

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional  
PROFMAT

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

**CombEsq: uma proposta de objeto de  
aprendizagem para o ensino e  
aprendizagem de análise combinatória**

Dayvid Evandro da Silva Lós



Maceió, Maio de 2019



UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS  
INSTITUTO DE MATEMÁTICA  
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

DAYVID EVANDRO DA SILVA LÓS

COMBESQ: UMA PROPOSTA DE OBJETO DE APRENDIZAGEM PARA O ENSINO E  
APRENDIZAGEM DE ANÁLISE COMBINATÓRIA

Maceió  
2019

DAYVID EVANDRO DA SILVA LÓŠ

COMBESQ: UMA PROPOSTA DE OBJETO DE APRENDIZAGEM PARA O ENSINO E  
APRENDIZAGEM DE ANÁLISE COMBINATÓRIA

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) da Universidade Federal de Alagoas, como requisito parcial para obtenção de grau de Mestre em matemática.

Orientador: Prof. Dr. Rinaldo Vieira da Silva Júnior

Maceió

2019

**Catlogação na fonte**  
**Universidade Federal de Alagoas**  
**Biblioteca Central**  
**Divisão de Tratamento Técnico**

Bibliotecária Responsável: Helena Cristina Pimentel do Vale – CRB4 - 661

L879c Lós, Dayvid Evandro da Silva.  
CombEsq : uma proposta de objeto de aprendizagem para o ensino e aprendizagem de análise combinatória / Dayvid Evandro da Silva Lós. – 2019. 120 f. : il. color.

Orientador: Rinaldo Vieira da Silva Júnior.  
Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Federal de Alagoas. Instituto de Matemática. Maceió, 2019.

Bibliografia: f. 99-107.  
Apêndices: f. 108-120.

1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Ensino e aprendizagem. 2. Análise combinatória (Matemática). 3. Tecnologia e educação. I. Título.

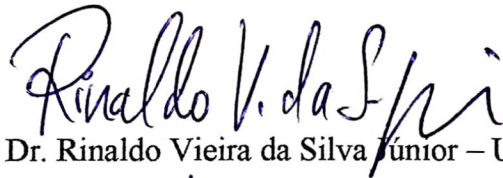
CDU: 519.101:372

DAYVID EVANDRO DA SILVA LÓS

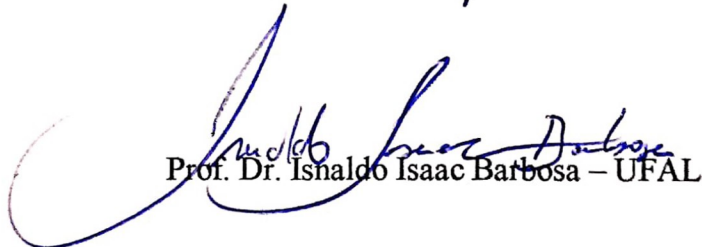
COMBESQ: UMA PROPOSTA DE OBJETO DE APRENDIZAGEM PARA O ENSINO E  
APRENDIZAGEM DE ANÁLISE COMBINATÓRIA

Dissertação submetida ao corpo docente do  
Programa de Mestrado Profissional em  
Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) da  
Universidade Federal de Alagoas e aprovada  
em 02 de maio de 2019.

Banda Examinadora:



Prof. Dr. Rinaldo Vieira da Silva Júnior – UFAL (Presidente)



Prof. Dr. Ishaldo Isaac Barbosa – UFAL



Prof. Dr. Humberto José Bortolossi – UFF

A Deus, por ser meu guia em todos os momentos; à minha família, em especial meus pais, Djalma e Vilma, pela educação e espelhos de vida; e à minha esposa, Adriana, por todo amor, incentivo, compreensão e paciência.

## AGRADECIMENTOS

A Deus, por ter me dado força e coragem para superar as dificuldades.

À minha família, em especial meus pais Djalma e Vilma e meus irmãos Daiana, Rodolfo e Danilo, pelo carinho e momentos de crescimento mútuo.

À minha esposa, Adriana, pelo incentivo e palavras de conforto nos momentos delicados.

Aos colegas da turma de mestrado do PROFMAT, pelos momentos de crescimento conjunto, descontração, companheirismo e amizade.

Aos professores do mestrado PROFMAT que, mesmo nas dificuldades, contribuíram para minha formação humana e profissional.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Rinaldo Vieira, pela dedicação e presteza na orientação deste trabalho.

Aos professores Dr. Isnaldo Isaac e Dr<sup>a</sup>. Adina Rocha, pelas contribuições realizadas durante a qualificação da dissertação.

Aos professores que participaram deste trabalho. A contribuição de vocês foi fundamental para alcançar os objetivos desta pesquisa.

Ao professor Dr. Rodolfo Carneiro, pelo auxílio na indicação de colaboradores para o desenvolvimento do objeto de aprendizagem.

À Jéssica, pela colaboração durante o desenvolvimento do objeto de aprendizagem.

A tarefa não é tanto ver aquilo que ninguém viu, mas pensar o que ninguém ainda pensou sobre aquilo que todo mundo vê.

SCHOPENHAUER, Arthur



## RESUMO

O ensino e aprendizagem de análise combinatória na educação básica é tido como uma área problemática por professores e alunos. Nesse contexto, este trabalho apresenta o desenvolvimento de um objeto de aprendizagem, chamado CombEsq, que tem como principal objetivo auxiliar alunos e professores no ensino e aprendizagem de análise combinatória, buscando amenizar os principais problemas de aprendizagem discutidos em diversas pesquisas acadêmicas, a saber: a dificuldade dos alunos em interpretar o problema, a identificação dos tipos de agrupamento e a criação de novas estratégias para incentivar o professor no ensino do referido conteúdo. Para isso, fundamentamos a construção do CombEsq a partir de uma abordagem técnica baseada em autores que estudam os requisitos técnicos que um objeto de aprendizagem deve possuir e também a partir de uma abordagem pedagógica fundamentada em uma metodologia de resolução de problemas. Como forma de validação das estratégias realizadas, foi selecionado um grupo de professores da educação básica para avaliar a ferramenta com base em alguns critérios. Como resultado, apresentamos algumas discussões a respeito da construção do CombEsq com ênfase no aspecto pedagógico e as análises dos dados coletados derivados da validação com base nas categorias conteúdo matemático, usabilidade, interface e recursos interativos, prover auxílio a usuários, foco pedagógico e sugestões dos sujeitos pesquisados, com alguns destaques observados pelos professores, tais como: a facilidade de usar o CombEsq, as dicas e *feedbacks* apresentados com intenção de auxiliar a aprendizagem e a oportunidade que o CombEsq dá ao diversificar as estratégias de ensino de análise combinatória, área com poucos recursos disponíveis.

**Palavras-chave:** Objeto de Aprendizagem. Análise Combinatória. Ensino. Aprendizagem. Matemática.

## ABSTRACT

The teaching and learning of combinatorial analysis in basic education is regarded as a problem area by both teachers and students. In this context, this work presents the development of a learning tool, called CombEsq, whose main objective is to assist students and teachers in the teaching and learning of combinatorial analysis. The main goal of the proposed tool is to soften the main learning problems discussed in several academic researches, namely: the difficulty of the students in interpreting the problem, the identification of types of grouping and the creation of new strategies to encourage the teacher in the teaching that content. In order to accomplish this goal, we constructed CombEsq using a technical approach based on authors who study the technical requirements that a learning tool must have and also based on a pedagogical approach which relies on a methodology of problem solving. As a way to validate the strategies carried out, a group of teachers of basic education was selected to evaluate the tool based on some criteria. As a result, we present some discussions about the construction of CombEsq with emphasis on the pedagogical aspect and the analysis of the data collected in the validation phase based on the categories such as mathematical content, usability, interface and interactive resources, whether it provides assistance to users, pedagogical focus and suggestions of the users, with some highlights observed by teachers, such as: the ease of using CombEsq, the tips and feedbacks presented with the intention to aid the learning and the opportunity that CombEsq gives by diversifying the strategies of teaching combinatorial analysis, area with few resources available.

**Key Word:** Learning Objects. Combinatorial Analysis. Teaching. Learning. Mathematics.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Diagrama do exemplo 1 .....	20
Figura 2 – Tela de desenvolvimento do CombEsq no CourseLab .....	54
Figura 3 – Tela inicial do CombEsq.....	56
Figura 4 – Tela das principais funcionalidades do CombEsq após acionar o botão “Iniciar” da figura 3.....	56
Figura 5 – Nível de dificuldade .....	57
Figura 6 – Tela inicial do problema 01 .....	57
Figura 7 – Feedback do problema 01 .....	58
Figura 8 – Feedback durante as dicas do problema 01 .....	58
Figura 9 – Tela de experimentação do problema 01 .....	59
Figura 10 – Feedback da experimentação referente ao problema 01 .....	59
Figura 11 – Tela inicial do problema 05 .....	63
Figura 12 – Dica 01 do problema 05 .....	63
Figura 13 – Dica 02 do problema 05 .....	63
Figura 14 – Dica 02 do problema 05 .....	63
Figura 15 – Dica 03 do problema 05 .....	65
Figura 16 – Dica 03 do problema 05 .....	65
Figura 17 – Dica 04 do problema 05 .....	65
Figura 18 – Uma solução do problema 05.....	65
Figura 19 – Conceitos.....	68
Figura 20 – Conceito Princípio Fundamental da Contagem.....	68
Figura 21 – Selecionar o problema.....	69
Figura 22 – Feedback após resposta correta e botões referentes à tela inicial do problema 05 .....	70
Figura 23 – Feedback após resposta incorreta e botões referentes à tela inicial do problema 05 .....	70
Figura 24 – Tela experimental referente ao problema 05 .....	71
Figura 25: Tela de experimentação do problema 05 .....	71
Figura 26: Feedback da experimentação referente ao problema 05 .....	72
Figura 27 – Feedback da dica 01 referente ao problema 05.....	72
Figura 28 – Comentário referente à dica 01 do problema 05 .....	72
Figura 29 – Feedbacks da dica 02 referente ao problema 05 .....	73

Figura 30 – Feedbacks da dica 02 referente ao problema 05 .....	73
Figura 31: Feedbacks da dica 03 referente ao problema 05 .....	74
Figura 32: Feedbacks da dica 03 referente ao problema 05 .....	74
Figura 33 – Feedback da dica 04 referente ao problema 05 .....	75
Figura 34 – Tela inicial do Simulado .....	76
Figura 35 – Feedback do Simulado .....	76
Figura 36 – Conclusão do Simulado e número de acertos .....	76

## LISTA DE QUADROS

Quadro 1 – As quatro fases da resolução de problemas proposta por Polya.....	62
Quadro 2 – Quantidade e percentual de respostas no formulário de conteúdo matemático.....	79
Quadro 3 – Quantidade e percentual de respostas no formulário usabilidade.....	81
Quadro 4 – Quantidade e percentual de respostas no formulário interface e recursos interativos .....	82
Quadro 5 – Quantidade e percentual de respostas no formulário prover auxílio a usuários ....	86
Quadro 6 – Quantidade e percentual de respostas no formulário foco pedagógico .....	88

## LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

BIOE	Banco Internacional de Objetos de Aprendizagem
CAREO	Campus Alberta Repository of Educational Objects
CESTA	Coletânea de Entidades de Suporte ao uso de Tecnologia na Aprendizagem
DCMI	Dublin Core Metadata Initiative
IEEE	Institute of Electrical and Electronics Engineers
INEP	Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira
ISO	International Standards Organisation
MEC	Ministério da Educação
MERLOT	Multimedia Educational Resource for Learning and Online Teaching
OAs	Objetos de aprendizagem
OCDE	Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico
PCNs	Parâmetros Curriculares Nacionais
RIVED	Rede Interativa Virtual de Educação a Distância
ROAs	Repositórios de Objetos de Aprendizagem
SAEB	Sistema de Avaliação da Educação Básica
SEED	Secretaria de Educação a Distância
TICs	Tecnologias de Comunicação e Informação

## SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO.....	14
2 CONCEITOS E DEFINIÇÕES RELACIONADOS AO ESTUDO DE ANÁLISE COMBINATÓRIA.....	18
2.1 Conceito de Análise Combinatória.....	18
2.2 Princípio Fundamental da Contagem.....	18
2.3 Arranjos .....	20
2.3.1 Arranjo simples .....	20
2.3.2 Arranjo com repetição.....	22
2.4 Permutações.....	22
2.4.1 Permutação simples.....	23
2.4.2 Permutação com repetição .....	23
2.5 Combinações Simples.....	25
3 O ENSINO E APRENDIZAGEM DE ANÁLISE COMBINATÓRIA.....	27
4 TECNOLOGIA E O ENSINO DE MATEMÁTICA.....	34
4.1 Educação e Tecnologia.....	34
4.2 Educação Matemática e Tecnologia.....	37
5 REPOSITÓRIOS E OBJETOS DE APRENDIZAGEM.....	43
5.1 Objetos de Aprendizagem.....	43
5.2 Repositórios de Objetos de Aprendizagem.....	45
5.3 Alguns Objetos de Aprendizagem na Matemática .....	46
5.4 Ferramentas de A autoria de Objetos de Aprendizagem .....	48
6 METODOLOGIA.....	51
7 ANÁLISES E RESULTADOS .....	54
7.1 Análise Técnica do CombEsq.....	55
7.1.1 Presença dos requisitos (1), (2) e (3).....	55
7.1.2 Presença dos requisitos (4), (5), (6) e (7).....	57
7.1.3 Presença dos requisitos (8), (9), (10) e (11).....	58
7.2 Análise Pedagógica do CombEsq.....	61
7.2.1 Estratégias interativas do CombEsq que favorecem a compreensão do problema segundo as ideias de Polya.....	63
7.2.2 Estratégias interativas do CombEsq que favorecem a formulação do plano, a execução do plano e o retrospecto segundo as ideias de Polya.....	65

7.3 Apresentação das Funcionalidades do CombEsq .....	66
7.4 Análise dos Dados .....	77
7.4.1 Perfil dos sujeitos da pesquisa.....	77
7.4.2 Conteúdo matemático.....	79
7.4.3 Usabilidade.....	80
7.4.4 Interface e recursos interativos.....	82
7.4.5 Prover auxílio a usuários .....	86
7.4.6 Foco pedagógico .....	88
7.4.7 Sugestões dos sujeitos participantes.....	93
8 CONSIDERAÇÕES FINAIS .....	95
REFERÊNCIAS .....	98
APÊNDICE A – Questionário para identificação do grupo de pesquisa .....	107
APÊNDICE B – Questionário para traçar perfil do grupo pesquisado .....	108
APÊNDICE C – Formulários para avaliação do CombEsq .....	109
APÊNDICE D – Roteiro de entrevista sobre avaliação do CombEsq.....	112
APÊNDICE E – Orientações pedagógicas inseridas no CombEsq.....	115



## 1 INTRODUÇÃO

O ensino de matemática historicamente é marcado por problematizações em relação à aprendizagem dos alunos. Por um lado, estudantes consideram o estudo da disciplina como difícil e, na maioria dos casos, o professor é responsabilizado por tal caracterização. Por outro lado, diversas pesquisas em Educação Matemática questionam de forma enfática a metodologia utilizada pelos professores de matemática bem como reivindicam mudanças na formação inicial de tais docentes de modo que estes possuam um maior leque de estratégias de ensino para otimizar o processo de ensino e aprendizagem de matemática. De qualquer modo, pelo processo de mundialização por qual vivencia a atual sociedade, é inevitável haver uma constante cobrança por mudanças na educação e na matemática.

Para um panorama da educação básica em relação ao ensino de matemática no Brasil, podemos utilizar os dados do Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB). Tal sistema é composto por um conjunto de avaliações externas em larga escala que tem como principal objetivo realizar um diagnóstico geral da educação básica brasileira e fornecer alguns fatores que possam interferir no desempenho do estudante. Conforme resultado relativo ao ano de 2015 – último resultado disponível no portal do Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP) –, podemos observar as seguintes médias de proficiência em relação ao ensino de matemática: 219 (que varia de 125 a 350) nos anos iniciais do ensino fundamental, 256 (que varia de 200 a 425) nos anos finais do ensino fundamental e 267 (que varia de 225 a 475) no final do ensino médio. Na escala disponibilizada pelo INEP – que varia do nível 1 ao nível 10 – tais médias se enquadram respectivamente nos níveis 4, 3 e 2. Para cada nível, são disponibilizadas descrições do que aluno pode ser capaz de reconhecer em matemática. Por exemplo, no nível 2, em relação ao ensino médio, o aluno tem capacidade apenas de reconhecer tópicos de matemática relacionados ao estudo de funções, progressões aritméticas e associação de dados de gráficos com percentuais textualmente ou em tabelas. (BRASIL, 2016).

Fazendo uma rápida análise em tais dados, não é difícil inferir que a situação do ensino de matemática na educação básica do Brasil é delicada e preocupante. Quando analisamos as médias de alguns estados, como por exemplo, o estado de Alagoas, nos três níveis a média de proficiência está abaixo da nacional, isto é, a situação é ainda pior. Notemos ainda que o conhecimento de tópicos de análise combinatória – objeto de estudo deste trabalho – não é citado no nível 2 e, só é citado a partir do nível 4 no que se refere ao ensino médio. Ou seja, há uma certa distância para que os estudantes sejam capazes de dominar tópicos de análise

combinatória ao fim do ensino médio (BRASIL, 2016). Tais dados são corroborados por algumas pesquisas que investigaram sobre o ensino de análise combinatória e observaram que os professores de matemática não possuíam conhecimentos de combinatória de forma sólida e significativa e, por esse motivo, evitavam abordar o tema em suas aulas. Quando as aulas aconteciam, o ensino ocorria de forma mecânica com uso excessivo de fórmulas e exercícios padronizados (SABO, 2008). De forma complementar, Wagner, Bortoloti e Ferreira (2013) argumentam em sua pesquisa que os licenciandos em matemática vivenciam essa problemática em relação ao ensino de análise combinatória, além de ressaltar que vários cursos de licenciatura não possuem em suas grades de ensino a temática de Análise Combinatória.

O pouco envolvimento dos estudantes sobre a temática de análise combinatória pode ser prejudicial tanto individualmente como socialmente, pois “a Análise Combinatória é um excelente meio de ensinar os alunos a tomarem decisões acertadas, a usarem a imaginação e a organizarem disciplinadamente seu raciocínio.” (LIMA, 2001, p. 66). Ainda, contribui para o desenvolvimento de “[...] habilidades de descrever e analisar um grande número de dados, realizar inferências e fazer previsões com base numa amostra de população [...]” (BRASIL, 2000, p. 44), “permite também o desenvolvimento de uma nova forma de pensar em Matemática denominada raciocínio combinatório” (BRASIL, 2002, p. 126), desenvolve o pensamento formal (FERNANDES; CORREIA; GUZMÁN, 2010), facilita “o desenvolvimento de processos de enumeração, de formulação de conjecturas, de generalização e pensamento sistemático, [...] que são essenciais para aprendizagem da matemática em todos os níveis de ensino” (ENGLISH, 2005 apud FERNANDES; CORREIA; GUZMÁN, 2010, p. 216) e contribui no “desenvolvimento de raciocínios de probabilidade.” (GLAYMANN; VARGA, 1975 apud FERNANDES; CORREIA; GUZMÁN, 2010, p. 217).

Percebe-se, assim, que o estudo do ensino e aprendizagem de análise combinatória na educação básica tem sido tema de diversas pesquisas científicas no Brasil. Tais pesquisas baseiam-se de modo geral em investigações sobre como os estudantes compreendem os conceitos de análise combinatória, em relatos de experiência através da apresentação de propostas bem sucedidas por professores, em estudos com professores com ênfase nos conhecimentos específicos e pedagógicos em análise combinatória, em estudos de intervenção através da abordagem resolução de problemas, e estudo de utilização de recursos com ênfase na análise de livros didáticos e utilização de softwares educativos (SILVA; PESSOA, 2015).

Dentre os principais problemas de aprendizagem em análise combinatória, são destacados a dificuldade dos estudantes em interpretar a situação problema apresentada bem como se a ordem dos elementos produz ou não novos agrupamentos (COUTINHO;

BARBOSA, 2016; DORNELAS, 2004; WAGNER; BORTOLOTI; FERREIRA, 2013). Nessa perspectiva, é importante que os professores busquem:

a utilização de situações que utilizem diferentes representações como a enumeração por listagem, a árvore de possibilidades ou que valorizem a percepção de regularidades existentes nas situações, diversificando o uso de fórmulas. A discussão, reflexão e a compreensão das propriedades existentes nos problemas combinatórios, como os invariantes de ordenação, repetição, escolha também são importantes e podem auxiliar os alunos no desenvolvimento do raciocínio combinatório. (ROCHA; BORBA, 2013, p. 557).

Para contribuir para efetivação das sugestões de Rocha e Borba (2013), temos como alternativa o uso de objetos digitais de aprendizagem que, devido ao envolvimento cada vez mais crescente dos jovens pelas tecnologias, sentem-se motivados e propensos a estudar através das mediações professor-objeto-aluno, professor-objeto, aluno-objeto na busca de resoluções de problemas, na análise de hipóteses, na experimentação, e na busca de melhores soluções (OLIVEIRA; COSTA; MOREIRA, 2001 apud MACÊDO, L.; MACÊDO, A.; FILHO, 2007).

As características que favorecem para essa relação educativa são: a reusabilidade responsável pela possibilidade de trabalhar diferentes conteúdos em diferentes contextos, a portabilidade que é a capacidade desses objetos de aprendizagem (OAs) serem executados em diferentes plataformas, a interatividade que é capacidade de interação entre aluno e objeto, a modularidade que é a possibilidade dos OAs serem desenvolvidos em módulos de modo a serem acoplados a outros recursos em diferentes contextos, e metadados, que são os atributos sobre os OAs de modo que eles sejam facilmente encontrados através dos repositórios de aprendizagem (SABBATINI, 2012).

Várias pesquisas vêm sendo realizadas trazendo discussões sobre como deve ser a construção desses objetos, as formas de aplicação em sala de aula e que resultados são obtidos a partir da aplicação desses objetos na educação básica nas diversas áreas do conhecimento, a saber: (EISENMANN; BRANDÃO, 2009), (GROENWALD; ZOCH; HOMA, 2009), (KONRATH et al., 2006), (MACÊDO et al., 2007), (SOUZA et al., 2007), entre outros. Entretanto, argumenta Leite et al (2009) que poucos trabalhos são observados na área de análise combinatória.

Tendo em vista a problemática acima apresentada em torno do ensino e aprendizagem de análise combinatória na Educação Básica, foi desenvolvido um objeto de aprendizagem, chamado CombEsq – Combinatória Esquematizada –, para o ensino e aprendizagem de análise combinatória tendo como metodologia a resolução de problemas na visão de Polya (2006). O

CombEsq esquematiza alguns problemas de análise combinatória da educação básica para que o estudante possa compreender os principais conceitos de análise combinatória, a saber: Princípio Fundamental da Contagem, Arranjos, Permutações e Combinações. Para a construção do CombEsq, foi utilizada a ferramenta de autoria CourseLab – versão gratuita. O CombEsq surgiu como tentativa de ajudar, por um lado, estudantes que, conforme dados do Sistema de Avaliação da Educação Básica, saem da educação básica sem dominar os conceitos básicos de análise combinatória. Nesse contexto, o CombEsq possibilita ao estudante possuir uma ferramenta auxiliar para melhorar seu estudo de análise combinatória, principalmente em relação à interpretação do problema, à identificação do conceito pertinente ao problema e a correta identificação do tipo de agrupamento implícito no problema. Por outro lado, tem-se a intenção, a partir do CombEsq, de ajudar professores a diversificar seus métodos e técnicas de ensino a partir de uma ferramenta digital de modo a maximizar as possibilidades de aprendizagem dos estudantes. Tal fato é relevante, tendo em vista a pouca diversidade de material de ensino para o estudo de análise combinatória. O CombEsq pode ser acessado a partir da página <https://combesq.blogspot.com>. Nela, está disponível o CombEsq e atualizações que vierem a acontecer na ferramenta.

A partir do objeto de aprendizagem desenvolvido, discutimos as estratégias de elaboração técnica e pedagógica utilizadas conforme os autores Braga (2006), Leite (2007), Reategui, Boff e Finco (2010) e Silveira e Carneiro (2012), no que se refere ao aspecto técnico e Polya (2006) no que se refere ao aspecto pedagógico. Por fim, foi selecionado um grupo de professores atuantes que tenham experiência com o ensino de análise combinatória na Educação Básica e sejam familiarizados com o uso de tecnologias na Educação Matemática para avaliar os aspectos técnicos e pedagógicos do objeto, propor formas de intervenção na prática de aula, bem como sugerir mudanças de modo a maximizar o seu potencial educativo.

O presente trabalho ainda é composto por: fundamentação teórica, na qual são abordados alguns conceitos de análise combinatória, algumas questões envolvendo o ensino aprendizagem de análise combinatória e uma discussão sobre os objetos de aprendizagem na educação; pela metodologia, na qual são discutidas a abordagem da pesquisa, os instrumentos de coleta dos dados e o processo de análise; as análises e resultados, nos quais são discutidos as estratégias realizadas na construção do CombEsq e as análises das entrevistas realizadas com os professores; e, por fim, pelas considerações finais, nas quais apresentamos uma discussão geral sobre o trabalho e perspectivas futuras da pesquisa.

## 2 CONCEITOS E DEFINIÇÕES RELACIONADOS AO ESTUDO DE ANÁLISE COMBINATÓRIA

### 2.1 Conceito de Análise Combinatória

O estudo de análise combinatória no ensino médio baseia-se basicamente nos tópicos de princípio fundamental da contagem, arranjos, permutações e combinações. Nessa perspectiva, a análise combinatória “visa desenvolver métodos que permitam contar o número de elementos de um conjunto, sendo estes elementos, agrupamentos formados sob certas condições.” (HAZZAN, 1977, p. 01-E). É importante salientar que a análise combinatória não se resume a tais tópicos, isto é, existem outros tipos de problemas também de análise combinatória que necessitam de outros tipos de técnicas para obtermos a solução, a saber: o princípio da inclusão-exclusão, o princípio das gavetas de Dirichlet, as funções geradoras, a teoria de Ramsey, etc. (MORGADO et al., 1991).

A seguir apresentamos alguns tópicos de análise combinatória baseados nos autores (IEZZI, 1997), (MORGADO et al., 1991) e (LIMA et al., 1998).

### 2.2 Princípio Fundamental da Contagem

Antes de definirmos o princípio fundamental da contagem – também conhecido como princípio multiplicativo – vejamos dois exemplos de modo que seja possível perceber de forma clara o conceito apresentado anteriormente sobre análise combinatória.

**Exemplo 1:** Numa sala há 3 homens e 4 mulheres. De quantos modos é possível selecionar um casal homem-mulher?

Identificando os homens como  $h_1, h_2, h_3$  e as mulheres como  $m_1, m_2, m_3, m_4$ , podemos ter os seguintes casais:  $h_1, m_1; h_1, m_2; h_1, m_3; h_1, m_4; h_2, m_1; h_2, m_2; h_2, m_3; h_2, m_4; h_3, m_1; h_3, m_2; h_3, m_3; h_3, m_4$ , isto é, obtemos 4 casais nos quais o homem é  $h_1$ , 4 casais nos quais o homem é  $h_2$  e 4 casais nos quais o homem é  $h_3$ . Assim, temos:  $4 + 4 + 4 = 3 \times 4 = 12$  casais no total. Podemos observar que neste caso foi possível organizar homens e mulheres e realizar a contagem. Vejamos, agora, o exemplo abaixo:

**Exemplo 2:**  $D$  é o conjunto de números de três algarismos, todos distintos, formados a partir dos dígitos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. Quantos números possuem o conjunto  $D$ ?

Podemos escrever o conjunto  $D$  da seguinte maneira:  $D = \{123, 124, 125, \dots, 875, 876\}$ . Podemos notar que, diferentemente do exemplo 1, é bem complicado escrever todos os números e contá-los. Torna-se, portanto, necessário o uso de técnicas de análise combinatória para realizarmos esse tipo de contagem.

A partir do exemplo 1, podemos enunciar o princípio fundamental da contagem da seguinte maneira:

**Definição 1:** Se uma decisão  $d_1$  pode ser tomada de  $X$  maneiras e se, uma vez tomada a decisão  $d_1$ , a decisão  $d_2$  puder ser tomada de  $Y$  maneiras então o número de maneiras de se tomarem as decisões  $d_1$  e  $d_2$  é  $X \times Y$ .

Usando o princípio fundamental da contagem no exemplo 1, teremos:

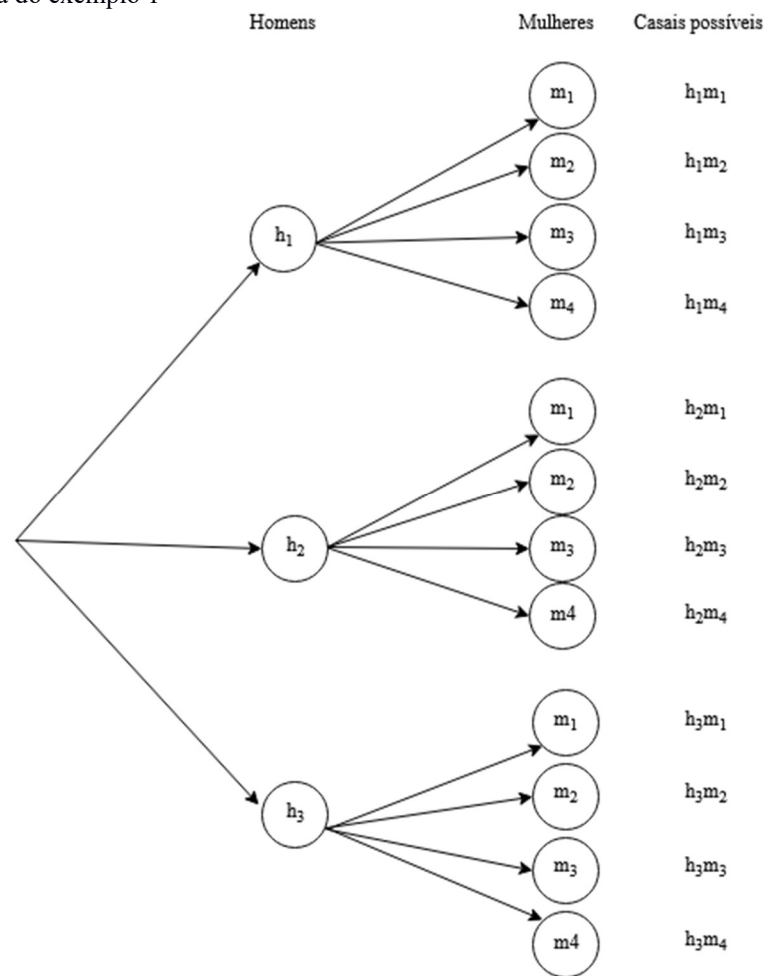
- i)  $d_1$ : escolha do homem;
- ii)  $d_2$ : escolha da mulher.

Como a decisão  $d_1$  pode ser tomada de 3 maneiras e, depois disso, a decisão  $d_2$  pode ser tomada de 4 maneiras, o número de maneiras de se formar um casal, isto é, de tomar as decisões  $d_1$  e  $d_2$  é  $3 \times 4 = 12$ .

Podemos observar, dessa forma, que o princípio fundamental da contagem permitiu contarmos o número de elementos do conjunto  $\{h_1m_1, h_1m_2, h_1m_3, h_1m_4, h_2m_1, h_2m_2, h_2m_3, h_2m_4, h_3m_1, h_3m_2, h_3m_3, h_3m_4\}$  constituído por todos os casais possíveis, sem que fosse necessário enumerar seus elementos.

Esse mesmo exemplo pode ser representado através de um diagrama. Vejamos abaixo:

Figura 1 – Diagrama do exemplo 1



Fonte: Dados do autor

Observando o diagrama, temos que o número de casais possíveis é 12. Tal diagrama na análise combinatória é chamado de Diagrama da Árvore ou Diagrama Sequencial. Através dele, é possível solucionar vários problemas ou elucidar possíveis estratégias de solução, pois podemos visualizar a situação exposta pelo problema através de um diagrama. Em outros problemas, também é possível utilizar tabelas, desenhos, listagens, entre outras.

## 2.3 Arranjos

Os arranjos podem ser simples ou com repetição. Vejamos as características que definem cada um deles.

### 2.3.1 Arranjo simples

**Definição 2:** Seja  $M$  um conjunto de  $m$  elementos, isto é,  $M = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ . Chamamos de arranjo simples dos  $m$  elementos tomados  $r$  a  $r$  ( $1 \leq r \leq m$ ) a qualquer sequência de  $r$  elementos formada com elementos de  $M$  todos distintos.

**Exemplo 3:** Quatro atletas, Guilherme (G), Paulo (P), Marcos (M) e Everaldo (E) disputam uma corrida. Supondo que todos terminem a prova, quantas são as possibilidades de chegada para os três primeiros lugares?

Observe que as possibilidades de chegada para os três primeiros lugares sempre serão distintas. Assim, a situação exposta nesse problema se enquadra na definição anterior. Nesse caso, podemos chamar  $M = \{G, P, M, E\}$ ,  $m = 4$  e  $r = 3$ , e afirmarmos que os arranjos dos quatro elementos de  $M$ , tomados três a três, são os ternos  $(x, y, z)$  formados com os elementos distintos de  $M$ .

Podemos resolver o problema pelo princípio fundamental da contagem. Vejamos:

- i)  $d_1$ : escolha de um atleta para o 1º lugar, o que pode ser feito de 4 possibilidades;
- ii)  $d_2$ : escolha de um atleta para o 2º lugar, após a escolha do atleta G, por exemplo, para o 1º lugar, o que pode ser feito de 3 possibilidades;
- iii)  $d_3$ : escolha de um atleta para o 3º lugar, após a escolha dos atletas G e P, por exemplo, para o 1º e o 2º lugares, o que pode ser feito de 2 possibilidades.

Como a decisão  $d_1$  pode ser tomada de 4 maneiras e, depois disso, a decisão  $d_2$  pode ser tomada de 3 maneiras e, depois disso, a decisão  $d_3$  pode ser tomada de 2 maneiras, o número de possibilidades de chegada para os três primeiros lugares, isto é, de tomar as decisões  $d_1$ ,  $d_2$  e  $d_3$  é  $4 \times 3 \times 2 = 24$ .

Generalizando o exemplo 3 e considerando novamente um conjunto  $M = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$  e indicando por  $A_{m,r}$  o número de arranjos dos  $m$  elementos tomados  $r$  a  $r$ , temos que cada arranjo é uma sequência de  $r$  elementos, onde cada elemento pertente a  $M$  e são todos distintos. Aplicando o princípio fundamental da contagem, teremos:

- i)  $d_1$ : Escolha do 1º elemento, o que pode ser feito de  $m$  possibilidades;
- ii)  $d_2$ : Escolha do 2º elemento, após a escolha do elemento para 1ª posição, o que pode ser feito de  $m - 1$  possibilidades;



- iii) Realizando tal procedimento infinitamente, teremos como última decisão, que chamaremos  $d_r$ , a escolha do  $r$ -ésimo elemento, após a escolha do  $1^\circ, 2^\circ, \dots, (r-1)$  elementos, o que pode ser feito de  $m - (r - 1)$  possibilidades.

Como a decisão  $d_1$  pode ser tomada de  $m$  maneiras e, depois disso, a decisão  $d_2$  pode ser tomada de  $m - 1$  maneiras e, assim por diante até que a decisão  $d_r$  pode ser tomada de  $m - (r - 1)$  maneiras, então o número de arranjos dos  $m$  elementos tomados  $r$  a  $r$  é dado por:

$$A_{m,r} = m \times (m - 1) \times (m - 2) \times \dots \times (m - r + 1), \text{ com } r \text{ fatores.}$$

Notemos que multiplicando o segundo membro da igualdade acima por  $\frac{(m-r)!}{(m-r)!}$ , obtemos:

$$A_{m,r} = \frac{m!}{(m-r)!}, \quad 1 \leq r \leq m$$

### 2.3.2 Arranjo com repetição

O arranjo com repetição difere do arranjo simples no que se refere às sequências que podem ser formadas. Nesse caso, os elementos formados não são necessariamente distintos. Assim, podemos enunciar arranjo com repetição da seguinte maneira:

**Definição 3:** Seja  $M$  um conjunto de  $m$  elementos, isto é,  $M = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ . Chamamos de arranjo com repetição dos  $m$  elementos tomados  $r$  a  $r$  ( $1 \leq r \leq m$ ) a qualquer sequência de  $r$  elementos formada com elementos de  $M$  não necessariamente distintos. Usando um raciocínio semelhante ao realizado no estudo do arranjo simples, concluímos que:

$$(AR)_{m,r} = m \times m \times \dots \times m = m^r.$$

### 2.4 Permutações

Como discutido no estudo de arranjo, as permutações podem ser simples ou com repetição. Vejamos as características que definem cada uma delas:

### 2.4.1 Permutação simples

**Definição 4:** Seja  $M$  um conjunto de  $m$  elementos, isto é,  $M = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ . Partindo do conceito de arranjo simples, chama-se permutação simples todo arranjo simples em que  $r = m$ . Em outras palavras, é a sequência de  $m$  elementos distintos de  $M$ . Indicando por  $P_m$  o número de permutações simples de  $m$  elementos, temos:

$$P_m = A_{m, m} = m \times (m - 1) \times (m - 2) \times \dots \times (m - m + 1) = m \times (m - 1) \times (m - 2) \times \dots \times 3 \times 2 \times 1$$

$$\text{Portanto, } P_m = m!$$

Notemos que as permutações simples de  $m$  elementos distintos diferem entre si somente pela ordem dos elementos.

**Exemplo 4:** De quantas formas 5 pessoas podem ficar em fila indiana?

Observemos que as filas são formadas por 5 pessoas distintas e que cada fila se diferencia pela ordem de cada pessoa. Portanto, estamos diante de um problema de permutação. Assim, o número de formas que as 5 pessoas podem ficar em fila indiana é dada por  $P_5 = 5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$ .

### 2.4.2 Permutação com repetição

Em algumas situações, teremos elementos repetidos e não poderemos usar a técnica de permutação simples pois nesse caso estaríamos quantificando situações iguais. Vejamos um exemplo:

**Exemplo 5:** Quantos anagramas podemos formar com a palavra NATÁLIA?

Nomeando os elementos iguais na forma  $NA_1TA_2LIA_3$ , notemos, por exemplo, que a palavra  $NA_1TA_2LIA_3$  é a mesma que  $NA_2TA_1LIA_3$ . Portanto, a quantidade de anagramas que podemos formar com a palavra NATÁLIA é menor do que a permutação simples dos elementos que compõem a palavra NATÁLIA. Para conseguirmos realizar essa contagem, utilizemos a seguinte estratégia:

Inicialmente, distribuimos as letras iguais:

i) A distribuição das letras A, A e A (três letras) pode ser feita de  $\frac{A_{7,3}}{3!}$  maneiras.

Observe que a divisão de  $A_{7,3}$  por  $3!$  foi realizada para que não sejam contabilizadas as permutações das letras A, A e A ( $P_3 = 3! = 6$ ) uma vez não geram distribuições distintas.

Em seguida, distribuimos as letras distintas:

ii) Fixadas as letras A, A e A restam 4 letras distintas que podem ser distribuídas de  $P_4 = 24$  maneiras.

Aplicando o princípio fundamental da contagem, teremos:

$$\frac{A_{7,3}}{3!} \times P_4 = \frac{7!/4!}{3!} \times 4! = \frac{7!}{3!} = 840$$

Portanto, 840 é o número de anagramas que pode ser formado com a palavra NATÁLIA e escrevemos  $P_7^3 = 840$ .

Note que podemos generalizar esse raciocínio para  $m$  elementos. Sejam:

$\alpha$  elementos iguais a A;

$\beta$  elementos iguais a B;

. . . .  
 . . . .  
 . . . .

$\gamma$  elementos iguais a M.

Temos um total de  $\alpha + \beta + \dots + \gamma = m$  elementos.

Assim, seguindo os passos anteriores e aplicando novamente o princípio fundamental da contagem, teremos:

$$\frac{A_{m,\alpha}}{\alpha!} \times \frac{A_{(m-\alpha),\beta}}{\beta!} \times \dots \times \frac{A_{(m-\alpha-\beta-\dots-\gamma),\gamma}}{\gamma!} \times (m-\alpha-\beta-\dots-\gamma)! = \frac{m!}{\alpha! \times \beta! \times \dots \times \gamma!}$$

Portanto, o número de permutações distintas que podemos obter com esses elementos é:

$$P_{m}^{\alpha, \beta, \dots, \gamma} = \frac{m!}{\alpha! \times \beta! \times \dots \times \gamma!}$$

## 2.5 Combinações Simples

**Definição 5:** Seja  $M$  um conjunto de  $m$  elementos, isto é,  $M = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ . Chamemos de combinações dos  $m$  elementos, tomados  $r$  a  $r$ , aos subconjuntos de  $M$  constituídos de  $r$  elementos.

**Exemplo 6:** Seja  $M = \{a, b, c, d\}$ . Quais os subconjuntos de  $M$  constituídos de 2 elementos?

As combinações dos 4 elementos, tomados 2 a 2, são os subconjuntos:  $\{a, b\}$ ,  $\{a, c\}$ ,  $\{a, d\}$ ,  $\{b, c\}$ ,  $\{b, d\}$  e  $\{c, d\}$ . Notemos que  $\{a, b\} = \{b, a\}$  pois, conforme definição anterior, combinação é um conjunto e, portanto, a ordem dos elementos não interfere na quantificação das possibilidades. É importante salientar que diante de uma situação-problema, o fato de a ordem dos elementos interferir ou não na quantificação das possibilidades, é o que diferencia de modelar o problema através de arranjo ou combinação. Ou seja, numa combinação não importa a ordem dos elementos, ao passo que, numa sequência importa a ordem dos elementos.

Buscando uma solução do exemplo 6 sem necessariamente enumerarmos todos os casos possíveis, podemos seguir a seguinte estratégia:

- i) Escolha do 1° elemento da combinação que pode ser feita de 5 modos;
- ii) Escolha do 2° elemento pode ser feita de 4 modos.

Num primeiro momento, poderíamos pensar que a resposta seria, pelo princípio fundamental da contagem,  $4 \times 3 = 12$ . No entanto, estamos considerando nessa contagem, por exemplo, os conjuntos  $\{a, b\}$  e  $\{b, a\}$  como diferentes, o que não é permitido pela definição de combinação. Assim, na contagem que resultou em 12, estamos contabilizando cada combinação uma vez para cada ordem de escrever seus elementos. Como em cada combinação os elementos

podem ser escritos em  $P_2 = 2! = 2$  ordens, cada combinação foi contada 2 vezes. Indicando as combinações dos 4 elementos, tomados 2 a 2, por  $C_{4,2}$ , temos que:

$$C_{4,2} = \frac{4 \times 3}{2} = \frac{12}{2} = 6$$

Generalizando o raciocínio acima para as combinações dos  $m$  elementos, tomados  $r$  a  $r$ , temos que:

$$C_{m,r} = \frac{m \times (m-1) \times \dots \times (m-r+1)}{r!}, \quad 0 < r \leq m.$$

Multiplicando o segundo membro da igualdade pela expressão  $\frac{(n-p)!}{(n-p)!}$ , obtemos:

$$C_{m,r} = \frac{m!}{r! \times (m-r)!}, \quad 0 \leq r \leq m.$$

Vejamos mais um exemplo:

**Exemplo 7:** Quantas comissões de 3 participantes podem ser formadas com 5 pessoas?

Vamos definir as 5 pessoas por A, B, C, D e E e analisemos uma comissão qualquer formada. Seja a comissão formada por A, B e C. Notemos que  $\{A, B, C\} = \{B, A, C\}$ . Isto é, a ordem das pessoas na comissão não gera uma nova comissão. Dessa forma, o problema pode ser modelado através dos conceitos de combinação. Assim, teremos:

$$C_{5,3} = \frac{5!}{3! \times (5-3)!} = 10.$$

### 3 O ENSINO E APRENDIZAGEM DE ANÁLISE COMBINATÓRIA

O estudo de combinatória no Brasil é recomendado desde os anos iniciais do ensino fundamental ao ensino médio pois diversos fenômenos na sociedade exigem tratamento e raciocínios que são estudados em combinatória (BRASIL, 1997). Isso se torna relevante socialmente, pois com a alta disponibilização de informações possibilitadas pelo avanço das tecnologias – internet, televisão, smartphones, etc. – desde crianças há uma necessidade de interpretar corretamente as situações expostas por essas informações. Para isso, é preciso que haja “construção e coordenação do pensamento lógico-matemático, para o desenvolvimento da criatividade, da intuição, da capacidade de análise e de crítica, que constituem esquemas lógicos de referência para interpretar fatos e fenômenos.” (BRASIL, 1998, p. 49).

Tais orientações são corroboradas especialmente por pesquisas que vêm analisando o ensino e aprendizagem de combinatória na Educação Básica e que invariavelmente orientam em seus resultados a necessidade de iniciar o estudo de combinatória desde os anos iniciais do ensino fundamental pois, à medida que forem para os anos finais do ensino fundamental e para o ensino médio, as ideias desenvolvidas nos anos iniciais possam ser consolidadas e ampliadas (BORBA, 2016). Nos estudos de Pessoa e Borba (2012) apud Borba (2016), Braz, Braz e Borba (2014) e Azevedo e Borba (2013) foi destacada a importância de se trabalhar com o uso de material manipulativo e recursos tecnológicos nesse estágio de ensino pois contribuíram para aprendizagem de algumas noções de combinatória. Entretanto, conforme Pessoa e Borba (2010), esse estudo é pouco sistematizado e explícito, o que favorece para o estudo desse conteúdo com maior organização apenas no ensino médio. Nessa perspectiva, a resolução de problemas de contagem no ensino fundamental:

coloca o aluno diante de situações em que é necessário agrupar objetos, em diferentes quantidades, caracterizando os agrupamentos feitos. Ao tentar solucionar essas situações, ele poderá aperfeiçoar a maneira de contar os agrupamentos e desenvolver, assim, o raciocínio combinatório. Consequentemente, poderá desenvolver maior segurança e criatividade para enfrentar situações-problema de caráter aleatório, que dependem de uma contagem sistematizada, e dispor de uma ferramenta útil e motivadora para a aprendizagem da probabilidade e da estatística. (BRASIL, 1998, p. 136).

Dessa forma, o aluno desde cedo começa a desenvolver procedimentos básicos de organização de dados em tabelas, gráficos e diagramas bem como classificá-los de forma a respeitar alguns critérios expostos pela situação-problema. Tais competências são essenciais

para a aprendizagem de novos conceitos matemáticos bem como para as práticas reais do cidadão.

Em relação ao ensino formal de análise combinatória, que ocorre fundamentalmente no ensino médio, as orientações educacionais complementares aos parâmetros curriculares nacionais (PCN) destacam algumas habilidades que os alunos deverão desenvolver ao vivenciarem o estudo de análise combinatória, a saber:

Decidir sobre a forma mais adequada de organizar números e informações com o objetivo de simplificar cálculos em situações reais envolvendo grande quantidade de dados ou de eventos; Identificar regularidades para estabelecer regras e propriedades em processos nos quais se fazem necessários os processos de contagem; Identificar dados e relações envolvidas numa situação-problema que envolva o raciocínio combinatório, utilizando os processos de contagem. (BRASIL, 2002, p. 127).

Entretanto, esses mesmos parâmetros ressaltam que para atingir tais habilidades é importante que não transforme o ensino de análise combinatória em um ensino puramente teórico e com excesso de aplicações de fórmulas, isto é, o ensino de combinatória deve ser pautado na construção de modelos que simplifique e explique as situações apresentadas pelo problema. Assim, tal ensino deve estar ancorado na resolução de diversos tipos de problemas de modo que a aplicação da fórmula seja uma consequência do raciocínio construído para solução do problema (BRASIL, 2002).

Com relação aos métodos de ensino, parece comum que o ensino dessa disciplina esteja provocando uma aprendizagem mecânica. Nesse aspecto, Morgado et al. (1991, p. 02) argumenta que:

Se a aprendizagem destes conceitos se faz de maneira mecânica, limitando-se a empregá-los em situações padronizadas, sem procurar habituar o aluno com a análise cuidadosa de cada problema, cria-se a impressão de que a Análise Combinatória é somente um jogo de fórmulas complicadas. (MORGADO et al., 1991, p. 02).

Esse tipo de situação pode estar sendo ocasionada pela forma de ensino do professor de matemática, uma vez que ao não possuir os conceitos de análise combinatória bem construídos e compreendidos, priorizam um ensino em que não se pratica a construção e análise dos problemas e sim a excessiva aplicação de fórmulas em questões padronizadas (SABO, 2008). Dessa forma,

Muitas vezes, este tipo de método influencia os alunos a aplicarem números dados em seus devidos lugares nas fórmulas, entretanto, quando os mesmos se deparam com uma diversidade de tipos de problemas, não apresentam um bom resultado, pois não diferenciam a forma de resolução e de contagem por não identificar o tipo de agrupamento. (SILVA; PESSOA, 2015, p. 671).

Essa situação também pode interferir no processo avaliativo, pois o professor pode realizar um ensino com questões padronizadas com ênfase na aplicação de fórmulas e, em contrapartida, no momento de avaliação utilizar problemas que exijam a compreensão dos conceitos para atingir a solução. (SKEMP, 1976 apud WAGNER; BORTOLOTI; FERREIRA, 2013). Assim, torna-se comum estudantes “que não compreendem a análise combinatória, não percebem os princípios básicos por trás da solução dos problemas, e que detestam esta parte da Matemática” (LIMA, 2001, p. 395).

Talvez pela frequência desse ensino ser mecânico, isto é, com ênfase na aplicação de fórmulas e não nas análises dos problemas, é que as dificuldades dos estudantes concentram-se em: não possuir diferentes estratégias de solução conforme o problema; não perceber que, a depender do problema, agrupamentos distintos não produzem novas possibilidades; pouco conhecimento do princípio fundamental da contagem e, quando o conhece, não sabe aplicá-lo de forma correta a depender do problema, e outros (DORNELAS, 2004). A partir disso, a interpretação dos problemas torna-se difícil pois a partir do momento que os conceitos chaves não estão bem compreendidos pelo aluno, torna-se difícil o aluno utilizar a estratégia correta para a solução do problema (SILVA; PESSOA, 2015).

Podemos observar que tais problemas englobam os principais conceitos do estudo de combinatória na Educação Básica, uma vez que são instrumentos essenciais para a compreensão de conceitos mais avançados bem como para soluções de problemas mais complexos. Assim, podemos inferir que a aprendizagem em combinatória está bem comprometida, o que é compatível com os dados apresentados na introdução deste trabalho.

Dentre os principais erros apresentados, é comum o desconhecimento ou a má aplicação do princípio fundamental da contagem. Tal constatação é preocupante, pois é a partir do princípio fundamental da contagem que os conceitos de arranjos, permutações e combinações são desenvolvidos, além de ser possível resolver uma diversidade de problemas. Complementa Dornelas, (2014, p. 10) que “O seu desconhecimento ou a sua abordagem superficial trará dificuldades cognitivas importantes na sua aplicabilidade, no processo de resolução de problemas, como também na sua não mobilização em situações possíveis e necessárias.”.

Outro fato que merece destaque é que, em várias pesquisas que se propuseram avaliar os erros cometidos por estudantes do ensino médio ao tentarem resolver problemas de análise



combinatória, como em Kachimoto e Oliveira (2015) e Alves e Segadas (2012), grande parte dos alunos optaram por aplicar uma fórmula mesmo quando o problema poderia ser resolvido por uma estratégia de construção, como o diagrama da árvore ou o princípio fundamental da contagem. Kachimoto e Oliveira (2015) argumentam que tais posturas dos alunos estão fortemente ligadas às práticas de ensino do docente.

Fica claro que, apesar de todo um aparato de técnicas estudadas no ensino médio para solucionar problemas de análise combinatória, problemas dessa área de estudo exigem bem mais que a simples aplicação de uma fórmula pois, conforme argumenta Morgado et al. (1991, p. 02):

é verdade que a solução de um problema combinatório exige quase sempre engenhosidade e a compreensão pela da situação descrita pelo problema. Esse é um dos encantos desta parte da matemática, em que problemas fáceis de enunciar revelam-se por vezes difíceis, exigindo uma alta dose de criatividade para sua solução.

Essa criatividade citada por Morgado et al (1991) merece ser chamada a atenção. Aparentemente, é no estudo de análise combinatória que há uma exigência maior em relação à criatividade, pois nos conteúdos de matemática ensinados anteriormente a esse tema é como se a operacionalização fosse mais fácil de se realizar. No entanto, professores e alunos ao se depararem com os problemas de análise combinatória são pegos de surpresa pois torna-se difícil padronizar estratégias de solução. Ou seja, é possível inferir que a má aprendizagem em combinatória não esteja relacionada apenas ao ensino dela em si, mas a todo o ensino de matemática. Portanto, é importante que o ensino de qualquer tema de matemática priorize a análise e construção de soluções e não apenas a execução de passo a passos para obtenção de uma resposta.

Essa problemática apresentada não se resume apenas aos estudantes do ensino médio. Algumas pesquisas realizadas com professores de educação básica e licenciandos de licenciatura de matemática demonstram que tais sujeitos também possuem deficiências semelhantes (ALVES; SEGADAS, 2012), (WAGNER; BORTOLOTI; FERREIRA, 2013). É possível afirmar, conforme discute Alves e Segadas (2012), que alunos de licenciatura em matemática entram na Universidade com deficiência em Combinatória e tais deficiências não são sanadas durante o curso e voltam para a educação básica favorecendo para uma aprendizagem como a que recebeu.

Nota-se, assim, uma complexidade em torno dos problemas no ensino e aprendizagem de análise combinatória. Para amenizar tal situação, algumas práticas de ensino vêm sendo

recomendadas, como por exemplo, a promoção de um maior diálogo com os alunos de modo que os erros passem a ser explicitados e tornados conscientes para alunos e professores. Explicita Wagner; Bortoloti; Ferreira (2013, p. 19):

É preciso discutir e questionar juntamente com os alunos porque multiplicamos os resultados parciais ao invés de somarmos. Resolver problemas com números menores e simular o que aconteceria se somássemos e se multiplicássemos. Solicitar aos alunos que explicitem seus procedimentos de raciocínio e argumentem porque estão recorrendo a tais procedimentos.

É importante que esse diálogo seja realizado de forma construtiva a partir das intervenções que os alunos vão realizando a partir das tentativas de soluções de problemas, mesmo quando ocorrerem erros. Somado a isso, outra estratégia bastante discutida e recomendada para melhorar o ensino de combinatória é o uso mais frequente de um panorama ilustrativo, isto é, utilizar recursos visuais que mostrem a construção de agrupamentos, como o diagrama da árvore, listagem e contagem de agrupamentos usando, inclusive, modelos concretos, pois contribuem para compreensão de conceitos quando na formalização (COUTINHO; BARBOSA, 2016). Assim,

O professor pode, então, proporcionar em suas aulas a discussão de estratégias de resolução dos alunos, a utilização de situações que utilizem diferentes representações como a enumeração por listagem, a árvore de possibilidades ou que valorizem a percepção de regularidades existentes nas situações, diversificando o uso de fórmulas. A discussão, reflexão e a compreensão das propriedades existentes nos problemas combinatórios, como os invariantes de ordenação, repetição, escolha também são importantes e podem auxiliar os alunos no desenvolvimento do raciocínio combinatório. (ROCHA; BORBA, 2013, p. 557).

As diferentes representações utilizadas pelo professor também devem ser cobradas pelos alunos na solução dos problemas. Ou seja, há de haver uma responsabilidade maior pelo aluno no que se refere a sua participação. Assim, não é viável o aluno ficar apenas ouvindo o docente sugerir possibilidades de solução de um problema. O docente deve utilizar meios, como os discutidos acima, para que esse aluno seja mais participativo e que, assim, facilite a possibilidade do docente agir nos aspectos que forem necessários. Em outras palavras, “quanto mais condições se dêem aos alunos para pensar e testar uma idéia emergente, maior é a chance de essa idéia ser formada corretamente e integrada numa rica teia de idéias e de compreensão

relacional.” (ONUCHIC; ALLEVATO, 2005 apud, LOPES; REZENDE, 2010, p. 664). Complementa Duro (2012, p. 95) ao argumentar que:

No momento em que o aluno se sente provocado por determinado problema ou situação, pode-se dizer que se ligou o motor da aprendizagem. São essas situações conflituosas que tendem a mobilizar o interesse do educando para aprender. Quando entra em conflito cognitivo, o sujeito se abre para um mundo de novas descobertas. O conflito cognitivo instaura um campo de significado.

Entra em cena, dessa forma, o ato de questionar. Mas não um questionamento puramente teórico baseado no livro didático. E sim um questionamento personalizado a partir das relações que são estabelecidas entre o conteúdo – aluno – professor, de modo que possa “gerar perturbações nas estruturas cognitivas dos alunos, em suas atuais capacidades de assimilação, criando oportunidades de transformação dessas capacidades.” (DURO, 2012, p. 50).

Uma metodologia que assenta as discussões realizadas acima e que vem sendo motivo de vários estudos é a resolução de problemas (FONTE, 2008); (SILVA, 2013); (SOUZA, 2010) (YAHATA, 2012), entre outros. A partir dessa metodologia, os alunos são instigados a mobilizar seu pensamento, sua curiosidade e seus conhecimentos para tentar solucionar uma situação-problema apresentada pelo professor. Essa busca pela solução não ocorre de forma isolada pelo aluno, mas sim através de um diálogo com professor, este responsável por “acompanhar e orientar a busca de soluções, coordenar discussões entre soluções diferentes, valorizar caminhos distintos que chegaram à mesma solução, validando-os ou mostrando situações em que o raciocínio utilizado pode não funcionar.” (ROMANATTO, 2012, p. 303). Nesse sentido, “a resolução de problemas é peça central para o ensino de matemática, pois o pensar e o fazer se mobilizam e se desenvolvem quando o indivíduo está engajado ativamente no enfrentamento de desafios” (BRASIL, 2002, p. 112).

É importante destacar que tal metodologia não se limita à busca de uma solução específica de um problema mas, na busca por essa solução, “[...] facilitar o conhecimento das habilidades básicas, os conceitos fundamentais e a relação entre ambos. É desenvolver naturalmente habilidades para resolver, mediante determinadas categorias, uma gama de problemas.” (HUETE; BRAVO, 2006, p. 73 apud SILVA; PESSOA, 2015, p. 676). Assim, os estudantes irão desenvolver suas capacidades intelectuais e estratégias de solução, tais como: intuição, criatividade, imaginação, iniciativa, autonomia, utilização de problemas conhecidos, tentativa e erro, e outros, essenciais para o ensino-aprendizagem de matemática e para a vida em sociedade.

Não menos importante é o papel docente nessa metodologia, pois o professor não irá apenas desenvolver definições, teoremas, exemplos, exercícios e problemas. Ele irá realizar, principalmente, a tarefa de “organizar, sintetizar, formalizar os conceitos, princípios e procedimentos matemáticos presentes nos problemas apresentados” (ROMANATTO, 2012, p. 303). Tal atribuição pode torná-lo inseguro pois, diferentemente de uma metodologia tradicional na qual o professor tem o controle da maior parte das ações, nessa metodologia tudo é imprevisível, pois os acontecimentos surgirão de acordo com os andamentos dos estudantes na busca pela solução do problema. Recomenda-se, dessa forma, não uma mudança repentina e radical dos métodos de ensino do professor, mas uma mudança paulatina, abordando, por exemplo, inicialmente um problema de forma não padronizada e ir observando as reações dos estudantes.

Além disso, é importante que os professores possuam várias estratégias de ensino para que se adéque aos diferentes contextos com os quais vão lidar. Assim, não há um caminho único e melhor para o ensino de matemática, “conhecer diversas possibilidades de trabalho em sala de aula é fundamental para que o professor construa sua prática” (BRASIL, 1998, p. 42). Torna-se necessário, portanto, novas propostas de formação continuada que abordem diferentes modelos de se trabalhar os tópicos de análise combinatória bem como a utilização de novos recursos didáticos, tais como softwares educacionais, objetos educacionais, jogos, e outros, que possam implementar de maneira positiva as aulas de matemática.

## 4 TECNOLOGIA E O ENSINO DE MATEMÁTICA

### 4.1 Educação e Tecnologia

Atualmente é indiscutível a presença das tecnologias de comunicação e informação (TICs) na sociedade. Segundo pesquisas realizadas pelo cetic.br sobre o uso das tecnologias pelos domicílios brasileiros, mais de 46% possuem computador de mesa, 64% possuem computador portátil, 54% possuem acesso à Internet e 61% acessaram a internet em um período menor que três meses da data da pesquisa e 86% (dos que possuem acesso à internet) acessam a internet diariamente e 83% da população possui celular (CETIC.BR, 2017). Tais percentuais representam uma média e variam para mais ou menos conforme melhora ou piora da classe sócio econômica e escolaridade. Levando em consideração o envolvimento cada vez maior das pessoas com as novas tecnologias, os meios educacionais são cobrados a saber lidar com esse público cada vez mais tecnológico bem como a propor maneiras de aproveitar esse potencial tecnológico para promover métodos e técnicas de ensino condizentes com essa realidade.

Em paralelo a essa realidade em volta da escola, segundo os resultados do Programa Internacional de Avaliação de Estudantes (PISA) edição 2015, o Brasil é o penúltimo país com menor índice de computadores disponíveis na escola para os jovens de 15 anos entre os países membros da Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico (OCDE) (BRASIL..., 2016). Infere-se, a partir de tal informação, que os estudantes, principalmente de escolas públicas, estão passando pela escola sem terem acesso a uma educação tecnológica satisfatória. Nesse sentido, concordamos com Borba e Penteado (2010, p. 17) ao afirmar que “o acesso à informática deve ser visto como direito e, portanto, nas escolas públicas e particulares o estudante deve poder usufruir de uma educação que no momento atual inclua, no mínimo, uma alfabetização tecnológica.”.

Tal alfabetização não pode ser resumida ao ensino de técnicas da informática, mas como uma forma da escola promover a socialização e reflexão das tecnologias como instrumento de cidadania, isto é, ensinar a ler os meios, possibilitar conhecimento para que a seleção seja adequada aos interesses coletivos de modo que a sociedade possa relacionar-se de forma crítica com as mídias (BACCEGA, 2003). Partindo da premissa de que “A educação escolar deverá vincular-se ao mundo do trabalho e à prática social” (BRASIL, 1996), a presença das tecnologias na educação torna-se indispensável no sentido de contribuir para formação de cidadãos autônomos e críticos em sociedade, com poder decisão independente.

Para enfrentar essa problemática de distanciamento da escola e as novas tecnologias, historicamente algumas ações governamentais vêm sendo implementadas no Brasil. Do I

Seminário Nacional de Informática Educativa realizado em 1981 com o propósito de discutir estratégias para Informática Educativa no Brasil surgiram os programas EDUCOM realizado em 1983, o FORMAR em 1987 e 1989 e o PRONinfe em 1989. Tais programas tinham como principal objetivo favorecer a formação de recursos humanos na área de informática educativa e a avaliação dos efeitos da introdução do computador no ensino de disciplinas dos níveis de ensino fundamental e médio, além de promover a criação de laboratórios e centros de capacitação de professores. Em 1997, surgiu o PROINFO também com o mesmo propósito dos anteriores, e foi o que mais expandiu a informática pelas escolas. A dinâmica desses programas era formar alguns professores espalhados pelo país e tais docentes servir como multiplicação para os demais. Infelizmente o número de escolas atendidas ainda é pouco e o suporte técnico deixa muito a desejar nos locais que já possuem laboratórios de informática (BORBA; PENTEADO, 2010).

As orientações de tais programas basearam-se em sua maioria a partir dos PCNs. Neles, várias sugestões são realizadas com a finalidade de guiar as instituições de ensino no seu papel de educar tecnologicamente os jovens. Destaca-se, por exemplo, a partir de Brasil (2000, p. 12) que em relação às novas tecnologias “Cabe à escola o esclarecimento das relações existentes, a indagação de suas fontes, a consciência de sua existência, o reconhecimento de suas possibilidades, a democratização de seus usos”. Essa responsabilidade torna-se imperativa pela dimensão social que se tornou as tecnologias na vida das pessoas, sendo necessária, portanto, a sua presença no currículo e suas disciplinas, pois “conviver com todas as possibilidades que a tecnologia oferece é mais que uma necessidade, é um direito social.” (BRASIL, 2000, p. 13).

Além desse aspecto crítico de perceber as diversas manifestações das tecnologias na nossa sociedade, outro âmbito bastante discutido academicamente é a possibilidade de aproveitar esses recursos como instrumentos de ampliação de metodologias durante as práticas de ensino. Dentre os diversos recursos, podemos destacar o vídeo, animações, simulações, áudio, experimentos práticos, hipertexto, imagens, softwares educativos, programas de autoria, a Internet, entre outros. A utilização de tais recursos de forma crítica e consciente pode permitir ao docente além de aproximar o contexto social vivenciado pelo público discente, possibilitar situações de ensino que seriam impossíveis de se realizar sem a presença de tais tecnologias (MERCADO, 2002). Dessa forma, “Não é possível pensar que o simples conhecimento da maneira de uso do suporte (ligar a televisão ou o vídeo ou saber usar o computador e navegar na Internet) já qualificam o professor para a utilização desses suportes de forma pedagogicamente eficiente em atividades educacionais.” (KENSKI, 2003, p. 05). Complementa Lopes (2005, p. 129) ao afirmar que:

O professor continua tendo papel fundamental no processo ensino-aprendizagem e, por isso mesmo, torna-se necessário que passe por um processo de formação e desenvolvimento tecnológico que o leve a pensar de forma mais abrangente, manuseando as novas tecnologias, interpretando-as, aplicando-as quando e se necessário, lidando com novas linguagens e formas de comunicação, propondo e solucionando problemas também com a mediação de recursos tecnológicos.

Corroborando Almouloud (2005, p. 52) ao afirmar que “não é suficiente que os educadores tenham à sua disposição ou apenas saibam operar esses elementos tecnológicos, é preciso que aprendam a elaborar e a intervir significativamente no processo educativo”. Tal processo de formação é imperativo, pois o uso inadequado das tecnologias prejudica de sobremaneira o processo de ensino-aprendizagem e pode causar um desconforto para o docente de tal maneira que o desmotive a continuar usando tal recurso em suas aulas (KENSKI, 2003). Um exemplo de tal prática, conforme argumenta Lopes (2005), é quando ocorre a adequação da proposta de ensino ao recurso tecnológico em vez de adequar o recurso tecnológico à proposta educacional. Em contrapartida, uma prática de ensino almejada quando se faz uso das tecnologias “parece ser aquela que, acima de tudo, seja contextualizada, potencialmente geradora de construção de conhecimento, e crítico-reflexiva na medida em que se torna informada e comprometida com o contexto sócio-histórico.” (LOPES, 2005, p. 129).

Para perseguir esse caminho de sucesso, Mercado (2002) argumenta que os docentes na sociedade do conhecimento devem possuir alguns comportamentos, a saber: comprometido, no sentido do contexto social em que a escola está inserida; competente, no sentido de ser um profissional reflexivo, crítico e competente no âmbito de sua disciplina de modo que desenvolva uma prática interdisciplinar e contextualizada; crítico, no sentido de ter posicionamentos autônomos e reflexivos baseados em questionamentos de sua prática; aberto às mudanças, de modo que tenha uma postura proativa às novas situações, ao diálogo e à cooperação; exigente, a partir de uma prática de ensino que desencadeie desafios com intervenções conscientes e críticas de modo que o estudante possa ser autônomo em seus processos de estudos e interpretação dos conhecimentos; e interativo, na perspectiva de manter uma relação intelectual e moral com seus colegas da área bem como com os estudantes.

Por mais que as tecnologias por si sós não sejam a solução dos problemas da educação, a sua apropriação crítica e consciente pode favorecer diversas situações que acentuam positivamente o ensino-aprendizagem. Nesse sentido, Chikering e Ehrmann (1999) apud Behrens (2006) enumeram algumas contribuições, a saber: Encorajar contato entre estudantes

e universidades através de chats, fóruns, conferências *online*, etc.; Encorajar cooperação entre estudantes através de *e-mail* e grupos de discussão; Encorajar aprendizagem colaborativa a partir do acesso a banco de dados, programas educativos e recursos multimídia; Dar retorno e respostas imediatas – a partir da Internet professores e alunos podem se comunicar de modo a acompanhar a aprendizagem; Enfatizar tempo para as tarefas – o professor pode disponibilizar tarefas presenciais e *online* e o estudante pode ter acesso ao cronograma de atividades; Comunicar altas expectativas – a partir da capacidade criativa que as tecnologias proporciona os estudantes sentem-se motivados e atraídos a aprender; e Respeitar talentos e modos de aprender diferentes – as atividades didáticas que contemplam a tecnologia da informação permitem ao aluno ir além da tarefa proposta, em seu ritmo próprio e estilo de aprendizagem.

Para aproveitar todo esse potencial educativo que as tecnologias podem oferecer, sugere-se um repensar do processo de formação docente de modo que discussões e práticas a partir dessas novas tecnologias sejam efetivamente inseridas nos currículos dos cursos de ensino superior; uma formação continuada seja criteriosamente pensada e desenvolvida que possa contribuir para formação dos professores já atuantes, além de uma maior disponibilização de recursos didáticos tecnológicos nas mais diversas áreas do saber, pois “uma educação de qualidade demanda, entre outros elementos, uma visão crítica dos processos escolares e usos apropriados e criteriosos das novas tecnologias.” (MOREIRA; KRAMER, 2007, p. 1038).

## **4.2 Educação Matemática e Tecnologia**

A partir da discussão realizada na introdução deste trabalho e na seção anterior, é razoável admitir que os diversos recursos tecnológicos que vêm sendo desenvolvidos podem ser utilizados de forma positiva no ensino-aprendizagem de matemática. Nessa perspectiva, várias pesquisas vêm sendo realizadas nas quais retratam a dificuldade de se observar práticas com tecnologias na sala de aula de matemática – má formação docente, estrutura da escola, etc. – e as possibilidades de ensino que tais tecnologias favoreceram aos professores e alunos – os aspectos diferenciados que as tecnologias proporcionaram na sala de aula de matemática.

Sobre algumas pesquisas que investigaram como está sendo a prática dos docentes de matemática no que se refere ao uso das tecnologias no ensino, destaca-se que grande parte dos docentes tem acesso a computadores e Internet, no entanto os usos restringem, em sua maioria, às tarefas não pedagógicas, isto é, utilizam os computadores e Internet para buscar textos para aula, preparar as aulas, apresentações, etc. Por mais que reconheçam a importância dessas tecnologias para ensino-aprendizagem de matemática, muitos professores não se sentem



preparados para inserir tais tecnologias de forma pedagógica em suas aulas (NEVES et al., 2015); (RAMOS; AMARAL, 2012). É importante perceber, portanto, que ao reconhecer as tecnologias como potenciais educativos, exige-se uma mudança de comportamento docente referente aos aspectos de ensino. Sobre isso, argumenta Laborde e Sträßer (2010) apud Faria (2017, p. 93):

As discussões e investigações sobre as Tecnologias Digitais no ensino da matemática revelam a importância de modificar as formas de resolver problemas, apresentar conceitos, formular e formatar atividades a ser realizadas com alunos nas salas de aula, dentre outras questões consideradas relevantes no que tange o desenvolvimento e a exploração matemática com Tecnologias Digitais pela comunidade acadêmica e por professores.

Dentre os motivos pelos quais os docentes não conseguem desenvolver práticas de ensino nas quais a tecnologia está presente, as pesquisas realizadas destacam principalmente que não houve durante o período de graduação do curso disciplinas que abordassem o uso das novas tecnologias bem como o uso por parte dos professores formadores (RAMOS; AMARAL, 2012). Sobre esse aspecto, argumenta Maltempi (2008, p. 64) que o curso de licenciatura em matemática “pouco mudou nas últimas décadas no que se refere à incorporação das tecnologias na prática docente e, portanto, continua-se formando professores cujo referencial de prática pedagógica é aquele no qual tecnologias não tomam parte.” Outro aspecto bastante assumido pelo professor é a falta de incentivo e tempo para realizar estudos sobre como utilizar as tecnologias no ensino de matemática, quais os recursos, softwares, objetos de aprendizagem, etc. (SANT’ANA; AMARAL; BORBA, 2012). Assim, “é fundamental a preparação do professor, o qual necessita de tempo exclusivo para isso, contabilizado em sua carga horária de trabalho.” (MALTEMPI, 2008, p. 65).

Ainda sobre as dificuldades apresentadas pelos professores, um aspecto bastante comum nas pesquisas é a não existência de formação continuada ou quando ela existe, ocorre de maneira dissociada da prática real do professor de matemática. Tais formações “focam a formação pedagógico-tecnológica dissociada dos conteúdos específicos o que implica em um passo posterior do professor, que é relacionar a formação recebida com os conteúdos que ministra.” (MALTEMPI, 2008, p. 64). Essa transposição nem sempre é bem-sucedida pois muitas vezes a prática real do professor de matemática é distante da formação oferecida em tais formações. Torna-se necessária, assim, uma “formação continuada que trabalhe as tecnologias de modo a auxiliar o professor a incorporá-las em sua prática segundo seu contexto e conteúdos específicos” (MALTEMPI, p. 64, 2008) e que proporcione “condições para o professor

construir conhecimentos sobre as técnicas computacionais e entender por que e como integrar o computador em sua prática pedagógica.” (NEVES et al., 2015). Tal formação é essencial pois, como abordado anteriormente, a formação inicial dos professores pouco tem abordado uma formação em que as tecnologias estão presentes. É importante ressaltar, entretanto, que a formação inicial de licenciatura em matemática deve fornecer de forma efetiva uma formação que inclua o uso das tecnologias no ensino de matemática de modo que não haja uma sobrecarga na formação continuada (MALTEMPI, 2008). Nesse sentido,

[...] há indícios de impactos positivos na prática pedagógica dos professores a partir do ambiente de discussão criado na universidade, que envolveu, além das discussões já citadas, pesquisas, análise e manuseio de softwares, vídeos e outras atividades voltadas para o ensino de Matemática, além da elaboração de aulas simuladas com uso de tecnologias. (CARNEIRO; PASSOS, 2010 apud BORBA; ALMEIDA; CHIARI, 2015, p. 1122).

Mesmo com essa dificuldade retratada acima para que as novas tecnologias tornem-se mais conscientes pelos professores nas aulas de matemática, várias são as pesquisas que vêm experimentando práticas de ensino que tenham como suporte as tecnologias, seja no estudo de geometria, funções, cálculo, entre outras. Tais pesquisas vêm obtendo sucesso e discutem o uso de softwares e objetos de aprendizagem de forma pedagógica em sala de aula, isto é, baseiam-se numa metodologia que proporciona ao aluno diferenciais que favorecem o ensino-aprendizagem de temas específicos de matemática. Assim,

[...] pode-se pensar em utilizar as TICs para propiciar aos aprendizes possibilidades de desenvolver suas habilidades cognitivas de ordem superior, bem como; acessar, armazenar, manipular e analisar informações. Dessa forma, os estudantes podem usar melhor seu tempo na reflexão, no entendimento e na compreensão dos conceitos a serem apreendidos. (RAMOS; AMARAL, 2012, p. 228).

Um tipo de recurso que vem sendo muito pesquisado e experimentado em sala de aula de matemática são os softwares de geometria dinâmica (FERREIRA; SOARES; LIMA, 2009). A partir desses softwares, professores e alunos têm a oportunidade de fazer conjecturas a partir da experimentação e criação de objetos. Devido a essas características, conteúdos matemáticos podem ser discutidos a partir da interação do sujeito e as construções realizadas no software de modo que os alunos façam reflexões, deduções e desenvolvam aprendizagem dos conceitos a partir da descoberta. Assim, tais softwares “podem ir além da comparação de figuras geométricas, pois permitem criar, mover, distorcer, analisar e testar propriedades de figuras em

um processo de investigação.” (ALMEIDA, 2015; BONA, 2009 apud FARIA, 2017, p. 95).  
De forma complementar,

[...] se por um lado ela ajuda o professor na criação de material didático interativo e que desperte a curiosidade, por outro proporciona ao aluno um ambiente que estimula a postura participativa e a busca por desafios, passando pela troca de experiências e pela maturidade na compreensão de um conteúdo geométrico. (ISOTANI; BRANDÃO, 2013 apud BORBA; ALMEIDA; CHIARI, 2015, p. 1128).

Outro grupo de software que é destacado nas pesquisas são os softwares algébricos tais como Graphmatica e Winplot. Através desses aplicativos, o professor e o aluno podem realizar o estudo de funções de forma dinâmica e interativa. Dazzi e Dullius (2013) observaram, por exemplo, que o estudo de gráficos de funções de grau acima de 2 se deu de forma rápida a partir desse tipo de software. Além disso, os estudantes mostraram-se mais ativos e puderam relacionar de forma mais efetiva o estudo da parte algébrica e geométrica das situações problemas. Dias, Kraemer e Zica (2015) destacam a possibilidade de observação, compreensão e construção dos gráficos de modo que os alunos ao interagir com tais recursos possam criar conjecturas que contribuam para aprendizagem dos conceitos matemáticos envolvidos.

Um aspecto bastante comum em sala de aula de matemática é a necessidade de representar algumas situações que possuem um nível de abstração elevado ou que seja difícil pela impossibilidade de recursos necessários para tal representação. Nesse sentido, um tipo de software que vem sendo apontado como estratégia para minimizar tal problemática, principalmente na Educação Básica, são os softwares de simulação e modelagem. Oliveira e Domingos (2008, p. 270) argumentam que:

As simulações e a modelação referem-se essencialmente à possibilidade de reproduzir no computador modelos de fenómenos do mundo real que não poderiam ser trabalhados pelos alunos com papel e lápis com igual qualidade e realismo. A simulação e a modelação constituem ambientes onde o aluno pode desenvolver hipóteses e testá-las, analisando resultados obtidos.

Alguns estudos, como o de Costa e Fiorentini (2007), analisaram a importância da Internet como fator de aumentar a colaboração entre os professores de matemática. Nesse estudo, destacou o processo de interação que foi desencadeado pelo uso da Internet de modo que favoreceu o desenvolvimento da prática profissional dos docentes a partir do compartilhamento de experiências favorecendo para uma mudança da cultura docente. Tal uso

também favoreceu o uso da Internet pelos estudantes de modo que perceberam como a mesma pode contribuir para o acesso e compartilhamento de conhecimentos matemáticos.

O que se pode notar em comum nesses recursos é a representação múltipla, isto é, a partir de tais recursos, alunos e professores podem observar uma situação sob diversas perspectivas: tabela, gráfico, vídeo, animação, etc, o que interfere no ensino e aprendizagem de matemática (BORBA, 1994). Tais representações, segundo Lira e Monteiro (2011), incentivaram a melhor participação dos estudantes no que se refere à abordagem das informações, realizando interpretações sob diversos aspectos relacionados à forma de apresentação dos dados. Destaca-se, assim, a visualização como fator preponderante possibilitado pelas tecnologias. Sobre esse aspecto, argumenta Amado e Carreira (2008, p. 277):

A possibilidade de visualização faz atenuar a necessidade de abstracção e de idealização, tornando as ideias menos herméticas e mais perceptíveis. A visualização matemática é, assim, um processo importante e mesmo fundamental do raciocínio matemático. A integração da visualização no processo de ensino/aprendizagem da Matemática promove a intuição matemática e dá sentido a muitos resultados e processos, além de oferecer um meio de expressão de um grande leque de conteúdos matemáticos.

Em comum nas pesquisas citadas, é a necessidade do professor de matemática conhecer de forma profunda o software que deseja utilizar em suas aulas. Esse conhecimento não é apenas técnico, mas um conhecimento geral no sentido de perceber aplicações pedagógicas que potencializem a aprendizagem pelos estudantes. Tal argumentação pode ser corroborada a partir da pesquisa de Ramos e Amaral (2012) que ao questionarem alguns professores sobre as dificuldades de inserir as tecnologias no ensino, alertaram sobre a necessidade da metodologia antecipar o computador. Tal necessidade se deve ao fato de que o uso de um recurso tecnológico não deve ser de forma aleatória nem pelo professor e nem pelo aluno, mas de forma criteriosa, de modo que promova o ensino-aprendizagem dos conceitos matemáticos envolvidos. Essa percepção não ocorre apenas a partir do docente, mas também pelos alunos como observado por Neves et al. (2015, p. 05) ao argumentar que “é possível observar por meio das respostas dos alunos que o uso dos recursos tecnológicos vem sendo trabalhado de tal forma que não contempla os aspectos pedagógicos que compõem a proposta de formação.”

Sobre esse aspecto metodológico, é importante destacar que as concepções que o professor possui acerca da matemática, de ensino-aprendizagem da disciplina, o papel do professor e do aluno no ambiente de ensino influenciam de sobremaneira no tipo de abordagem que irá realizar com as tecnologias na sala de aula de matemática (AMADO; CARREIRA,

2008). Dessa forma, observa-se que a prática de ensino envolvendo tecnologias de forma crítica e consciente envolve outros âmbitos de conhecimentos e não apenas o conhecimento técnico, de modo que se nos cursos de graduação um estudante tiver uma formação excessivamente expositiva, haverá uma maior probabilidade do professor utilizar as tecnologias nessa perspectiva. Assim, “toda inserção de tecnologia no ambiente de ensino e aprendizagem requer um repensar da prática docente, pois ela não é neutra e transforma a relação ensino-aprendizagem.” (MALTEMPI, 2008, p. 61).

## 5 REPOSITÓRIOS E OBJETOS DE APRENDIZAGEM

### 5.1 Objetos de Aprendizagem

Um tipo de recurso que vem sendo bastante discutido em diversas pesquisas são os objetos de aprendizagem. Tais recursos, diferentemente dos softwares educacionais, em sua maioria exigem um menor conhecimento técnico da ferramenta e possuem uma proposta pedagógica melhor definida. Dessa forma, há uma maior motivação por parte dos educadores em utilizar tais recursos em suas aulas de modo a atingir melhores níveis de aprendizagens por parte dos estudantes.

Várias definições sobre objetos de aprendizagem são abordadas na literatura e, em grande parte, referenciam a de Wiley (2000). Para esse autor, os objetos de aprendizagem são entidades digitais obtidos através da Internet utilizados para apoiar a aprendizagem. Devido a essa característica, destaca a possibilidade de diversas pessoas terem acesso e usar os objetos simultaneamente. Outra definição, um pouco mais característica, é a de Tarouco, Fabre e Tamusiunas (2003, p. 02) que aborda objeto de aprendizagem como:

Qualquer recurso, suplementar ao processo de aprendizagem, que pode ser reusado para apoiar a aprendizagem. O termo objeto educacional (learning object) geralmente aplica-se a materiais educacionais projetados e construídos em pequenos conjuntos com vista a maximizar as situações de aprendizagem onde o recurso pode ser utilizado. [...] A ideia básica é a de que os objetos sejam blocos com os quais será construído o contexto de aprendizagem.

Uma definição mais abrangente é dada pelo Institute of Electrical and Electronics Engineers ao afirmar que os objetos de aprendizagem são definidos como qualquer entidade, digital ou não digital, ser usado, reutilizado ou referenciado durante a aprendizagem apoiada por tecnologia (IEEE, 2007). De modo geral, a principal característica de um objeto de aprendizagem é a possibilidade de ser utilizado em diversos contextos, plataformas, sistemas e hardwares. Essa característica torna-se possível, devido à técnica de ciência da computação denominada programação orientada a objetos. A partir dessa tecnologia, os objetos de aprendizagem podem ser modificados e serem utilizados como base para outros objetos de aprendizagem mais complexos de acordo com as especificidades de cada situação (WILEY, 2000). Como estamos interessados nessas características em um objeto de aprendizagem, as discussões realizadas neste trabalho estarão relacionadas a objetos de aprendizagem digitais, lócus de estudo deste trabalho.

De modo geral, os objetos de aprendizagem podem ser tomados como um conjunto de recursos de aprendizagem construídos a partir de linguagens de programação e ferramentas de autoria que implementam textos, áudios, imagens, vídeos, animações, jogos, simulações, etc., obedecendo determinados padrões técnicos de modo que possam ser usados e reutilizados em diversos contextos educacionais – cursos, ambientes virtuais, etc. – por públicos distintos. (MENDES; SOUZA; CAREGNATO, 2004).

Apesar de ter uma definição geral, para de fato considerarmos um objeto digital como objeto de aprendizagem é importante que tal objeto possua algumas características abordadas por Mendes, Souza e Caregnato (2004, p. 16), a saber:

- a) reusabilidade: reutilizável diversas vezes em diversos ambientes de aprendizagem. É a capacidade de o objeto ser compatível com uma quantidade alta de contextos podendo ser aproveitado para diversas implementações;
- b) adaptabilidade: adaptável a qualquer ambiente de ensino;
- c) granularidade: É o grau de divisão dos conteúdos presentes no objeto de aprendizagem. Assim, quanto mais tipos de conteúdos o objeto de aprendizagem possuir, menor sua granularidade e menor será sua reusabilidade; quantos menos tipos de conteúdos o objeto de aprendizagem possuir, maior a granularidade e maior será sua reusabilidade;
- d) acessibilidade: acessível facilmente via Internet para ser usado em diversos locais;
- e) durabilidade: possibilidade de continuar a ser usado, independente da mudança de tecnologia;
- f) interoperabilidade: habilidade de operar através de uma variedade de hardware, sistemas operacionais e browsers, com intercâmbio efetivo entre diferentes sistemas.
- g) Metadados (dados sobre dados): descrevem as propriedades de um objeto, como título, autor, data, assunto, etc. Os metadados facilitam a busca de um objeto em um repositório.

Tais características podem ser consideradas como vantagens que os objetos de aprendizagem possuem em relação a outros recursos educacionais. Além disso, podem ser critérios importantes tanto para produção e seleção de objetos de aprendizagem por parte dos professores (AGUIAR; FLÔRES, 2014). Além dessas qualidades tecnológicas, é importante atentar-se para o enfoque pedagógico inerente àquele conteúdo vinculado ao objeto de aprendizagem, isto é, as estratégias pedagógicas devem ser pensadas de forma criteriosa para que o objeto de aprendizagem atinja os objetivos propostos.

## 5.2 Repositórios de Objetos de Aprendizagem

Para que os objetos de aprendizagem sejam acessíveis e, portanto, com alta possibilidade de reusabilidade, torna-se importante que sejam armazenados de forma organizada em algum espaço na Internet. Tais espaços são chamados de Repositórios de Objetos de Aprendizagem (ROAs) e tem como principal função concentrar os OAs facilitando a sua busca a partir dos metadados vinculados a cada OA. Koochang e Harmam (2007) apud Aguiar e Flôres (2014, p. 102) complementam ao argumentar que um ROA deve permitir: “o armazenamento propriamente dito, o controle de versões e de publicação, a busca dos objetos a partir de suas características, o controle de acesso e a avaliação dos objetos”.

Dessa forma, vários objetos de aprendizagem desenvolvidos por organizações nacionais e internacionais poderão ser mantidos e disponibilizados para serem reutilizados por professores para diversos contextos de ensino. Destaca-se, assim, o papel colaborativo promovido pelos ROAs uma vez que proporcionam o contato de diversos grupos com uma diversidade de OAs, os quais poderão notar especificidades e estratégias de elaboração que contribuirão significativamente na sua formação tecnológica e pedagógica. Como consequência, os OAs ficam em constante avaliação e reconstrução promovendo uma melhora coletiva dos OAs. (MACIEL; BACKES, 2012).

Atualmente, existem vários repositórios de objetos de aprendizagem disponíveis na Internet. Grande parte desses repositórios são desenvolvidos e mantidos por universidades ou por entidades ligadas à educação. Conforme análise realizada por Silva, Café e Catapan (2010), destacam-se os repositórios internacionais, tais como ARIADNE Educacional Repository Consórcio mantido na Europa, Campus Alberta Repository of Educational Objects (CAREO) mantido no Canadá e Multimedia Educational Resource for Learning and Online Teaching (MERLOT) mantido por várias entidades do Estados Unidos e Canadá; e os repositórios nacionais, tais como o Banco Internacional de Objetos de Aprendizagem (BIOE) mantido pelo Ministério da Educação (MEC), a Coletânea de Entidades de Suporte ao uso de Tecnologia na Aprendizagem (CESTA) mantido pela UFRGS e a Rede Interativa Virtual de Educação a Distância (RIVED) mantida pelo MEC.

É importante destacar que existem vários padrões de metadados em que são baseados os repositórios de objetos de aprendizagem, como por exemplo: Dublin Core Metadata Initiative (DCMI), Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE) e International Standards Organisation (ISO), entre outros (SILVA; CAFÉ; CATAPAN, 2010). Cada padrão



desses representa uma forma de organização dos objetos de aprendizagem no repositório. Como os mais conhecidos no Brasil são BIOE e o RIVED, discutimos abaixo algumas características importantes de cada um deles.

O BIOE é um repositório aberto criado e mantido pelo MEC do Brasil e pode ser acessado a partir do site: <http://objetoseducacionais2.mec.gov.br>. Tal repositório tem como objetivo manter e compartilhar recursos educacionais digitais, tais como: áudio, vídeo, animação, simulação, software educacional, imagem, mapa e hipertextos, que são considerados relevantes para as práticas de ensino e aprendizagem no âmbito escolar.

Os objetos de aprendizagem são organizados em diferentes categorias, a saber: Educação Infantil, Ensino Fundamental, Ensino Médio, Educação Profissional, Educação Superior, Educação de Jovens e Adultos e Educação Escolar Indígena e podem ser filtrados por vários critérios, como país, idioma, tipo do recurso, nível de ensino e área de conhecimento, sendo possível o agrupamento dos critérios de pesquisa. O BIOE disponibiliza recursos de diferentes países e línguas e qualquer sujeito integrante de uma comunidade educacional pode submeter suas produções e publicá-las de modo a contribuir com o processo colaborativo.

Com uma proposta um pouco mais restrita, a Rede Interativa Virtual de Educação (RIVED) é um programa da Secretaria de Educação a Distância (SEED) do MEC que tem como objetivo a produção objetos de aprendizagem nos formatos de animação e simulação. Além de produzir os objetos, possui uma equipe de formadores que fornece cursos na área de autoria de objetos de aprendizagem para redes de ensino, de modo que tais grupos receptores tornem-se multiplicadores de práticas de autoria desses OA. A metodologia central empregada no desenvolvimento dos recursos digitais é a de estimular o raciocínio e o pensamento crítico dos estudantes aliando o potencial das tecnologias de comunicação e informação às novas abordagens pedagógicas.

Para ter acesso aos objetos de aprendizagem produzidos pela RIVED, é preciso acessar ao site <http://rived.mec.gov.br> e realizar uma busca por meio de critérios, tais como: nível de ensino, área do conhecimento e uma palavra-chave. A partir da busca, é possível ter acesso ao guia do professor, visualizar o objeto ou realizar o download. É importante notar que mesmo disponibilizando apenas dois tipos de objetos de aprendizagem, a opção de ter acesso ao guia do professor torna-se interessante, pois, a partir dele, o professor poderá observar algumas aplicações e orientações daquele recurso na prática de ensino do professor.

### **5.3 Alguns Objetos de Aprendizagem na Matemática**

Como discutido em outros tópicos deste trabalho, a matemática historicamente é tida como uma disciplina que causa dificuldade para aprendizagem de uma parcela considerável dos estudantes. Dessa forma, alguns recursos, como os objetos de aprendizagem, podem ser utilizados para facilitar a aprendizagem de alguns conceitos matemáticos que possuem um alto índice de rejeição. A seguir, discutimos alguns trabalhos realizados com objetos de aprendizagem na matemática, destacando principalmente as qualidades desses objetos na compreensão dos conceitos matemáticos.

Macêdo et al. (2007) analisou o uso do objeto de aprendizagem Gangorra Interativa com o objetivo de auxiliar os estudantes a desenvolver o pensamento proporcional a partir da compreensão dos conceitos de grandezas diretamente e inversamente proporcionais. Os autores verificaram que, quando os alunos começaram a interagir com o Gangorra Interativa, houve uma maior conexão entre as representações intuitivas do sujeito, como a ação física e a linguagem formal, com as representações abstratas, como o desenvolvimento de equações, de modo que tais relações auxiliaram no desenvolvimento dos conceitos matemáticos. Outro fator destacado pelos autores, foi a oportunidade de verificar a quantidade de movimentos que o estudante realizava para resolver a situação problema apresentada pelo Gangorra Interativa. A partir desse dado, pode-se inferir, por exemplo, que quanto menor fosse o número de movimentos que o estudante realizasse no aplicativo, maior a quantidade de estratégias mentais utilizadas para solucionar a situação problema.

Souza et al. (2007) analisou o uso do objeto de aprendizagem Arquitetura de Escadas com o objetivo de auxiliar os estudantes a desenvolver conhecimentos necessários para a compreensão dos conceitos semelhança de triângulos, teorema de Tales e proporcionalidade. Segundo os autores, a ideia do objeto é fazer com que os estudantes busquem estratégias para construir escadas e, à medida que realizarem o procedimento, o professor discuta os conceitos matemáticos envolvidos de maneira concreta. Dessa forma, há possibilidade de explorar de forma dinâmica as relações de semelhança de triângulo ao manipular os valores dos degraus, além de promover a autonomia ao estudante de testar diversas estratégias de modo a compreender os conceitos matemáticos envolvidos. O autor ressalta, porém, a importância do professor na mediação das discussões envolvendo a aplicação do objeto de aprendizagem na prática docente.

Uma área ainda pouco explorada, mas que com os recursos educacionais digitais vêm ganhando destaque, é o desenvolvimento de objetos de aprendizagem para pessoas com algum tipo de deficiência. Vejamos, por exemplo, o trabalho realizado por Dantas, Pinto e Sena (2013) que discutem a elaboração do OA do tipo jogo, chamado BEM, que objetiva desenvolver a

aprendizagem das operações básicas em matemática de crianças com deficiência visual. De modo geral, o jogo apresenta um tabuleiro com vários números e, a partir de combinações de teclas e reprodução de som, o sujeito escolhe a operação que deseja estudar. O jogo apresenta, por exemplo, o resultado de uma soma e o sujeito precisa identificar os números que podem gerar aquela soma no menor tempo possível. Dentre os resultados apresentados pelos autores durante a validação do OA, destacam que houve um maior desenvolvimento das habilidades computacionais, potencialização da aprendizagem das operações básicas de matemática, o desenvolvimento do raciocínio lógico e uma maior ludicidade e prazer durante o ensino dos conceitos matemáticos.

Apesar de termos vários objetos de aprendizagem sendo desenvolvidos em Matemática, notam-se poucos na área de Análise Combinatória. Conforme discutido por Leite et al. (2009) em uma análise realizada em OAs com temática de análise combinatória, há certas lacunas a serem preenchidas no que se refere à capacidade desses OAs contribuírem de forma eficiente para uma melhor aprendizagem desses conceitos em Matemática.

#### **5.4 Ferramentas de Autoria de Objetos de Aprendizagem**

Construir um objeto de aprendizagem digital não é uma tarefa simples e exige um alto domínio técnico na área da computação bem como compreender os objetivos pedagógicos inerentes ao objeto. De forma a minimizar tais situações, várias ferramentas de autoria estão sendo criadas com o objetivo de auxiliar principalmente alunos e professores a desenvolverem seus objetos de aprendizagem sem a necessidade de ter um conhecimento avançado em técnicas de computação (SANTOS; SANTOS, 2014). A World Wide Web Consortium (W3C) define ferramenta de autoria como qualquer software, ou coleção de componentes de software, que pode ser usado por autores (sozinho ou colaborativamente) para criar ou modificar o conteúdo da web para uso por outras pessoas (outros autores ou usuários finais) (W3C, 2016). Tais ferramentas usam “[...] estruturas e procedimentos já programados, reunindo-os agregando conteúdo e forma de tratamento aos dados que dependem de sua estratégia pedagógica” (FLÔRES; TAROUCO; REATEGUI, 2011, p. 394).

Nessa perspectiva, há pesquisas discutindo as possibilidades dessas ferramentas contribuírem para a capacidade autoral de professores e estudantes, isto é, utilizar tais aplicativos para que estudantes criem objetos educacionais relacionados com as diversas áreas do saber e, nesse processo, desenvolvam capacidades de aprendizagem inerentes à temática discutida em questão. Nesse processo, conforme trabalho de Silva (2008), argumenta-se que o

estudante, ao lidar com a construção de objetos educacionais, mobiliza uma capacidade maior de raciocínios e aprendizagens do que apenas utilizar objetos de aprendizagem criados por outros usuários.

Entretanto, para que tais aplicações sejam classificadas como ferramentas de autoria, algumas características devem ser consideradas conforme salienta Battistella e Wangenheim (2011) ao realizar uma análise entre as principais ferramentas de autoria disponíveis:

1. Oferecer níveis de usabilidade para permitir que professores de áreas não tecnológicas e com pouca ou nenhuma familiaridade com informática e editoração de conteúdo se encontrem em condições de produzir conteúdo após um treinamento curto ou mesmo de forma autodidata (AINSHWORTH; FLEMING, 2006);
2. Ser gratuitas e preferencialmente de software livre para permitir que cada IES possa customizá-las se necessário;
3. Produzir OAs com níveis de qualidade de apresentação e usabilidade comparáveis aos de conteúdo produzido por ferramentas comerciais profissionais;
4. Oferecer um nível de integração adequado com AVEAs e Repositórios de OAs de uso comum, de forma que o processo de produção, oferta, reuso e extensão de OAs seja facilitado e adequado ao uso por leigos em administração de AVEAs e OAs. (BATTISTELLA; WANGENHEIM, 2011, p. 17).

Dentre as ferramentas de autoria mais utilizadas e analisadas academicamente, destacam-se o Ardora, Adobe Flash, eXeLerning XHTML e CourseLab (FLÔRES; TAROUÇO; REATEGUI, 2011); (SOUZA et al., 2015). É importante ressaltar que as ferramentas Ardora, ExeLerning XHTML e CourseLab são gratuitas, o que contribui para sua utilização e estudo. Para definir qual a ferramenta mais adequada ao OA que se pretende desenvolver, o usuário “deve avaliar suas necessidades, criar uma lista de recursos possíveis, determinar a funcionalidade mais importante para o seu objeto e verificar qual ferramenta dispõe dessa funcionalidade” (FLÔRES; TAROUÇO; REATEGUI, 2011, p. 02). Dentre as opções apresentadas, optamos pela utilização da ferramenta CourseLab, tendo em vista possuir funcionalidades compatíveis com os objetivos propostos neste trabalho, ser uma ferramenta completa e bem avaliada conforme estudos comparativos realizados por Battistella et al. (2009) e Battistella e Wangenheim (2011). Sendo assim, discutimos abaixo algumas características e funcionalidades do CourseLab.

O CourseLab é um software que tem versão gratuita e possui interface semelhante ao Microsoft PowerPoint. Tal característica é interessante tendo em vista a popularidade do PowerPoint, o que facilita a familiarização do aplicativo. Possui ambiente WYSIWYG (WhatYouSeeIsWhatYouGet) o que facilita o desenvolvimento de OAs uma vez que são disponibilizados ao usuário objetos/recursos que podem ser inseridos facilmente não sendo

exigidos conhecimentos avançados em programação. Os recursos suportados pelo programa são do tipo texto, áudio, vídeo, appletJava, flash, entre outros, além de atividades interativas tais como: única e múltipla escolha, verdadeiro ou falso, ordenação de itens, preenchimento de lacunas nas frases e correspondências de itens. Tais funcionalidades podem ser programadas de modo que ao acionar um botão, determinado recurso seja apresentado ou ativado. Os conteúdos gerados pelo aplicativo podem ser usados por sistemas de gerenciamento de conteúdo, como por exemplo Moodle, além de ser exportadas para plataforma Web, sendo executáveis em qualquer navegador Web (DAMASCENO et al., 2014).

Esse conjunto de recursos oportunizado pelas TICs pressiona a comunidade docente a envolver-se cada vez mais com tais recursos de modo a incluí-los como formação complementar. Dessa forma, é importante que os sistemas de ensino forneçam formações continuadas para que os docentes sintam-se motivados a levar tais recursos para suas práticas de aula, pois, conforme argumenta Perrenoud (2000) apud Tarouro et al. (2006, p. 03), “o elenco atual de competências inerentes ao ofício de professor deve privilegiar habilidades adicionais, coerentes com o novo papel dos professores que passa a ter a possibilidade de mobilizar novos recursos cognitivos apoiados na Tecnologia da Informação e Comunicação.”.

## 6 METODOLOGIA

O presente trabalho foi dividido em dois momentos. O primeiro refere-se à construção de um objeto de aprendizagem de título CombEsq – Combinatória Esquematizada – que tem como principal objetivo auxiliar estudantes e professores no ensino e aprendizagem de análise combinatória na Educação Básica.

Para fundamentar as estratégias de elaboração do CombEsq, foram utilizados os trabalhos de Braga (2006), Leite (2007), Reategui, Boff e Finco (2010) e Silveira e Carneiro (2012), os quais discutem os principais recursos técnicos que um objeto de aprendizagem deve possuir para que tenha uma qualidade aceitável e cumpra com seus objetivos. Além do aspecto técnico, também é importante caracterizar as ideias pedagógicas inerentes ao objeto de aprendizagem. Dessa forma, para fundamentar as estratégias utilizadas, fizemos uso de uma metodologia de resolução de problemas conforme as ideias de Polya (2006). Para esse momento, as análises foram realizadas tomando por base a estratégia de emparelhamento ou associação citada por Laville & Dionne (1999) apud Fiorentini & Lorenzato (2009, p. 138) que “consiste em analisar as informações a partir de um modelo teórico prévio. Isso pode ser feito por intermédio de um emparelhamento ou associação entre o quadro teórico e o material empírico, verificando se há correspondência entre eles.”

O segundo momento deste trabalho foi constituído a partir da validação do objeto de aprendizagem desenvolvido a partir de um grupo de professores de Matemática que tivessem experiência razoável no ensino de análise combinatória bem como fossem familiarizados com o uso de tecnologias na Educação Matemática. Torna-se importante esse momento de validação, pois, por mais que tenhamos fundamentado tanto a parte técnica e pedagógica do CombEsq, é importante que outros sujeitos possam usar o recurso de modo a avaliá-lo respeitando alguns critérios, tais como: a abordagem do conteúdo matemático, a interface gráfica, os recursos interativos, o foco pedagógico, etc. Optamos por um grupo de professores tendo em vista serem os principais motivadores para que ferramentas dessa natureza possam ser usadas na sala de aula.

Como estamos interessados em interpretar as opiniões dos professores acerca do CombEsq, adotamos, para esse momento, uma metodologia com abordagem qualitativa, pois “tem como foco entender e interpretar dados e discursos, mesmo quando envolve grupos de participantes” (D’AMBRÓSIO B.; D’AMBRÓSIO U., 2006, p. 78). Como instrumento de coleta de dados, fizemos uso de questionário misto e de entrevistas semi-estruturadas. O uso de

questionário está de acordo com a perspectiva abordada por Fiorentini e Lorenzato (2009, p. 117) ao argumentar que:

[...] os questionários podem servir como uma fonte complementar de informações, sobretudo na fase inicial exploratória da pesquisa. Além disso, eles podem ajudar a caracterizar e a descrever os sujeitos do estudo, destacando algumas variáveis como idade, sexo, estado civil, nível de escolaridade, preferências, número de horas de estudo, número semanal de horas-aula do professor, matérias ou temas preferidos, etc.

Em um primeiro momento, os questionários foram utilizados para identificarmos os professores que formaram o grupo que fez uso do CombEsq de acordo com os critérios já apresentados anteriormente, a saber: ter experiência razoável no ensino de análise combinatória e ser familiarizado com o uso de tecnologias na Educação Matemática conforme apêndice A. Após a seleção desse grupo, foi aplicado um novo questionário a esse grupo com intuito de identificar informações objetivas sobre os professores, tais como: formação profissional, tempo de docência, experiência profissional, etc., conforme apêndice B.

Após esse momento, o CombEsq foi disponibilizado para o grupo de professores para que fosse usado de forma a perceber suas funcionalidades para a prática de ensino. Realizado esse estudo da ferramenta, foram disponibilizados aos professores alguns formulários que avaliaram o CombEsq nos aspectos: conteúdo matemático, usabilidade, interface e recursos interativos, prover auxílio a usuários e foco pedagógico, conforme apêndice C. Para cada aspecto, foram realizados alguns questionamentos para que o professor avalie na forma: discorda plenamente (1), discorda (2), nem concorda nem discorda (3), concorda (4) e concorda plenamente (5).

Em seguida, foram iniciadas as entrevistas semiestruturadas de forma individualizada conforme roteiro disponibilizado no apêndice D. Nesse contexto, as entrevistas “além de permitir uma obtenção mais direta e imediata dos dados, serve para aprofundar o estudo, complementando outras técnicas de coleta de dados [...] permite ao entrevistado fazer emergir aspectos que não são normalmente contemplados por um simples questionário” (FIORENTINI; LORENZATO, 2009, p. 120). Sobre o tipo semiestruturada, expõe Fiorentini e Lorenzato (2009, p. 121):

Essa modalidade é muito utilizada em pesquisas educacionais, pois o pesquisador, pretendendo aprofundar-se sobre um fenômeno ou questão específica, organiza um roteiro de pontos a serem contemplados durante a entrevista, podendo, de acordo com o desenvolvimento da entrevista, alterar a ordem deles e, até mesmo, formular questões não previstas inicialmente.

As entrevistas foram baseadas em dois tipos de abordagem do CombESq: o aspecto técnico e o aspecto pedagógico. Assim, no aspecto técnico foram realizadas perguntas sobre uso da ferramenta, a interação com o objeto, a interface, fontes, cores, imagens, enfim, os recursos multimídia disponibilizados pelo CombESq bem como a sua organização para uma perspectiva pedagógica. No aspecto pedagógico, foram realizadas perguntas sobre o uso da ferramenta na sala de aula, se usaria a ferramenta, como usaria, se os recursos utilizados melhorariam a aprendizagem dos alunos, se facilitaria a prática docente, etc. É importante destacar que as entrevistas tiveram o áudio gravado e, em seguida, foram transcritas.

Após a realização das entrevistas, foram realizadas as análises dos dados obtidos por meio dos questionários, formulários e entrevistas. Os dados obtidos foram organizados em categorias de modo a facilitar o processo de análise. De acordo com Fiorentini & Lorenzato (2009), esse processo visa agrupar os dados com características comuns em categorias de modo que a análise/interpretação seja mais precisa e promissora para responder aos questionamentos da pesquisa. A partir da coleta dos dados, chegamos às seguintes categorias de análise: conteúdo matemático, usabilidade, interface e recursos interativos, prover auxílio a usuários, foco pedagógico e sugestões dos sujeitos pesquisados.



## 7 ANÁLISES E RESULTADOS

A partir da problemática apresentada nas seções anteriores acerca do ensino e aprendizagem de análise combinatória na Educação Básica, foi desenvolvido um objeto de aprendizagem chamado CombEsq – Combinatória Esquemática – que tem como objetivo auxiliar por um lado estudantes a desenvolver a aprendizagem dos conceitos básicos de análise combinatória e por outro o professor a ter uma ferramenta que facilite o seu trabalho escolar na referida área oportunizando uma maior discussão do tema em sala de aula. O CombEsq baseia-se, predominantemente, na esquematização de situações problemas de modo que intensifique a compreensão do enunciado do problema bem como os conceitos combinatórios envolvidos.

O CombEsq foi idealizado e desenvolvido pelo autor deste trabalho a partir do sistema de autoria CourseLab abordado anteriormente e tem como principal característica combater os dois principais problemas abordados por pesquisas acadêmicas discutidas em seções anteriores: a interpretação do problema, a identificação do conceito combinatório compatível com o problema e desenvolver a capacidade de criar estratégias para solucionar os problemas. Dessa forma, o referido OA contempla os principais conceitos de análise combinatória – Princípio fundamental da contagem, Arranjo simples, Arranjo com repetição, Permutação simples, Permutação com repetição e Combinação –, as atividades a partir da esquematização de situações problemas que no total são 18 e simulados. Apresentamos, abaixo, a tela de desenvolvimento do CombEsq no CourseLab.

Figura 2 – Tela de desenvolvimento do CombEsq no CourseLab



Fonte: Dados do autor

Durante o desenvolvimento do OA, dois aspectos são fundamentais para que o objeto de aprendizagem seja caracterizado como tal: os aspectos técnico e pedagógico. Podemos caracterizar o aspecto técnico como os diversos recursos de multimídia utilizados que possam tornar o objeto com uma usabilidade satisfatória; já o aspecto pedagógico são as estratégias de aprendizagens inerentes ao objeto, que no presente estudo foi utilizada a metodologia de resolução de problemas. Assim, discutimos a seguir esses dois aspectos sob a luz dos autores Braga (2006), Leite (2007), Reategui, Boff e Finco (2010) e Silveira e Carneiro (2012), no que se refere ao aspecto técnico e Polya (2006) no que se refere ao aspecto pedagógico.

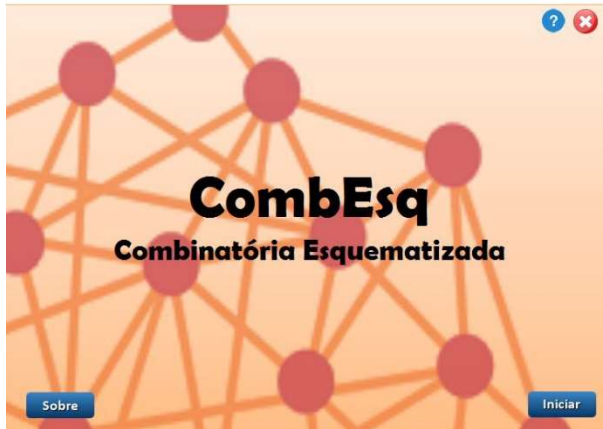
### **7.1 Análise Técnica do CombEsq**

Autores como Braga (2006), Leite (2007), Reategui, Boff e Finco (2010) e Silveira e Carneiro (2012) realizaram em seus trabalhos análises de objetos de aprendizagem de modo a construir requisitos razoáveis que devem estar presentes em um objeto de aprendizagem para que tenham padrões mínimos de qualidade. Dessa forma, discutimos abaixo as estratégias adotadas no CombEsq conforme requisitos de Leite (2007) que são: (1) a interação da interface deve apresentar clareza e inteligibilidade; (2) o software deve apresentar ícones representativos de suas funções; (3) o software deve apresentar contraste de cores e/ou alertas visual para encaminhar a ação do usuário; (4) o software deve disponibilizar um modo de simulação em tela; (5) o software deve privilegiar o uso de recursos motivacionais; (6) o software deve permitir o usuário retomar ações já executadas; (7) o software deve permitir acesso a diferentes níveis de dificuldade; (8) o *feedback* deve auxiliar à compreensão de conteúdos; (9) o software deve oferecer a possibilidade do aluno se identificar; (10) o software deve fornecer relatório das atividades desenvolvidas e do desempenho do usuário na forma de relatórios para o professor; (11) o software deve possibilitar que o usuário acompanhe seu desempenho; (12) o software deve permitir ao professor configurar e incluir novas atividades. É importante mencionar que quando os requisitos dos demais autores forem complementares aos apresentados por Leite (2007), faremos menção conforme as afinidades dos requisitos em discussão.

#### **7.1.1 Presença dos requisitos (1), (2) e (3)**

As figuras 3 e 4 abaixo representam, respectivamente, a tela inicial do CombEsq e a tela com as principais funcionalidades.

Figura 3 – Tela inicial do CombEsq



Fonte: Dados do autor

Figura 4 – Tela das principais funcionalidades do CombEsq após acionar o botão “Iniciar” da figura 3



Fonte: Dados do autor

A partir das figuras, podemos perceber que o CombEsq possui clareza e inteligibilidade uma vez que os botões utilizados são nomeados de forma sucinta e intuitiva com predominância do modo verbal, isto é, na maioria das telas são usados botões com os nomes em Português de modo a facilitar a navegação e interação do sujeito e o objeto. A exceção fica apenas em relação aos botões superiores à direita que representam, respectivamente, da esquerda para direita, ir para tela inicial, ir para instruções referente à tela atual e sair do CombEsq. É importante mencionar que a partir do botão “Sobre” da figura 3, o usuário poderá ter acesso às orientações de funcionamento de navegação do CombEsq de modo a sanar alguma dúvida que possa surgir, além de informações sobre o CombEsq, o seu autor e uma forma de contato. Outro fato que merece atenção é o botão em forma de interrogação que, sempre que for acionado, irá fornecer instruções para a tela que o usuário estiver acessando. As cores utilizadas pelo CombEsq possuem um contraste interessante de modo a facilitar a navegação e interação entre usuário e objeto. Tais cores são utilizadas não apenas nos botões, mas também através de alertas realizando *feedbacks* a partir de interações corretas ou incorretas entre o usuário e o objeto como veremos a seguir. Assim, o CombEsq atende aos requisitos de apresentar ícones representativos de suas funções bem como apresentar contraste de cores e/ou alertas visual para encaminhar a ação do usuário.

Ainda de acordo com os requisitos (1), (2) e (3), podemos afirmar, conforme Reategui, Boff e Finco (2010), que há o uso do tamanho de fontes adequadas e padronizadas, há uma organização adequada de textos, botões e outros recursos, há consistência visual na

apresentação de informações (títulos, formatação/disposição dos textos e recursos gráficos), os links para acessar outras páginas e funções do objeto de aprendizagem são facilmente reconhecíveis e os ícones que dão acesso a outras páginas e funções do objeto são facilmente compreensíveis.

### 7.1.2 Presença dos requisitos (4), (5), (6) e (7)

As figuras 5 e 6 abaixo representam, respectivamente, a tela com o nível de dificuldade dos problemas pertencentes à funcionalidade “Atividades” e a tela inicial do problema 01.

Figura 5 – Nível de dificuldade



Fonte: Dados do autor

Figura 6 – Tela inicial do problema 01



Fonte: Dados do autor

Conforme a figura 5, o CombEsq disponibiliza ao usuário escolher o nível de dificuldade dos problemas, o que está em conformidade com o requisito (7). Observe também que a partir dos botões voltar e próximo, é possível retroceder e avançar nas situações expostas pelo objeto, preservando as informações inseridas pelo usuário, oportunizando, também, refazer as situações já respondidas, o que está em conformidade com o requisito (6). Como discutido no tópico anterior, o fato de em toda tela ser disponibilizada ajuda a partir do botão na forma de uma interrogação, o requisito (4) é atendido, uma vez que as ajudas são realizadas textualmente de forma objetiva e clara, de modo que o usuário compreenda as ações que devem ser realizadas para dar andamento à situação exposta na tela que estiver acionada. Na figura 6, é apresentada a tela inicial de um problema a ser solucionado pelo usuário. Observe que o CombEsq disponibiliza uma imagem que pode estar diretamente relacionada ao problema ou que apenas aproxime o usuário do contexto apresentado pelo problema. Há uma preocupação no uso e na quantidade de imagens para não ocorrer sobrecarga cognitiva e em realizar um uso de imagens para ilustrar conceitos e explicações (REATEGUI; BOFF; FINCO, 2010). Há também uma

calculadora que pode ser acionada a qualquer momento pelo usuário. Conforme veremos mais adiante, a partir do momento em que o usuário informa uma resposta incorreta, são disponibilizadas algumas dicas para que o estudante se aproxime cada vez mais da solução. Concluimos, portanto, que esse conjunto de recursos satisfaz o requisito (5) de modo que o estudante se sinta mais motivado a encarar os problemas de análise combinatória, compreendendo as diversas etapas de solução dos problemas conforme metodologia de resolução de problemas.

### 7.1.3 Presença dos requisitos (8), (9), (10) e (11)

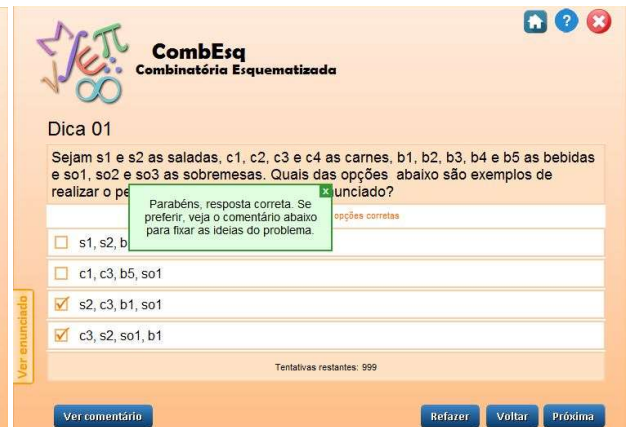
As figuras 7 e 8 abaixo representam, respectivamente, a tela inicial do problema 01 com a apresentação do *feedback* no caso da resposta inserida estar incorreta e a tela referente à dica 01 do problema 01 com apresentação do *feedback* no caso da resposta informada estar correta.

Figura 7 – Feedback do problema 01



Fonte: Dados do autor

Figura 8 – Feedback durante as dicas do problema 01



Fonte: Dados do autor

Observe que os problemas são apresentados com disponibilidade apenas dos botões “Refazer” e “Voltar” conforme podemos observar na figura 6. À medida que o usuário insere uma resposta correta ou não, os botões surgem conforme podemos observar nas figuras 7 e 8. Tal modelo de interação é padrão em todos os problemas. Além dos botões que são apresentados conforme a interação do usuário com o objeto, ocorre também os *feedbacks*. Note, por exemplo, os *feedbacks* realizados nas figuras 7 e 8. Na figura 7, o *feedback* informa que a resposta inserida pelo usuário está incorreta e orienta ao estudante acessar o botão “Ver dicas” ou “Experimentar” para aproximar o usuário da compreensão e solução do problema. Já na figura 8, é apresentada a dica 01 que questiona o usuário sobre as situações que podem ser realizadas de acordo com o enunciado do problema. Observe que é realizado um *feedback* que informa se a resposta está

correta e, além disso, comenta que o estudante pode acessar o botão “Ver comentário” para fixar as ideias do problema ali discutidas. Tal interação é padrão em todos os problemas. Assim, o requisito (8) é atendido uma vez que há uma intencionalidade clara e objetiva dos *feedbacks* auxiliarem os estudantes na compreensão dos problemas e, por consequência, dos conteúdos envolvidos.

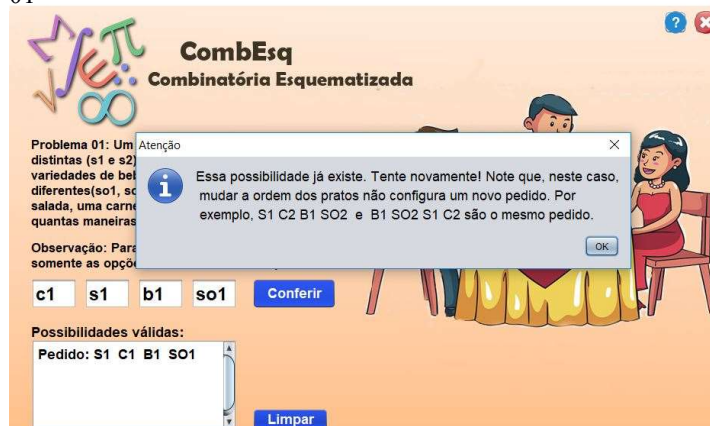
Além dessa interação que o usuário pode ter por meio das dicas, o CombEsq disponibiliza, a partir do botão “Experimentar” (figura 7), a opção do estudante experimentar as possibilidades de contagem, obtendo *feedbacks* de acordo com a possibilidade correta ou incorreta informada. Assim, “os recursos interativos empregados vão além da seleção links e botões para avançar ou recuar na apresentação dos conteúdos” conforme recomenda Reategui, Boff e Finco (2010, p. 06). Podemos observar, por exemplo, a tela de experimentação do problema 01 e um *feedback* realizado, conforme figuras 9 e 10 abaixo:

Figura 9 – Tela de experimentação do problema 01



Fonte: Dados do autor

Figura 10 – Feedback da experimentação referente ao problema 01



Fonte: Dados do autor

Em relação ao requisito (11), em cada situação problema apresentada pelo CombEsq, os estudantes terão acesso aos *feedbacks* realizados em tempo real, isto é, à medida que os alunos forem interagindo com os problemas, eles estarão se avaliando, pois os *feedbacks* bem como a solução dos problemas são apresentados à medida que o estudante erra ou acerta algum problema ou dica apresentada. Assim, os estudantes estarão a todo instante acompanhando o seu desempenho, o que atende ao requisito (11). Como os estudantes obtêm as dicas e respostas interagindo com o CombEsq, não é possível ter um relatório mostrando o desempenho de acertos e erros dos estudantes. Uma estratégia possível para atender aos requisitos (09) e (10) de forma digital, é disponibilizar uma versão do CombEsq para uma plataforma de Sistema de Gerenciamento de Conteúdo, como por exemplo o Moodle. Tal fato é possível, pois o CourseLab exporta os projetos também em Scorm que, resumidamente, permite que o OA seja independente de plataforma e que facilite a migração entre sistemas de gerenciamento de conteúdo. A partir desse sistema, seria possível um acompanhamento criterioso por parte do docente, obtendo dados como a quantidade de tentativas que o estudante utilizou para chegar na resposta do problema, o que é um possível indicativo de aprendizagem. Como neste trabalho estamos interessados numa versão em html e javascrit, que possa ser reutilizada com maior facilidade, uma estratégia não digital para atender aos requisitos (09) e (10), é o professor solicitar a elaboração de relatórios de acordo com as situações que os estudantes vivenciem na interação com os objetos conforme discutido por Junior e Lopes (2007).

Sobre a possibilidade de o professor atualizar o CombEsq com outros problemas ou outras funcionalidades – requisito (12) –, é possível, uma vez que o projeto que deu origem ao CombEsq será disponibilizado juntamente ao objeto de aprendizagem para que possa ser configurado conforme as necessidades de cada professor. É importante destacar, entretanto, que é necessário ter conhecimentos mínimos do sistema de autoria CourseLab para poder ser possível realizar as mudanças desejadas.

Alguns outros requisitos não citados por Leite (2007) são discutidos por outros autores. Por exemplo, Braga (2006) cita o requisito de que o objeto de aprendizagem deve ser compatível com diferentes plataformas computacionais. O CombEsq atende tal requisito, pois o sistema de autoria no qual foi feito o CombEsq pode exportar o objeto em html e javascript. Dessa forma, o CombEsq pode ser utilizado por qualquer navegador de internet, com preferência ao Internet Explorer e Mozilla Firefox, com a exigência de que o programa JAVA esteja instalado. Tal compatibilidade possibilita ao CombEsq ser utilizado em qualquer sistema operacional (Mac, Windows, Linux), bastando apenas ter disponível um navegador de Internet. Outro requisito importante é o citado por Silveira e Carneiro (2012), ao argumentar que o objeto

de aprendizagem deve explicitar claramente o objetivo pedagógico. O CombEsq atende a tal requisito, sendo disponibilizado na tela inicial a partir do botão “Sobre” conforme figura 3. Podemos observar, também, que o CombEsq emprega recursos gráficos que melhoram o aspecto estético da interface, tornando mais aprazível sua utilização (REATEGUI; BOFF; FINCO, 2010).

## 7.2 Análise Pedagógica do CombEsq

É consenso entre os pesquisadores que estudam os objetos de aprendizagem desenvolvidos nos últimos anos, que não é suficiente favorecer apenas o desenvolvimento de recursos multimídia inseridos no OA para que tal objeto auxilie de forma eficiente a aprendizagem dos alunos. É preciso pensar em uma estratégia pedagógica aliada ao conteúdo que está sendo trabalhado pelo OA (NASCIMENTO, 2007). De forma complementar, Nascimento (2007, p. 137) argumenta:

Autores e equipes de produção muitas vezes deixam-se influenciar mais pelo potencial lúdico que pelo potencial de aprendizagem de seus produtos, resultando em atividades que entretêm o aluno, mas com as quais ele não aprende. Outras vezes criam situações monótonas e que não aproveitam o potencial de programação do computador para obter níveis altos de interatividade, visualização e manipulação. Alguns objetos de aprendizagem mostram que não houve preocupação dos autores com o perfil do público-alvo, criando contextos inadequados e sem atrativos, o que nada contribui para prender a atenção do aluno nas atividades. (NASCIMENTO, 2007, p. 137).

Dessa forma, fundamentamos as representações interativas do CombEsq a partir da metodologia de resolução de problemas. Optamos por tal método pois “a resolução de problemas é peça central para o ensino de matemática, pois o pensar e o fazer se mobilizam e se desenvolvem quando o indivíduo está engajado ativamente no enfrentamento de desafios” (BRASIL, 2002, p. 112). Além disso,

Na resolução de problemas, o tratamento de situações complexas e diversificadas oferece ao aluno a oportunidade de pensar por si mesmo, construir estratégias de resolução e argumentações, relacionar diferentes conhecimentos e, enfim, perseverar na busca da solução. E, para isso, os desafios devem ser reais e fazer sentido. (BRASIL, 2002, p. 113).

É importante destacar que concordamos com Huete e Bravo (2006, p. 73) apud Silva e Pessoa (2015, p. 676) ao afirmar que o objetivo da metodologia de resolução de problemas “não



é a busca particularizada de uma solução específica, mas o ato de facilitar o conhecimento das habilidades básicas, os conceitos fundamentais e a relação entre ambos. É desenvolver naturalmente habilidades para resolver, mediante determinadas categorias, uma gama de problemas”. Nesse contexto, o CombEsq tem como princípio desenvolver nos estudantes habilidades básicas importantes para a aprendizagem dos conceitos de análise combinatória.

Para modelar tais objetivos que a resolução de problemas desenvolve nos alunos a partir do CombEsq, fizemos uso da metodologia de Polya (2006) discutida na obra “A Arte de Resolver Problemas”. Para Polya (2006), a solução de um problema baseia-se em quatro fases interdependentes, a saber: Compreensão do problema, Estabelecimento de um plano, Execução do Plano e o Retrospecto. O quadro abaixo aborda de forma concisa as quatro fases discutidas por Polya (2006).

Quadro 1 – As quatro fases da resolução de problemas proposta por Polya

Compreensão do problema		
Primeiro	É preciso compreender o problema	Nessa fase, o problema deve ser bem entendido a partir da identificação das partes principais do problema: a incógnita, os dados e a condicionante. Além disso, perceber as relações existentes entre os dados e a incógnita, utilizando uma figura, diagramas ou uma notação adequada.
Estabelecimento de um plano		
Segundo	Encontre a conexão entre os dados e a incógnita	Nessa fase, o sujeito interessado em solucionar o problema deve usar seus conhecimentos prévios – conceituais e de solução de outros problemas – para aproximar das ideias inerentes ao problema em questão. Não conseguindo, é importante rever o enunciado, os dados e a condicionante de modo a verificar se tudo está sendo utilizado ou pensar em um problema auxiliar. Ao final desse processo, o sujeito deve chegar a um plano para a resolução.
Execução do plano		
Terceiro	Execute o seu plano	Nessa fase há a execução do plano proposto tendo o cuidado de verificar cada passo realizado.
Retrospecto		
Quarto	Examine a solução obtida	Nessa fase ocorre a verificação de todos os passos realizados até chegar a solução do problema. A partir dessa verificação, é importante se questionar: É possível verificar o resultado? É possível verificar o argumento? É possível chegar ao resultado por um caminho diferente? É possível utilizar o resultado, ou o método, em algum outro problema?

Fonte: Polya (2006).

A partir das quatro fases apresentadas, discutimos abaixo as estratégias de aprendizagem inseridas no CombEsq. Dessa forma, em cada situação interativa possibilitada pelo CombEsq a partir da esquematização dos problemas, vincularemos a alguma das fases de Polya. Tal fato torna-se importante para que motive e incentive estudantes na sua capacidade de solucionar problemas de análise combinatória compreendendo, assim, os conceitos envolvidos.

### 7.2.1 Estratégias interativas do CombEsq que favorecem a compreensão do problema segundo as ideias de Polya

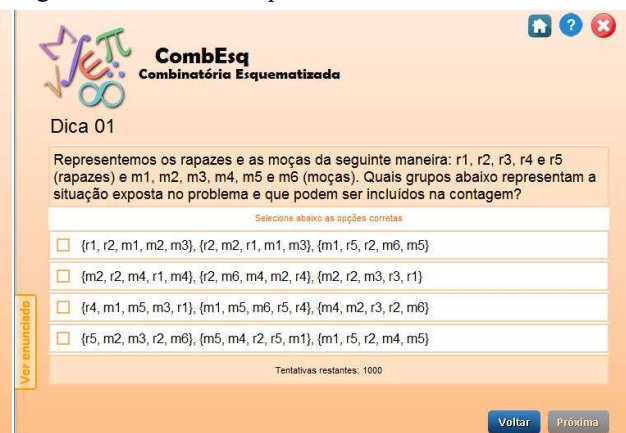
As figuras 11 e 12 abaixo representam, respectivamente, a tela inicial do problema 05 e a tela referente à dica 01 do problema 05. As figuras 13 e 14 abaixo representam a tela referente à dica 02 do problema 05.

Figura 11 – Tela inicial do problema 05



Fonte: Dados do autor

Figura 12 – Dica 01 do problema 05



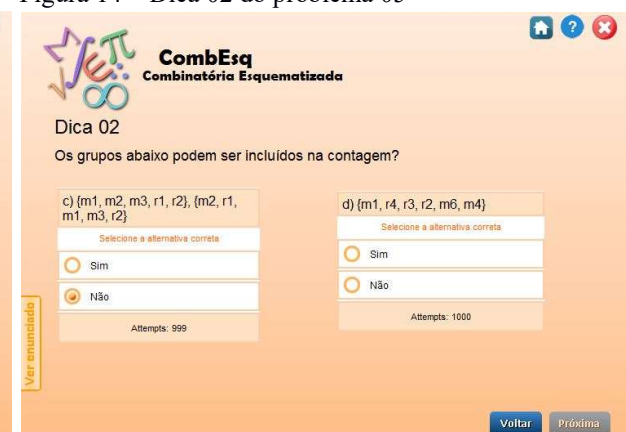
Fonte: Dados do autor

Figura 13 – Dica 02 do problema 05



Fonte: Dados do autor

Figura 14 – Dica 02 do problema 05



Fonte: Dados do autor

Podemos observar, a partir da figura 11, que o usuário tem acesso ao enunciado do problema 05 no CombEsq. Após a tentativa de resposta bem sucedida ou não, o estudante terá acesso às dicas para auxiliar na solução do problema. Observe que as dicas 01 e 02, apresentadas nas figuras 12, 13 e 14, realizam questionamentos que suscitam no estudante a identificação de alguns elementos do enunciado essenciais para o entendimento do problema e, por

consequência, elementos importantes para a solução do problema. Na dica 01 (figura 12), por exemplo, o CombEsq supõe um modo de apresentação dos sujeitos do problema (rapazes e moças) e questiona quais situações expostas são representações compatíveis com o enunciado. Assim, o estudante, ao se deparar com tal questionamento, poderá refletir de forma criteriosa, pois, a partir de releituras do problema, da resposta dada ao questionamento na dica 01 e dos *feedbacks* realizados pelo CombEsq, uma nova postura do estudante é esperada. Da mesma forma na dica 02 (figuras 13 e 14), são apresentadas situações isoladas inerentes ao enunciado do problema e questiona aos estudantes sobre a possibilidade de tais representações poderem ou não serem incluídas na contagem. Observe mais uma vez a insistência do CombEsq suscitar no estudante a devida identificação dos elementos do enunciado de modo que haja uma compreensão satisfatória do problema. Fica claro, portanto, que ambas estratégias interativas presentes no CombEsq favorecem a compreensão do problema abordada por Polya, pois insere o estudante em questionamentos relacionados de forma intrínseca aos elementos e ideias necessários para compreensão do problema através de modos de representação sugeridos nos próprios questionamentos.

Caracterizando de forma detalhada as ideias de Polya a respeito da fase compreensão, observe que a partir da dica 01 (figura 12), o estudante terá entendimento que o grupo formado é de 5 pessoas sendo 3 moças e 2 rapazes e que a mudança de ordem das pessoas no grupo não gera um novo grupo. Dessa forma, podemos considerar os rapazes e as moças como dados do problema e o fato da mudança da ordem não influenciar na contagem bem como a necessidade do grupo ter 3 moças e 2 rapazes serem condicionantes do problema. A dica 02 (figuras 13 e 14) reforça a dica 01 tratando cada condicionante de forma isolada, isto é, a necessidade do grupo possuir 3 moças e 2 rapazes e o fato da mudança de ordem das pessoas não influenciar na contagem dos grupos.

Ainda sobre a fase de compreensão do problema, o CombEsq disponibiliza a opção de experimentar as possibilidades de contagem de acordo com o problema. Tal opção pode ser acionada a partir do momento em que o estudante erra ou acerta a resposta na tela inicial do problema. Em todos os problemas, a tela de experimentação segue as características da experimentação do problema 01 observada nas figuras 9 e 10 anteriormente. Como o estudante vai poder ler o problema, testar várias possibilidades de contagem que ele ache viável e obter *feedbacks* instantâneos a respeito de cada possibilidade, espera-se que ele reflita, releia o problema quantas vezes ache necessário e utilize seus conhecimentos prévios para compreender melhor o problema e quem sabe formular um plano de resolução. Dessa forma, podemos afirmar

que esse recurso interativo contribui de forma significativa para compreensão do problema segundo as ideias de Polya.

## 7.2.2 Estratégias interativas do CombEsq que favorecem a formulação do plano, a execução do plano e o retrospecto segundo as ideias de Polya

As figuras 15 e 16 abaixo representam a tela referente à dica 03 do problema 05. As figuras 17 e 18 abaixo representam, respectivamente, a tela referente à dica 04 do problema 05 e a tela referente à uma solução do problema 05.

Figura 15 – Dica 03 do problema 05

**CombEsq**  
Combinatória Esquematzada

**Dica 03**  
A partir das assertivas abaixo, quais poderiam auxiliar na solução do problema?

Como queremos formar grupos com 5 pessoas distintas escolhidas dentre 11 pessoas, então basta utilizarmos arranjo simples de 11 elementos tomados 5 a 5.

Como os grupos estão definidos (2 homens e 3 mulheres), uma boa estratégia de contagem seria contar separadamente ambas situações.

Selecione a alternativa correta

Sim

Não

Atempts: 998

Selecione a alternativa correta

Sim

Não

Atempts: 1000

Voltar Próxima

Fonte: Dados do autor

Figura 16 – Dica 03 do problema 05

**CombEsq**  
Combinatória Esquematzada

**Dica 03**  
A partir das assertivas abaixo, quais poderiam auxiliar na solução do problema?

Como estamos interessados em grupos de 5 pessoas e cada grupo é único (a ordem das pessoas não caracteriza um novo grupo), podemos usar combinação simples de 11 elementos tomados 5 a 5.

Inicialmente, contamos as formas de escolher as 3 mulheres e as formas de escolher os 2 homens. Em seguida, podemos aplicar o princípio fundamental da contagem.

Selecione a alternativa correta

Sim

Não

Atempts: 998

Selecione a alternativa correta

Sim

Não

Atempts: 1000

Voltar Próxima

Fonte: Dados do autor

Figura 17 – Dica 04 do problema 05

**CombEsq**  
Combinatória Esquematzada

**Dica 04**  
Observando o enunciado do problema e as dicas apresentadas, podemos afirmar que o problema 05 é caracterizado como conceito de:

Selecione abaixo as opções corretas

Princípio Fundamental da Contagem

Arranjo

Combinação

Tentativas restantes: 1000

Voltar Ver solução

Fonte: Dados do autor

Figura 18 – Uma solução do problema 05

**CombEsq**  
Combinatória Esquematzada

**Uma solução**

Conforme observamos nas dicas, devemos formar grupos que tenham 5 pessoas de modo que 3 sejam mulheres e 2 sejam homens. Note que a ordem das pessoas no grupo não caracteriza um novo grupo, portanto, temos um problema caracterizado pelo conceito de combinação. Dessa forma, uma boa estratégia de solução é contarmos as possibilidades de escolhermos as 3 mulheres entre as 6 disponíveis e as possibilidades de escolhermos 2 homens entre 5 disponíveis. Assim, teremos:

Escolha das 3 mulheres:  $C_{6,3} = \frac{6!}{3! \times (6-3)!} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3!}{3! \times 3!} = 5 \times 4 = 20$

Escolha dos 2 homens:  $C_{5,2} = \frac{5!}{2! \times (5-2)!} = \frac{5 \times 4 \times 3!}{2! \times 3!} = 5 \times 2 = 10$

Voltar Próxima

Fonte: Dados do autor

Por meio da dica 03 (figuras 15 e 16), o CombEsq questiona ao estudante quais assertivas apresentadas podem auxiliar na solução do problema. Tais assertivas são possíveis raciocínios corretos ou não que tentam chegar à uma ou mais soluções do problema. Assim, a

partir do momento em que o estudante interagir com tais questionamentos, irá refletir em conformidade com o enunciado do problema e as dicas anteriores, se os raciocínios apresentados são válidos e, a partir dos *feedbacks* realizados para cada apresentação, incorporar os raciocínios apresentados bem como os *feedbacks* para chegar a uma estratégia que resolva o problema de forma consistente e fundamentada. Observe que tais dicas sugerem ao estudante a criação de um plano para a solução bem como elimina possíveis raciocínios que não levariam a soluções corretas, apesar de aparentemente serem raciocínios válidos. Dessa forma, a formulação de um plano, conforme ideias de Polya, torna-se possível, pois o estudante ao se deparar com as assertivas refletirá – utilizará seu conhecimento prévio, as dicas anteriores, isto é, os elementos e condicionantes internalizados e ratificados pelos *feedbacks*, poderá realizar novas leituras do enunciado, pensar em outros elementos faltantes ou condicionantes – e irá amadurecer a ideia de um plano de solução a ser testado.

As fases da execução do plano e o retrospecto também podem ser desenvolvidas a partir das dicas 03 e 04 (figuras 15, 16 e 17). A qualquer momento, as dicas percorridas pelo estudante podem ser revistas e estudadas a partir dos *feedbacks* realizados em cada ação interativa. Dessa forma, a execução do plano pode ser criteriosamente analisada a partir das dicas apresentadas. Mesmo o estudante que não tenha compreendido de forma satisfatória o problema a partir das dicas apresentadas, poderá ao final ter acesso à solução do problema (figura 18). Dessa forma, o retrospecto pode ser realizado podendo comparar sua estratégia definida de solução com a solução apresentada pelo CombEsq. Além disso, em algumas das assertivas apresentadas na dica 03 (figuras 15 e 16) pode estar explícita uma estratégia de solução alternativa, o que contribui para as ideias relacionadas ao retrospecto segundo Polya. É importante destacar a contribuição da dica 04 (figura 17), uma vez que questiona ao estudante o conceito matemático que caracteriza o problema. Dessa forma, reforça as ideias permeadas nas dicas anteriores e ratifica a compreensão do problema por parte do estudante.

É importante ressaltar que os demais problemas possuem as mesmas ações interativas, diferenciando-se, claro, pelos modos de representação e assertivas que são realizados de acordo com o enunciado do problema. Dessa forma, as discussões realizadas sobre a metodologia de resolução de problema de Polya também são válidas para os demais problemas.

### **7.3 Apresentação das Funcionalidades do CombEsq**

Como abordado anteriormente, o CombEsq é um objeto de aprendizagem desenvolvido para auxiliar estudantes e professores no ensino e aprendizagem de alguns conceitos de análise

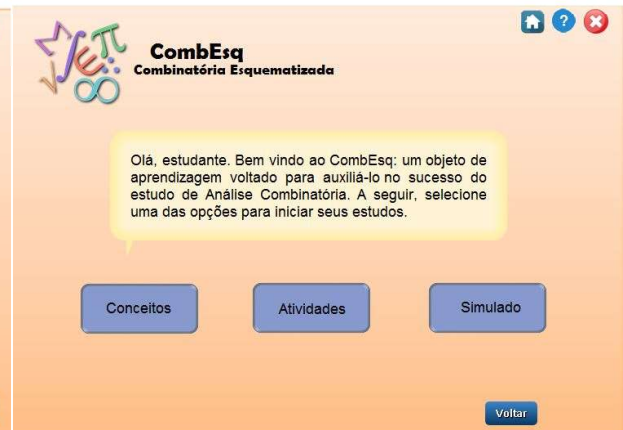
combinatória aplicados na Educação Básica. Discutimos nesta seção as funcionalidades do CombEsq, isto é, apresentamos de forma detalhada os recursos de aprendizagem que o objeto de aprendizagem disponibiliza. Inicialmente, apresentamos novamente as telas iniciais do CombEsq (figuras 3 e 4 apresentadas na seção 7.1.1):

Figura 3 – Tela inicial do CombEsq



Fonte: Dados do autor

Figura 4 – Tela das principais funcionalidades do CombEsq após acionar o botão “Iniciar” da figura 3



Fonte: Dados do autor

Quando o CombEsq é iniciado, é aberta a tela inicial conforme figura 3. Nela, é possível obter informações sobre o CombEsq – objetivo, orientações, autoria, forma de contato – a partir do botão “Sobre” e pode ser iniciado disponibilizando as funcionalidades a partir do botão “Iniciar”. Observe que o botão em forma de interrogação (localizado na parte superior à direita da tela), presente em todas as telas do CombEsq, tem a função de ajudar o usuário a executar ações na tela em que esteja ativa. Por exemplo, o estudante ao acionar o botão interrogação na tela inicial (figura 3), terá as informações: acesse o botão "Sobre" caso queira conhecer um pouco mais sobre o CombEsq ou acesse o botão "Iniciar" para iniciar o uso do CombEsq.

Iniciado o CombEsq, temos as funcionalidades disponíveis conforme a figura 4, a saber: “Conceitos”, “Atividades” e “Simulado”. Assim, o estudante pode personalizar sua forma de estudo, seja iniciando os estudos de análise combinatória fazendo a leitura dos conceitos e vendo alguns exemplos; pode ir diretamente para as atividades, onde poderá ter acesso a problemas esquematizados, isto é, ter acesso a várias dicas que podem subsidiar a compreensão do problema, dos conceitos e da solução do problema; e ir para um simulado, onde as questões são apresentadas em forma de teste e informando ao final um percentual de acertos. A partir do acesso ao botão conceitos, teremos:

Figura 19 – Conceitos



Fonte: Dados do autor

Figura 20 – Conceito Princípio Fundamental da Contagem



Fonte: Dados do autor

Observe que na figura 19, o estudante pode selecionar o conceito que deseja estudar, a saber: Princípio Fundamental da Contagem, Arranjo ou Combinação. Quando o tema é longo e possui vários subconceitos, o CombEsq disponibiliza a opção para selecionar cada subconceito separadamente, como é o caso do conceito Arranjo que é subdividido em Arranjo simples, Arranjo com repetição, Permutação simples e Permutação com repetição. Após selecionar um dos conceitos, o CombEsq apresenta a definição do conceito e exemplos conforme podemos observar na figura 20 que representa o conceito de Princípio Fundamental da Contagem.

A próxima funcionalidade disponível são as “Atividades”, conforme podemos observar na figura 4. Tal funcionalidade é a principal do CombEsq pois é nela que o estudante poderá ter acesso a um conjunto de problemas esquematizados com a metodologia discutida na seção 7.2. Ao selecionarmos a opção “Atividades”, teremos a possibilidade de escolher o nível de dificuldade dos problemas, conforme figura 5 (já apresentada na seção 7.1.2) abaixo:

Figura 5 – Nível de dificuldade



Fonte: Dados do autor

A partir da figura 5, o estudante poderá selecionar o nível de dificuldade dos problemas que ele deseja estudar. Mais uma vez o CombEsq dá a oportunidade para o estudante personalizar seu estudo de modo que tenha autonomia perante ao objeto de aprendizagem. Selecionando o nível de dificuldade, que também pode ser escolhida a forma aleatória, o usuário poderá trabalhar com todos os problemas de forma aleatória ou selecionar algum problema em específico, conforme podemos observar na figura 21 abaixo.

Figura 21 – Selecionar o problema



Fonte: Dados do autor

É importante destacar que tal interação é permitida para qualquer nível de dificuldade. Em seguida, após selecionar o problema, o CombEsq apresenta o seu enunciado conforme figura 11 (já apresentada na seção 7.2.1).

Figura 11 – Tela inicial do problema 05



Fonte: Dados do autor

Nesse momento, o CombEsq comporta-se da seguinte maneira: conforme a interação do estudante com os questionamentos realizados pelo CombEsq, vários botões são apresentados de acordo com a resposta dada, como por exemplo: Ver dicas, Fixar ideias, Experimentar,



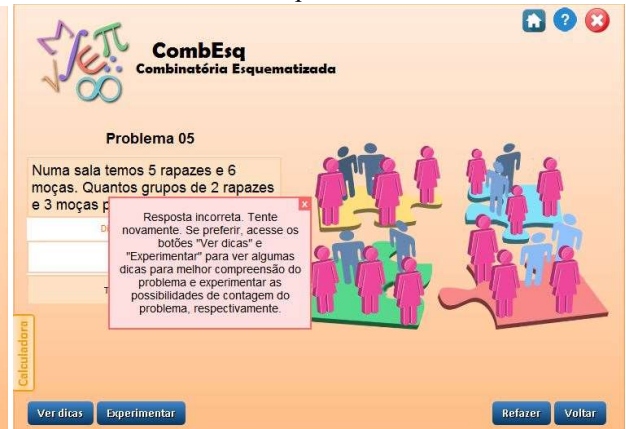
Revisar conceitos, Ver solução, Ver comentário, Ver conceitos, etc. Além disso, à medida que ocorre uma resposta correta, há um *feedback* destacado em verde e, à medida que há uma resposta incorreta, há um *feedback* em vermelho. Vejamos em detalhes a partir das figuras abaixo relativas ao problema 05 do CombEq:

Figura 22 – Feedback após resposta correta e botões referentes à tela inicial do problema 05



Fonte: Dados do autor

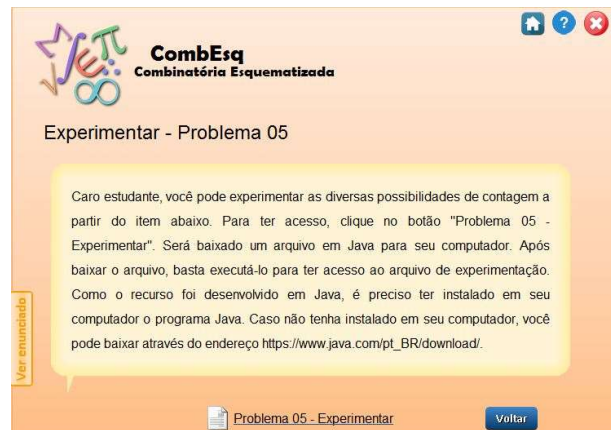
Figura 23 – Feedback após resposta incorreta e botões referentes à tela inicial do problema 05



Fonte: Dados do autor

Nas figuras 22 e 23, temos os *feedbacks* e os botões que são apresentados de acordo com as respostas dos estudantes. Observe, por exemplo, que na figura 22 a resposta informada pelo estudante foi correta e o CombEq apresentou o *feedback* “Parabéns, resposta correta. Se preferir, acesse os botões “Experimentar”, “Fixar ideias”, “Revisar conceitos” e “Ver solução” para melhor compreensão do problema”. Note que os botões são apresentados na parte inferior da tela. Da mesma forma, temos na figura 23 o *feedback* para a resposta informada incorreta pelo estudante e os botões “Ver dicas” e “Experimentar” na parte inferior da tela. Observe que os botões apresentados são diferentes conforme a resposta do estudante. Os botões “Revisar conceitos” e “Ver solução” da figura 22 levam, respectivamente, para a tela de conceitos já apresentada anteriormente na figura 19 e para a solução do problema. O botão “Fixar ideias” da figura 22 e o botão “Ver dicas” da figura 23 levam às mesmas telas. Decidimos realizar tal configuração, pois nem sempre o estudante que acerta a resposta de um problema, compreendeu de forma plena os detalhes e raciocínios inerentes ao problema, além de dar autonomia ao estudante perante ao objeto de aprendizagem. Suponhamos, hipoteticamente, que o estudante tenha acertado ou errado o problema e tenha acionado o botão “Experimentar” conforme figuras 22 e 23. Assim, teremos a seguinte tela conforme figura 24 abaixo:

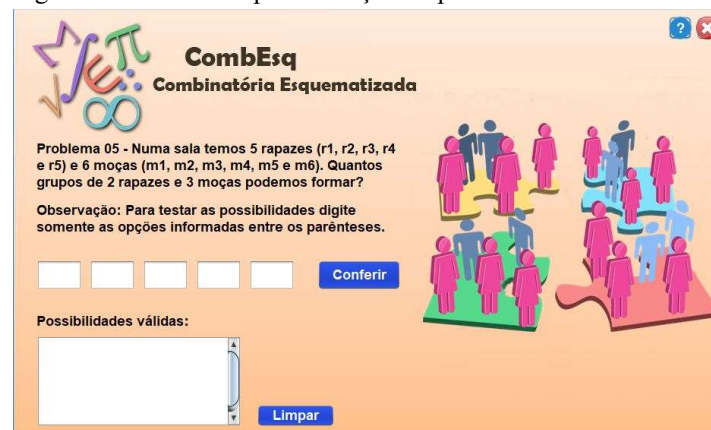
Figura 24 – Tela experimentar referente ao problema 05



Fonte: Dados do autor

Nela, é orientado ao estudante que, para experimentar as possibilidades de contagem em relação ao problema, é necessário baixar um arquivo em Java<sup>1</sup>. Para isso, também orienta que é necessário ter o programa Java instalado no computador para que a ferramenta baixada funcione. Para baixar o arquivo, basta que o estudante acione o botão “Problema 05 – Experimentar” localizado na parte inferior da tela conforme figura 24. Realizando o download do arquivo e o executando, teremos acesso à tela de experimentação conforme figuras 25 e 26 abaixo:

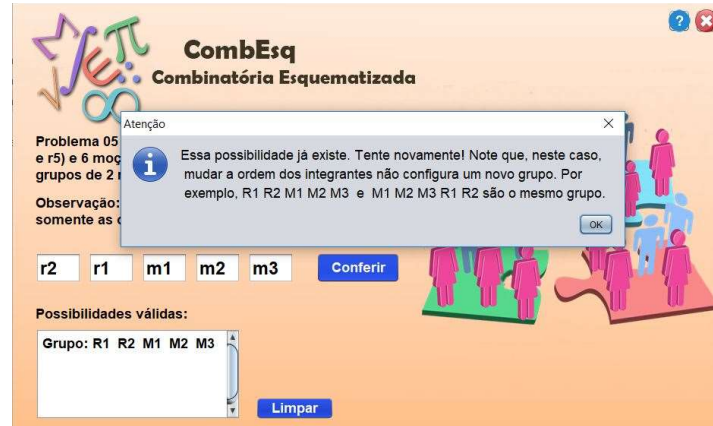
Figura 25 – Tela de experimentação do problema 05



Fonte: Dados do autor

<sup>1</sup> O recurso de experimentação em JAVA foi desenvolvido pela estudante Jéssica Adriane dos Santos Lira do curso de Ciência da Computação da Universidade Federal de Alagoas (UFAL), Campus de Arapiraca, monitora da disciplina engenharia de software.

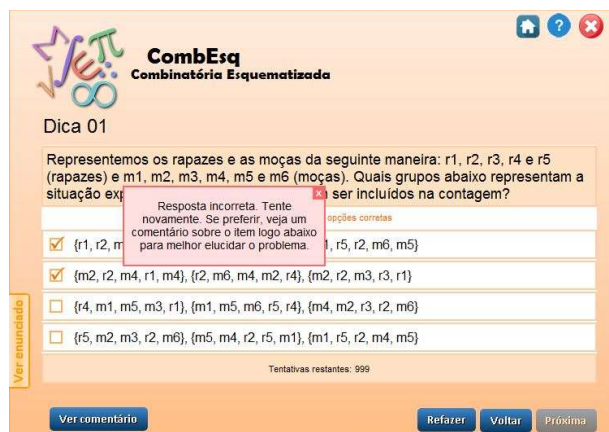
Figura 26 – Feedback da experimentação referente ao problema 05



Fonte: Dados do autor

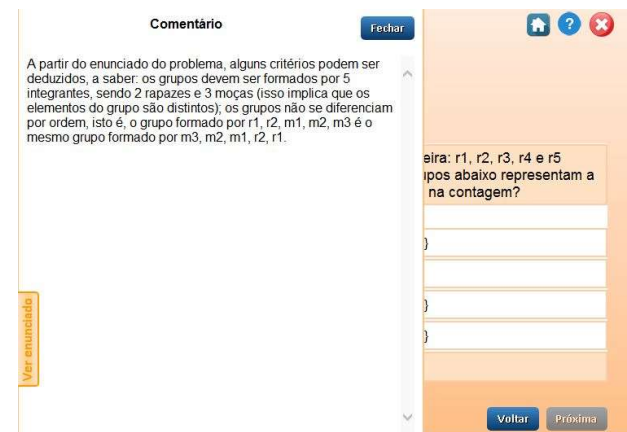
A partir da tela de experimentação (figura 25), será possível que o estudante teste as diversas possibilidades de contagem relacionadas ao problema e, à medida que for realizando os testes, o sistema realize *feedbacks* (figura 26) que direcionem o estudante para uma melhor compreensão do problema. A partir das interações realizadas, o estudante poderá voltar ao problema para respondê-lo ou ir para as dicas a partir dos botões “Fixar ideias” ou “Ver dicas”. Suponhamos, agora, que o estudante tenha acertado ou errado o problema e tenha acionado os botões “Fixar ideias” ou “Ver dicas”. Para melhor compreensão da discussão apresentada a seguir, torna-se importante descrevermos o enunciado do problema 05: “Numa sala temos 5 rapazes e 6 moças. Quantos grupos de 2 rapazes e 3 moças podemos formar? ”. Vejamos algumas telas referentes às dicas que são apresentadas:

Figura 27 – Feedback da dica 01 referente ao problema 05



Fonte: Dados do autor

Figura 28 – Comentário referente à dica 01 do problema 05



Fonte: Dados do autor

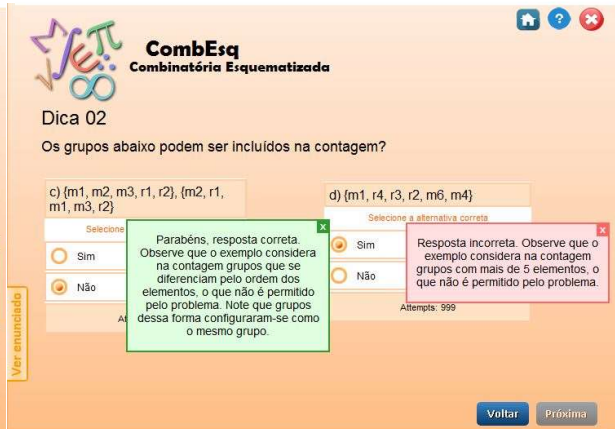
Após o estudante acionar os botões “Fixar ideias” ou “Ver dicas”, é apresentada a dica 01 que questiona aos estudantes “[...] quais grupos representam a situação exposta pelo enunciado e podem ser incluídos na contagem?”. Após o usuário marcar as opções e pressionar o botão “Conferir”, o CombEsq apresenta um *feedback* e o botão “Ver comentário” conforme figura 27. Podemos observar que o *feedback* orienta o estudante a tentar novamente e a realizar a leitura de um comentário sobre o problema acionando o botão “Ver comentário”. Após acionar o botão “Ver comentário”, é apresentada uma página conforme figura 28. No caso do problema em tela, o CombEsq faz o seguinte comentário: “A partir do enunciado do problema, alguns critérios podem ser deduzidos, a saber: os grupos devem ser formados por 5 integrantes, sendo 2 rapazes e 3 moças (isso implica que os elementos do grupo são distintos); os grupos não se diferenciam por ordem, isto é, o grupo formado por  $r_1, r_2, m_1, m_2, m_3$  é o mesmo grupo formado por  $m_3, m_2, m_1, r_2, r_1$ ”. A partir desse momento, o estudante pode voltar à tela inicial do problema e tentar respondê-lo novamente bem como ir para a próxima página e ter acesso a outras dicas. Seguindo para a próxima dica, teremos as seguintes situações apresentadas nas figuras 29 e 30 abaixo:

Figura 29 – Feedbacks da dica 02 referente ao problema 05



Fonte: Dados do autor

Figura 30 – Feedbacks da dica 02 referente ao problema 05

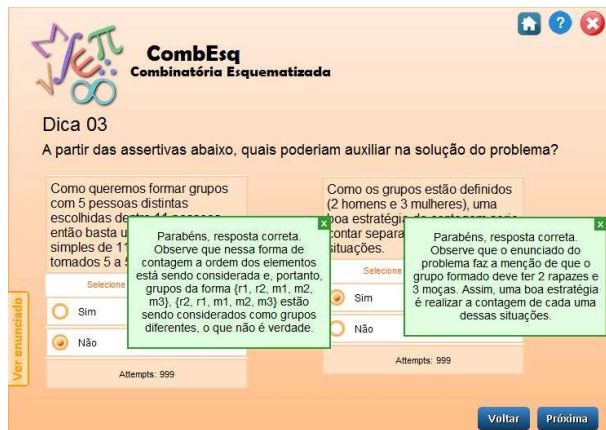


Fonte: Dados do autor

Conforme dica 02 (figuras 29 e 30), é questionado ao estudante: “Os grupos abaixo podem ser incluídos na contagem?”. Observe que a dica 02 individualiza a dica 01 de modo a reforçar as ideias básicas inerentes ao problema. Note também que os *feedbacks* são individualizados para cada situação apresentada nos itens a), b), c) e d). Por exemplo, vejamos o *feedback* realizado para o item c) que apresenta os grupos  $\{m_1, m_2, m_3, r_1, r_2\}$ ,  $\{m_2, r_1, m_1, m_3, r_2\}$  como candidatos na contagem e a resposta dada foi “Não” conforme figura 30. O *feedback* apresentado foi: “Parabéns, resposta correta. Observe que o exemplo considera na

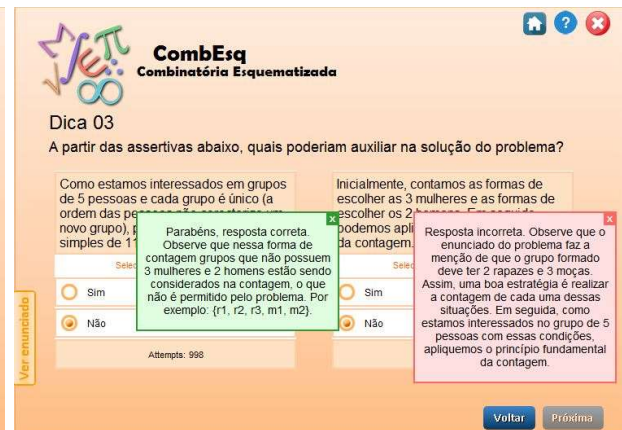
contagem grupos que se diferenciam pela ordem dos elementos, o que não é permitido pelo problema. Note que grupos dessa forma configuram-se como o mesmo grupo”. Dessa forma, o *feedback* é realizado de forma individualizada e contribui para elucidar dúvidas ou raciocínios equivocados dos estudantes. Mais uma vez o estudante pode retornar para a tela inicial do problema e tentar respondê-lo ou ir para a próxima dica. Seguindo para a próxima dica, teremos as seguintes situações apresentadas nas figuras 31 e 32 abaixo:

Figura 31 – Feedbacks da dica 03 referente ao problema 05



Fonte: Dados do autor

Figura 32 – Feedbacks da dica 03 referente ao problema 05

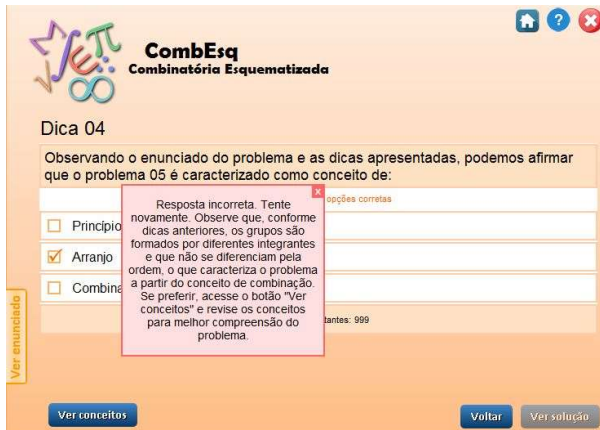


Fonte: Dados do autor

Conforme a dica 03 (figuras 31 e 32), é questionado ao estudante quais das assertivas podem auxiliar na solução do problema. Assim, para cada assertiva apresentada, o estudante deve responder sim ou não de modo que o aluno acertando ou errando ocorre um *feedback* alertando sobre o erro e o motivo daquele raciocínio não levar a uma solução do problema. Tomemos, por exemplo, a assertiva a seguir apresentada na figura 31 e respondida como “Não” pelo estudante: “Como queremos formar grupos com 5 pessoas distintas escolhidas dentre 11 pessoas, então basta utilizarmos arranjo simples de 11 elementos tomados 5 a 5”. O *feedback* apresentado pelo CombEsq foi: “Parabéns, resposta correta. Observe que nessa forma de contagem a ordem dos elementos está sendo considerada e, portanto, grupos da forma  $\{r_1, r_2, m_1, m_2, m_3\}$ ,  $\{r_2, r_1, m_1, m_2, m_3\}$  estão sendo considerados como grupos diferentes, o que não é verdade”. Note que o *feedback* realizado apenas demonstra que aquele raciocínio tomado pelo estudante não pode levar à solução do problema ao passo que suscita no estudante novas estratégias considerando as dicas anteriores e aquele *feedback* apresentado. As demais assertivas seguem as mesmas estratégias abordando outros possíveis raciocínios de modo que, a cada assertiva apresentada, aproxime cada vez mais o estudante da solução do problema. Mais uma vez o estudante pode retornar para a tela inicial do problema e tentar respondê-lo ou ir para

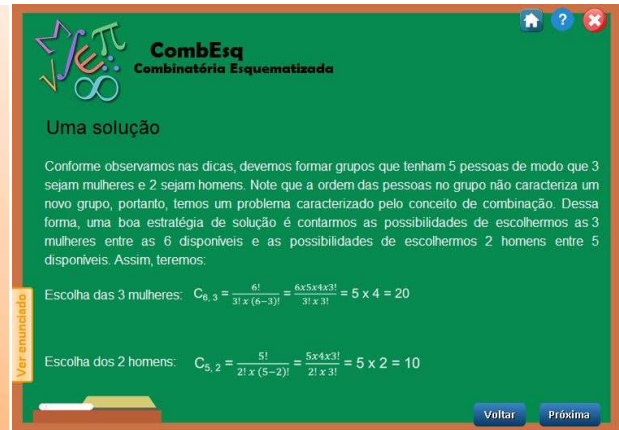
a próxima dica. Seguindo para a próxima dica, teremos as seguintes situações apresentadas nas figuras 33 e 18 (já mencionada na seção 7.2.2) abaixo:

Figura 33 – Feedback da dica 04 referente ao problema 05



Fonte: Dados do autor

Figura 18 – Uma solução do problema 05



Fonte: Dados do autor

Conforme a dica 04 (figura 33), o estudante será questionado sobre o conceito de análise combinatória que caracteriza o problema. Observe que não é questionado através de qual assunto o problema pode ser resolvido, pois nesse caso ficaria difícil elencar as diversas possibilidades de resolver o problema, mas sim a ideia que caracteriza o problema. Por exemplo, no problema em tela, é solicitado ao estudante o número de grupos formados respeitando algumas condições. Nesse caso, a ideia subjacente é que os grupos não se diferenciam pela ordem dos seus integrantes, o que implica na definição do conceito de combinação. Esse questionamento é realizado para reforçar no estudante a sua capacidade de compreender o problema e identificar o conceito subjacente a ele. Escolhendo o conceito, o CombEsq apresenta um *feedback* conforme observamos na figura 33, a saber: “Resposta incorreta. Tente novamente. Observe que, conforme dicas anteriores, os grupos são formados por diferentes integrantes e que não se diferenciam pela ordem, o que caracteriza o problema a partir do conceito de combinação. Se preferir, acesse o botão “Ver conceitos” e revise os conceitos para melhor compreensão do problema.”. Nesse momento, o botão “Ver conceitos” é apresentado na parte inferior da tela do CombEsq conforme podemos observar na figura 33. Ao selecionar o botão “Ver conceitos”, o estudante é direcionado para a tela de conceitos já apresentada anteriormente conforme a figura 19. Mais uma vez o estudante pode retornar para a tela inicial do enunciado do problema e tentar respondê-lo novamente ou ir para a solução do problema conforme figura 18. Com a visualização da solução do problema, o estudante pode relacionar as estratégias de solução com as apresentadas durante as dicas de modo a compreender o problema de forma fundamentada e satisfatória.

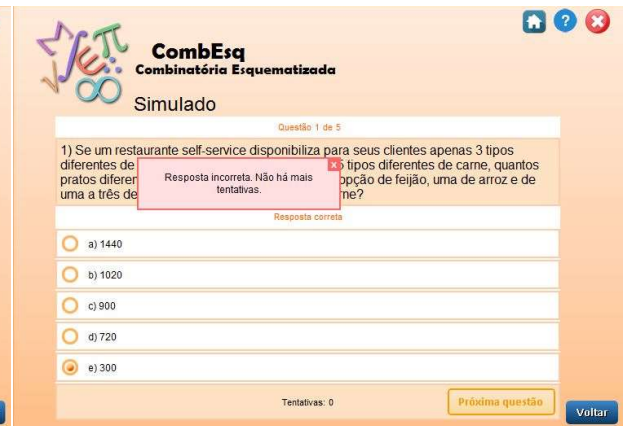
Observe que tais ações interativas são semelhantes em cada problema, mudando, claro, as formas de representação e raciocínios conforme as características do problema. Concluindo o estudo de um problema, o estudante pode ir para outros problemas ou ir para outras funcionalidades do CombEsq. Vejamos, abaixo, a próxima funcionalidade do CombEsq que é o simulado conforme figuras 34, 35 e 36:

Figura 34 – Tela inicial do Simulado



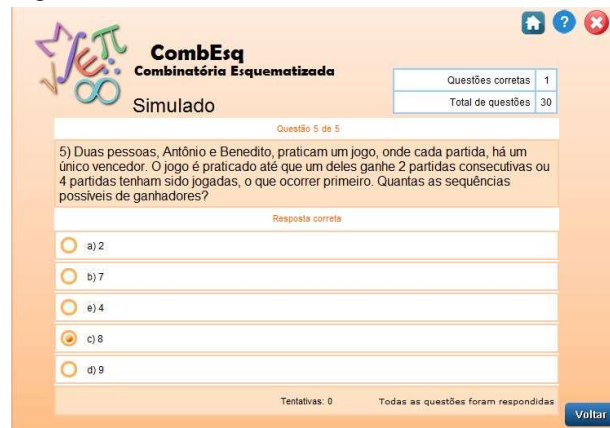
Fonte: Dados do autor

Figura 35 – Feedback do Simulado



Fonte: Dados do autor

Figura 36 – Conclusão do Simulado e número de acertos



Fonte: Dados do autor

Após selecionar a opção Simulado na tela de funcionalidades do CombEsq (figura 4), será apresentada ao estudante a tela inicial do simulado conforme figura 34. Nela, o estudante pode iniciar a resolução dos problemas e marcar uma das opções de resposta. É permitido ao estudante pular a questão para depois respondê-la ao final dos demais problemas. Ao marcar uma das opções e confirmar a resposta, o CombEsq informa se a questão foi correta ou não e, caso a resposta esteja errada, informa na tela a opção correta conforme podemos verificar na figura 35. Como o simulado tem caráter de teste, não é permitida mais de uma tentativa de

resposta, de modo que o estudante, após confirmar a resposta, deve ir para a próxima questão. Respondendo todas as questões, o CombEsq apresenta uma tabela com o número de questões corretas em relação ao total de questões ao final do simulado conforme figura 36. Dessa forma, o estudante pode testar seus conhecimentos sem ter dicas, diferentemente do que abordamos na funcionalidade “Atividades”. Tal ação interativa é importante, pois na vida real o estudante irá precisar lidar com a insegurança de tomar decisões corretas no que se refere à solução de problemas matemáticos.

## **7.4 Análise dos Dados**

### **7.4.1 Perfil dos sujeitos da pesquisa**

Após algumas visitas em escolas do município de Arapiraca-AL realizadas no período de 18/02/2019 a 02/03/2019, foram selecionados 7 professores, que os identificamos como Professor A, Professor B, Professor C, Professor D, Professor E e Professor F. Descrevemos abaixo o perfil de cada docente que fez parte do nosso estudo.

#### **7.4.1.1 Professor A**

O Professor A possui 36 anos de idade. Possui graduação em Licenciatura Matemática, especialização em Educação Matemática e é mestre em Matemática. Possui experiência de ensino de dez anos de ensino no nível fundamental com vínculo municipal e cinco anos no nível médio com vínculo estadual. Em relação à prática de ensino de análise combinatória, possui experiência de cinco anos no ensino médio como também já fez uso de tecnologia em suas aulas.

#### **7.4.1.2 Professor B**

O Professor B possui 29 anos. Possui graduação em Licenciatura em Matemática e especialização em Educação Matemática. É graduando em Licenciatura em Física e mestrando em Matemática. Possui experiência de ensino de quatro anos no nível fundamental com vínculo municipal, sete anos no nível médio com vínculo estadual e seis meses no nível fundamental com vínculo particular. Em relação à prática de ensino de análise combinatória, possui experiência de dois anos no ensino fundamental (nono ano) e médio como também já fez uso de tecnologias em suas aulas.



#### **7.4.1.3 Professor C**

O professor C possui 33 anos. Possui graduação em Licenciatura em Matemática, especialização em Metodologia do Ensino de Física e Matemática, especialização em Mídias na Educação e mestrado em Educação Matemática e Tecnológica. Possui experiência de ensino de oito anos no nível fundamental com vínculo municipal, quatro anos no nível médio com vínculo estadual, além de possuir um ano e meio na Educação de Jovens e Adultos (EJA), quatro anos de experiência no ensino superior e dois anos em pós-graduação. Em relação à prática de ensino de análise combinatória, possui experiência de um ano no ensino médio como também já fez uso de tecnologia em suas aulas.

#### **7.4.1.4 Professor D**

O Professor D possui 30 anos. Possui graduação em Licenciatura em Matemática, especialização em Educação Matemática e mestrado em Matemática. Possui experiência de ensino de seis meses no nível fundamental com vínculo municipal, três anos no nível médio com vínculo estadual e um ano e meio no Ensino Básico, Técnico e Tecnológico com vínculo federal. Em relação à prática de ensino de análise combinatória, possui experiência de um ano no ensino médio integrado como também já fez uso de tecnologia em suas aulas.

#### **7.4.1.5 Professor E**

O Professor E possui 45 anos. Possui graduação em Licenciatura em Matemática, Licenciatura em Física e especialização em Gestão Escolar. Possui experiência de ensino de vinte e três anos no nível fundamental com vínculo municipal, vinte anos no nível médio com vínculo estadual, além de possuir vinte e três anos com o ensino de física com vínculo particular. Em relação à prática de ensino de análise combinatória, possui experiência de oito anos no nível médio como também já fez uso de tecnologia em suas aulas.

#### **7.4.1.6 Professor F**

O Professor F possui 39 anos. Possui graduação em Licenciatura em Matemática, especialização Educação Matemática, especialização em Psicopedagogia e especialização em

Gestão Educacional. Possui experiência de ensino de dois anos no nível fundamental com vínculo municipal, 10 anos no nível médio com vínculo estadual, além de possuir dezoito anos na educação infantil com vínculo particular. Em relação à prática de ensino de análise combinatória, possui experiência de um ano no nível médio como também já fez uso de tecnologia em suas aulas.

#### 7.4.1.7 Professor G

O Professor G possui 30 anos. Possui graduação em Licenciatura em Matemática, Licenciatura em Química, especialização em Educação Matemática e é mestrando em Matemática. Possui experiência de ensino de cinco anos no nível médio com vínculo estadual e oito anos no nível médio com vínculo particular. Em relação à prática de ensino de análise combinatória, possui experiência de cinco anos no nível médio como também já fez uso de tecnologia em suas aulas.

A partir dos perfis listados acima, podemos afirmar que o grupo selecionado contempla de forma satisfatória os objetivos da pesquisa tendo em vista a heterogeneidade dos sujeitos, abrangendo docentes com diferenças de experiência de ensino seja em relação ao tempo, ao vínculo de trabalho bem como em relação à formação profissional.

A seguir, apresentamos, por categoria, a quantidade e os percentuais de respostas dadas nos formulários, seguidos de algumas análises tomando por base as entrevistas.

#### 7.4.2 Conteúdo matemático

Podemos observar abaixo o quadro 2 com a quantidade de respostas e percentuais de cada professor em relação aos questionamentos relacionados ao conteúdo matemático apresentado pelo CombEsq.

Quadro 2 – Quantidade e percentual de respostas no formulário de conteúdo matemático

Itens	Discorda plenamente	Discorda	Nem concorda, nem discorda	Concorda	Concorda plenamente
Pontuação	1	2	3	4	5
Demonstra claramente os conceitos matemáticos esperados?				1 - 14%	6 - 86%

(Continuação)					
Itens	Discorda plenamente	Discorda	Nem concorda, nem discorda	Concorda	Concorda plenamente
Pontuação	1	2	3	4	5
Seu conteúdo é relevante para abordar os conceitos matemáticos esperados?				2 – 29%	5 – 71%
Fornecer informações precisas?				2 – 29%	5 – 71%
Resume bem os conceitos matemáticos esperados?				1 – 14%	6 – 86%

Fonte: Dados da pesquisa

Conforme resultados acima, inferimos que a abordagem matemática realizada durante o CombEsq está satisfatória, destacando que a maioria dos professores concordaram plenamente com os itens questionados. Vejamos, por exemplo, algumas falas dos professores que também vão de encontro aos dados do quadro 2:

Uma abordagem tranquila, simples e objetiva. [...]. Bem direcionada. Com os níveis legais de se trabalhar porque tem questões básicas e tem questões mais avançadas. (Professor A).

A abordagem dela é uma abordagem simples, acessível ao aluno, principalmente, e intuitiva para que o professor venha trabalhar aquele conteúdo para que o aluno venha fixá-lo em sala de aula e poder também utilizá-lo em casa, possivelmente, no trabalho ou em uma atividade que o professor venha a passar. (Professor B).

Achei a abordagem muito boa. Ter colocado uma linguagem fácil e atrativa para o aluno. [...]. Os conceitos são bem claros. Dá para o aluno entender bem, diferenciar bem cada conceito. (Professor E).

Bem explicada. [...] está bem, está de uma forma que facilita a aprendizagem. [...]. Então, elas são questões que vão fazer o aluno buscar o conhecimento. (Professor F).

Podemos notar, portanto, que o CombEsq apresenta-se de forma simples, objetiva e que se torna agradável a sua utilização por parte de estudantes e professores. Continuemos, agora, com o item de análise Usabilidade.

### 7.4.3 Usabilidade

Podemos observar abaixo o quadro 3 com a quantidade de respostas e percentuais de cada professor em relação aos questionamentos relacionados à usabilidade apresentada pelo CombEsq.

Quadro 3 – Quantidade e percentual de respostas no formulário Usabilidade

Itens	Discorda plenamente	Discorda	Nem concorda, nem discorda	Concorda	Concorda plenamente
Pontuação	1	2	3	4	5
Pode ser facilmente disponibilizado em formatos diferenciados (tais como Web, Pendrive, CD, etc)?				2 – 29%	5 – 71%
O objeto explicita os softwares ou recursos necessários para o seu correto funcionamento?				1 – 14%	6 – 86%
O objeto é facilmente instalável, dispensando requisitos complexos para sua execução?				2 – 29%	5 – 71%
Pode ser executado sem a necessidade de conexão com a Internet?					7 – 100%
Pode ser executado a partir da Web?					7 – 100%
Há compatibilidade com outras plataformas, como por exemplo, celulares e tablets?				2 – 29%	5 – 71%

Fonte: Dados da pesquisa

A partir dos dados acima, é destacada a boa adaptabilidade, acessibilidade e interoperabilidade do CombEsq discutidas na seção 5.1, uma vez que ele pode ser usado por diferentes plataformas e sistemas operacionais com facilidade. Além disso, é importante mencionar que o CombEsq não necessita de Internet e é compatível com celulares, o que atualmente é peculiar tendo em vista a realidade das escolas públicas com poucos computadores e acesso à internet restrito. Complementando a discussão com algumas falas dos professores, temos:

[...] o único problema que na nossa sala de aula tem dificuldade de falta de tecnologia na escola. E é esse a grande dificuldade. Talvez o menino usar o celular dele. Mas a escola em si não ajuda muito. (Professor A).

[...] é uma ferramenta que mais atraiu dele de bom é que não precisa de internet. Não tem muita coisa de software, mas que a gente esbarra na necessidade de internet e, particularmente, a gente já tem um problema básico de não ter computadores na escola, muito menos internet. Então, a possibilidade de eu trabalhar ele ou ceder para o aluno levar, baixe em casa, traga um pendrive, instale e você também usar em casa e não precisar da internet, já diferencia ele de outros que a gente vai encontrar talvez, por aí, se procurar. (Professor C).

O que eu estou pensando, assim, na estrutura da escola. Como ele pode ser utilizado com celulares e tablets, isso facilita a proposta do professor. Então, o fato dele ser um objeto bem simples e várias plataformas, isso aí contribui muito para que o professor use. (Professor D).

Só que ainda é um desafio para escola pública nessa questão. Praticamente, todos têm celular. Mas na escola pública, você vê alguns sem ter o celular. O celular, às vezes, não tem suporte, por exemplo, para colocar esse objeto. Muitos da escola pública também não têm um computador. [...]. Mas, assim, a escola hoje a gente trabalha em dupla, em trio, de acordo com o laboratório, mas pelo menos já está trabalhando com isso. (Professor G).

Fica clara a observância dos professores pela necessidade do objeto de aprendizagem ser compatível com várias plataformas, principalmente, para o professor conseguir contornar situações de algumas escolas não terem um laboratório de informática que atenda qualitativamente e quantitativamente aos alunos. Tal fato acentua-se quando se trata de escolas públicas, como foi discutido na seção 4.1. Assim, o CombEsq prover tais possibilidades, torna-se um alívio para grande maioria dos professores que poderão ter um maior leque de possibilidades para utilizar a ferramenta.

#### 7.4.4 Interface e recursos interativos

A partir do quadro 4 abaixo, podemos visualizar a quantidade de respostas e percentuais de cada professor em relação aos questionamentos relacionados à interface e recursos interativos relacionados ao CombEsq.

Quadro 4 – Quantidade e percentual de respostas no formulário Interface e recursos interativos

Itens	Discorda plenamente	Discorda	Nem concorda, nem discorda	Concorda	Concorda plenamente
Pontuação	1	2	3	4	5

(Continuação)

Itens	Discorda plenamente	Discorda	Nem concorda, nem discorda	Concorda	Concorda plenamente
Pontuação	1	2	3	4	5
O CombEsq é claro e conciso?				3 – 43%	4 – 57%
É fácil de usar?					7 – 100%
É motivador – instiga o interesse em ser manipulado?				3 – 43%	4 – 57%
Tem um bom apelo visual?				2 – 29%	5 – 71%
As imagens são empregadas para ilustrar conceitos e explicações?				2 – 29%	5 – 71%
O número de imagens apresentadas em cada página é adequado?				2 – 29%	5 – 71%
Há contraste suficiente entre fontes e fundo de tela, facilitando a leitura dos textos?				1 – 14%	6 – 86%
As fontes utilizadas apresentam tamanho adequado?			1 – 14%	1 – 14%	5 – 72%
Há consistência visual na apresentação de informações (títulos, formatação/disposição dos textos e recursos gráficos)?					7 – 100%
A todo o momento é possível saber em que ponto nos encontramos no objeto de aprendizagem, através de seus rótulos e títulos?				3 – 43%	4 – 57%
Os links para acessar outras páginas e funções do objeto de aprendizagem são facilmente reconhecíveis?			1 – 14%		6 – 86%

(Continuação)

Itens	Discorda plenamente	Discorda	Nem concorda, nem discorda	Concorda	Concorda plenamente
Pontuação	1	2	3	4	5
Os recursos interativos empregados vão além da seleção links e botões para avançar ou recuar na apresentação dos conteúdos?				2 – 29%	5 – 71%
Os recursos interativos exploram a possibilidade do usuário alterar configurações do sistema de modo a obter respostas diferentes de acordo com suas ações?				2 – 29%	5 – 71%
O objeto de aprendizagem emprega recursos gráficos que melhoram o aspecto estético da interface, tornando mais aprazível sua utilização?				4 – 57%	3 – 43%
O usuário tem liberdade de navegação?				1 – 14%	6 – 86%
O CombEsq fornece diferentes níveis de dificuldade?					7 – 100%
O usuário pode retomar ações já executadas?				1 – 14%	6 – 86%
A linguagem empregada está de acordo com o público alvo?				1 – 14%	6 – 86%

Fonte: Dados da pesquisa

Conforme respostas dadas pelos professores, os recursos visuais e interativos do CombEsq apresentam-se de forma satisfatória. Basicamente, em todos os itens questionados, houve uma grande aceitação das estratégias tomadas. É importante destacar, ainda assim, a concordância categórica dos professores em relação aos itens “É fácil de usar, Há consistência

visual na apresentação de informações (títulos, formatação/disposição dos textos e recursos gráficos e O CombEsq fornece diferentes níveis de dificuldade”. Tais itens são fundamentais para que o objeto de aprendizagem seja experimentado tanto por professores como estudantes. Corroborando com os dados acima, podemos observar algumas falas dos professores a respeito da interface e recursos interativos do CombEsq:

Na verdade, as imagens facilitam muito. Pelo menos para mim, as imagens e a situação de ter o material visível, colocar no data show, por exemplo. Então, o menino se prende ali e as imagens, infelizmente, aluno de ensino médio se apegam a imagem como criança e as imagens fazem eles em algumas questões seguirem. (Professor A).

O legal que eu achei foi dividi-lo, as questões, você dividi-las em níveis. Eu achei muito interessante. Porque você dá ao aluno a oportunidade, se ele é um aluno iniciante, ele tratar de questões iniciais e depois ele ir avançando à medida que ele vai se apropriando dos conteúdos que ali estão. [...] E são problemas que têm as imagens, eles gostam, aluno é muito visual, a gente sabe disso, que ele é muito visual. E o objeto traz esse elemento também que vem a todo momento incentivá-lo a resolver aquele problema. [...] o visual dele é um visual positivo, é um visual que chama atenção, a facilidade de utilizar principalmente. Eu acho que o diferencial mesmo é a facilidade de utilização. [...] de uma forma geral o objeto é autoexplicativo. Você apenas mexendo ali, você consegue entender o funcionamento dele tranquilamente. (Professor B).

Uma coisa que achei bem positiva: as imagens ilustrativas. O tamanho da letra. Isso é positivo. A cara, a imagem, isso atrai muito o visual do aluno. Porque, quando é uma coisa muito seca, sem imagens, com letra pequena para o aluno, ele se torna a mesma coisa do livro didático, [...] mas a imagem dá um caráter de realidade, de contexto, para ele entender que aquilo é uma situação de contexto, [...] faz com que ele imagine aquela situação acontecendo. (Professor C).

[...] e ele tem esse apelo visual de estar interagindo entre a interface em si e o aluno gosta desse dinamismo (Professor D).

[...] a linguagem está ótima. [...]. Eu achei bem interessante a questão dos botões. Você tem uma dúvida, tem uma dica, está lá a palavrinha, você clica. Não é aquela coisa, meu Deus, como é que eu vou mexer aqui para encontrar a dica. Não, está tudo ali. Está fácil. Então, não tem como o aluno ou o professor dizerem aqui está muito difícil de eu encontrar as coisas. Eu achei super interessante. A maneira como foi colocado. Os botões. Eu volto. Eu, particularmente, não tive nenhum pouquinho de dificuldade em ir para as dicas, ir para o conceito, ir para as questões, ir para o simulado. E a gente sabe que o nosso aluno ele é curioso. Ele vai atrás, ele busca mesmo, e ali não tem nenhuma dificuldade. (Professor F).

Fica ratificado, portanto, o caráter afetivo do CombEsq no sentido de proporcionar ao usuário que esteja interagindo com o objeto um ambiente agradável e de segurança. Tais fatores são fundamentais para que o objeto de aprendizagem seja utilizado, tendo em vista, principalmente, a vida real do professor, normalmente atarefado e com pouca disponibilidade para tentar entender o funcionamento do OA. Tal fator recai também no envolvimento do estudante com o objeto, uma vez que um ambiente agradável contribui para uma melhor aprendizagem.



### 7.4.5 Prover auxílio a usuários

A partir do quadro 5 abaixo, podemos visualizar a quantidade de respostas e percentuais de cada professor em relação aos questionamentos relacionados à capacidade do CombEsq propor auxílio a usuários.

Quadro 5 – Quantidade e percentual de respostas no formulário Prover auxílio a usuários

Itens	Discorda plenamente	Discorda	Nem concorda, nem discorda	Concorda	Concorda plenamente
Pontuação	1	2	3	4	5
Fornece feedback para o usuário?					7 – 100%
O CombEsq fornece ajuda para navegação entre as telas do objeto?				1 – 14%	6 – 86%
O CombEsq apresenta material complementar sobre o seu uso?				2 – 29%	5 – 71%
Possui claras instruções de uso?					7 – 100%
Apresenta mensagens de erro construtivas, que permitam que o usuário aprenda a partir das mesmas?				1 – 14%	6 – 86%
Apresenta mensagens de erro construtivas, que permitam que o usuário refaça suas escolhas, não interrompendo o uso do objeto?					7 – 100%
Provê indicações claras de o que o usuário deve fazer para prosseguir para próximas etapas de uso do objeto?				1 – 14%	6 – 86%

Fonte: Dados da pesquisa

Observando as respostas, torna-se explícito o potencial do CombEsq em fornecer auxílio aos usuários que estejam interagindo com o objeto, com destaque para os itens “Fornece *feedback* para o usuário, Possui claras instruções de uso e Apresenta mensagens de erro construtivas, que permitam que o usuário aprenda a partir das mesmas”, que obtiveram concordância de 100% dos professores. Outro item que merece destaque é o que se “Apresenta mensagens de erro construtivas, que permitam que o usuário aprenda a partir das mesmas” que obteve também uma expressiva aceitação. A conjunção desses itens torna-se fundamental para que o objeto de aprendizagem seja utilizado e cumpra com o seu principal papel que é promover

a aprendizagem. Isso se torna ainda mais relevante, tendo em vista a heterogeneidade de estudantes e professores, cada um com seu grau de familiaridade tanto com tecnologia como a matemática envolvida. Dessa forma, um objeto de aprendizagem fácil de usar e, além disso, com diversas formas de ajuda, contribui de sobremaneira para reusabilidade (discutida na seção 5.1) do CombEsq.

Como abordado em seção anterior, a principal funcionalidade do CombEsq é a disponibilização de questões esquematizadas com dicas para que o estudante compreenda os conceitos envolvidos e as estratégias de resolução. A esse respeito, complementamos a discussão acima no que se refere à capacidade do CombEsq prover auxílio a usuários, com algumas argumentações realizadas pelos professores sobre as dicas e *feedbacks* apresentados pelo CombEsq:

Eu acho que o aplicativo tem uma função de tutoria. Porque ele encaminha, ele dá caminhos, dá orientações de como ir por esse caminho, e ao tempo todo ele está tutoriando. [...] Nesse sentido dele avançar e ele ter dentro da ferramenta o suporte necessário para que, caso ele erre, analise o erro, identifique onde possivelmente ele está errando e construa a estratégia correta sem precisar recorrer diretamente ao professor. (Professor C).

Ele faz com que aluno procure responder de forma correta. Quando ele não consegue, ele tem outras ferramentas que o ajudam a solucionar o problema. É como se ele construísse o próprio conhecimento a partir daquelas dicas. [...] O que eu mais gostei foi o fato dele dar esses feedbacks. E o CombEsq fez, foi isso, foi dar essa justificativa. (Professor D).

[...] Mas as dicas em si mesmo são muito boas. Abre a mente do aluno para entender o problema. [...] quando ele começa a ver aquelas dicas, ele começa a entender melhor o que o problema está passando e como a própria dica mostra, na forma de questionamento, perguntando se aquela opção está de acordo com o problema. Ele vai escolher se está ou não está. Imediatamente, ele já diz se a resposta que ele deu está correta ou não. Então, vai levando ele a pensar, a raciocinar. (Professor E).

[...] vão ter dicas como responder e como pensar, não é a resposta em si da questão. [...] vão dando auxílios para que ele desenvolva esse pensamento voltado para aquele enunciado da questão. (Professor G).

Fica claro, dessa forma, que os auxílios do CombEsq não se resumem apenas a orientações de como prosseguir nas telas, isto é, a ajudas técnicas para o usuário, mas, principalmente, com auxílio para aprendizagem dos alunos, abrindo caminhos para compreensão do problema. Ainda sobre esse aspecto do CombEsq auxiliar os usuários, é disponibilizado orientações técnicas de como usar a ferramenta. Nessa perspectiva, argumentaram os professores:

São bem explicativas. Para quem quer realmente utilizá-lo em sala de aula, a partir daquelas orientações ou até mesmo se não tivessem as orientações, eu acredito também que a pessoa conseguiria utilizar. Mexendo você consegue observar o funcionamento dele. (Professor B).

[...] tem uma coisa que eu já achei interessante: tem os prints de tela para a pessoa ir vendo cada coisa. Aí ela vai para o aplicativo, volta para as orientações. (Professor C).

São bem claras as orientações. (Professor E).

Até para uma pessoa que não tem muito costume de estar usando tecnologia, acho que aquilo foi claro, as dicas de como usar. Teve até a questão dos prints das telas. Então, não é só texto. Ainda coloca visualmente o passo a passo do que deve fazer. (Professor G).

A partir desses comentários, afirma-se mais uma vez a facilidade do CombEsq, pois na argumentação do Professor B, por exemplo, sugere-se que não seria necessário ver as orientações técnicas para utilizar a ferramenta. De todo modo, pensando na diversidade de sujeitos que podem interagir com o CombEsq, torna-se imprescindível a disponibilização de orientações técnicas sobre uso da ferramenta. Outro fato também destacado pelos professores, é a apresentação de recortes das telas (*prints*) indicando as situações de interação no CombEsq, facilitando a leitura e compreensão do funcionamento da ferramenta.

#### 7.4.6 Foco pedagógico

A partir do quadro 6 abaixo, podemos visualizar a quantidade de respostas e percentuais de cada professor em relação aos questionamentos relacionados ao formulário de foco pedagógico do CombEsq.

Quadro 6 – Quantidade e percentual de respostas no formulário Foco pedagógico

Itens	Discorda plenamente	Discorda	Nem concorda, nem discorda	Concorda	Concorda plenamente
Pontuação	1	2	3	4	5
O CombEsq apresenta uma contextualização inicial, descrevendo o tema/conteúdo tratado no objeto?				2 – 29%	5 – 71%
O CombEsq apresenta o objetivo pedagógico relacionado ao uso do objeto?					7 – 100%

(Continuação)

Itens	Discorda plenamente	Discorda	Nem concorda, nem discorda	Concorda	Concorda plenamente
Pontuação	1	2	3	4	5
O CombEsq apresenta como o objeto poderia ser explorado pedagogicamente?					7 – 100%
O CombEsq disponibiliza algum contato para sugestões / dúvidas?					7 – 100%
É disponibilizado material complementar para orientação do uso do CombEsq?					7 – 100%
Há alguma apresentação sobre o CombEsq?				2 – 29%	5 – 71%

Fonte: Dados da pesquisa

A partir das respostas apresentadas pelos professores, podemos afirmar que o CombEsq atende ao requisito de ter uma proposta pedagógica bem definida, principalmente por meio da resposta aos itens “ O CombEsq apresenta o objetivo pedagógico relacionado ao uso do objeto? e O CombEsq apresenta como o objeto poderia ser explorado pedagogicamente?”, que obtiveram 100% de concordância. Essa característica é muito importante para que o docente faça uso da ferramenta na sala de aula, pois a distância entre a concepção de como usar a ferramenta e a efetiva prática fica encurtada, no sentido de facilitar o trabalho do professor na concepção pedagógica. Diferentemente de outros recursos digitais que, por não ter um objetivo pedagógico claro e definido, exige do professor uma análise maior da ferramenta e, conseqüentemente, um maior despendimento de tempo docente para essa tarefa, o que muitas vezes se torna impossibilitado tendo em vista a quantidade excessiva de tarefas dos professores no Brasil. A respeito das orientações pedagógicas sugeridas no CombEsq, os professores destacaram:

As orientações são claras, bem direcionadas, objetivas, de fácil compreensão. [...] As orientações estão boas. Seguiria tranquilamente. Se houver necessidade, é que há uma mudança no percurso (Professor A).

Eu acredito que essas orientações são boas para se trabalhar inicialmente. A partir de você trabalhar aquelas situações lá propostas no objeto, você, a partir dali, pode fazer um planejamento e tentar trabalhar outras ideias. (Professor B).

Está coerente. É justamente como é que eu iria utilizar. Aplicaria o conteúdo e ao final traria essa novidade para resgatar e dar esse contraste para o aluno, que ele pode ver esse conteúdo de forma mais dinâmica. (Professor D).

Como a prática docente é dinâmica e há uma diversidade elevada de turmas, fica difícil padronizar uma maneira de abordar o CombEsq. Dessa forma, foram apresentadas sugestões, conforme apêndice E, preservando sempre a oportunidade do professor realizar as devidas alterações conforme o contexto vivenciado. Assim, os comentários dos professores representam essas orientações como um norte, uma base que pode ser estudada, testada e modificada para atender às necessidades dos estudantes e do professor.

Conforme já discutido anteriormente, as dicas apresentadas pelo CombEsq não têm uma função apenas de facilitar os caminhos para se chegar a solução do problema. Ela tem um caráter pedagógico diferenciado no sentido de levar ao aluno a construir estratégias de como pensar o problema e, nesse processo, identificar os conceitos envolvidos, compreendê-los e encontrar uma solução para o problema. Tal argumentação foi corroborada a partir da observação dos professores, como podemos ver a seguir:

[...] as dicas realmente ajudam, porque ele tem como raciocinar, ele vai pensar ali através da dica que foi dada para que ele venha resolver aquele probleminha. (Professor B).

Eu acho que as dicas foram importantes porque as dicas não é aquele negócio dando a resposta, uma coisa importante, porque às vezes o aluno pensa que quando ele abrir a dica, vai ser a resposta do enunciado da questão que ele está fazendo. Mas quando ele abre, que ele tem uma outra questão que está no nível similar ou mais baixo, que tem o mesmo conceito que a estratégia pode ser utilizada, levando ele a construir uma estratégia.[...] as dicas sempre são questionamentos para ele raciocinar, para ele tentar entender e que sempre está relacionando com o contexto inicial que é a pergunta, vamos dizer, principal. [...] gera a possibilidade de pensar sobre o erro, de rever a estratégia que ele errou e aí refazer. (Professor C).

E as dicas, ele começa, tipo, surgir dúvidas na cabeça do aluno. Será que é isso realmente. Tipo, as dicas não servem só para dizer isso está certo, isso está errado, e sim para auxiliar o aluno a dizer, mas se acontecesse isso. Colocar situações diferentes que eles comecem a pensar. Então isso é o mais interessante na questão das dicas. (Professor G).

Como consequência do efeito pedagógico das dicas apresentadas pelo CombEsq, os professores argumentaram que elas podem contribuir para amenizar os principais problemas enfrentados por professores no ensino de análise combinatória discutidos na seção 3, a saber: a

interpretação do problema e a identificação do tipo de agrupamento. Sobre esse aspecto, justificaram:

Se o aluno seguir o processo que você construiu direitinho, atento, ele contribui sim. (Professor C).

Ajuda, porque ele trabalha justamente nessas diferenças, em questões semelhantes. Mudou o contexto, ele muda o conceito que vai ser utilizado. Então, o aluno abriu o link, por exemplo, de arranjo, ele vai ter uma questão lá de combinatória, que ele pode comparar e isso vai ser de maneira natural. (Professor D).

Principalmente na hora das dicas. Ela ajuda bastante. Quando apresenta a questão em si, é como um livro digital, mas quando começa a passar as dicas, vai ajudando, vai abrindo a mente do aluno, na questão da interpretação. (Professor E).

Porque que deu aquela resposta. As explicações para que eles façam a distinção do arranjo simples do arranjo composto, a permutação, eu achei bem interessante e ficaram bem claras as informações. (Professor F).

Em relação a isso do aluno fazendo e se ele olhar essas dicazinhas, prestar atenção, eu acredito que vai auxiliar nessa parte de olhar para o problema e saber isso é um arranjo, isso é uma combinação. Vai influenciar a ordem, não vai influenciar a ordem. A parte de interpretação, claro que vai ser no decorrer que ele vai praticando, olhando questões diferentes e a questão do entusiasmo dele de acordo com a questão. (Professor G).

No aspecto docente, também foram discutidas situações positivas no que se refere à possibilidade do CombEsq incentivar uma prática maior por parte dos professores do conteúdo de análise combinatória no ensino médio, que em alguns momentos é deixado de lado conforme discutimos na seção 3. Argumentam os professores:

Vai ter uma interferência porque ela é bem prática. E a plataforma ajudaria o professor nesse domínio. Como ela é bem simples, o professor não ia ser o ator principal. Ele ia mediar o conhecimento. [...] e a plataforma seria para auxiliar esse movimento de mudança, do professor ser o facilitador do aluno construir esse conhecimento. [...] Mesmo que ele não aborde o CombEsq no momento, mas a forma que foi trabalhado o conceito, dessa forma dinâmica, de comparar e dar esses feedbacks, ele pode trabalhar esse método sem utilizar a plataforma a princípio, porque se ele tiver confiança, a plataforma, ao final, ele vai acabar utilizando. (Professor D).

Mais seguro. O CombEsq vai motivá-lo mais. (Professor E).

Eu vou levar isso, é algo novo. Meus alunos vão gostar. Já tem dado as dicas. Não sou eu que vou precisar responder. Está lá tudo. Tem o passo a passo, tem os cálculos. [...] Vai aprender e vai ter mais segurança. Porque o CombEsq, por si só, ele já dá dicas. É como se fosse um auxílio pedagógico mesmo para o aluno e acredito para o professor também. (Professor G).

Além desse aspecto qualitativo acerca do CombEsq – efeitos pedagógicos positivos no ensino de análise combinatória – os professores alegaram que certamente um maior número de alunos se interessariam pela aula de análise combinatória, citando, dentre os principais motivos,

a aproximação da abordagem matemática do contexto vivenciado pelos alunos – sociedade tecnológica – e a dinâmica trazida pelo CombEsq com destaque para as dicas das questões.

Vejamos algumas colocações:

A parte visual é o que deixaria eles mais presos, mesmo sendo aluno de ensino médio. [...] Pela parte, simplesmente, porque eles adoram tecnologia. (Professor A).

[...] mas como eles são nativos digitais, isso torna a realidade dele mais próxima da escola. Você torna aquele conteúdo mais próximo dele e ele vem a todo momento trabalhar aquela realidade que já vivencia diariamente com o celular, computador e internet. (Professor B).

Ele pode é resgatar justamente os alunos que não querem nada com nada. Porque é justamente isso que o professor tem dificuldade. Porque os que são esforçados, são bons, eles vão continuar sendo, só que aqueles que já tem uma certa desmotivação, é muito difícil você resgatar. Então uma atividade dinâmica, de jogos, plataformas distintas, objetos tecnológicos, isso torna a aula mais atrativa em si e puxa esses alunos para a sua aprendizagem. (Professor D).

Eu acredito que o número de alunos interessados ia aumentar bastante. (Professor E).

[...] que ele vai utilizar o telefone dele, usar o computador, o tablet, vai chamar a atenção e vai motivar mais. (Professor F).

Tanto pela questão de ele estar desenvolvendo no aluno essa curiosidade na questão das dicas, do passo a passo, e tanto porque cada aluno vai estar sendo auxiliado por meio disso.[...] acredito que vai atingir um número maior de alunos. (Professor G).

Há, dessa forma, uma forma estratégica de atrair estudantes com diferentes níveis de aprendizagem para um estudo de análise combinatória por meio do CombEsq. Ainda sobre esse fim pedagógico proporcionado pelo CombEsq, é importante mencionar alguns diferenciais inerentes às tecnologias de informação e comunicação que podem ser executados que em um ambiente tradicional de ensino ficaria limitado. Sobre esses diferenciais, os professores observaram:

Porque você trabalhar análise combinatória, na maioria das vezes, é algo bem seco e você não tem muitas ferramentas para se trabalhar combinatória, e você trazer um objeto para que o aluno ele venha trabalhar, ele venha conhecer. Porque muitas das vezes, o aluno não conhece essas tecnologias. Ele usa o celular por usar, o computador por usar e você mostrando esse novo caminho que ele pode trilhar eu acredito que vai ser muito bom e é só o início. A partir daí, ele pode conhecer outros objetos, outras ferramentas digitais, para que venham engrandecer a compreensão dele. (Professor B).

Conseguir atender a heterogeneidade da turma. Porque eu vou conseguir dar suporte ao mesmo tempo todos os alunos e cada um vai estar no seu nível, porque eu vou ter alunos que vão atingir rápido o nível intermediário, que vão passar rápido pelas questões iniciantes, aí já vão para o avançado. E eu vou ter aluno que vai levar o mesmo tempo que esse levou lá no avançado e vai estar lá no intermediário e, mesmo assim, vou conseguir dar suporte para ele, sem um ficar esperando pelo outro para a turma avançar. Então acho que isso é muito positivo. (Professor C).

[...] o objeto vai aproximar o professor das dificuldades que o aluno está tendo ali durante todo o processo. [...] Não tem como abordar e não tem como fazer o acompanhamento. Que é muito difícil. Hoje com a quantidade de aluno que tem em uma sala, não consegue fazer um atendimento individual e, no máximo, em grupo. Com o CombEsq, atacaria a dificuldade de cada um e pode até pegar aqueles alunos melhores e fazer um grupo de monitoria e sair trabalhando com os alunos que teriam mais dificuldade. (Professor D).

Observando as falas dos professores, podemos afirmar que o CombEsq pode trazer oportunidades diferenciadas de métodos e técnicas de ensino para maximizar as oportunidades de aprendizagem do estudante. Por exemplo, a oportunidade do professor acompanhar a aprendizagem dos estudantes em níveis distintos e, além disso, interferir de modo positivo para que o estudante desenvolva a capacidade de refletir sobre seus erros durante o percurso da aprendizagem. Outro fator também importante é a alfabetização tecnológica proporcionada pelo CombEsq citada pelo Professor B, na perspectiva de mostrar para o estudante que as TICs têm funções não só de entretenimento, mas também educativas, que podem nos auxiliar no processo de formação e tomada de decisão.

#### **7.4.7 Sugestões dos sujeitos participantes**

A partir desse primeiro contato que os professores tiveram com o CombEsq, alguns deram sugestões com a intenção de tornar o CombEsq melhor. Destacando alguns comentários, temos:

[...] em relação ao simulado, como você não pode voltar, tem que reiniciar. Se na hora que reiniciasse trocasse a posição das alternativas. (Professor A).

Eu acredito que agregando mais questões, fazendo mais outro simulado com mais questões mesmo. A questão é que a gente sabe quando trabalha a combinatória, tem que treinar e quanto mais questões é importante. Mas somente isso eu acrescentaria, mas mudar eu não mudaria nada. (Professor B).

Dos conceitos, lá nos conceitos, um exemplo mais simples e exemplo mais complexo para ele fazer esse comparativo. (Professor C).

[...] seria interessante se eu pudesse ter um resultado, tipo, eles fizeram o simulado e aluno tal conseguiu tantas e tantas erro. [...] eu saber se realmente ele fez aquilo. [...] eu acredito que no meio da teoria também ter mais um exemplo. (Professor G).

A sugestão do Professor A está relacionada com a configuração do simulado misturar as alternativas das questões sempre que for reiniciado. Essa configuração é possível, tendo em vista que o CourseLab disponibiliza esse tipo de recurso. Sobre a sugestão do Professor B, é



possível atualizar o CombEsq com mais questões. De todo modo, procurou-se, com a disponibilização de 18 problemas esquematizados e 20 problemas do simulado, contemplar de modo geral os principais conteúdos de análise combinatória da educação básica. Tanto o Professor C como o Professor G sugeriram mudanças na funcionalidade conceitos, de modo que fosse disponibilizado mais exemplos com a organização de ter um exemplo simples e um exemplo complexo para que os estudantes possam fazer relações entre as estratégias utilizadas. O Professor G complementou ao sugerir que o CombEsq tivesse uma forma de informar o professor sobre a quantidade de acertos dos estudantes ao interagir com a ferramenta. Sobre esse aspecto, como discutido na seção 7.1.3, o CombEsq não fornece esse tipo de recurso no modo em que foi desenvolvido no CourseLab. Uma estratégia sugerida, é que o professor solicite aos estudantes a elaboração de relatórios sobre o uso do CombEsq com as dúvidas e opiniões a respeito da interação com a ferramenta para que os estudantes possam ser avaliados.

Por fim, todos os professores mostraram-se admirados com a ferramenta e que estão curiosos e ansiosos para colocá-la em prática. Alegaram que a partir de experiências com estudantes em sala de aula é que poderão surgir situações em que possam sugerir alterações pontuais na ferramenta.

## 8 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O ensino e aprendizagem de análise combinatória na educação básica no Brasil ainda é um desafio para os sistemas educacionais. Várias pesquisas acadêmicas estudaram os fenômenos que estão levando a esse cenário, destacando a má preparação docente para lecionar o conteúdo levando o professor a pular o conteúdo ou apresentá-lo de forma insatisfatória e a dificuldade retratada pelos alunos de compreender os conceitos envolvidos com análise combinatória, principalmente na resolução de problemas. Isso é preocupante, pois o raciocínio combinatório precisa ser desenvolvido nos estudantes para que possam desenvolver-se cognitivamente para interpretação de fenômenos que necessitem de conhecimentos básicos da referida área.

Mesmo considerando as adversidades que permeiam a prática escolar, principalmente no âmbito público, torna-se importante pensar em estratégias que possam amenizar os problemas de aprendizagem relacionados ao estudo de análise combinatória, como por exemplo, a interpretação do problema e identificação dos tipos de agrupamento – principais problemas de aprendizagem de análise combinatória discutidos nas pesquisas. Nessa perspectiva, é importante mencionar o contexto vivenciado pela atual sociedade, principalmente dos jovens, que é o alto envolvimento com as tecnologias digitais e, principalmente, recursos que envolvam o uso da Internet. É inegável como as pessoas, principalmente os jovens, incluem as tecnologias como recursos indispensáveis para seu bem-estar.

Fazendo uma rápida análise do tipo de uso que é dado a essas tecnologias, não é difícil afirmar que se resume, na maioria das vezes, no entretenimento. Podemos nos questionar: será que não é possível aproveitar esse envolvimento dos jovens com tecnologias digitais para aprender melhor conceitos matemáticos? Será que não é possível dar um sentido também educativo às tecnologias digitais? Perseguindo respostas, sabemos que poucos cursos de licenciatura em matemática fornecem disciplinas que trabalhem de forma efetiva com tecnologias no ensino de matemática – sejam elas específicas ou de ensino –, que ainda há pouca formação continuada para capacitar professores atuantes em métodos e técnicas de ensino que envolvam tecnologias e, em algumas áreas, como a análise combinatória, há poucas ferramentas digitais para auxiliar o professor.

Partindo desse contexto, foi desenvolvido o CombEsq – Combinatória Esquemática – como resposta às inquietações: como ajudar alunos a aprender análise combinatória e como incentivar professores a trabalhar a análise combinatória de forma diferente? Para tentar suprir

tais questionamentos, usou-se o contexto vivenciado pelos estudantes – alto envolvimento com tecnologias – e o potencial que tais tecnologias podem oferecer no que se refere ao aspecto didático e o conteúdo matemático envolvido. O CombEsq é um objeto de aprendizagem digital desenvolvido a partir do sistema de autoria CourseLab que tem como principal objetivo auxiliar professores e estudantes no ensino e aprendizagem de análise combinatória. É baseado em plataforma Web, sendo necessário apenas um navegador de internet para a sua execução. De forma resumida, o CombEsq foi dividido em três funcionalidades, a saber: Conceitos, Atividades e Simulado. A funcionalidade Atividades é seu principal recurso que o diferencia de outros recursos digitais, pois, por meio dele, o estudante terá acesso a problemas de análise combinatória esquematizados, de modo que, quando o estudante erre ou acerte o problema, ele tenha acesso a um conjunto de dicas com questionamentos que o leve a construção de uma solução do problema e, em paralelo, possa conduzi-lo para compreensão dos conceitos e de estratégias de solução de problemas promovendo o seu amadurecimento com a matemática envolvida.

Para atingir os requisitos necessários de caracterização de um objeto de aprendizagem, o CombEsq foi desenvolvido levando em consideração os aspectos técnico e pedagógico. Sobre o aspecto técnico, foram utilizados os trabalhos de Braga (2006), Leite (2007), Reategui, Boff e Finco (2010) e Silveira e Carneiro (2012) e, buscando atender os critérios abordados na seção 7.1 que tratam de maneira geral dos recursos interativos utilizados pelo CombEsq, tais como, cores, botões, imagens, *feedbacks*, etc. De forma complementar às análises do autor, um grupo de 7 professores de matemática avaliaram o CombEsq, levando em consideração esses aspectos, conforme seção 7.4, e de modo geral, ficaram surpresos com a qualidade da ferramenta, a facilidade de interagir, de executar, a dinâmica abordada, os recursos interativos empregados – cores, botões, imagens, menu e outros -, a existência de um objeto para análise combinatória – algo inovador, pois os professores buscaram ferramentas dessa área e não encontraram – e o principal destacado por eles: o fato de ser tecnológico.

Sobre o aspecto pedagógico, o CombEsq foi fundamentado a partir da metodologia de resolução de problemas de Polya conforme seção 7.2. A ideia, nesse momento, foi fazer com que o aluno, mesmo que não tenha consciência dessa abordagem implícita na ferramenta, desenvolva capacidades mentais que vão além da solução do problema em si, como por exemplo, a forma de leitura do problema, de identificar os dados, os condicionantes e como relacionar esses dados para uma tentativa de solução. Esse aspecto pedagógico foi bem observado pelos professores durante a avaliação da ferramenta, destacando, de modo geral, a capacidade da ferramenta, por meio das dicas apresentadas, auxiliar o estudante na interpretação

do problema e na identificação dos tipos de agrupamento. Além disso, mencionaram também a oportunidade que o professor tem de dinamizar a aula, de atrair mais o estudante para uma aula de combinatória – que geralmente é vista pelos alunos como um conteúdo de difícil compreensão – e a forma de acompanhamento individual do aluno tornou-se facilitado com a ferramenta, tendo em vista a diversidade de alunos numa sala de aula.

É importante ressaltar que o foco deste trabalho se deu no desenvolvimento da ferramenta CombEsq, na sua análise e na sua avaliação por parte de um grupo de professores, não incluindo nesse processo uma prática da ferramenta com estudantes. Essa prática não foi incluída no momento para que pudéssemos observar um maior número de professores interagindo com CombEsq de modo a avaliá-lo levando em consideração os critérios abordados na seção 7.4. Além disso, espera-se que, com a exposição das análises técnica e pedagógica e o método de validação, que professores da educação básica e professores formadores possam observar as estratégias utilizadas e, quem sabe, promova um maior desenvolvimento de objetos de aprendizagem pelos professores ou até mesmo uma maior utilização de ferramentas dessa natureza no ambiente de ensino. É intenção do autor expandir a discussão atual, realizando experimentações da ferramenta por estudantes.

## REFERÊNCIAS

- AGUIAR, E. V. B.; FLÔRES, M. L. P. Objetos de aprendizagem: conceitos básicos. *In*: TAROUCO, L. M. R. et al. **Objetos de aprendizagem: teoria e prática**. Porto Alegre: Evangraf, 2014. p. 12-28. Disponível em: <https://lume.ufrgs.br/handle/10183/102993>. Acesso em: 19 nov. 2018.
- ALVES, R.; SEGADAS, C. Sobre o Ensino da Análise Combinatória: fatores a serem considerados, lacunas a serem evitadas. **Acta Scientiae**, Canoas, v. 14, n. 3, p. 405-420, 2012. Disponível em: <http://www.periodicos.ulbra.br/index.php/acta/article/view/391>. Acesso em: 21 jul. 2018.
- ALMOULOUD, S. A. Informática e educação matemática. **Revista de Informática Aplicada - USCS/UFABC**, v. 1, n. 1, p. 50-60, 2005. Disponível em: <http://www.ria.net.br/index.php/ria/article/view/95>. Acesso em: 25 jul. 2018.
- AMADO, N.; CARREIRA, S. Utilização pedagógica do computador por professores estagiários de matemática – diferenças na prática da sala de aula. *In*: ENCONTRO DE INVESTIGAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2008, Vieira de Leiria/Portugal. **Arquivo de Atas Tecnologias na Educação Matemática**, 2008. p. 276-289. Disponível em: [http://spiem.pt/DOCS/ATAS\\_ENCONTROS/atas\\_EIEM\\_2008.pdf](http://spiem.pt/DOCS/ATAS_ENCONTROS/atas_EIEM_2008.pdf). Acesso em: 31 jul. 2018.
- AZEVEDO, J.; BORBA, R. Combinatória: A construção de árvores de possibilidades por alunos dos anos iniciais com e sem uso de software. **Alexandria - Revista de Educação em Ciência e Tecnologia**, Florianópolis, v. 6, n. 2, p. 113-140, 2013. Disponível em: <https://periodicos.ufsc.br/index.php/alexandria/article/view/37957>. Acesso em: 20 jul. 2018.
- BACCEGA, M. A. Tecnologia e construção da cidadania. **Comunicação & Educação**, São Paulo, n. 27, p. 7-14, 2003. Disponível em: <http://www.revistas.usp.br/comueduc/article/view/37487>. Acesso em: 27 jul. 2018.
- BATTISTELLA, P. E.; WANGENHEIM, A. V. Avaliação de Ferramentas de Autoria Gratuitas para produção de Objetos de Aprendizagem no padrão SCORM. **Revista Brasileira de Informática na Educação**, v. 19, n. 3, p. 16-28, 2011. Disponível em: <http://www.br-ie.org/pub/index.php/rbie/article/view/1228>. Acesso: 27 nov. 2018.
- BATTISTELLA, P. E. Classificação de Objetos de Aprendizagem e análise de Ferramentas de Autoria. *In*: **XX Simpósio Brasileiro de Informática na Educação**, 2009, Florianópolis/SC. Disponível em: [http://www.niee.ufrgs.br/eventos/SBIE/2009/conteudo/artigos/completos/62035\\_1.pdf](http://www.niee.ufrgs.br/eventos/SBIE/2009/conteudo/artigos/completos/62035_1.pdf). Acesso em: 27 nov. 2018.
- BEHRENS, M. A. Projetos de aprendizagem colaborativa num paradigma emergente. *In*: MORAN, J. M.; MASETTO, M. T.; BEHRENS, M. A. **Novas tecnologias e mediação pedagógica**. 10. ed. Campinas/SP: Papyrus, 2006. p. 67-132.
- BORBA, M. C. Computadores, Representações Múltiplas e a Construção de Ideias Matemáticas. **Bolema**, Rio Claro/SP, v. 9, edição especial 3, p. 83-101, 1994. Disponível em:

<http://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/article/view/10799>. Acesso em: 31 jul. 2018.

BORBA, M. C.; PENTEADO, M. **Informática e educação matemática**. 4. ed. Belo Horizonte/ MG: Autêntica, 2010.

BORBA, M. C.; ALMEIDA, H. R. F. L.; CHIARI, A. S. S. Tecnologias Digitais e a relação entre teoria e prática: uma análise da produção em trinta anos de BOLEMA. **Bolema**, Rio Claro/SP, v. 29, n. 53, p. 1115-1140, 2015. Disponível em:

<http://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/article/view/9835>. Acesso em: 31 jul. 2018.

BORBA, R. E. S. R. Antes que seja tarde: aprendendo combinatória desde o início da escolarização. **Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana (EM TEIA)**, v. 7, n. 1, 2016. Disponível em:

<https://periodicos.ufpe.br/revistas/emteia/article/view/3883>. Acesso em: 20 jul. 2018.

BRAGA, M. M. **Design de software educacional baseado na teoria dos campos conceituais**. 2006. Dissertação (Mestrado em Ciência da Computação) – Centro de Informática, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2006.

BRASIL. Lei nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996. Estabelece as diretrizes e bases da educação nacional. Brasília/DF: Presidência da República, 1996. Disponível em: [http://www.planalto.gov.br/ccivil\\_03/LEIS/L9394.htm](http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/LEIS/L9394.htm). Acesso em: 27 jul. 2018.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros curriculares nacionais. Matemática: 1ª a 4ª séries. Brasília: MEC/SEF, 1997.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros curriculares nacionais. Matemática: 5ª a 8ª séries. Brasília: MEC/SEF, 1998.

BRASIL. Secretaria de Educação Básica. Parâmetros curriculares nacionais. Linguagens, Códigos e suas Tecnologias: Ensino Médio. Brasília: MEC/SEB, 2000.

BRASIL. Secretaria de Educação Básica. Parâmetros curriculares nacionais. Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias: Ensino Médio. Brasília: MEC/SEB, 2000.

BRASIL. Secretaria de Educação Básica. Parâmetros curriculares nacionais +. Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias: Ensino Médio. Brasília: MEC/SEB, 2002.

BRASIL. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. Sistema de Avaliação da Educação Básica. Resultados. Edição 2015. Brasília: MEC/SAEB, 2016. Disponível em:

[http://download.inep.gov.br/educacao\\_basica/saeb/aneb\\_anresc/resultados/resumo\\_dos\\_resultados\\_saeb\\_2015.pdf](http://download.inep.gov.br/educacao_basica/saeb/aneb_anresc/resultados/resumo_dos_resultados_saeb_2015.pdf). Acesso em: 15 jul. 2018.

BRASIL no PISA 2015: análises e reflexões sobre o desempenho dos estudantes brasileiros / OCDE-Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico. São Paulo: Fundação Santillana, 2016. Disponível em:

[http://download.inep.gov.br/acoes\\_internacionais/pisa/resultados/2015/pisa2015\\_completo\\_final\\_baixa.pdf](http://download.inep.gov.br/acoes_internacionais/pisa/resultados/2015/pisa2015_completo_final_baixa.pdf). Acesso em: 26 jul. 2018.

BRAZ, F.; BRAZ, A.; BORBA, R. Educação inclusiva de alunos com deficiência visual: desenvolvimento de materiais manipulativos para o ensino de Combinatória. Trabalho de Conclusão de Curso (Pedagogia) – Centro de Educação, UFPE, 2014. Disponível em: <https://drive.google.com/file/d/0ByUlyzknmdPLYnVWbUVjRmJLams/view>. Acesso em: 20 jul. 2018.

COSTA, G. L. M.; FIORENTINI, D. Mudança da Cultura Docente em um Contexto de Trabalho Colaborativo de Introdução das Tecnologias de Informação e Comunicação na Prática Escolar. **Bolema**, Rio Claro/SP, v. 20, n. 27, p. 1–19, 2007. Disponível em: <http://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/article/view/1245>. Acesso em: 31 jul. 2018.

COUTINHO, J. L. E.; BARBOSA, J. C. Uma matemática para o ensino de combinação simples a partir de um estudo do conceito com professores. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 18, n. 2, p. 783-808, 2016. Disponível em: <https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/24399>. Acesso em: 11 jul. 2018.

DAMASCENO, A. L. B. et al. Cacuriá: Uma Ferramenta de Autoria Multimídia para Objetos de Aprendizagem. *In: Workshops do Congresso Brasileiro de Informática na Educação*, 2014, Dourados/MS. **Anais do WCBIE 2014**. Dourados/MS: UFGD, 2014. Disponível em: <http://www.br-ie.org/pub/index.php/wcbie/article/view/3174>. Acesso em: 27 nov. 2018.

D'AMBRÓSIO, B. S.; D'AMBRÓSIO, U. Formação de professores de matemática: professor-pesquisador. **Atos de pesquisa em educação – PPGE/ME FURB**, v. 1, n. 1, p. 75-85, 2006. Disponível em: <http://gorila.furb.br/ojs/index.php/atosdepesquisa/article/viewFile/65/33>. Acesso em: 03 jan. 2019.

DANTAS, A. L. P.; PINTO, G. R. P. R.; SENA, C. P. P. Apresentando o BEM: Um Objeto de Aprendizagem para mediar o processo educacional de crianças com deficiência visual e videntes nas operações básicas de Matemática. *In: XXIV Simpósio Brasileiro de Informática na Educação*, 2013, Campinas/SP. **Anais do SBIE 2013**. Campinas/SP: UNICAMP, 2013. Disponível em: <http://www.br-ie.org/pub/index.php/sbie/article/view/2522>. Acesso em: 25 nov. 2018.

DAZZI, C. J.; DULLIUS, M. M. Ensino de Funções Polinomiais de Grau Maior que Dois Através da Análise de seus Gráficos, com Auxílio do Software Graphmatica. **Bolema**, Rio Claro/SP, v. 27, n. 46, p. 381–398, 2013. Disponível em: <http://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/article/view/8251>. Acesso em: 31 jul. 2018.

DARIO, F.; LORENZATO, S. **Investigação em educação matemática: percursos teóricos e metodológicos**. 3. ed. Campinas/SP: Autores Associados, 2009.

DIAS, R. C.; KRAEMER, E. L.; ZIZA, C. O. Uma Proposta de uso do Winplot no Ensino de Funções Quadráticas nas Turmas do PROEJA. **Ciência e Natura**, Santa Maria, v. 37, p. 592-607, 2015. Disponível em: <https://periodicos.ufsm.br/cienciaenatura/article/download/14622/pdf>. Acesso em: 09 ago. 2018.

DORNELAS, A. C. B. Resolução de problemas em análise combinatória: um enfoque voltado para alunos e professores do ensino médio. *In: VIII ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA*, 2004, Recife. **Anais do VIII ENEM – Comunicação Científica – GT 3 – Educação Matemática no Ensino Médio**. Recife: UFPE, 2004. Disponível em: <http://www.sbemrasil.org.br/files/viii/pdf/03/CC46033050444.pdf>. Acesso em: 13 jul. 2018.

DURO, M. L. **Análise combinatória e construção de possibilidades**: o raciocínio formal no ensino médio. Dissertação (Mestrado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2012. Disponível em: <http://lume.ufrgs.br/handle/10183/49729>. Acesso em: 09 jul. 2018.

EISENMANN, A. L. K.; BRANDÃO, L. O. iComb: um sistema para o ensino e aprendizagem de combinatória em ambiente Web. *In: XX SIMPÓSIO BRASILEIRO DE INFORMÁTICA NA EDUCAÇÃO*, 2009, Florianópolis. **Anais do SBIE 2009**. Florianópolis: UFSC/Univali, 2009. Disponível em: <http://www.br-ie.org/pub/index.php/sbie/article/view/1147>. Acesso em: 29 maio 2018.

FARIA, R. W. S. C. Tecnologias digitais e internet: implicações na sociedade, na educação e na educação matemática. **Colloquium Humanarum**, Presidente Prudente, v. 14, n. 2, p. 87-98, 2017. Disponível em: <http://journal.unoeste.br/index.php/ch/article/view/1497>. Acesso em: 31 jul. 2018.

FERNANDES, J. A.; CORREIA, P. F.; GUZMÁN, R. R. Aquisição das operações combinatórias por alunos pré-universitários através de uma intervenção de ensino. **Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa**, México, v. 13, n. 2, p. 215-242, 2010. Disponível em: <https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=3719286>. Acesso em: 11 jul. 2018.

FERREIRA, E. B.; SOARES, A. B.; LIMA, J. C. As Demonstrações no Ensino da Geometria: discussões sobre a formação de professores através do uso de novas tecnologias. **Bolema**, Rio Claro/SP, v. 22, n. 34, p. 185–208, 2009. Disponível em: <http://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/article/view/3304>. Acesso em: 31 jul. 2018.

FLÔRES, M. L. P.; TAROUCO, L. M. R.; REATEGUI, E. B. Funcionalidades da ferramenta de autoria para apoiar a construção de objetos de aprendizagem. *In: XXII Simpósio Brasileiro de Informática na Educação*, 2011, Aracaju/SE. **Anais do SBIE 2011**. Aracaju/SE: UFS, 2011. Disponível em: <http://www.br-ie.org/pub/index.php/sbie/article/view/1828>. Acesso em: 27 nov. 2018.

FONTE, A. P. G. **Ensino e aprendizagem dos conceitos de análise combinatória por meio da metodologia de resolução de problemas**. Dissertação (Mestrado Profissionalizante em Ensino de Física e de Matemática), Centro Universitário Franciscano, Santa Maria/RS, 2008. Disponível em: [http://bdtd.ibict.br/vufind/Record/UFN-1\\_0681af574f730358843a66377463d7af](http://bdtd.ibict.br/vufind/Record/UFN-1_0681af574f730358843a66377463d7af). Acesso em: 23 jul. 2018.

GROENWALD, C. L. O.; ZOCH, L. N.; HOMA, A. I. R. Seqüência Didática com Análise Combinatória no Padrão SCORM. **Bolema**, Rio Claro/SP, v. 22, n. 34, p. 27-56, 2009.



Disponível em:

<http://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/article/view/3298>. Acesso em: 26 jun. 2018.

HAZZAN, S. Fundamentos da matemática elementar 5: combinatória e probabilidade. *In*: IEZZI, G. **Fundamentos da matemática elementar**. São Paulo: Atual, 1977. 5 v.

IEEE - INSTITUTE OF ELECTRICAL AND ELECTRONICS ENGINEERS. **The Learning Object Metadada Standard**, 2007. Disponível em: <https://www.ieeeltsc.org/working-groups/wg12LOM/lomDescription/>. Acesso em: 20 nov. 2018.

JUNIOR, A. J. S.; LOPES, C. R. Saberes docentes e o desenvolvimento de objetos de aprendizagem. *In*: PRATA, C. L. (org.); NASCIMENTO, A. C. A. A. (org.). **Objetos de aprendizagem: uma proposta de recurso pedagógico**. Brasília: MEC, SEED, 2007. p. 07-16. Disponível em: <http://rived.mec.gov.br/artigos/livro.pdf>. Acesso em: 27 jun. 2018.

KASHIMOTO, L. K.; OLIVEIRA, R. G. O Ensino de Análise Combinatória como Referências Curriculares para Saberes Docentes. **Revista de Estudos e Pesquisas sobre Ensino Tecnológico – EDUCITEC**, v. 1, n. 1, 2015. Disponível em: <https://doi.org/10.31417/educitec.v1i01.13>. Acesso em: 21 jul. 2018.

KENSKI, V. M. Aprendizagem mediada pela tecnologia. **Revista Diálogo Educacional**, v. 4, n. 10, p. 47-56, 2003. Disponível em: <https://periodicos.pucpr.br/index.php/dialogoeducacional/article/view/6419>. Acesso em: 29 jul. 2018.

KONRATH, M. L. P. et al. “Nós no Mundo”: Objeto de Aprendizagem voltado para o 1º Ciclo do Ensino Fundamental. **Revista Novas Tecnologias na Educação (RENOTE)**, Rio Grande do Sul, v. 4, n. 1, 2006. Disponível em: <https://seer.ufrgs.br/renote/article/view/13864>. Acesso em: 14 jul. 2018.

LEITE, M. D. **Design da interação de interfaces educativas para o ensino de matemática para crianças e jovens surdos**. 2007. Dissertação (Mestrado em Ciência da Computação) – Centro de Informática, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2007.

LEITE, M. D. et al. Softwares educativos e objetos de aprendizagem: um olhar sobre a análise combinatória. *In*: X ENCONTRO GAÚCHO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2009, Ijuí/RS. Anais do X EGEM. Ijuí/RS: UNIJUÍ, 2009. Disponível em: <https://www.ifesp.edu.br/ik/images/documentos/diversos/Avalia%C3%A7%C3%A3o%20de%20softwares%20educacionais.pdf>. Acesso em: 30 maio 2018.

LIMA, E. L. **Exame de textos: análise de livros de matemática para o ensino médio**. Rio de Janeiro: SBM, 2001.

LIMA, E. L. et al. **A matemática do ensino médio**. 6. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006. 2 v.

LIRA, O. C. T.; MONTEIRO, C. E. F. Interpretação de Dados a partir da Utilização de Ferramentas do Software TinkerPlots. **Bolema**, Rio Claro/SP, v. 24, n. 40, p. 765-788, 2011. Disponível em:

<http://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/article/view/5293>. Acesso em: 31 jul. 2018.

LOPES, J. M.; REZENDE, J. C. Um Novo Jogo para o Estudo do Raciocínio Combinatório e do Cálculo de Probabilidade. **Bolema**, Rio Claro/SP, v. 23, n. 36, p. 657-682, 2010.

Disponível em:

<http://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/article/view/4035>. Acesso em: 11 jul. 2018.

LOPES, M. C. L. P. Formação tecnológica: um fenômeno em foco. **Série-Estudos - Periódico do Mestrado em Educação da UCDB**, Campo Grande/MS, n. 19, p. 127-136, 2005.

Disponível em: <http://www.serie-estudos.ucdb.br/index.php/serie-estudos/article/view/452>.

Acesso em: 27 jul. 2018.

MACÊDO, L. N.; MACÊDO, A. A. M.; FILHO, J. A. C. Avaliação de um Objeto de Aprendizagem com Base nas Teorias Cognitivas. *In*: XIII WORKSHOP SOBRE INFORMÁTICA NA ESCOLA, 2007, Rio de Janeiro. **Anais do WIE 2007**. Rio de Janeiro: UFRJ, 2007. p. 330-338. Disponível em: <http://www.br-ie.org/pub/index.php/wie/article/view/935>. Acesso em: 22 jun. 2018.

MACÊDO, L. N. et al. Desenvolvendo o pensamento proporcional com o uso de um objeto de aprendizagem. *In*: PRATA, C. L. (org.); NASCIMENTO, A. C. A. A. (org.). **Objetos de aprendizagem: uma proposta de recurso pedagógico**. Brasília: MEC, SEED, 2007. p. 17-26. Disponível em: <http://rived.mec.gov.br/artigos/livro.pdf>. Acesso em: 27 jun. 2018.

MACIEL, C.; BACKES, E. M. Objetos de aprendizagem, objetos educacionais, repositórios e critérios para a sua avaliação. *In*: MACIEL, C. (org.). **Ambientes virtuais de aprendizagem**. Cuiabá/MT: EdUFMT, 2012. p. 161-198. Disponível em:

[https://edisciplinas.usp.br/pluginfile.php/129865/mod\\_resource/content/1/Ambientes%20Virtuais.pdf](https://edisciplinas.usp.br/pluginfile.php/129865/mod_resource/content/1/Ambientes%20Virtuais.pdf). Acesso em: 20 nov. 2018.

MALTEMPI, M. V. Educação matemática e tecnologias digitais: reflexões sobre prática e formação docente. **Acta Scientiae**, Canoas, v. 10, n. 1, p. 59-67, 2008. Disponível em: <http://www.periodicos.ulbra.br/index.php/acta/article/view/78>. Acesso em: 31 jul. 2018.

MENDES, R. M.; SOUZA, V. I.; CAREGNATO, S. E. A propriedade intelectual na elaboração de objetos de aprendizagem. *In*: V Encontro Nacional de Ciência da Informação, 2004, Salvador/BA. **Anais do V CIFORM**. Salvador/BA: UFBA, 2004. Disponível em: [http://www.cinform-antiores.ufba.br/v\\_anais/artigos/rozimaramendes.html](http://www.cinform-antiores.ufba.br/v_anais/artigos/rozimaramendes.html). Acesso em: 20 nov. 2018.

MERCADO, L. P. L. (org.). **Novas tecnologias na educação: reflexões sobre a prática**. Maceió: EDUFAL, 2002.

MOREIRA, A. F. B.; KRAMER, S. Contemporaneidade, educação e tecnologia. **Educação & Sociedade**, Campinas/SP, v. 28, n. 100, p. 1037-1057, 2007. Disponível em: <http://www.scielo.br/pdf/es/v28n100/a1928100.pdf>. Acesso em: 29 jul. 2018.

MORGADO, A. C. et al. **Análise combinatória e probabilidade**. 9. ed. Rio de Janeiro: SBM, 1991.

NASCIMENTO, A. C. A. Objetos de aprendizagem: a distância entre a promessa e a realidade. *In*: PRATA, C. L. (org.); NASCIMENTO, A. C. A. A. (org.). **Objetos de aprendizagem: uma proposta de recurso pedagógico**. Brasília: MEC, SEED, 2007. p. 135-145. Disponível em: <http://rived.mec.gov.br/artigos/livro.pdf>. Acesso em: 27 jun. 2018.

NEVES, F. H. et al. As tecnologias da informação e o ensino de matemática na escola pública: práticas presentes e perspectivas futuras. **Colloquium Exactarum**, v. 7, n. 4, p. 01-10, 2015. Disponível em: <http://journal.unoeste.br/index.php/ce/article/view/1458>. Acesso em: 31 jul. 2018.

OLIVEIRA, H.; DOMINGOS, A. Software no ensino e aprendizagem da matemática: algumas ideias para discussão. *In*: ENCONTRO DE INVESTIGAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2008, Vieira de Leiria/Portugal. **Arquivo de Atas Tecnologias na Educação Matemática**, 2008. p. 268-275. Disponível em: [http://spiem.pt/DOCS/ATAS\\_ENCONTROS/atas\\_EIEM\\_2008.pdf](http://spiem.pt/DOCS/ATAS_ENCONTROS/atas_EIEM_2008.pdf). Acesso em: 31 jul. 2018.

CETIC.BR - COMITÊ GESTOR DA INTERNET NO BRASIL. **Pesquisa sobre o uso das tecnologias de informação e comunicação nos domicílios brasileiros: TIC domicílios 2016**. São Paulo: Comitê Gestor da Internet no Brasil, 2017. Disponível em: [https://cetic.br/media/docs/publicacoes/2/TIC\\_DOM\\_2016\\_LivroEletronico.pdf](https://cetic.br/media/docs/publicacoes/2/TIC_DOM_2016_LivroEletronico.pdf). Acesso em: 26 jul. 2018.

PESSOA, C. A. S.; BORBA, R. E. S. R. O desenvolvimento do raciocínio combinatório na escolarização básica. **Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana (EM TEIA)**, v. 1, n. 1, 2010. Disponível em: <https://periodicos.ufpe.br/revistas/emteia/article/view/2182>. Acesso em: 20 jul. 2018.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas**. Rio de Janeiro: Interciência, 2006.

RAMOS, I. J.; AMARAL, L. H. Relações e interações dos professores de ciências e matemática com as tecnologias. **HOLOS**, v. 4, p. 226-241, 2012. Disponível em: <http://www2.ifrn.edu.br/ojs/index.php/HOLOS/article/view/945>. Acesso em: 31 jul. 2018.

REATEGUI, E.; BOFF, E.; FINCO, M. D. Proposta de Diretrizes para Avaliação de Objetos de Aprendizagem Considerando Aspectos Pedagógicos e Técnicos. **Revista Novas Tecnologias na Educação (RENOTE)**, Rio Grande do Sul, v. 8, n. 3, 2010. Disponível em: <https://seer.ufrgs.br/renote/article/view/18066>. Acesso em: 20 nov. 2018.

ROCHA, C. A.; BORBA, R. E. S. R. Reflexões de docentes sobre o ensino de combinatória: transitando entre conhecimento pedagógico e do conteúdo. **Anais do 1º Jornadas Virtuales em Ditáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria**. Granada: 2013. Disponível em: [https://www.researchgate.net/publication/281781064\\_Reflexoes\\_de\\_docentes\\_sobre\\_o\\_ensino\\_de\\_combinatoria\\_transitando\\_entre\\_conhecimento\\_pedagogico\\_e\\_do\\_conteudo](https://www.researchgate.net/publication/281781064_Reflexoes_de_docentes_sobre_o_ensino_de_combinatoria_transitando_entre_conhecimento_pedagogico_e_do_conteudo). Acesso em: 12 jul. 2018.

ROMANATTO, M. C. Resolução de problemas nas aulas de matemática. **Revista Eletrônica de Educação**, São Carlos/SP, v. 6, n. 1, p. 299-311, 2012. Disponível em: <http://www.reveduc.ufscar.br/index.php/reveduc/article/view/413>. Acesso em: 24 jul. 2018.

SABBATINI, M. Reflexões críticas sobre o conceito de objeto de Aprendizagem aplicado ao ensino de ciências e Matemática. **Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana (EM TEIA)**, Recife, v. 3, n. 3, 2012. Disponível em: <https://periodicos.ufpe.br/revistas/emteia/article/view/2189>. Acesso em: 14 jul. 2018.

SABO, R. D. **O ensino dos conceitos de análise combinatória e o livro didático**: discurso de professores do Ensino Médio. 2008. Disponível em: [http://www2.rc.unesp.br/eventos/matematica/ebrapem2008/upload/257-1-A-GT1\\_sabo\\_ta.pdf](http://www2.rc.unesp.br/eventos/matematica/ebrapem2008/upload/257-1-A-GT1_sabo_ta.pdf). Acesso em: 10 jul. 2018.

SANT'ANA, C. C.; AMARAL, R. B.; BORBA, M. C. O uso de softwares na prática profissional do professor de matemática. **Ciência & Educação**, v. 18, n. 3, p. 527-542, 2012. Disponível em: <http://www.scielo.br/pdf/ciedu/v18n3/03.pdf>. Acesso em: 31 jul. 2018.

SANTOS, N.; SANTOS, R. S. Construção de objetos de aprendizagem. *In*: TAROUCO, L. M. R. et al. **Objetos de aprendizagem**: teoria e prática. Porto Alegre: Evangraf, 2014. p. 76-101. Disponível em: <https://lume.ufrgs.br/handle/10183/102993>. Acesso em: 19 nov. 2018.

SANTOS-WAGNER, V. M. P.; BORTOLOTTI, R. D. M.; FERREIRA, J. R. Análise das resoluções corretas e erradas de combinatória de futuros professores de Matemática. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 15, n. 3, p. 606-629, 2013. Disponível em: <https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/16997>. Acesso em: 10 jul. 2018.

SILVA, A. P. **Ensino-aprendizagem de análise combinatória através da resolução de problemas**: um olhar para a sala de aula. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Centro de Ciências e Tecnologia, Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande, 2013. Disponível em: [http://pos-graduacao.uepb.edu.br/ppgecm/download/disserta%C3%A7%C3%B5es/mestrado\\_profissional/2013/Adeilson%20Pereira%20da%20Silva.pdf](http://pos-graduacao.uepb.edu.br/ppgecm/download/disserta%C3%A7%C3%B5es/mestrado_profissional/2013/Adeilson%20Pereira%20da%20Silva.pdf). Acesso em: 23 jul. 2018.

SILVA, E. L.; CAFÉ, L.; CATAPAN, A. H. Os objetos educacionais, os metadados e os repositórios na sociedade da informação. **Ciência da Informação**, Brasília/DF, v. 39 n. 3, p. 93-104, 2010. Disponível em: <http://revista.ibict.br/ciinf/article/view/1269/1447>. Acesso em: 21 nov. 2018.

SILVA, J. T. **Metodologia de apoio ao processo de aprendizagem via autoria de objetos de aprendizagem por alunos**. Tese (Doutorado em Informática na Educação) – Centro Interdisciplinar de Novas Tecnologias, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2008. Disponível em: <https://lume.ufrgs.br/handle/10183/14665>. Acesso em: 27 nov. 2018.

SILVA, M. C.; PESSOA, C. A. S. A combinatória: estado da arte em anais de eventos científicos nacionais e internacionais ocorridos no Brasil de 2009 a 2013. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 17, n. 4, p. 670-693, 2015. Disponível em: <https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/20665>. Acesso em: 13 jul. 2018.

SILVEIRA, M. S.; CARNEIRO, M. L. F. Diretrizes para a Avaliação da Usabilidade de Objetos de Aprendizagem. *In*: XXIV SIMPÓSIO BRASILEIRO DE INFORMÁTICA NA EDUCAÇÃO, 2012, Rio de Janeiro. **Anais do SBIE 2012**. Rio de Janeiro: UFRJ/UNIRIO,

2012. Disponível em: <http://www.br-ie.org/pub/index.php/sbie/article/view/1713>. Acesso em: 20 nov. 2018.

SOUZA, A. C. P. **Análise combinatória no ensino médio apoiada na metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação de matemática através da resolução de problemas**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática), Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro/SP, 2010. Disponível em: [https://repositorio.unesp.br/bitstream/handle/11449/91047/souza\\_acp\\_me\\_rcla.pdf?sequence=1](https://repositorio.unesp.br/bitstream/handle/11449/91047/souza_acp_me_rcla.pdf?sequence=1). Acesso em: 23 jul. 2018.

SOUZA, A. S. et al. Alternativas para Construção de Objetos de Aprendizagem: um estudo de caso voltado à definição de uma arquitetura para adaptação de cursos na modalidade de Educação a Distância. **RCT – Revista de Ciência e Tecnologia**, v. 1, n. 1, 2015. Disponível em: <https://revista.ufr.br/rct/article/view/2498>. Acesso em: 27 nov. 2018.

SOUZA, M. F. C. et al. Arquitetura das escadas: um objeto de aprendizagem para exploração dos conceitos de semelhança de triângulos, proporcionalidade e Teorema de Tales. *In*: PRATA, C. L. (org.); NASCIMENTO, A. C. A. A. (org.). **Objetos de aprendizagem: uma proposta de recurso pedagógico**. Brasília: MEC, SEED, 2007. p. 59-69. Disponível em: <http://rived.mec.gov.br/artigos/livro.pdf>. Acesso em: 27 jun. 2018.

TAROUCO, L. M. R.; FABRE, M. J. M.; TAMUSIUNAS, F. R. Reusabilidade de objetos educacionais. **Revista Novas Tecnologias na Educação (RENOTE)**, Rio Grande do Sul, v. 1, n. 1, 2003. Disponível em: <https://seer.ufrgs.br/renote/article/view/13628>. Acesso em: 20 nov. 2018.

TAROUCO, L. M. R. et al. Formação de professores para produção e uso de objetos de aprendizagem. **Revista Novas Tecnologias na Educação (RENOTE)**, Rio Grande do Sul, v. 4, n. 1, 2006. Disponível em: <https://seer.ufrgs.br/renote/article/view/13886>. Acesso em: 27 nov. 2018.

WILEY, D. A. **Learning object design and sequencing theory**. Dissertação (Doutorado em Filosofia) - Department of Instructional Psychology and Technology, faculty of Brigham Young University, 2000. Disponível em: <https://opencontent.org/docs/dissertation.pdf>. Acesso em: 20 nov. 2018.

W3C – WORLD WIDE WEB CONSORTIUM. **Authoring Tools, Social Media**, 2016. Disponível em: <https://www.w3.org/standards/agents/authoring>. Acesso em: 19 nov. 2018.

YAHATA, E. A. **O desenvolvimento de habilidades metacognitivas na resolução de problemas de análise combinatória**. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2012. Disponível em: <http://www.pg.im.ufrj.br/pemat/43%20Edson%20Yahata.pdf>. Acesso em: 23 jul. 2018.

## APÊNDICE A – Questionário para identificação do grupo de pesquisa

Nome:

Você já ministrou aulas de análise combinatória? Quanto tempo? Em quais níveis de ensino? Você pode elencar os momentos em que os alunos tinham mais dificuldade? Você pode elencar a parte que você tinha mais dificuldade?

Você já utilizou algum recurso tecnológico em suas aulas de matemática?

Na sua graduação, você estudou sobre como usar algum recurso tecnológico na sala de aula ou viu algum professor utilizando?

Você fez algum curso de capacitação para aprender a utilizar algum recurso tecnológico na sala de aula ou foi oferecido pelo sistema de ensino?

Você acha que o uso das tecnologias na sala de aula de matemática pode ajudar o professor e alunos? De que maneira?

Você já ouviu falar em objetos de aprendizagem digitais?

Você já utilizou algum objeto de aprendizagem digital em suas aulas?

Já ouviu falar sobre o Banco Internacional de Objetos Educacionais?

Você há ouviu falar sobre o RIVED?

Você já pesquisou na Internet ou em outro meio algum recurso tecnológico para usar em suas aulas?

Você tem vontade de utilizar algum recurso tecnológico em suas aulas?

## APÊNDICE B – Questionário para traçar perfil do grupo pesquisado

Nome:

Idade:

Formação profissional: Graduação, Especialização, Mestrado, Doutorado

Cursos de capacitação:

Vínculos empregatícios: Particular, Município, Estado

Nível de ensino: Fundamental, Médio, Superior

Tempo de docência em cada nível de ensino

### APÊNDICE C – Formulários para avaliação do CombEsq

#### Conteúdo matemático

Itens	Discorda plenamente	Discorda	Nem concorda, nem discorda	Concorda	Concorda plenamente
Pontuação	1	2	3	4	5
Demonstra claramente os conceitos matemáticos esperados?					
Seu conteúdo é relevante para abordar os conceitos matemáticos esperados?					
Fornecer informações precisas?					
Resume bem os conceitos matemáticos esperados?					

#### Usabilidade

Itens	Discorda plenamente	Discorda	Nem concorda, nem discorda	Concorda	Concorda plenamente
Pontuação	1	2	3	4	5
Pode ser facilmente disponibilizado em formatos diferenciados (tais como Web, Pendrive, CD, etc)?					
O objeto explicita os softwares ou recursos necessários para o seu correto funcionamento?					
O objeto é facilmente instalável, dispensando requisitos complexos para sua execução?					
Pode ser executado sem a necessidade de conexão com a Internet?					
Pode ser executado a partir da Web?					
Há compatibilidade com outras plataformas, como por exemplo, celulares e tablets?					

#### Interface e recursos interativos do CombEsq

Itens	Discorda plenamente	Discorda	Nem concorda, nem discorda	Concorda	Concorda plenamente
Pontuação	1	2	3	4	5
O CombEsq é claro e conciso?					
É fácil de usar?					
É motivador – instiga o interesse em ser manipulado?					
Tem um bom apelo visual?					
As imagens são empregadas para ilustrar conceitos e explicações?					
O número de imagens apresentadas em cada página é adequado?					
Há contraste suficiente entre fontes e fundo de tela, facilitando a leitura dos textos?					



As fontes utilizadas apresentam tamanho adequado?					
Há consistência visual na apresentação de informações (títulos, formatação/disposição dos textos e recursos gráficos)?					
A todo o momento é possível saber em que ponto nos encontramos no objeto de aprendizagem, através de seus rótulos e títulos?					
Os links para acessar outras páginas e funções do objeto de aprendizagem são facilmente reconhecíveis?					
Os recursos interativos empregados vão além da seleção links e botões para avançar ou recuar na apresentação dos conteúdos?					
Os recursos interativos exploram a possibilidade do usuário alterar configurações do sistema de modo a obter respostas diferentes de acordo com suas ações?					
O objeto de aprendizagem emprega recursos gráficos que melhoram o aspecto estético da interface, tornando mais agradável sua utilização?					
O usuário tem liberdade de navegação?					
O CombEsq fornece diferentes níveis de dificuldade?					
O usuário pode retomar ações já executadas?					
A linguagem empregada está de acordo com o público alvo?					

## Prover auxílio aos usuários

Itens	Discorda plenamente	Discorda	Nem concorda, nem discorda	Concorda	Concorda plenamente
Pontuação	1	2	3	4	5
Fornecer feedback para o usuário?					
O CombEsq fornece ajuda para navegação entre as telas do objeto?					
O CombEsq apresenta material complementar sobre o seu uso?					
Possui claras instruções de uso?					
Apresenta mensagens de erro construtivas, que permitam que o usuário aprenda a partir das mesmas?					
Apresenta mensagens de erro construtivas, que permitam que o usuário refaça suas escolhas, não interrompendo o uso do objeto?					

Provê indicações claras de o que o usuário deve fazer para prosseguir para próximas etapas de uso do objeto?					
--	--	--	--	--	--

## Foco pedagógico

Itens	Discorda plenamente	Discorda	Nem concorda, nem discorda	Concorda	Concorda plenamente
Pontuação	1	2	3	4	5
O CombEsq apresenta uma contextualização inicial, descrevendo o tema/conteúdo tratado no objeto?					
O CombEsq apresenta o objetivo pedagógico relacionado ao uso do objeto?					
O CombEsq apresenta como o objeto poderia ser explorado pedagogicamente?					
O CombEsq disponibiliza algum contato para sugestões / dúvidas?					
É disponibilizado material complementar para orientação do uso do CombEsq?					
Há alguma apresentação sobre o CombEsq?					

## APÊNDICE D – Roteiro de entrevista sobre avaliação do CombEsq

O que você achou da abordagem da análise combinatória por meio do CombEsq? (Tanto conceitual como através dos recursos - questionamentos).

Você acredita que as informações e explicações das atividades são relevantes, considerando o conteúdo abordado?

O que você achou das funcionalidades do CombEsq? (Conceitos, Atividades, Simulado).

O que você achou das questões apresentadas na funcionalidade Atividades? (Questões que desafiam o aluno, contextuais, situações reais?).

O que você achou das questões apresentadas na funcionalidade Simulado?

O que você achou das dicas que são apresentadas na funcionalidade Atividades?

O objeto de aprendizagem atendeu as suas expectativas? Por quê?

Conhecendo o CombEsq, você acha que ele pode auxiliar o professor no ensino de análise combinatória? Por quê?

Conhecendo o CombEsq, você acha que ele pode auxiliar o aluno no estudo de análise combinatória? Por quê?

Como conversados inicialmente, você acha o CombEsq soluciona ou ajuda a amenizar os principais problemas no estudo de análise combinatória: interpretação do problema e definição dos agrupamentos? Quais recursos do CombEsq ajuda nisso?

Em sua opinião, qual o nível de conhecimento requerido dos alunos para trabalhar com o CombEsq? Especificar se as dicas estão razoáveis? A linguagem?

O CombEsq desafia as habilidades do estudante? De que maneira?

Você utilizaria o CombEsq em suas aulas? Por quais razões? Indicaria a alguém? De que maneira?

Qual seria nível de envolvimento dos alunos nas atividades propostas? Você acredita que eles ficariam entusiasmados? Seria uma experiência que agregaria valor ao processo de ensino-aprendizagem do conteúdo matemático abordado?

O que você mais gostou no CombEsq?

O que você acha que os alunos iam gostar mais no CombEsq?

Você acredita que a realização de atividades com a utilização destes objetos pode promover um melhor entendimento, por parte dos alunos, da Matemática envolvida?

As orientações técnicas disponíveis no CombEsq são suficientes para utilizar o CombEsq de forma satisfatória? Você acha necessário ter essas orientações? O que você achou dessas orientações? Acrescentaria ou mudaria alguma coisa?

O que você achou das orientações pedagógicas presentes no CombEsq? São factíveis? Você acha necessário o CombEsq ter essas orientações? Você seguiria essas orientações ou faria de outra maneira? Como você faria? Mesmo não seguindo estritamente as orientações apresentadas, elas auxiliariam na sua definição de abordar a ferramenta? O Tempo definido foi interessante?

Você acha que o CombEsq acrescenta algo na prática docente que sem o CombEsq ficaria difícil ou impossível de executar? Traz algo novo que o ensino apenas com giz e quadro não tem como abordar? Por exemplo, a parte de experimentação?

Você acha que a aprendizagem dos alunos de uma aula mediada com o CombEsq seria melhor do que com uma abordagem tradicional?

Você acha que o CombEsq incentiva o trabalho de análise combinatória por parte do professor?

O que de novo o CombEsq pode acrescentar na prática de aula do professor?

O que você acha que poderia melhorar no CombEsq? Ou o que você mudaria?

Você quer falar algo mais sobre essa experiência com o CombEsq? Algo a acrescentar que não foi questionado?

## APÊNDICE E – Orientações pedagógicas inseridas no CombEsq

### 1 Introdução

Como os principais problemas de aprendizagem dos alunos em análise combinatória estão relacionados à identificação do conceito, à interpretação do problema e à definição do tipo de agrupamento inerente ao problema, o CombEsq não faz separação dos conceitos, isto é, não é possível o estudante selecionar o conceito e, em seguida, estudar os problemas inerentes àquele conceito. Na verdade, os problemas são aleatórios, podendo estar relacionados aos conceitos de princípio fundamental da contagem, arranjos, permutações e combinações. Entendemos que isso torna-se necessário para que o estudante desenvolva a capacidade de interpretar o problema, tendo em vista que tanto na sociedade – na interpretação de um fenômeno – ou em provas de concurso ou vestibulares, o estudante não vai ter disponível o conceito inerente ao problema. Como observado na orientação técnica, o CombEsq é baseado na esquematização do problema de modo que o estudante vai ter acesso a dicas em forma de questionamentos que aproximam o estudante da solução do problema. Como tais questionamentos buscam suscitar no estudante a compreensão dos conceitos envolvidos, é importante que o professor já tenha discutido em sala de aula os conceitos básicos de análise combinatória, a saber: Princípio Fundamental da Contagem, Arranjos, Permutações e Combinações.

Conforme observamos na orientação técnica, são 18 problemas que foram esquematizados. Para fins didáticos e de planejamento docente, apresentamos no item 10 destas orientações a listagem dos problemas de acordo com os conceitos que podem ser trabalhados de modo a facilitar o trabalho docente. Note que essa caracterização serve apenas de parâmetro tendo em vista que muitos problemas podem ser resolvidos e trabalhados vários conceitos de análise combinatória.

Dito isso, elencamos abaixo algumas sugestões pedagógicas que podem ser realizadas com o auxílio do CombEsq.

### 2 Objetivos

2.1 Geral: Interpretar problemas de análise combinatória a partir da resolução de problemas

2.2 Específicos:

- Identificar os conceitos de análise combinatória a partir da resolução de problemas;

- Desenvolver habilidades básicas para resolução de problemas de análise combinatória;
- Identificar os tipos de agrupamentos a partir de resolução de problemas de análise combinatória.

### 3 Pré-requisitos

Para realização das atividades, é importante que os estudantes tenham conhecimento de fatorial e que o professor tenha discutido com os estudantes, mesmo que de forma superficial, os conceitos de princípio fundamental da contagem, arranjos, permutações e combinações.

### 4 Tempo previsto para a atividade

As atividades podem ser realizadas em, no mínimo, 3 horas de aula.

### 5 Na sala de aula

Abordados os conteúdos básicos de análise combinatória e iniciando uma atividade com o CombEsq, é importante que na sala de aula o professor apresente o CombEsq aos alunos, destacando as suas principais funcionalidades conforme as orientações técnicas. Nesse momento, o professor pode, inclusive, simular algumas ações interativas na resolução de algum problema para que o estudante perceba o funcionamento geral do CombEsq. Isso torna-se importante para que no momento em que os alunos forem interagir com o CombEsq no laboratório de informática, eles tenham autonomia de trabalhar sozinhos ou em grupo sem o auxílio constante do professor. O professor, nesse caso, interfere apenas durante o surgimento de alguma dúvida por parte dos alunos.

Para que a familiarização dos estudantes aumente em relação ao CombEsq, o professor pode simular a resolução de algum problema a partir do CombEsq e ir questionando aos alunos o que é apresentado pelo CombEsq. Dessa forma, por exemplo, ao surgir um questionamento do CombEsq e os alunos não entenderem a interação realizada, o professor pode exemplificar o que está sendo apresentado de outra forma, como por exemplo, utilizando o quadro negro. Tais interações servem de esquema a ser seguido pelo professor bem como vai tornando os estudantes confortáveis sobre o funcionamento do CombEsq. Note que até o momento o professor que está interagindo diretamente com o CombEsq. Para que os estudantes possam

interagir diretamente com o CombEsq, é importante que a escola tenha um laboratório de informática. Abaixo, o material necessário para esse momento na sala de aula:

### 5.1 Material necessário na sala de aula

- Para o aluno: Rascunho e lápis para efetuar os cálculos propostos pela atividade;
- Para o professor: Um quadro, para que o professor possa esclarecer as dúvidas caso elas persistam, um data-show para dúvidas principalmente relacionadas às interações do CombEsq, um notebook com o CombEsq para usar com o data-show, uma aula previamente elaborada e, caso achar conveniente, questões complementares para explorar de forma mais ampla a atividade.

Vejam, a seguir, algumas orientações pedagógicas a partir do uso do CombEsq em um laboratório de informática.

## 6 No laboratório de informática

Após a etapa realizada na sala de aula, o professor pode propor uma atividade em que os estudantes irão interagir diretamente com o CombEsq no laboratório de informática. Nesse momento, o professor poderá sugerir que a atividade seja realizada de forma individual, dupla ou em grupos. A depender do número de computadores no laboratório e da quantidade de alunos, dificilmente é possível realizar esse tipo de atividade de forma individual em um laboratório de informática. A partir da definição dos grupos, o professor poderá especificar os problemas que os alunos irão interagir, sejam todos fazendo os mesmos problemas ou diferenciando os problemas por grupo. Como durante a interação com os questionamentos apresentados pelo CombEsq ocorrem *feedbacks*, o papel do professor vai se destacar principalmente tirando dúvidas que ainda persistam caso os alunos mesmo com os *feedbacks* não compreendam o problema. A seguir, destacamos o material necessário para essa atividade no laboratório de informática.

### 6.1 Material necessário no laboratório de informática

- Para o aluno: Rascunho e lápis para efetuar os cálculos propostos pela atividade;



- Para o professor: Um quadro, para que o professor possa esclarecer as dúvidas caso elas persistam, um data-show para dúvidas principalmente relacionadas às interações do CombEsq, uma aula previamente elaborada e, caso achar conveniente, questões complementares para explorar de forma mais ampla a atividade;
- Organização da sala: Os alunos poderão ser organizados de forma individual, dupla ou grupo a depender do professor e da quantidade de computadores no laboratório de informática;
- Requerimentos técnicos: Os computadores deverão estar com o CombEsq instalado, navegador de Internet, Java e plugin flash.

## 7 Durante as atividades

Durante a utilização do CombEsq, é importante que os professores priorizem a mediação das ações com os alunos ao invés de expor as soluções. Isto é, as situações de aprendizagem serão derivadas da interação dos alunos com o CombEsq e a partir das discussões levantadas os professores interferem de modo a suprir dúvidas dos estudantes.

## 8 Após a atividade

Após esse momento de envolvimento dos estudantes com o CombEsq, o professor pode solicitar outras atividades, como a interação com os demais problemas do CombEsq, que pode ser feita sem a presença do professor. Tal fato é possível tendo em vista os *feedbacks* que são realizados pela ferramenta durante a interação do estudante com os questionamentos apresentados. Isso pode ser feito em outros momentos no laboratório de informática bem como a partir de computador pessoal caso o estudante possua. Assim, além de possibilitar um estudo mediado, isto é, a partir da interação alunos-professor-objeto, o CombEsq favorece também a um estudo individualizado.

## 9 Avaliação

Durante os três momentos citados como sugestões – na sala de aula, no laboratório de informática (com auxílio do professor) e de forma individualizada, o professor pode solicitar, como mecanismo de avaliação (além da observação realizada durante as atividades), a elaboração de relatórios, nos quais os estudantes relatariam o que estavam aprendendo, as

dúvidas, dificuldades, o entendimento dos conceitos e os aspectos observados no CombEsq. Esse momento poderia ser socializado a partir de uma apresentação ou apenas a entrega dos relatórios escritos.

#### 10 Listagem de problemas por conceito

Problema	Conceito
01	Princípio Fundamental da Contagem
02	Princípio Fundamental da Contagem
03	Arranjo
04	Arranjo
05	Combinação
06	Combinação
07	Princípio Fundamental da Contagem
08	Princípio Fundamental da Contagem
09	Arranjo
10	Arranjo
11	Combinação
12	Combinação
13	Princípio Fundamental da Contagem
14	Princípio Fundamental da Contagem
15	Arranjo
16	Arranjo
17	Combinação
18	Combinação