ele realizou o trabalho seguinte:

> Versículo 23: Fez o "*Mar de Bronze*"de metal fundido, dez cúbitos de borda a borda, de forma circular, e com cinco cúbitos de altura; uma corda com 30 cúbitos de comprimento dava a medida de sua periferia.

Do versículo 23, acima, concluímos que $2\pi r = 30$ e $2r = 10$, e daí segue que $\pi = 3$. Infelizmente (ou felizmente!) isso não é verdade. Sábia observação.

Ao avaliar a razão da circunferência para o diâmetro de um círculo Arquimedes provou sua habilidade em computação. Começando com o hexágono regular inscrito ele calculou os perímetros de polígonos obtidos dobrando sucessivamente o número de lados até chegar a noventa e seis lados. Seu processo iterativo para esses polígonos relacionava-se com o que às vezes se chama algoritmo de Arquimedes. Escreve-se a sequência

$$P_n, p_n, P_{2n}, p_{2n}, P_{4n}, p_{4n}, \cdots$$

em que P_n e p_n são os perímetros dos polígonos regulares circunscrito e inscrito de n lados. Começando do terceiro termo calcula-se cada termo a partir dos dois precedentes tomando alternadamente a média harmônica

$$P_{2n} = \frac{2p_n P_n}{(p_n + P_n)}$$

e a média geométrica

$$p_{2n} = \sqrt{p_n P_n}, \quad etc$$

Por aplicações sucessivas desse processo, a começar pelo hexágono, podemos calcular os perímetros dos polígonos regulares inscrito e circunscrito de 12, 24, 48 e 96 lados e, dessa forma, obter limites cada vez mais próximos de π. Importante lembrar que os gregos de sua época, assim como o próprio Arquimedes, evitavam falar de somas de séries infinitas, mau vistas em seu tempo, assim ele usava uma dupla redução ao absurdo para obter suas conclusões. O resultado do cálculo de Arquimedes sobre o círculo foi uma aproximação do valor de π expressa pelas desigualdades

$$\frac{223}{71} < \pi < \frac{220}{70}$$

uma aproximação melhor que a dos egípcios e a dos babilônicos, chegando à conclusão que, até a segunda casa decimal, π é dado por 3,14.

Em passos, conforme seu livro *A Medida do Círculo*, em notação moderna dada por Heath [10]:

Proposição 1. A área de qualquer círculo é igual a de um triângulo retângulo em que um dos lados adjacentes ao ângulo reto é igual ao raio e o outro lado adjacente ao ângulo reto é igual a medida da circunferência do círculo.

Demonstração. Seja $ABCD$ o círculo e K o triângulo descrito.

Então, se a área do círculo não é igual à de K, deve ser maior ou menor.

I. A área do círculo seria maior que a de K

Inscreva o quadrado $ABCD$, bissecte os arcos AB, BC, CD, DA, e então bissecte sua metades e continue até os lados do polígono inscrito cujos pontos angulares são os pontos da divisão de segmentos subtendidos cuja soma é menor que o excesso de área do círculo sobre K. Assim, a área do polígono é maior que a de K. Seja AE qualquer lado desse polígono e ON a perpendicular a AE que passe pelo centro O. Então ON

é menor que o raio do círculo e, assim sendo, menor que um dos lados adjacentes ao ângulo reto em K. Além disso, o perímetro do polígono é menor que o comprimento da circunferência do círculo, isto é, menor que o outro lado adjacente ao ângulo reto em K. Assim sendo, a área do polígono é menor que a de K, o que contradiz a hipótese. Logo, a área do círculo não é maior que a de K.

II. A área do círculo seria menor que a de K

Circunscreva um quadrado e sejam dois lados adjacentes que encontram o círculo em E e em H e que se encontram num ponto T. Bissecte os arcos entre os pontos adjacentes de contato e desenhe as tangentes aos pontos de bissecção. Seja A o ponto médio do arco EH e FAG a tantente em A. Então o ângulo TAG é reto. Assim sendo, $TG > GA > GH$. Segue que o a área do triângulo FTG é maior que a metade da área do polígono $TEAH$. Similarmente, se o arco AH for bissectado e a tangente ao ponto de bissecção for traçada, iremos extrair da área de GAH maior que sua metade. Assim, continuando o processo, chegaremos a um polígono circunscrito tal que a área do espaço entre ele e o círculo será menor que o excesso de K sobre a área do círculo. Assim, a área do polígono é menor que a de K. Agora, já que a perpendicular a qualquer lado do polígono passando por O é igual ao raio do círculo, enquanto o perímetro do polígono é maior que o comprimento da circunferência do círculo. Segue que a área do polígono é maior que a do triângulo K, contradizendo a hipótese. Logo, a área do círculo não é menor que a de K.

Desde que a área do círculo não é menor ou maior que a de K, logo é igual.

□

Proposição 3. O comprimento da circunferência de qualquer círculo está para o seu diâmetro em medida que é menor que $3\frac{1}{7}$ mas maior que $3\frac{10}{71}$.

Demonstração. I. Seja AB o diâmetro de uma circunferência qualquer, O o seu centro, AC a tangente em A e seja o ângulo AOC como sendo de um terço de um ângulo reto. Então

$$\frac{OA}{AC} = \frac{\sqrt{3}}{1} > \frac{265}{153} \quad \textit{(1)}$$

e

$$\frac{OC}{CA} = \frac{2}{1} = \frac{306}{153} \quad \textit{(2)}$$

Primeiro passo, trace OD bissectando o ângulo AOC e encontrando AC em D. Agora, $\frac{CO}{OA} = \frac{CD}{DA}$, seguindo que $\frac{CO}{OA} + \frac{OA}{OA} = \frac{CD}{DA} + \frac{DA}{DA}$, vindo que $\frac{CO+OA}{OA} = \frac{CA}{DA}$ resultando

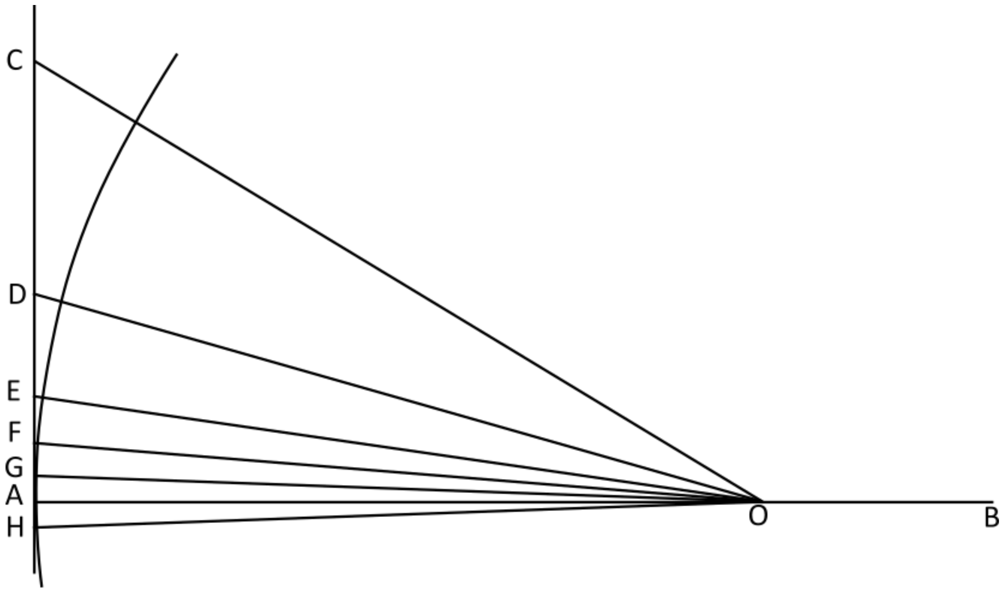

Figura 3.1: Lado do polígono circunscrito

que $\frac{CO+OA}{CA} = \frac{OA}{AD}$. Assim, partindo desse resultado e por *(1)* e *(2)*,

$$\frac{OA}{AD} > \frac{571}{153} \quad \textit{(3)}$$

. Consequentemente, usando o teorema de pitágoras, $\frac{OD^2}{AD^2} = \frac{OA^2+AD^2}{AD^2} > \frac{571^2+153^2}{153^2} > \frac{349450}{23409}$. Assim temos

$$\frac{OD}{DA} > \frac{591\frac{1}{8}}{153} \quad \textit{(4)}$$

Segundo passo, seja OE bissectando o ângulo AOD, encontrando AD em E. Assim, $\frac{DO}{OA} = \frac{DE}{EA}$ e então $\frac{DO+OA}{DA} = \frac{OA}{AE}$. Segue então, por *(3)* e *(4)*, que

$$\frac{OA}{AE} > \frac{591\frac{1}{8} + 571}{153} = \frac{1162\frac{1}{8}}{153} \quad \textit{(5)}$$

Segue que $\frac{OE^2}{EA^2} > \frac{1162\frac{1}{8}^2+153^2}{153^2} = \frac{1373943\frac{33}{64}}{23409}$. Assim,

$$\frac{OE}{EA} > \frac{1172\frac{1}{8}}{153} \quad \textit{(6)}$$

Terceiro passo, seja OF bissectando o ângulo AOE, encontrando AE em F. Assim obtemos o resultado (correspondente a *(3)* e as *(5)* acima) que

$$\frac{OA}{AF} > \frac{1162\frac{1}{8} + 1172\frac{1}{8}}{153} = \frac{2334\frac{1}{4}}{153} \quad \textit{(7)}$$

Segue que $\frac{OF^2}{FA^2} > \frac{2334\frac{1}{4}^2+153^2}{153^2} = \frac{5472132\frac{1}{16}}{23409}$. Assim,

$$\frac{OF}{FA} > \frac{2339\frac{1}{4}}{153} \quad \textit{(8)}$$

Quarto passo, seja OG bissectando o ângulo AOF, encontrando AF em G. Temos assim que, através dos resultados *(7)* e *(8)*, $\frac{OA}{AG} > \frac{2334\frac{1}{4}+2339\frac{1}{4}}{153} = \frac{4673\frac{1}{2}}{153}$.

Sabemos que o ângulo AOC, que é um terço de um ângulo reto, foi bissectado por quatro vezes, seguindo que $\angle AOG = \frac{1}{48}$ de um ângulo reto. Construa o ângulo AOH no outro lado de OA, igual ao ângulo AOG e extenda GA de modo que encontre OH em H. Assim, $\angle GOH = \frac{1}{24}$ de um ângulo reto. GH é um lado de um polígono regular de de 96 lados, circunscrito à dada circunferência. Já que $\frac{OA}{AG} > \frac{4673\frac{1}{2}}{153}$ enquanto $AB = 2OA$ e $GH = 2AG$, segue que, sendo P o perímetro do pol'igono de 96 lados, $\frac{AB}{P} > \frac{2OA}{96GH} = \frac{OA}{96AG} > \frac{4673\frac{1}{2}}{153} \cdot \frac{1}{96} = \frac{4673\frac{1}{2}}{14688}$. Mas $\frac{14688}{4673\frac{1}{2}} = 3 + \frac{667\frac{1}{2}}{4673\frac{1}{2}} < 3 + \frac{667\frac{1}{2}}{4672\frac{1}{2}} = 3\frac{1}{7}$. Ou seja, $\frac{P}{AB} < 3\frac{1}{7}$. Assim sendo, a circunferência, tendo comprimento menor que o perímetro do polígono, tem seu comprimento menor que $3\frac{1}{7}$ vezes o comprimento de AB.

II. Seja AB o diâmetro de uma circunferência qualquer, e seja AC, encontrando o a circunferência em C, faça o ângulo CAB igual a um terço de um ângulo reto. Ligue BC. Então $\frac{AC}{CB} = \frac{\sqrt{3}}{1} < \frac{1351}{780}$.

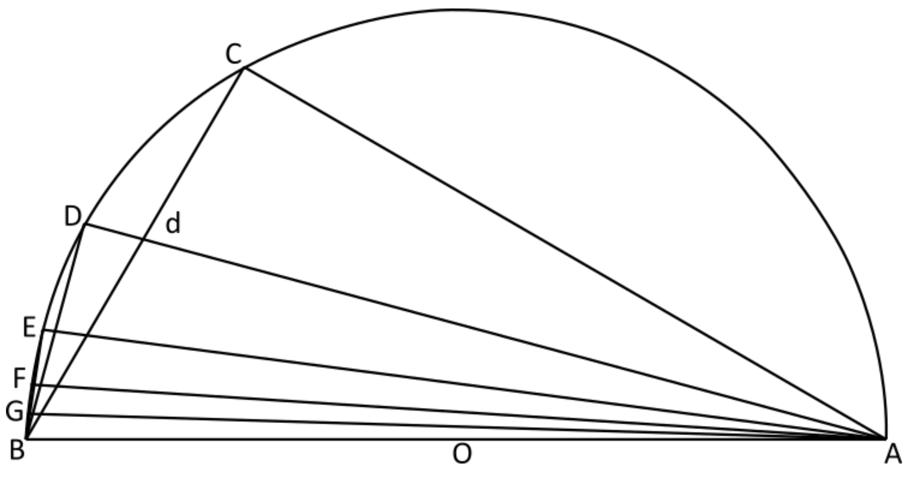

Figura 3.2: Lado do polígono inscrito

Primeiro passo, seja AD bissectando o ângulo BAC, encontrando BC em d e a circunferência em D. Ligue BD. Então $\angle BAD = \angle dAC = \angle dBD$, e os ângulos D e C são ângulos retos. Segue que estes triângulos ADB, ACd, BDd são congruentes.

Sendo assim,

$$\frac{AD}{BD} = \frac{BD}{Dd} = \frac{AC}{Cd} = \frac{AB}{Bd} = \frac{AB+AC}{Bd+Cd} = \frac{AB+AC}{BC}$$

Ou seja, $\frac{BA+AC}{BC} = \frac{AD}{DB}$. Mas $\frac{AC}{CB} < \frac{1351}{780}$, enquanto $\frac{BA}{BC} = \frac{2}{1} = \frac{1560}{780}$. Sendo assim,

$$\frac{AD}{DB} < \frac{2911}{780} \quad \textit{(1)}$$

Consequentemente,

$$\frac{AB^2}{BD^2} < \frac{2911^2+780^2}{780^2} < \frac{9082321}{608400}$$

Assim,

$$\frac{AB}{BD} < \frac{3013\frac{3}{4}}{780} \quad \textit{(2)}$$

Segundo passo, seja AE a bissetriz do angulo BAD, encontrando a circunferência em E, trace BE. Então, pelos mesmos passos que feito logo acima, provamos que $\frac{AE}{EB} = \frac{BA+AD}{BD} < \frac{3013\frac{3}{4}+2911}{780}$ (por *(1)* e *(2)*) $< \frac{5924\frac{3}{4}}{780} < \frac{5924\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{13}}{780\cdot\frac{4}{13}} < \frac{1823}{240}$ *(3)*. Portanto, $\frac{AB^2}{BE^2} < \frac{1823^2+240^2}{240^2} < \frac{3380929}{57600}$. Assim,

$$\frac{AB}{BE} < \frac{1838\frac{9}{11}}{240} \quad \textit{(4)}$$

Terceiro passo, seja AF bissectando o ângulo BAE, encontrando a circunferência em F. Dessa forma, $\frac{AF}{FB} = \frac{BA+AE}{BE} < \frac{3661\frac{9}{11}}{240}$ (por *(3)* e *(4)*). Seguindo,

$$\frac{AF}{FB} < \frac{3661\frac{9}{11}\cdot\frac{11}{40}}{240\cdot\frac{11}{40}} < \frac{1007}{66} \quad \textit{(5)}$$

Segue que $\frac{AB^2}{BF^2} < \frac{1007^2+66^2}{66^2} < \frac{1018405}{4356}$. Assim,

$$\frac{AB}{BF} < \frac{1009\frac{1}{6}}{66} \quad \textit{(6)}$$

Quarto passo, seja o ângulo BAF, bissectado por AG encontrando a circunferência em G. Então $\frac{AG}{GB} = \frac{BA+AF}{BF} < \frac{2016\frac{1}{6}}{66}$ (por *(5)* e *(6)*), e $\frac{AB^2}{BG^2} < \frac{(2016\frac{1}{6})^2+66^2}{66^2} < \frac{4069284\frac{1}{36}}{4356}$. Assim, $\frac{AB}{BG} < \frac{2017\frac{1}{4}}{66}$, de onde

$$\frac{BG}{AB} > \frac{66}{2017\frac{1}{4}} \quad \textit{(7)}$$

Agora o ângulo BAG que é resultado de quatro bissecções de do ângulo BAC, este sendo um terço de um ângulo reto, é igual a $\frac{1}{48}$ de um ângulo reto. Assim, o ângulo subentendido por BG pelo centro é $\frac{1}{24}$ de um ãngulo reto. Portanto, BG é um lado de um polígono regular inscrito de 96 lados. Segue de *(7)* que, sendo P o perímetro do polígono, $\frac{P}{AB} > \frac{96 \cdot 66}{2017\frac{1}{4}} > \frac{6336}{2017\frac{1}{4}}$. Sendo $\frac{6336}{2017\frac{1}{4}} > 3\frac{10}{71}$, o comprimento da circunferência é, então, maior que $3\frac{10}{71}$ vezes o seu diâmetro.

Portanto, o comprimento da circunferência em relação ao eu diâmetro é maior que $3\frac{10}{71}$ mas menor que $3\frac{1}{7}$

$\square$

Considerando-se as limitações enormes do sistema de numeração de sua época, uma conclusão inevitável é que Arquimedes era um exímio calculista.

O método acima, baseado nos polígonos regulares inscritos e circunscritos, é conhecido como *método clássico* do cálculo de π.

Depois de Arquimedes, a primeira aproximação notável de π foi dada por Cláudio Ptolomeu, em 150 d.C., chegando ao valor de $\frac{377}{120}$ ou 3,1416, utilizando-se de uma tábua de cordas, e no ano 480 o mecânico chinês Tsu Chu'ng-chih forneceu a aproximação $\frac{355}{113} = 3,1415929...$, que é correta até a sexta casa decimal. Em 1767, Johann Heinrich Lambert demonstrou a irracionalidade de π e, com o desenvolvimento da eletrônica, o cálculo de seu valor hoje também vem servir como teste para eficiência de algorítimos e computadores. Essa linha histórica, mais completa, sobre o avanço do cálculo das casas decimais de π, pode ser encontrada em Eves [6].

Capítulo 4

Centros de gravidade

Arquimedes mencionou "centro de gravidade" diversas vezes em suas obras. Contudo, nos seus trabalhos que chegaram até nós, não há qualquer definição deste conceito, provavelmente incluída em um de seus trabalhos perdidos. Mas, a partir da análise de suas obras conhecidas, conforme Assis-Magnaghi [2], pode-se compreender esse conceito da seguinte forma:

> O centro de gravidade de um corpo rígido é um ponto tal que, se for concebido que o corpo está suspenso por esse ponto, o corpo assim sustentado permanece em repouso e preserva sua posição original, qualquer que seja sua orientação inicial em relação a Terra.

Na proposição 6 de seu livro "*Quadratura da Parábola*", Arquimedes afirmou:

> Todo corpo, suspenso por qualquer ponto, assume um estado de equilíbrio quando o ponto de suspensão e o centro de gravidade do corpo estão ao longo de uma mesma linha vertical; pois essa proposição já foi demonstrada.

Infelizmente, como antes já dito, essa demonstração não se encontra em seus livros que nos são conhecidos, mas sugere um procedimento prático para se encontrar explicitamente o centro de gravidade de um corpo (basta suspender o corpo por dois pontos distintos e localizar o cruzamento dessas linhas), procedimento esse que, conforme Arquimedes, não era uma definição do centro de gravidade, e sim uma consequência deste e de alguns postulados atualmente desconhecidos.

Em seus trabalhos em que determina teoricamente o centro de gravidade de algumas figuras (filiformes, planas e volumétricas), um de seus postulados mais importantes que utilizou foi:

> Se grandezas se equilibram a certas disâncias, então grandezas equivalentes a estas grandezas se equilibrarão, por sua vez, nas mesmas distâncias

Sexto postulado do livro "*Sobre o Equilíbrio dos Planos*", de suma importância, entende-se que por "grandezas a certas distâncias"refere-se às grandezas cujos centros de gravidade estão às mesmas distâncias do fulcro da alvavanca"e que a expressão "grandezas equivalentes"se refere a "grandezas de mesmo peso".

A importância desse postulado pode ser medida pelo fato de, nesse livro, Arquimedes o uilizou para calcular o centro de gravidade de um triângulo e de algumas outras figuras, assim como para demonstrar a Lei da Alavanca, sob as proposições 6 e 7, a saber:

Proposição 6. Grandezas comensuráveis se equilibram em distâncias inversamente proporcionais a seus pesos.

Proposição 7. Da mesma maneira, mesmo se as grandezas são incomensuráveis, elas se equilibrarão em distâncias inversamente proporcionais às suas grandezas.

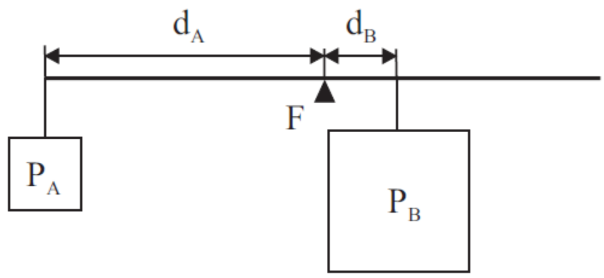

Figura 4.1: Grandezas em equilíbrio em torno do fulcro F

Conforme a lei da alvavanca, o equilíbrio ocorrerá caso

$$\frac{d_A}{d_B} = \frac{P_B}{P_A}$$

4.1 O centro de gravidade de um paralelogramo

O cálculo do centro de gravidade do paralelogramo veio sob a proposição 9 do livro *Quadratura da Parábola.* Colocamos aqui conforme Heath em [10], assim como para o triângulo.

Proposição 9. O centro de gravidade de qualquer paralelogramo encontra-se na linha reta que liga os pontos médios de dois lados opostos.

Demonstração. Seja $ABCB$ um paralelogramo e seja EF ligando os pontos médios dos lados opostos AD e BC.

Se o centro de gravidade não se encontra em EF, suponha estar em H e desenhe HK paralela a AD ou BC, encontrando EF m K. Então é possível, bissectando ED, suas metades e assim continuamente encontrar um comprimento EL menor que HK. Divida ambos AE e ED em partes iguais a EL e atavés desses pontos trace paralelas a AB ou CD.

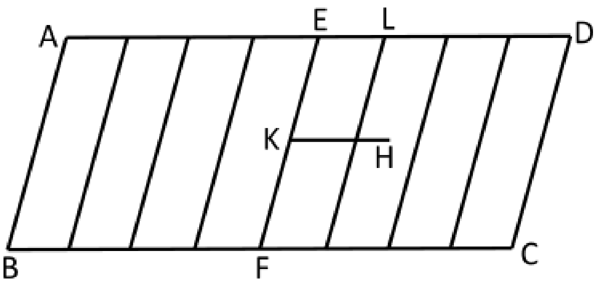

Figura 4.2: Centro de gravidade do paralelogramo

Temos agora então um número de paralelogramos similares e, se um for sobreposto a outro, seus centros de gravidade coincidirão (postulado 4). Assim temos um certo número de iguais magnitudes cujos centros de gravidade encontram-se em distâncias iguais ao longo de uma linha reta. Entretanto, o centro de gravidade de um dado paralelogramo encontrará na linha que liga os centros de gravidade de dois paralelogramos medianos (proposição 5, corolário 2). Mas isso é impossível para H fora dos paralelogramos medianos.

Assim, o centro de gravidade encontra-se em EF.

□

A proposição 10 afirma que o centro de gravidade de um paralelogramo é o ponto de interseção de suas diagonais, de igual efeito à 9.

4.2 O centro de gravidade de um triângulo

O cálculo do centro de gravidade do triângulo veio sob a proposição 13 do livro.

Proposição 13. Em qualquer triângulo, o centro de gravidade encontra-se na linha reta que liga um vértice ao ponto médio do seu lado oposto.

Demonstração. Seja ABC um triângulo e D o ponto médio de BC. Construa AD. Então o centro de gravidade deverá estar em AD.

Se possível, que isso não seja o caso, e seja H o centro de gravidade. Desenhe HI paralela a CB encontrando AD em I. Então, se bissectarmos DC, bissectarmos suas metades e assim seguindo, encontraremos um comprimento menor que HI. Seja DE com essa medida.

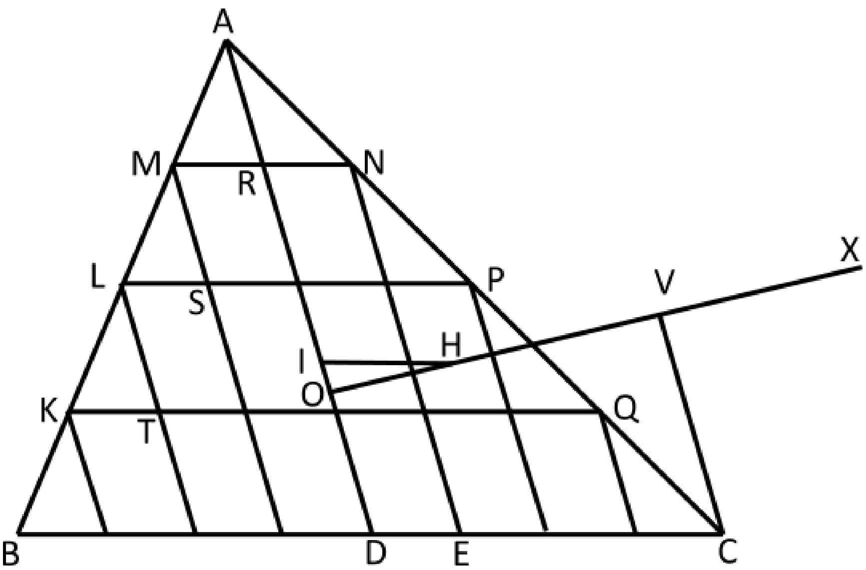

Figura 4.3: Centro de gravidade do triângulo

Divida BD e BC em pedaços de comprimento igual ao de DE e, através desses pontos de divisão, trace linhas paralelas a DA, encontrando BA e AC em pontos como K, L, M e N, P, Q, respectivamente. Ligue MN, LP, KQ com linhas que serão cada uma paralelas à BC.

Temos agora uma série de paralelogramos como FQ, TP, SN, e AD bissectando os lados opostos em cada. Portanto, o centro de gravidade de cada paralelogramo encontra-se em AD (proposição 9) e, portanto, o centro de gravidade da figura é composto de todas as posições em AD.

Seja o centro de gravidade de todos os paralelogramos tomados juntos a O. Ligue OH e também trace CV paralela a DA encontrando OH em V.

Agora, sendo n o número de partes em que AC é dividido,

$$
\begin{aligned}
\frac{\triangle ADC}{soma \quad dos \quad triangulos \quad em \quad AN, NP, \ldots} &= \frac{AC^2}{AN^2 + NP^2 + \ldots} \\
&= \frac{n^2}{n} \\
&= \frac{n}{1} \\
&= \frac{AC}{AN} \qquad (4.1)
\end{aligned}
$$

Similarmente,

$$\frac{\triangle ABD}{soma \quad dos \quad triangulos \quad em \quad AM, ML, \ldots} = \frac{AB}{AM}$$

e

$$\frac{AC}{AN} = \frac{AB}{AM}$$

Segue que

$$
\begin{aligned}
\frac{\triangle ABC}{soma \quad de \quad todos \quad os \quad pequenos \quad \triangle\, s} &= \frac{CA}{AN} \\
&> \frac{VO}{OH}
\end{aligned}
$$

por paralelas.

Suponha OV extendido a X tal que

$$\frac{\triangle ABC}{soma \quad de \quad todos \quad os \quad pequenos \quad \triangle\, s} = \frac{XH}{HO}$$

Desde então o centro de gravidade do triângulo ABC está em H, e o centro de gravidade da parte dele composta dos paralelogramos está em O, segue da proposição 8 que o centro de gravidade da porção remanescente consistindo de todos os pequenos triângulos tomados em conjunto estão em X.

Mas isto é impossível já que todos os triângulos estão em um lado da linha que passa por X paralela a AD.

Portando, o centro de gravidade do triângulo encontra-se em AD.

□

Uma consequência desse resultado é que possuindo três medianas o centro de gravidade do triângulo se encontra em sua interseção, ou seja, no baricentro.

Capítulo 5

Quadratura da parábola

Arquimedes demonstrou por mais de uma maneira o valor da quadratura da parábola. Aqui se apresentam duas dessas formas, conforme presentes em seus livros. O livro *O Método*, em notação moderna, pode ser encontrado em Heath [9], possuindo também uma interessante interpretação em Netz-Noel [11]. O livro *Quadratura da Parábola* pode ser encontrado em Heath [10], assim como *Sobre a Esfera e o Cilindro*, base para o próximo capítulo.

5.1 A quadratura conforme *O Método*

Seja ABC um segmento parabólico limitado pela reta AC e pela parábola ABC e seja D o ponto médio do segmento AC. Desenhe a reta DBE paralelo ao eixo da parábola e ligue AB e BC. Então a área do segmento parabólico ABC é igual a $\frac{4}{3}$ da área do triângulo ABC.

Partindo do ponto A, trace o segmento AKF paralelo a DE e seja a tangente à parábola em C que encontra DBE em E e AKF em F. Estenda CB para encontrar AF em K e estenda CK até H, fazendo KH igual a CK. Considere CH como o braço da balança, com K sendo seu fulcro. Seja MO uma reta qualquer paralela à ED, encontrando CF, CK e AC em M, N e O , respectivamente, e a curva em P. Como CE é tangente à parábola e D ponto médio de CA, Arquimedes provou que $EB = BD$. Já que FA e MO são paralelos a ED, segue que $FK = KA$ e $MN = NO$.

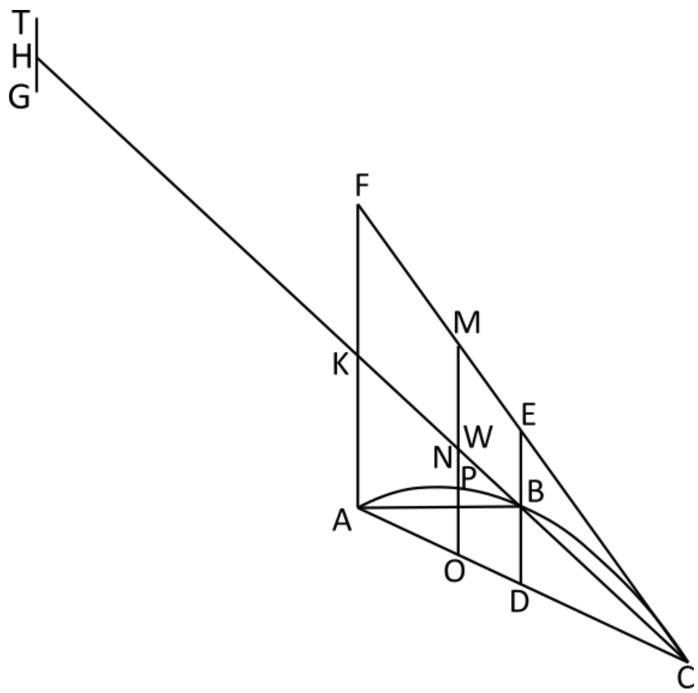

Figura 5.1: Montagem da balança para o cálculo do valor da área

Agora, conforme a proposição 5 de *Quadratura da Parábola*,

$$\frac{MO}{OP} = \frac{CA}{AO}$$

consequentemente,

$$\frac{MO}{OP} = \frac{CK}{KN} = \frac{HK}{KN}$$

Construa um segmento TG igual a OP e o posicione com seu centro de gravidade em H, tal que $TH = HG$. Como N é o centro de gravidade do segmento MO e $\frac{MO}{OP} = \frac{HK}{KN}$, segue que, conforme a lei das alavancas, TG em H e MO em N estão em equilíbrio em relação a K.

Similarmente, para todos os outros segmentos paralelos a DE e que interceptam o arco de parábola, a porção entre FC e AC, com seu ponto médio em KC e de comprimento igual à medida entre a curva e AC posicionado com seu centro de gravidade em H estarão em equilíbrio em relação a K. Assim sendo, K é o centro de gravidade de todo o sistema consistido de todo os segmentos tais como MO entre AC, FC e posicionadas como na figura e todas os segmentos posicionados em H tais como PO entre a curva e AC. Já que o triângulo CFA é constituído de todos os segmentos paralelos tais como MO e o segmento parabólico é constituído de todos os segmentos

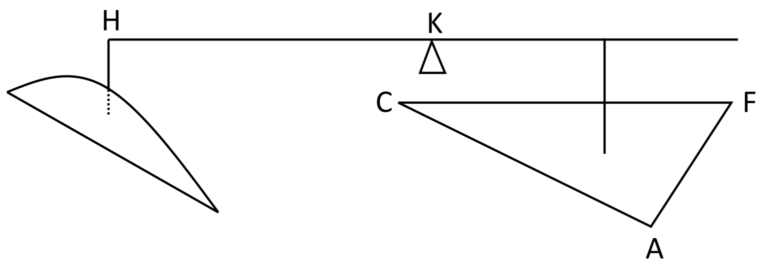

Figura 5.2: Segmento parabólico em equilíbrio com um triângulo

paralelos tais como PO sob a curva, segue que o triângulo, posicionado tal como na figura, está em equilíbrio em relação a K com o segmento parabólico CBA posicionado com seu centro de gravidade em H. Dividimos KC em W, tal que $CK = 3KW$. W é o centro de gravidade do triângulo, conforme demonstrado no livro *Sobre o Equilíbrio de Planos*. Assim sendo, conforme a lei das alavancas e propriedade dos centros de gravidade,

$$\frac{\triangle ACF}{(segmento \quad ABC)} = \frac{HK}{KW} = \frac{3}{1}$$

Assim,

$$segmento \quad ABC = \frac{1}{3} \triangle ACF$$

Sabendo que

$$\triangle ACF = 4 \triangle ABC$$

temos então

$$segmento \quad ABC = \frac{4}{3} \triangle ABC$$

5.2 A quadratura conforme *Quadratura da Parábola*

Neste livro o resultado, dentre outros, é dividido entre várias proposições. Destacamos aqui as principais para a sua conquista.

Proposição 19. Se Qq é uma corda de uma parábola bissectada em V pelo diâmetro PV, e se RM é um diâmero bissectando QV em M, e RW ser paralela a Qq de

R para PV, então $PV = \frac{4}{3}RM$.

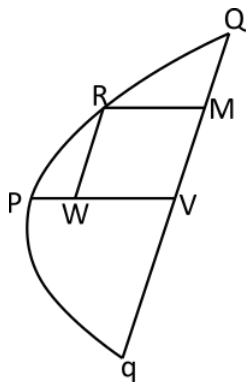

Figura 5.3: Proposição 19 de Quadratura da Parábola

Demonstração. Por propriedade das parábolas,

$$\frac{PV}{PW} = \frac{QV^2}{RW^2}$$

Assim temos

$$\frac{PV}{PW} = \frac{4RW^2}{RW^2}$$

e, consequentemente,

$$PV = 4PW$$

Então,

$$PV = \frac{4}{3}RM$$

□

Proposição 20. Se Qq é a base P é o vértice de um segmento parabólico, então o triângulo PQq é maior que a metade do segmento PQq

Proposição 21. Se Qq é a base e P o vértice de um segmento parabólico qualquer, e se R ó vértice do segmento parabólico determinado por PQ, então $\triangle PQq = 8\triangle PRQ$.

Demonstração. O diâmetro partindo de R bissectará a corda PQ e, portanto, também QV, onde PV é o diâmetro bissectando Qq. Seja o diâmetro partindo de R bissectando PQ em Y QV em M. Ligue PM. Pela proposição 19, $PV = \frac{4}{3}RM$. Também $PV = 2YM$, portanto $YM = 2RY$ e $\triangle PQM = 2 \triangle PRQ$. Portanto, $\triangle PQV = 4 \triangle PRQ$ e $\triangle PQq = 8 \triangle PRQ$. Também, fazendo RW, paralela a qQ partindo de R para PV, extendida para encontrar a curva novamente em r, $RW = rW$, e a mesma demonstração mostra que $\triangle PQq = 8 \triangle Prq$.

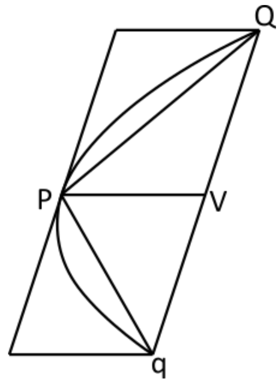

Figura 5.4: Proposição 20 de Quadratura da Parábola

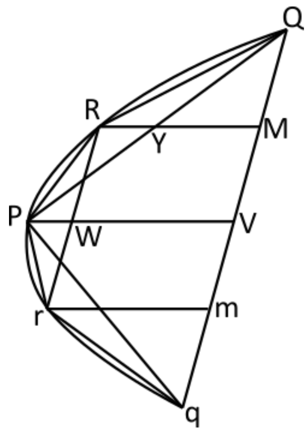

Figura 5.5: Proposição 21 de Quadratura da Parábola

□

Proposição 22. Se existe uma séries de áreas $A, B, C, D, \cdots$, cada qual sendo quatro vezes maior que a próxima da ordem, e se a maior A é igual ao triângulo PQq inscrito num segmento parabólico PQq e tem a mesma base e igual altura, então $A + B + C + D + \cdots < area \quad do \quad segmento \quad PQq$.

Demonstração. Uma vez que $\triangle PQq = 8 \triangle PRQ = 8 \triangle Pqr$, onde R e r são os vértices dos segmentos delimitados por PQ e Pq, conforme a última proposição, $\triangle PQq = 4(\triangle PQR + \triangle Pqr)$. Portanto, $\triangle PQq = A$ e $\triangle PQR + \triangle Pqr = B$. Mantendo essa linha, provamos que os triângulos similarmente inscritos nos segmentos remanescentes são juntos igual à área C, e assim segue. Assim, $A + B + C + D + \cdots$ é igual a área de um certo polígono circuscrito pelo segmento e é, portanto, de área menor que a área deste.

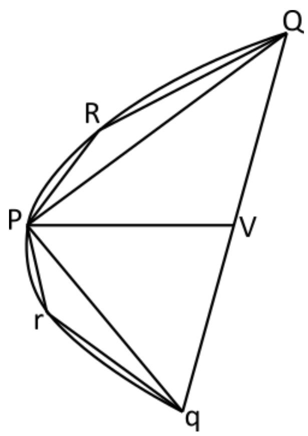

Figura 5.6: Proposição 22 de Quadratura da Parábola

□

Proposição 23. Dada uma série de áreas $A, B, C, D, \cdots, Z$, da qual A é a maior e cada uma é igual a quatro vezes a próxima da ordem, então $A+B+C+D+\cdots+Z+\frac{1}{3}Z = \frac{4}{3}A$.

Demonstração. Construa áreas $b, c, d, \cdots$ tais que $b = \frac{1}{3}B$, $c = \frac{1}{3}C$, $d = \frac{1}{3}D$ e assim por diante. Então, já que $b = \frac{1}{3}B$ e $B = \frac{1}{4}A$, temos que $B + b = \frac{1}{3}A$. Similarmente, $C+c = \frac{1}{3}B$ e se segue. Portanto, $B+C+D+\cdots+Z+b+c+d+\cdots+z = \frac{1}{3}(A+B+C+\cdots+Y)$. Mas $b+c+d+\cdots+y = \frac{1}{3}(B+C+D+\cdots+Y)$. Daí, subtraindo, $B + C + D + \cdots + Z + z = \frac{1}{3}A$. Ou, de outro modo, $A + B + C + \cdots + Z + \frac{1}{3}Z = \frac{4}{3}A$.

□

Proposição 24. Qualquer segmento limitado por uma parábola e uma corda Qq é igual a quatro terços do triângulo que possui a mesma base que o segmento e igual altura.

Demonstração. Suponha $K = \frac{4}{3} \triangle PQq$, onde P é o vértice do segmento. Temos que provar que a área do segmento é igual a K. Se essa área não for igual a esse K, deve então ser maior ou menor.

I. Suponha que a área do segmento seja maior que K. Se inscrevermos nos segmentos delimitados por PQ e Pq triângulos que possuem a mesma base e igual altura, isto é, triângulos com os mesmos vértices R e r que os segmentos, e se nos segmentos remanescentes inscrevermos triângulos da mesma forma e seguindo, nós finalmente teremos segmentos remanescentes cuja soma é menor que a área pela qual o segmento

PQq excede K. O polígono assim formado deve ser maior que a área K, o que é impossível, já que pela proposição 23, $A + B + C + \cdots + Z < \frac{4}{3}A$, onde $A = \triangle PQq$. Portanto, a área do segmento não pode ser maior que K.

II. Suponha agora que a área do segmento seja menor qum K. Se $\triangle PQq = A$, $\frac{1}{4}A$, $C = \frac{1}{4}B$ e assim seguindo, até chegarmos a uma área X tal que X é menor que a diferença entre K e a área do segmento, teremos $A + B + C + \cdots + X + \frac{1}{3}X = \frac{4}{3}A$, conforme proposição 23. Agora, já que K excede $A + B + C + \cdots + X$ por uma área menor que X, e a área do segmento por uma área maior que X, segue que $A + B + C + \cdots + X > segmento$, o que é impossível, conforme a proposição 22. Portanto, o segmento não é menor que K.

Assim, não sendo menor ou maior que K, $area \quad do \quad segmento \quad PQq = K = \frac{4}{3} \triangle PQq$.

□

Capítulo 6

Volume da esfera

Assim como a quadratura da parábola, o volume da esfera também foi demonstrado por Arquimedes por mais de uma forma. Tanto orgulho que tinha desse resultado que, como já dito antes, desejou que fosse esculpido em seu túmulo. Apresentamos aqui duas de suas demonstrações, conforme apresentam-se em seus livros.

6.1 O volume conforme *O Método*

Seja um círculo desenhado possuindo BD como diâmetro e em um plano perpendicular a AC, e tendo esse círculo como base, seja um cone com vértice A. Estenda esse cone até um plano qua passa por C e que é paralelo à base do primeiro cone. Esse cone maior possuirá como base um círculo de diâmetro EF. Tendo esse círculo como base, seja um cilindro com altura e eixo AC e estenda CA até H, de modo que AH seja igual a CA. Considere CH como um braço de uma balança, sendo A seu fulcro. Desenhe qualquer segmento MN no plano do círculo $ABCD$ e paralelo a BD. MN intersectará esse círculo em O e P, o diâmetro AC em S e os segmentos AE e AF em Q e R, respectivamente. Ligue AO. Por MN, trace um plano perpendicular a AC. Este plano cortará o cilindro em um círculo de diâmetro MN, a esfera em um círculo de diâmetro OP e o cone em um círculo de diâmetro QR. Agora, já que $MS = AC$ e $QS = AS$, segue que

$$MS \cdot SQ = CA \cdot AS$$

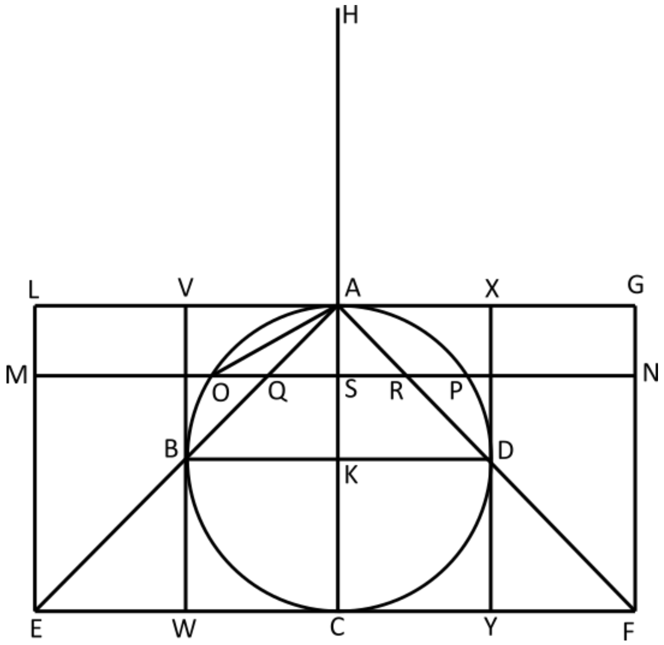

Figura 6.1: Montagem da balança para o cálculo do valor do volume

Por proporcionalidade das cordas,

$$\frac{AS}{OS} = \frac{PS}{SC}$$

e como $PS = OS$, temos que

$$CA \cdot AS = AO^2$$

Assim, $MS \cdot SQ = AO^2 = OS^2 + SQ^2$
Assim, já que $HA = AC$,

$$\frac{HA}{AS} = \frac{CA}{AS} = \frac{MS}{SQ} = \frac{MS^2}{MS \cdot SQ} = \frac{MS^2}{OS^2 + SQ^2} = \frac{4MS^2}{4(OS^2 + SQ^2)} = \frac{MN^2}{OP^2 + QR^2}$$

Conforme já conhecido desde os tempos de Euclides, os círculos estão entre si como os quadrados sobre os diâmetros. Daí podemos escrever

$$\frac{HA}{AS} = \frac{circulo \quad do \quad cilindro}{circulo \quad da \quad esfera \quad + \quad circulo \quad do \quad cone}$$

considerando os círculos como tendo pesos proporcionais às suas áreas. Assim, conforme a lei das alavancas, o círculo do cilindro, em sua localização, está em equilíbrio em relação a A, com o círculo da esfera juntamente com o círculo do cone, quando ambos esses círculos estão com seus centros de gravidade em H. Similarmente, para

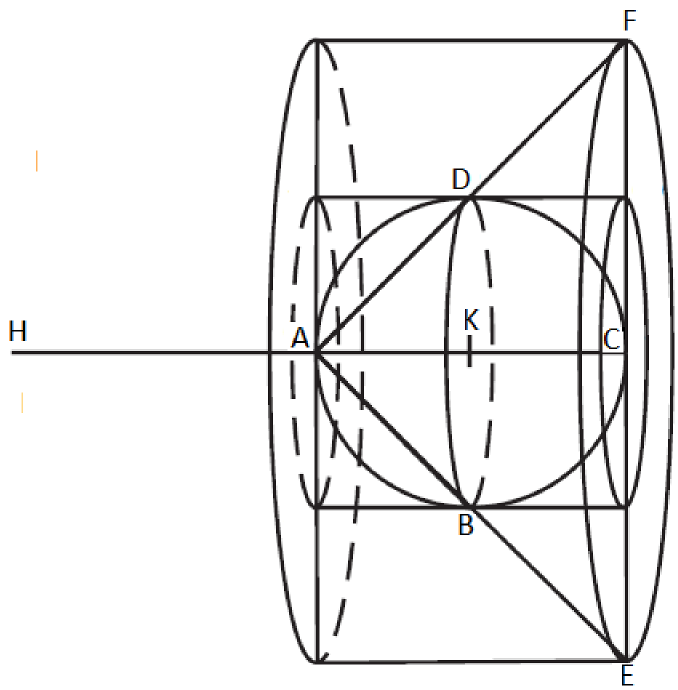

Figura 6.2: Outra vista para a montagem da balança

todas as seções construidas por planos perpendiculares a AC passando por qualquer outro segmento no paralelogramo LF paralelos a EF estarão em equilíbrio em relação a A.

A considerar desta forma com todos os conjuntos de três círculos que são obtidos por planos perpendiculares ao segmento AC cortando o cilíndro,a esfera e o cone, e que compõem esses três sólidos, respectivamente, segue que o cilindro, em sua posição, distribuído sobre a alavanca, está em em equilíbrio em relação a A com a esfera e o cone conjuntamente, quando ambos estão apoiados através de seus centros de gravidade. Sendo K o centro de gravidade do cilindro,

$$\frac{HA}{AK} = \frac{cilindro}{esfera \quad + \quad cone \quad AEF}$$

Mas $HA = 2AK$, segue que

$$cilindro = 2(esfera \quad + \quad cone \quad AEF)$$

Conforme Euclides em sua obra *Os Elementos*, todo cone é uma terça parte do cilindro que tem a mesma base que ele e altura igual. Assim, o volume do cone AEF é uma

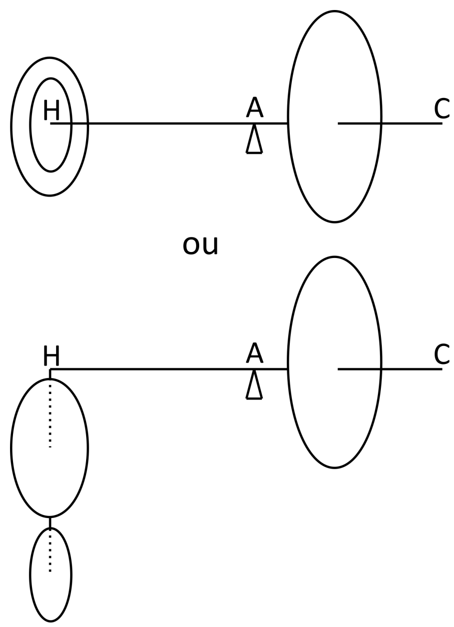

Figura 6.3: Círculos em equilíbrio em torno do fulcro A

terça parte do volume do cilindro, resultando agora que

$$2 \quad esfera = \frac{1}{3} \quad cilindro = cone \quad AEF$$

Como esse cone tem duas vezes a altura e sua base tem duas vezes o diâmetro do cone menor, temos que

$$cone \quad maior = 8 \quad cone \quad menor$$

nos fornecendo que

$$esfera = 4 \quad cone \quad menor$$

Ou seja, o volume de qualquer esfera é igual a quatro vezes o volume do cone que tem sua base igual ao círculo máximo e altura igual ao raio da esfera. Sendo conhecido que o volume do cone, em notação moderna, é $V_c = \frac{1}{3}\pi r^3$, o volume da esfera é, então,

$$V = 4V_c = 4 \cdot \frac{1}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi r^3$$

.

□

Precisa ser frisado que Arquimedes nunca escreveu essa fórmula, assim como qualquer outro matemático de sua época. Seus resultados eram dados textualmente sob relações como a acima colocada: *o volume de qualquer esfera é igual a quatro vezes o volume do cone que tem sua base igual ao círculo máximo e altura igual ao raio da esfera*

Após essa demonstração Arquimedes concebeu o seguinte comentário registrado em seu livro: "Deste teorema, no sentido de que uma esfera é quatro vezes maior que o cone que possui o grande círculo da esfera como base e altura igual ao seu raio, eu concebi a noção de que a superfície de qualquer esfera é igual a quatro vezes a medida de seu grande círculo, julgando do fato que qualquer círculo é igual ao triângulo com base igual a sua circunferência e altura igual ao seu raio, eu prendo que, nesse sentido, qualquer esfera é igual a um cone com base igual a superfície da esfera e altura igual ao raio". Assim, ao contrário do que se imaginou por muito tempo, Arquimedes descobriu a área da esfera após o volume, sendo esta igual a $4\pi r^2$.

6.2 O volume conforme *Sobre a Esfera e o Cilindro*

Neste livro o resultado, novamente, dentre outros, é dividido entre várias proposições. Destacamos aqui as principais para a conquista do resultado. Pode ser destacado que a área da superfície é encontrada independentemente (proposição 33) e, após isso, o volume (proposição 34).

Proposição 33. A superfície de qualquer esfera é igual a quatro vezes o maior círculo contido nela.

Demonstração. Seja C um círculo igual a quatro vezes o grande círculo. Então, se C não é igual à superfície da esfera, deve ser maior ou menor.

I) Suponha C menor que a superfície da esfera.

Então é possível encontrar duas linhas β e γ, sendo $\beta > \gamma$, tal que

$$\frac{\beta}{\gamma} < \frac{superficie \quad da \quad esfera}{C}$$

Tome essas linhas e seja δ a média entre elas.

Suponha polígonos regulares similares com $4n$ lados circunscritos e inscritos em um grande círculo, tais que a relação de seus lados seja menor que a relação $\frac{\beta}{\gamma}$.

Deixe os polígonos com o círculo girarem juntos sobre um diâmetro comum a todos,

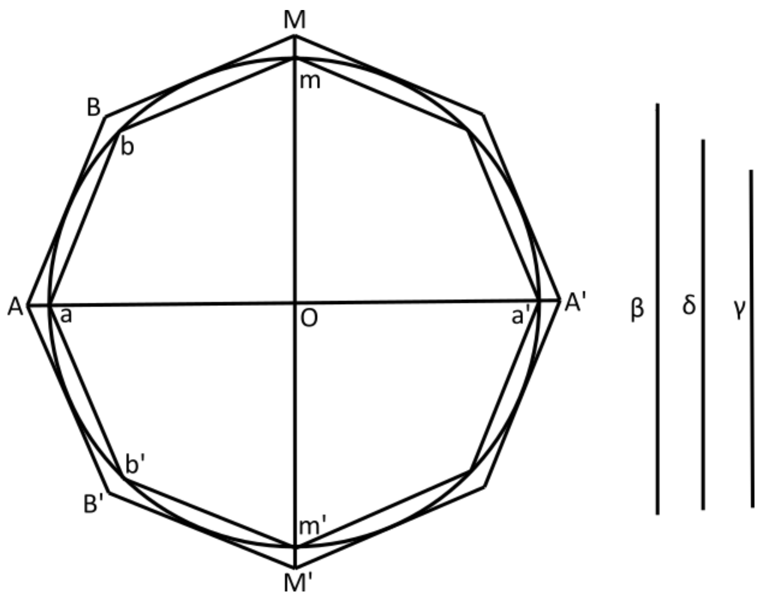

Figura 6.4: Proposição 33 de Sobre a Esfera e o Cilindro

descrevendo sólidos de revolução. Então,

$$\frac{superficie \quad solido \quad circuscito}{superficie \quad solido \quad inscito} = \frac{lado \quad do \quad circuscrito}{lado \quad do \quad inscrito} < \frac{\beta^2}{\gamma^2}, \quad ou \quad \frac{\beta}{\gamma}$$

Daí,

$$\frac{superficie \quad solido \quad circuscito}{superficie \quad solido \quad inscito} < \frac{superficie \quad da \quad esfera}{C}$$

Mas isso é impossível, já que a superfície do sólido circuscito é maior que a da esfera enquanto a superfície do sólido inscrito é menor que C. Portanto, C não é menor que a superfície da esfera.

II)Suponha C maior que a superfície da esfera.

Tome linhas β e γ, sendo $\beta > \gamma$, tais que

$$\frac{\beta}{\gamma} < \frac{C}{superficie \quad da \quad esfera}$$

Tome polígonos regulares similares inscritos e circunscritos ao grande círculo, como antes, tais que seus lados estejam em uma razão menor que β está para γ, e suponha sólidos de revolução gerados de maneira usual. Então, nesse caso,

$$\frac{superficie \quad solido \quad circuscito}{superficie \quad solido \quad inscito} < \frac{C}{superficie \quad da \quad esfera}$$

Mas isso é impossível, devido a superfície do sólido circuscrito ser maior que C, enquanto a superfície do sólido inscrito ser menor que o da esfera.

Assim, C não é menor que a superfície da esfera. Portanto, não sendo maior nem menor, C é igual à superfície da esfera.

□

Proposição 34. Qualquer esfera é igual a quatro vezes o cone que possui sua base igual ao grande círculo da esfera e altura igual ao seu raio.

Demonstração. Seja a esfera onde $ama'm'$ é um grande círculo. Se a esfera não é igual a quatro vezes o cone descrito ela deve ser maior ou menor.

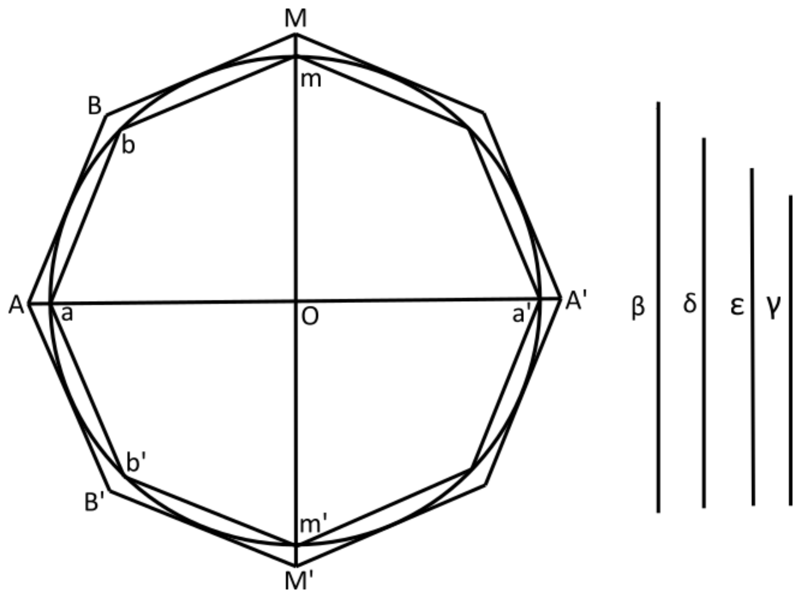

Figura 6.5: Proposição 34 de Sobre a Esfera e o Cilindro

I) Se possível, seja a esfera maior que quatro vezes o cone.

Suponha V o cone cuja base é igual a quatro vezes o grande círculo e cuja altura é igual ao raio da esfera. Então, por hipótese, a esfera é maior que V; e duas linhas β e γ podem ser encontradas (onde β é a maior), tais que

$$\frac{\beta}{\gamma} = \frac{volume \quad da \quad esfera}{V}$$

Entre β e γ colocamos duas medias aritméticas δ e ϵ.

Como antes, sejam polígonos regulares similares, com $4n$ lados, circunscritos e inscritos ao grande círculo, tais que seus lados estejam em relação menor que $\frac{\beta}{\gamma}$.

Imagine o diâmetro aa' do círculo estando na mesma reta que um diâmetro comum a ambos os polígonos e imagine o último girar com o círculo sobre aa', descrevendo as superfícies de dois sólidos de revolução. Os volumes destes sólidos estão em relação triplicada (cubo) de seus lados.

Assim,

$$\begin{aligned}\frac{volume \quad solido \quad circunscito}{volume \quad solido \quad inscito} &< \frac{\beta^3}{\gamma^3}, por \quad hipotese \\ &< \frac{\beta}{\gamma}(pois \quad \frac{\beta}{\gamma} > \frac{\beta^3}{\gamma^3}) \\ &< \frac{volume \quad da \quad esfera}{V}\end{aligned}$$

Mas isso é impossível, já que o volume do sólido circunscrito é maior que o da esfera, enquanto o volume do sólido inscrito é menor que V.

Potanto, a esfera não é maior que V, ou quatro vezes o cone descrito acima.

II) Se possível, seja a esfera menor que V.

Neste caso, pegamos β e γ tais que

$$\frac{\beta}{\gamma} < \frac{V}{volume \quad da \quad esfera}$$

Com o restante da construção e prova procedendo como antes, temos finalmente

$$\frac{volume \quad solido \quad circuscrito}{volume \quad solido \quad inscrito} < \frac{V}{volume \quad da \quad esfera}$$

Mas isso é impossível devido ao volume do sólido circunscrito ser maior que V e o volume do sólido inscrito ser menor que o volume da esfera.

Portanto, a esfera não é menor que V.

Sendo a esfera nem menor e nem maior que V, é igual, ou quatro vezes o cone descrito no enunciado.

□

Considerações

A obra de Arquimedes, claro, é bem mais extensa e complexa do que está exposto nesse trabalho. Seus tratados sobre equilíbrio de planos, sua expiral, trazem inúmeros outros resultados e aplicações, mas que já tendem a fugir do objetivo proposto a esse texto. A trissecção do ângulo, como mostrada aqui, é apenas uma das formas propostas por ele para a resolução desse problema. Sua espiral também se serve a fazer essa trissecção, assim como a dividir em n partes esse ângulo, sendo assim uma ferramenta mais geral, mas também mais complexa, hoje sendo bem descrita em termos de coordenadas polares.

O cálculo do valor de π, como dito no capítulo quatro, é uma mostra da capacidade computacional de Arquimedes. Utilizando-se de uma linguagem nem um pouco prática para o estudo da matemática, fazer contas e registrar era um trabalho árduo, e a falta de melhores técnicas de cálculo em muito menos ajudavam. Mas, mesmo hoje, sem o auxílio das calculadoras eletrônicas, ainda não é um trabalho fácil. Por exemplo, como se calcular a raiz quadrada de um número grande? Um estudante de ensino médio não tem muitas opções além de tentativas e erros a fim de aproximar-se cada vez mais do valor desejado.

Uma caracteística importante em seus trabalhos é ele prometer fazer uma medição incrível, começar a acumular uma série de resultados aparentemente sem nenhuma relevância óbvia e, ao fim, tudo se encaixa sem maiores artimanhas. Se, por um lado, traz essa elegância já mencionada, por outro lado foi, por muito tempo, objeto de críticas de um grande número de gerações de matemáticos, que o acusavam de esconder como realmente chegou às suas descobertas. Hoje sabemos serem injustas essas acusações, com a descoberta de seu livro *O Método*, em que mostra bem seu processo de construção de resultados. Um belo exemplo de que descobrir e mostrar a descoberta quase nunca se traz com as mesmas palavras.

Em suas mãos a lei do equilíbrio tornou-se uma ferramenta da geometria em vez de da física. Conforme Burton [4], Arquimedes considerava Eudoxo seu maior predecessor, mas todas as obras dele estão perdidas. Eudoxo foi o criador do método de exaustão e, segundo Aquimedes, deu a primeira prova satisfatória de que o volume do cone é um terço do volume do cilindro de mesma base e mesma altura.

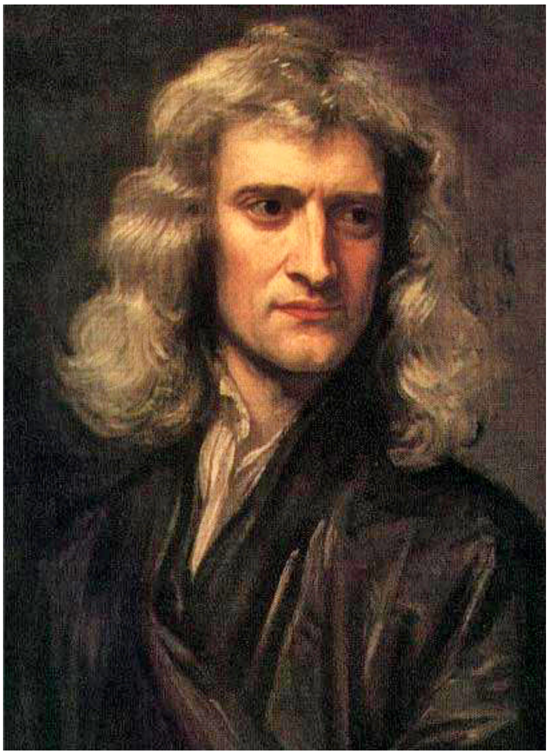

Figura 6.6: Isaac Newton - (1643-1727)

FONTE: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:GodfreyKneller-IsaacNewton-1689.jpg

Divulgava seus trabalhos em cartas pessoais e em muitas delas há um certo tom de exasperação. Julgava ser seus conteúdos avançados e de interesse para um público pequeno, que falavam leitores realmente bons, que o compeendesse. O tempo trouxe Galileu, Newton e tantos outros como esses leitores que ele tanto ansiava, que continuaram o seu trabalho e o extenderam em bases sólidas, que vieram a criar o Cálculo em espelho à sua visão aqui mostrada na área de um setor parabólico e volume da esfera, de somar infinitas partes para obter o resultado desejado. Aproximou-se muito do cálculo moderno. Em *O método*, ao abordar juntamente matemática, física e o infinito, levantou as questões mais fundamentais da ciência. Não só antecipou o Cálculo de Newton, mas também as dificuldades conceituais desse cálculo. O infinito não era algo bem compreendido na Grécia antiga mas Arquimedes mostrou ter plena consciência de seu significado.

Não à toa é reconhecido como o maior gênio a antiguidade, e por muitos colocado, juntamente a Newton e Gauss, como os três grandes de toda a história da matemática. Suas descobertas, seus métodos, o colocam como um importante nome a ser conhecido, compreensível mesmo por um estudante que ainda não ingressou no ensino superior, e se mostra como exemplo a ser seguido, de que com tão poucos recursos, se fazer tanto e com extrema qualidade e rigor.

Referências Bibliográficas

[1] AABOE, Asger, **Episódios da História Antiga da Matemática**. Rio de Janeiro: SBM, 2013. Tradução de João Bosco Pitombeira

[2] ASSIS, Andre Koch Torres; MAGNAGHI, Ceno Pietro. **O Método Ilustrado de Arquimedes**. Montreal: Apeiron Montreal, 2014

[3] BOYER, Carl B., **História da Matemática**. 2. Ed. São Paulo: Edgard Blucher, 1996. Tradução de Elza F. Gomide

[4] BURTON, David M., **The History of Mathematics**: An Introduction. 6 Ed. New York: McGraw-Hill, 2007

[5] DELL'OMO, Lorenzo Mascheroni, **La Geometria del Compasso**. 2. Ed. Palermo: Era Nova, 1901

[6] EVES, Howard, **Introdução à História da Matemática**. 5. Ed. Campinas: Editora da Unicamp, 2011. Tradução de Higino H. Domingues

[7] GONÇALVES, Adilson, **Introdução a Álgebra**. Rio de Janeiro: SBM, 2003. Projeto Euclides

[8] FIGUEIREDO, Djairo Guedes de, **Números Irracionais e Transcendentes**. 3. Ed. Rio de Janeiro: SBM, 2011

[9] HEATH, T. L., **The Method of Archimedes**. London: Cambridge University Press, 1912

[10] HEATH, T. L., **Works of Archimedes**. London: Cambridge University Press Warehouse, 1897

[11] NETZ, Reviel; NOEL, William, **Códex Arquimedes**. Rio de Janeiro: Record, 2009. Tradução de Rachel Schwart

[12] YATES, Robert C., **The Trissection Problem**. 3. Ed. Washington: National Council of Teachers of Mathematics, 1971